

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas / Faculdade de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional

William Massayuki Sakaguchi Yamashita

Modelagem física e computacional da dinâmica populacional do mosquito
Aedes aegypti

Juiz de Fora

2018

William Massayuki Sakaguchi Yamashita

Modelagem física e computacional da dinâmica populacional do mosquito
Aedes aegypti

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Modelagem Computacional.

Orientador: Prof. D.Sc. Grigori Chapiro

Juiz de Fora

2018

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Yamashita, William Massayuki Sakaguchi.

Modelagem física e computacional da dinâmica populacional do mosquito
Aedes aegypti / William Massayuki Sakaguchi Yamashita. – 2018.

71 f. : il.

Orientador: Prof. D.Sc. Grigori Chapiro

Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de
Ciências Exatas / Faculdade de Engenharia. Programa de Pós-Graduação
em Modelagem Computacional, 2018.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Método de volumes finitos. 3.
Dinâmica populacional. I. Chapiro, Grigori, orient. II. Título.

William Massayuki Sakaguchi Yamashita

Modelagem física e computacional da dinâmica populacional do mosquito
Aedes aegypti

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Modelagem Computacional.

Aprovada em: 17 de Agosto de 2018.

BANCA EXAMINADORA



Prof. D.Sc. Grigori Chapiro - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora



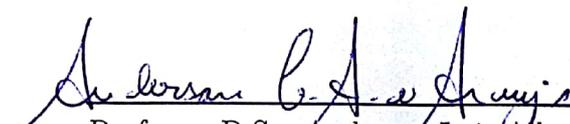
Professor D.Sc. Rafael Alves Bonfim de Queiroz
Universidade Federal de Juiz de Fora



Professora D.Sc. Lucy Tiemi Takahashi
Universidade Federal de Juiz de Fora



Professor D.Sc. Maicon Ribeiro Correa
Universidade Estadual de Campinas



Professor D.Sc. Anderson Luis Albuquerque de Araujo
Universidade Federal de Viçosa

AGRADECIMENTOS

A minha mãe, dona Regina, que sempre me apoiou para alcançar meus objetivos. Ao meu pai e ao meu avô, que mesmo não estando aqui neste plano, sei que me protegem. A minha namorada que teve muita paciência nesses anos de estudos. Aos meus amigos que sempre me acompanharam e me ajudaram. Ao Shyam, pelo ajuda no desenvolvimento e conclusão do artigo desta tese. Ao professor Rodrigo pelo auxílio nestes 4 anos de doutorado. Ao meu orientador, Grigori, que me guiou por 8 anos até aqui.

Agradeço os professores Maicon, Anderson e Rafael e a professora Lucy por aceitarem participar desta banca examinadora e por suas contribuições a este trabalho.

Agradeço também à UFJF, ao PPGMC e seus funcionários que sempre me ajudaram e a CAPES pelo auxílio financeiro.

RESUMO

A incidência global dos vírus da Dengue e, mais recentemente, do Zika, Chikungunya e Febre Amarela, tem aumentado o interesse em estudar e compreender a dinâmica populacional do mosquito. Essas doenças são predominantemente disseminadas pelo *Aedes aegypti* nos países tropicais e subtropicais do mundo. Compreender essa dinâmica é importante para a saúde pública nos países, onde as condições climáticas e ambientais são favoráveis para a propagação destas doenças. Por essa razão, modelos que estudam a dinâmica populacional em uma cidade são de suma importância. Este trabalho discute a modelagem numérica da dinâmica populacional do mosquito *Aedes aegypti* em uma vizinhança urbana de uma cidade. Em um primeiro momento, apresentamos os resultados teóricos preliminares de modelos unidimensionais. Em seguida, propomos um modelo bidimensional utilizando equações diferenciais parciais. Este modelo permite incorporar fatores externos (vento e inseticidas químicos) e dados topográficos (ruas, blocos de construção, parques, florestas e praias). O modelo proposto foi testado em exemplos envolvendo duas cidades brasileiras (o centro da cidade de Juiz de Fora e a Praia de Copacabana no Rio de Janeiro).

Palavras-chave: Equações diferenciais parciais. Método de volumes finitos. Dinâmica populacional.

ABSTRACT

The global incidence of the Dengue virus and, more recently, the Zika, Chikungunya and Yellow Fever, has increased interest in studying and understanding the population dynamics of the mosquito. These diseases are predominantly disseminated by *Aedes aegypti* in the tropical and subtropical countries of the world. Understanding this dynamics is important for public health in countries, where climatic and environmental conditions are favorable for the spread of these diseases. For this reason, models that study the population dynamics in a city are of short importance. This work discusses the numerical modeling of the population dynamics of the mosquito *Aedes aegypti* in an urban neighborhood of a city. First, we present the preliminary theoretical results of one-dimensional models. Next, we propose a two-dimensional model using partial differential equations. This model allows incorporating external factors (wind and chemical insecticides) and topographic data (streets, building blocks, parks, forests and beaches). The proposed model was tested in examples involving two Brazilian cities (the city center of Juiz de Fora and Copacabana Beach in Rio de Janeiro).

Key-words: Partial differential equations. Finite volume method. Population dynamics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Representação esquemática da órbita heteroclínica (Γ), onde W_A^u e W_B^s são as variedades instáveis e estáveis.	31
Figura 2 – Solução numérica do Sistema (2.2) para os tempos $t = 0; 1, 5; 3; 4, 5; 5, 625$ dias utilizando os valores dos parâmetros da Tab. 1.	32
Figura 3 – A integração numérica começa em pequenos círculos contidos em E_A^u e E_B^s centrados nos pontos de equilíbrios A e B , respectivamente. O plano de Poincaré Π é indicado por duas linhas retas; ele intercepta a variedade instável W_A^u e a variedade estável W_B^s nos pontos indicados por estrelas (*).	34
Figura 4 – O plano de Poincaré Π da Fig. 3 indicando os conjuntos de interseção P_A^u ($P_A^u \approx W_A^u \cap \Pi$) e P_B^s ($P_B^s \approx W_B^s \cap \Pi$). O ponto P representa a interseção entre as duas variedades indicando a existência da órbita heteroclínica conectando o ponto de equilíbrio A ao ponto de equilíbrio B	35
Figura 5 – Perfis de invasão contra o fluxo para a fase alada (esquerda) e fase aquática (direita) obtidos usando o método semi-analítico e a simulação numérica direta.	35
Figura 6 – O plano de Poincaré Π , obtido da mesma forma que o da Fig. 3, indicando os conjuntos de interseções P_A^s ($P_A^s \approx W_A^s \cap \Pi$) e P_B^u ($P_B^u \approx W_B^u \cap \Pi$). O ponto P representa a interseção entre as duas variedades indicando a existência da órbita heteroclínica conectando o ponto de equilíbrio B ao ponto de equilíbrio A	36
Figura 7 – Os perfis de invasão ao longo do fluxo para a fase alada (esquerda) e fase aquática (direita) obtidos usando o método semi-analítico e a simulação numérica direta.	36
Figura 8 – A solução numérica do Sistema (2.2) para os tempos $t = 0, 3, 6, 9, 15$ dias.	37
Figura 9 – A integração numérica começa em pequenos círculos contidos em E_A^u e E_B^s centrados nos pontos de equilíbrios A e B , respectivamente. O plano de Poincaré Π é indicado por duas linhas retas; ele intercepta a variedade instável W_A^u e a variedade estável W_B^s nos pontos indicados por estrelas (*).	39
Figura 10 – O plano de Poincaré Π da Fig. 9 indicando os conjuntos de interseções P_A^u ($P_A^u \approx W_A^u \cap \Pi$) e P_B^s ($P_B^s \approx W_B^s \cap \Pi$). O ponto P representa a interseção entre as duas variedades indicando a existência da órbita heteroclínica conectando o ponto de equilíbrio A ao ponto de equilíbrio B	39

Figura 11 – Perfis de invasão contra o fluxo para a fase alada (esquerda) e fase aquática (direita) obtidos usando o método semi-analítico e a simulação numérica direta.	40
Figura 12 – O plano de Poincaré Π da Fig. 9 indicando os conjuntos das interseções P_A^s ($P_A^s \approx W_A^s \cap \Pi$) e P_B^u ($P_B^u \approx W_B^u \cap \Pi$). O ponto P representa a interseção entre as duas variedades indicando a existência da órbita heteroclínica conectando o ponto de equilíbrio B ao equilíbrio A	41
Figura 13 – Os perfis de invasão ao longo do fluxo para a fase alada (esquerda) e fase aquática (direita) obtidos usando o método semi-analítico e a simulação numérica direta.	41
Figura 14 – No caso da invasão contra o fluxo, parte real dos autovalores das matrizes da Eq. (2.26) para diferentes valores da velocidade da onda viajante c	42
Figura 15 – No caso da invasão ao longo do fluxo, a figura mostra a parte real dos autovalores da matriz dada na Eq. (2.26) para diferentes valores da velocidade da onda viajante c	43
Figura 16 – Área 1: domínio computacional do Exemplo 1 para as funções ψ , v_x , v_y , D_x , D_y , h_1 , e h_2 , incluindo blocos (em vermelho) e ruas (em azul). Os valores são dados na Tabela 4.	46
Figura 17 – Área 2: visão ampliada do centro de Juiz de Fora e seus arredores. Imagem do Google Maps de Juiz de Fora (escala $1,0cm = 200m$). A área marcada no mapa (vermelho) é mostrada na Fig. 18(a).	46
Figura 18 – Área 2: a pequena vizinhança da cidade de Juiz de Fora (Parque Halfeld).	47
Figura 19 – Área 3: visão ampliada de Copacabana no Rio de Janeiro e seus arredores. Imagem do Google Maps do Rio de Janeiro (praia de Copacabana, escala $1,0cm = 500m$). A área marcada no mapa (em vermelho) é mostrada na Fig. 20(a).	47
Figura 20 – Área 3: a vizinhança da praia de Copacabana, cidade do Rio de Janeiro.	48
Figura 21 – Exemplo 3: domínio computacional para as funções h_1 , e h_2 para Juiz de Fora, onde o inseticida químico é representado pela cor cinza.	50
Figura 22 – Representação de uma “célula” (x_i, y_j)	51
Figura 23 – Exemplo 1: condição inicial para ambas as populações ($t = 0$).	55
Figura 24 – Exemplo 1: propagação das populações dentro dos blocos genéricos ($t = 21$ dias).	55
Figura 25 – Exemplo 1: propagação das populações dentro dos blocos genéricos ($t = 42$ dias).	56
Figura 26 – Exemplo 2: condição inicial para ambas as populações em Juiz de Fora ($t = 0$).	57

Figura 27 – Exemplo 2: propagação das populações em Juiz de Fora ($t = 21$ dias).	57
Figura 28 – Exemplo 2: propagação das populações em Juiz de Fora ($t = 42$ dias).	58
Figura 29 – Exemplo 3 (uma rua com inseticidas químicos): propagação das populações em Juiz de Fora ($t = 21$ dias).	59
Figura 30 – Exemplo 3 (uma rua com inseticidas químicos): propagação das populações em Juiz de Fora ($t = 42$ dias).	59
Figura 31 – Exemplo 3 (todas as ruas com inseticidas químicos): propagação das populações em Juiz de Fora ($t = 21$ dias).	60
Figura 32 – Exemplo 3 (todas as ruas com inseticidas químicos): propagação das populações em Juiz de Fora ($t = 42$ dias).	61
Figura 33 – Comparação entre os Exemplos 2 e 3, onde a linha vermelha representa a população total sem tratamento, o azul com inseticidas químicos em uma rua e o preto com inseticidas químicos em todas as ruas, mantendo a mesma quantidade total de inseticidas.	61
Figura 34 – Exemplo 4: condição inicial para ambas as populações na Praia de Copacabana ($t = 0$).	63
Figura 35 – Exemplo 4: propagação das populações na Praia de Copacabana ($t = 21$ dias).	64
Figura 36 – Exemplo 4: propagação das populações na Praia de Copacabana ($t = 42$ dias).	64

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Os valores dos parâmetros dimensionais para o seguinte sistema de unidades: espaço $\bar{x} = km$ e tempo $\bar{t} = 1 dia$	32
Tabela 2 – Os valores dos parâmetros adimensionais.	32
Tabela 3 – Valores de parâmetros dimensionais usados em todas as simulações.	54
Tabela 4 – Valores dos parâmetros dimensionais usados no Exemplo 1.	54
Tabela 5 – Valores dos parâmetros dimensionais comuns usados para os exemplos 2 e 3 (Juiz de Fora).	56
Tabela 6 – Valores de parâmetros dimensionais para o Exemplo 3 (inseticidas químicos usados em uma rua na horizontal).	58
Tabela 7 – Valores dos parâmetros dimensionais para o Exemplo 3 (inseticidas químicos usados em todas as ruas).	60
Tabela 8 – Valores de parâmetros dimensionais usados no Exemplo 4 (Praia de Copacabana, Rio de Janeiro).	62
Tabela 9 – Os valores utilizados na velocidade do vento: dentro dos blocos, na rua e na praia.	63

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<i>A. aegypti</i>	<i>Aedes aegypti</i>
EDO	equação diferencial ordinária
EDP	equação diferencial parcial
OMS	Organização Mundial da Saúde
MVF	método de volumes finitos
CFL	Courant-Friedrichs-Lewy

LISTA DE SÍMBOLOS

Capítulo 2

$E(x, t), L(x, t), P(x, t)$ e $M(x, t)$	densidades nas fases de ovos, larvas, pupas e mosquitos fêmeas aladas, respectivamente
δ_j	taxa de mortalidade (passagem da fase j para a fase $j+1$, para $j = 0, 1, 2$)
γ_j	taxa de mudança de fase, para $j = 0, 1, 2$, que corresponde a passagem da fase E para L (γ_0), de L para P (γ_1), de P para M (γ_2)
r	taxa de oviposição
\bar{A}, A	ovos, larvas e pupas compõem a fase aquática e estática (dimensional, adimensional)
\bar{M}, M	mosquitos fêmeas compõem a sua fase alada e móvel (dimensional, adimensional)
M_0 e A_0	condições iniciais (fase alada e fase aquática)
\bar{x}, x	espaço (dimensional, adimensional)
\bar{t}, t	tempo (dimensional, adimensional)
\bar{D}	coeficiente de difusão (dimensional)
$\bar{\nu}, \nu$	coeficiente de advecção (dimensional, adimensional)
$\partial\bar{M}/\partial x = \bar{M}_x, \partial^2\bar{M}/\partial x^2 = \bar{M}_{xx}, \partial\bar{M}/\partial t = \bar{M}_t$	derivadas parciais de \bar{M}
$\bar{\mu}_i, \mu_i$	taxa de mortalidade ($i = 1$ fase alada; $i = 2$ fase aquática; dimensionais, adimensional)
\bar{k}_i	capacidade suporte ($i = 1$ fase alada; $i = 2$ fase aquática; dimensionais)
k	capacidade suporte (adimensional)
$\bar{\gamma}, \gamma$	taxa de maturação da forma aquática para a forma alada dos mosquitos fêmeas (dimensional, adimensional)
\bar{r}	taxa de oviposição pelos mosquitos fêmeas (dimensional)
ξ	variável viajante

c	velocidade de propagação (constante) da onda viajante
$m(\xi)$	perfil de ondas da densidade populacional da fase alada
$a(\xi)$	perfil de ondas da densidade populacional da fase aquática
$(\cdot)'$	primeira derivada em ξ
Ω	subconjunto aberto de \mathbb{R}^n
$\beta(y, t)$	órbita que passa pelo ponto y no tempo t
$W_{x_0}^s$	variedade estável de $x_0 \in \mathbb{R}^n$
$W_{x_0}^u$	variedade instável de $x_0 \in \mathbb{R}^n$
$J(\cdot)$	matriz Jacobiana
λ_i	autovalores da Jacobiana
w_i	autovetores correspondentes aos λ_i
s_i	os autovetores que correspondem aos autovalores com parte real negativa ($Real(\lambda_i) < 0$)
u_j	os autovetores que correspondem aos autovalores com parte real positiva ($Real(\lambda_j) > 0$)
E^s	espaço linear estável
E^u	espaço linear instável
Π	plano de Poincaré ou Sotomayor
\vec{N}	vetor normal ao plano de Poincaré (Π)
ζ	soluções geradas a partir de integrações numéricas
θ	ângulos entre 0 e 2π utilizados para as integrações numéricas próximas aos pontos de equilíbrios
$P_A^u, P_B^s, P_A^s, P_B^u$	conjunto de pontos de interseções gerados a partir de integrações numéricas e o plano Π
Γ	órbita heteroclínica

C_{al}, c_{al}	velocidade de propagação da onda viajante ao longo do fluxo (em km/dia , adimensional)
C_{ag}, c_{ag}	velocidade de propagação da onda viajante contra o fluxo (em km/dia , adimensional)

Capítulo 3

(x, y)	espaço
t	tempo
$M(x, y, t)$	densidade da fase alada
$A(x, y, t)$	densidade da fase aquática
$\psi(x, y)$	representa o coeficiente de suporte de área de mosquitos,
$v(x, y, t)$	velocidade do vento
v_x	velocidade do vento (na direção X)
v_y	velocidade do vento (na direção Y)
$D(x, y)$	coeficiente de difusão
D_x	coeficiente de difusão (na direção X)
D_y	coeficiente de difusão (na direção Y)
μ_i	a taxa de mortalidade ($i = 1$ fase alada; $i = 2$ fase aquática)
k_i	capacidade suporte ($i = 1$ fase alada; $i = 2$ fase aquática)
γ	taxa específica de maturação da fase aquática para a fase alada
r	taxa de oviposição das fêmeas dos mosquitos
$h_i(x, y, t)$	taxa de mortalidade por produtos químicos ($i = 1$ fase alada; $i = 2$ fase aquática)
Ω	domínio do problema
$\partial_x(\cdot), \partial_y(\cdot)$	fluxo na fronteira

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	O MOSQUITO <i>Aedes Aegypti</i>	16
1.2	MOTIVAÇÃO	17
1.3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	18
1.4	ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	20
2	MODELOS UNIDIMENSIONAIS	21
2.1	DINÂMICA POPULACIONAL	21
2.1.1	Modelo 1	21
2.1.2	Modelo 2	22
2.2	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NÃO-LINEARES	23
2.2.1	Teorema de Hartman-Grobman e Teorema da Variedade Estável	24
2.3	ONDAS VIAJANTES	26
2.3.1	Seção de Poincaré	29
2.3.2	Método semi-analítico	29
2.4	RESULTADOS NUMÉRICOS: MODELO 1	31
2.4.1	Simulação numérica direta	31
2.4.2	Método semi-analítico: invasão contra o fluxo	33
2.4.3	Método semi-analítico: invasão ao longo do fluxo	34
2.5	RESULTADOS NUMÉRICOS: MODELO 2	37
2.5.1	Simulação numérica direta	37
2.5.2	Método semi-analítico: invasão contra o fluxo	38
2.5.3	Método semi-analítico: invasão ao longo do fluxo	40
2.6	ESTABILIDADE ESTRUTURAL DA SOLUÇÃO DE ONDA VIAJANTE PARA O MODELO 1	40
2.7	CONCLUSÕES PARCIAIS	43
3	MODELO BIDIMENSIONAL	44
3.1	MODELAGEM MATEMÁTICA	44
3.2	ÁREAS DE ESTUDO	45
3.3	APLICAÇÃO DE INSETICIDAS	48
3.4	CONDIÇÕES DE CONTORNO	49
3.5	MÉTODOS NUMÉRICOS	50

4	RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES USANDO O MODELO BIDIMENSIONAL	53
4.1	EXEMPLO 1 - BLOCOS GENÉRICOS	53
4.2	EXEMPLO 2 - CENTRO DA CIDADE DE JUIZ DE FORA	55
4.3	EXEMPLO 3 - CENTRO DA CIDADE DE JUIZ DE FORA COM INSETICIDAS QUÍMICOS	57
4.3.1	Centro da cidade de Juiz de Fora com inseticidas em uma rua na horizontal	58
4.3.2	Centro da cidade de Juiz de Fora com inseticidas em todas as ruas . . .	60
4.4	EXEMPLO 4 - PRAIA DE COPACABANA, RIO DE JANEIRO	62
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	65
	REFERÊNCIAS	67

1 INTRODUÇÃO

1.1 O MOSQUITO *Aedes aegypti*

O mosquito *Aedes aegypti* (Linnaeus, 1762) pertence ao Filo Arthropoda (pés articulados), Classe Insecta, Ordem Diptera (um par de asas anterior funcional e um par posterior transformado em halteres), Família Culicidae e Gênero Aedes [42]. Esse mosquito é originário da África e foi descrito primeiramente no Egito [41]. Ele tem acompanhado o homem em sua longa e ininterrupta migração pelo mundo e permaneceu onde as alterações antrópicas propiciaram sua proliferação [36]. Acredita-se que ele chegou à América a bordo de barcos que vinham da Europa no período colonial. No Brasil, o primeiro registro da ocorrência do *A. aegypti* é do ano de 1898. A partir de então, esse mosquito espalhou-se pelo país, graças à temperatura e à umidade, que tornam o local propício para a sua proliferação [41]. Outro aspecto que favoreceu sua dispersão para outras áreas foi o transporte pelo homem.

O ciclo de desenvolvimento dos mosquitos *A. aegypti* compreende quatro fases, ovo, larva (quatro estágios larvários), pupa e adulto. Os ovos do *A. aegypti* medem aproximadamente 1 mm. De cor leitosa próximo ao branco, tornam-se em poucos minutos negros e brilhantes, como forma de camuflagem. Por postura, a fêmea deposita entre 5 e 500 ovos, disseminando-os próximo à linha d'água. Os quatro estágios da fase de larva duram cerca de 10 dias, podendo se prolongar por algumas semanas de acordo com as condições climáticas. A larva se alimenta de substâncias orgânicas presentes na água, como bactérias, fungos e protozoários. A pupa basicamente não se alimenta e permanece na superfície da água para facilitar a emergência do inseto adulto. Esta fase dura entre 48 e 72 horas. Ao emergir, o inseto adulto permanece pousado durante algumas horas para o endurecimento do seu exoesqueleto e das asas. Após 24 horas, já está pronto para copular, o que ocorre normalmente durante o voo. Uma única cópula é responsável em fecundar todos os ovos que a fêmea venha a produzir durante toda sua vida, ou seja aproximadamente 35 dias que é o tempo médio de vida adulta do inseto [13].

Apesar de ter um alcance de voo de 300 metros, permanecendo próximo ao local onde nasceu, uma fêmea fecundada pode voar até 3 km em busca de local adequado para a postura dos ovos [42]. Um aspecto que favorece a reprodução é o fato da fêmea distribuir seus ovos por diferentes pontos, não depositando todos em um único local. Esses ovos, após secarem, podem ficar até um ano nesses locais. Com as chuvas, eles eclodem em apenas 10 minutos de contato com a água [50]. O macho e a fêmea alimentam-se da seiva das plantas (fitófagos), mas a fêmea precisa da proteína do sangue para amadurecer seus ovos [42]. Embora a atividade do *A. aegypti* seja predominantemente durante o dia, ele é

um mosquito oportunista, podendo aproveitar uma ocasião favorável para se alimentar mesmo durante a noite [50].

1.2 MOTIVAÇÃO

O mosquito *A. aegypti* se domesticou e se adaptou ao ambiente urbano, tornando-se antropofílico (organismo adaptado a parasitar ou infectar o homem). Esse processo adaptativo vem permitindo a sua rápida difusão espacial utilizando os mais diversos meios de transporte e o seu explosivo crescimento nas áreas urbanas [1]. Por isso, há um interesse renovado em controlar a proliferação do mosquito *A. aegypti*, que é o transmissor do vírus da dengue, febre amarela e mais recentemente, chikungunya e zika vírus [5, 6].

O mosquito *A. aegypti* é o principal transmissor do vírus da dengue [53]. A dengue é considerada um dos principais problemas de saúde pública no mundo pela Organização Mundial da Saúde (OMS) [2]. Estima-se que 3,9 bilhões de pessoas, em 128 países, estão em risco de infecção com o vírus da dengue [53]. É a doença transmitida por vetores que mais rapidamente se dissemina no mundo [52] e infecta cerca de 400 milhões de pessoas a cada ano, causando cerca de 25 mil mortes e um enorme custo econômico nos países afetados [28]. Nos últimos 50 anos, esta doença endêmica cresceu 30 vezes com o aumento da expansão geográfica para novos países e, na presente década, dos cenários urbanos para o rural [52]. Essa tendência ascendente deve-se ao aumento das viagens de longa distância, do crescimento populacional, da urbanização, da falta de saneamento e do controle ineficaz dos mosquitos [24].

No Brasil, a dengue é um grave problema de saúde devido ao clima favorável e condições ambientais para a proliferação da população de mosquitos do *A. aegypti* [46]. Foi relatado que 70% de casos de dengue nos países da América Latina e do Caribe ocorreram apenas no Brasil (de 1992 a 2002), onde o número de casos aumentou bastante nos últimos anos [48]. O Brasil relatou mais de 1,5 milhão de casos em 2015, cerca de 3 vezes mais do que em 2014 [53]. Além da dengue, o zika vírus emergiu como uma das ameaças mais desafiadoras para a saúde [28]. Ele se espalhou rapidamente em todas as Américas desde 2015. chikungunya e febre amarela são doenças dolorosas e debilitantes que podem ser fatais e ambas experimentaram epidemias nos últimos anos [28].

Em 2016, foram notificados 528.441 casos prováveis e incidências de dengue, 1.431 casos prováveis e incidências de febre chikungunya e 14.436 casos prováveis e incidências de febre do Zika vírus no estado de Minas Gerais [22]. Na cidade de Juiz de Fora, foram notificados 19.746 casos de dengue em 2016 [34].

O Rio de Janeiro tornou-se uma das cidades mais endêmicas do Brasil, com uma

longa história de circulação do vírus da dengue. Em 2016, 85.200 casos prováveis e incidências de dengue, 17.888 casos prováveis e incidência de febre chikungunya e 68.542 casos prováveis e incidência de zika vírus foram relatados no estado do Rio de Janeiro [22]. Somente em 2016, 25.837 casos de dengue foram registrados na cidade do Rio de Janeiro [35].

Desde dezembro de 2016, o Brasil vive um dos maiores surtos de febre amarela por transmissão silvestre da sua história, com ocorrência em estados da região Sudeste, principalmente Minas Gerais e Espírito Santo, mas também no Rio de Janeiro e em São Paulo [6]. Entre 1º de julho de 2017 e 16 de maio de 2018, 1.266 casos humanos confirmados de febre amarela foram registrados no Brasil, incluindo 415 mortes [23]. Esse número é superior ao relatado para o mesmo período de 2016/2017 (576 casos confirmados, incluindo 184 óbitos) [54]. Este aumento é provavelmente devido ao vírus da febre amarela circulando em áreas do país que têm a população mais concentrada e que vivem em áreas onde a vacinação contra a febre amarela não era recomendada anteriormente [54]. Números de óbitos confirmados foram relatados (em ordem decrescente) nos estados de Minas Gerais (177 óbitos), São Paulo (163 óbitos) e Rio de Janeiro (73 óbitos), Espírito Santo (1 óbito) e no Distrito Federal (1 óbito) [23].

Assim, a epidemia de doenças transmitidas pelo *A. aegypti* constitui um dos maiores problemas de saúde pública do Brasil, razão pela qual, ao lado de pesquisas voltadas para o desenvolvimento de produtos, técnicas, inovações e invenções capazes de controlar esta doença, se faz necessário, também, direcionar esforços e aporte de recursos para investigações que contribuam para o aperfeiçoamento das tecnologias e estratégias de controle já disponíveis, com o objetivo de corroborar maior efetividade às ações dos atuais programas de combate vetorial [47].

1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Visando reunir e classificar as principais contribuições de vários autores ao longo dos anos, o autor de [25] descreve os trabalhos com uma abordagem simples, sem se aprofundar em detalhes matemáticos. O trabalho também trata de aspectos estatísticos para determinar a periodicidade de epidemias, co-circulação de diferentes sorotipos (relevantes para a patogênese da febre hemorrágica da dengue) e é discutida a importância da heterogeneidade espacial.

A fim de minimizar os custos sociais e econômicos, o autor de [10] analisa o problema de controle do vetor da dengue em uma abordagem de otimização multiobjetivo usando um modelo matemático dinâmico, representando a população dos mosquitos. Em [37] temos

uma aplicação da teoria de controle ótimo para epidemias de dengue. O modelo dinâmico é descrito por um conjunto de equações diferenciais ordinárias (EDOs) não-lineares, que dependem da dinâmica do mosquito da dengue, o número de indivíduos infectados, e a motivação das pessoas para combater o mosquito. O custo funcional depende não só sobre os custos do tratamento médico das pessoas infectadas, mas também sobre os custos relacionados com campanhas de educação e saneamento.

Em [38], um modelo para a transmissão da doença é apresentado, composto por EDOs. O objetivo é simular os efeitos da sazonalidade, na capacidade vetorial e, conseqüentemente, sobre o desenvolvimento da doença. Usando informações entomológicas sobre o comportamento do mosquito sob diferentes temperaturas e precipitações, simulações são realizadas, e os resultados analisados. Analisa-se também a sensibilidade dos parâmetros do modelo. Finalmente, um problema de controle ótimo é proposto e resolvido, ilustrando a dificuldade entre a redução dos indivíduos infectados e dos custos com inseticidas.

Há várias abordagens de modelos se desenvolvendo no estudo das invasões biológicas e propagação de doenças. Em [46, 20], os autores estudam a dinâmica populacional espacial do *A. aegypti* usando equações diferenciais parciais (EDPs) descrevendo o ciclo de vida do mosquito *A. aegypti* e também determinam a existência de soluções na forma de ondas viajantes.

Os autores de [9] propõem uma generalização de um modelo matemático para a propagação geográfica da doença da dengue proposto por [20]. Para isso, utilizam EDPs não-lineares que permitem dimensões espaciais mais elevadas e também parâmetros dependentes do espaço e tempo. Esta generalização é feita para lidar com possíveis efeitos abióticos como variações de temperatura, umidade, velocidade do vento, capacidades de transporte e assim por diante, tornando os resultados mais realistas. Além disso, também consideram efeitos de termos adicionais de controle. Realizam uma análise matemática rigorosa e apresentam um resultado na existência e unicidade de soluções do problema.

Em [11, 12] foram propostos modelos considerando diferentes efeitos de difusão (dispersão) e de advecção (vento). Os autores descreveram os modelos de EDPs para a dinâmica populacional espacial do *A. aegypti* e utilizaram simetrias de Lie [16, 27] para explicitar algumas classes de soluções.

Em [21] é proposta uma técnica numérica, sem oscilação, para calcular a solução em forma de onda viajante com um termo de fonte rígido. Este procedimento é baseado no comportamento dinâmico descrito pela EDO estacionária e reduz erros numéricos normalmente encontrados com estes problemas.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

O Capítulo 2 apresenta modelos unidimensionais, suas soluções numéricas e resume os trabalhos preliminares. O Capítulo 3 aborda os conceitos para descrever o modelo proposto. O Capítulo 4 apresenta quatro exemplos no qual o modelo proposto mostra a proliferação da população de *A. aegypti* no ambiente urbano. O Capítulo 5 apresenta as conclusões, as contribuições do trabalho e os trabalhos futuros.

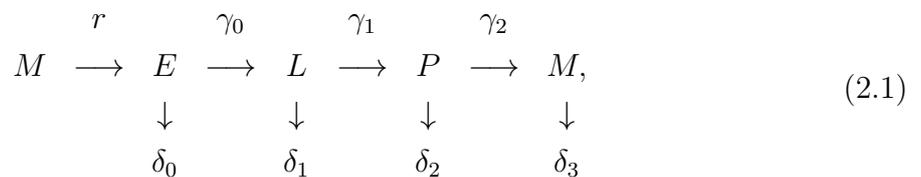
2 MODELOS UNIDIMENSIONAIS

Neste capítulo, apresentam-se dois modelos que descrevem a dinâmica populacional do mosquito *A. aegypti*, no caso unidimensional [46, 20, 11], e estudam-se suas soluções em forma de ondas viajantes. Resumem-se os trabalhos, do autor desta tese, publicados em [55, 56, 57, 58].

2.1 DINÂMICA POPULACIONAL

Para descrever a dinâmica populacional do mosquito *A. aegypti*, iremos considerar o caso unidimensional, em que o foco é em uma escala espacial e urbana em que observam-se dois fenômenos: a difusão que representa a dispersão dos mosquitos (fêmeas aladas maduras) e a advecção que representa o transporte da população pelo vento.

Uma simplificação da dinâmica biológica vital do mosquito é considerar apenas duas subpopulações, uma forma alada e móvel (mosquitos fêmeas aladas maduras) e uma forma aquática e estática, que inclui ovos, larvas e pupas. Considere o seguinte esquema baseado no processo de desenvolvimento do mosquito



onde $E(x, t)$, $L(x, t)$, $P(x, t)$ e $M(x, t)$ representam as densidades nas fases de ovos, larvas, pupas e mosquitos fêmeas aladas na posição x e no tempo t , respectivamente. Entre cada uma destas fases existe uma taxa de mortalidade δ_i , $i = 0, 1, 2$ e 3 , uma taxa de mudança de fase γ_j , para $j = 0, 1, 2$, que corresponde a passagem da fase E para L (γ_0), de L para P (γ_1), de P para M (γ_2) e uma taxa r de oviposição [46]. Para uma descrição mais detalhada da dinâmica biológica vital do mosquito *A. aegypti* ver [8].

Para a descrição dos modelos, considera-se que o *A. aegypti* possui duas fases: (1) ovo, larva e pupa compõem a fase aquática e estática ($\bar{A}(\bar{x}, \bar{t})$) e (2) mosquitos fêmeas compõem a sua fase alada e móvel ($\bar{M}(\bar{x}, \bar{t})$).

2.1.1 Modelo 1

Macroscopicamente, iremos considerar que a dispersão da população se deve ao movimento de vôo aleatório e local (termo de difusão com coeficiente \bar{D}) e a advecção é causada pelo vento (\bar{v}). O seguinte modelo descrevendo a dinâmica populacional do *Aedes*

aegypti foi proposto em [46]

$$\begin{cases} \bar{M}_t = \bar{D} \bar{M}_{xx} - \bar{\nu} \bar{M}_x + \bar{\gamma} \bar{A} \left(1 - \frac{\bar{M}}{\bar{k}_1}\right) - \bar{\mu}_1 \bar{M}, \\ \bar{A}_t = \bar{r} \left(1 - \frac{\bar{A}}{\bar{k}_2}\right) \bar{M} - (\bar{\mu}_2 + \bar{\gamma}) \bar{A}, \end{cases} \quad (2.2)$$

onde as derivadas parciais de \bar{M} são denotadas como $\partial \bar{M} / \partial x = \bar{M}_x$, $\partial^2 \bar{M} / \partial x^2 = \bar{M}_{xx}$ e $\partial \bar{M} / \partial t = \bar{M}_t$ o mesmo para \bar{A} . Os outros termos são $\bar{\mu}_i$ é a taxa de mortalidade ($i = 1$ fase alada; $i = 2$ fase aquática), \bar{k}_i é a capacidade suporte, $\bar{\gamma}$ é a taxa de maturação da forma aquática para a forma alada dos mosquitos fêmeas e \bar{r} é a taxa de oviposição pelos mosquitos fêmeas são todos constantes. Consideremos condições iniciais constantes e condição de Dirichlet para \bar{M} e \bar{A} .

Introduzindo as variáveis adimensionais $M = \bar{M} / \bar{k}_1$, $A = \bar{A} / \bar{k}_2$, $t = \bar{r} \bar{t}$ e $x = \bar{x} \sqrt{\bar{r} / \bar{D}}$, o Sistema (2.2) pode ser reescrito na forma adimensional

$$\begin{cases} M_t = M_{xx} - \nu M_x + \frac{\gamma}{k} A(1 - M) - \mu_1 M, \\ A_t = k(1 - A)M - (\mu_2 + \gamma)A, \end{cases} \quad (2.3)$$

onde M e A são as densidades das populações alada e aquática, respectivamente, os outros parâmetros adimensionais são

$$\mu_1 = \frac{\bar{\mu}_1}{\bar{r}}, \quad \mu_2 = \frac{\bar{\mu}_2}{\bar{r}}, \quad \gamma = \frac{\bar{\gamma}}{\bar{r}}, \quad \nu = \frac{\bar{\nu}}{\sqrt{\bar{r} \bar{D}}} \quad \text{e} \quad k = \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2}. \quad (2.4)$$

2.1.2 Modelo 2

Em [11], os autores modificam o modelo anterior trazendo mudanças na difusão (dispersão) e na velocidade (vento), que se tornam não lineares. Podemos justificar tais modificações como sendo o quanto a nuvem de mosquitos está influenciando na propagação da epidemia. Utilizando os mesmos parâmetros e variáveis anteriores, os autores em [11] propuseram o seguinte modelo adimensional

$$\begin{cases} M_t = (M^p M_x)_x - 2\nu M^q M_x + \frac{\gamma}{k} A(1 - M) - \mu_1 M, \\ A_t = k(1 - A)M - (\mu_2 + \gamma)A, \end{cases} \quad (2.5)$$

onde $p, q \in \mathbb{R}$.

Iremos estudar um caso particular do Sistema (2.5), considerando $p = 0$ e $q = 1$, i.e.,

$$\begin{cases} M_t = M_{xx} - 2\nu M M_x + \frac{\gamma}{k} A(1 - M) - \mu_1 M, \\ A_t = k(1 - A)M - (\mu_2 + \gamma)A. \end{cases} \quad (2.6)$$

Seguindo os mesmos passos da seção anterior e utilizando as mesmas variáveis dimensionais, temos

$$\begin{cases} \bar{M}_t = \bar{D} \bar{M}_{xx} - \frac{2\bar{\nu}\bar{M}}{\bar{k}_1} \bar{M}_x + \bar{\gamma}\bar{A} \left(1 - \frac{\bar{M}}{\bar{k}_1}\right) - \bar{\mu}_1 \bar{M}, \\ \bar{A}_t = \bar{r} \left(1 - \frac{\bar{A}}{\bar{k}_2}\right) \bar{M} - (\bar{\mu}_2 + \bar{\gamma}) \bar{A}, \end{cases} \quad (2.7)$$

também consideremos condições iniciais constantes e condição de Dirichlet para \bar{M} e \bar{A} .

2.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NÃO-LINEARES

Consideremos um sistema de duas EDOs autônomas não-lineares

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y), \end{cases} \quad (2.8)$$

onde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, f e g são de classe C^1 .

Para calcular $f(x, y)$ e $g(x, y)$, em torno do ponto (x^*, y^*) pode-se utilizar, como uma aproximação, a série de Taylor, ou seja,

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} (x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} (y - y^*) \\ g(x, y) &\approx g(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} (x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} (y - y^*). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Assim, ao substituir as aproximações de f e g na Eq. (2.8) obtém-se

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} (x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} (y - y^*) \\ \frac{dy}{dt} = g(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} (x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} (y - y^*). \end{cases} \quad (2.10)$$

Considerando (x^*, y^*) um ponto de equilíbrio de f e g , ou seja, $f(x^*, y^*) = 0$ e $g(x^*, y^*) = 0$ o Sistema (2.10) se torna

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} (x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} (y - y^*) = a(x - x^*) + b(y - y^*) \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)} (x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)} (y - y^*) = c(x - x^*) + d(y - y^*), \end{cases} \quad (2.11)$$

pois $a = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)}$, $b = \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)}$, $c = \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(x^*, y^*)}$ e $d = \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{(x^*, y^*)}$ são constantes.

Considere a mudança de variáveis $u = x - x^*$ e $v = y - y^*$. Para transformar o Sistema (2.11) para as novas variáveis u e v é necessário calcular $\partial u/\partial t$ e $\partial v/\partial t$, o que não é difícil, pois como $u(t) = x(t) - x^*$ e $v(t) = y(t) - y^*$ (uma vez que x^* e y^* são constantes) obtém-se $\partial u/\partial t = \partial x/\partial t$ e $\partial v/\partial t = \partial y/\partial t$. Logo, o Sistema (2.11), após a mudança de variáveis $u = x - x^*$ e $v = y - y^*$ se torna

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = au + bv \\ \frac{dv}{dt} = cu + dv. \end{cases} \quad (2.12)$$

Portanto, para valores próximos dos pontos de equilíbrio do Sistema não-linear (2.8), uma boa aproximação para isto é o Sistema linearizado (2.12), onde a matriz J , formada pelos coeficientes é chamada a matriz Jacobiana

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} & \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} \\ \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} & \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} \end{pmatrix}.$$

Note que a mudança de variáveis $u = x - x^*$ e $v = y - y^*$ permite o estudo do sistema em torno da origem. Assim, é suficiente compreender a dinâmica de sistemas lineares em torno da origem, pois ao realizar a mudança inversa ($x = u + x^*$ e $y = v + y^*$) o comportamento deste não se altera [30].

De modo a estudar órbitas alguns conceitos básicos são necessários e serão introduzidos abaixo.

2.2.1 Teorema de Hartman-Grobman e Teorema da Variedade Estável

Definição 2.1. *Um homeomorfismo é uma função $h : A \rightarrow B$ bijetiva, contínua com inversa $h^{-1} : B \rightarrow A$ contínua. Dois espaços A e B são ditos homeomorfos quando existe um homeomorfismo entre eles. Um difeomorfismo é uma função $h : A \rightarrow B$ bijetiva, contínua, diferenciável com inversa $h^{-1} : B \rightarrow A$ contínua e diferenciável. Dois espaços A e B são ditos difeomorfos quando existe um difeomorfismo entre eles.*

Consideremos a EDO não-linear

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \text{ onde } x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.13)$$

Definição 2.2. *Seja E um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n e seja $f : E \rightarrow E$ de classe C^1 . Para cada $x_0 \in E$, seja $\phi(t, x_0)$ a solução da Equação (2.13), onde $x(0) = x_0$. Para t no*

domínio de $\phi(t, x_0)$, a aplicação $\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$ é dito ser o fluxo da Equação Diferencial (2.13).

Segue agora o teorema de Hartman-Grobman, o teorema responsável por realizar a ligação entre os fluxos de sistemas lineares e não-lineares.

Teorema 2.1. (Teorema de Hartman-Grobman)

Sejam p um ponto de equilíbrio ($f(p) = 0$), E um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n contendo p , $f : E \rightarrow E$ de classe C^1 e ϕ_t o fluxo do Sistema não-linear (2.13). Suponha que a matriz $J(p)$, a matriz Jacobiana calculada em p , não tenha autovalores com parte real nula. Então existe um homeomorfismo H de um conjunto aberto $U \in \mathbb{R}^n$ contendo p em um conjunto $V \in \mathbb{R}^n$ também contendo p tal que, para cada $x_0 \in U$, existe um intervalo aberto $I_0 \subset \mathbb{R}$ contendo 0 tal que para todo $x_0 \in U$ e $t \in I_0$, $H \circ \phi_t(x_0) = e^{At}H(x_0)$, ou seja, H mapeia trajetórias do Sistema Não-linear (2.13) próximas à p em trajetórias do Sistema Linear (2.12) próximas à p e preserva a parametrização.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [44].

Definição 2.3. Sejam E um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n , $f : E \rightarrow E$ de classe C^1 e $\phi_t : E \rightarrow E$ o fluxo da equação definido para todo $t \in \mathbb{R}$. Um conjunto $M \subset E$ é dito ser invariante com respeito ao fluxo ϕ_t quando $\phi_t(M) \subset M$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Conforme dito anteriormente E^s , E^u e E^c (os subespaços estável, instável e central) do sistema linear $x' = Ax$ são invariantes pelo fluxo $\phi_t = e^{At}$. A fim de enunciar um resultado similar para sistemas não-lineares (o teorema da variedade estável) é necessário definir o conceito de variedade.

Definição 2.4. Uma variedade diferenciável n -dimensional é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $h_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de abertos U_α de \mathbb{R}^n tais que

1. $\bigcup_\alpha h_\alpha(U_\alpha) = M$.
2. Para todo α, β , com $h_\alpha(U_\alpha) \cap h_\beta(U_\beta) = E \neq \emptyset$, os conjuntos $h_\alpha^{-1}(E)$ e $h_\beta^{-1}(E)$ abertos de \mathbb{R}^n e as aplicações $h_\beta^{-1} \circ h_\alpha$ são diferenciáveis.
3. A família $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ é máxima relativamente às condições (1) e (2).

O par (U_α, h_α) com $p \in h_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma parametrização de M em p ; $h_\alpha(U_\alpha)$ é então chamada uma vizinhança coordenada em p . Uma família $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ satisfazendo (1) e (2) é chamada uma estrutura diferenciável em M [4].

A seguir, apresentaremos duas definições para variedades (estável e instável).

Definição 2.5. A variedade estável (instável) de $p \in \mathbb{R}^n$ são os pontos de \mathbb{R}^n que tem p como ω – limite (α – limite).

Definição 2.6. Seja Ω um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n e $\beta(y, t)$ a órbita que passa pelo ponto y no tempo t . A variedade estável de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é

$$W_{x_0}^s = \{y \in \Omega; \exists (t_n), t_n \rightarrow \infty \text{ e } \beta(y, t_n) \rightarrow x_0\}. \quad (2.14)$$

Analogamente, a variedade instável de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é definida como

$$W_{x_0}^u = \{y \in \Omega; \exists (t_n), t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \beta(y, t_n) \rightarrow x_0\}. \quad (2.15)$$

Consideremos o sistema linearizado de (2.13)

$$\frac{dx}{dt} = Jx, \quad (2.16)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $J = Df(x_0)$.

Teorema 2.2. (Teorema da Variedade Estável)

Sejam E um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n contendo a origem, $f : E \rightarrow E$ de classe C^1 e ϕ_t o fluxo do Sistema não-linear (2.13). Suponha que $f(0) = 0$ e que a matriz $J(0)$, a matriz Jacobiana calculada na origem, tenha k autovalores com parte real negativa e $n - k$ autovalores com parte real positiva. Então existe uma variedade diferenciável k -dimensional S tangente ao subespaço estável E^s do Sistema linear (2.16) na origem, tal que, para todo $t \geq 0$, $\phi_t(S) \subset S$ e para todo $x_0 \in S$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x_0) = 0$; e existe uma variedade diferenciável $n - k$ -dimensional U tangente ao subespaço instável E^u do Sistema linear (2.16) na origem, tal que, para todo $t \leq 0$, $\phi_t(U) \subset U$ e para todo $x_0 \in U$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x_0) = 0$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [32].

2.3 ONDAS VIAJANTES

Nesta seção, investigaremos se os Sistemas (2.3) e (2.6) possuem soluções na forma de ondas viajantes. Fazemos uma mudança de coordenadas de (x, t) para (ξ, t) , onde $\xi = x - ct$ é chamada de variável viajante com velocidade de propagação constante c . Seguindo os autores de [51], olhamos para a solução estacionária na variável ξ com $M(x, t) = m(\xi)$ e $A(x, t) = a(\xi)$, onde $m(\xi)$ e $a(\xi)$ correspondem aos perfis de ondas das densidades populacionais das fases alada e aquática, respectivamente. Realizando a substituição da variável viajante, reescrevemos o Sistema (2.3) como um sistema de EDOs

$$\begin{cases} m''(\xi) &= (\nu - c)m'(\xi) + \frac{\gamma}{k}(m(\xi) - 1)a(\xi) + \mu_1 m(\xi), \\ a'(\xi) &= \frac{k}{c}(a(\xi) - 1)m(\xi) + \left(\frac{\mu_2 + \gamma}{c}\right)a(\xi), \end{cases} \quad (2.17)$$

onde $(\cdot)'$ indicada a primeira derivada em ξ .

Reduzimos a ordem do Sistema (2.17), introduzindo $h(\xi) = m'(\xi)$. Temos que

$$\begin{cases} m'(\xi) &= h(\xi), \\ h'(\xi) &= (\nu - c)h(\xi) + \frac{\gamma}{k}(m(\xi) - 1)a(\xi) + \mu_1 m(\xi), \\ a'(\xi) &= \frac{k}{c}(a(\xi) - 1)m(\xi) + \left(\frac{\mu_2 + \gamma}{c}\right)a(\xi). \end{cases} \quad (2.18)$$

Repetimos o processo para o Sistema (2.6) e obtemos

$$\begin{cases} m'(\xi) &= h(\xi), \\ h'(\xi) &= (2\nu m(\xi) - c)h(\xi) + \left(\mu_1 + \frac{\gamma a(\xi)}{k}\right)m(\xi) - \frac{\gamma}{k}a(\xi), \\ a'(\xi) &= \frac{k}{c}(a(\xi) - 1)m(\xi) + \left(\frac{\mu_2 + \gamma}{c}\right)a(\xi). \end{cases} \quad (2.19)$$

Resolvendo o sistema $(m', h', a') = (0, 0, 0)$, encontramos duas soluções estacionárias (ou pontos de equilíbrio) dos Sistemas (2.18) e (2.19)

$$A = (0, 0, 0), \quad B = (m^*, 0, a^*). \quad (2.20)$$

Aqui, A representa a ausência de ambas as populações e B representa a população máxima em ambas, onde

$$a^* = \frac{k(\gamma - \mu_1\mu_2 - \gamma\mu_1)}{\gamma(k + \mu_2 + \gamma)} \quad \text{e} \quad m^* = \frac{\gamma - \mu_1(\mu_2 + \gamma)}{\gamma + k\mu_1}. \quad (2.21)$$

Definição 2.7. *Uma solução na forma de onda viajante é uma órbita heteroclínica conectando o equilíbrio A até B (ou B até A).*

Assim, queremos mostrar que existe uma órbita que conecta dois pontos de equilíbrio.

Definição 2.8. *O perfil de propagação ou invasão a favor do fluxo corresponde à solução que liga a região com indivíduos (o topo da onda, $\xi \rightarrow -\infty$) para a região sem indivíduos (a base da onda, $\xi \rightarrow \infty$), ou seja,*

$$\begin{cases} \lim_{\xi \rightarrow -\infty} m(\xi) = m^* & \text{e} & \lim_{\xi \rightarrow +\infty} m(\xi) = 0, \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} h(\xi) = 0 & \text{e} & \lim_{\xi \rightarrow +\infty} h(\xi) = 0, \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} a(\xi) = a^* & \text{e} & \lim_{\xi \rightarrow +\infty} a(\xi) = 0, \end{cases} \quad (2.22)$$

onde $h \rightarrow 0$ pois m converge para estado constante.

Definição 2.9. *O perfil de propagação ou invasão contra o fluxo corresponde à solução que liga a região sem indivíduos (a base da onda, $\xi \rightarrow -\infty$) a região com indivíduos (o topo da onda, $\xi \rightarrow \infty$), ou seja,*

$$\begin{cases} \lim_{\xi \rightarrow -\infty} m(\xi) = 0 & e & \lim_{\xi \rightarrow +\infty} m(\xi) = m^*, \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} h(\xi) = 0 & e & \lim_{\xi \rightarrow +\infty} h(\xi) = 0, \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} a(\xi) = 0 & e & \lim_{\xi \rightarrow +\infty} a(\xi) = a^*. \end{cases} \quad (2.23)$$

Em ambos os casos as constantes m^* e a^* são dadas na Eq. (2.21). Estes perfis aparecem nas simulações numéricas apresentadas na Subseção 2.4.1.

Estudamos a estabilidade dos pontos de equilíbrio por meio da matriz Jacobiana, onde consideramos

$$\begin{cases} F(m, h, a) = m' \\ G(m, h, a) = h' \\ H(m, h, a) = a'. \end{cases} \quad (2.24)$$

Logo, a matriz Jacobiana é dada por

$$J(m, h, a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial m} & \frac{\partial F}{\partial h} & \frac{\partial F}{\partial a} \\ \frac{\partial G}{\partial m} & \frac{\partial G}{\partial h} & \frac{\partial G}{\partial a} \\ \frac{\partial H}{\partial m} & \frac{\partial H}{\partial h} & \frac{\partial H}{\partial a} \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Para o Modelo 1, as matrizes Jacobiana do fluxo no Sistema (2.18) nos pontos de equilíbrio A e B são

$$J_1(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \mu_1 & \nu - c & -\frac{\gamma}{k} \\ -\frac{k}{c} & 0 & \frac{\mu_2 + \gamma}{c} \end{bmatrix}, \quad J_1(B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \mu_1 + \frac{\gamma}{k}a^* & \nu - c & \frac{\gamma}{k}(m^* - 1) \\ \frac{k}{c}(a^* - 1) & 0 & \frac{km^* + \mu_2 + \gamma}{c} \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

respectivamente.

Para o Modelo 2, as matrizes Jacobiana do fluxo no Sistema (2.19) nos equilíbrios A e B são

$$J_2(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \mu_1 & -c & -\frac{\gamma}{k} \\ -\frac{k}{c} & 0 & \frac{\mu_2 + \gamma}{c} \end{bmatrix}, \quad J_2(B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \mu_1 + \frac{\gamma}{k}a^* & 2\nu(m^*) - c & \frac{\gamma}{k}(m^* - 1) \\ \frac{k}{c}(a^* - 1) & 0 & \frac{km^* + \mu_2 + \gamma}{c} \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

respectivamente.

Denotam-se os autovalores da Jacobiana por λ_i , os autovetores que correspondem aos autovalores com parte real negativa ($Real(\lambda_i) < 0$) como s_i , os autovetores que correspondem aos autovalores com parte real positiva ($Real(\lambda_j) > 0$) como u_j . Estes autovetores definem os espaços lineares estáveis e instáveis $E^s = [s_1, \dots, s_p]$ e $E^u = [u_1, \dots, u_q]$, respectivamente, onde $p + q = 3$, ver [33]. Estes espaços aproximam localmente as variedades estáveis e instáveis, ver [15].

Estas variedades são estudadas através da análise local com base no Teorema de Hartman-Grobman e no Teorema da Variedade Estável, ambos descrevem estas variedades nas vizinhanças dos pontos de equilíbrios hiperbólicos usando o sistema linearizado.

2.3.1 Seção de Poincaré

A seção de Poincaré é um procedimento muito utilizado, que possibilita uma melhor compreensão da dinâmica global do sistema através de uma identificação do comportamento apresentado no espaço de fase. Este procedimento permite que um sistema dinâmico contínuo no tempo (fluxo) seja modelado como um sistema discreto (transformação), reduzindo-se, desta forma, uma dimensão do sistema.

A construção particular da transformação baseia-se na determinação dos pontos de interseção da trajetória do sistema com um hiperplano, podendo ser até uma superfície. A transformação, então, é definido por um ponto escolhido arbitrariamente no espaço de fase e pela condição de perpendicularidade desse hiperplano com a trajetória que passa pelo plano escolhido. O conjunto desses pontos de interseção constitui uma transformação de Poincaré do sistema e o hiperplano escolhido é chamado de seção de Poincaré (ou Sotomayor).

Na prática, a seção de Poincaré pode ser gerada pela escolha de um plano de Poincaré e quando uma trajetória atravessa este plano, o ponto de cruzamento é registrado. Um dos métodos mais simples para a escolha do plano é definir uma das variáveis dinâmicas como uma constante. O plano deve ser escolhido de modo a que as trajetórias cortem a superfície transversalmente, isto é, as trajetórias não sejam paralelas à superfície que atravessam [26].

2.3.2 Método semi-analítico

Nesta seção apresentamos um método semi-analítico utilizado para investigar a existência de uma órbita heteroclínica que conecta o equilíbrio A ao equilíbrio B dos Sistemas (2.18) e (2.19), para maiores detalhes ver [55, 56, 57, 58]. O algoritmo para obter a órbita conectando B a A é análogo, ver [58].

1. Determine as soluções de equilíbrio para o Sistema (Eqs. (2.18) ou (2.19)). Encontre também as matrizes Jacobiana (apresentadas nas Eqs. (2.26) ou (2.27)).
2. Calcule os autovalores λ_i e autovetores w_i , $i = 1, 2$ e 3 , das matrizes Jacobiana em cada equilíbrio. Para este caso (de A para B), $J(A)$ terá dois autovalores positivos e um negativo, $J(B)$ terá dois autovalores negativos e um positivo, com seus respectivos autovetores. Deste modo, obtém-se o espaço linear instável (E_A^u com o autovetores correspondentes dos autovalores positivos de $J(A)$) correspondendo ao equilíbrio A e o espaço linear estável (E_B^s com o autovetores correspondentes dos autovalores negativos de $J(B)$) correspondendo ao equilíbrio B , estes aproximam localmente as variedades instável, W_A^u , e estável, W_B^s , respectivamente. No algoritmo, utilizamos a função “eig (J)” do Matlab, que calcula os autovetores e autovalores da matriz J , respectivamente.
3. Considere o plano de Poincaré ou Sotomayor (Π), como o plano que contém o ponto $C = (A + B)/2$ com vetor normal $\vec{N} = \overrightarrow{CB}$. O fluxo ζ intersecta Π transversalmente se $\zeta(C) \cdot \vec{N} \neq 0$, onde $\zeta(m, h, a) = (m', h', a')$ (Eqs. (2.18) ou (2.19)). Esta é a principal característica deste plano, ele tem que ser escolhido de tal forma que seja transversal ao fluxo. Ou seja, o plano de Poincaré é escolhido de forma a estar entre os pontos de equilíbrio e sendo transversal ao fluxo.
4. Considere um círculo com raio pequeno e centrado em A contido em E_A^u e parametrizado por $\theta \in [0, 2\pi)$. Integra-se numericamente a partir de pontos x_θ sobre esse círculo; algumas das trajetórias geradas desta maneira irão interceptar Π . O conjunto de todas as interseções é denotado por P_A^u . Como E_A^u aproxima W_A^u , esperamos que os pontos P_A^u aproximem da intersecção de W_A^u com Π , i.e., $P_A^u \approx W_A^u \cap \Pi$. Analogamente, o conjunto P_B^s é composto dos pontos de intersecção entre órbitas que saem do plano Π e chegam ao círculo com centro em B . Segue que $P_B^s \approx W_B^s \cap \Pi$. No algoritmo, utilizamos a função “Ode45” do Matlab, para as integrações numéricas. Neste tipo de integração, definimos algumas restrições, como critério de parada, uma esfera onde a integração deve ficar contida (“odeset”) e quando as trajetórias atingem o plano Π . Essa intersecção das trajetórias com Π formam um conjunto de pontos que são armazenados (P_A^u e P_B^s).

Após este passo, analisa-se a existência da intersecção $P_A^u \cap P_B^s$, se existir esta intersecção pertence as variedades W_A^u , W_B^s e ao plano Π . Se esta intersecção é não vazia $P_A^u \cap P_B^s = P \in \Pi$, então existe uma órbita heteroclínica conectando A a B , ver Fig. 1. É equivalente à existência da solução na forma de onda viajante para o Sistema ((2.18) ou (2.19)). No algoritmo, utilizamos a função “curveintersect” do

Matlab que a partir do conjunto de pontos no plano (P_A^u e P_B^s), determina se existe uma interseção (P).

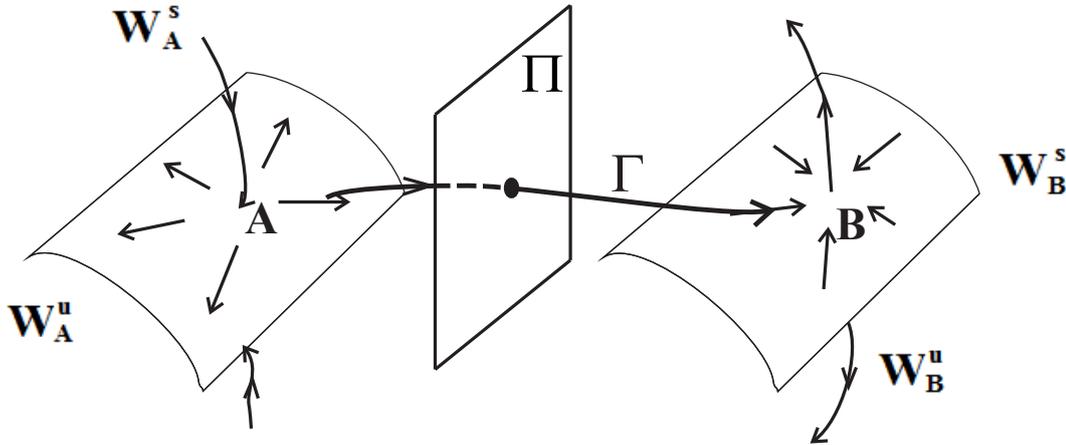


Figura 1 – Representação esquemática da órbita heteroclínica (Γ), onde W_A^u e W_B^s são as variedades instáveis e estáveis.

5. A fim de comparar essa solução aproximada com simulações numéricas (é obtida a solução numérica do Sistema de EDPs por algum método numérico), integra-se o Sistema de EDOs ((2.18) ou (2.19)) a partir do ponto P por tempos positivos e negativos para obter o perfil da onda viajante. Depois, faz-se a dimensionalização desta solução para, assim, fazer a comparação entre os perfis das soluções. No algoritmo, utilizamos novamente a função “Ode45” do Matlab e para dimensionalizar a solução, multiplicamos a solução da EDO pela capacidade suporte, k_1 para a fase alada e k_2 para a fase aquática.

2.4 RESULTADOS NUMÉRICOS: MODELO 1

Nesta seção, vamos estudar numericamente o Sistema de EDPs (Eq. (2.2)) e compará-lo com o Sistema de EDOs (Eq. (2.18)) usando o algoritmo apresentado na Subseção 2.3.2, ver [55, 56, 58]. O estudo será análogo para o Sistema de EDPs (Eq. (2.7)) comparado com o Sistema de EDOs (Eq. (2.19)). Ambos os estudos utilizam os mesmos valores dos parâmetros encontrados na literatura, apresentados nas Tabelas 1 (dimensional) e 2 (adimensional), ver [46]. Os resultados desta seção foram publicados em [58].

2.4.1 Simulação numérica direta

O Sistema (2.2) é resolvido numericamente usando esquema de diferenças finitas (algoritmo de [7] que utiliza o método de Crank-Nicolson) utilizando os valores dos

Tabela 1 – Os valores dos parâmetros dimensionais para o seguinte sistema de unidades: espaço $\bar{x} = km$ e tempo $\bar{t} = 1 dia$.

\bar{D}	$\bar{\nu}$	$\bar{\gamma}$	\bar{r}	\bar{k}_1	\bar{k}_2	$\bar{\mu}_1$	$\bar{\mu}_2$
$1,25 \times 10^{-2}$	$5,0 \times 10^{-2}$	0,2	30	25	100	$4,0 \times 10^{-2}$	$1,0 \times 10^{-2}$

Tabela 2 – Os valores dos parâmetros adimensionais.

ν	γ	k	μ_1	μ_2
$8,164 \times 10^{-2}$	$6,66 \times 10^{-3}$	$2,5 \times 10^{-1}$	$1,33 \times 10^{-3}$	$3,33 \times 10^{-4}$

parâmetros da Tab. 1. Definem-se os dados iniciais para as variáveis M e A no tempo $t = 0$ como $M_0 = 10$ e $A_0 = 50$, ver Fig. 2. As condições de contorno de Dirichlet são consideradas para ambos os lados esquerdo e direito. Aplicando o esquema numérico, obtém-se a solução do Sistema (2.2) para os tempos $t = 0; 1,5; 3; 4,5; 5,625$ (dias) como plotado na Fig. 2.

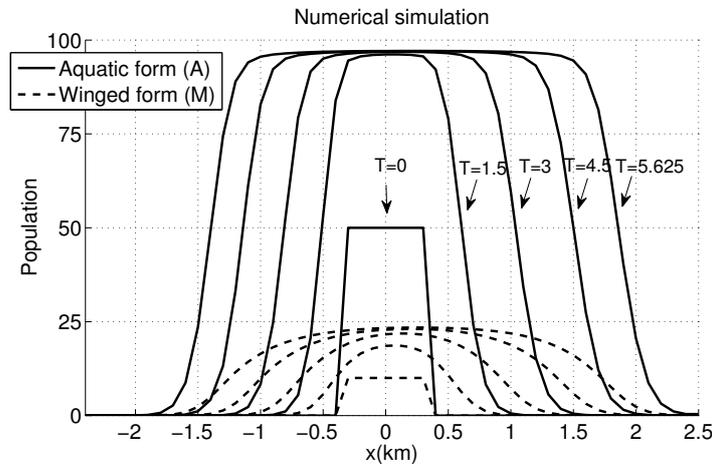


Figura 2 – Solução numérica do Sistema (2.2) para os tempos $t = 0; 1,5; 3; 4,5; 5,625$ dias utilizando os valores dos parâmetros da Tab. 1.

Pela solução numérica plotada na Fig. 2, temos uma evidência de que a solução do Sistema (2.2) contém duas ondas viajantes propagando para a frente e para trás. Observe que apenas essa solução numérica não garante que a solução seja uma onda viajante. Do ponto de vista biológico estes resultados indicam o fenômeno de invasão na dinâmica populacional de *A. aegypti* com um perfil de propagação ao longo do fluxo (da esquerda para a direita com velocidade $C_{al} = 0,33 km/dia$ e velocidade adimensional $c_{al} = 0,5389$)

e outro perfil propagação contra o fluxo (da direita para a esquerda com velocidade $C_{ag} = -0,25 \text{ km/dia}$ e velocidade adimensional $c_{ag} = -0,4082$). Essas velocidades foram calculadas usando os valores de x e t da simulação numérica direta, ver Fig. 2, onde $C = x/t$ (velocidade dimensional) e $c = C/\sqrt{rD}$ (velocidade adimensional). Esta observação motiva a busca rigorosa por soluções na forma de ondas viajantes.

Para algumas situações físicas, por exemplo em [7], é possível obter a velocidade da onda viajante analisando condições de contorno do sistema de EDO correspondente. Infelizmente, isto não é o caso para situações gerais, ver [51] e suas referências. É por isso que usamos valores de velocidade obtidos a partir de simulações numéricas.

2.4.2 Método semi-analítico: invasão contra o fluxo

Nesta seção, seguiremos os passos do método semi-analítico descrito na Subseção 2.3.2 a fim de verificar a existência da solução na forma de onda viajante do Sistema (2.18) com as condições de contorno dadas pela Eq. (2.23) para o perfil correspondente a invasão contra o fluxo. Consideramos os valores dos parâmetros indicados na Tabela 2 com $c_{ag} = -0,4082$ obtido na simulação numérica.

1. Os pontos de equilíbrio do Sistema (2.18) são $A = (0, 0, 0)$ e $B = (0, 951; 0; 0, 971)$ (Eqs. (2.20) e (2.21)) com as correspondentes matrizes Jacobianas (Eq. 2.26) dadas por

$$J_1(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,0013 & 0,4898 & -0,0266 \\ 0,6124 & 0 & -0,0171 \end{bmatrix}, \quad J_1(B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,0272 & 0,4898 & -0,0013 \\ 0,0175 & 0 & -0,6121 \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

respectivamente.

2.
 - $J_1(A)$ possui dois autovalores com parte real positiva: $\lambda_1 = 0,2490$ e $\lambda_2 = 0,3910$, com seus autovetores correspondentes $w_1 = (-0,3966; -0,0988; -0,9126)$ e $w_2 = (-0,5420; -0,2119; -0,8133)$. Estes autovetores definem o subespaço instável E_A^u que aproxima localmente a variedade instável W_A^u ;
 - $J_1(B)$ possui dois autovalores com parte real negativa: $\lambda_3 = -0,0503$ e $\lambda_4 = -0,6121$, com seus autovetores correspondentes $w_3 = (0,9983; -0,0502; 0,0311)$ e $w_4 = (-0,0020; 0,0012; 1,0000)$. Estes autovetores definem o subespaço estável E_B^s que aproxima localmente a variedade estável W_B^s .
3. Usando o ponto $C = (0,476; 0; 0,486)$ e o vetor $\vec{N} = (0,476; 0; 0,486)$ definimos o plano de Poincaré Π . Note que $\zeta(C) \cdot \vec{N} = (a^*/4c)X_1 \neq 0$, onde $X_1 = k(a^*/2 -$

1) $m^* + (\mu_2 + \gamma)a^* = -0,1061$, então o plano Π intercepta ambas as variedades estáveis e instáveis transversalmente, ver Fig. 3.

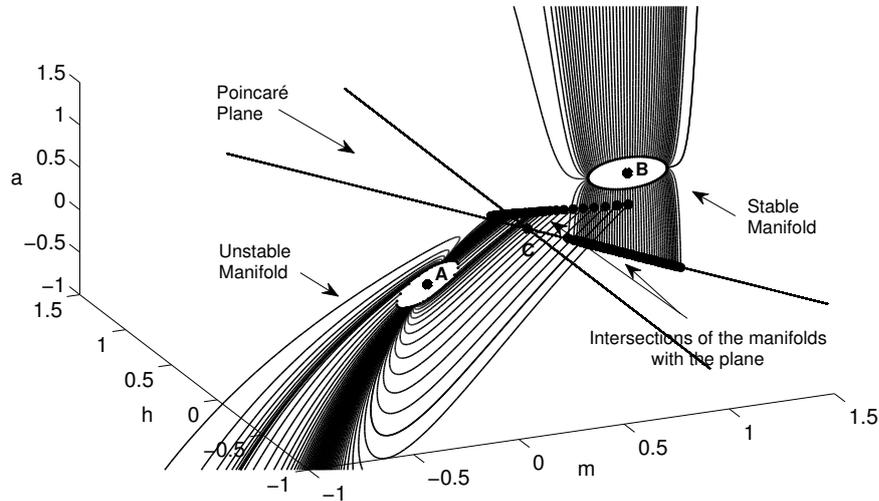


Figura 3 – A integração numérica começa em pequenos círculos contidos em E_A^u e E_B^s centrados nos pontos de equilíbrios A e B , respectivamente. O plano de Poincaré Π é indicado por duas linhas retas; ele intercepta a variedade instável W_A^u e a variedade estável W_B^s nos pontos indicados por estrelas (*).

4. A integração numérica começa em círculos contidos em E_A^u e E_B^s centrados nos pontos de equilíbrios A e B , respectivamente. Os conjuntos das interseções entre as curvas de integração e Π são denotados por P_A^u e P_B^s . A interseção entre os pontos P_A^u e P_B^s com o plano de Poincaré é o ponto $P_A^u \cap P_B^s = P = (0,2847; 0; 0,6726)$, ver Fig. 4. Isto garante a existência da órbita heteroclínica conectando o ponto de equilíbrio A ao ponto de equilíbrio B . Equivalentemente, isso garante que o Sistema (2.18) com as condições de contorno dadas por (2.23) possui uma solução em forma de onda viajante que corresponde a situação contra o fluxo.
5. A fim de validar o método semi-analítico proposto, comparamos o perfil da solução obtido pelo método proposto com o da simulação numérica direta da fase alada e da fase aquática, ver Fig. 5. A pequena diferença numérica entre os perfis observados na Fig. 5 são devidos ao efeito de difusão do sistema numérico e o raio dos pequenos círculos usados para iniciar a integração.

2.4.3 Método semi-analítico: invasão ao longo do fluxo

Na seção anterior, investiga-se a existência da solução na forma de onda viajante correspondendo a invasão contra o fluxo. Nesta seção, investigaremos a existência da

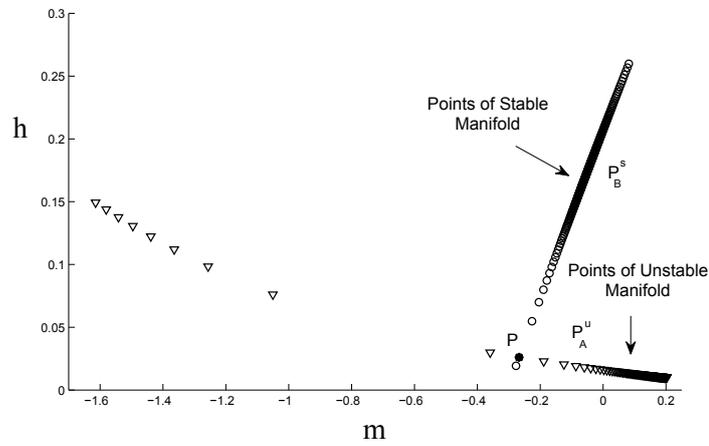


Figura 4 – O plano de Poincaré Π da Fig. 3 indicando os conjuntos de interseção P_A^u ($P_A^u \approx W_A^u \cap \Pi$) e P_B^s ($P_B^s \approx W_B^s \cap \Pi$). O ponto P representa a interseção entre as duas variedades indicando a existência da órbita heteroclínica conectando o ponto de equilíbrio A ao ponto de equilíbrio B .

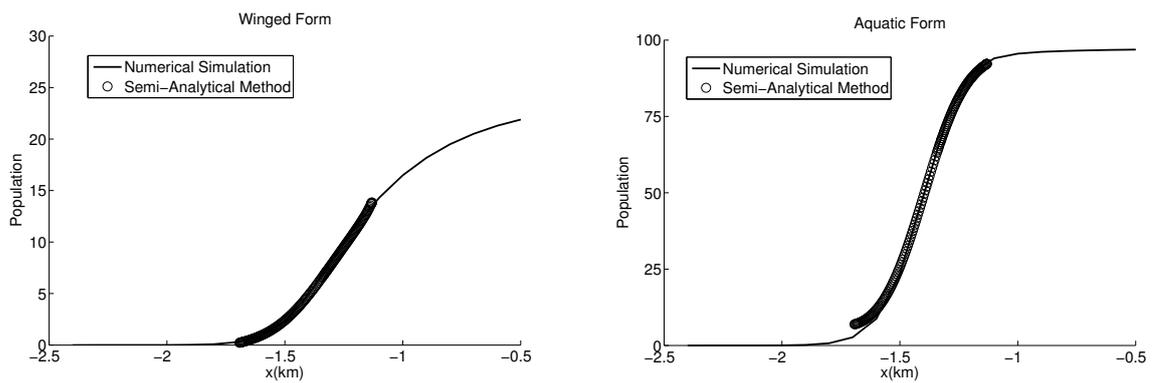


Figura 5 – Perfis de invasão contra o fluxo para a fase alada (esquerda) e fase aquática (direita) obtidos usando o método semi-analítico e a simulação numérica direta.

solução na forma de onda viajante correspondendo a invasão ao longo do fluxo para o Sistema (2.18) com as condições de contorno dadas pela Eq. (2.22).

Usando a velocidade $c_{al} = 0,5389$ encontrado na Subseção 2.4.1, buscamos a órbita heteroclínica conectando o ponto de equilíbrio B ao ponto de equilíbrio A . Seguindo os mesmos passos da Subseção 2.3.2 obtemos $P = P_A^s \cap P_B^u = (0,3106; 0; 0,6473)$ como plotado na Fig. 6. Comparamos a solução obtida correspondendo o perfil de invasão ao longo do fluxo com o obtido pela simulação numérica para a fase alada e para a fase aquática, ver Fig. 7. Como antes, a existência da solução na forma de onda viajante é confirmada e os dois perfis mostram boa concordância com o outro.

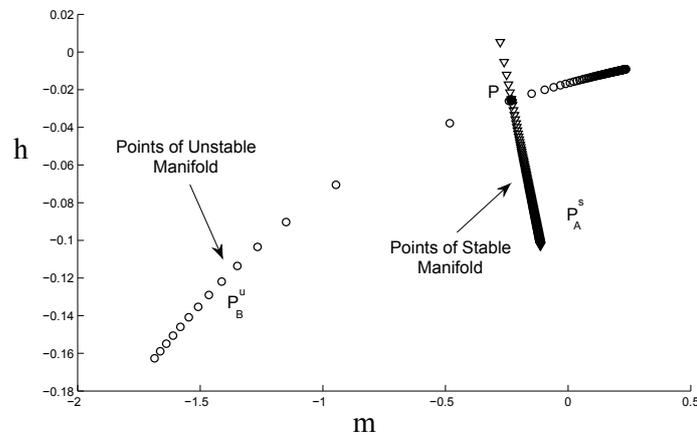


Figura 6 – O plano de Poincaré II, obtido da mesma forma que o da Fig. 3, indicando os conjuntos de interseções P_A^s ($P_A^s \approx W_A^s \cap \Pi$) e P_B^u ($P_B^u \approx W_B^u \cap \Pi$). O ponto P representa a interseção entre as duas variedades indicando a existência da órbita heteroclínica conectando o ponto de equilíbrio B ao ponto de equilíbrio A .

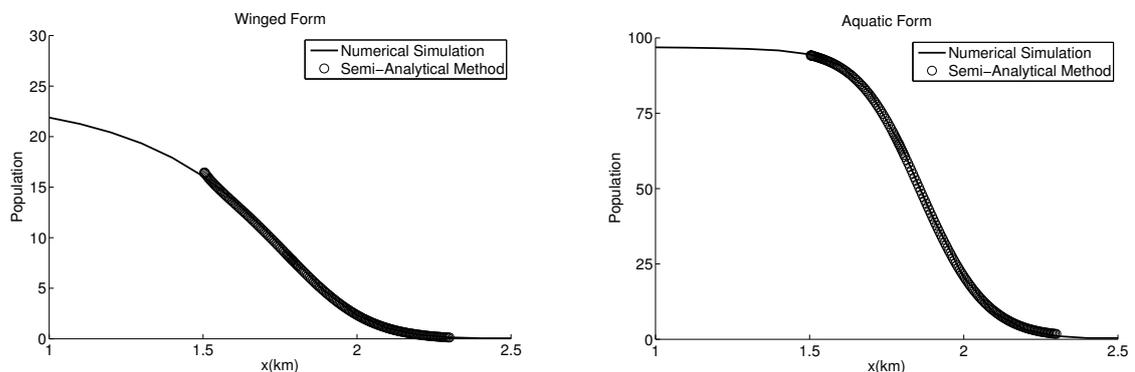


Figura 7 – Os perfis de invasão ao longo do fluxo para a fase alada (esquerda) e fase aquática (direita) obtidos usando o método semi-analítico e a simulação numérica direta.

2.5 RESULTADOS NUMÉRICOS: MODELO 2

Nesta seção vamos estudar o Sistema de EDPs (Eq. (2.7)) e comparamos com o Sistema de EDOs (Eq. (2.19)) usando o algoritmo anterior. Utilizaremos os mesmos parâmetros, Tabelas 1 (dimensional) e 2 (adimensional). Os resultados desta seção foram publicados em [57].

2.5.1 Simulação numérica direta

O Sistema (2.7) é resolvido numericamente como na Subseção 2.4.1. Definem-se os dados iniciais para as variáveis M e A no tempo $t = 0$ como $M_0 = 10$ e $A_0 = 50$, ver Fig. 8. As condições de contorno de Dirichlet são consideradas para ambos os lados esquerdo e direito. Aplicando o mesmo algoritmo de [7], obtemos a solução do Sistema (2.7) para os tempos $t = 0, 3, 6, 9, 15$ (dias) como plotado na Fig. 8.

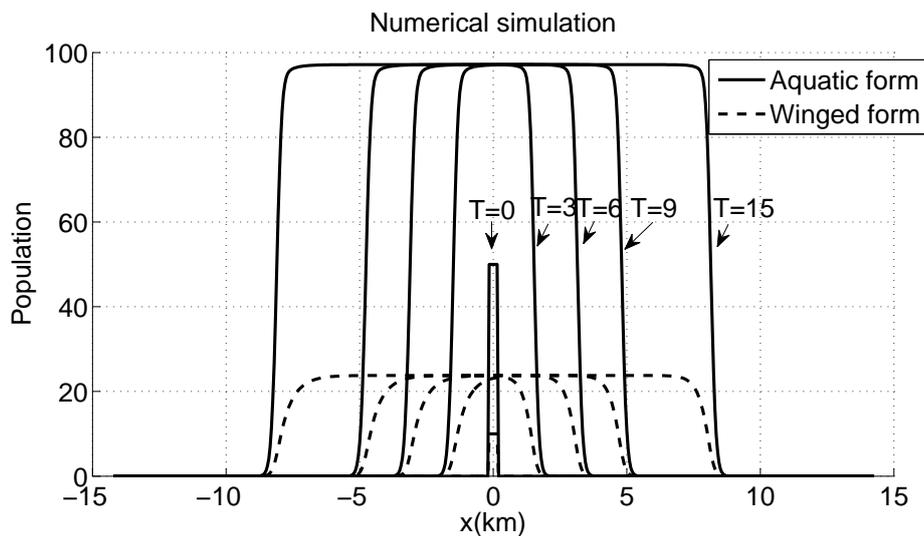


Figura 8 – A solução numérica do Sistema (2.2) para os tempos $t = 0, 3, 6, 9, 15$ dias.

Pela solução numérica apresentada na Fig. 8, temos evidência de que a solução do Sistema (2.7) contém duas ondas viajantes propagando para a frente e para trás, mas não garante a existência. Como no Modelo (2.2), temos o fenômeno de invasão na dinâmica populacional do *Aedes aegypti* com um perfil de propagação ao longo do fluxo (da esquerda para a direita com velocidade $C_{al} = 0,2776 \text{ km}/\text{dia}$ e velocidade adimensional $c_{al} = 0,4534$) e outro perfil de propagação contra o fluxo (da direita para a esquerda com velocidade $C_{ag} = -0,2775 \text{ km}/\text{dia}$ e velocidade adimensional $c_{ag} = -0,4531$).

2.5.2 Método semi-analítico: invasão contra o fluxo

Nesta seção, seguimos os passos do método semi-analítico (descrito na Subseção 2.3.2), a fim de verificar a existência da solução de onda viajante do Sistema (2.19), i.e., a órbita heteroclínica ligando o ponto de equilíbrio A ao ponto de equilíbrio B (condições de contorno dadas pela Eq. (2.23)), para o perfil correspondente à invasão contra o fluxo. O algoritmo para a órbita conectando B até A é análogo, ver [57]. Consideramos os valores dos parâmetros indicados na Tabela 2 com velocidade $c_{ag} = -0,4531$ obtida na simulação numérica.

1. Os pontos de equilíbrio do Sistema (2.19) são $A = (0, 0, 0)$ e $B = (0, 951; 0; 0, 971)$ com as correspondentes matrizes Jacobianas dadas por

$$J_2(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,0013 & 0,5347 & -0,0266 \\ 0,5518 & 0 & -0,0154 \end{bmatrix}, \quad J_2(B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,0272 & 0,5347 & -0,0013 \\ 0,0158 & 0 & -0,5402 \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

2.
 - $J_2(A)$ possui dois autovalores com parte real positiva: $\lambda_1 = 0,1999$ e $\lambda_2 = 0,4743$, com seus autovetores correspondentes $w_1 = (-0,3626; -0,0725; -0,9291)$ e $w_2 = (-0,6332; -0,3003; -0,7134)$. Estes autovetores definem o subespaço instável E_A^u que aproxima localmente a variedade instável W_A^u ;
 - $J_2(B)$ possui dois autovalores com parte real negativa: $\lambda_3 = -0,0467$ e $\lambda_4 = -0,5403$, com seus autovetores correspondentes $w_3 = (0,9984; -0,0466; 0,0319)$ e $w_4 = (-0,0024; 0,0013; 1,0000)$. Estes autovetores definem o subespaço estável E_B^s que aproxima localmente a variedade estável W_B^s .
3. Usando o ponto $C = (0,476; 0; 0,486)$ e o vetor $\vec{N} = (0,476; 0; 0,486)$, definimos o plano de Poincaré Π . Note que $\zeta(C) \cdot \vec{N} = (a^*/4c)X_1 \neq 0$, então o plano Π intercepta ambas as variedades estáveis e instáveis transversalmente, ver Fig. 9.
4. A integração numérica começa em pequenos círculos contidos em E_A^u e E_B^s centrados nos pontos de equilíbrios A e B , respectivamente. Os conjuntos das interseções entre as curvas de integração e Π são denotados por P_A^u e P_B^s , respectivamente. A interseção entre os pontos P_A^u e P_B^s com o plano de Poincaré é o ponto $P_A^u \cap P_B^s = P = (0,2962; 0; 0,6613)$, ver Fig. 10. Isto garante a existência da órbita heteroclínica conectando o ponto de equilíbrio A ao ponto de equilíbrio B . Equivalentemente, isso garante que o Sistema (2.19) com as condições de contorno dadas por (2.23) possui uma solução em forma de onda viajante que corresponde a situação contra o fluxo.

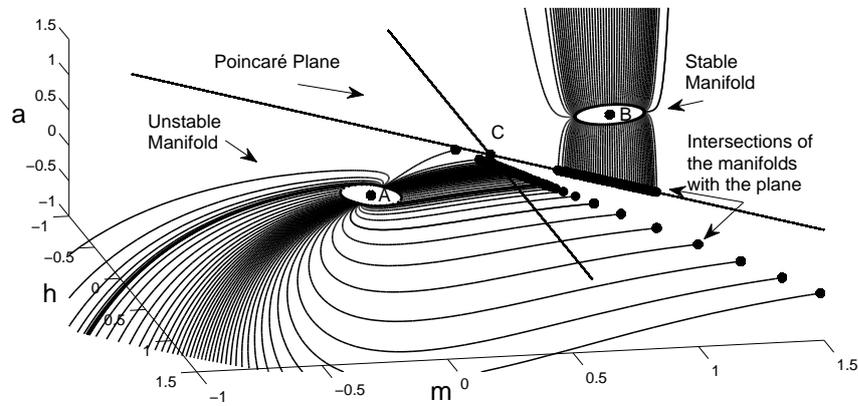


Figura 9 – A integração numérica começa em pequenos círculos contidos em E_A^u e E_B^s centrados nos pontos de equilíbrio A e B , respectivamente. O plano de Poincaré Π é indicado por duas linhas retas; ele intercepta a variedade instável W_A^u e a variedade estável W_B^s nos pontos indicados por estrelas (*).

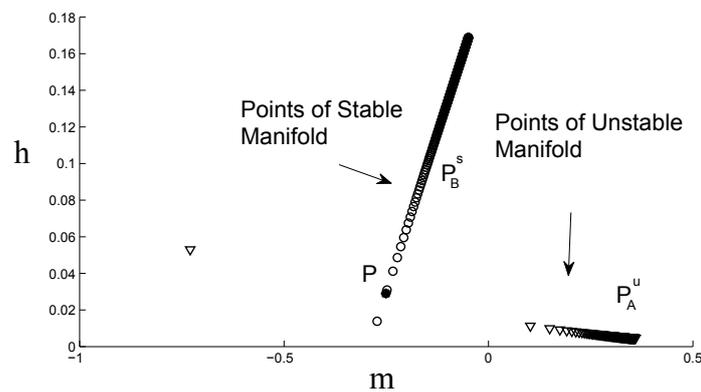


Figura 10 – O plano de Poincaré Π da Fig. 9 indicando os conjuntos de interseções P_A^u ($P_A^u \approx W_A^u \cap \Pi$) e P_B^s ($P_B^s \approx W_B^s \cap \Pi$). O ponto P representa a interseção entre as duas variedades indicando a existência da órbita heteroclínica conectando o ponto de equilíbrio A ao ponto de equilíbrio B .

5. A fim de validar o método semi-analítico proposto, comparamos o perfil da solução obtido pelo método proposto com o da simulação numérica direta da fase alada e da fase aquática, ver Fig. 11. A pequena diferença numérica entre os perfis observados na Fig. 11 são devidos ao efeito de difusão do sistema numérico e o raio dos pequenos círculos usados para iniciar a integração.

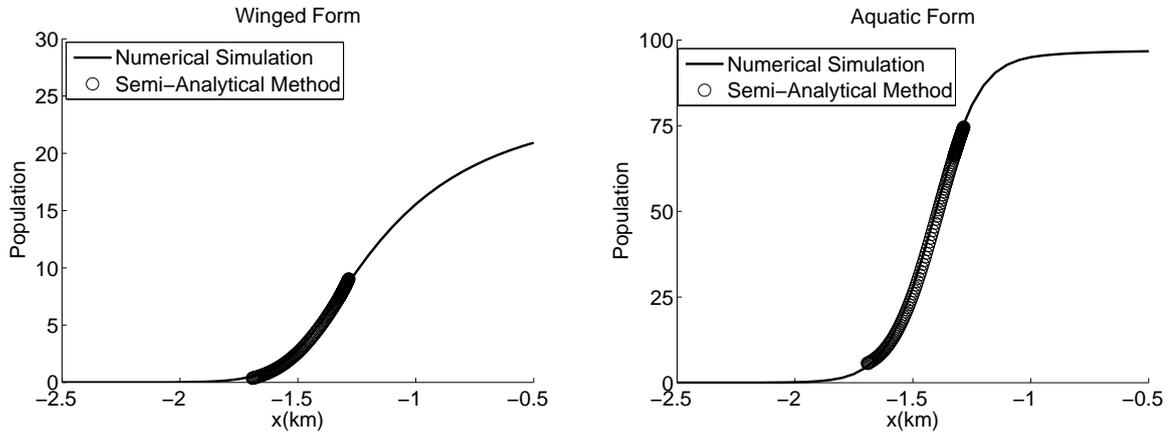


Figura 11 – Perfis de invasão contra o fluxo para a fase alada (esquerda) e fase aquática (direita) obtidos usando o método semi-analítico e a simulação numérica direta.

2.5.3 Método semi-analítico: invasão ao longo do fluxo

Na seção anterior, investigamos a existência da solução na forma de onda viajante correspondendo a invasão contra o fluxo. Nesta seção, investigaremos a existência da solução na forma de onda viajante correspondendo a invasão ao longo do fluxo para o Sistema (2.19) com condições de contorno dadas pela Eq. (2.22).

Usando $c_{al} = 0,4534$ encontrado na Subseção 2.5.1 buscamos uma órbita heteroclínica conectando o ponto de equilíbrio B ao equilíbrio A . Seguindo os mesmos passos da Subseção 2.3.2 e a seção anterior, obtemos $P = P_A^s \cap P_B^u = (0,3096; 0; 0,6482)$ como plotado na Fig. 12. Comparamos a solução obtida correspondendo ao perfil de invasão ao longo do fluxo com o obtido pela simulação numérica para a fase alada e para a fase aquática, ver Fig. 13. Como antes, a existência da solução na forma de onda viajante é confirmada e os dois perfis mostram boa concordância com o outro.

2.6 ESTABILIDADE ESTRUTURAL DA SOLUÇÃO DE ONDA VIAJANTE PARA O MODELO 1

A existência da solução de onda viajante para o caso que descreve a invasão contra o fluxo verificada na Subseção 2.4.2 é baseada na dimensão da variedade estável do equilíbrio

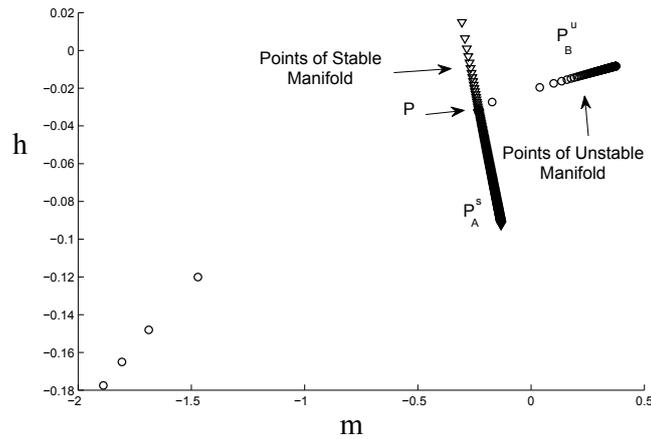


Figura 12 – O plano de Poincaré Π da Fig. 9 indicando os conjuntos das interseções P_A^s ($P_A^s \approx W_A^s \cap \Pi$) e P_B^u ($P_B^u \approx W_B^u \cap \Pi$). O ponto P representa a interseção entre as duas variedades indicando a existência da órbita heteroclínica conectando o ponto de equilíbrio B ao equilíbrio A .

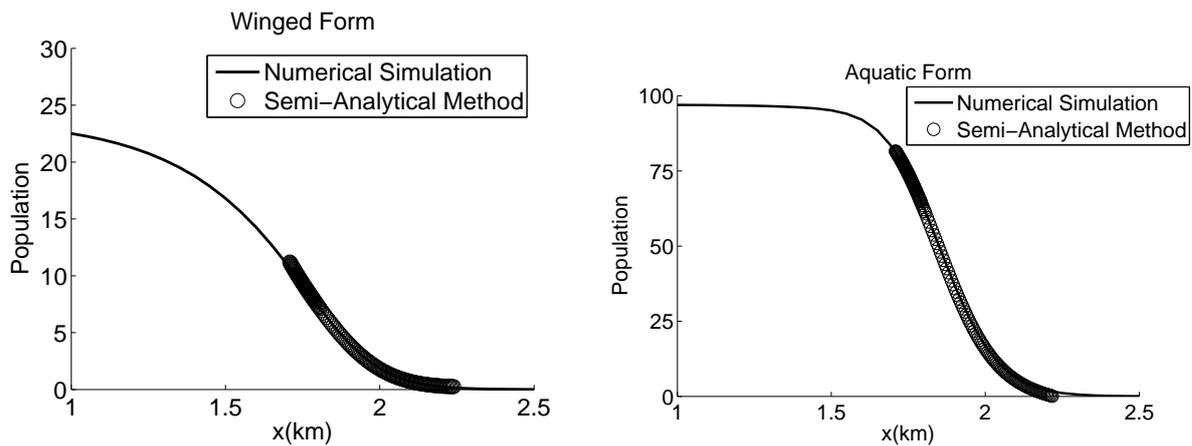


Figura 13 – Os perfis de invasão ao longo do fluxo para a fase alada (esquerda) e fase aquática (direita) obtidos usando o método semi-analítico e a simulação numérica direta.

B e a dimensão da variedade instável de equilíbrio A . Essas dimensões coincidem com o número de autovalores de matrizes dadas na Eq. (2.26). Nesta seção, verificamos se essas dimensões mudam se a velocidade da onda viajante varia. Esta análise é o primeiro passo para estudar a estabilidade estrutural da solução de ondas viajantes.

Para o caso que descreve a invasão contra o fluxo, plotamos a parte real dos autovalores das matrizes dadas em Eq. (2.26) na Fig. 14 para diferentes valores de c . Note que

- para $c \leq -0,391$: $J(A)$ possui um autovalor real negativo e dois autovalores reais positivos; $J(B)$ possui dois autovalores reais negativos e um autovalor real positivo;

- para $-0,391 < c < 0$: $J(A)$ possui um autovalor real negativo e dois autovalores complexos com partes reais positivas; $J(B)$ possui dois autovalores reais negativos e um autovalor real positivo.

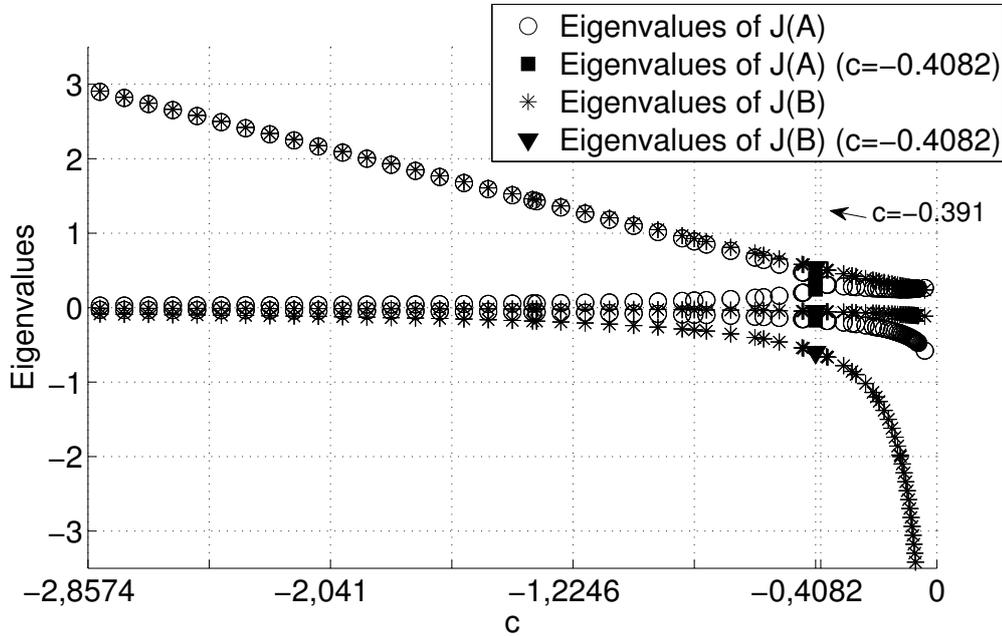


Figura 14 – No caso da invasão contra o fluxo, parte real dos autovalores das matrizes da Eq. (2.26) para diferentes valores da velocidade da onda viajante c .

Como antes, para o caso que descreve a invasão ao longo do fluxo (Subseção 2.4.3), plotamos a parte real dos autovalores das matrizes dadas na Eq. (2.26) na Fig. 15 para diferentes valores de c . Note que

- para $0 < c \leq 0,514$: $J(A)$ possui um autovalor real positivo e dois autovalores conjugados complexos com parte real negativa; $J(B)$ possui dois autovalores reais positivos e um autovalor real negativo;
- para $c > 0,514$: $J(A)$ possui um autovalor real positivo e dois autovalores reais; $J(B)$ possui dois autovalores reais positivos e um autovalor real negativo.

Lembre-se de que a velocidade da onda viajante para o caso da invasão contra o fluxo é $c_{ag} = -0,4082$, ver Fig. 14, e a velocidade da onda viajante para o caso da invasão ao longo do fluxo é $c_{al} = 0,5389$, ver Fig. 15. Assim, para pequenas perturbações de c o sistema deverá manter soluções de ondas viajantes. Mesmo para grandes mudanças de c , as dimensões de todas as variedades estáveis e instáveis não mudam.

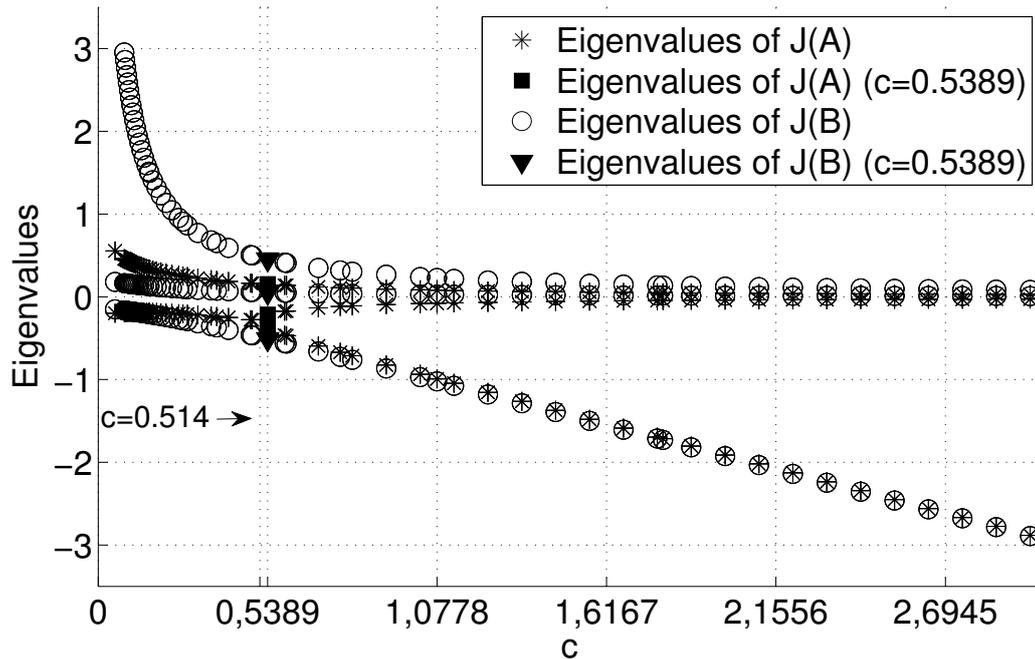


Figura 15 – No caso da invasão ao longo do fluxo, a figura mostra a parte real dos autovalores da matriz dada na Eq. (2.26) para diferentes valores da velocidade da onda viajante c .

2.7 CONCLUSÕES PARCIAIS

Neste capítulo foram apresentados dois modelos unidimensionais para o estudo da dinâmica populacional do mosquito *A. aegypti*. Também descreveu-se um método semi-analítico para verificar a existência de perfis de ondas viajantes.

Nos dois modelos apresentados (Eqs. (2.2) e (2.7)) foram estudadas a existência de soluções na forma de ondas viajantes com um método semi-analítico. Cada modelo possui duas ondas, uma a favor do fluxo e outra contra o fluxo. Os resultados obtidos mostraram que ambas as ondas que aparecem nas simulações numéricas são ondas viajantes. Isto foi verificado com o método semi-analítico e validado através de simulações numéricas. A solução obtida pela simulação numérica direta evidência a forma da solução de onda viajante, mas só ela não garante a existência. O método semi-analítico prova a existência desta solução. Estes resultados foram publicados em [57, 58].

3 MODELO BIDIMENSIONAL

Neste capítulo, apresentam-se um modelo bidimensional para o estudo da população do mosquito *A. aegypti*. Descrevem-se as equações do sistema de EDPs, todas as variáveis e parâmetros, os domínios (locais) onde se aplica o modelo, uma breve descrição para o controle da população do *A. aegypti*, as condições do contorno do sistema e o método numérico utilizado para a solução do problema.

3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste trabalho, um modelo matemático determinístico é proposto para investigar a dinâmica populacional do mosquito *A. aegypti*. O seguinte modelo baseia-se no sistema bidimensional de EDPs para a dinâmica populacional do *A. aegypti*. Estamos interessados em uma escala espacial urbana, onde a difusão representa a dispersão dos mosquitos devido a movimentos autônomos e aleatórios das fêmeas aladas. Para simplificar a dinâmica biológica vital do mosquito, seguimos [46, 57, 58] e consideramos duas subpopulações: uma forma alada e móvel (mosquitos fêmeas maduras); uma forma aquática e estática, que inclui ovos, larvas e pupas. Em cada ponto do espaço (x, y) e tempo t a densidade da fase alada e da fase aquática são denotadas por $M(x, y, t)$ e $A(x, y, t)$, respectivamente. As equações governantes são

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\psi(x, y)M(x, y, t))}{\partial t} &= -\nabla \cdot (v(x, y, t)M(x, y, t)) + \nabla \cdot (D(x, y)\nabla M(x, y, t)) + \\ &+ \gamma A(x, y, t) \left(1 - \frac{M(x, y, t)}{k_1}\right) - (\mu_1 + h_1(x, y, t))M(x, y, t), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial(\psi(x, y)A(x, y, t))}{\partial t} = r \left(1 - \frac{A(x, y, t)}{k_2}\right) M(x, y, t) - (\mu_2 + h_2(x, y, t) + \gamma)A(x, y, t), \quad (3.2)$$

$$M(\cdot, 0) = M_0(\cdot), \quad (3.3)$$

$$A(\cdot, 0) = A_0(\cdot), \quad (3.4)$$

onde

- $\psi(x, y)$ representa o coeficiente de suporte da área de mosquitos,
- $v(x, y, t)$ é a velocidade do vento (ms^{-1}),
- $D(x, y)$ é o coeficiente de difusão (m^2s^{-1}),
- μ_i é a taxa de mortalidade (dia^{-1}),
- k_i é a capacidade suporte (dia^{-1}),

- γ é a taxa específica de maturação da fase aquática para a fase alada (dia^{-1}),
- r é a taxa de oviposição das fêmeas dos mosquitos (dia^{-1}),
- $h_i(x, y, t)$ é o taxa de mortalidade por produtos químicos (dia^{-1}), onde índice $i = 1$ corresponde à fase alada e $i = 2$ à fase aquática.

Como a concentração tanto da fase alada quanto da fase aquática não é uniforme na cidade, introduzimos um coeficiente de suporte de área de mosquitos $\psi \in [0, 1]$ para ambas as fases na Eq. (3.1) e Eq. (3.2). Assim, a população total da fase alada e da fase aquática são dadas por $(\psi(x, y)M(x, y, t))$ e $(\psi(x, y)A(x, y, t))$, respectivamente. Uma das contribuições deste modelo é o coeficiente ψ , pois ele ajuda a descrever as diferentes capacidades populacionais dentro do domínio. Ele indica, por exemplo, se o local é um prédio (como possui vários andares, possui um coeficiente maior), um parque (uma capacidade não tão grande quanto um prédio), uma rua (coeficiente pequeno) e assim por diante.

Para mostrar como podemos aplicar este modelo, serão apresentados quatro exemplos no Cap. 4. Nesses exemplos, teremos três áreas ou cenários distintos para descrever na próxima seção.

3.2 ÁREAS DE ESTUDO

O domínio Ω representa um bairro de uma cidade ou determinada área. Deste modo, três áreas diferentes foram consideradas no presente estudo. A Área 1, que será usada no Exemplo 1, representa um caso genérico contendo apenas ruas (em azul) e blocos de construções (em vermelho), por exemplo, um condomínio ou um quarteirão de uma cidade, ver a Fig. 16. É utilizado para mostrar o comportamento geral do modelo e para testar o algoritmo. Neste caso, o tamanho da área estudada foi de $200m \times 200m$.

A Área 2 representa o centro da cidade de Juiz de Fora. Os Exemplos 2 e 3 utilizam a Área 2 para investigar a dinâmica populacional do mosquito *A. aegypti* em Juiz de Fora. Esta cidade está localizada no sudeste do estado de Minas Gerais, ver Figs. 17 e 18(a). Seu clima subtropical úmido é favorável para a proliferação do *A. aegypti*. A Fig. 18(a) mostra o centro da cidade, mais especificamente, no entorno do Parque Halfeld. A vizinhança da Fig. 18(a) é representada na Fig. 18(b) com 9 ruas (em azul), 17 blocos de construções (em vermelho) e um parque (em verde) chamado Parque Halfeld. A Fig. 18(b) tem um tamanho de $500m \times 500m$.

A Área 3 considera um bairro movimentado (a praia de Copacabana) na cidade do Rio de Janeiro, ver Figs. 19 e 20(a). O Exemplo 4 utiliza a Área 3 para investigar a

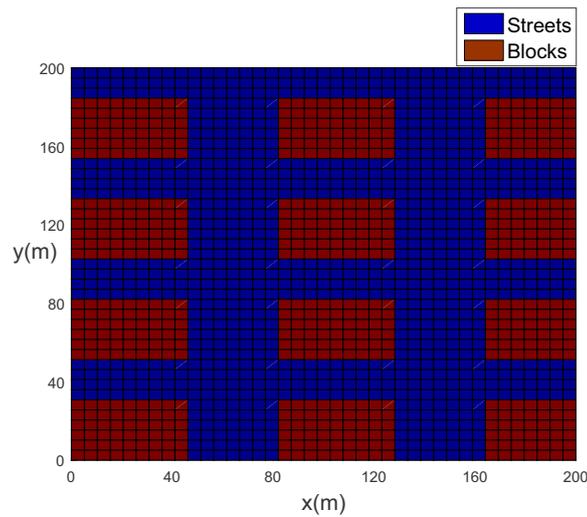


Figura 16 – Área 1: domínio computacional do Exemplo 1 para as funções ψ , v_x , v_y , D_x , D_y , h_1 , e h_2 , incluindo blocos (em vermelho) e ruas (em azul). Os valores são dados na Tabela 4.



Figura 17 – Área 2: visão ampliada do centro de Juiz de Fora e seus arredores. Imagem do Google Maps de Juiz de Fora (escala $1,0cm = 200m$). A área marcada no mapa (vermelho) é mostrada na Fig. 18(a).

dinâmica populacional do mosquito *A. aegypti* no Rio de Janeiro. É a segunda maior cidade do Brasil e a sexta cidade mais populosa da América. Está localizada no estado do Rio de Janeiro. O clima da cidade do Rio de Janeiro é de monções tropicais e é caracterizado por um período mais longo de chuvas fortes entre dezembro e março. A mistura de verão quente e chuva forte cria uma condição ideal para a proliferação de mosquitos *A. aegypti*. A Fig. 20(a) mostra a praia de Copacabana, contendo ruas, edifícios e a praia. Ela é representada na Fig. 20(b) com o tamanho de $400m \times 400m$, possuindo 12 blocos de construções (em vermelho), 6 ruas (em azul) e 1 praia (em laranja).

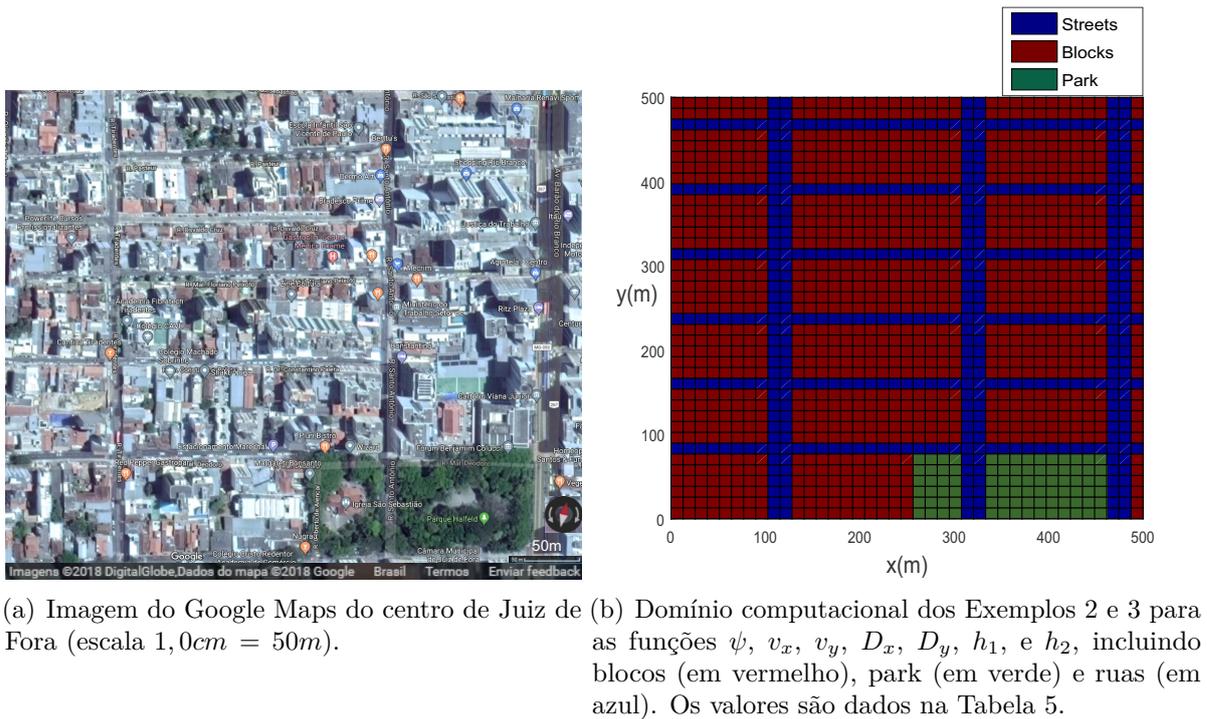


Figura 18 – Área 2: a pequena vizinhança da cidade de Juiz de Fora (Parque Halfeld).

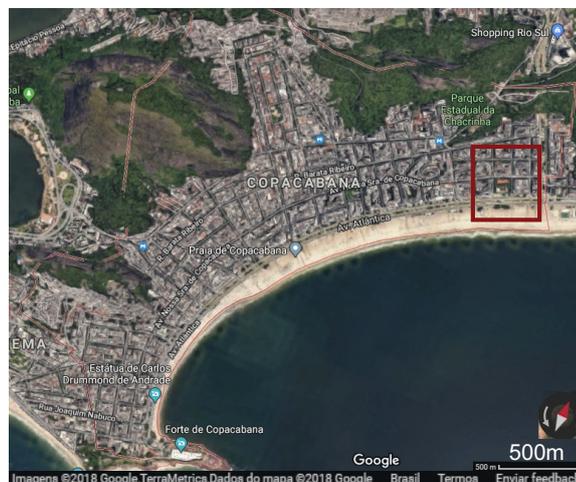
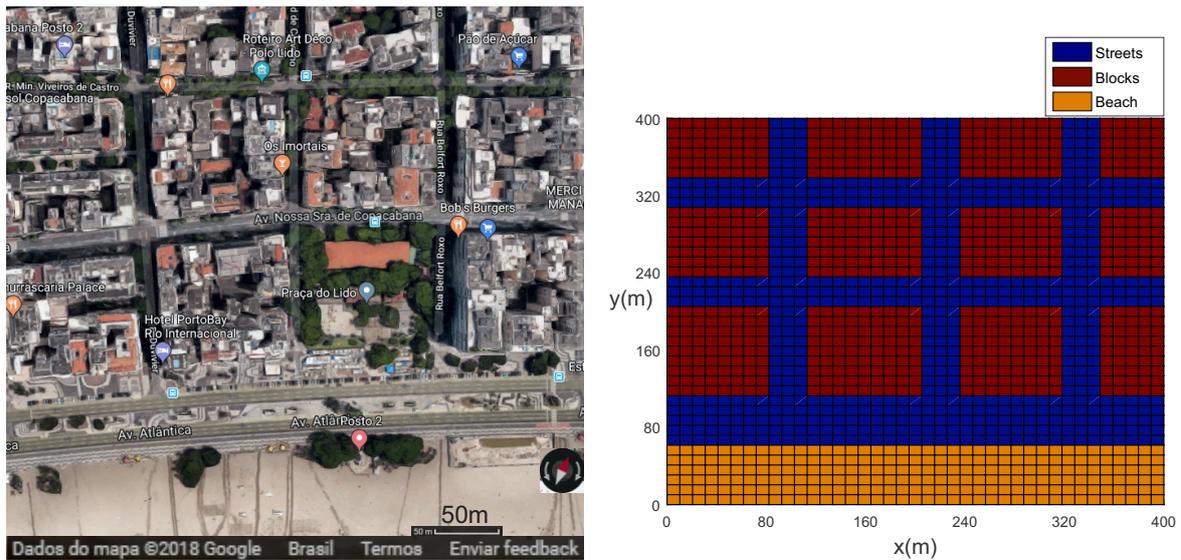


Figura 19 – Área 3: visão ampliada de Copacabana no Rio de Janeiro e seus arredores. Imagem do Google Maps do Rio de Janeiro (praia de Copacabana, escala 1,0cm = 500m). A área marcada no mapa (em vermelho) é mostrada na Fig. 20(a).

A principal diferença deste exemplo com os anteriores é a presença de praia em conjunto com ventos periódicos que afetam a dispersão da população de mosquitos. Para estudar este fenômeno, as áreas de vegetação são negligenciadas.

Por simplicidade, todos os exemplos apresentados neste trabalho consideram o domínio dividido em blocos retangulares, que representam diferentes partes da cidade,



(a) Imagem do Google Maps do Rio de Janeiro (praia de Copacabana, escala $1,0cm = 50m$). (b) Domínio computacional do Exemplo 4 para as funções ψ , v_x , v_y , D_x , D_y , h_1 , e h_2 para o Rio de Janeiro, incluindo blocos (em vermelho), praia (em laranja) e ruas (em azul). Os valores são dados nas Tabelas 8 e 9.

Figura 20 – Área 3: a vizinhança da praia de Copacabana, cidade do Rio de Janeiro.

tais como construções, jardins, praças, ruas, praias, florestas, etc. A diferença entre todos esses blocos é o suporte da população de mosquitos, coeficientes de deslocamento e mortalidade. Essa abordagem nos permite modelar e simular a dinâmica populacional com maior precisão.

Observe que a incidência de dengue e da população de mosquitos é conhecida por bairros e não por quarteirões. É por isso que, embora seja importante modelar áreas com vegetação abundante, poucas áreas de vegetação podem ser consideradas homogêneas com o restante do bairro. Para obter os valores dos parâmetros dos quarteirões, as imagens de satélite podem ser empregadas por meio da análise de cores. No entanto, não foi utilizado no presente trabalho, deixado para o futuro.

3.3 APLICAÇÃO DE INSETICIDAS

Durante os períodos de maior incidência do mosquito *A. aegypti*, o que corresponde a três meses no verão nas áreas estudadas, são necessárias fortes medidas para controlar população deste vetor e as doenças transmitidas por ele. Atualmente a forma mais utilizada para controlar o vetor é a utilização de produtos químicos, principalmente os organoclorados, organofosforados, carbamatos e piretróides, normalmente fumigados no ambiente, contudo cabe ressaltar o impacto provocado por estes produtos no ambiente,

bem como no bem estar da população [36].

“Sprays espaciais” são um meio importante de reduzir as populações, incluem aerossóis de volume ultrabaixo, neblinas térmicas ou poeiras usando equipamentos montados em caminhões [49]. No Brasil, estas pulverizações são conhecidas como “fumacê”. As aplicações de aduicidas exercem pouco ou nenhum efeito nas fases aquáticas do *A. aegypti*, e adultos continuarão surgindo após a pulverização [49].

No presente trabalho, discutiremos apenas o controle químico para o estágio adulto do mosquito, ou seja, a utilização do “fumacê” na fase alada. Para investigar as estratégias de controle do mosquito em uma cidade, utilizamos duas formas diferentes de aplicação de inseticidas químicos no centro de Juiz de Fora. Inicialmente, os inseticidas foram usados em uma rua na horizontal. Como mostrado na Fig. 21(a), uma rua com a área circundante (cor cinza) foi selecionada para o uso de inseticidas para controlar a população de mosquitos. Repare que a aplicação cobre a rua, uma linha abaixo e uma linha acima da rua, mostrando como o “fumacê” se espalha no ambiente próximo da aplicação.

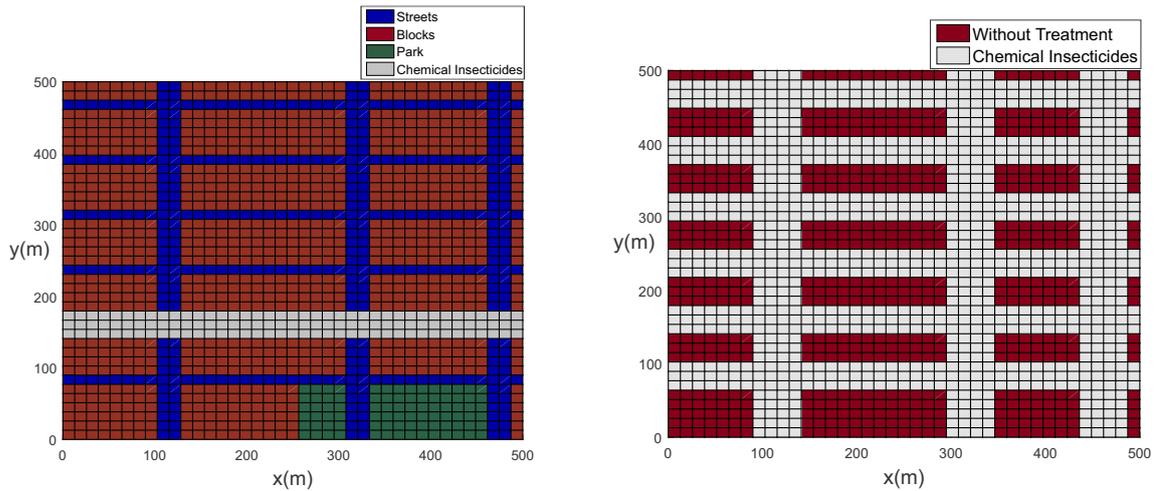
Mais tarde, a aplicação dos inseticidas na população de mosquitos foi estudado ao longo de todas as ruas do centro da cidade de Juiz de Fora, ver Fig. 21(b). Neste caso, também temos a dispersão próximo das ruas, na horizontal uma linha a cima e uma abaixo; e na vertical uma linha a direita e uma a esquerda.

Note que, para ambas as simulações, usamos a mesma quantidade de inseticidas. Como é um primeiro experimento, aplicaremos os inseticidas químicos durante toda a execução de tempo (42 dias). Neste trabalho, não buscamos a melhor forma de espalhar os produtos químicos.

3.4 CONDIÇÕES DE CONTORNO

A fim de resolver o sistema de EDPs, precisamos especificar as condições de contorno do domínio. O caso do fluxo conhecido de mosquitos para a cidade ao longo de um lado do domínio, é chamado, matematicamente, de condições de fronteira Neumann. Por exemplo, quando se considera uma parte isolada da cidade com fluxo zero de mosquitos ao longo de cada lado do domínio. Consideramos $\partial_x M = 0$ nos lados esquerdo e direito e $\partial_y M = 0$ nos lados superior e inferior. Este tipo de limite é usado nos Exemplos 1, 2 e 3, Seções 4.1, 4.2 e 4.3, respectivamente.

Quando a quantidade de mosquitos é conhecida em um dos lados do domínio, o caso é chamado de condições de fronteira de Dirichlet. Por exemplo, ao modelar áreas da costa marítima, a população de mosquitos foi considerada como zero ao longo do lado que é voltado para o mar. Este caso é estudado no Exemplo 4 na Seção 4.4, onde as condições



(a) Uma rua na horizontal com inseticidas químicos. (b) Todas as ruas com inseticidas químicos. A figura A figura representa os valores dos parâmetros das representa os valores dos parâmetros da Tabela 7. Tabelas. 5 e 6.

Figura 21 – Exemplo 3: domínio computacional para as funções h_1 , e h_2 para Juiz de Fora, onde o inseticida químico é representado pela cor cinza.

de fronteira Neumann é nula para os outros três lados do domínio.

3.5 MÉTODOS NUMÉRICOS

Descreveremos os métodos numéricos que utilizaremos para encontrar a solução numérica do problema. A ideia básica da maioria dos métodos numéricos para equações diferenciais consiste em discretizar a equação, ou sistema de equações, de tal forma que possa ser implementado e resolvido numericamente.

As equações governantes que descrevem a dinâmica populacional do *A. aegypti* foram discretizadas usando o método de volumes finitos (MVF) padrão, ver [19, 40, 31, 17] para maiores detalhes. O domínio é dado por $\Omega = [0, L] \times [0, L]$. O sistema (3.1)-(3.2) pode ser escrito como a equação de transporte escalar:

$$\frac{\partial(\psi U(x, y, t))}{\partial t} + \nabla \cdot (v U(x, y, t)) = \nabla \cdot (D \nabla U(x, y, t)) + \phi(U, x, y, t), \quad (3.5)$$

onde U representa M e A , ϕ é o termo fonte e os outros termos são os mesmos que na Eq. (3.1). Para resolver o problema, dividimos o domínio Ω em “células” ou volumes de controle, ver Fig. 22.

Para obter a discretização, integramos a Eq. (3.5) na célula centrada em (x_i, y_j) .

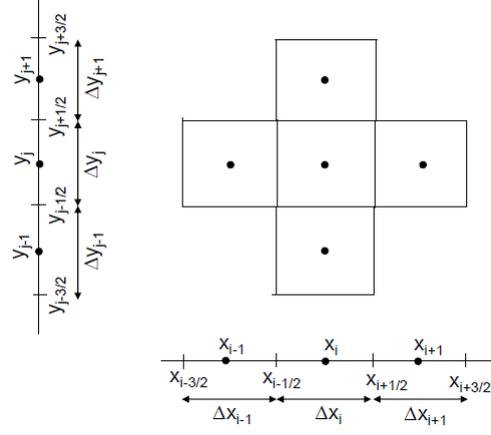


Figura 22 – Representação de uma “célula” (x_i, y_j) .

Para a derivada temporal, resulta em

$$\begin{aligned} & \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial(\psi U)}{\partial t} dx dy \approx \\ & \approx \Delta x_i \Delta y_j \frac{\psi_{i,j}^{n+1} U_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^n U_{i,j}^n}{\Delta t}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde $U(x_i, y_j, t_n) = U_{i,j}^n$. A integral para o termo fonte é

$$\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \phi dx dy \approx \Delta x_i \Delta y_j \phi_{i,j}^n. \quad (3.7)$$

Para os termos de convecção e difusão na Eq. (3.5), considere $v = (v_x, v_y)$, $D = (D_x, D_y)$ e a discretização somente na direção X . A integral do termo de fluxo é

$$\begin{aligned} & \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial}{\partial x} \left(-v_x M + \frac{\partial(D_x M)}{\partial x} \right) dx dy = \\ & = \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \left(\left[-v_x M + D_x \frac{\partial M}{\partial x} \right] \Big|_{(x_{i+1/2}, y_j)} - \right. \\ & \left. - \left[-v_x M + D_x \frac{\partial M}{\partial x} \right] \Big|_{(x_{i-1/2}, y_j)} \right) dy \approx \\ & \approx \Delta y_j \left[- (v_x)_{(x_{i+1/2}, y_j)} M_{(x_{i+1/2}, y_j)} + \right. \\ & + (D_x)_{(x_{i+1/2}, y_j)} \left(\frac{M_{i+1,j} - M_{i,j}}{\Delta x_i} \right) + \\ & + (v_x)_{(x_{i-1/2}, y_j)} M_{(x_{i-1/2}, y_j)} - \\ & \left. - (D_x)_{(x_{i-1/2}, y_j)} \left(\frac{M_{i,j} - M_{i-1,j}}{\Delta x_i} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.8)$$

Para encontrar os valores de $M_{(x_{i+1/2}, y_j)}$, $M_{(x_{i-1/2}, y_j)}$, devemos analisar o sinal de $(v_x)_{(x_{i+1/2}, y_j)}$ e $(v_x)_{(x_{i-1/2}, y_j)}$. Se $(v_x)_{(x_{i+1/2}, y_j)}^n > 0$, então $M_{(x_{i+1/2}, y_j)}^n \approx M_{i,j}^n$ e $M_{(x_{i-1/2}, y_j)}^n \approx M_{i-1,j}^n$. Se

$(v_x)_{(x_{i+1/2}, y_j)}^n < 0$, então $M_{(x_{i+1/2}, y_j)}^n \approx M_{i+1, j}^n$ e $M_{(x_{i-1/2}, y_j)}^n \approx M_{i, j}^n$. A discretização é análoga para a direção Y , ver [40].

O sistema (3.1)-(3.4) foi resolvido usando um código de volume finito interno desenvolvido usando o MATLAB. O método *Forward Euler* foi usado para integração de tempo. Para todas as etapas de tempo, a condição *Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)*, ver [18], foi testada, garantindo a estabilidade numérica.

4 RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES USANDO O MODELO BIDIMENSIONAL

Nesta seção apresentamos os resultados numéricos obtidos pela solução do Sistema (3.1)-(3.4). Foram feitas simulações numéricas utilizando as áreas da Seção 3.2 em 4 exemplos. O primeiro exemplo corresponde a um condomínio ou um quarteirão de uma cidade. No segundo e terceiro exemplos, investigamos a dinâmica populacional do mosquito *A. aegypti* na cidade de Juiz de Fora com e sem o uso de inseticidas químicos. No quarto exemplo, apresentamos os resultados numéricos para a Praia de Copacabana na cidade do Rio de Janeiro. Os parâmetros do modelo são dados na Tabela 3 e foram retirados da literatura [46]. Todas as simulações foram realizadas com o período de tempo de seis semanas (42 dias). As condições iniciais para todos os exemplos foram $M_0 = 5$ e $A_0 = 15$; e na discretização temos $\Delta_x = \Delta_y = 0,128$ e $\Delta_t = 0,010$. Estes resultados foram publicados em [59].

4.1 EXEMPLO 1 - BLOCOS GENÉRICOS

Vamos considerar uma vizinhança urbana quadrada composta por blocos de construções (vermelho) e ruas (azul), ver Fig. 16. Os parâmetros do modelo são apresentados na Tabela 4. A componente da velocidade do vento na direção Y é tomada como sendo maior que a componente na direção X .

As concentrações das populações para ambas as fases (aladas e aquáticas) são apresentadas para diferentes tempos nas Figs. 23(a) e 23(b) ($t = 0$), Figs. 24(a) e 24(b) ($t = 21$ dias), Figs. 25(a) e 25(b) ($t = 42$ dias). Observe que a população de ambas as fases penetra lentamente, por causa da difusão, da rua para os blocos, como mostrado nas Figs. 24(a) e 24(b). A população para ambas as fases se espalha rapidamente pelas ruas devido à presença do vento e maior valor do coeficiente de difusão quando comparado aos blocos, mas a concentração das populações nas ruas é baixa. A população de mosquitos para ambas as fases se espalha rapidamente ao longo da direção Y explicada por termos considerado maior componente da velocidade do vento ao longo da direção do Y . Conforme o tempo avança, observamos que a população de mosquitos aumenta dentro dos blocos, ver Figs. 25(a) e 25(b). O aumento da população pode ser explicado pela invasão de mosquitos nos blocos. Além disso, observa-se que o processo de invasão diminui dentro dos blocos próximos a borda do domínio devido ao fluxo zero de mosquitos.

Tabela 3 – Valores de parâmetros dimensionais usados em todas as simulações.

Parâmetro	Descrição	Valor Base/Unidades
D	coeficiente de difusão	$1,25 \times 10^{-2} m^2 s^{-1}$
D_x	coeficiente de difusão (direção X)	$(m^2 s^{-1})$
D_y	coeficiente de difusão (direção Y)	$(m^2 s^{-1})$
γ	taxa específica de maturação da fase aquática para a fase alada	$0,2 dia^{-1}$
r	taxa de oviposição das fêmeas dos mosquitos	$30 dia^{-1}$
k_1	capacidade suporte da fase alada	$25 dia^{-1}$
k_2	capacidade suporte da fase aquática	$100 dia^{-1}$
μ_1	taxa de mortalidade da fase alada	$4,0 \times 10^{-2} dia^{-1}$
μ_2	taxa de mortalidade da fase aquática	$1,0 \times 10^{-2} dia^{-1}$
v	velocidade do vento	$5,0 \times 10^{-2} ms^{-1}$
v_x	velocidade do vento (direção X)	(ms^{-1})
v_y	velocidade do vento (direção Y)	(ms^{-1})
h_1	coeficiente do termo de extermínio da fase alada	$0 dia^{-1}$
h_2	coeficiente do termo de extermínio da fase aquática	$0 dia^{-1}$
ψ	representa o coeficiente de suporte da área de mosquitos	[.]

Tabela 4 – Valores dos parâmetros dimensionais usados no Exemplo 1.

Parâmetro	Blocos	Ruas
ψ	1,0	0,3
v_x	0	$5,0 \times 10^{-2}$
v_y	0	$1,5 \times 10^{-1}$
D_x	$3,75 \times 10^{-3}$	$1,25 \times 10^{-2}$
D_y	$3,75 \times 10^{-3}$	$1,25 \times 10^{-2}$

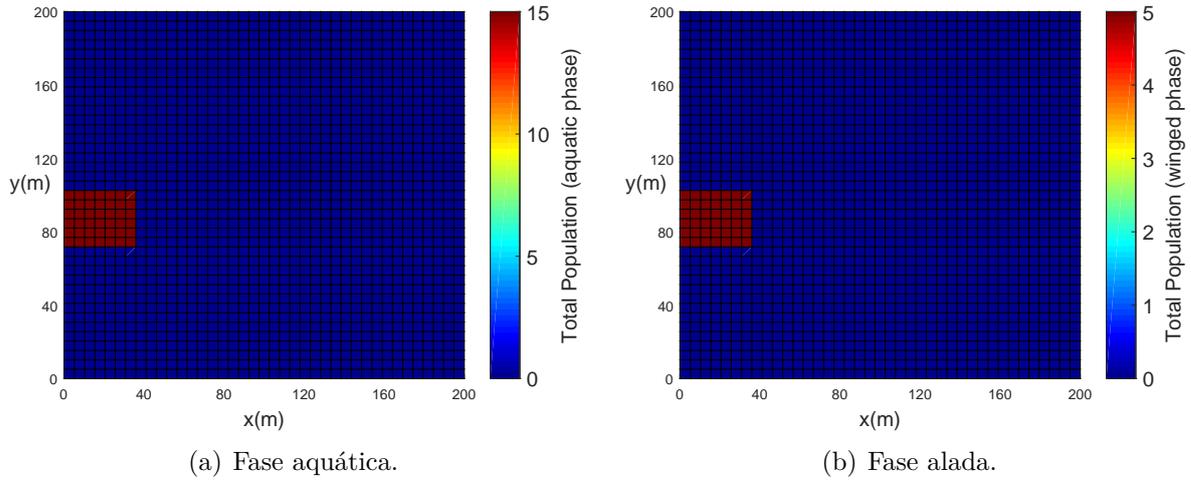


Figura 23 – Exemplo 1: condição inicial para ambas as populações ($t = 0$).

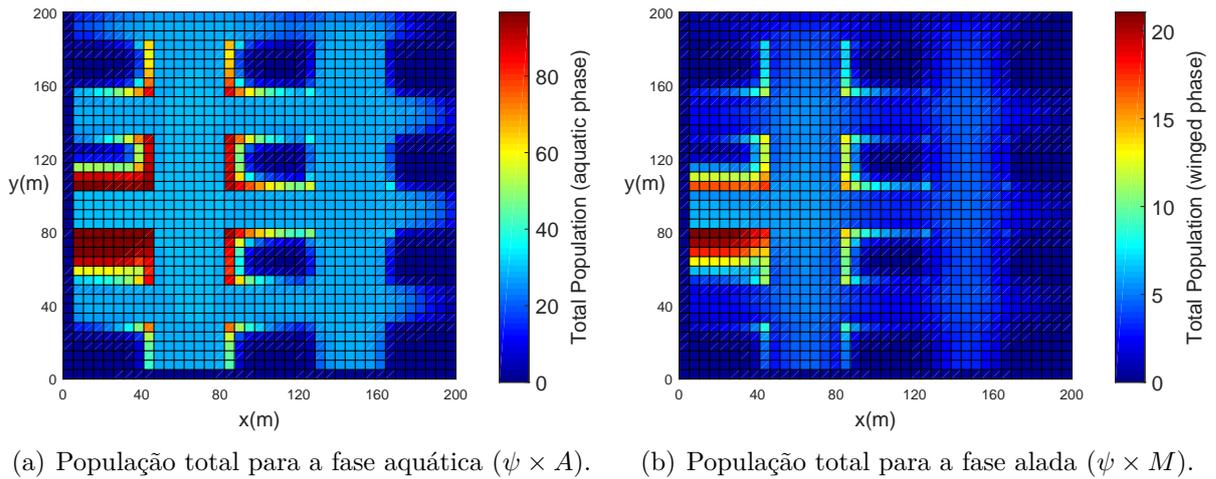


Figura 24 – Exemplo 1: propagação das populações dentro dos blocos genéricos ($t = 21$ dias).

4.2 EXEMPLO 2 - CENTRO DA CIDADE DE JUIZ DE FORA

Para simular a dinâmica populacional dos mosquitos em Juiz de Fora, considere-se um domínio simplificado, como mostra a Fig. 18(b). No modelo, supomos blocos homogêneos considerando ψ , que representa o coeficiente de suporte da área de mosquitos. Tanto no mapa como no modelo, os blocos são separados por ruas, como mostrado nas Figs. 17, 18(a) e 18(b). Os parâmetros do modelo para blocos e ruas são apresentados na Tabela 5. A componente da velocidade do vento na direção X é tomada como sendo maior tanto nas ruas quanto no parque em comparação com a velocidade do vento na direção Y .

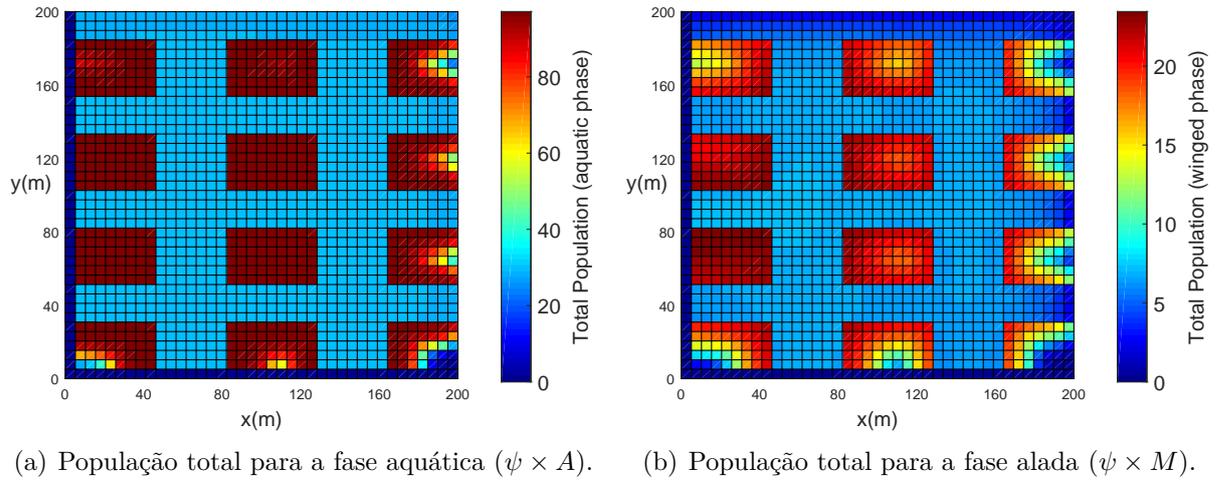


Figura 25 – Exemplo 1: propagação das populações dentro dos blocos genéricos ($t = 42$ dias).

Tabela 5 – Valores dos parâmetros dimensionais comuns usados para os exemplos 2 e 3 (Juiz de Fora).

Parâmetro	Blocos	Ruas	Parque
ψ	1,0	0,3	0,8
v_x	0	$-1,0 \times 10^{-1}$	$-5,0 \times 10^{-2}$
v_y	0	$5,0 \times 10^{-2}$	$2,5 \times 10^{-2}$
D_x	$3,75 \times 10^{-3}$	$1,25 \times 10^{-2}$	$1,25 \times 10^{-2}$
D_y	$3,75 \times 10^{-3}$	$1,25 \times 10^{-2}$	$1,25 \times 10^{-2}$

Para representar uma concentração maior de mosquitos dentro do parque e nos blocos, um valor mais alto de (ψ) foi escolhido, ver Tabela 5. As populações iniciais de ambas as fases foram concentradas no parque, ver as Figs. 26(a) e 26(b). As concentrações das populações para ambas as fases (alada e aquática) são mostradas em diferentes tempos nas Figs. 27(a) e 27(b) ($t = 21$ dias), Figs. 28(a) e 28(b) ($t = 42$ dias). Observa-se que a população em ambas as fases se difunde lentamente do parque para as ruas e blocos, como mostrado nas Figs. 27(a) e 27(b). As populações para ambas as fases se espalharam rapidamente pelas ruas devido à presença do vento e maior valor do coeficiente de difusão quando comparado aos blocos e ao parque. A população de mosquitos para ambas as fases se espalhou mais rapidamente ao longo da direção X devido a maior componente da velocidade do vento ser ao longo da direção X . A medida que o tempo avança, a população de mosquitos aumenta dentro dos blocos como esperado, ver Figs. 28(a) e 28(b). Além disso, observa-se que o processo de invasão é muito mais elevado para a fase aquática em comparação com a fase alada próxima a fronteira, ver Figs. 28(a) e 28(b). Isto pode ser

devido ao fluxo zero para a fase alada na borda do domínio.

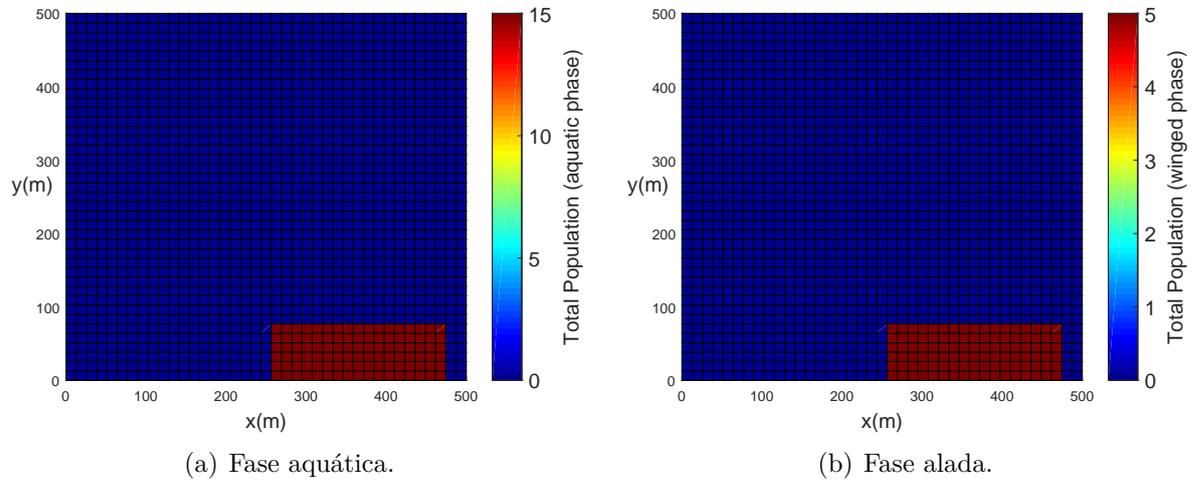


Figura 26 – Exemplo 2: condição inicial para ambas as populações em Juiz de Fora ($t = 0$).

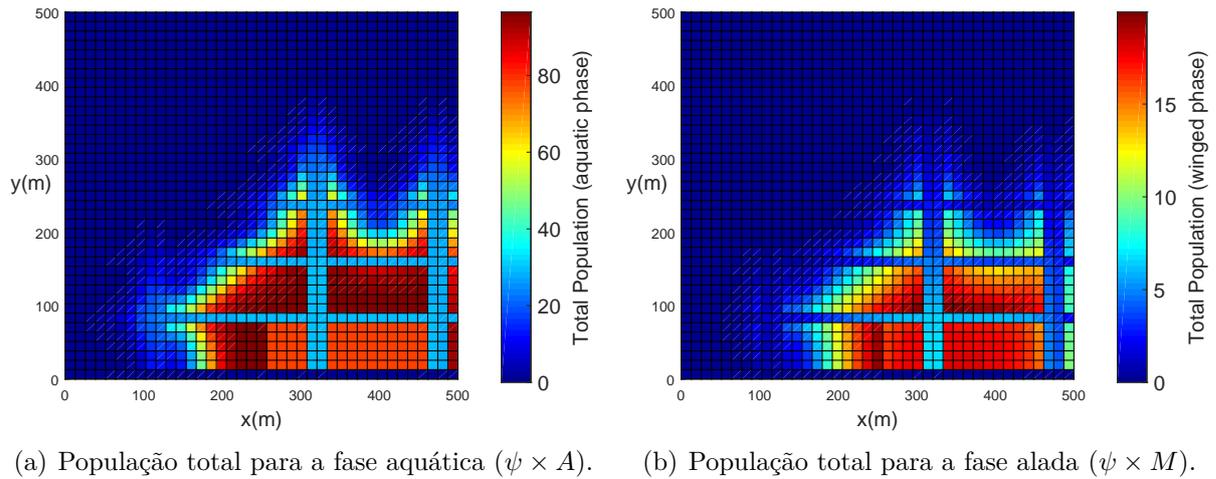


Figura 27 – Exemplo 2: propagação das populações em Juiz de Fora ($t = 21$ dias).

4.3 EXEMPLO 3 - CENTRO DA CIDADE DE JUIZ DE FORA COM INSETICIDAS QUÍMICOS

Nesta seção, a dinâmica populacional dos mosquitos *A. aegypti* é estudada no mesmo bairro de Juiz de Fora como no exemplo anterior levando em conta o uso de inseticidas químicos (“fumacê”). Lembrando que neste tipo de aplicação, temos uma dispersão do inseticida além das ruas selecionadas, pois ele se espalha nas áreas ao redor das ruas, como foi explicado na Seção 3.3. Os parâmetros do modelo são os mesmos do

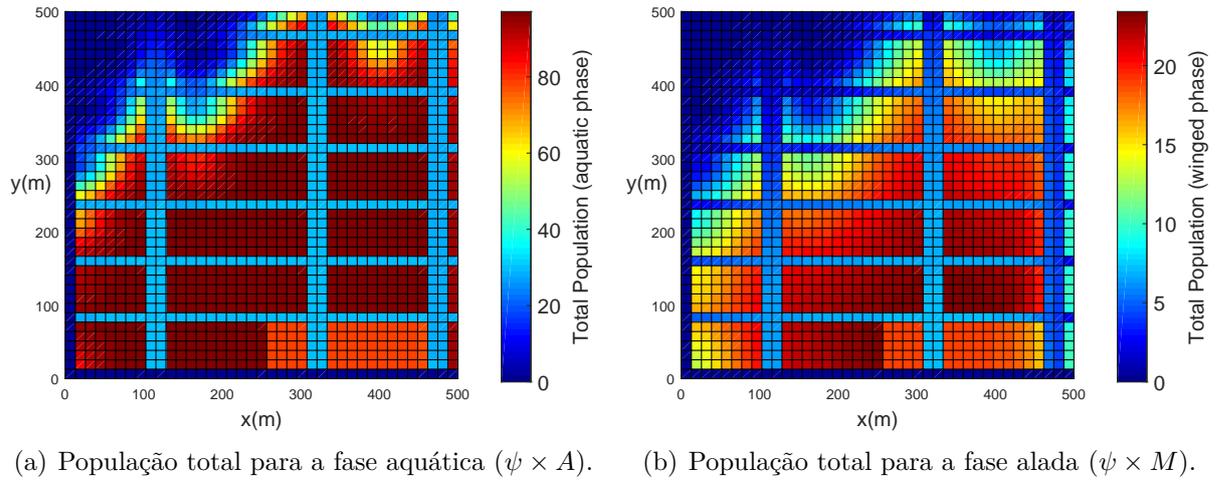


Figura 28 – Exemplo 2: propagação das populações em Juiz de Fora ($t = 42$ dias).

Exemplo 2, ver Tabela 5, com a exceção de um parâmetro (h_1). As condições iniciais são as mesma do exemplo anterior, ver Fig. 26. Note que, para ambas as simulações, usamos a mesma quantidade de inseticidas, sendo este aplicado durante o tempo total da execução (42 dias).

4.3.1 Centro da cidade de Juiz de Fora com inseticidas em uma rua na horizontal

Como mostrado na Fig. 21(a), uma rua na horizontal com a área ao redor (cor cinza) foi selecionada para o uso de inseticidas para controlar a população de mosquitos. Criou-se um barreira com o uso O valor do parâmetro h_1 é dado na Tabela 6.

Tabela 6 – Valores de parâmetros dimensionais para o Exemplo 3 (inseticidas químicos usados em uma rua na horizontal).

Parâmetros	Blocos	Ruas	Parque
h_1	0	7,6	0
h_2	0	0	0

As concentrações populacionais para ambas as fases (alada e aquática) são mostradas em diferentes tempos nas Figs. 29(a) e 29(b) ($t = 21$ dias), Figs. 30(a) e 30(b) ($t = 42$ dias). Inicialmente, a população de mosquitos foi concentrada no parque. Foi observado que a população de ambas as fases foi lentamente difundida do parque para as ruas. Observe que, após o uso de inseticidas na rua selecionada, a concentração de mosquitos perto da rua foi reduzida, ver a Fig. 30(b).

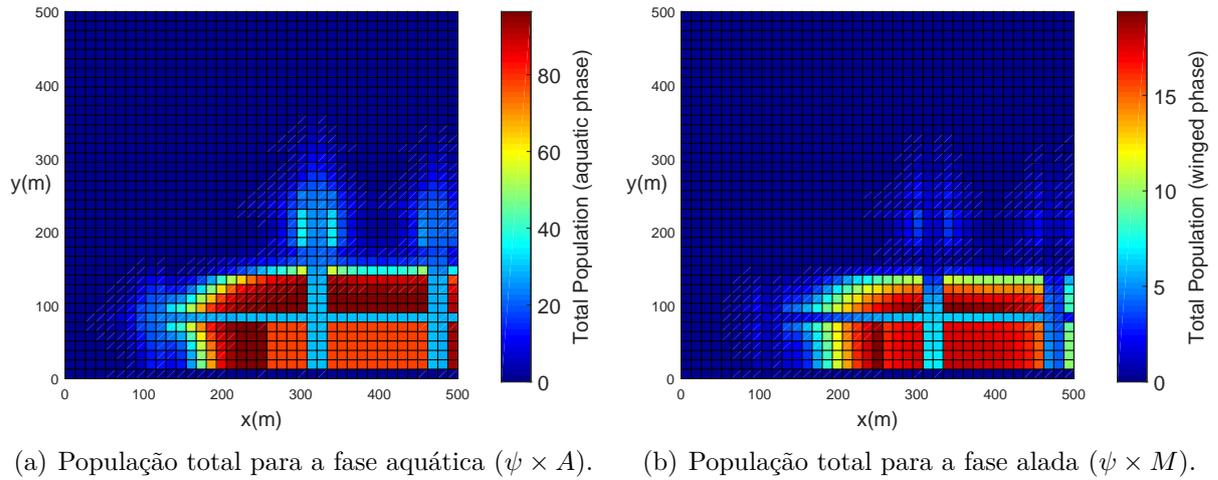


Figura 29 – Exemplo 3 (uma rua com inseticidas químicos): propagação das populações em Juiz de Fora ($t = 21$ dias).

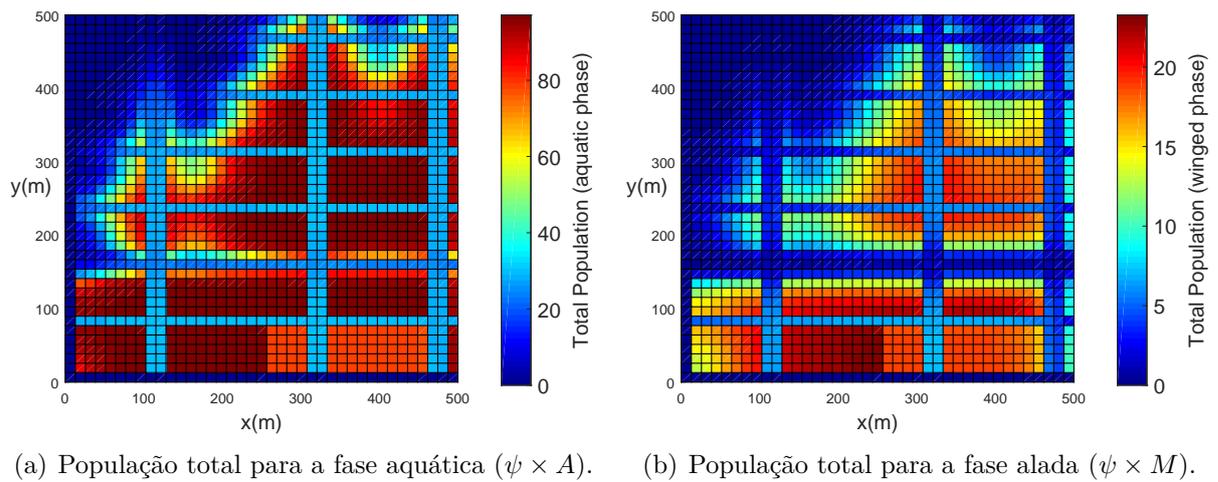


Figura 30 – Exemplo 3 (uma rua com inseticidas químicos): propagação das populações em Juiz de Fora ($t = 42$ dias).

A redução na população para a fase alada é maior quando comparada à fase aquática. Isso acontece porque o termo de extermínio (h_1) foi usado para controlar a população de mosquitos na fase alada. No entanto, a redução na fase alada tem impacto direto na redução da fase aquática, devido à dependência do termo fonte nas Eqs. (3.1) e (3.2) em ambos $M(x, y, t)$ e $A(x, y, t)$.

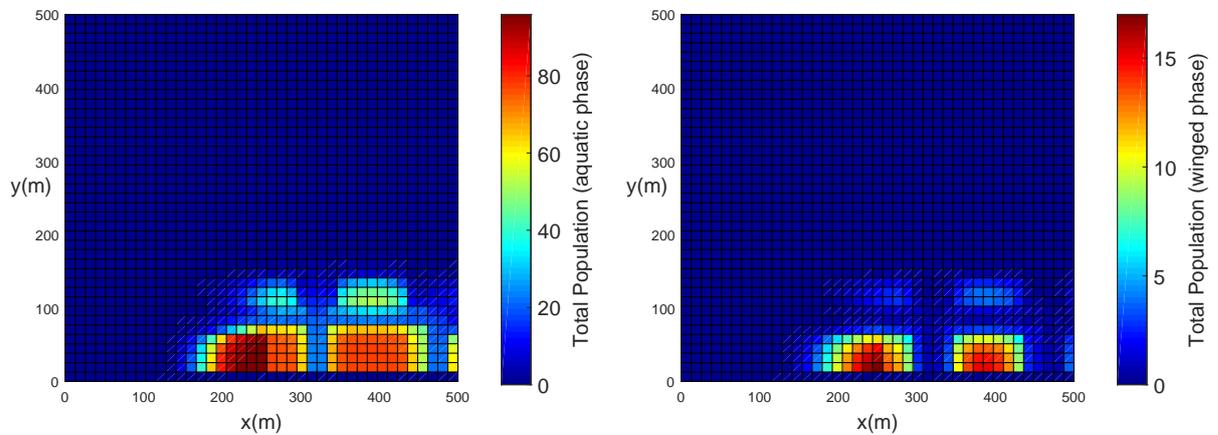
4.3.2 Centro da cidade de Juiz de Fora com inseticidas em todas as ruas

O efeito dos inseticidas químicos sobre a população de mosquitos foi estudado ao longo de todas as ruas do centro da cidade de Juiz de Fora, ver Fig. 21(b). O valor do parâmetro h_1 é dado na Tabela 7.

Tabela 7 – Valores dos parâmetros dimensionais para o Exemplo 3 (inseticidas químicos usados em todas as ruas).

Parâmetro	Blocos	Ruas	Parque
h_1	0	0,928	0
h_2	0	0	0

As concentrações populacionais para ambas as fases (alada e aquática) são mostradas para diferentes tempos nas Figs. 31(a) e 31(b) ($t = 21$ dias), Figs. 32(a) e 32(b) ($t = 42$ dias). Observe que, neste exemplo, quando os inseticidas químicos foram usados em todas as ruas, a concentração de mosquitos perto das ruas foi reduzida significativamente, ver Fig. 32(a) e 32(b).



(a) População total para a fase aquática ($\psi \times A$).

(b) População total para a fase alada ($\psi \times M$).

Figura 31 – Exemplo 3 (todas as ruas com inseticidas químicos): propagação das populações em Juiz de Fora ($t = 21$ dias).

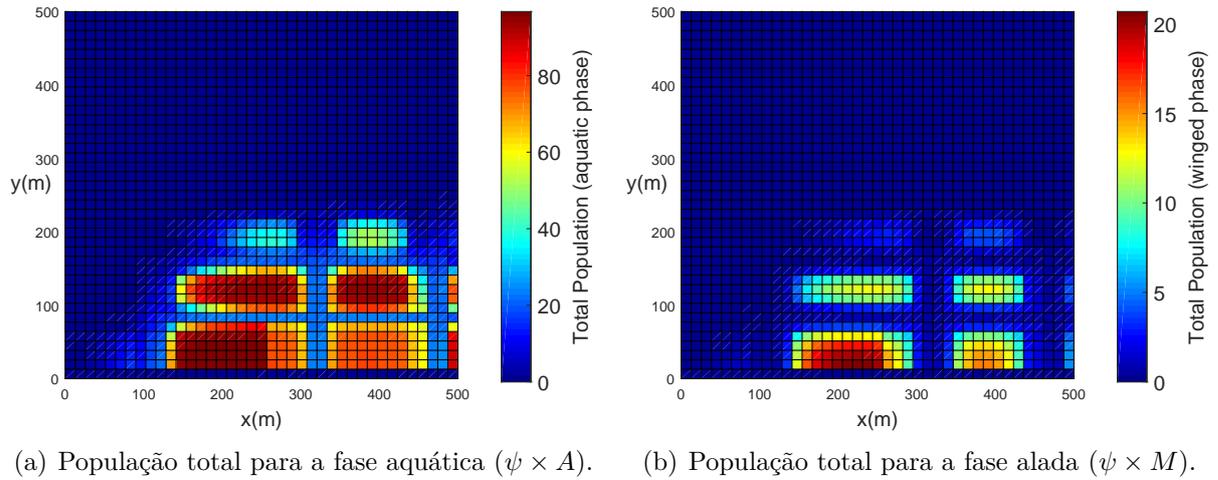


Figura 32 – Exemplo 3 (todas as ruas com inseticidas químicos): propagação das populações em Juiz de Fora ($t = 42$ dias).

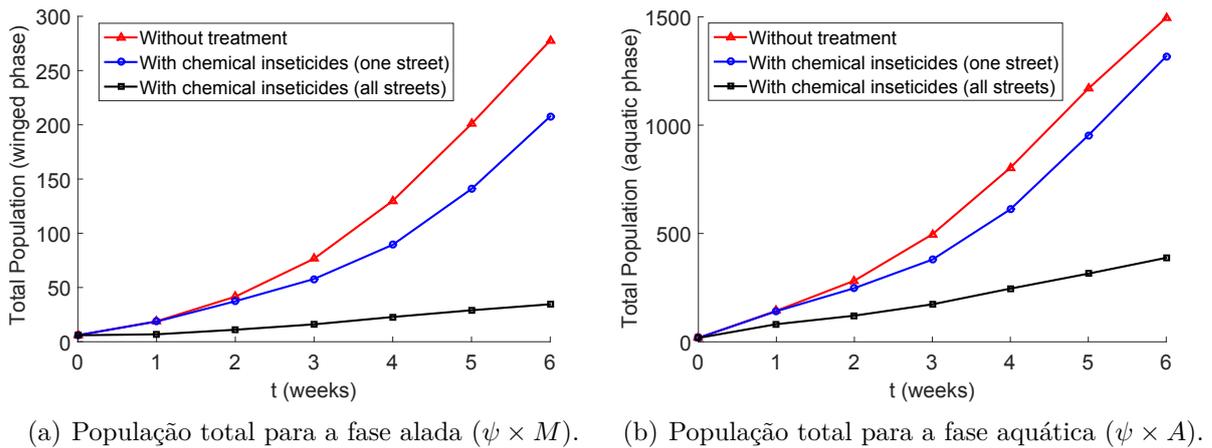


Figura 33 – Comparação entre os Exemplos 2 e 3, onde a linha vermelha representa a população total sem tratamento, o azul com inseticidas químicos em uma rua e o preto com inseticidas químicos em todas as ruas, mantendo a mesma quantidade total de inseticidas.

As Figs. 33(a) e 33(b) mostram a evolução da população total dos mosquitos para as duas fases calculadas integrando-se dentro do domínio: $\int_{\Omega} \psi M d\Omega$ e $\int_{\Omega} \psi A d\Omega$ para as fases aladas e aquáticas, respectivamente. A partir da simulação, foi observado que, quando os inseticidas químicos foram usados uniformemente ao longo de todas as ruas (região cinza da Fig. 21(b)), a população total de mosquitos para ambas as fases reduziu significativamente, ver Fig. 33(a). A população da fase alada foi reduzida em 87,56% e a população da fase aquática foi reduzida em 74,09%, ver Fig. 33(a). Quando os inseticidas foram usados em maior concentração, mas apenas em uma rua na horizontal (região cinza

da Fig. 21(a)), a população alada foi reduzida em 25,23% e a população da fase aquática foi reduzida em 11,92%, ver Fig. 33(b).

É claro, a partir das simulações, que os inseticidas químicos espalhados de forma mais uniforme ao longo de todas as ruas têm um efeito significativo sobre a população de mosquitos para as fases alada e aquática.

4.4 EXEMPLO 4 - PRAIA DE COPACABANA, RIO DE JANEIRO

Nesta seção, apresentamos os resultados numéricos para a dinâmica populacional dos mosquitos *A. aegypti* na Praia de Copacabana, Rio de Janeiro, ver Fig. 20(a).

A Fig. 20(b) mostra o domínio computacional para a simulação do caso atual contendo 12 blocos. No mapa de satélite, cada bloco contém várias casas e apartamentos. Por simplicidade, assumimos que os dados são homogêneos dentro dos blocos definindo a função ψ , que representa o coeficiente de suporte da área de mosquitos. Os blocos são separados por ruas, como mostrado nas Figs. 19, 20(a) e 20(b). Os parâmetros do modelo para os blocos, as ruas e a praia são apresentados na Tabela 8.

Tabela 8 – Valores de parâmetros dimensionais usados no Exemplo 4 (Praia de Copacabana, Rio de Janeiro).

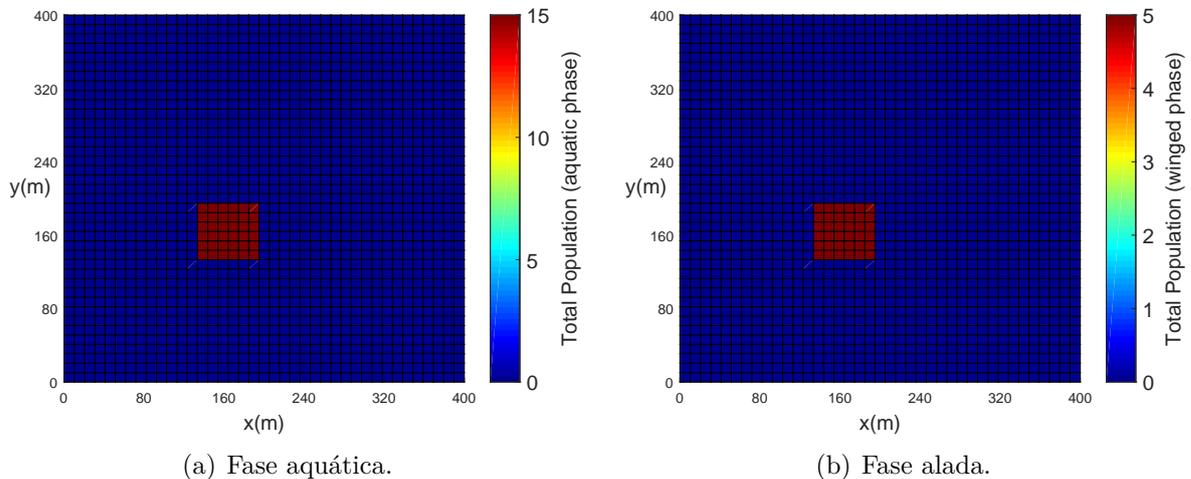
Parâmetro	Blocos	Ruas	Praia
ψ	1,0	0,3	0,8
D_x	$3,75 \times 10^{-3}$	$1,25 \times 10^{-2}$	$1,25 \times 10^{-2}$
D_y	$3,75 \times 10^{-3}$	$1,25 \times 10^{-2}$	$1,25 \times 10^{-2}$

Durante o dia o vento flui do mar para a cidade. A noite, segue a direção oposta. Esta natureza periódica do vento foi incorporada na simulação introduzindo as variáveis t_1 (dia) e t_2 (noite) nos parâmetros v_x e v_y , que indicam quando esta mudança ocorre. Ou seja, $v_x(t_1)$ significa a velocidade do vento na direção X durante o dia e $v_x(t_2)$ significa a velocidade do vento na direção X durante a noite, ver Tabela 9. Isso é análogo para a velocidade do vento na direção Y (v_y). A velocidade do vento perto da praia é assumida como sendo duas vezes maior que a velocidade nas ruas. A componente da velocidade do vento na direção X é assumida como sendo maior tanto na praia quanto nas ruas em comparação com a velocidade do vento na direção Y . A velocidade do vento para blocos, ruas e praia é apresentada na Tabela 9.

As Figs. 34(a) e 34(b) mostram as condições iniciais para ambas as fases, alada e aquática, com a população inicial de mosquitos concentrada no pequeno parque. As

Tabela 9 – Os valores utilizados na velocidade do vento: dentro dos blocos, na rua e na praia.

Parâmetro	Descrição	Blocos	Ruas	Praia
$v_x(t_1)$	velocidade do vento ao longo da direção X durante o dia	0	-0,2	-0,4
$v_y(t_1)$	velocidade do vento ao longo da direção Y durante o dia	0	0,15	0,3
$v_x(t_2)$	velocidade do vento ao longo da direção X durante a noite	0	0	0
$v_y(t_2)$	velocidade do vento ao longo da direção Y durante a noite	0	-0,25	-0,5

Figura 34 – Exemplo 4: condição inicial para ambas as populações na Praia de Copacabana ($t = 0$).

populações para ambas as fases após $t = 21$ dias são mostradas nas Figs. 35(a) e 35(b). Foi observado que, devido à maior velocidade do vento, a população de mosquitos é menor perto da praia. A população de ambas as fases lentamente se difunde do parque para as ruas e blocos, como mostrado nas Figs. 35(a) e 35(b). As populações para ambas as fases espalharam-se rapidamente pelas ruas devido à presença do vento e maior valor do coeficiente de difusão. Foi observado que as populações de mosquitos em ambas as fases se espalharam rapidamente ao longo da direção X devido ao maior valor da componente da velocidade do vento ao longo da direção X . Com o passar do tempo, observamos que a população de mosquitos aumenta dentro dos blocos, ver Figs. 36(a) e 36(b). Além disso, foi observado que o processo de invasão é maior para a fase aquática em comparação com a fase alada perto do limite devido ao fato do fluxo ser zero para a fase alada na fronteira do domínio, ver Figs. 36(a) e 36(b).

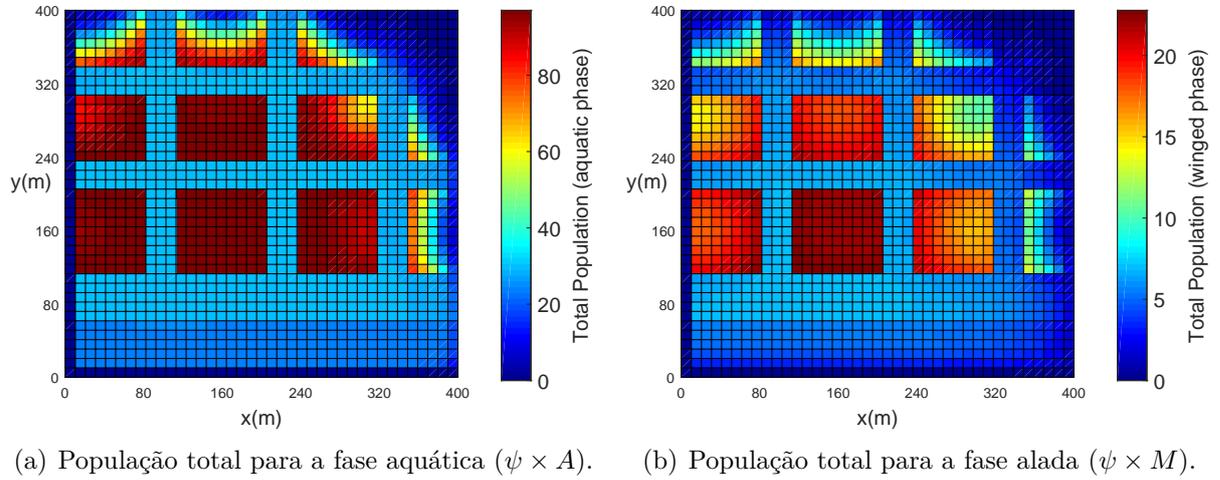


Figura 35 – Exemplo 4: propagação das populações na Praia de Copacabana ($t = 21$ dias).

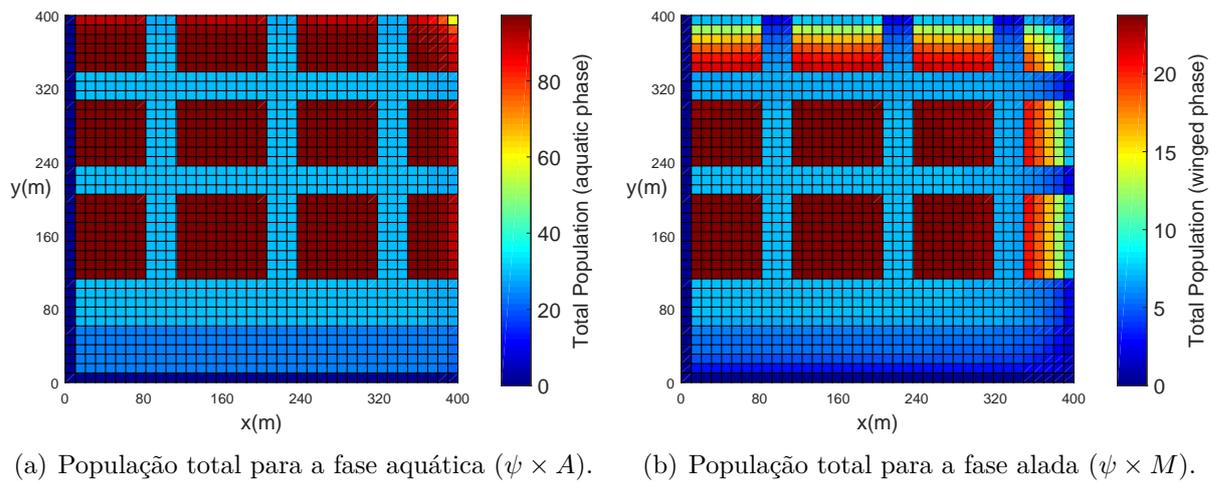


Figura 36 – Exemplo 4: propagação das populações na Praia de Copacabana ($t = 42$ dias).

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

No Capítulo 2 apresentamos dois modelos unidimensionais sobre a dinâmica populacional do *A. aegypti*. Os modelos foram propostos por [46, 11] e nossa contribuição foi mostrar que nos dois modelos, existem soluções na forma de ondas viajantes, uma a favor do fluxo e outra contra o fluxo. Para isso, descrevemos um método semi-analítico para verificar a existência de perfis de ondas viajantes. Estes resultados foram validados através de comparações entre as soluções do método semi-analítico e das simulações numéricas diretas. Os resultados foram publicados em [57, 58].

No Capítulo 3 foi proposto um modelo bidimensional que descreve a proliferação de mosquitos *A. aegypti* em uma cidade. O modelo permite levar em consideração a topografia (condomínios, prédios, ruas, áreas de praia, parques, florestas, etc.), condições climáticas (vento) e ação humana (inseticidas químicos). A modelagem baseia-se na ideia de que o movimento errático dos mosquitos depende significativamente do meio ambiente. O modelo apresentado introduz o conceito de suporte de área de mosquitos, que permite modelar a não uniformidade das populações presentes em diferentes ambientes.

Para mostrar como podemos aplicar o modelo em ambientes urbanos, quatro exemplos foram apresentados no Capítulo 4. O primeiro exemplo simula uma vizinhança simples (um condomínio ou quarteirão de uma cidade), contendo blocos (construções em gerais) e ruas. A população de mosquitos cresce e se dispersa rapidamente devido à influência do vento e da difusão espacial. No segundo exemplo, uma parte do centro da cidade de Juiz de Fora foi simulado, mostrando o crescimento populacional que se espalha da área do parque para as ruas e blocos. O terceiro exemplo utiliza os mesmos dados do anterior, adicionando o uso de inseticidas químicos (“fumacê”) atacando a fase alada em duas configurações diferentes, mantendo a mesma quantidade total de inseticida. No caso de se espalhar inseticidas em uma rua (na horizontal), atingiu-se as áreas ao redor da rua escolhida e observou-se uma queda na população alada, mas que voltou a crescer rapidamente para as outras áreas. No caso em que se espalha uniformemente os inseticidas químicos em todas as ruas, atingiu-se as áreas ao redor das ruas escolhidas e observou-se uma queda acentuada nas duas populações. Os inseticidas químicos conseguiram criar uma barreira, impedindo a rápida proliferação das populações. Assim, obtivemos um efeito mais significativo sobre a população de mosquitos tanto na fase alada quanto na fase aquática. Esta observação auxilia sobre o uso de inseticidas químicos em uma cidade. O quarto exemplo descreve uma parte da área da Praia de Copacabana, na cidade do Rio de Janeiro. Leva em consideração a força e as mudanças de direção dos ventos. Mesmo com essa característica, as populações conseguiram se dispersar, evidenciando a rápida

infestação do *A. aegypti* nessa área. Em todos os exemplos, observamos que depois de 42 dias o cenário não muda, a região foi invadida e as populações se estabelecem. Para todas as simulações numéricas bidimensionais, desenvolvemos um código no MATLAB utilizando o método dos volumes finitos. Todos os resultados foram publicados em [59].

A metodologia apresentada é uma ferramenta que pode ser empregada para avaliar e compreender não apenas os riscos gerais de epidemia, mas apontar as regiões das cidades mais suscetíveis a doenças transmitidas por vetores. Além disso, como mostrado no Exemplo 3, o modelo pode ser usado para aumentar a eficiência das técnicas existentes de controle da população de mosquitos e testar novos métodos teoricamente, antes de envolver a população humana. Outro ponto a se destacar, é que podemos comparar a utilização dos inseticidas químicos de outra forma, quando a população abre suas casas para a pulverização e quando deixam suas casas fechadas.

Para trabalhos futuros:

- os parâmetros são escalares, pode-se melhorá-los colocando como funções;
- o parâmetro ψ pode ser melhor utilizado, criando algum método para classificar as construções (prédios, casas, conjuntos comerciais, parques, praia entre outros);
- podemos comparar diferentes formas de utilização de inseticidas;
- adicionar novos elementos para o controle da doença, como a utilização da técnica do inseto estéril, esta técnica está sendo implementada em Juiz de Fora (programa “Aedes do Bem”) [29, 43];
- outra possibilidade é utilizar o método *history matching* [14, 3, 45] para determinar os parâmetros do modelo, para que a predição seja cada vez mais precisa;
- pode ser acoplado a modelos do tipo SIR (suscetível-infectado-recuperado) para investigar a dinâmica da doença em uma cidade [39];
- também pode-se incluir custos financeiros para auxiliar tomadas de decisões na Saúde Pública;
- uma outra possibilidade de trabalho seria aplicar a técnica de [58] no trabalho de [9], mostrando a unicidade, existência e a forma da solução.

REFERÊNCIAS

- [1] BARRETO, M., TEIXEIRA, M., “Dengue no Brasil: situação epidemiológica e contribuições para uma agenda de pesquisa”, *Estudos avançados*, v. 22, n. 64, pp. 53–72, 2008.
- [2] BESERRA, F., AGUIAR, R., CARVALHO, E., BORGES, J., DO VALE, B., “*Jatropha curcas* L.(*Euphorbiaceae*) como novo bioinseticida: análise fitoquímica preliminar e atividade larvicida contra *Aedes aegypti* (Diptera: culicidae).” *Amazônia: Science & Health*, v. 2, n. 3, pp. 17–25, 2014.
- [3] BOWMAN, J. K., “A mathematical model for dengue fever in a virgin environment”, *Senior Honors Projects*, , n. Paper 295, 2012.
- [4] CARMO, M. P. D., *Geometria Riemanniana*. 3rd ed. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.
- [5] CARNEIRO, L., TRAVASSOS, L., “Autophagy and viral diseases transmitted by *Aedes aegypti* and *Aedes albopictus*”, *Microbes and Infect.*, v. 18, n. 3, pp. 169–171, 2016.
- [6] CAVALCANTE, K. R. L. J., TAUIL, P. L., “Risk of re-emergence of urban yellow fever in Brazil”, *Epidemiologia e Serviços de Saúde*, v. 26, n. 3, pp. 617–620, 2017.
- [7] CHAPIRO, G., MAILYBAEV, A., DE SOUZA, A., MARCHESIN, D., BRUINING, J., “Asymptotic approximation of long-time solution for low-temperature filtration combustion”, *Computat. Geosci.*, v. 16, n. 3, pp. 799–808, 2012.
- [8] CHRISTOPHERS, S., OTHERS, “*Aedes aegypti* (L.) the yellow fever mosquito: its life history, bionomics and structure.” *Aedes aegypti (L.) the Yellow Fever Mosquito: its Life History, Bionomics and Structure.*, 1960.
- [9] DE ARAUJO, A. L., BOLDRINI, J. L., CALSAVARA, B. M., “An analysis of a mathematical model describing the geographic spread of dengue disease”, *J. Math. Anal. Appl.*, v. 444, n. 1, pp. 298–325, 2016.
- [10] DIAS, W. O., WANNER, E. F., CARDOSO, R. T., “A multiobjective optimization approach for combating *Aedes aegypti* using chemical and biological alternated step-size control”, *Math. Biosci.*, v. 269, pp. 37–47, 2015.
- [11] FREIRE, I., TORRISI, M., “Symmetry methods in mathematical modeling of *Aedes aegypti* dispersal dynamics”, *Nonlinear Anal.-Real*, v. 14, n. 3, pp. 1300 – 1307, 2013.
- [12] FREIRE, I., TORRISI, M., “A review on symmetries for certain *Aedes aegypti* models”. In: *International Journal of Modern Physics: Conference Series*, v. 38, p. 1560073, 2015.
- [13] FUNDAÇÃO OSWALDO CRUZ, “Biologia do *Aedes aegypti*”, <http://www.invivo.fiocruz.br/cgi/cgilua.exe/sys/start.htm?infoid=1407&sid=8>, Accessed 08 May 2018.

- [14] GHONIEM, S., ALIEM, S. A., SAYYOUH, M., EL SALALY, M., “A simplified method for petroleum reservoir history matching”, *Applied Mathematical Modelling*, v. 8, n. 4, pp. 282–287, 1984.
- [15] GUCKENHEIMER, J., HOLMES, P., *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. v. 42. Springer Science & Business Media, 1983.
- [16] IBRAGIMOV, N., *CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations*. v. 3. CRC press, 1995.
- [17] LEE, H., CHAI, J., PATANKAR, S., “Finite volume method for radiation heat transfer”, *J. Thermophys. Heat Tr.*, v. 8, pp. 419–425, 1994.
- [18] LEVEQUE, R. J., *Numerical methods for conservation laws*. Birkhäuser Verlag, 1992.
- [19] LEVEQUE, R. J., *Finite volume methods for hyperbolic problems*. v. 31. Cambridge university press: Cambridge, 2002.
- [20] MAIDANA, N., YANG, H., “Describing the geographic spread of dengue disease by traveling waves”, *Math. Biosci.*, v. 215, n. 1, pp. 64–77, 2008.
- [21] MARTÍNEZ, V., MARQUINA, A., “Computation of travelling wave solutions of scalar conservation laws with a stiff source term”, *Comput. & fluids*, v. 32, n. 8, pp. 1161–1178, 2003.
- [22] MINISTÉRIO DA SAÚDE DO BRASIL, “Boletim Epidemiológico”, http://combateaesd.saude.gov.br/images/boletins-epidemiologicos/2016-Dengue_Zika_Chikungunya-SE52.pdf, 2017, Accessed 12 Jan 2018.
- [23] MINISTÉRIO DA SAÚDE DO BRASIL, “Brasil tem 415 mortes confirmadas por febre amarela”, <https://g1.globo.com/bemestar/noticia/brasil-tem-415-mortes-confirmadas-por-febre-amarela.ghtml>, Accessed 16 July 2018.
- [24] NATURE EDUCATION, “Dengue Transmission”, <http://www.nature.com/scitable/topicpage/dengue-transmission-22399758>, Accessed 28 Jul 2017.
- [25] NISHIURA, H., “Mathematical and statistical analyses of the spread of dengue”, *Dengue Bulletin*, v. 30, pp. 51, 2006.
- [26] OTANI, M., JONES, A. J., “Guiding chaotic orbits”, *Research Report, Imperial College of Science, Technology and Medicine, London*, 1997.
- [27] OVSIANNIKOV, L., *Group analysis of differential equations*. Academic Press, 2014.
- [28] OXITEC, “Mosquito borne disease”, <http://www.oxitec.com/mosquito-borne-disease/>, Accessed 28 Jul 2017.
- [29] OXITEC, “Juiz de Fora é primeira cidade de MG a assinar contrato para liberação do Aedes do Bem”, <http://br.oxitec.com/noticias/>, Accessed 17 May 2018.

- [30] PANFILOV, A., *Qualitative Analysis of Differential Equations*. Utrecht University, Utrecht, 2010.
- [31] PATANKAR, S., *Numerical heat transfer and fluid flow*. CRC press: United States of America, 1980.
- [32] PERKO, L., *Differential Equations and Dynamical Systems. Texts in Applied Mathematics*, Springer, 2001.
- [33] PERKO, L., *Differential Equations and Dynamical Systems. Texts in Applied Mathematics*, Springer-Verlag, 2006.
- [34] PREFEITURA DE JUIZ DE FORA, “Juiz de Fora tem LIRAA de 4,8% e menor número de notificações de dengue desde 2013”, <https://www.pjf.mg.gov.br/noticias/view.php?modo=link2&idnoticia2=56429>, 2017, Accessed 12 Jul 2017.
- [35] PREFEITURA DO RIO DE JANEIRO, “Número de Casos de Dengue por mês, Áreas de Planejamento, Regiões Administrativas e Bairros Município do Rio de Janeiro, 2016”, <http://www.rio.rj.gov.br/dlstatic/10112/7166678/4196452/denguenotificadosexcetodescartados2016MES.pdf>, 2017, Accessed 12 Jul 2017.
- [36] PREZOTO, F., “*Aedes Aegypti*: ASPECTOS CIENTÍFICOS E DIÁLOGO COM UNIVERSITÁRIOS”, *CES Revista*, v. 30, n. 1, pp. 267–271, 2016.
- [37] RODRIGUES, H., MONTEIRO, M., TORRES, D., “Dynamics of dengue epidemics when using optimal control”, *Math. Comput. Model.*, v. 52, n. 9, pp. 1667–1673, 2010.
- [38] RODRIGUES, H., MONTEIRO, M., TORRES, D., “Seasonality effects on Dengue: basic reproduction number, sensitivity analysis and optimal control”, *Math. Method Appl. Sci.*, 2014.
- [39] SANTOS, F. L. P., “Patches Approach to Investigate the Populational Dynamics in Dengue”, *TEMA (São Carlos)*, v. 18, n. 1, pp. 3–14, 2017.
- [40] SANTOS, R. W., “Modelagem numérica de meios porosos”, Notas de Aula, PPGMC/UFJF, 2014.
- [41] SARDINHA, V., “*Aedes aegypti* - um vetor de doenças virais”, <https://biologianet.uol.com.br/doencas/aedes-aegypti-um-vetor-doencas-virais.html>, Accessed 08 May 2018.
- [42] SECRETARIA DE SAÚDE DE CURITIBA, “Biologia do *Aedes aegypti*”, <http://www.saude.curitiba.pr.gov.br/orientacao-e-prevencao/dengue/biologia-do-aedes-aegypti.html>, Accessed 08 May 2018.
- [43] SECRETARIA DE SAÚDE DE JUIZ DE FORA, “Prefeitura de Juiz de Fora e Oxitec iniciam liberação do “*Aedes do Bem*” no município”, <https://www.pjf.mg.gov.br/jfcontraoaedes/view.php?modo=link2&idnoticia2=59251>, Accessed 17 May 2018.

- [44] SOTOMAYOR, J., *Lições de equações diferenciais ordinárias. Projecto Euclides*, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 1979.
- [45] SUN, W., *Data driven history matching for reservoir production forecasting*, Ph.D. Thesis, Stanford University, 2014.
- [46] TAKAHASHI, L., MAIDANA, N., FERREIRA JR., W., PULINO, P., YANG, H., “Mathematical models for the *Aedes aegypti* dispersal dynamics: travelling waves by wing and wind”, *B. Math. Biol.*, v. 67, n. 3, pp. 509–528, 2005.
- [47] TEIXEIRA, M., “Controle do dengue: importância da articulação de conhecimentos transdisciplinares”, *Interface–Comunicação Saúde Educação*, v. 12, n. 25, pp. 442–451, 2008.
- [48] TORRES, J. R., CASTRO, J., “The health and economic impact of dengue in Latin America”, *Cadernos de saúde pública*, v. 23, pp. S23–S31, 2007.
- [49] U. S. DEPARTMENT OF HEALTH, “Biology and Control of *Aedes aegypti*”, Stephen B. Thacker CDC Library collection, USA, 9 1979, Accessed 17 Jan 2018.
- [50] VALLE, D., OTHERS, “*Aedes aegypti*: introdução aos aspectos científicos do Vector”, Repositório Institucional da Fiocruz. <https://www.arca.fiocruz.br/handle/icict/15223>, 2013.
- [51] VOLPERT, A., VOLPERT, V., VOLPERT, V., *Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems*. v. 140. *Translations of mathematical monographs*, American Mathematical Society, 2000.
- [52] WORLD HEALTH ORGANIZATION, *Dengue: guidelines for diagnosis, treatment, prevention and control*. World Health Organization: Switzerland, 2009.
- [53] WORLD HEALTH ORGANIZATION, “Dengue and severe dengue”, *WHO Media centre, Fact sheet N 117 (Updated March 2016)* <http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs117/en>, 2016.
- [54] WORLD HEALTH ORGANIZATION, “Yellow fever – Brazil”, *Disease outbreak news March 2018*, 2018.
- [55] YAMASHITA, W., TAKAHASHI, L., CHAPIRO, G., “Estudos de modelos dispersivos do mosquito *Aedes aegypti*”, SIMMEC/EMMCOMP. http://www.ufjf.br/simmec-emmcomp-2014/files/2014/05/simmec-emmcomp-2014_submission_42.pdf, 2014.
- [56] YAMASHITA, W. M., TAKAHASHI, L. T., CHAPIRO, G., “Estudos de modelos dispersivos para dinâmica de populações”, *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 3, n. 1, 2015.
- [57] YAMASHITA, W., TAKAHASHI, L., CHAPIRO, G., “Dispersive models describing mosquitoes’ population dynamics”. In: *J. Phys. Conf. Ser.*, v. 738, n. 1, p. 012065, 2016.

- [58] YAMASHITA, W., TAKAHASHI, L., CHAPIRO, G., “Traveling wave solutions for the dispersive models describing population dynamics of *Aedes aegypti*”, *Math. Comput. Simulation*, v. 146, pp. 90–99, 2017.
- [59] YAMASHITA, W. M. S., DAS, S. S., CHAPIRO, G., “Numerical modeling of mosquito population dynamics of *Aedes aegypti*”, *Parasite Vector*, v. 11, n. 1, pp. 245, 2018.