

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Rodrigo Pereira Pinheiro

Aplicações do Geoplano no Ensino Básico

Juiz de Fora

2014

Rodrigo Pereira Pinheiro

Aplicações do Geoplano no Ensino Básico

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: José Barbosa Gomes

Juiz de Fora

2014

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Pinheiro, Rodrigo Pereira (do autor).

Aplicações do Geoplano no Ensino Básico / Rodrigo Pereira Pinheiro. –
2014.

27 f. : il.

Orientador: José Barbosa Gomes.

Dissertação (PROFMAT) – Universidade Federal de Juiz de Fora,
Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT - Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional, 2014.

1. Geoplano. 2.Fórmula de Pick. 3. I. Gomes, José Barbosa, orient.
II. Título.

Rodrigo Pereira Pinheiro

Aplicações do Geoplano no Ensino Básico

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 27 de fevereiro de 2014

Prof. Dr. José Barbosa Gomes - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Sérgio Guilherme de Assis
Vasconcelos
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Kennedy Martins Pedroso
Universidade Federal de Viçosa

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela lucidez tão necessária para a realização de mais uma etapa de conhecimento em minha vida. À CAPES pelo apoio financeiro e pela maravilhosa oportunidade de cursar um mestrado numa grande instituição federal. Agradeço à minha irmã Roberta por toda ajuda oferecida. À minha esposa por ser a maior incentivadora da minha capacidade e, como grande parceira, contribuir com imenso esforço na administração de nossa casa e cuidados com nossa filha, permitindo-me ter o tempo como aliado, sem ela não seria possível. Em especial agradeço à minha filha Alice de apenas 3 anos, pequena na idade e gigante nas coisas boas que me faz, fortalece minha vontade de crescer e aprender mais e mais.

RESUMO

Na matemática, quando se consegue associar o concreto com o abstrato, colhem-se muitos frutos. Dada as dificuldades encontradas para ensinar Geometria Plana no Ensino Básico, o presente estudo tem como objetivo aplicar o Geoplano na tentativa de melhorar a aprendizagem dos alunos bem como aumentar o interesse dos mesmos no assunto. O empenho em estudar melhor este material surgiu através de um minicurso realizado na cidade de Juiz de Fora no início de 2013, no qual percebi nesse material uma grande oportunidade de trabalhar os diversos conceitos de geometria bem como resolver problemas de baixa e grande complexidade. Nesse material, nós encontraremos a fórmula de Pick, que é uma alternativa para o cálculo de áreas de diversos polígonos simples. Foram feitas aplicações nos 7º, 8º e 9º anos do Ensino Fundamental na Escola Estadual Francisco Manuel em Descoberto, Minas Gerais, onde um dos pontos mais marcantes foi a interatividade dos alunos com o material.

Palavras-chave: Geoplano. Fórmula de Pick.

ABSTRACT

In mathematics, when you can associate the concrete with the abstract, men gather many fruits. Given the difficulties encountered in teaching plane geometry in formal education, this study aims to apply the Geoplano in an attempt to improve student learning and increase interest in the same subject. The commitment to better study this material came through a short course held in the city of Juiz de Fora in early 2013, in which I realized that material a great opportunity to work the various concepts of geometry and how to solve problems of low and high complexity. In this material, we find the formula for Pick, which is an alternative to the calculation of various areas of simple polygons. Applications were made on the 7th, 8th and 9th years of elementary school in the State School Discovered in Manuel Francisco, Minas Gerais, where one of the most striking points was the interaction of students with the material.

Key-words: Geoplan. Pick's formula.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	7
2	Breve Histórico	9
2.1	Atividades Propostas Inicialmente.	10
2.1.1	7º ano	10
2.1.2	8º ano	10
2.1.3	9º ano	10
3	Fundamentos Matemáticos	11
3.1	Falando um pouco de polígonos	11
3.2	Teorema de Pick	12
3.2.1	Dedução da fórmula de Pick	14
4	Descrevendo a aplicação	19
4.1	Atividade no 7º ano:	19
4.2	Atividade no 8º ano:	20
4.3	Atividades no 9º ano:	23
5	Demais sugestões de atividades	25
6	Conclusão	26
	REFERÊNCIAS	27

1 INTRODUÇÃO

Ao longo da carreira de professor de Matemática, percebemos que há uma grande dificuldade por parte dos alunos em aprender Geometria. Isso ocorre com os estudantes do Ensino Fundamental e também do Ensino Médio. A partir desse fato, fomos buscar alternativas na tentativa de melhorar a aprendizagem e facilitar o ensino de geometria.

Apesar de pesquisas divulgarem aumento do número de pessoas alfabetizadas no país e expansão do sistema educacional em todos os níveis, o Brasil ainda precisa melhorar em alguns aspectos, no que se refere à educação. Sua qualidade de ensino e a eficiência do ensino precisam ser alvo de estudo e dedicação dos dirigentes de sistemas, de estabelecimentos e dos professores, fazendo-se uso eficiente de recursos públicos e criando-se mecanismos que garantam a qualidade do ensino por meio de ações práticas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática [4] têm como finalidade fornecer elementos para ampliar o debate nacional sobre o ensino dessa área do conhecimento, socializar informações e resultados de pesquisas, levando-as ao conjunto dos professores brasileiros. Visam à construção de um referencial que oriente a prática escolar de forma a contribuir para que toda criança e jovem brasileiros tenham acesso a um conhecimento matemático que lhes possibilite de fato sua inserção, como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura. Recursos didáticos como livros, vídeos, televisão, rádio, calculadoras, computadores, jogos e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão.

Criando um ambiente de manipulação e investigação, o aluno encontra condições para produzir o conhecimento, experimentar combinações, expressar-se livremente, desenvolver a criatividade, resolver problemas e ampliar sua concepção de mundo [3]. Podemos observar que a utilização do Geoplano cria esse ambiente para os alunos, o qual se torna adequado e atrativo estimulando o interesse e a participação dos mesmos. Isso, pois o Geoplano é um recurso didático-pedagógico dinâmico e manipulativo, contribuindo desse modo para a exploração dos problemas geométricos e algébricos, uma vez que oferece apoio à representação mental e ajudando com a abstração.

O principal fundamento matemático aplicado aqui é o Teorema de Pick, um resultado de fácil compreensão que explora o cálculo de áreas de polígonos simples com vértices em uma rede de pontos igualmente espaçados e distribuídos ao longo do plano cartesiano. O resultado de Pick relaciona apenas o número de pontos localizados na borda do polígono com o número de pontos em seu interior.

Este trabalho foi desenvolvido na Escola Estadual Francisco Manuel, na cidade de Descoberto, Minas Gerais durante o Curso de Mestrado Profissional em Educação Matemática, oferecido pela Universidade Federal de Juiz de Fora. O trabalho tem como

objetivo verificar se o uso do Geoplano contribui para uma melhor aprendizagem de Geometria por parte dos alunos. Trabalhei esse material em sala convencional e também em sala dedicada à matemática denominada sala temática.

2 Breve Histórico

Geoplano é um tabuleiro usado como recurso auxiliar no ensino das figuras e formas geométricas. Existem vários tipos de geoplanos, os aqui utilizados foram: quadriculado, treliçado e circular.

No início do ano de 2013, através da participação em um minicurso, promovido pela Secretaria Regional de Educação, na cidade de Juiz de Fora, vi no geoplano um leque de opções para o ensino de geometria nas séries finais do Ensino Fundamental, e a partir disso foram construídos por mim três geoplanos: um quadriculado, um treliçado e um circular. No entanto, destaco que minhas aulas foram voltadas principalmente à aplicação do geoplano quadriculado. As figuras de números 1, 17 e 14 servem de exemplos de geoplanos quadriculados, treliçados e circulares, respectivamente.

Os três foram construídos com espaçamento de dois centímetros, sendo que o circular teve uma pequena variação. O primeiro a ser construído foi o geoplano quadriculado. Este foi construído em uma placa de madeira MDF de cor branca, espessura 10 mm, largura 44 cm e comprimento 86 cm. Utilizei pregos 12x12, onde o primeiro número corresponde à medida de Jauge de Paris, em uma tabela para essa escala 12 corresponde a 1,8 mm (espessura do prego) e o segundo 12 corresponde às linhas de polegadas portuguesas tal que 12 correspondem a 27,6 mm (comprimento do prego). Escolhi pregos com cabeça por achar que os elásticos ficariam mais presos. Na primeira placa construída, coloquei dois ganchos igualmente espaçados das extremidades para serem encaixados no quadro onde lecionava as aulas.

Assim que levei o material para a escola os alunos me indagaram de diversas formas, entre elas, uma pergunta foi: "quantos pregos têm aí?", respondi dizendo que não sabia e perguntei se alguém conseguiria contar. Logo, dois alunos se levantaram e começou uma disputa, um queria contar todos os pregos e o outro já havia pensado na melhor resolução do problema, que obviamente era saber a quantidade de pregos que havia no comprimento e na largura e após isso multiplicar os valores. Depois dessa inicial apresentação disse aos alunos que aquele material se chamava geoplano.

O segundo a ser construído foi o circular. Na construção usei uma placa de madeira MDF de 10 mm de espessura, quadrada, medindo 30 cm por 30 cm, tracei duas diagonais com régua e depois fixei o primeiro prego no ponto de encontro entre as diagonais. Feito isso utilizei um barbante para construir diferentes circunferências concêntricas com diferença de raio igual a dois centímetros. Após isso dividi a circunferência em 24 partes iguais, cada fatia com ângulos de 15°. Essa foi a construção mais trabalhosa visto que foi necessária a utilização de compasso e muita precisão no traço das bissetrizes.

Agora é hora de fixar os pregos. Primeiro havia os pregos fixados nas interseções das retas com as circunferências, retas essas que dividiram em quatro quadrantes. Depois

as interseções das retas que são bissetrizes dos quadrantes e assim por diante. A primeira circunferência ficou com 8 pregos, a segunda com 16 pregos, a terceira com 24 pregos e sucessivamente assim, de oito em oito.

O terceiro e último a ser construído foi o trelissado: essa construção não é difícil, utilizei uma placa de madeira MDF com 10 mm de espessura, quadrada, medindo 30 cm por 30 cm. Comecei riscando pelas diagonais e de dentro pra fora fui construindo retas paralelas em ambos os lados até chegar nas pontas.

2.1 Atividades Propostas Inicialmente.

As atividades propostas no início foram:

2.1.1 7º ano

Trabalhei o geoplano quadriculado mostrando as principais figuras planas estudadas, com foco em suas definições, ressaltando o paralelismo, já que é tema de estudo nesse ano com o teorema das paralelas.

2.1.2 8º ano

Utilizei o geoplano circular para definir os elementos de uma circunferência: diâmetro, corda, área, setor e segmento circular. Empreguei também o geoplano quadriculado para construir as principais figuras planas: quadrados, retângulos e triângulos de diversas formas. Trabalhei com figuras semelhantes, estabelecendo relações entre suas áreas.

2.1.3 9º ano

Trabalhei com o geoplano quadriculado para tratar também das principais figuras planas assim como as do 8º ano e acrescentei pentágonos, hexágonos, heptágonos e octógonos. Fiz perguntas do tipo: "Essa figura tem todos os lados de mesmo tamanho?". Perguntas como essa surtiram muito efeito. Numa breve enquete com os alunos, era possível observar a turma bem dividida. Para sanar as dúvidas usei o Teorema de Pitágoras.

3 Fundamentos Matemáticos

A principal referência para esse capítulo é [1].

3.1 Falando um pouco de polígonos

Dado um polígono convexo qualquer de n lados é de fácil compreensão que ele pode ser decomposto em $n - 2$ triângulos dois a dois adjacentes e ainda sem a necessidade de acrescentar vértices. Para essa decomposição basta escolher um vértice do polígono e traçar suas $n - 3$ diagonais que ligam aos outros vértices não vizinhos.

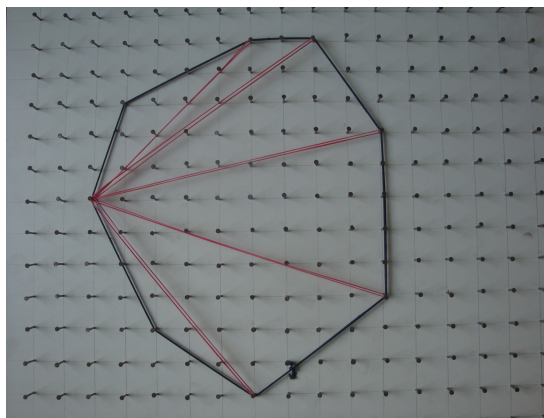


Figura 1 – Diagonais saindo de um vértice

Com a argumentação acima facilmente vemos que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo vale:

$$S_i = (n - 2) \cdot \pi$$

em que π radianos equivale ao ângulo de 180° que corresponde à soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer.

E se o polígono não for convexo?

A construção acima não seria válida caso o polígono não seja convexo, visto que ao escolher um vértice, para a decomposição em triângulos, pode acontecer de uma ou algumas diagonais ficarem parcialmente fora do polígono. Porém o resultado para a soma dos ângulos é válido.

O que acontece na verdade é que todo polígono, quando desenhado numa rede de pontos no plano pode ser decomposto em triângulos justapostos, desde que o polígono seja simples.

3.2 Teorema de Pick

No Ensino Fundamental ensinamos os cálculos de áreas de diversas figuras: triângulos, quadrados, retângulos, paralelogramos, trapézios, losangos, circunferências dentre outros. Com o intuito de buscar alternativas para o cálculo dessas áreas e de outras figuras que não se enquadram nas definições das citadas acima, encontrei uma fórmula produzida por George Alexander Pick, matemático austríaco que publicou o Teorema de Pick em 1899, nasceu em Viena no ano de 1859 e morreu em 1942.

O teorema é relativamente simples e de fácil aplicação no ensino básico. Contudo, deve ser aplicado em uma malha ou rede no plano. Uma rede é um conjunto finito ou infinito de pontos dispostos regularmente ao longo de retas horizontais e verticais, de modo que a distância de cada um deles aos pontos mais próximos na horizontal ou na vertical é igual a um.

Teorema de Pick. Se um polígono no plano cartesiano tem apenas vértices de coordenadas inteiras então sua área é dada pela fórmula:

$$A = (1/2)f + i - 1$$

em que f é o número de pontos de coordenadas inteiras no contorno do polígono e i é o número de pontos de coordenadas inteiras no interior do mesmo.

É importante ressaltar que esse resultado não é válido para figuras em que os lados se intersectam.

As figuras que atendem a essa fórmula são chamadas de polígonos simples, isto é, cuja borda é uma poligonal fechada que pode ser percorrida inteiramente sem passar duas vezes pelo mesmo vértice.

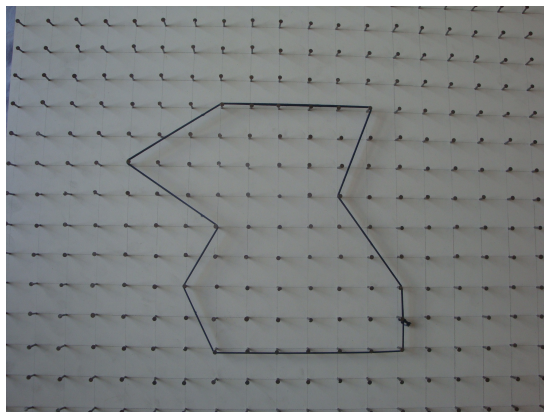


Figura 2 – Polígono Simples

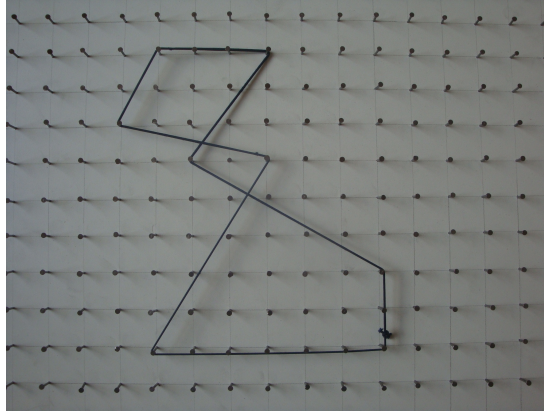


Figura 3 – Polígono não Simples

Para a demonstração da fórmula são necessários alguns conceitos.

Já sabemos o que é um polígono simples, agora devemos saber o que é um triângulo fundamental em uma rede ou malha de pontos no plano. Pois bem, um triângulo cujos vértices são pontos dessa rede chama-se fundamental quando não contém outros pontos dessa rede além dos vértices, ou seja, não pode haver pontos da malha na borda ou no interior.

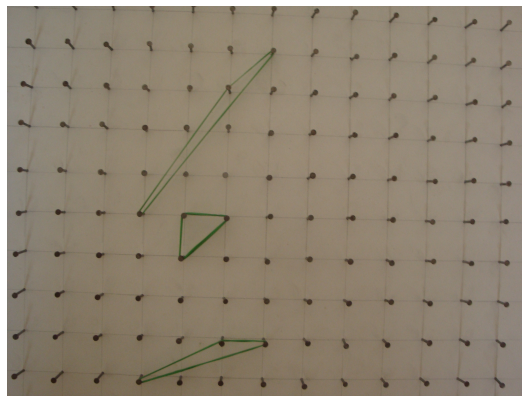


Figura 4 – Triângulos Fundamentais

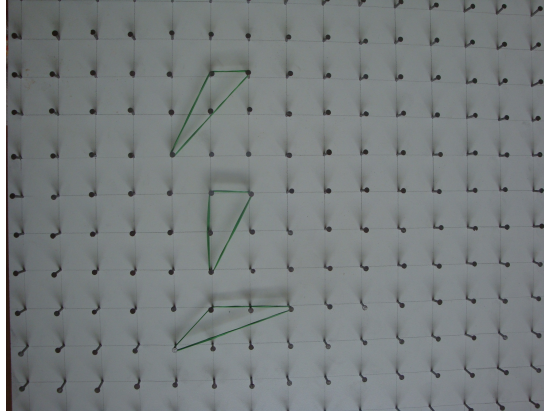


Figura 5 – Triângulos não Fundamentais

Outros resultados necessários para a demonstração são:

Lema 1. Todo polígono cujos vértices pertencem a uma rede pode ser decomposto numa reunião de triângulos fundamentais. A demonstração desse lema se encontra em [1] página 109.

Lema 2. A área de um triângulo fundamental é igual a $1/2$. A demonstração desse lema se encontra em [1] na página 105.

3.2.1 Dedução da fórmula de Pick

Seja P um polígono cujos vértices pertencem a uma rede de pontos no plano. Indiquemos por f o número de pontos situados na borda e i o número de pontos situados no interior do polígono P . Para provar que a fórmula

$$A = (1/2)f + i - 1$$

corresponde à área do polígono P , basta mostrar que o número de triângulos fundamentais da decomposição de P é igual a

$$f + 2i - 2$$

daí seguirá a fórmula.

Nota explicativa. A demonstração vem da ideia de que: caso tenha o valor da soma dos ângulos internos de todos os triângulos fundamentais, teremos o valor da quantidade de triângulos fundamentais. Feito isso, para calcular a área basta multiplicar o número de triângulos por $1/2$ (valor da área de cada triângulo fundamental).

Para o cálculo da soma de todos os ângulos internos, faremos de duas formas e depois as compararemos.

Primeiramente, suponhamos que haja certa quantidade T de triângulos fundamentais. Então, a soma de todos os ângulos internos de todos esses triângulos fundamentais vale:

$$S = T\pi$$

A segunda forma de calcular essa soma é dividida em três etapas:

1ª Etapa: somar os ângulos internos do polígono. Basta usar a fórmula

$$S_i = (n - 2) \cdot \pi$$

em que n é o número de vértices.

2ª Etapa: contar quantos pontos estão na borda do polígono, pontos esses que não são vértices e notar que eles fazem ângulo de π radianos nessa borda. Suponhamos que existam n' pontos na borda que não são vértices, daí segue que temos

$$S_2 = n'\pi$$

e ainda

$$f = n + n'$$

que é total de pontos na borda do polígono.

3ª Etapa: basta notar que cada ponto interior do polígono será vértice de um certo número de triângulos fundamentais (máximo de 8) até percorrer uma volta completa, um ângulo de 360° , ou seja, 2π radianos. Como são i pontos, teremos

$$S_3 = 2\pi \cdot i,$$

concluindo que a soma S pode ser expressa por:

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 + S_3 \\ S &= (n - 2)\pi + n'\pi + 2\pi i \\ S &= \pi(n - 2 + n' + 2i) \\ S &= \pi(n + n' + 2i - 2) \\ S &= \pi(f + 2i - 2) \end{aligned}$$

Por fim, comparando as duas teremos:

$$\begin{aligned} T\pi &= \pi(f + 2i - 2) \\ T &= f + 2i - 2 \end{aligned}$$

que é o número total de triângulos fundamentais que podem ser decompostos num polígono simples. Sendo assim vem a fórmula de Pick que determina a área de um polígono desenhado em uma rede de pontos:

$$\begin{aligned} A &= T \cdot (1/2) \\ A &= (f + 2i - 2) \cdot (1/2) \\ A &= f/2 + i - 1 \end{aligned}$$

Vejamos o passo a passo da demonstração na sequência das próximas quatro figuras, tomando como exemplo um polígono simples com oito lados.

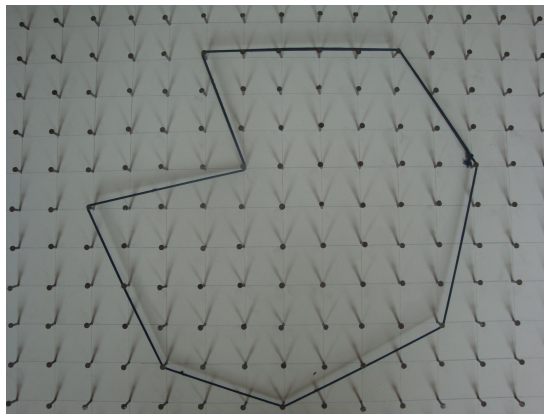


Figura 6 – Polígono de 8 vértices

Note que temos $f = 14$, $i = 53$ e de acordo com a fórmula teremos:

$$A = 14/2 + 53 - 1$$

$$A = 59 \text{ u.a. (59 unidades de área).}$$

Agora vamos ao passo a passo.

$$S_1 = (8 - 2)\pi = 6\pi$$

que é a soma dos ângulos internos do polígono.

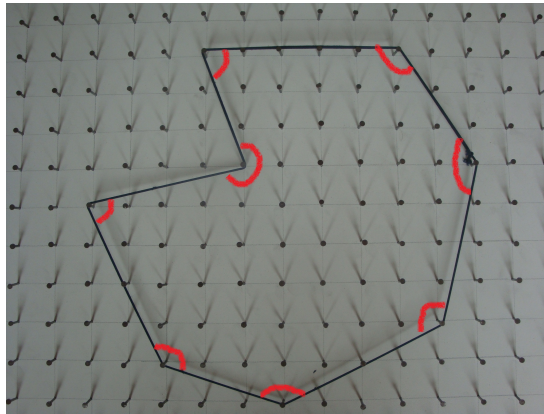


Figura 7 – Soma dos Ângulos Internos

$$S_2 = 6\pi$$

que é a soma dos ângulos rasos, dos pontos que estão na borda e não são vértices.

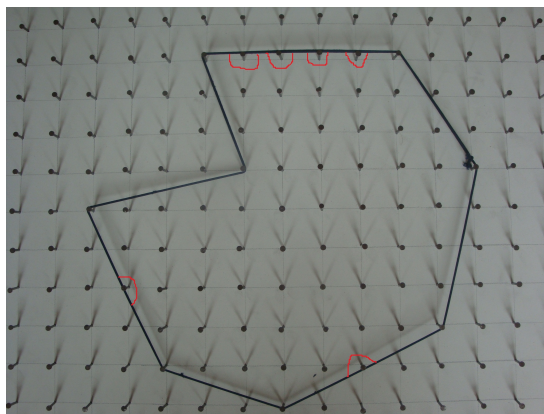


Figura 8 – Ângulos na borda que não são vértices

$$S_3 = 2\pi i$$

$$S_3 = 2\pi \cdot 53 = 106\pi$$

$$S_3 = 2\pi \cdot 53 = 106\pi$$

que é a soma dos i pontos internos ao polígono, cada um com 360° , que corresponde a 2π radianos.

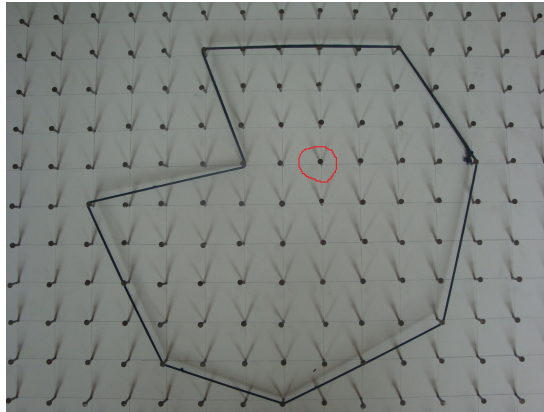


Figura 9 – Ângulo de 360°

Portanto,

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

$$S = 6\pi + 6\pi + 106\pi$$

$$S = 118\pi$$

Logo, serão 118 triângulos fundamentais, cada um com área $1/2$. Portanto,

$$A = 118 \cdot (1/2)$$

$$A = 59 \quad u.a.$$

Durante o tempo que estive trabalhando nesse artigo pensei na possibilidade de mostrar uma fórmula equivalente a essa, porém para volumes de poliedros, em algumas pesquisas feitas encontrei um artigo publicado em 1957 que pode ser visto em [5]. Nessa oportunidade Reeve obteve um resultado para 3 dimensões com a ideia genial de introduzir um rede secundária - na verdade, a rede de todos múltiplos inteiros de $(1/2, 1/2, 1/2)$ MacDonald em 1963 [2] estendeu esse resultado para dimensões maiores, porém ambos não têm a simplicidade da Fórmula de Pick.

4 Descrevendo a aplicação

Primeiramente vale lembrar que o primeiro geoplano construído por mim foi o quadriculado com o espaçamento de 2 cm x 2 cm. Notei que os alunos mais distantes do quadro tiveram dificuldades em enxergar, daí foi construído por mim um segundo com espaçamento 3 cm x 3 cm, o qual ficou ótimo.

É importante salientar que em todas as salas onde houve aplicação foi mostrada a unidade adotada.

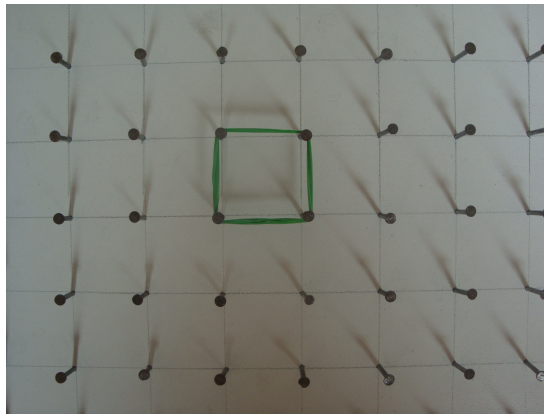


Figura 10 – Unidade de medida

4.1 Atividade no 7º ano:

A primeira atividade foi no 7º ano do Ensino Fundamental e foi sobre áreas de quadrado, retângulo, paralelogramo e triângulos, figuras básicas da geometria.

Eu informei a eles que objetivo era saber quantos desses "quadrinhos" tinham em cada figura.

A primeira figura apresentada foi o quadrado e logo eles contaram. Porém, perguntei à turma se havia outra maneira de calcular, sem efetivamente contar, e logo logo alguém dava a resposta.

Da mesma forma que a anterior, fiz com o retângulo, até os alunos descobrirem o método de cálculo.

Ao apresentar o triângulo veio logo a dúvida:

"Como calcular se um lado corta o quadrinho?"

Então refiz o triângulo, transformando-o em um triângulo retângulo, aí sim apareceu alguém e disse que era metade do retângulo. Para mostrar que a área do triângulo não muda, caso a base e a altura permaneçam inalterados, fiz a figura abaixo:

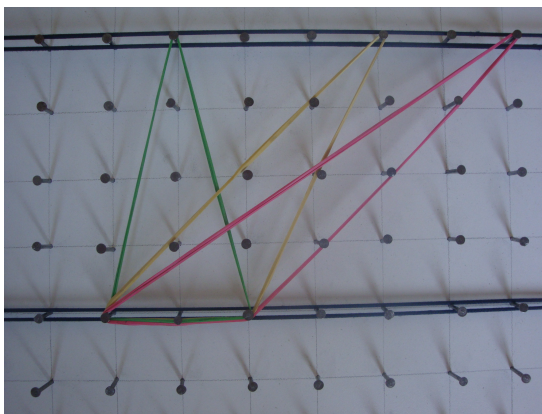


Figura 11 – Triângulos de mesma base e mesma altura

Por último, desenhei um paralelogramo e reforcei sua definição. Mostrei aos alunos que se cortássemos uma parte, teríamos um retângulo e assim a conclusão sobre a área era óbvia.

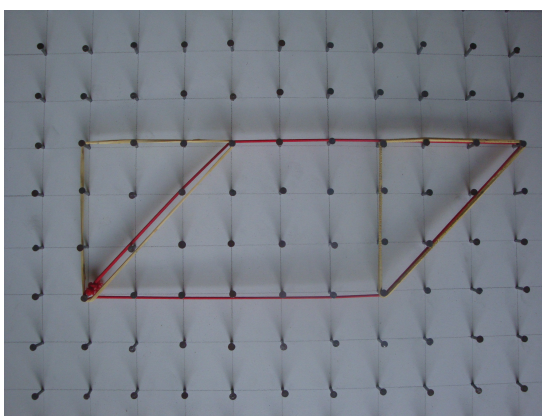


Figura 12 – Paralelogramo

4.2 Atividade no 8º ano:

Foi aplicada no 8º ano, sobre polígonos. Nessa atividade, fiz a proposta de se diferenciar polígonos côncavos de convexos e reconhecer polígonos regulares. Para a construção dos polígonos regulares foi necessária a utilização do geoplano circular como alternativa para a construção, haja visto que no quadriculado e no treliçado não foi possível a construção de todos. Os alunos perceberam logo que não era possível montar um hexágono regular.

Inicialmente, fiz dois polígonos no geoplano quadriculado, e pedi aos alunos que procurassem uma diferença marcante entre eles e o resultado foi ótimo, vários alunos notaram a concavidade existente no polígono da direita e assim expliquei o que era um polígono convexo.

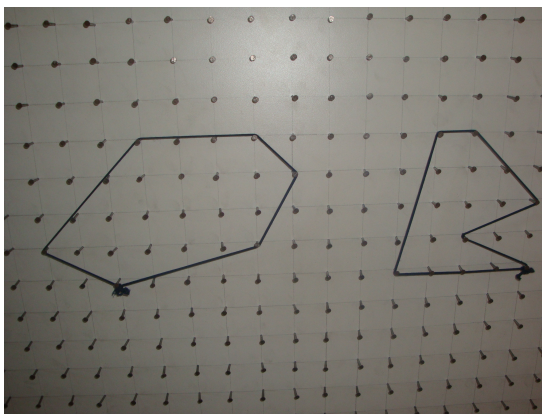


Figura 13 – Polígono Convexo e Polígono Côncavo

Como o geoplano circular é formado por circunferências concêntricas, a quantidade de pregos contida em cada uma aumenta na medida em que se afasta do outro. Nessa atividade os alunos tentaram e alguns poucos conseguiram fazer um hexágono regular. Perguntaram sobre o porquê de não conseguir fazer, por exemplo um hexágono regular numa certa circunferência. Expliquei que era aí um ponto chave, deveríamos saber a quantidade de pregos em cada circunferência e mais uma "coisinha". Logo, quando contaram os pregos um aluno disse que a quantidade de pregos estava aumentando de 8 em 8 de uma circunferência para outra. Um outro aluno indagou-me dizendo: no hexágono feito até agora, a quantidade de pregos é de 24, então a quantidade de pregos contidos na circunferência deve ser múltipla do número de lados do polígono a ser construído? Minha resposta não poderia ser outra a não ser parabéns.

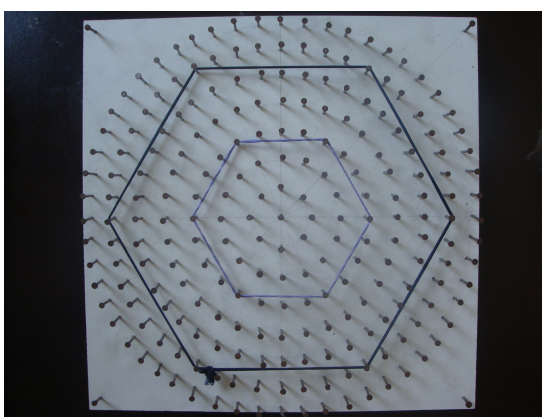


Figura 14 – Hexágonos Regulares

Daí, foi visto que era possível fazer apenas um pentágono regular no geoplano com 40 pregos na circunferência e que era possível fazer muitos octógonos regulares, tantos quantos são as circunferências.

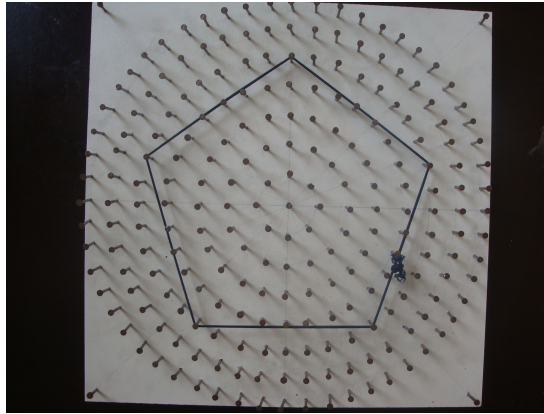


Figura 15 – Pentágono regular

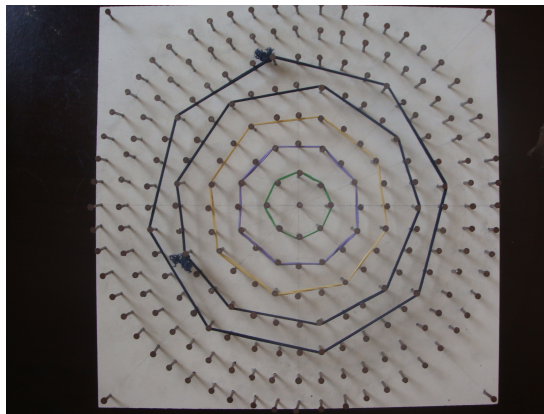


Figura 16 – Octógonos Regulares

Antes de mostrar a fórmula de Pick no 8º ano, mostrei novamente aos alunos os polígonos no geoplano quadriculado. Disse a eles que futuramente haverá fórmulas para cálculo de área dos regulares e que existe uma maneira, outra forma de calcular área de qualquer polígono simples, sabendo apenas as quantidades de pregos existentes na borda e no interior do polígono, mas antes temos que saber o que é um polígono simples. Feito isso apresentei a fórmula aos alunos.

$$A = f/2 + i - 1$$

Explicado o que é f e o que é i , fomos para os exemplos e tudo correu perfeitamente bem. Os alunos perceberam que com a fórmula de Pick podíamos abranger mais figuras e não ficar presos apenas a convexos e regulares.

4.3 Atividades no 9º ano:

No 9º ano, utilizei a fórmula de Pick para o cálculo de área de inúmeros polígonos simples como feito no 8º ano. Também fiz a demonstração do Teorema de Pitágoras utilizando o geoplano treliçado.

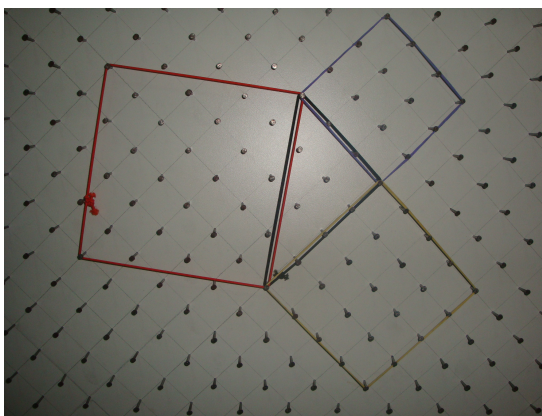


Figura 17 – Teorema de Pitágoras

De modo geral, as formas utilizadas no estudo dos números irracionais têm se limitado quase que exclusivamente ao ensino do cálculo com radicais. Do ponto de vista de sua evolução histórica, a existência e a caracterização dos números irracionais foram questões bastante complicadas. Apesar de ser antiga a convivência do homem com os números irracionais, somente há pouco mais de cem anos é que esses números foram sistematizados. O estudo desses números pode ser introduzido por meio de situações-problema que evidenciem a necessidade de outros números além dos racionais. Uma situação é a de encontrar números que tenham representação decimal infinita, e não periódica. Outra é o problema clássico de encontrar o comprimento da diagonal de um quadrado, tomando o lado como unidade, que conduz ao número $\sqrt{2}$. [4]

Ressaltada a existência de números irracionais facilmente visto num triângulo retângulo com catetos medindo 3 e 2 em seguida fiz a proposta de uma atividade que era montar quadrados cujas áreas fossem 2, 8 e 18. Perguntei aos alunos se era possível construir um quadrado de área 13 nesse geoplano treliçado, e como esperado, a resposta foi um pouco demorada, mas alguns alunos conseguiram resolver construindo triângulo retângulo com catetos 2 e 3. Depois da obtenção dessa resposta, fiz outra proposta, onde gostaria que eles construíssem um quadrado com área 12 no mesmo geoplano, e eles não conseguiram construir, como era de se esperar.

Outra atividade proposta no 9º ano foi a semelhança de triângulos, partindo do pressuposto que os alunos já tinham aprendido o Teorema de Tales. Nessa atividade, pode-se notar como o geoplano ajuda na construção dos triângulos semelhantes. Essa atividade teve um grande ganho para a turma, já que os alunos conseguiam ver com muita

tranquilidade todos os casos de semelhança.

Outra atividade foi a demonstração da fórmula do quadrado da soma de dois números e da diferença de dois quadrados.

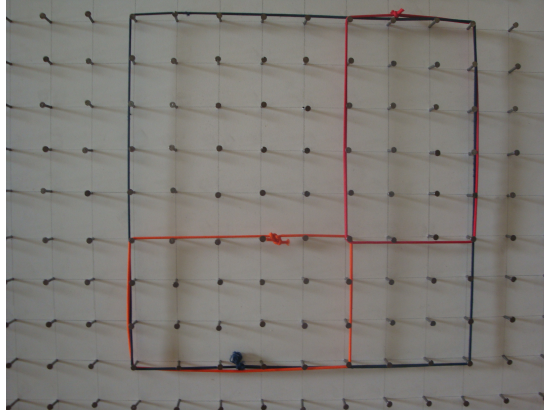


Figura 18 – Quadrado da Soma de dois Números

5 Demais sugestões de atividades

A seguir, são apresentadas mais algumas sugestões de atividades:

1. Introdução do plano cartesiano utilizando geoplano quadriculado no 8° e ou 9° ano do Ensino fundamental.
2. Utilização do plano cartesiano para mostrar interseções de retas que representam soluções inteiras de sistemas de equações lineares.
3. Na Álgebra pode-se mostrar os números triangulares criando triângulos isósceles semelhantes.
4. Outra atividade seria se aprofundar no geoplano circular. Nesse, pode-se definir e calcular apótemas dos diversos polígonos regulares.
5. Existem também alguns problemas de Análise Combinatória que podem ser resolvidos como citados no trabalho de Machado.[3]

6 Conclusão

O Geoplano é uma importante ferramenta para auxiliar o ensino de geometria no Ensino Fundamental bem como no Ensino Médio, mostrando-se eficiente na ilustração dos problemas geométricos e desse modo contribuindo para um melhor entendimento dos alunos. Este material contribui substancialmente na visualização de alguns números irracionais, destacando-se os que são obtidos como medidas de hipotenusas de triângulos retângulos com catetos sendo números naturais.

A versão da fórmula para dimensões maior que 2 é possível, mas sua aplicação não é viável na educação básica.

É importante ressaltar que trabalhar com esse material se torna mais agradável se feito em uma sala própria, dedicada somente a matemática e que tenha Geoplanos em número equivalente ao de alunos.

REFERÊNCIAS

- [1] LIMA, E. L. Meu Professor de Matemática e outras histórias; Rio de Janeiro: SBM, 1991.
- [2] MACDONALD, I. G. (1963). The volume of a lattice polyhedron. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 59, 719-726.
- [3] MACHADO, R. M.; Minicurso: Explorando o Geoplano. Disponível em: <www.bienasbm.ufba.br/M11.pdf> Acesso em: 10/02/2014.
- [4] Parâmetros Curriculares Nacionais. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>> Acesso em: 11/02/2014.
- [5] REEVE, J. E. On the Volume of Lattice Polyhedra. *Proceedings of The London Mathematical Society*, 3, p. 378-395, 1957.