

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Aruã Menezes de Aguiar

Formalismos de Dirac, Simplético e BFFT aplicados ao Modelo de Skyrme

Juiz de Fora - 2014

Aruã Menezes de Aguiar

Formalismos de Dirac, Simplético e BFFT aplicados ao Modelo de Skyrme

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes

Juiz de Fora - 2014

Dedico este trabalho aos meus pais, ao meu Tio Alexandre e a minha avó Dilza.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer aos meus pais e ao meu irmão Cauê, pois sempre estiveram ao meu lado e apoiaram minhas decisões.

Pelo apoio e carinho, agradeço aos meus tios Alexandre, Virginia, Patricia, Néli, Niva e Adriana; as minhas avós Dilza e Irene; e ao meu primo Gabriel.

Agradeço a todos os meus amigos, em especial a Franciele, Igor, Naiara e Thales, pois sem eles teria sido muito mais difícil chegar ao mestrado e conseguir concretizar este trabalho.

Agradeço ao meu orientador Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes, pela boa vontade e pelo auxílio, sem os quais não poderia concluir este trabalho.

Agradeço, em memória, ao professor Wilson Oliveira, por sempre incentivar seus alunos a prosseguir e por todo o material disponibilizado para nosso estudo.

Por fim, agradeço a UFJF e a CAPES pelo apoio no desenvolvimento deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho, os formalismos lagrangiano e hamiltoniano são apresentados e, posteriormente, aplica-se os métodos de quantização de Dirac, BFFT e simplético ao Modelo de Skyrme, que é um modelo que descreve os bárions e suas interações através de soluções estáticas com energia finita (sólitons) em um modelo sigma não-linear.

Palavras chaves: Dirac, BFFT, Simplético, Skyrme.

ABSTRACT

In this work, the lagrangian and hamiltonian formalisms are shown and then it applies the quantization methods of Dirac, BFFT and symplectic to Skyrme model, which is a model that describes the baryons and their interactions via static solutions with finite energy (solitons) in a nonlinear sigma model.

Keywords: Dirac, BFFT, Symplectic, Skyrme.

SUMÁRIO

	1 INTRODUÇÃO	9
1.1	Introdução	10
1.2	Objetivos	10
	2 CONCEITOS BÁSICOS	11
2.1	Coordenadas Generalizadas	12
2.2	Vínculos	13
2.2.1	Vínculos Holônomos	13
2.2.2	Vínculos Não-holônomos	14
2.3	Graus de Liberdade	15
	3 FORMALISMO LAGRANGIANO	17
3.1	Princípio de D'Alembert	18
3.2	Princípio de Hamilton	19
3.3	Equações de Euler-Lagrange	20
3.4	Multiplicadores de Lagrange	22
	4 FORMALISMO HAMILTONIANO	24
4.1	Equações de Hamilton	25
4.2	Parênteses de Poisson	27
	5 FORMALISMO DE DIRAC	29
5.1	Equações de Hamilton para Sistemas Vinculados	30
5.2	Parênteses de Dirac	32
5.3	Algoritmo de Dirac-Bergmann	34
5.4	Vínculos de Primeira e de Segunda Classe	35
5.5	Aplicação ao Modelo de Skyrme	37
	6 FORMALISMO SIMPLÉTICO DE FADDEEV-JACKIW	42
6.1	Quantização Simplética	43
6.2	Aplicação ao Modelo de Skyrme	45
	7 FORMALISMO BFFT	50
7.1	Introdução ao Procedimento BFFT	51
7.2	Conversão Abeliana de Vínculos de Segunda Classe	51
7.3	Conversão Não-Abeliana de Vínculos de Segunda Classe	55
7.4	Aplicação ao Modelo de Skyrme	57

	8 CONCLUSÃO	61
8.1	Conclusão	62
8.2	Perspectivas futuras	62
	APÊNDICE A CÁLCULO VARIACIONAL	64
	APÊNDICE B MULTIPLICADORES DE LAGRANGE	67
	APÊNDICE C EQUAÇÃO DE HEISENBERG	70
	REFERÊNCIAS	72

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1 Introdução

Muitas vezes, no estudo da dinâmica das partículas, utiliza-se uma aplicação bastante direta das leis de Newton. Porém, conforme a complexidade dos sistemas aumenta, a aplicação dessas leis torna-se mais difícil. A principal razão para tal dificuldade reside no fato de que as equações são de natureza vetorial e isso dificulta a obtenção das forças e acelerações (1). Desta maneira, formalismos diferentes do newtoniano podem ser úteis para a descrição do movimento de sistemas dinâmicos. Quando se fala em novo formalismo, entende-se que os resultados físicos previstos serão os mesmos, entretanto, a forma de obtê-los será outra.

Os formalismos lagrangiano e hamiltoniano fazem parte da mecânica analítica e são exemplos de novas formulações que podem ser aplicadas a sistemas de partículas. Tanto no formalismo lagrangiano quanto no hamiltoniano, as forças tomam um papel secundário na descrição do movimento.

Uma importante definição feita a partir do formalismo hamiltoniano, é a dos parênteses de Poisson, a partir dos quais se obtém a evolução temporal de uma quantidade dinâmica sob o ponto de vista clássico. Os parênteses de Poisson também são fundamentais na transição do caso clássico para o caso quântico, processo conhecido como quantização canônica.

A quantização canônica relaciona os parênteses de Poisson aos seus respectivos comutadores e opera de maneira eficaz em sistemas que possuam uma matriz hessiana não-singular. Para o caso de sistemas cuja matriz hessiana seja singular, tal quantização leva a inconsistências e é necessário buscar novos caminhos para assim fazê-la.

Os formalismos de Dirac, BFFT (Batalin, Fradkin, Fradkina e Tyutin) e Simplético corrigem algumas das inconsistências anteriormente citadas. Cada um destes métodos faz uso de um recurso diferente para que se possa chegar à quantização canônica, conforme será visto neste trabalho.

O modelo de Skyrme, que é um modelo que descreve os bárions e suas interações através de soluções estáticas com energia finita (sólitons) em um modelo sigma não-linear, será utilizado para exemplificar a aplicação dos formalismos de Dirac, BFFT e Simplético.

1.2 Objetivos

Este trabalho é iniciado com uma breve apresentação de alguns conceitos que são a base para a mecânica analítica. A partir dos conceitos básicos apresentados, o formalismo lagrangiano passa a ser discutido e posteriormente, faz-se a passagem para o formalismo hamiltoniano, dando-se ênfase a importância dos parênteses de Poisson.

Finalmente, os métodos utilizados nos formalismos de Dirac, BFFT e Simplético, são aplicados ao modelo de Skyrme e uma comparação entre o desempenho de cada método é feita.

CAPÍTULO 2

Conceitos Básicos

2.1 Coordenadas Generalizadas

Um dos conceitos fundamentais da mecânica é o conceito de partícula. Entende-se por partícula, um corpo cujas dimensões possam ser negligenciadas durante a descrição do movimento. A possibilidade de negligenciar tais dimensões depende, obviamente, das condições fornecidas pelo problema. Por exemplo, os planetas podem ser considerados partículas quando se leva em conta seu movimento ao redor do Sol, mas não quando se analisa suas rotações em torno de seus eixos (2).

Quando se supõe que a configuração de um sistema de partículas possa ser expressa pelas dadas coordenadas cartesianas de cada partícula, $3N$ coordenadas são requeridas para N partículas. A qualquer instante, o valor destas coordenadas poderia ser expresso como um conjunto de $3N$ números. Por outro lado, se a posição das partículas fosse expressa em termos de coordenadas esféricas, outro conjunto de $3N$ números seria usado para expressar a configuração do mesmo sistema num dado tempo. O processo de obtenção de um conjunto de números a partir de outros é conhecido como transformação de coordenada (1).

Entende-se por *coordenadas generalizadas* qualquer conjunto de números que sirva para especificar a configuração de um sistema. Para sistemas em movimento, estes números variam com o tempo e são tratados como variáveis algébricas (1).

Considerando a transformação de um conjunto de n coordenadas generalizadas. As equações de transformação são da forma

$$\begin{aligned} r_1 &= r_1(q_1, q_2, \dots, q_n; t) \\ r_2 &= r_2(q_1, q_2, \dots, q_n; t) \\ &\vdots \\ r_k &= r_k(q_1, q_2, \dots, q_n; t), \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

onde os r 's são as coordenadas ordinárias e os q 's são as coordenadas generalizadas (1).

Quando os valores das coordenadas generalizadas são especificados, o "estado mecânico" do sistema no instante considerado não está totalmente determinado de modo que sua posição em um instante subsequente possa ser predita. Para dados valores das coordenadas, o sistema pode ter quaisquer velocidades, e estas afetam sua posição depois de um intervalo de tempo infinitesimal dt . Se todas as coordenadas e velocidades são simultaneamente especificadas, sabe-se que o estado do sistema estará completamente determinado e seu movimento subsequente pode, a princípio, ser calculado. Matematicamente, isto quer dizer que, se todas as coordenadas q 's e velocidades \dot{q} 's são dadas em algum instante, as acelerações \ddot{q} 's naquele instante são unicamente definidas (2).

2.2 Vínculos

Vínculos são restrições de natureza geométrica ou cinemática que limitam, *a priori*, o movimento de um determinado sistema mecânico (3). Os vínculos podem ser classificados como holônomos e não-holônomos, conforme será descrito nas subseções 2.2.1 e 2.2.2.

2.2.1 Vínculos Holônomos

Seja um sistema descrito por n coordenadas generalizadas e m equações de vínculo da forma:

$$\phi_m(q_1, q_2, \dots, q_n; t) = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, M). \quad (2.2.1)$$

São ditos *holônomos*, vínculos que possuem a mesma forma da equação (2.2.1). Como exemplo de vínculo holônomo, é possível citar o pêndulo duplo mostrado na *Figura 1* (1).

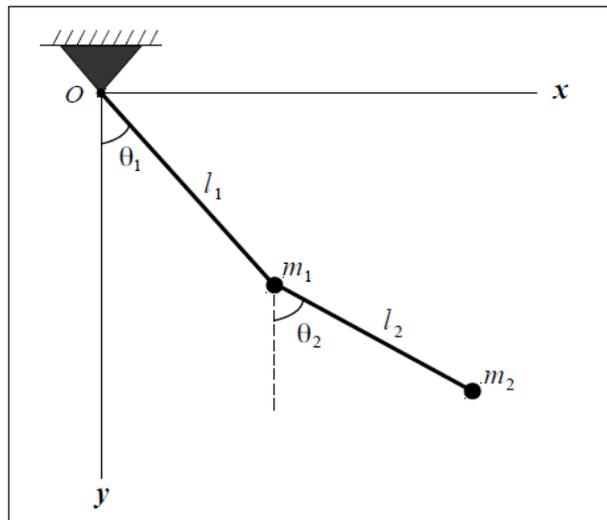


Figura 2.2.1 - Pêndulo duplo

As hastes de comprimento l_1 e l_2 são consideradas rígidas e de massa desprezível. Além disso, o sistema oscila em torno dos pontos O e m_1 , sendo seu movimento confinado a um único plano vertical. Escolhendo-se as coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2) para representar as posições das partículas m_1 e m_2 , respectivamente, as equações de vínculo terão a seguinte forma:

$$x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0, \quad (2.2.2)$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 = 0. \quad (2.2.3)$$

O que expressa o fato do comprimento das hastes ser constante e o fato das coordenadas

(x_1, y_1, x_2, y_2) não serem independentes. Estes vínculos holônomos em particular são classificados como escleronômicos ou estacionários, pois não dependem explicitamente do tempo. Qualquer vínculo que seja explicitamente função do tempo é chamado de reonômico ou não-estacionário (1).

Se, por outro lado, os ângulos θ_1 e θ_2 , que representam os ângulos que as hastes fazem com a vertical, são utilizados como coordenadas generalizadas, não haverá nenhuma equação de vínculo, pois tais ângulos são independentes (1).

Agora, será considerada uma equação de vínculo da forma

$$\phi_m(q_1, q_2, \dots, q_n; t) \leq 0 \quad (m = 1, 2, \dots, M). \quad (2.2.4)$$

Este tipo de vínculo (também holônomo) pode ocorrer, por exemplo, quando um conjunto de partículas está contido no interior de uma superfície fechada. Como uma ilustração, supõe-se que uma partícula livre esteja contida em uma esfera fixa de raio a que é centrada na origem de um sistema cartesiano. Usando x , y e z como as coordenadas da partícula, a equação de vínculo será dada por

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 \leq 0. \quad (2.2.5)$$

Se $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 < 0$, a partícula mover-se-á no interior da esfera. Por outro lado, se $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$, a partícula estará na superfície da esfera e será necessário especificar as condições de movimento neste instante, como por exemplo, o coeficiente de restituição para colisões entre a esfera e a partícula (1).

2.2.2 Vínculos Não-holônomos

Vínculos que não podem ser expressos na forma das equações (2.2.1) e (2.2.4), mas que podem ser expressos em termos das diferenciais de coordenadas e possivelmente do tempo, são conhecidos como não-holônomos e são escritos na forma

$$\sum_{i=1}^n a_{mi} dq_i + a_{mt} dt = 0 \quad (2.2.6)$$

em que os a 's são, em geral, funções dos q 's e do tempo (1). O índice m distingue as equações de vínculo umas das outras (3). Além disso, se o vínculo é não holônomo, a equação (2.2.6) é caracterizada por ser não integrável (1).

Como um exemplo de vínculo não-holônomo, pode-se considerar um disco de raio r que rola sem deslizar no plano horizontal xy , como mostrado na *Figura 2*.

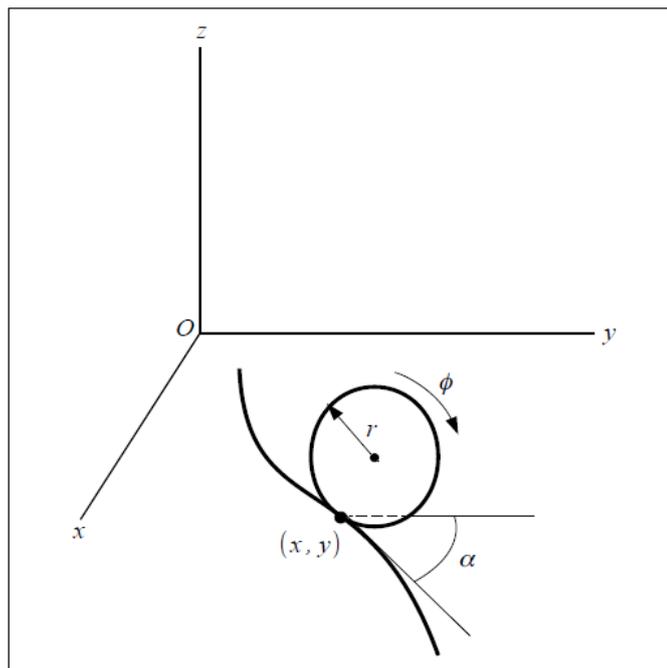


Figura 2.2.2 - Disco de raio r rolando sem deslizar.

Sejam (x, y) as coordenadas de localização do ponto de contato, ϕ o ângulo de rotação do disco sobre um eixo perpendicular através de seu centro, e α o ângulo entre o plano do disco e o eixo y . A exigência de que não haja deslizamento durante a rotação implica em

$$dx - r \sin(\alpha) d\phi = 0 \quad (2.2.7)$$

$$dy - r \cos(\alpha) d\phi = 0 \quad (2.2.8)$$

uma vez que $r d\phi$ representa o elemento diferencial ds ao longo do caminho traçado pelo ponto de contato, e este elemento de linha infinitesimal faz um ângulo α com a direção do eixo y (1).

2.3 Graus de Liberdade

O número de *graus de liberdade* é igual ao número de quantidades independentes necessárias para especificar a posição de um sistema qualquer (2). Em outras palavras, o número de graus de liberdade é igual ao número de coordenadas que são usadas para especificar a configuração de um sistema menos o número de equações independentes de vínculo. Por exemplo, se n coordenadas são escolhidas para definir a configuração de um sistema, e se há M equações independentes de vínculo (1), o número s de graus de liberdade será dado por

$$s = n - M. \quad (2.3.1)$$

Muito frequentemente, é possível encontrar um conjunto de coordenadas independentes que descrevem a configuração de um sistema e que podem variar livremente sem violar os vínculos. Neste caso, haverá tantos graus de liberdade quanto de coordenadas (1).

Agora, o exemplo do pêndulo duplo citado na subseção 2.2.1 será retomado. Conforme foi visto, caso a posição das massas seja especificada pelas coordenadas cartesianas (x_1, y_1, x_2, y_2) , tais coordenadas não serão independentes, tendo em vista que as mesmas estão conectadas pelas equações de vínculo (2.2.2) e (2.2.3). Neste caso, 4 coordenadas e 2 equações de vínculo descrevem o sistema, resultando em 2 graus de liberdade. Foi visto também que se os ângulos θ_1 e θ_2 fossem utilizados como coordenadas generalizadas, não haveria nenhuma equação de vínculo, pois tais ângulos são independentes. Desta maneira, apenas 2 coordenadas descrevem o sistema, resultando em 2 graus de liberdade.

É importante perceber que o número de graus de liberdade é uma característica do próprio sistema e não depende do conjunto de coordenadas particulares utilizado para descrever sua configuração. Ou seja, enquanto a escolha das coordenadas influencia m e n , o número $s = n - m$ é fixo para um dado sistema (1).

CAPÍTULO 3

Formalismo Lagrangiano

3.1 Princípio de D'Alembert

Nesta seção, considera-se um sistema de N partículas cuja configuração é especificada em termos das coordenadas \mathbf{r}_i . Supondo que, a um dado instante, forças \mathbf{F}_i sejam aplicadas nas correspondentes coordenadas, o sistema realizará pequenos deslocamentos arbitrários $\delta\mathbf{r}_i$. O trabalho feito pelas forças aplicadas será dado por

$$\delta W = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i \quad (3.1.1)$$

e é conhecido como *trabalho virtual*. Os pequenos deslocamentos são chamados de *deslocamentos virtuais* e recebem tal nome, pois são imaginários, tendo em vista que se assume que eles ocorram sem passagem de tempo, com as forças aplicadas permanecendo constantes (1). Esses deslocamentos são consistentes com as forças e com os vínculos impostos ao sistema em um dado instante t (4). O deslocamento virtual é designado por $\delta\mathbf{r}_i$ para que se distinga do deslocamento real $d\mathbf{r}_i$ que ocorre durante o intervalo de tempo dt (1).

Supondo que o sistema que esteja sendo discutido esteja em equilíbrio, a força total sobre cada partícula será nula, $\mathbf{F}_i = 0$. Então, claramente, o produto $\mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i$, que é o trabalho virtual da força \mathbf{F}_i , será nulo também. A soma desses produtos sobre todas as partículas deve ser igualmente nulo:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0. \quad (3.1.2)$$

A força \mathbf{F}_i pode ser decomposta entre forças aplicadas, $\mathbf{F}_i^{(a)}$, e forças de vínculo, \mathbf{f}_i ,

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{f}_i, \quad (3.1.3)$$

então, a equação (3.1.2) pode ser escrita como

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta\mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0. \quad (3.1.4)$$

Os sistemas que aqui serão tratados estarão restritos a sistemas em que o trabalho virtual líquido das forças de vínculo seja nulo. Por exemplo, se uma partícula está vinculada a mover-se sobre uma superfície, a força de vínculo será perpendicular à tal superfície, enquanto o deslocamento virtual deverá ser tangente à ela, dessa maneira, o trabalho virtual será nulo. Isso não será válido se forças de atrito estiverem presentes, então, sistemas desse tipo serão excluídos da formulação que está sendo aqui desenvolvida (4).

Assim, como condição para o equilíbrio de um sistema, tem-se que o trabalho virtual das forças aplicadas é igual a zero:

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (3.1.5)$$

A equação (3.1.5) é frequentemente chamada de *princípio do trabalho virtual* (4). Esse princípio permite exprimir a condição de equilíbrio de sistemas vinculados em termos somente das forças aplicadas (3).

O princípio de D'Alembert pode ser obtido a partir da segunda lei de Newton:

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i. \quad (3.1.6)$$

Devido à equação (3.1.3), é possível reescrever (3.1.6) como:

$$\dot{\mathbf{p}}_i - \mathbf{F}_i^{(a)} = \mathbf{f}_i. \quad (3.1.7)$$

Multiplicando os dois lados da equação (3.1.7) por $\delta \mathbf{r}_i$, obtém-se que

$$\sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i - \sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i. \quad (3.1.8)$$

Uma vez que o trabalho virtual das forças de vínculo é nulo, chega-se a

$$\sum_i (\dot{\mathbf{p}}_i - \mathbf{F}_i^{(a)}) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0, \quad (3.1.9)$$

que é o *princípio de D'Alembert*. O princípio de D'Alembert constitui um método de escrever as equações de movimento exclusivamente em termos das forças aplicadas e é um passo intermediário para chegar às equações de Lagrange (3), que serão tratadas nas seções subsequentes.

3.2 Princípio de Hamilton

Seja um sistema caracterizado por N coordenadas generalizadas (independentes ou não). A configuração desse sistema num certo instante t_1 é dada pelos valores das N coordenadas e das N velocidades generalizadas no instante t_1 . Com o passar do tempo, o sistema vai evoluindo e, conseqüentemente, a configuração vai mudando. No instante t_2 , a configuração será provavelmente outra (5).

Sendo assim, como o sistema evolui da configuração 1 para a configuração 2? No caso da formulação newtoniana, isto é dado pela segunda lei de Newton. Nesta seção, a evolução será dada pelo princípio de Hamilton (5).

Seja o sistema em questão caracterizado por uma função escalar L , que dependa das N coordenadas e N velocidades generalizadas, podendo também depender do tempo,

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_N; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N; t), \quad (3.2.1)$$

ou, compactamente,

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t). \quad (3.2.2)$$

Por ora, será mencionado apenas que essa função é chamada de *lagrangiana* do sistema e que a quantidade

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \quad (3.2.3)$$

é chamada de ação (5) e é um funcional (vide Apêndice A).

O *princípio de Hamilton*, também denominado de *mínima ação*, estabelece que a evolução do sistema da configuração 1 para a configuração 2 é tal que a ação é um mínimo (5). Ou seja, de todas as maneiras possíveis para o sistema evoluir entre t_1 e t_2 , ele segue aquela em que a ação tem um extremo. Portanto,

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0. \quad (3.2.4)$$

3.3 Equações de Euler-Lagrange

Nesta seção, admite-se que o sistema mecânico é descrito por coordenadas independentes entre si, e essa independência é crucial para permitir a dedução das equações de Euler-Lagrange a partir do princípio de Hamilton. Tais coordenadas generalizadas mutuamente independentes sempre existem quando todos os vínculos a que o sistema está sujeito são holônomos. Quando há vínculos não-holônomos presentes, é, em geral, impossível introduzir coordenadas generalizadas de tal modo que as equações de vínculo sejam identicamente satisfeitas (3). Na próxima seção, o caso com vínculos não-holônomos será discutido.

Utilizando cálculo variacional (vide *Apêndice A*), a equação (3.2.4) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \left(\frac{dq_i}{dt} \right) \right] dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right] dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) dt + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Considerando que as extremidades das trajetórias sejam fixas, ou seja, todas as trajetórias iniciam em $q_i(t_1)$ e terminam em $q_i(t_2)$. Tem-se que:

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0. \tag{3.3.2}$$

Usando (3.3.2) e (3.3.1), obtém-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = 0. \tag{3.3.3}$$

Como os δq_i 's são funções arbitrárias do tempo, a integração representada por (3.3.3) só será nula se o integrando também for, ou seja

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0. \tag{3.3.4}$$

A equação (3.3.4) é chamada de *equação de Euler-Lagrange*. Se a Lagrangiana de um dado sistema mecânico é conhecida, essa equação resulta nas relações entre as acelerações, velocidades e coordenadas, isto é, nas equações de movimento do sistema (2), que coincidem com as equações decorrentes da segunda lei de Newton aplicada a sistemas mecânicos.

3.4 Multiplicadores de Lagrange

É possível deduzir as equações de movimento a partir do princípio de Hamilton mesmo no caso especial em que os vínculos sejam não-holônomos e dados pela equação (2.2.6):

$$\sum_{i=1}^n a_{mi} dq_i + a_{mt} dt = 0.$$

Supõe-se que o sistema seja descrito por n coordenadas e esteja submetido a M vínculos diferenciais independentes. Seja L a lagrangiana do sistema em que as forças de vínculo responsáveis pela validade da equação (2.2.6) não estejam inclusas. O princípio de Hamilton implica na equação (3.3.3):

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = 0,$$

porém, agora, não é possível inferir que o coeficiente de cada δq_i seja zero, tendo em vista que os δq_i 's não são mais independentes. Cada δq_i é um deslocamento virtual, pois o tempo permanece fixo quando se executa a variação que leva q_i em $q_i + \delta q_i$. De acordo com (2.2.6), os deslocamentos virtuais devem obedecer a

$$\sum_{i=1}^n a_{mi} dq_i = 0, \quad (3.4.1)$$

para que haja compatibilidade com os vínculos (usa-se $dt = 0$ para deslocamentos virtuais). As n variações $\delta q_1, \dots, \delta q_n$ tem que satisfazer as M equações (2.2.6), de modo que apenas $(n - M)$ variações dos q 's sejam independentes entre si. Trata-se, portanto, de determinação de um extremo condicionado para o funcional S , e o tratamento segue a linha do método dos multiplicadores de Lagrange do cálculo diferencial (3)(vide Apêndice B).

A equação

$$\int_{t_2}^{t_1} \sum_{m=1}^M \lambda_m \left(\sum_{i=1}^n a_{mi} \delta q_i \right) dt = \int_{t_2}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{m=1}^M \lambda_m a_{mi} \right) \delta q_i dt = 0 \quad (3.4.2)$$

é uma consequência de (2.2.6) para valores arbitrários dos multiplicadores de Lagrange $\lambda_1(q, \dot{q}, t), \dots, \lambda_n(q, \dot{q}, t)$ (3). A adição de (3.3.3) a (3.4.2) resulta em

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{m=1}^M \lambda_m a_{mi} \right) \delta q_i dt = 0, \quad (3.4.3)$$

Como os δq_i 's não são independentes, nada se pode afirmar a respeito do coeficiente de cada δq_i nesta última equação. Com uma numeração adequada das variáveis, é possível escolher as $(n - M)$ primeiras variações $\delta q_1, \dots, \delta q_{n-M}$ como mutuamente independentes, com as M últimas variações sendo determinadas em termos das $(n - M)$ primeiras pela resolução das M equações (3.4.1). Por outro lado, há M multiplicadores de Lagrange e é possível escolhê-los de tal modo que o coeficientes dos M últimos δq_i 's em (3.4.3) sejam nulos, isto é,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{m=1}^M \lambda_m a_{mi} = 0, \quad i = n - M + 1, \dots, n. \quad (3.4.4)$$

Com os λ 's determinados pelas equações (3.4.4), a equação (3.4.3) reduz-se a

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n-M} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{m=1}^M \lambda_m a_{mi} \right) \delta q_i dt = 0, \quad (3.4.5)$$

que só envolve os $(n - M)$ primeiros δq_i 's independentes entre si, implicando

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{m=1}^M \lambda_m a_{mi} = 0, \quad i = 1, \dots, n - M. \quad (3.4.6)$$

Em síntese, as equações (3.4.4) e (3.4.6) mostram que as equações de movimento do sistema são

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{m=1}^M \lambda_m a_{mi}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.4.7)$$

Mas a equação é insuficiente, pois agora há apenas n equações para $(n + M)$ incógnitas. As M equações adicionais são as equações de vínculo (2.2.6), que podem ser escritas na forma equivalente

$$\sum_{i=1}^n a_{mi} \dot{q}_i + a_{mt} = 0, \quad m = 1, \dots, M. \quad (3.4.8)$$

As equações (3.4.7) e (3.4.8) constituem um conjunto de $(n + M)$ equações para $(n + M)$ incógnitas, e permitem a determinação unívoca do movimento do sistema (3).

CAPÍTULO 4

Formalismo Hamiltoniano

4.1 Equações de Hamilton

Nesta seção, será vista uma forma alternativa de se descrever a mecânica clássica que é apoiado na função hamiltoniana. O ponto de partida continuará sendo o princípio de Hamilton. A evolução temporal do sistema será dada pelas equações de Hamilton. Elas são equações diferenciais de primeira ordem no tempo que, quando combinadas, levam às mesmas equações diferenciais obtidas pelo formalismo lagrangiano, que por sua vez, eram as mesmas obtidas pela segunda lei de Newton (5).

A formulação das leis da mecânica em termos da lagrangiana pressupõe que o estado mecânico do sistema é descrito pela especificação de suas coordenadas generalizadas e velocidades (2). Por outro lado, o formalismo hamiltoniano utiliza das coordenadas generalizadas e dos momentos do sistema para a descrição do movimento.

A passagem de um conjunto de variáveis para outro pode ser efetuado pelas chamadas transformações de Legendre. A diferencial total da lagrangiana como função das coordenadas, velocidades (2) e do tempo é

$$dL = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (4.1.1)$$

Introduzindo a definição de momento conjugado a q_i :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (4.1.2)$$

e

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (4.1.3)$$

a equação (4.1.1) pode ser reescrita como

$$dL = \sum_{i=1}^n (\dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i) + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (4.1.4)$$

É possível escrever o segundo termo do lado direito de (4.1.4) da seguinte maneira:

$$\sum_{i=1}^n p_i d\dot{q}_i = d\left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i\right) - \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i. \quad (4.1.5)$$

Substituindo (4.1.5) em (4.1.4), obtém-se

$$dL = \sum_{i=1}^n \dot{p}_i dq_i + d\left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i\right) - \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (4.1.6)$$

Passando o segundo termo do lado direito de (4.1.6) para o lado esquerdo, tem-se:

$$\begin{aligned} d\left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i\right) - dL &= \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^n \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ d\left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L\right) &= \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

O argumento da diferencial da equação (4.1.7) é a energia do sistema e é chamada de *hamiltoniana*, sendo expressa em termos das coordenadas, dos momentos e do tempo:

$$H(p, q, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L. \quad (4.1.8)$$

Escrevendo a hamiltoniana na forma diferencial, tem-se que

$$dH(p, q, t) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (4.1.9)$$

Comparando as equações 4.1.7 e 4.1.9, chega-se às *equações de Hamilton*:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (4.1.10)$$

A relação $-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$ não foi escrita, por ser uma mera identidade (5).

Agora, vale a pena fazer uma breve comparação entre os formalismos lagrangiano e hamiltoniano. No formalismo lagrangiano há N equações diferenciais de segunda ordem, desenvolvidas num espaço com N coordenadas generalizadas, chamado *espaço das configurações*. No hamiltoniano, são $2N$ equações de primeira ordem e o espaço possui $2N$ coordenadas (N coordenadas generalizadas e N momentos), chamado *espaço de fases*. Como já foi dito, ambos fornecem as mesmas equações diferenciais. Não havendo, neste caso, vantagens na escolha de um ou de outro formalismo (5).

No formalismo hamiltoniano, os momentos e as coordenadas (quantidades independentes) ocupam uma posição quase que simétrica nas equações de Hamilton. O mesmo não ocorre com as equações de Lagrange em relação às coordenadas e velocidades generalizadas (5).

4.2 Parênteses de Poisson

Considera-se uma quantidade genérica, definida no espaço de fases, que será designada por $A(q, p, t)$. A evolução temporal desta quantidade é dada por

$$\frac{dA}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (4.2.1)$$

Caso se queira que a expressão (4.2.1) represente um evolução temporal consistente com o mundo clássico, deve-se usar as equações de Hamilton. Assim, substituindo em (4.2.1) \dot{q}_i e \dot{p}_i dados pelas equações (4.1.10), encontra-se

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &= \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}, \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

onde $\{A, H\}$ é, por definição,

$$\{A, H\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right), \quad (4.2.3)$$

que é chamado de *parêntese de Poisson* entre A e H . De uma maneira geral, o parêntese de Poisson entre duas quantidades quaisquer A e B é dado por

$$\{A, B\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right). \quad (4.2.4)$$

Os parênteses de Poisson satisfazem às seguintes propriedades

$$\begin{aligned} \{A, B\} &= -\{B, A\} \\ \{AB, C\} &= \{A, C\}B + A\{B, C\} \\ \{A + B, C\} &= \{A, C\} + \{B, C\} \\ \{A, \{B, C\}\} + \{C, \{A, B\}\} + \{B, \{C, A\}\} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

A última relação acima é chamada de identidade de Jacobi. Para o caso particular das quantidades p_i e q_i , tem-se

$$\begin{aligned} \{q_i, p_j\} &= \delta_{ij}, \\ \{q_i, q_j\} &= \{p_i, p_j\} = 0, \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

que são chamados *parênteses fundamentais de Poisson* (5). A equação (4.2.2) dá a evolução da quantidade A sob o ponto de vista clássico. Em termos quânticos, esta quantidade é transformada em operador e sua evolução temporal é dada pela equação de Heisenberg (vide *Apêndice C*):

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [A, H] + \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (4.2.7)$$

A semelhança entre as relações (4.2.2) e (4.2.7) sugere que as relações quânticas devam ser obtidas das correspondentes clássicas por substituições do tipo

$$\{A, B\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [A, B]. \quad (4.2.8)$$

Este processo de quantização, introduzido por Dirac, é conhecido como *quantização canônica* (5).

O método de quantização canônica opera muito bem em mecânica quântica para *sistemas não-singulares*, ou seja, sistemas em que o determinante da *matriz hessiana*, definida por

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}, \quad (4.2.9)$$

é diferente de zero. Entretanto, para sistemas *sistemas singulares*, sistemas em que o determinante da matriz hessiana seja zero, esse método leva à inconsistências. Desta maneira, no caso de sistemas singulares, este processo de quantização deve ser modificado. No capítulo referente ao formalismo de Dirac, este assunto será discutido com maiores detalhes.

CAPÍTULO 5

Formalismo de Dirac

5.1 Equações de Hamilton para Sistemas Vinculados

A quantização de sistemas não-singulares é, em princípio, direta. Escreve-se as equações de movimento de Hamilton na forma dos parênteses de Poisson e a correspondente versão quântica é obtida substituindo-se os parênteses de Poisson pelos comutadores de seus correspondentes operadores (6) divididos por $i\hbar$, conforme apresentou-se na equação (4.2.8):

$$\{A, B\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [A, B].$$

Por outro lado, a quantização de sistemas singulares não é trivial (6). Neste capítulo, apresentar-se-á a maneira correta de se proceder quanto à quantização canônica de sistemas singulares.

Considera-se um sistema discreto descrito por uma lagrangiana $L(q, \dot{q})$ sem dependência temporal explícita. Se a matriz hessiana é singular, então as equações definidoras dos momentos canônicos não podem ser todas resolvidas para as velocidades em função dos momentos, porque não constituem um conjunto de equações independentes. Como consequência, aparecem relações funcionais entre as coordenadas e os momentos do tipo (3)

$$\phi_m(p, q) = 0, \quad m = 1, \dots, M. \quad (5.1.1)$$

Os q 's e p 's são as variáveis dinâmicas da teoria de Hamilton. Elas são conectadas pelas relações (5.1.1), que são chamadas de *vínculos primários* (7). Portanto, os vínculos primários são decorrentes unicamente da forma da lagrangiana (3).

A hamiltoniana continua sendo definida da forma usual $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$ e a equação (4.1.7) permanece válida, mostrando que mesmo na presença de vínculos a hamiltoniana é uma função somente dos q 's e p 's (3). Entretanto, a hamiltoniana definida desta maneira não é unicamente determinada, porque se deve adicionar a ela qualquer combinação linear dos ϕ 's (7). Desta forma, a hamiltoniana modificada será dada por

$$H_T = H + \lambda_m \phi_m, \quad (5.1.2)$$

em que os coeficiente λ_m são os multiplicadores de Lagrange. Para obter as equações de Hamilton do movimento para sistemas em que hajam vínculos primários, o princípio da mínima ação será utilizado:

$$\begin{aligned}
\delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i) dt \\
&= \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H_T \right) dt \\
&= \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H - \sum_m \lambda_m \phi_m \right) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i} \delta q_i - \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} \delta p_i \right) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{d}{dt} (p_i \delta q_i) - \left(\frac{d}{dt} p_i \right) \delta q_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i} \delta q_i - \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} \delta p_i \right] dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} - \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} - \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} \right) \delta p_i \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (p_i \delta q_i) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} - \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} - \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} \right) \delta p_i \right] dt + p_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} - \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} - \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} \right) \delta p_i \right] dt \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{5.1.3}$$

sendo que para passar da quarta para quinta linha dessa equação, fez-se uso de

$$p_i \delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} (p_i \delta q_i) - \dot{p}_i \delta q_i. \tag{5.1.4}$$

Uma vez que os δq_i 's e os δp_i 's são funções arbitrárias do tempo, a integração representada por (5.1.3) só será nula se o integrando o for. Portanto,

$$\dot{q}_i \approx \frac{\partial H}{\partial p_i} + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}$$

e

$$\dot{p}_i \approx -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i}. \tag{5.1.5}$$

As equações (5.1.5) representam as equações de movimento de Hamilton com os vínculos de primeira ordem incorporados.

5.2 Parênteses de Dirac

Para chegar a definição dos parênteses de Dirac, é útil introduzir a noção de *igualdade fraca*, denotada pelo símbolo " \approx ". Igualdade fraca é aquela que não é necessariamente válida em todo o espaço de fase, contrariamente ao que acontece com a *igualdade forte* " $=$ ".

Escreve-se inicialmente as equações de vínculo na forma

$$\phi_m(q, p) \approx 0 \quad (5.2.1)$$

para lembrar que ϕ_m é numericamente restrita a valer zero, mas não é identicamente nula em todo o espaço de fase. Agora, levando em conta o conceito de igualdade fraca (3), será utilizado o mesmo procedimento utilizado na seção 4.2, mas para sistemas vinculados. Considera-se uma quantidade genérica, definida no espaço de fase, que será designada por $A(q, p, t)$. Conforme já foi apresentado, a evolução temporal desta quantidade é dada pela equação (4.2.1)

$$\frac{dA}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial A}{\partial t}.$$

Substituindo as equações de Hamilton dadas por (5.1.5) na equação anterior, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &\approx \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial A}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} - \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i} \right) \right] + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &\approx \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \lambda_m \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i} \right) \right] + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &\approx \{A, H\} + \lambda_m \{A, \phi_m\} + \frac{\partial A}{\partial t}, \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

em que todos os vínculos estão incluídos. No caso particular de A ser qualquer um dos vínculos da teoria, vem que

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_{m'}}{dt} &\approx \{\phi_{m'}, H\} + \lambda_m \{\phi_{m'}, \phi_m\} + \frac{\partial \phi_{m'}}{\partial t} \\ &\approx \{\phi_{m'}, H\} + \lambda_m \{\phi_{m'}, \phi_m\} \\ &\approx \{\phi_{m'}, H\} + \lambda_m C_{m'm}, \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

em que $C_{m'm} = \{\phi_{m'}, \phi_m\}$ é uma matriz antissimétrica, ou seja, $C_{m'm} = -C_{mm'}$.

Por consistência, $\frac{d\phi_{m'}}{dt} \approx 0$, uma vez que vínculos primários não devem evoluir no tempo. Desta maneira, a partir de (5.2.3), obtém-se:

$$\begin{aligned}
-\lambda_m C_{m'm} &\approx \{\phi_{m'}, H\} \\
\lambda_m C_{mm'} &\approx \{\phi_{m'}, H\}.
\end{aligned} \tag{5.2.4}$$

Multiplicando ambos os lados de (5.2.4) por $C_{m'm''}^{-1}$, que é a matriz inversa de $C_{m'm''}$, chega-se a

$$\begin{aligned}
\lambda_m C_{mm'} C_{m'm''}^{-1} &\approx C_{m'm''}^{-1} \{\phi_{m'}, H\} \\
\lambda_m \delta_{mm''} &\approx C_{m'm''}^{-1} \{\phi_{m'}, H\} \\
\lambda_m &\approx C_{m'm}^{-1} \{\phi_{m'}, H\} \\
\lambda_m &\approx -C_{mm'}^{-1} \{\phi_{m'}, H\}.
\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

Substituindo-se (5.2.5) em (5.2.2), tem-se que

$$\begin{aligned}
\frac{dA}{dt} &\approx \{A, H\} - \{A, \phi_m\} C_{mm'}^{-1} \{\phi_{m'}, H\} + \frac{\partial A}{\partial t} \\
&\approx \{A, H\}_D + \frac{\partial A}{\partial t},
\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

em que

$$\{A, H\}_D = \{A, H\} - \{A, \phi_m\} C_{mm'}^{-1} \{\phi_{m'}, H\} \tag{5.2.7}$$

é o *parêntese de Dirac* entre A e H .

De uma maneira geral, o parêntese de Dirac entre duas quantidades quaisquer A e B é dado por:

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \phi_m\} C_{mm'}^{-1} \{\phi_{m'}, B\}. \tag{5.2.8}$$

Os parênteses de Dirac têm as mesmas propriedades que os parênteses de Poisson e satisfazem a identidade de Jacobi (3), ou seja,

$$\begin{aligned}
\{A, B\}_D &= -\{B, A\}_D \\
\{AB, C\}_D &= \{A, C\}_D B + A \{B, C\}_D \\
\{A + B, C\}_D &= \{A, C\}_D + \{B, C\}_D \\
\{A, \{B, C\}_D\}_D + \{C, \{A, B\}_D\}_D + \{B, \{C, A\}_D\}_D &= 0.
\end{aligned} \tag{5.2.9}$$

Os parênteses de Dirac dos vínculos com qualquer $A(q, p)$ são nulos

$$\begin{aligned}
\{A, \phi_{m''}\}_D &= \{A, \phi_{m''}\} - \{A, \phi_m\} C_{mm'}^{-1} \{\phi_{m'}, \phi_{m''}\} \\
&= \{A, \phi_{m''}\} - \{A, \phi_m\} C_{mm'}^{-1} C_{m'm''} \\
&= \{A, \phi_{m''}\} - \{A, \phi_m\} \delta_{mm''} \\
&= \{A, \phi_{m''}\} - \{A, \phi_{m''}\} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{5.2.10}$$

Segue-se que os vínculos podem ser postos iguais a zero na hamiltoniana H_T antes de calcular os parênteses de Dirac, de modo que $H_T = H$ e as igualdades fracas podem ser tomadas como igualdades fortes (3).

Comparando a equação (5.2.6) com a equação de Heisenberg dada por (4.2.7)

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [A, H] + \frac{\partial A}{\partial t}$$

sugere-se que

$$\{A, B\}_D \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [A, B]. \tag{5.2.11}$$

Desta forma, a equação (5.2.11) representa o processo de quantização canônica ajustado para o caso em que se estuda sistemas singulares.

5.3 Algoritmo de Dirac-Bergmann

Partindo da equação (5.2.3) e do fato de $\frac{d\phi_{m'}}{dt} \approx 0$, chega-se a seguinte condição de consistência:

$$\{\phi_m, H\} + \lambda_m \{\phi_m, \phi_{m'}\} \approx 0. \tag{5.3.1}$$

Dada a condição de consistência, há três casos distintos, que serão discutidos a seguir.

No primeiro caso, a condição de consistência é identicamente satisfeita ($0 = 0$). Os únicos vínculos da teoria são os vínculos primários ϕ_m e os multiplicadores de Lagrange são inteiramente arbitrários, de modo que a dinâmica contém funções arbitrárias do tempo (3).

No segundo caso, a matriz $\|\{\phi_m, \phi_{m'}\}\|$ não é singular, isto é, $\det\|\{\phi_m, \phi_{m'}\}\| \neq 0$. Desta forma, as condições de consistência determinam univocamente os multiplicadores de Lagrange.

Finalmente, quando as condições de consistência não se enquadram em nenhum dos dois casos anteriores, tem-se um terceiro caso em que elas podem gerar *vínculos secundários* da forma

$$\chi_s(q, p) = 0, \quad s = 1, \dots, S. \quad (5.3.2)$$

A principal diferença entre vínculos primários e secundários é que os primeiros resultam meramente da forma da lagrangiana e da definição dos momentos, ao passo que os últimos exigem o emprego das equações de movimento. Faz-se a seguinte imposição:

$$\dot{\chi}_s = \{\chi_s, H\} + \lambda_m \{\chi_s, \phi_m\} \approx 0, \quad (5.3.3)$$

caso a equação (5.3.3) recaia nos dois casos iniciais, o processo encerra-se neste estágio. Se isto não acontecer, aparecem outros vínculos secundários e repete-se o procedimento, que é conhecido como *algoritmo de Dirac-Bergmann*. Após um número finito de estágios o processo termina e obtém-se um conjunto de vínculos secundários denotados por

$$\phi_k(q, p) \approx 0, \quad k = M + 1, \dots, M + K, \quad (5.3.4)$$

onde K é o número total de vínculos secundários (3).

5.4 Vínculos de Primeira e de Segunda Classe

Na terminologia de Dirac, a distinção entre vínculos primários e secundários não é essencial. Sendo mais importante a classificação em *vínculos de primeira classe* e *vínculos de segunda classe* (8). Uma função $A(q, p)$ é dita de primeira classe se o seu parêntese de Poisson com qualquer um dos vínculos é fracamente zero, isto é,

$$\{A, \phi_k\} \approx 0. \quad (5.4.1)$$

Se A é de segunda classe, o seu parêntese de Poisson com pelo menos um dos vínculos não é fracamente zero (3).

Os vínculos primários de primeira classe tem um significado físico importante, tendo em vista que geram *transformações de calibre*, ou seja, transformações canônicas infinitesimais que mudam os q 's e p 's, mas não alteram o estado físico do sistema (3), conforme será verificado a seguir.

Sejam A e A' funções do espaço de fase (q, p) evoluindo a partir de um estado inicial A_0 e com dois multiplicadores de Lagrange (9), λ_m e λ'_m , respectivamente. As expansões de $A(t)$ e $A'(t)$ são dadas por

$$A(t) = A_0 + \left. \frac{dA}{dt} \right|_{(t=0)} t + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2A}{dt^2} \right|_{(t=0)} t^2 + \dots \quad (5.4.2)$$

e

$$A'(t) = A_0 + \left. \frac{dA'}{dt} \right|_{(t=0)} t + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2A'}{dt^2} \right|_{(t=0)} t^2 + \dots \quad (5.4.3)$$

Subtraindo (5.4.3) de (5.4.2) e trabalhando apenas até a primeira ordem, obtém-se

$$A(t) - A'(t) = \left(\left. \frac{dA}{dt} \right|_{(t=0)} - \left. \frac{dA'}{dt} \right|_{(t=0)} \right) t. \quad (5.4.4)$$

Usando (5.2.2) em (5.4.4), tem-se que

$$\begin{aligned} A(t) - A'(t) &= \left[\left(\{A_0, H\} + \lambda_m \{A_0, \phi_m\} + \frac{\partial A_0}{\partial t} \right) - \left(\{A_0, H\} + \lambda'_m \{A_0, \phi_m\} + \frac{\partial A_0}{\partial t} \right) \right] t \\ &= t(\lambda_m - \lambda'_m) \{A_0, \phi_m\}. \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

Desta maneira, A e A' estão relacionados por uma transformação infinitesimal que não afeta o estado físico, sendo ϕ_m um vínculo de primeira classe. Escreve-se a transformação (5.4.5) como (9)

$$\delta A = \varepsilon_m \{A_0, \phi_m\} \quad (5.4.6)$$

em que

$$\varepsilon_m = t(\lambda_m - \lambda'_m). \quad (5.4.7)$$

O mesmo estado é descrito por A ou por $A + \delta A$. Mas a equação (5.4.6) é uma soma de transformações canônicas infinitesimais, cada uma gerada por ϕ_m com parâmetro associado ε_m .

5.5 Aplicação ao Modelo de Skyrme

O modelo de Skyrme é uma teoria efetiva que descreve os bárions e suas interações através de soluções estáticas com energia finita -sólitons- em um modelo sigma não-linear. Considera-se que a lagrangiana clássica estática para o modelo de Skyrme é dada por

$$L = \int d^3r \left[-\frac{F_\pi^2}{16} \text{Tr}(\partial_i U \partial_i U^\dagger) + \frac{1}{32e^2} \text{Tr} \left[U^\dagger \partial_i U, U^\dagger \partial_j U \right]^2 \right], \quad (5.5.1)$$

em que F_π é a constante de decaimento do pión, e é um parâmetro adimensional e U é uma matriz $SU(2)$ (10).

Executando a expansão semi-clássica coletiva e substituindo em (5.5.1) $U(r)$ por $U(r,t) = A(t)U(r)A^\dagger(t)$, onde A é uma matriz $SU(2)$, obtém-se

$$L = -M + I \text{Tr} \left[\partial_0 A \partial_0 A^{-1} \right], \quad (5.5.2)$$

sendo M a massa do sóliton, que na representação "hedgehog" para U , $U = \exp(i\tau \cdot \hat{r}F(r))$, é dada por

$$M = 4\pi \frac{F_\pi}{e} \int_0^\infty x^2 \frac{1}{8} \left[F'^2 + 2 \frac{\sin^2 F}{x^2} \right] + \frac{1}{2} \frac{\sin^2 F}{x^2} \left[\frac{\sin^2 F}{x^2} + 2F'^2 \right] dx, \quad (5.5.3)$$

em que x é uma variável adimensional dada por $x = eF_\pi r$ e I é o chamado momento de inércia, dado por

$$I = \frac{4}{6} \pi (1/e^3 F_\pi) \Lambda, \quad (5.5.4)$$

com

$$\Lambda = \int_0^\infty x^2 \sin^2 F \left[1 + 4 \left(\frac{F'^2 + \sin^2 F}{x^2} \right) \right] dx. \quad (5.5.5)$$

Sendo as condições de contorno para F dadas por

$$\begin{aligned} F(0) &= \pi, \\ F(\infty) &= 0. \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

A matriz $SU(2)$ A pode ser escrita como $A = a_0 + ia \cdot \tau$, com o vínculo

$$\phi_1 = a_i a_i - 1, \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (5.5.7)$$

Assim, a lagrangiana simplificada para o modelo de Skyrme será escrita como

$$L = -M + 2I\dot{a}_i \dot{a}_i. \quad (5.5.8)$$

O momento conjugado a a_i é

$$\pi_{a_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i} = 4I\dot{a}_i, \quad (5.5.9)$$

A hamiltoniana transformada parte da equação (5.1.2):

$$\begin{aligned} H_T &= H + \lambda_1 \phi_1 \\ &= \pi_{a_i} \dot{a}_i - L + \lambda_1 \phi_1 \\ &= \pi_{a_i} \dot{a}_i + M - 2I\dot{a}_i \dot{a}_i + \lambda_1 (a_i a_i - 1). \end{aligned} \quad (5.5.10)$$

Utilizando (5.5.9) em (5.5.10), obtém-se

$$H_T^{(0)} = M + \frac{1}{8I} \pi_{a_i} \pi_{a_i} + \lambda_1 (a_i a_i - 1). \quad (5.5.11)$$

A evolução temporal de ϕ_1 será dada por

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_1}{dt} &= \{\phi_1, H_T^{(0)}\} \\ &= \frac{1}{2I} a_i \pi_{a_i}. \end{aligned} \quad (5.5.12)$$

A equação (5.5.12) representa um vínculo secundário, portanto

$$\phi_2 = a_i \pi_{a_i}. \quad (5.5.13)$$

Introduz-se o vínculo ϕ_2 na hamiltoniana utilizando o multiplicador de Lagrange λ_2

$$H_T^{(1)} = M + \frac{1}{8I} \pi_{a_i} \pi_{a_i} + \lambda_1 (a_i a_i - 1) + \lambda_2 a_i \pi_{a_i}. \quad (5.5.14)$$

Utiliza-se, então, a condição de consistência dada pela equação (5.3.1) para os vínculos ϕ_1 e ϕ_2 .

$$\{\phi_2, H_T^{(1)}\} + \lambda_2 \{\phi_2, \phi_1\} \approx 0. \quad (5.5.15)$$

Uma vez que $\{\phi_2, \phi_1\} = 2a_i a_i \neq 0$, observa-se que não se gera mais nenhum vínculo via esse procedimento iterativo, já que ϕ_1 e ϕ_2 são de segunda classe. A partir da equação (5.5.15) só será possível obter o multiplicador de Lagrange λ_2 . Logo, todos os vínculos da teoria foram encontrados. São eles:

$$\phi_1 = a_i a_i - 1, \quad (5.5.16)$$

$$\phi_2 = a_i \pi_{a_i}. \quad (5.5.17)$$

O próximo passo, é obter a matriz $C_{kl} = \{\phi_k, \phi_l\}$ e, posteriormente, sua inversa, para que assim se encontre os parênteses de Dirac. A matriz C_{kl} é dada por

$$\begin{aligned} C_{kl} &= \begin{pmatrix} \{\phi_1, \phi_1\} & \{\phi_1, \phi_2\} \\ \{\phi_2, \phi_1\} & \{\phi_2, \phi_2\} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2a_l a_l \\ -2a_l a_l & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.5.18)$$

Utilizando $C_{kl} C_{lm}^{-1} = \delta_{km}$, obtém-se a inversa da matriz (5.5.18)

$$C_{kl}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2a_l a_l} \\ \frac{1}{-2a_l a_l} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.5.19)$$

Assim, utilizando a equação (5.2.8), é possível calcular os parênteses de Dirac da teoria, conforme será mostrado a seguir:

$$\{a_i, a_j\}_D = \{a_i, a_j\} - \{a_i, \phi_k\} C_{kl}^{-1} \{\phi_l, a_j\}, \quad (5.5.20)$$

uma vez que $\{a_i, a_j\} = 0$, tem-se

$$\begin{aligned}
\{a_i, a_j\}_D &= - \begin{pmatrix} \{a_i, \phi_1\} & \{a_i, \phi_2\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2a_l a_l} \\ \frac{1}{-2a_l a_l} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\phi_1, a_j\} \\ \{\phi_2, a_j\} \end{pmatrix} \\
&= - \begin{pmatrix} 0 & a_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2a_l a_l} \\ \frac{1}{-2a_l a_l} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -a_j \end{pmatrix} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{5.5.21}$$

O próximo parêntese de Dirac será dado por

$$\{a_i, \pi_j\}_D = \{a_i, \pi_j\} - \{a_i, \phi_k\} C_{kl}^{-1} \{\phi_l, \pi_j\}, \tag{5.5.22}$$

uma vez que $\{a_i, \pi_j\} = \delta_{ij}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\{a_i, \pi_j\}_D &= \delta_{ij} - \begin{pmatrix} \{a_i, \phi_1\} & \{a_i, \phi_2\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2a_l a_l} \\ \frac{1}{-2a_l a_l} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\phi_1, \pi_j\} \\ \{\phi_2, \pi_j\} \end{pmatrix} \\
&= \delta_{ij} - \begin{pmatrix} 0 & a_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2a_l a_l} \\ \frac{1}{-2a_l a_l} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a_j \\ \pi_j \end{pmatrix} \\
&= \delta_{ij} - \frac{a_i a_j}{a_l a_l}.
\end{aligned} \tag{5.5.23}$$

Tomando o vínculo ϕ_1 fortemente igual a zero, o parêntese de Dirac dado por (5.5.23) pode ser escrito como

$$\{a_i, \pi_j\}_D = \delta_{ij} - a_i a_j. \tag{5.5.24}$$

Finalmente, o último parêntese de Dirac será dado por

$$\{\pi_i, \pi_j\}_D = \{\pi_i, \pi_j\} - \{\pi_i, \phi_k\} C_{kl}^{-1} \{\phi_l, \pi_j\}, \tag{5.5.25}$$

uma vez que $\{\pi_i, \pi_j\} = 0$, tem-se

$$\begin{aligned}
\{\pi_i, \pi_j\}_D &= - \begin{pmatrix} \{\pi_i, \phi_1\} & \{\pi_i, \phi_2\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2a_l a_l} \\ \frac{1}{-2a_l a_l} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\phi_1, \pi_j\} \\ \{\phi_2, \pi_j\} \end{pmatrix} \\
&= - \begin{pmatrix} -2a_i & -\pi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2a_l a_l} \\ \frac{1}{-2a_l a_l} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a_j \\ \pi_j \end{pmatrix} \\
&= \frac{a_i \pi_j}{a_l a_l} - \frac{a_j \pi_i}{a_l a_l}.
\end{aligned} \tag{5.5.26}$$

Tomando o vínculo ϕ_1 fortemente igual a zero, o parêntese de Dirac dado por (5.5.23) pode ser escrito como

$$\{\pi_i, \pi_j\}_D = a_i \pi_j - a_j \pi_i. \quad (5.5.27)$$

Logo, os seguintes parênteses de Dirac foram obtidos:

$$\{a_i, a_j\}_D = 0, \quad (5.5.28)$$

$$\{a_i, \pi_j\}_D = \delta_{ij} - a_i a_j, \quad (5.5.29)$$

$$\{\pi_i, \pi_j\}_D = a_i \pi_j - a_j \pi_i. \quad (5.5.30)$$

Logo, a quantização canônica para esse sistema pode ser efetuada utilizando a equação (5.2.11).

CAPÍTULO 6

**Formalismo Simplético de
Faddeev-Jackiw**

6.1 Quantização Simplética

Faddeev e Jackiw (11) apresentaram um econômico procedimento de quantização que elimina o cálculo dos parênteses de Poisson e as operações de rotina do método de Dirac mediante o uso de um tensor simplético. Tal procedimento é inferido a partir de uma lagrangiana de primeira-ordem (12), conforme será discutido.

Para obter uma notação mais concisa, o conjunto de coordenadas e momentos será denotado por apenas uma quantidade y^α ($\alpha = 1, 2, \dots, 2N$) (a partir desta seção, a distinção entre os índices covariantes e contravariantes passará a ser feita), em que

$$\begin{aligned} y^i &= q_i, \\ y^{N+i} &= p_i, \quad (i = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

Assim, o conjunto de parênteses de Poisson fundamentais, reduz-se simplesmente a

$$\{y^\alpha, y^\beta\} = \varepsilon^{\alpha\beta}, \quad (6.1.2)$$

em que $\varepsilon^{\alpha\beta}$ é um elemento da matriz

$$(\varepsilon^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \quad (6.1.3)$$

sendo que 0 é uma matriz nula $N \times N$ e I é a matriz identidade $N \times N$. O parêntese de Poisson entre duas quantidades $A(y)$ e $B(y)$ é dado por

$$\{A(y), B(y)\} = \varepsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha A \partial_\beta B, \quad (6.1.4)$$

onde $\partial_\alpha \equiv \partial/\partial y^\alpha$. A quantidade $\varepsilon^{\alpha\beta}$ garante a antissimetria usual dos parênteses de Poisson (para o caso bosônico) (13).

Observando a equação (6.1.2), pode-se concluir que a generalização dos parênteses de Poisson, para o caso de sistemas vinculados, é do tipo

$$\{y^\alpha, y^\beta\} = f^{\alpha\beta}, \quad (6.1.5)$$

em que $f^{\alpha\beta}$ deve ser um tensor antissimétrico e não-singular (sendo que a não-singularidade também é verificada para $\varepsilon^{\alpha\beta}$). O tensor $f^{\alpha\beta}$ é chamado de *tensor simplético*. Neste ponto,

é possível compreender em que se baseiam os métodos de Dirac e simplético. O primeiro é desenvolvido olhando-se para o lado esquerdo da equação (6.1.5), ou seja, ele procura ir generalizando os parênteses de Poisson com a inclusão dos vínculos até chegar a forma final quando todos os vínculos foram considerados. No caso do método simplético, olha-se para o lado direito da equação (6.1.5). A ideia é ir usando os vínculos com o intuito de ir deformando a estrutura geométrica da teoria até que o tensor simplético possa ser obtido (13).

Este método lida com lagrangianas de primeira ordem. É oportuno comentar que isto não é uma restrição séria, tendo em vista que todos os sistemas conhecidos que são descritos por lagrangianas quadráticas, podem ser escritos na formulação de primeira ordem. Isso é conseguido estendendo-se o espaço de configurações com a introdução de campos auxiliares. Esses são, geralmente, os momentos; mas isso não é necessariamente obrigatório (13).

Seja um sistema descrito por uma lagrangiana de primeira ordem do tipo:

$$L = A_\alpha(y)\dot{y}^\alpha - V(y). \quad (6.1.6)$$

Substituindo (6.1.6) na equação de Euler-Lagrange, obtém-se

$$f_{\alpha\beta}\dot{y}^\beta = \partial_\alpha V, \quad (6.1.7)$$

sendo $f_{\alpha\beta} = (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)$.

Caso os coeficientes $A_\alpha(y)$ sejam tais que $f_{\alpha\beta}$ seja singular, isto é, $\det(f_{\alpha\beta}) = 0$; haverá vínculos no sistema. Desta maneira, a obtenção do tensor simplético $f^{\alpha\beta}$ não pode ser feita de forma imediata. Esse problema será resolvido utilizando-se os vínculos para produzir uma espécie de deformação na estrutura geométrica, o que leva ao aparecimento de um novo tensor, que pode ser não-singular. Quando isso ocorre, a nova quantidade levará ao tensor simplético.

Seja a quantidade singular acima mencionada indicada por $f_{\alpha\beta}^{(0)}$. Considerando-se que a mesma tenha $M(M < 2N)$ modos zero $v_m^{(0)}$, com $m = 0, 1, \dots, M$. Isto significa que

$$f_{mn}^{(0)} v_n^{(0)} = 0. \quad (6.1.8)$$

Aplicando-se v_m em ambos os lados da equação (6.1.7) e usando (6.1.8), chega-se a

$$v_m^{(0)} \partial_m V = 0. \quad (6.1.9)$$

A equação (6.1.9) pode ser um vínculo Ω_m e supõe-se que o seja. Agora, introduzir-se-á o vínculo Ω_m na parte cinética da lagrangiana por meio do multiplicador de Lagrange λ_m :

$$\begin{aligned}
L^{(0)} &= A_{\alpha}^{(0)} \dot{y}^{\alpha} + \lambda_m \dot{\Omega}_m^{(0)} - V^{(0)} \\
&= A_{\alpha}^{(0)} \dot{y}^{\alpha} + \lambda_m \partial_{\alpha} \Omega_m^{(0)} \dot{y}^{\alpha} - V^{(0)} \\
&= (A_{\alpha}^{(0)} + \lambda_m \partial_{\alpha} \Omega_m^{(0)}) \dot{y}^{\alpha} - V^{(0)}.
\end{aligned} \tag{6.1.10}$$

Desta maneira, as variáveis simpléticas passam a ser $\xi_{\alpha} = (y^{\alpha}, \lambda_m)$. Através de (6.1.10) é possível identificar as quantidades $A_{y^{\alpha}}^{(1)}$ e $A_{\lambda_m}^{(1)}$:

$$A_{y^{\alpha}}^{(1)} = A_{\alpha}^{(0)} + \lambda_m \partial_{\alpha} \Omega_m^{(0)} \tag{6.1.11}$$

$$A_{\lambda_m}^{(1)} = 0. \tag{6.1.12}$$

Assim, obtém-se os novos tensores

$$f_{\alpha\beta}^{(1)} = \partial_{\alpha} A_{y^{\beta}}^{(1)} - \partial_{\beta} A_{y^{\alpha}}^{(1)} \tag{6.1.13}$$

$$f_{\alpha m}^{(1)} = \partial_{\alpha} A_{\lambda_m}^{(1)} - \partial_m A_{y^{\alpha}}^{(1)} = -\partial_m A_{y^{\alpha}}^{(1)} \tag{6.1.14}$$

$$f_{mn}^{(1)} = \partial_m A_{\lambda_n}^{(1)} - \partial_n A_{\lambda_m}^{(1)} = 0, \tag{6.1.15}$$

sendo $\partial_m \equiv \partial / \partial \lambda_m$.

Se $\det(f^{(1)}) \neq 0$, todos os vínculos da teoria foram eliminados, consegue-se obter o tensor simplético e, conseqüentemente, os parênteses de Dirac. Caso contrário, o procedimento anterior deve ser repetido quantas vezes forem necessárias (13).

6.2 Aplicação ao Modelo de Skyrme

Conforme apresentou-se na seção 5.5, a lagrangiana em primeira ordem para o modelo de Skyrme é dada por

$$L^{(0)} = \pi_i \dot{a}_i - V^{(0)}(\xi_{\alpha}^{(0)}), \tag{6.2.1}$$

em que

$$V^{(0)}(\xi_{\alpha}^{(0)}) = M + \frac{1}{8I} \pi_i \pi_i + \eta (a_i a_i - 1) \tag{6.2.2}$$

e as variáveis simpléticas são $\xi_\alpha^{(0)} = (a_i, \pi_i, \eta)$, ou seja, $\xi_1^{(0)} = a_i$, $\xi_2^{(0)} = \pi_i$ e $\xi_3^{(0)} = \eta$. Logo, obtém-se os seguintes coeficientes

$$A_1^{(0)} = \pi_i \quad (6.2.3)$$

$$A_2^{(0)} = 0 \quad (6.2.4)$$

$$A_3^{(0)} = 0. \quad (6.2.5)$$

Então, obtém-se o tensor $f_{\alpha\beta}^{(0)}$ utilizando a seguinte equação

$$f_{\alpha\beta}^{(0)} = \frac{\partial A_\beta^{(0)}}{\partial \xi_\alpha^{(0)}} - \frac{\partial A_\alpha^{(0)}}{\partial \xi_\beta^{(0)}}. \quad (6.2.6)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta}^{(0)} &= \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{\alpha\beta} & 0 \\ \delta_{\alpha\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

A matriz (6.2.7) tem o seguinte modo zero:

$$v_m^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.2.8)$$

e é singular.

A partir de (6.1.9), tem-se que

$$\begin{aligned} 0 &= v_m^{(0)} \partial_m V^{(0)} \\ &= v_1^{(0)} \partial_1 V^{(0)} + v_2^{(0)} \partial_2 V^{(0)} + v_3^{(0)} \partial_3 V^{(0)} \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left[M + \frac{1}{8I} \pi_i \pi_i + \eta (a_i a_i - 1) \right] \\ &= a_i a_i - 1 \\ &= \Omega^{(0)}. \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

A equação (6.2.9) representa um vínculo e este será introduzido na lagrangiana $L^{(0)}$ através do multiplicador de Lagrange ρ . Logo,

$$\begin{aligned} L^{(1)} &= \pi_i \dot{a}_i - V^{(1)}(\xi_\alpha^{(1)}) + \rho \dot{\Omega}^{(0)} \\ &= \pi_i \dot{a}_i - V^{(1)}(\xi_\alpha^{(1)}) + \rho (a_i \dot{a}_i) \\ &= (\pi_i + \rho a_i) \dot{a}_i - V^{(1)}(\xi_\alpha^{(1)}), \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

sendo que

$$\begin{aligned} V^{(1)}(\xi_\alpha^{(1)}) &= V^{(0)}(\xi_\alpha^{(0)}) \Big|_{\Omega^{(0)}=0} \\ &= M + \frac{1}{8I} \pi_i \pi_i. \end{aligned} \quad (6.2.11)$$

As novas variáveis simpléticas são $\xi_\alpha^{(1)} = (a_i, \pi_i, \rho)$. Desta maneira, obtém-se os seguintes coeficientes:

$$A_1^{(1)} = \pi_i + \rho a_i, \quad (6.2.12)$$

$$A_2^{(1)} = 0, \quad (6.2.13)$$

$$A_3^{(1)} = 0. \quad (6.2.14)$$

Utilizando (6.2.6), chega-se a matriz $f_{\alpha\beta}^{(1)}$

$$f_{\alpha\beta}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij} & -a_i \\ \delta_{ij} & 0 & 0 \\ a_i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.2.15)$$

sendo seu modo zero dado por

$$v_m^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_i \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (6.2.16)$$

A matriz representada por (6.2.15) também é singular, então uma nova iteração será necessária. Usando (6.1.9) novamente, chega-se a

$$\begin{aligned}
0 &= v_m^{(1)} \partial_m V^{(1)} \\
&= v_1^{(1)} \partial_1 V^{(1)} + v_2^{(1)} \partial_2 V^{(1)} + v_3^{(1)} \partial_3 V^{(1)} \\
&= a_i \frac{\partial}{\partial \pi_i} \left(M + \frac{1}{8I} \pi_i \pi_i \right) - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(M + \frac{1}{8I} \pi_i \pi_i \right) \\
&= a_i \pi_i \\
&= \Omega^{(1)}.
\end{aligned} \tag{6.2.17}$$

Este vínculo será inserido no setor cinético da lagrangiana (6.2.10), sendo assim, obtém-se

$$\begin{aligned}
L^{(2)} &= (\pi_i + \rho a_i) \dot{a}_i - V^{(2)}(\xi_\alpha^{(2)}) + \mu \dot{\Omega}^{(1)} \\
&= (\pi_i + \rho a_i) \dot{a}_i - V^{(2)}(\xi_\alpha^{(2)}) + \mu a_i \dot{\pi}_i + \mu \dot{a}_i \pi_i \\
&= (\pi_i + \rho a_i + \mu \pi_i) \dot{a}_i + \mu a_i \dot{\pi}_i - V^{(2)}(\xi_\alpha^{(2)}).
\end{aligned} \tag{6.2.18}$$

As novas variáveis simpléticas são $\xi_\alpha^{(2)} = (a_i, \pi_i, \rho, \mu)$ e o potencial simplético torna-se

$$\begin{aligned}
V^{(2)}(\xi_\alpha^{(2)}) &= V^{(1)}(\xi_\alpha^{(1)}) \Big|_{\Omega^{(1)}=0} \\
&= V^{(1)}(\xi_\alpha^{(1)}).
\end{aligned} \tag{6.2.19}$$

Agora, as quantidades $A_\alpha^{(2)}$ são dadas por

$$A_1^{(2)} = \pi_i + \rho a_i + \mu \pi_i, \tag{6.2.20}$$

$$A_2^{(2)} = \mu a_i, \tag{6.2.21}$$

$$A_3^{(2)} = 0, \tag{6.2.22}$$

$$A_4^{(2)} = 0. \tag{6.2.23}$$

E, novamente, utilizando (6.1.9), obtém-se $f_{\alpha\beta}^{(2)}$

$$f_{\alpha\beta}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij} & -a_i & -\pi_i \\ \delta_{ij} & 0 & 0 & -a_i \\ a_i & 0 & 0 & 0 \\ \pi_i & a_i & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.2.24}$$

Como a matriz (6.2.24) não é singular, é possível calcular sua inversa, obtendo o tensor simplético $f_{\alpha\beta}^{(2)}$:

$$f_{\alpha\beta} f^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}. \quad (6.2.25)$$

Portanto, tem-se que

$$f^{\alpha\beta(2)} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} - a_i a_j & a_i & 0 \\ -\delta_{ij} + a_i a_j & a_j \pi_i - a_i \pi_j & -\pi_i & a_i \\ -a_i & \pi_i & 0 & -\delta_{ij} \\ 0 & -a_i & \delta_{ij} & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.2.26)$$

A partir da matriz (6.2.26), consegue-se obter os parênteses de Dirac:

$$\{a_i, a_j\}_D = f^{11} = 0 \quad (6.2.27)$$

$$\{a_i, \pi_j\}_D = f^{12} = \delta_{ij} - a_i a_j \quad (6.2.28)$$

$$\{\pi_i, \pi_j\}_D = f^{22} = a_j \pi_i - a_i \pi_j. \quad (6.2.29)$$

Conforme o esperado, obteve-se os mesmos parênteses obtidos no capítulo referente ao formalismo de Dirac.

CAPÍTULO 7

Formalismo BFFT

7.1 Introdução ao Procedimento BFFT

Neste capítulo, será feito o uso de um formalismo canônico geral desenvolvido por Batalin, Fradkin, Fradkina e Tyutin (BFFT) (14) (15) para converter de maneira sistemática um sistema dinâmico com vínculos de segunda classe em um sistema com vínculos de primeira classe (6), introduzindo graus de liberdade extras.

Os vínculos iniciais de primeira classe (caso estejam presentes no sistema) e o hamiltoniano inicial também precisam ser convertidos em novos objetos, dependentes das variáveis extras, tal que se tenha, como um resultado, um novo hamiltoniano em involução somente com os novos vínculos de primeira classe.

Assim, dentro desta formulação, o problema de quantização de sistemas com vínculos gerais reside no fato de se reduzir esses vínculos para o caso somente de vínculos de primeira classe, para os quais o esquema de quantização já é bastante conhecido.

O conjunto completo de vínculos de primeira classe que aparecem como resultado do procedimento de conversão gera uma álgebra de calibre, chamada "álgebra de calibre efetiva". Os vínculos efetivos que surgem após a conversão podem ser abelianos ou não-abelianos.

7.2 Conversão Abeliana de Vínculos de Segunda Classe

Considera-se um sistema descrito por um hamiltoniano H no espaço de fase (q^i, p^i) com $i = 1, 2, \dots, N$. Aqui, supõe-se que as coordenadas são bosônicas. Também supõe-se que só existem vínculos de segunda classe. Denotando-os por θ_m , com $m = 1, 2, \dots, M < 2N$, tem-se que

$$\{\theta_m, \theta_{m'}\} = \Delta_{mm'}, \quad (7.2.1)$$

em que $\det(\Delta_{mm'}) \neq 0$ (16).

Conforme já foi dito, o propósito do formalismo BFFT é converter vínculos de segunda classe em vínculos de primeira classe. Tal objetivo é alcançado pela introdução de variáveis canônicas, uma para cada vínculo de segunda classe (a conexão entre o número de vínculos de segunda classe e as novas variáveis em uma correlação de uma a um é para manter o mesmo número de graus de liberdade físicos na teoria estendida resultante). As variáveis auxiliares serão denotadas por η^m e assume-se que elas têm a seguinte estrutura

$$\{\eta^m, \eta^{m'}\} = \omega^{mm'}, \quad (7.2.2)$$

onde $\omega^{mm'}$ é uma quantidade constante cujo $\det(\omega^{mm'}) \neq 0$. A obtenção de $\omega^{mm'}$ é incorporada

ao cálculo dos vínculos de primeira classe resultantes, que serão denotados por $\tilde{\theta}_m$. Os novos vínculos dependem das variáveis η^m

$$\tilde{\theta}_m = \tilde{\theta}_m(q, p; \eta) \quad (7.2.3)$$

e devem satisfazer à condição de contorno

$$\tilde{\theta}_m(q, p; 0) = \tilde{\theta}_m(q, p). \quad (7.2.4)$$

Como foi originalmente formulado, no método BFFT, os novos vínculos possuem a seguinte característica:

$$\{\tilde{\theta}_m, \tilde{\theta}_{m'}\} = 0. \quad (7.2.5)$$

A solução da equação (7.2.5) pode ser alcançada considerando que $\tilde{\theta}_m$ pode ser expandido como

$$\tilde{\theta}_m = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_m^{(n)}, \quad (7.2.6)$$

onde $\theta_m^{(n)}$ é o termo de ordem n em η . A compatibilidade com a condição de contorno (7.2.4) requer que

$$\theta_m^{(0)} = \theta_m. \quad (7.2.7)$$

A substituição de (7.2.6) em (7.2.5) leva a um conjunto de equações, um para cada coeficiente de $\eta^{(n)}$. A seguir, lista-se algumas destas equações:

$$\begin{aligned} & \{\theta_m, \theta_{m'}\} + \{\theta_m^{(1)}, \theta_{m'}^{(1)}\}_{(\eta)} = 0 \\ & \{\theta_m, \theta_{m'}^{(1)}\} + \{\theta_m^{(1)}, \theta_{m'}\} + \{\theta_m^{(1)}, \theta_{m'}^{(2)}\}_{(\eta)} + \{\theta_m^{(2)}, \theta_{m'}^{(1)}\}_{(\eta)} = 0 \\ & \{\theta_m, \theta_{m'}^{(2)}\} + \{\theta_m^{(1)}, \theta_{m'}^{(1)}\}_{(q,p)} + \{\theta_m^{(2)}, \theta_{m'}\} + \{\theta_m^{(1)}, \theta_{m'}^{(3)}\}_{(\eta)} + \{\theta_m^{(2)}, \theta_{m'}^{(2)}\}_{(\eta)} + \{\theta_m^{(3)}, \theta_{m'}^{(1)}\}_{(\eta)} = 0 \\ & \quad \vdots \end{aligned} \quad (7.2.8)$$

A notação $\{, \}_{(q,p)}$ e $\{, \}_{(\eta)}$ representa as partes dos parênteses de Poisson relativas às variáveis (q, p) e (η) , respectivamente (17).

As equações (7.2.8) são usadas iterativamente na obtenção das correções $\theta^{(n)}$ ($n \geq 1$). Com a primeira das equações apresentadas em (7.2.8), obtém-se $\theta^{(1)}$. Com este resultado e a

segunda das equações (7.2.8), calcula-se $\theta^{(2)}$, e assim por diante. Uma vez que $\theta^{(1)}$ é linear em η , é possível escrever

$$\theta_m^{(1)} = \xi_{mm''}(q, p)\eta^{m''}. \quad (7.2.9)$$

Introduzindo a equação (7.2.9) em (7.2.8) e utilizando (7.2.1) e (7.2.2), tem-se que

$$\Delta_{mm'} + \xi_{mm''}\omega^{m''m'''}\xi_{m'm'''} = 0. \quad (7.2.10)$$

Pode-se notar que a equação (7.2.10) contém duas quantidades desconhecidas, $\xi_{mm'}$ e $\omega^{mm'}$. Normalmente, $\omega^{mm'}$ é escolhida de tal maneira que as novas variáveis estejam desvinculadas. É oportuno mencionar que tal escolha nem sempre é possível. Como consequência, torna-se necessário a introdução de outras variáveis novas para que tais vínculos também passem a ser de primeira classe. Isto pode levar a um processo sem fim. Entretanto, é importante enfatizar que $\omega^{mm'}$ pode ser fixado de qualquer maneira. Depois de fixar $\omega^{mm'}$, passa-se a considerar os coeficientes $\xi_{mm'}$. Estes não podem ser obtidos univocamente, uma vez que mesmo depois de fixar $\omega^{mm'}$, a expressão (7.2.10) leva a menos equações que variáveis. A escolha dos ξ 's tem, portanto, de ser feita de uma forma conveniente (17).

Conhecer $\xi_{mm'}$ permite obter $\theta_m^{(1)}$. Se $\xi_{mm'}$ não depende de (q, p) , observa-se facilmente que $\theta_m + \theta_m^{(1)}$ é fortemente involutivo e, assim, obtém-se $\tilde{\theta}_m$. Isto é o que acontece para sistemas com vínculos lineares. Por outro lado, para vínculos não lineares, $\xi_{mm'}$ torna-se uma variável dependente que será obtida além do primeiro passo iterativo. Todas as correções subsequentes devem ser explicitamente computadas, conhecendo $\theta_m^{(n)}$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N$) chega-se a $\theta_m^{(n=1)}$.

Outro ponto do formalismo BFFT que deve ser tratado é que qualquer função $A(q, p)$, como por exemplo a hamiltoniana, também tem que ser propriamente modificada para ser fortemente involutiva com os vínculos de primeira classe $\tilde{\theta}_m$. Denotando a quantidade modificada por $\tilde{A}(q, p; \eta)$, tem-se que

$$\{\tilde{\theta}_m, \tilde{A}\} = 0. \quad (7.2.11)$$

A quantidade \tilde{A} também deve satisfazer a condição de contorno

$$\tilde{A}(q, p; 0) = \tilde{A}(q, p). \quad (7.2.12)$$

Para obter \tilde{A} , considera-se uma expressão análoga a (7.2.6):

$$\tilde{A} = \sum_{n=0}^{\infty} A^{(n)}, \quad (7.2.13)$$

em que $A^{(n)}$ também é um termo de ordem n em η . Consequentemente, a compatibilidade com (7.2.12) requer que

$$A^0 = A. \quad (7.2.14)$$

A combinação de (7.2.6), (7.2.11) e (7.2.14), leva a

$$\begin{aligned} & \{\theta_m^{(0)}, A^{(0)}\}_{(q,p)} + \{\theta_m^{(1)}, A^{(1)}\}_{(\eta)} = 0 \\ & \{\theta_m^{(0)}, A^{(1)}\}_{(q,p)} + \{\theta_m^{(1)}, A^{(0)}\}_{(q,p)} + \{\theta_m^{(1)}, A^{(2)}\}_{(\eta)} + \{\theta_m^{(2)}, A^{(1)}\}_{(\eta)} = 0 \\ & \{\theta_m^{(0)}, A^{(2)}\}_{(q,p)} + \{\theta_m^{(1)}, A^{(1)}\}_{(q,p)} + \{\theta_m^{(2)}, A^{(0)}\}_{(q,p)} + \{\theta_m^{(1)}, A^{(3)}\}_{(\eta)} + \\ & \quad + \{\theta_m^{(2)}, A^{(2)}\}_{(\eta)} + \{\theta_m^{(3)}, A^{(1)}\}_{(\eta)} = 0 \\ & \quad \vdots \end{aligned} \quad (7.2.15)$$

que correspondem, respectivamente, aos coeficientes η^0 , η^1 , η^2 etc. A partir da primeira das equações apresentadas em (7.2.15), obtém-se $A^{(1)}$:

$$A^{(1)} = -\eta^m \omega_{mm'} \xi^{m'm''} \{\theta_{m''}, A\}, \quad (7.2.16)$$

em que $\omega_{mm'}$ e $\xi^{m'm''}$ são as inversas de $\omega^{mm'}$ e $\xi_{m'm''}$, respectivamente.

Anteriormente, viu-se que $\theta_m + \theta_m^{(1)}$ era fortemente involutivo se os coeficientes $\xi_{mm'}$ não dependessem de (q, p) . Entretanto, o mesmo argumento não se aplica neste caso necessariamente. Geralmente, calcula-se as outras correções para se obter \tilde{A} , procedimento que será mostrado a seguir (16).

A correção $A^{(2)}$ vem da segunda das equações (7.2.15), que será convenientemente reescrita como

$$\{\theta_m^{(1)}, A^{(2)}\}_{(\eta)} = -G_m^{(1)}, \quad (7.2.17)$$

sendo que

$$G_m^{(1)} = \{\theta_m, A^{(1)}\}_{(q,p)} + \{\theta_m^{(1)}, A\}_{(q,p)} + \{\theta_m^{(2)}, A^{(1)}\}_{(\eta)}. \quad (7.2.18)$$

Assim,

$$A^{(2)} = -\frac{1}{2}\eta^m \omega_{mm'} \xi^{m'm''} G_{m''}^{(n)}. \quad (7.2.19)$$

Da mesma maneira, os outros termos podem ser obtidos. A expressão final geral é:

$$A^{(n+1)} = -\frac{1}{n+1}\eta^m \omega_{mm'} \xi^{m'm''} G_{m''}^{(n)}. \quad (7.2.20)$$

sendo que

$$G_m^{(n)} = \sum_{k=0}^n \{\theta_m^{(n-k)}, A^{(k)}\}_{(q,p)} + \sum_{k=0}^{n-2} \{\theta_m^{(n-k)}, A^{(k+2)}\}_{(\eta)} + \{\theta_m^{(n+1)}, A^{(1)}\}_{(\eta)}. \quad (7.2.21)$$

No método BFFT, a forma usual para obter a hamiltoniana é usar diretamente as relações (7.2.13) e (7.2.20). Isto funciona bem para sistemas com vínculos lineares. Para teorias não lineares, em que pode ser necessário considerar todas as ordens do processo iterativo, este cálculo pode tornar-se complicado. Entretanto, há um procedimento que possibilita simplificar drasticamente o trabalho algébrico. A ideia básica é obter a forma involutiva para os campos iniciais q e p . Isto pode ser alcançado diretamente da análise prévia para obter \tilde{A} . Denotando os novos campos por \tilde{q} e \tilde{p} , tem-se que (17)

$$H(q, p) \rightarrow H(\tilde{q}, \tilde{p}) = \tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p}). \quad (7.2.22)$$

Evidentemente, a condição de contorno inicial no processo BFT, isto é, a redução da função involutiva para a função original quando os novos estão definidos no zero, preserva-se (17).

7.3 Conversão Não-Abeliana de Vínculos de Segunda Classe

Agora, considera-se o caso no qual os novos vínculos de primeira classe formam uma álgebra não-abeliana, ou seja,

$$\{\tilde{\theta}_m, \tilde{\theta}_{m'}\} = C_{mm'}^{m''} \tilde{\theta}_{m''}. \quad (7.3.1)$$

se que a correção geral $H^{(n)}$ é dada por uma relação similar a (7.2.20), mas agora, a quantidade $G_m^{(n)}$ é dada por

$$G_m^{(n)} = \sum_{k=0}^n \{\theta_m^{(n-k)}, A^{(k)}\}_{(q,p)} + \sum_{k=0}^{n-2} \{\theta_m^{(n-k)}, A^{(k+2)}\}_{(\eta)} + \{\theta_m^{(n+1)}, A^{(1)}\}_{(\eta)} - B_m^{m'} \theta_{m''}^{(n)}. \quad (7.3.6)$$

7.4 Aplicação ao Modelo de Skyrme

Conforme foi visto no capítulo 5, a hamiltoniana para o modelo de Skyrme pode ser escrita como

$$H = M + \frac{1}{8I} \pi_{a_i} \pi_{a_i}. \quad (7.4.1)$$

Também foram obtidos os vínculos

$$\theta_1 = a^i a^i - 1, \quad (7.4.2)$$

$$\theta_2 = a^i \pi^i, \quad (7.4.3)$$

que são vínculos de segunda classe.

Tem-se que

$$\begin{aligned} \Delta_{mm'} &= \{\theta_m, \theta_{m'}\} \\ &= -2\varepsilon_{mm'} a^i a^i, \quad m, m' = 1, 2. \end{aligned} \quad (7.4.4)$$

sendo $\varepsilon_{mm'}$ um tensor antissimétrico normalizado com $\varepsilon_{12} = -\varepsilon^{12} = -1$.

Utilizando o formalismo BFFT, o sistema será convertido em um sistema de primeira classe. Estende-se, então, o espaço de fase através da introdução das coordenadas auxiliares η^m e a álgebra de Poisson das novas coordenadas será dada por

$$\{\eta^m, \eta^{m'}\} = \omega^{mm'}, \quad m, m' = 1, 2, \quad (7.4.5)$$

em que $\omega^{mm'}$ é uma matriz antissimétrica. Desta forma, os vínculos modificados no espaço de fase estendido são dados pela equação (7.2.6):

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_m &= \sum_{n=0}^{\infty} \theta_m^{(n)} \\ &= \theta_m + \sum_{n=1}^{\infty} \theta_m^{(n)},\end{aligned}\tag{7.4.6}$$

em que a condição de contorno

$$\tilde{\theta}_m(a^i, \pi^i, 0) = \theta_m\tag{7.4.7}$$

é satisfeita.

O termo de correção de primeira ordem na série infinita (7.4.6) é dado pela equação (7.2.9), ou seja,

$$\theta_m^{(1)} = \xi_{mm'} \eta^{m'}.\tag{7.4.8}$$

Uma possível escolha para $\omega^{m,m'}$ e $\xi_{mm'}$ que satisfaça (7.4.5) e (7.2.10) é

$$\omega^{mm'} = 2\varepsilon^{mm'}\tag{7.4.9}$$

e

$$\xi_{mm'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a^i a^i \end{pmatrix}.\tag{7.4.10}$$

Usando (7.4.6), (7.4.7), (7.4.8), (7.4.9) e (7.4.10), o conjunto dos novos vínculos será dado por

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_1 &= \theta_1 + \xi_{11} \eta^1 + \xi_{12} \eta^2 \\ &= \theta_1 + \eta^1,\end{aligned}\tag{7.4.11}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_2 &= \theta_2 + \xi_{21} \eta^1 + \xi_{22} \eta^2 \\ &= \theta_2 - a^i a^i \eta^2.\end{aligned}\tag{7.4.12}$$

Os novos vínculos são fortemente involutivos, ou seja,

$$\{\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \} = 0. \quad (7.4.13)$$

Portanto, a conversão dos vínculos de segunda classe θ_m para os de primeira classe θ'_m , está completa.

Agora, utilizando as equações (7.2.20) e (7.2.21), a correspondente hamiltoniana involutiva no espaço de fase estendido será obtida. As correções que dão \tilde{H} podem ser escritas como

$$\tilde{H}^{(n)} = -\frac{1}{n} \eta^m \omega_{mm'} \xi^{m'm''} G_m^{(n-1)} \quad (n \geq 1). \quad (7.4.14)$$

em que $G_m^{(n)}$ é dado por

$$G_m^{(0)} = \{\theta_m^{(0)}, H^{(0)}\}, \quad (7.4.15)$$

$$G_m^{(n)} = \{\theta_m^{(0)}, H^{(n)}\} + \{\theta_m^{(1)}, H^{(n-1)}\}, \quad (n \geq 1). \quad (7.4.16)$$

As matrizes $\omega_{mm'}$ e $\xi^{m'm''}$ são as inversas de $\omega^{mm'}$ e $\xi_{m'm''}$, sendo dadas por

$$\omega_{mm'} = -\frac{1}{2} \epsilon^{mm'} \quad (7.4.17)$$

e

$$\xi^{mm'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a^i a^i} \end{pmatrix}. \quad (7.4.18)$$

Usando os vínculos θ_1 e θ_2 , a hamiltoniana (7.4.1) e as equações (7.4.14), (7.4.15), (7.4.16), (7.4.17) e (7.4.18), calcula-se os termos que aparecem na série de potências da hamiltoniana involutiva e obtém-se

$$\begin{aligned} \tilde{H} = M &+ \frac{1}{8I} \left[1 - \frac{\eta^1}{a^i a^i} + \left(\frac{\eta^1}{a^i a^i} \right)^2 - \left(\frac{\eta^1}{a^i a^i} \right)^3 + \dots \right] \pi^j \pi^j + \\ &- \frac{1}{4I} \eta^2 \left[1 - \frac{\eta^1}{a^i a^i} + \left(\frac{\eta^1}{a^i a^i} \right)^2 - \left(\frac{\eta^1}{a^i a^i} \right)^3 + \dots \right] a^j \pi^j + \\ &+ \frac{1}{8I} (\eta^2)^2 \left[1 - \frac{\eta^1}{a^i a^i} + \left(\frac{\eta^1}{a^i a^i} \right)^2 - \left(\frac{\eta^1}{a^i a^i} \right)^3 + \dots \right] a^i a^i. \end{aligned} \quad (7.4.19)$$

Se o raio de convergência, $R = \frac{\eta^1}{a^i a^i}$, for menor que 1, a hamiltoniana canônica estendida pode ser somada como uma série geométrica

$$\tilde{H} = M + \frac{1}{8I} \frac{(a^i a^i)}{a^i a^i + \eta^1} \pi^j \pi^j - \frac{1}{4I} \frac{(a^i a^i) \eta^2}{a^i a^i + \eta^1} a^j \pi^j + \frac{1}{8I} \frac{(a^i a^i) (\eta^2)^2}{a^i a^i + \eta^1} \pi^j \pi^j, \quad (7.4.20)$$

que é involutiva com os vínculos de primeira classe,

$$\{\tilde{\theta}_m, \tilde{H}\} = 0, \quad m = 1, 2. \quad (7.4.21)$$

Desta forma, ao obter uma hamiltoniana de primeira classe, a quantização canônica pode ser efetuada a partir dos parênteses de Poisson, sem a necessidade de que se obtenha os parênteses de Dirac.

CAPÍTULO 8

Conclusão

8.1 Conclusão

A quantização canônica de sistemas não singulares pode ser obtida diretamente a partir da equação (4.2.8), que relaciona os parênteses de Poisson aos seus respectivos comutadores. Entretanto, para sistemas cuja matriz hessiana, que é dada por (4.2.9), é singular, as velocidades não podem mais ser escritas em função dos momentos e a quantização por meio dos parênteses de Poisson leva a inconsistências. Essas inconsistências podem ser corrigidas através da utilização de outros métodos, tal qual foi feito neste trabalho utilizando os formalismos de Dirac, BFFT e Simplético.

Ao aplicar o formalismo Dirac ao modelo de Skyrme, descobriu-se, primeiramente, todos os vínculos do sistema. Então, obteve-se os parênteses de Dirac, a partir dos quais a quantização canônica pode ser efetuada diretamente.

Já no formalismo simplético, escreveu-se a lagrangiana do modelo de Skyrme como uma lagrangiana de primeira ordem e utilizou-se os vínculos para que através de uma deformação da estrutura geométrica da teoria fosse obtido o tensor simplético, a partir do qual foi possível obter os parênteses de Dirac. Conforme era de se esperar, os resultados obtidos no formalismo de Dirac e Simplético foram os mesmos.

A partir do formalismo BFFT, converteu-se a teoria estudada em uma teoria de primeira classe através da introdução de variáveis auxiliares. Primeiramente, obteve-se novos vínculos, dados por (7.4.14) e (7.4.15), que são fortemente involutivos e, posteriormente, uma nova hamiltoniana involutiva com os vínculos de primeira classe. Desta maneira, a quantização pode ser efetuada diretamente através dos parênteses de Poisson, sem a necessidade de se obter os parênteses de Dirac.

O número de vínculos gerados no formalismo simplético é sempre menor ou igual ao número de vínculos gerados no formalismo de Dirac. No caso do modelo de Skyrme, o número de vínculos gerados foi igual em ambos os casos, não havendo nenhuma vantagem, nesse aspecto, de um formalismo em relação ao outro.

Conforme foi citado a pouco, o formalismo BFFT utiliza de uma abordagem diferente, uma vez que não tem como objetivo a obtenção dos parênteses de Dirac e sim converter o sistema em um sistema de primeira classe.

Do ponto de vista algébrico, os formalismos de Dirac e Simplético foram mais econômicos que o formalismo BFFT ao serem aplicados ao modelo de Skyrme.

8.2 Perspectivas futuras

No futuro, pretende-se aplicar novos métodos de quantização ao modelo de Skyrme, como os métodos utilizados nos formalismos Simplético de Mergulho e Unfixing (vide referên-

cias (19), (20) e (21)).

APÊNDICE A

Cálculo Variacional

Considerando-se a expressão

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(y(x), x) dx, \quad (\text{A.0.1})$$

é possível notar que I não depende da variável contínua x , uma vez que após a integração em x , o mesmo desaparece. Então, I depende apenas da função $y(x)$ e terá um valor característico para cada tipo de função $y(x)$. Portanto, I é uma função de uma outra função.

Sendo assim, I é um funcional de y e geralmente é representado da seguinte maneira:

$$I = I[y]. \quad (\text{A.0.2})$$

O cálculo variacional está relacionado aos funcionais, assim como o cálculo usual está relacionado às funções.

Para uma função $y(x)$, que passa pelos pontos P_1 e P_2 , têm-se um I extremo que pode ser máximo ou mínimo.

Para determinar para que valor de x a função $y(x)$ é um extremo, dar-se-á um acréscimo à variável x e procura-se para qual x tem-se $dy = 0$, isto é:

$$dy = y(x + dx) - y(x), \quad (\text{A.0.3})$$

em que dx e dy são quantidades infinitesimais.

Expandindo-se $y(x + dx)$ em série de Taylor em torno do ponto x e desprezando os

termos de ordem superior, tem-se

$$dy = y(x) + dx \frac{dy}{dx} + O(dx^2) - y(x) = \frac{dy}{dx} dx. \quad (\text{A.0.4})$$

Como $dx \neq 0$, tem-se que $dy = 0$ se $dy/dx = 0$. Esta é a condição de extremo de uma função $y(x)$.

Para os funcionais, o conceito de acréscimo se torna diferente, pois o valor de I depende do tipo de curva $y(x)$. Seguindo caminho semelhante, passa-se para a curva infinitamente próxima $y + \delta y$ e procura-se a variação correspondente δI . A curva $y(x)$ corresponderá a um extremo se $\delta I = 0$.

É importante notar que $dy(x)$ corresponde ao deslocamento do valor da função $y(x)$ para o deslocamento da variável x . No caso de δy , x continua o mesmo, sendo que a mudança ocorre na função.

Agora, considera-se o caso mais geral em que a função F possui a seguinte dependência

$$F = F(y(x), y'(x), x). \quad (\text{A.0.5})$$

Neste caso, I é um funcional de y e y' , isto é,

$$I = I[y, y'] \quad (\text{A.0.6})$$

e

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} F(y + \delta y, y' + \delta y', x) dx - \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', x) dx. \quad (\text{A.0.7})$$

Expandindo-se $F(y + \delta y, y' + \delta y', x)$ no entorno de y e y' , após desprezar os termos de ordem superior, tem-se que

$$F(y + \delta y, y' + \delta y', x) = F(y, y', x) + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y'. \quad (\text{A.0.8})$$

Então,

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx. \quad (\text{A.0.9})$$

Desenvolvendo-se, convenientemente, o segundo termo da integral anterior, obtém-se

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta \frac{dy}{dx} dx \quad (\text{A.0.10})$$

Os operadores δ e d/dx são totalmente independentes (δ é uma operação na qual x não varia), isto é,

$$\delta \frac{d}{dx} = \frac{d}{dx} \delta. \quad (\text{A.0.11})$$

Logo,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d}{dx} \delta y dx. \quad (\text{A.0.12})$$

Todas as funções devem passar pelos pontos P_1 e P_2 , portanto, $\delta y(x) = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx &= \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta y \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} dx \\ &= - \int_{x_1}^{x_2} \delta y \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} dx. \end{aligned} \quad (\text{A.0.13})$$

Assim,

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx. \quad (\text{A.0.14})$$

A condição de extremo $\delta I = 0$ acarreta em

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad (\text{A.0.15})$$

que representa a condição de extremo para o funcional I (5).

APÊNDICE B

Multiplicadores de Lagrange

Considera-se uma função de três variáveis independentes, $f(x, y, z)$. Para a função f ser um máximo (ou extremo), é necessário que

$$df = 0. \tag{B.0.1}$$

A condição necessária e suficiente para isso é

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \tag{B.0.2}$$

na qual

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz. \tag{B.0.3}$$

Na física, muitas vezes as variáveis x, y e z estão sujeitas a restrições de modo que deixam de ser independentes. É possível, muitas vezes, usar cada restrição para eliminar uma variável e prosseguir com um novo conjunto menor de variáveis independentes.

A utilização dos multiplicadores de Lagrange é uma técnica alternativa que pode ser aplicada quando essa eliminação de variáveis é inconveniente ou indesejável. Seja a equação de restrição

$$\phi(x, y, z) = 0, \tag{B.0.4}$$

da qual $z(x, y)$ pode ser extraída se x, y forem tomadas como as coordenadas independentes. Agora, a equação (B.0.1), não resultará mais na equação (B.0.2), porque há somente duas va-

riáveis independentes, portanto dz não é mais arbitrária. Pela diferencial total $d\phi = 0$ obtém-se então

$$-\frac{\partial\phi}{\partial z}dz = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy \quad (\text{B.0.5})$$

e, por conseguinte,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \lambda \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy \right), \quad \lambda = -\frac{f_z}{\phi_z}, \quad (\text{B.0.6})$$

admitindo $\phi_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} \neq 0$. Desta forma, é possível somar a equação (B.0.3) e um múltiplo da equação (B.0.5) para obter

$$df + \lambda d\phi = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) dz = 0. \quad (\text{B.0.7})$$

Em outras palavras, o multiplicador de Lagrange λ é escolhido de modo que

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0. \quad (\text{B.0.8})$$

Admitindo que $\partial\phi/\partial z \neq 0$. Agora, a equação (B.0.7) se torna

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) dy = 0. \quad (\text{B.0.9})$$

Contudo, agora dx e dy são arbitrários e as quantidades entre os parênteses devem se anular.

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0. \quad (\text{B.0.10})$$

Quando as equações (B.0.8) e (B.0.10) são satisfeitas, $df = 0$ e f é um extremo. Note que agora há quatro incógnitas: x , y , z e λ . A equação (B.0.4) é uma equação de restrição. Deseja-se somente, x , y , e z ; portanto, λ não precisa ser determinado. Por essa razão, λ às vezes é denominado multiplicador indeterminado de Lagrange. Esse método falhará se todos os coeficientes de λ desaparecerem no extremo, $\partial\phi/\partial x, \partial\phi/\partial y, \partial\phi/\partial z = 0$. Então é impossível resolver para λ .

Pela forma das equações (B.0.8) e (B.0.10), pode-se identificar f como uma função que assume um valor extremo sujeito a ϕ a restrição, ou pode-se identificar a restrição e f como a função ϕ .

Para um conjunto de restrições ϕ_k , então as equações (B.0.8) e (B.0.10) se tornam:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{B.0.11})$$

com um multiplicador de Lagrange λ_k para cada ϕ_k (22).

APÊNDICE C

Equação de Heisenberg

Na representação de Heisenberg, o observável $A^{(H)}$ é quem evolui no tempo e é definido como

$$A^{(H)} = \mathcal{U}^\dagger(t)A^{(S)}\mathcal{U}(t), \quad (\text{C.0.1})$$

em que $A^{(S)}$ é o observável na representação de Schrödinger e $\mathcal{U}(t)$ é o operador de evolução temporal dado por

$$\mathcal{U}(t) = e^{\frac{-iHt}{\hbar}}. \quad (\text{C.0.2})$$

Supondo que o observável $A^{(S)}$ não dependa explicitamente do tempo, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{dA^{(H)}}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{U}^\dagger}{\partial t} A^{(S)} \mathcal{U} + \mathcal{U}^\dagger A^{(S)} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} \\ &= -\frac{1}{i\hbar} \mathcal{U}^\dagger H A^{(S)} \mathcal{U} + \frac{1}{i\hbar} \mathcal{U}^\dagger A^{(S)} H \mathcal{U} \\ &= -\frac{1}{i\hbar} \mathcal{U}^\dagger H \mathcal{U} \mathcal{U}^\dagger A^{(S)} \mathcal{U} + \frac{1}{i\hbar} \mathcal{U}^\dagger A^{(S)} \mathcal{U} \mathcal{U}^\dagger H \mathcal{U} \\ &= -\frac{1}{i\hbar} H^{(H)} A^{(H)} + \frac{1}{i\hbar} A^{(H)} H^{(H)} \\ &= \frac{1}{i\hbar} [A^{(H)}, H^{(H)}], \end{aligned} \quad (\text{C.0.3})$$

que é a conhecida equação de Heisenberg do movimento (23).

Para chegar a equação de Heisenberg, foi necessário lembrar que

$$\frac{\partial \mathcal{U}^\dagger}{\partial t} = -\frac{1}{i\hbar} \mathcal{U}^\dagger H, \quad (\text{C.0.4})$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} H \mathcal{U} \quad (\text{C.0.5})$$

e

$$H^{(H)} = \mathcal{U}^\dagger H \mathcal{U}. \quad (\text{C.0.6})$$

REFERÊNCIAS

- 1 GREENWOOD, D. T. *Principles of Dynamics*. 2. ed. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1965.
- 2 LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Mechanics*. 2. ed. New York: Pergamon Press, 1969.
- 3 LEMOS, N. A. *Mecânica Analítica*. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007.
- 4 GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical Mechanics*. 3. ed. San Francisco: Addison Wesley, 2000.
- 5 NETO, J. B. *Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana*. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2004.
- 6 ROTHE, H. J.; ROTHE, K. D. *Classical and Quantum Dynamics of Constrained Hamiltonian Systems*. 1. ed. Singapore: World Scientific, 2010.
- 7 DIRAC, P. A. M. *Lectures on Quantum Mechanics*. 1. ed. New York: Belfer Graduate School of Science, 1964.
- 8 GOMES, M. O. C. *Teoria Quântica dos Campos*. 2. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2002.
- 9 SUNDERMEYER, K. *Constrained Dynamics*. 1. ed. New York: Springer-Verlag, 1982.
- 10 NETO, J. A. Remarks on the collective quantization of the $su(2)$ skyrme model. *Int. J. Mod. Phys.*, v. 1, 1994.
- 11 FADDEEV, L.; JACKIW, R. Hamiltonian reduction of unconstrained and constrained systems. *Physical Review Letters*, v. 60, n. 17, 1988.
- 12 XIAONING, X. U. Faddeev-jackiw quantization and its application to the linear sigma model for disoriented chiral condensates. *Commun. Theor. Phys.*, v. 29, n. 2, 1998.
- 13 NETO, J. B.; SILVA, M. B. D. Symplectic quantization for reducible systems. *Int. J. Mod. Phys.*, v. 1, 1994.
- 14 BATALIN, I. A.; TYUTIN, I. V. *Int. J. Mod. Phys.*, 1991.
- 15 BATALIN, I. A.; FRADKIN, E. S. *Phys. Lett.*, 1987.

- 16 NETO, J. B.; AMORIM, R.; WOTZASEK, C. Partially embedding of the quantum mechanical analog of the nonlinear sigma model. *Int. J. Mod. Phys.*, 2000.
- 17 NETO, J. B.; OLIVEIRA, W. Gauging the nonlinear sigma-model through a non-abelian algebra. *Int. J. Mod. Phys.*, v. 1, 1997.
- 18 OLIVEIRA, W.; NETO, J. A. The non-abelian bfft formalism for the collective coordinates quantization of the su(2) skyrme model. *Int. J. Mod. Phys.*, v. 1, 2000.
- 19 HARADA, K.; MUKAIDA, H. *Z. Phys. C Part. Fields*, v. 48, n. 51, 1990.
- 20 MITRA, P.; RAJARAMAN, R. *Ann. Phys. (N.Y.)*, v. 203, n. 157, 1990.
- 21 VYTHEESWARAN, A. S. *Ann. Phys. (N.Y.)*, v. 206, n. 297, 1994.
- 22 ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Física Matemática - Métodos Matemáticos para Engenharia e Física*. 1. ed. São Paulo: Campus Elsevier, 2007.
- 23 SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. *Modern Quantum Mechanics*. 2. ed. Boston: Addison Wesley, 2010.