Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Marcelo Soares Salomão

Estudo e Generalizações do Paradoxo de Monty Hall na Educação Básica

Juiz de Fora

2014

Marcelo Soares Salomão

Estudo e Generalizações do Paradoxo de Monty Hall na Educação Básica

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Rogério Casagrande

Juiz de Fora

2014

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Soares Salomão, Marcelo.

Estudo e Generalizações do Paradoxo de Monty Hall na Educação Básica / Marcelo Soares Salomão. – 2014.

69 f. : il.

Orientador: Rogério Casagrande.

Dissertação (PROFMAT) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2014.

1. Probabilidade. 2. Monty Hall. 3. Teorema de Bayes. I. Casagrande, Rogério, orient. II. Título.

Marcelo Soares Salomão

Estudo e Generalizações do Paradoxo de Monty Hall na Educação Básica

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 16 de agosto de 2014

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rogério Casagrande - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Sandro Rodrigues Mazorche
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professora Dra. Gilcélia Regiane de Souza
Universidade Federal de São João del-Rei

Dedico este trabalho a minha mãe que tanto se esforçou para me conceder o melhor ensino possível ao Dr Abelardo Silveira e sua família que foram exemplos de bondade, em especial dedico a Jesus Cristo o senhor da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por pela sua presença e ter me dado condições de lutar, vencer e alcançar os objetivos pretendidos durante esse mestrado. Agradeço pelo conhecimento adquirido, que apesar de não me fazer rico em dinheiro, me fez rico em capacidade de transformar as vidas de meus educandos. Agradeço aos meus amigos que me incentivaram a todo instante, aos professores que com dedicação transmitiram seus conhecimentos, ao meu orientador Rogério Casagrande, aos idealizadores do PROFMAT, à CAPES e aos meus colegas de curso, principalmente aos meus companheiros de viagens Lilian, Rodrigo, Augusto, Renato e Carlos Jr que tornavam as viagens menos cansativas. Ao Arnaldo pela sua ajuda e paciência na elaboração deste trabalho.

"O homem não é nada em si mesmo. Não passa de uma probabilidade infinita. Mas ele é o responsável infinito dessa probabilidade".

(Albert Camus)

RESUMO

Nesse trabalho apresentamos o Paradoxo de *Monty Hall* e seus aspectos lúdicos como uma oportunidade de cativar o educando para o estudo das probabilidades. Oferecendo assim a oportunidade de trabalhar no universo da educação básica o ensino de probabilidade na sala de aula através de atividades em forma de jogos. Apesar da dificuldade do assunto na Educação Básica, os professores que lerem o trabalho poderão aproveitar algumas dessas ideias e transformá-las em conhecimento aos seus educandos. Primeiramente apresentamos um breve resumo teórico sobre probabilidade, um pouco da história do *Monty Hall paradox* e algumas soluções formais e experimentais. Para as atividades, há simulações do problema com variantes do números de portas proporcionando desenvolver no aluno as habilidades como: experimentação, abstração, modelagem. Com o intuito de fazer uso de recursos computacionais apresentamos uma sugestão de atividade com a utilização de um *software* de fácil acesso e manuseio. Isso se sustenta, pois com aumento de cursos tecnológicos e a presença maior da informática no cotidiano do educando é imperativo o emprego dessa interdisciplinaridade.

Palavras-chave: 1. Probabilidade. 2. Monty Hall. 3. Teorema de Bayes.

ABSTRACT

We present the Monty Hall Paradox and its entertaining aspects as a chance to engage the student to the study of probability. Thus offering the opportunity to work in the world of basic education by teaching probability in the level of classroom through activities in the form of games. Despite of the difficulty of the subject at the Basic Education, it is expected that teachers who read the work will take some of these ideas and turn them into knowledge to their students. First, we present a brief overview of theoretical probability, a little history of the Monty Hall paradox and some formal and experimental solutions. For activities, there are simulations of the problem with varying numbers of ports providing the development of student skills such as experimentation, abstraction, and modeling. In order to make use of computational resources we present a suggested activity with the use of software for easy access and handling. This is sustained, because with increased technological courses and the increased presence of computers in daily life of the student it is imperative the employment of this interdisciplinarity.

Key-Words: 1. Probability. 2. Monty Hall. 3. Bayes' Theorem.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PMH	Problema de Monty Hall
IDE	Integrated Development Environment
MIT	Massachusetts Institute of Technology
QI	Intelligence Quotient
WEB	World Wide Web

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\in$	Pertence
$P(A)$	Probabilidade do evento A
$\mathbb{P}(A)$	Propriedade A
$\leq$	menor ou igual a
$\geq$	maior ou igual a
$\cap$	intersecção
$\cup$	união
$\sum$	somatório
$\#$	cardinalidade

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho visa divulgar um estudo sobre o paradoxo de *Monty Hall* [1] e a matemática nele contido, seus aspectos lúdicos traduzidos como uma oportunidade de cativar o educando para o estudo das probabilidades. Observando o fato que nas aulas de matemática cria-se a idéia de que fazer matemática é seguir a aplicação de regras, que são transmitidas pelo professor, desvinculando-se assim, a matemática da sua aplicabilidade na vida prática. Assim este trabalho oferece a oportunidade de ensinar a probabilidade através de atividades em forma de jogos em sala de aula no universo da educação básica.

> O saber científico está associado à vida acadêmica, embora nem toda produção acadêmica represente um saber científico. Trata-se de um saber criado nas universidades e nos institutos de pesquisas, mas que não está necessariamente vinculado ao ensino básico. Sua natureza é diferente do saber escolar. Podemos destacar a existência de uma diferença entre a linguagem empregada no texto científico e escolar.(PAIS, 2001)

Vemos que o paradoxo de *Monty Hall* vem ao encontro dessa reflexão, numa perspectiva mais agradável ao educando das teorias contidas na Matemática e ao conhecimento da mesma, permitindo fazer conexões entre o mundo em que vive e a matemática da sala de aula.

O conhecimento matemático deve estar englobado em todo processo de ensino-aprendizagem, porque ele é um elo que trabalha a interdisciplinaridade, este fato não é só observado nas matérias exatas, com em todas as outras áreas de ensino, isso porque, quando o educando possui bom raciocínio matemático, ele terá uma visão mais ampla de todo processo de aprendizagem. A matemática na Educação Básica é de suma importância para o desenvolvimento intelectual do aluno, não apenas mais uma “matéria”, mais uma disciplina presente no currículo.

O Paradoxo, em especial o de *Monty Hall* se revela como uma boa oportunidade de cativar o estudante de forma lúdica para o estudo das probabilidades. Os paradoxos são conhecidos e discutidos desde a antiguidade e o seu aparecimento tem impulsionado, em vários casos, um estudo mais rigoroso e profundo dos fundamentos da matemática. O Paradoxo de *Monty Hall* é excepcional porque confundiu muitos matemáticos e rendeu grandes discussões na sociedade estadunidense.

---

[1] Monte Halparin, mais conhecido pelo seu nome artístico *Monty Hall*, nascido em 25 de agosto, 1921 Winnipeg, Manitoba, Canadá. Fez carreira como cantor, ator, produtor entre outros, porém fez sucesso como apresentador do programa televisivo norte americano Let’s Make a Deal (game show).

2 A IMPORTÂNCIA DO ENSINO DE PROBABILIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA

2.1 INTRODUÇÃO

O ensino da matemática apesar de toda sua importância e aplicação prática nas sociedades ainda é ensinado, em muitos casos, com um grande grau de 'regras' que nada mais é do que a mecanização do aluno, distorcendo a matemática e prejudicando o raciocínio lógico. Quando deveria ser voltada para a prática, uma vez que a aprendizagem que ocorre dentro da realidade do aluno facilita a sua compreensão, porque este educando poderá realizar uma avaliação crítica da utilização da aprendizagem. Com esta avaliação, o aluno pode observar que a aprendizagem pode mudar sua vida e a sociedade que ele vive. Dessa forma, o professor de matemática deve ter um bom repertório de estratégias para cativar seus alunos.

É necessário desenvolver uma prática pedagógica na qual sejam propostas situações em que os estudantes participem das atividades, as quais considerem seus contextos e possam observar e construir os eventos possíveis, por meio de experimentação concreta, da coleta e da organização de dados.

2.2 JUSTIFICATIVA

A motivação para esse trabalho é em dar enfoque para um modelo de inserção do estudo da probabilidade no âmbito da Educação Básica.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais MEC (1999) "Quando se propõem métodos de aprendizado ativo, em que os alunos se tornem protagonistas do processo educacional, não pacientes destes, quer se ter a certeza de que o conhecimento foi de fato apropriado pelos alunos, ou mesmo elaborado por eles". Enfatizam que o ensino da Probabilidade, juntamente com a estatística, tem por objetivo desenvolver no aluno posicionamento crítico sobre as informações provenientes de estudos estatísticos, bem como a capacidade de fazer previsões e tomar decisões à luz de informações probabilísticas ou estatísticas. Destacando que seu estudo promove a compreensão de acontecimentos do cotidiano que são de natureza aleatória, devendo a escola promover um ensino em que situações sejam desenvolvidas objetivando a realização de experiências e observação de experimentos.

A aprendizagem da matemática através da resolução de problemas é uma estratégia fundamental que potencializa o desenvolvimento do raciocínio matemático. Nesse sentido os problemas com probabilidade em sala de aula, são boas praticas para o aprendizado. Dá mesma forma que a matemática, a probabilidade também se desenvolveu através da resolução de problemas de ordem prática na sociedade.

O desenvolvimento do pensamento probabilístico pode aprimorar as potencialidades formativas do raciocínio de Matemática. Esse campo da Matemática foi recentemente introduzido nos currículos do Ensino Fundamental. Tal inclusão é decorrente da importância que o tema ocupa atualmente na sociedade.

A Probabilidade esta cada vez mais presente em nosso cotidiano: nos jogos de azar, nos jogos no sentido de atividades de esporte, entre outros. Além disso, os princípios probabilísticos têm se tornado instrumento de trabalho em muitas áreas do conhecimento.

A importância do ensino de Probabilidade nas escolas desde as séries iniciais vem sendo discutida no meio acadêmico e no Brasil o tema é sugerido nos Parâmetros Curriculares Nacionais, que reflete a preocupação com o ensino de Probabilidade desde as séries iniciais, constituindo um grande avanço para a Educação Básica em especial no Ensino Fundamental.

2.3 METODOLOGIA

A fundamentação teórico-metodológica das atividades desenvolvidas é baseada em pesquisas bibliográfica e esta é executada através de literaturas específicas como livros, revistas, dissertações de Mestrado e artigos sobre o tema disponíveis para consulta pública. Outra fonte valiosa é a pesquisa que envolve os meios eletrônicos como a internet. Além disso, também se utilizou da Transposição Didática.

2.4 OBJETIVOS

Especificamente este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de planejar e desenvolver uma sequência didática sobre noções iniciais de Probabilidades que permita uma assimilação da matemática através do problema de *Monty Hall* usando uma metodologia que tem como foco a realização de experimentos, o uso do jogo no estilo porta da esperança baseado no programa *American television game show, Let's Make a Deal* na realidade dos educandos.

Através de exercícios direcionados, levar o aluno a utilizar ambas as probabilidades experimental e teórica, buscar a melhor estratégia de resolução do problema, até uma análise sobre os resultados obtidos com generalizações do problema de *Monty Hall*.

O ensino da teoria elementar das Probabilidades deveria priorizar o desenvolvimento do senso crítico dos alunos, mas o que notamos é que a Teoria das Probabilidades é ensinada, algumas vezes, de uma forma tradicional e mecanizada que confronta as orientações propostas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Acreditamos que o ensino da Probabilidade seja de suma importância para a sociedade, já que suas implicações se refletem diretamente na interpretação das informações, nas tomadas de decisões profissionais e pessoais e nas situações do cotidiano a ter uma postura crítica. LOPES (1998) sugere que tal processo de ensino e aprendizagem deva ser baseado em experimentos, investigações e resoluções de problemas. Por isso, propomos colocar os alunos diante do experimento O Paradoxo de *Monty Hall* em que suas crenças sejam explicitadas e que eles tenham a possibilidade de indagar algumas hipóteses.

A função do professor nesse processo é:

- O confronto do problema com o mundo real;
- Propiciar a realização dos experimentos;
- Ouvir o que os alunos têm a dizer;
- Confrontar o ponto de vista do aluno;
- Levar o aluno a criar sua estratégia para solucionar o problema;
- Criar contra exemplos, incentivar, principalmente, a discussão em sala de aula.

Nesse processo, não estamos preocupados em estabelecer sistematizações, mas em oferecer aos alunos situações explícitas de tomada de decisão. Apoiamo-nos em estudos que apontam a necessidade de um trabalho pedagógico que explore não só os níveis teóricos, mas principalmente os níveis empírico-experimentais. Dessa forma é esperado ao fim deste estudo que o professor:

- Construa durante a aplicação das atividades de jogos os conceitos de probabilidade em especial de eventos equiprováveis.
- Tenha mais uma fonte para desenvolver atividades que possam ajudá-lo em seu ofício no ensino da matemática.
- Das escolas técnicas, que possuem disciplinas de informática, o uso de um software de fácil acesso para simulação de resultados probabilísticos, praticando assim a interdisciplinaridade.
- Possa mostrar aos alunos mais avançados um modelo de estudo para um número maior de casos.
- Possa lidar outros conceitos, como: recorrência, grandes números e modelagem matemática. Todos como ferramentas da matemática para resolver as modificações do problema.

3 PROBABILIDADE

3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo iremos apresentar o conceito de probabilidade, resumir suas principais propriedades e através de exemplos os cuidados que devemos ter ao trabalhar a probabilidade em sala de aula.

No nosso dia a dia, sempre aparecem circunstâncias em que a incerteza dos acontecimentos estão presentes. É interessante, fazer uso de uma medida que exprima essa incerteza presente em cada um destes acontecimentos. Tal medida é a *probabilidade*.

A Teoria das Probabilidades, como diz o nome, é o estudo de fenômenos que envolvem a incerteza e se originou como instrumento para modelar jogos de azar, como cartas e dados. Este Capítulo apresenta uma breve história do desenvolvimento da Teoria das Probabilidades, as diferentes concepções de probabilidade, a definição de experimentos determinísticos e aleatórios e a definição clássica de probabilidade.

3.2 BREVE ORIGEM DA PROBABILIDADE

A palavra probabilidade deriva do Latim *probare* (provar ou testar). Informalmente, provável é uma das muitas palavras utilizadas para eventos incertos ou desconhecidos, sendo também substituída algumas vezes pela palavra “sorte”, “risco”, “azar”, “incerteza”, “duvidoso”, dependendo do contexto.

Quanto a origem do estudo das Probabilidades, não podemos determinar exatamente, sabe-se que povos não ocidentais, como os hindus e árabes, há muito tempo, já tinham noções dos chamados jogos de azar. Há também registros que os egipícios e os romanos eram interessados em jogos. Embora saiba que a probabilidade tenha se iniciado como ciência empírica muito antes da idade média, não há indícios de que tenham desenvolvido tratamento matemático sobre ela.

O certo é dizer que não há prova de nenhum tratamento matemático da Probabilidade até por volta do final do século XV e início do século XVI, quando os matemáticos italianos tentaram desenvolver as possibilidades em jogos de azar.

A definição de probabilidade como quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis foi a primeira definição formal de probabilidade, aparece de forma clara pela primeira vez na Obra *Liber de Ludo Aleae* (Livro dos jogos de azar) de Cardano [1], ele é considerado o pai da Teoria das Probabilidades, pois foi o primeiro a fazer observações do conceito probabilístico de um dado honesto e a escrever um argumento teórico para calcular suas probabilidades.

[1] Girolamo Cardano nasceu em Paiva em 1501, filho ilegítimo de Fazio Cardano e Chiara Micheria. Foi um polimata italiano que escreveu mais de 200 trabalhos em diversas áreas, faleceu em Roma em 1576.

3.3 DEFINIÇÕES

Encontramos na natureza dois tipos de experimentos: determinísticos e aleatórios.

> Dizemos que um experimento é determinístico quando repetido em condições semelhantes conduz a resultados essencialmente idênticos. Os experimentos que repetidos sob as mesmas condições produzem resultados geralmente diferentes serão chamados de experimentos aleatórios.
>
> A Teoria das Probabilidades é o ramo da matemática que cria, desenvolve e em geral pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios. O modelo matemático utilizado para estudar um fenômeno aleatório particular varia em sua complexidade matemática, dependendo do fenômeno estudado. Mas todos esses modelos têm ingredientes básicos comuns.(MORGADO, 2006)

3.3.1 EXPERIMENTOS ALEATÓRIOS

São aqueles que, repetidos em idênticas condições, produzem resultados que não podem ser previstos com certeza. Embora não saibamos qual o resultado que irá ocorrer num experimento, em geral conseguimos descrever o conjunto de todos os resultados possíveis que podem ocorrer. O objeto de nosso estudo são os fenômenos aleatórios, em oposição, há os fenômenos determinísticos, que temos certeza dos resultados a serem obtidos.

3.3.2 ESPAÇO AMOSTRAL

Conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Será indicado pela letra grega Ω. A menos que digamos o contrário, consideraremos apenas o caso em que o espaço amostral é finito ou infinito enumerável.

3.3.3 EVENTO

Qualquer subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório. Será indicado por uma letra maiúscula do nosso alfabeto. Os elementos de um espaço amostral são chamados de eventos elementares.

3.3.4 EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUDENTES OU EXCLUSIVOS OU DISJUNTOS

Quando um deles não pode ocorrer ao mesmo tempo em que o outro. O tirar par ou ímpar, o jogar de uma moeda... Assim como o evento par nunca ocorre junto com o evento ímpar, o evento cara nunca ocorre junto com o evento coroa, eles são eventos mutuamente excludentes.

3.3.5 AXIOMÁTICA

A probabilidade de um acontecimento é um número que pode ser determinado observando a frequência relativa desse acontecimento numa sucessão numerosa de experiências aleatórias, repetidas nas mesmas condições. Esta é à base da teoria Frequencista das Probabilidades. Tal número que representa uma probabilidade é encontrado por meio experimental, assim como obter o tal número, sem recorrer à experiência? No início do século passado o russo Kolmogorov [2] num de seus principais trabalhos publicados *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, lança as bases da axiomatização da teoria das probabilidades e define como encontrar tal número e preenche uma lacuna na teoria das probabilidades.

Uma probabilidade é uma função que associa a cada evento A, do espaço amostral Ω um número real, indicado por $P(A)$, chamado probabilidade do evento A, satisfazendo as seguintes condições:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$ *(Evento Certo)*
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *(Se forem Eventos Mutuamente Excludentes)*

3.3.6 CLÁSSICA OU DE LAPLACE

Os alicerces da Teoria das Probabilidades foram reunidas por Laplace[3] em seu tratado de raciocínio indutivo baseado em probabilidades na obra *Essai Philosophique sur les Probabilités* que se manteve praticamente inalterada até o início do século XX. Nesse tratado Laplace reuniu, sistematizou e ampliou resultados desenvolvidos por seus antecessores.

Foi nesse contexto que a definição, que atribuem a Laplace, apareceu e se refere a probabilidade de um evento A, como sendo quociente entre o número de elementos de A também chamados de casos favoráveis, pelo número de elementos do espaço amostral (Ω), também chamado de casos possíveis. De outra forma:

$$P(A) = \frac{A}{\Omega}$$

Conforme Laplace a teoria do azar consiste em reduzir todos os acontecimentos do mesmo gênero a certo número de casos igualmente possíveis, isto é, tais que estejamos igualmente inseguros sobre sua existência (conceito de equiprovável), e em determinar o

[2] Andrei Nikolaevich Kolmogorov, nasceu em Tambov, no ano de 1903, foi um matemático soviético que participou das principais descobertas científicas do século XX nas áreas de probabilidade e estatística, e em teoria da informação. Faleceu em Moscou, no ano de 1987.

[3] Pierre Simon Marquis de Laplace nasceu em Beaumont-en-Auge uma comuna francesa na Baixa-Normandia no ano de 1749, foi um matemático, astrônomo e físico que grandes contribuições nessas áreas, faleceu em 1827 em Paris.

número de casos favoráveis ao acontecimento cuja probabilidade é buscada. "A razão deste número para o de todos os casos possíveis é a medida dessa probabilidade, a qual é, portanto uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador é o número de todos os casos possíveis." Mais tarde escrito como:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Onde $\#\ A$ representa o número de elementos do conjunto A.

3.3.7 CONSEQUÊNCIA

Se há um número finito de eventos elementares e se os eventos elementares são todos igualmente "prováveis", ou seja, eventos que têm a mesma chance de acontecer, então a definição Clássica não passa de uma propriedade dos casos equiprováveis que nos leva as mesmas propriedades:

- ♦ $0 \leq P(A) \leq 1$
- ♦ $P(\Omega) = 1$ *(Evento Certo)*
- ♦ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *(Se forem Eventos Mutuamente Excludentes)*

3.4 DIAGRAMA DE VENN

Designamos por diagramas de *Venn* [4] os diagramas usados em matemática para simbolizar graficamente propriedades, axiomas e problemas relativos aos conjuntos e sua teoria. John Venn desenvolveu os diagramas no século XIX, ampliando e formalizando desenvolvimentos anteriores de *Leibniz* e *Euler*.

Tais diagramas consistem simplesmente de curvas fechadas desenhadas sobre um plano, de forma normalmente circular, para simbolizar os conjuntos, de modo a permitir sua visualização através desses círculos as relações entre conjuntos e seus elementos. O princípio do diagrama de *Venn* é que as classes ou conjuntos são representados por regiões onde todas as possíveis relações lógicas desses conjuntos podem ser indicadas no mesmo diagrama através de regiões.

---

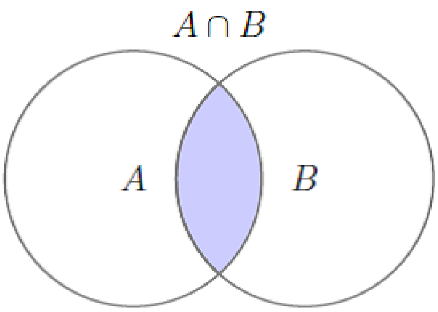
[4] John Venn, nasceu em Kingston upon Hull em 1923, foi um matemático britânico, ordenado padre em 1857. A partir de 1862, foi professor de Ciência Moral na Universidade de Cambridge, onde estudou e ensinou lógica e teoria das probabilidades, faleceu em Cambridge no ano de 1923. A partir da década de 1960, os diagramas de *Venn* foram introduzidos no ensino escolar de matemática, na aprendizagem da teoria dos conjuntos e das funções.

Pela Teoria dos Conjuntos, como os eventos são subconjuntos do espaço amostral, então podemos representar a interseção, a união de dois conjuntos e o complementar de um conjunto pelos diagramas.

Apesar de simples a construção de um diagrama de *Venn* para dois ou três conjuntos, surge dificuldade quando se tenta usá-lo para um número maior. Por exemplo:

O diagrama de dois conjuntos, A e B, aqui representados como áreas desses círculos. A área comum à ambas as figuras, A e B, em que os dois conjuntos sobrepõem-se, é chamada a intersecção de A e B, indicadas por $A \cap B$ conforme figura 1.

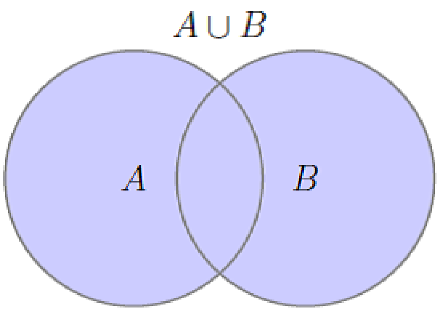
Figura 1 – Intersecção



Fonte: Próprio autor

A união de dois ou mais conjuntos é o conjunto dos elementos que pertencem a pelo menos um destes conjuntos. A área combinada entre os conjuntos A e B é chamado a união de A e B, denotada por $A \cup B$. por exemplo, a união, neste caso, ver figura 2 contém todos os elementos que são os elementos da A ou B.

Figura 2 – União



Fonte: Próprio autor

Diretamente da definição axiomática de probabilidade temos:

Se A e B são eventos de Ω, então:

- ♦ $P(\emptyset) = 0$
- ♦ $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
- ♦ $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
- ♦ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

De fato:

♦ $P(\emptyset) = 0$

$$P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$$

$$1 = 1 + P(\emptyset)$$

$$P(\emptyset) = 0$$

♦ $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= P(A \cup \bar{A}) \\ 1 &= P(A) + P(\bar{A}). \end{aligned}$$

Logo,

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

♦ $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

$$P[(A - B) \cup (A \cap B)] = P(A)$$

$$P(A - B) + P(A \cap B) = P(A).$$

Logo,

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

♦ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P[(A - B) \cup B] \\ &= P(A - B) + P(B) \end{aligned}$$

No item anterior, temos:

$$P(A - B) + P(A \cap B) = P(A).$$

Assim,

$$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B)$$

3.4.1 NOTAS:

- Seja n o número de elementos do espaço amostral de Ω, então 2^n será o número de subconjuntos ou eventos de Ω.
- A concepção formal ou axiomática é a concepção atual que se apoia na teoria dos conjuntos. É um conceito definido implicitamente por um conjunto de axiomas e definições gerando teoremas.

3.5 LEI DOS GRANDES NÚMEROS

É um conceito imprescindível em probabilidade, que declara:

> Se um evento de probabilidade P é observado repetidamente em ocasiões independentes, à medida que o número de repetições se torna arbitrariamente grande, a proporção da frequência observada deste evento em relação ao total número de repetições convergem na direção de P.

Traduzindo para uma forma mais simples, a medida que uma experiência é repetida muitas vezes, a probabilidade observada aproxima-se da real probabilidade.

3.6 EXEMPLO

Ao aluno Joãozinho foi feita a seguinte pergunta:

Um dado é lançado duas vezes, qual a probabilidade da soma da face superior do dado dar 7 ?

Joãozinho resolveu da seguinte maneira: A menor soma possível é 2 quando ambos os dados dão 1, da mesma forma a maior soma possível é 12 quando ambos os dados dão 6, então há 11 números inteiros de 2 à 12, dos quais quero apenas um, o 7, logo:

$$P(S_7) = \frac{\textit{número de casos favoráveis}}{\textit{número de casos possíveis}}$$

$$P(S_7) = \frac{1}{11}$$

1. Corrija a solução acima, dizendo onde o aluno Joãozinho errou e qual seria a probabilidade correta?

2. Dois dados são lançados simultaneamente, qual a probabilidade da soma das faces superiores dos dados dar 7 ?

Solução

1. O aluno Joãozinho, errou ao ignorar na fórmula Clássica o fato dos eventos não serem igualmente possíveis, pois os eventos soma 2 ou soma 7 não são equiprováveis, Por exemplo, a soma sete é possível de seis modos e a soma dois é possível de um modo, assim o quociente número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis não leva a probabilidade correta. O correto seria: Soma sete é possível com as faces:

$$S_7 = 1 + 6 = 7$$
$$S_7 = 2 + 5 = 7$$
$$S_7 = 3 + 4 = 7$$
$$S_7 = 4 + 3 = 7$$
$$S_7 = 5 + 2 = 7$$
$$S_7 = 6 + 1 = 7$$

Há seis modos de se obter soma sete em meio a 36 (6×6) somas possíveis, assim:

$$P(S_7) = \frac{6}{36}$$
$$P(S_7) = \frac{1}{6}$$

2. *Cuidado! As perguntas a e b parecem ser diferentes porém são equivalentes, coisa que nem sempre é fácil de ver, assim sendo, a reposta é a mesma.*

3.7 PROBABILIDADE CONDICIONAL

Considere a situação em que você precisa acertar antecipadamente em uma única tentativa, o número da face que ficará voltada para cima de um dado honesto de seis faces. Obviamente a probabilidade de você acertar o resultado é 1 em 6, pois $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e você possui apenas uma tentativa. Porém, se após o lançamento, alguém passa a informação de que o resultado foi um número par, intuitivamente você sabe que sua chance aumenta consideravelmente. A probabilidade de acerto salta para 1 em 3, pois o seu novo espaço amostral é $\Omega = \{2, 4, 6\}$. Dessa forma, definiremos $P(B \mid A)$ como sendo a probabilidade de ocorrer o evento B, sabendo que o evento A já ocorreu. Daí, podemos definir:

Definição 3.1 (Probabilidade Condicional)**.** *Sejam A e $B \subset \Omega$, definimos a probabilidade condicional de B, dado que A ocorreu, denotado por $P(B \mid A)$.*

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

É interessante notar que a probabilidade condicional defiinida acima realmente interpreta uma lei de probabilidade, isto é, uma função que associa a cada evento A de Ω o número $P(B \mid A)$ satisfaz os axiomas de probabilidade.

3.7.1 PROPRIEDADES DA PROBABILIDADE CONDICIONAL

Vamos descrever algumas propriedades fundamentais da probabilidade condicional. Considere um evento A de um espaço amostral Ω. Teremos as seguintes propriedades:

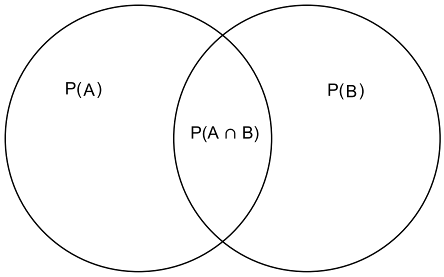
- $P(\emptyset \mid A) = 0$
- $P(\Omega \mid A) = 1$
- $0 \leq P(B \mid A) \leq 1$

Muitas vezes, é útil usar um diagrama de *Venn* para visualizar as probabilidades de vários eventos. Podemos exploramos a utilização de um diagrama de *Venn* para determinar as probabilidades de eventos individuais, a intersecção dos acontecimentos e o complemento de um evento.

Observando o diagrama da interseção de dois eventos figura 3, $A \cap B$, e verifica que a probabilidade condicional de A, dado que B ocorre.

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Figura 3 – Probabilidade Condicional



Fonte: Próprio autor

3.7.2 EXEMPLO

1. Os alunos do CIEP 427 classificados na OBMEP estão distribuídos da seguinte forma:

Sexo/Bairro	Morada do Sol	Jaqueira	Palmital
Masculino	92	35	47
Feminino	101	33	52

a) Escolhe-se um estudante ao acaso, qual a probabilidade de que more no Palmital?

b) Escolhe-se um estudante ao acaso, sabendo-se que esse estudante mora no Palmital, qual a probabilidade de que seja menino?

SOLUÇÃO

a) Seja:

p o evento que ocorre se o aluno escolhido mora no Palmital:

$$\begin{aligned} P(P) &= \frac{99}{360} \\ &= 0,275 \end{aligned}$$

b) Sejam:

H o evento que ocorre se o aluno escolhido for do sexo masculino;

P(H ∩ P) a probabilidade ser homem e morar no Palmital.

$$P(H \cap P) = \frac{47}{360}$$

e portanto

$$
\begin{aligned}
P(H \mid P) &= \frac{\#(H \cap P)}{P(P)} \\
&= \frac{47/360}{99/360} \\
&= \frac{47}{99} \\
&= 0,47...
\end{aligned}
$$

Note-se que:

$$
\begin{aligned}
P(H \mid P) &= \frac{\#(H \cap P)}{\#P} \\
&= \frac{47}{99}
\end{aligned}
$$

acontecerá sempre que todos os elementos do espaço amostral forem equiprováveis.

2. Uma urna contem 4 bolas brancas e 6 bolas pretas todas indistinguível exceto pela cor. São retiradas, sucessivamente, duas bolas sem reposição.

   Responda:

   a) Qual a probabilidade de ambas serem pretas?

   b) A segunda bola ser preta?

   c) Se a segunda bola é preta qual a probabilidade da primeira ser preta, "probabilidade *a posteriore*"?

   Solução:

   a) Ambas pretas

   Sejam: $P(P_1)$, a probabilidade da primeira bola ser preta;

   $P(P_2)$, a probabilidade da segunda bola ser preta;

   $P(P_1 \cap P_2)$, a probabilidade de ambas as bolas serem pretas.

   Assim:

$$
\begin{aligned}
P(P_1 \cap P_2) &= P(p_1) \cdot P(P_2 \mid P_1) \\
&= \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

b) A probabilidade da segunda bola ser preta.

Seja: $P(B_1)$, a probabilidade da primeira bola ser branca;

Assim:

$$\begin{aligned} P(P_2) &= P[(P_1 \cap P_2) \cup (B_1 \cap P_2)] \\ &= P(P_1 \cap P_2) + P(B_1 \cap P_2) \\ &= P(P_1) \cdot P(P_2 \mid P_1) + P(B_1) \cdot P(P_2 \mid B_1) \\ &= \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \\ &= \frac{30}{90} + \frac{24}{90} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

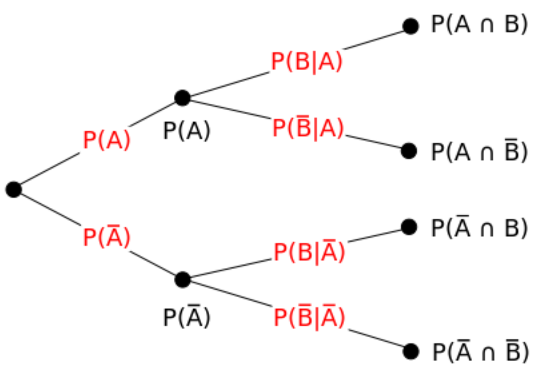
c) Se a segunda bola é preta qual a probabilidade da primeira ser preta?

$$\begin{aligned} P(P_1 \mid P_2) &= \frac{P(P_1 \cap P_2)}{P(P_2)} \\ &= \frac{1/3}{3/5} \\ &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

3.8 ÁRVORE DE PROBABILIDADES

Em probabilidade é comum utilizarmos um recurso diagramático, vide figura 4 em forma de árvore, também denominado árvore de probabilidades, muito utilizado na representação do espaço de probabilidade. Empregado também para representar as muitas possibilidades de uma combinação. Esse diagrama organiza de maneira visual e simples as informações de um conjunto de eventos sejam eles independentes ou dependentes.

Figura 4 – Diagrama de Árvore

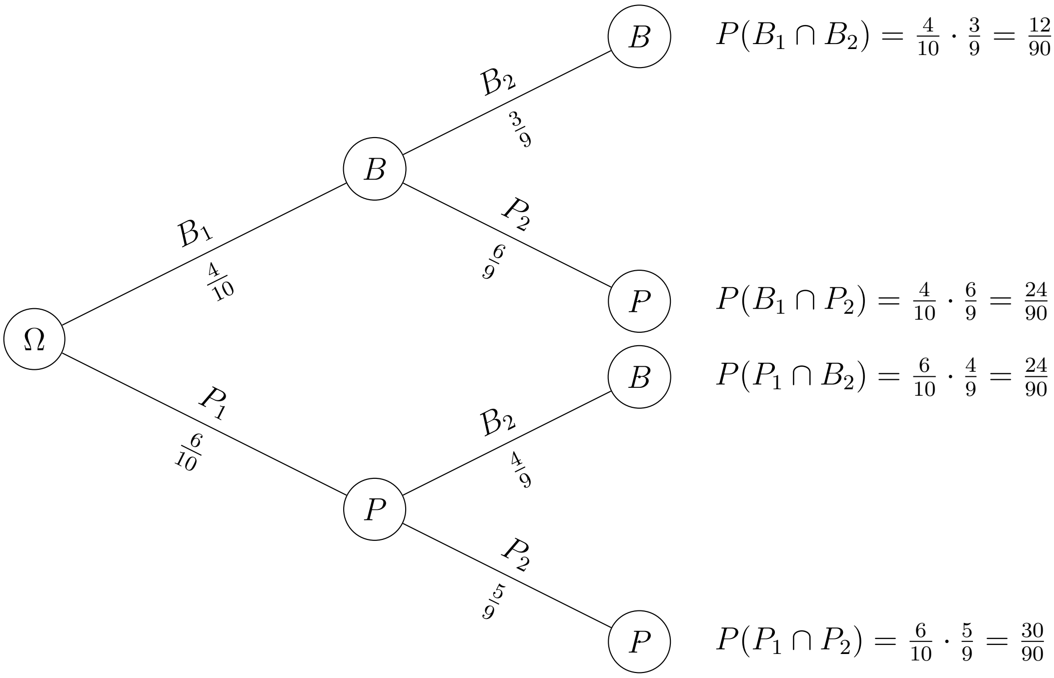


Fonte: Próprio autor

Para determinar uma probabilidade usando esse diagrama, basta percorrer todos os caminhos que levam ao evento cuja probabilidade é procurada, multiplicando as probabilidades em cada caminho e somando os produtos ao longo dos vários caminhos.

A construção de um diagrama de árvores é feita simplesmente criando as ramificação das possibilidades toda vez que haja experimento.

Vejamos na prática sua utilidade no desenvolvimento do exemplo anterior b:



Cada nó no diagrama representa um evento e está associado com a probabilidade desse evento. O nó da origem do diagrama, também chamada de raiz, representa o evento certo ou espaço amostral e, portanto tem probabilidade 1. Note que, também dará 1 a soma de todas as probabilidades obtidas no final de cada ramo.

Cada ramificação é gerada por nós subsequentes que representa divisão do evento inicial, isto é, a probabilidade particular que um certo evento vá ocorrer, é a condução da raiz passando por seus nós e ramos até a parte que interessa calcular e é feita mediante o produto das probabilidades ao longo desse caminho.

No exemplo anterior, selecionamos o caminho que nos interessa e somamos suas probabilidades, assim a resposta é:

$$P(P_2) = \frac{30}{90} + \frac{24}{90} = \frac{3}{5}$$

a probabilidade da segunda bola ser preta!

3.9 TEOREMA DA PROBABILIDADE TOTAL

O teorema da probabilidade total resulta diretamente da definição de probabilidade condicional e das propriedades da probabilidade. Se B é um evento contido numa união de eventos disjuntos, conforme ilustra figura 5 :

$$A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$$
$$\text{e}$$
$$P(A_1) > 0, P(A_2) > 0, P(A_3) > 0, \ldots P(A_n) > 0$$

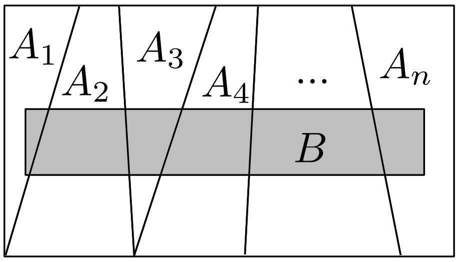


Figura 5 – Partição do Espaço Amostral

O fato de alguns desses termos serem o conjunto vazio não invalida o resultado, uma vez que $A \cup \emptyset = A$. Por definição de partição, os $A_i's$ são mutuamente exclusivos dois a dois; logo, os eventos $B \mid A_i$ também o são. Então, pela lei da probabilidade de eventos disjuntos, podemos escrever:

$$P(B) = P(B \mid A_1) \cdot P(A_1) + P(B \mid A_2) \cdot P(A_2) + \cdots + P(B \mid A_n) \cdot P(A_n)$$

Demonstração:

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup \cdots \cup (B \cap A_n).$$
$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + \cdots + P(B \cap A_n)$$
$$P(B) = P(B \mid A_1) \cdot P(A_1) + P(B \mid A_2) \cdot P(A_2) + \cdots + P(B \mid A_n) \cdot P(A_n) \qquad \square$$

Teorema 3.1 (Probabilidade Total)**.** *Seja $A_1, A_2, \cdot, A_n$ uma partição do espaço amostral Ω e B um evento qualquer em Ω, nessas condições:*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)$$

A probabilidade $P(A_i)$ é denominada probabilidade a *priori* do evento A_i.

3.10 TEOREMA DE BAYES

Em teoria das probabilidades e estatísticas, o teorema de Bayes apresenta um resultado que é de importância na manipulação matemática de probabilidades condicionais. O teorema de Bayes pode ser derivado de maneira simples a partir de axiomas de probabilidade, especificamente, probabilidade condicional.

Levando em conta que o Teorema de Bayes (alternativamente lei de Bayes ou regra de Bayes) tem, imensa importância em tantas áreas do conhecimento, sabemos pouco sobre Thomas Bayes [5]. Sabemos que dois anos após sua morte, o filósofo e amigo Richard Price (1723-1791), apresentou à *Royal Society* um artigo que possivelmente estava entre os escritos deixados por Bayes, com o nome *An essay towards solving a problem in the doctrine of chances.* Encontra-se neste artigo a demonstração do teorema que hoje leva seu nome. Após sua publicação, o trabalho caiu no esquecimento, sendo mais tarde remido por Laplace, que o divulgou ao mundo.

Eliezer Yudkowski [6], resumiu de maneira interessante o teorema de Bayes: *O teorema de Bayes liga a razão humana ao universo físico.*

Continuando no contexto da Figura 5, suponhamos agora que B tenha ocorrido. Vamos usar essa informação para calcular a probabilidade a *posteriori* do evento A_i, isto é, vamos calcular $P(A_i \mid B)$. Por definição, temos que:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

Usando a identidade obtida:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}{P(B)}$$

se $P(B) > 0$, então para i, $i = 1, 2, \ldots n$ e usando a proposição anterior:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}{P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(B \mid A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B \mid A_n)}$$

Teorema 3.2 (TEOREMA DE BAYES)**.**

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j) \cdot P(B \mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}$$

[5] Thomas Bayes, foi um pastor presbiteriano que viveu no início do século 18 (1701?-1761) na Inglaterra. Estudou teologia na Universidade de Edimburgo (Escócia), de onde saiu em 1722. Bayes foi eleito membro da Royal Society em 8 de abril de 1742, faleceu em Tunbridge Wells, Kent Inglaterra como ministro da capela de *Mount Sion* . Foi enterrado no *Bunhill Fields Cemetery* em Londres.

[6] Eliezer Shlomo Yudkowsky, nascido no ano de 1979, é um americano autodidata , escritor e defensor da inteligência artificial amigável.

O teorema de Bayes conecta probabilidades condicionais com suas inversas, por exemplo, o evento B é fixado na discussão, e queremos considerar o impacto de ter sido observado em nossa crença vários eventos possíveis A. Em tal situação, o denominador da última expressão, a probabilidade de dado as provas B, é fixo; o que queremos variar é A. O teorema de Bayes, então, mostra que as probabilidades posteriores são proporcionais ao numerador.

Quando aplicado, as probabilidades envolvidas no teorema de Bayes podem ter uma série de interpretações. Em uma dessas interpretações, o teorema é usado diretamente como parte de uma abordagem específica para a inferência estatística. Em particular, com a interpretação da probabilidade Bayesiana, o teorema se expressa de maneira que, um grau subjetivo de crença pode racionalmente mudar para explicar evidências: Esta é a inferência bayesiana, o que é fundamental para a estatística bayesiana. No entanto, o teorema de Bayes tem aplicações em uma ampla gama de cálculos que envolvem probabilidades, e não apenas em inferência bayesiana.

3.10.1 EXEMPLO

Eliezer Yudkowsky, exemplifica o raciocínio bayesiano através de um modelo médico, que relaciona as chances de uma mulher ter câncer de mama com o exame de mamografia. Vejamos tal exemplo:

> Recomenda-se que as mulheres a partir dos 40 anos façam mamografias anuais. Nessa idade, 1% das mulheres são portadoras de um tumor assintomático de mama. Sabe-se que a mamografia apresenta resultado positivo em 80% das mulheres com câncer de mama, mas esse mesmo resultado ocorre também com $9,6\%$ das mulheres sem o câncer. Suponhamos que:
>
> Dona Maria (40 anos) abre o seu exame de mamografia e fica aos prantos, desesperada, porque leu em sua mamografia que o resultado foi positivo! Qual a probabilidade com base nos dados acima que Dona Maria ter um câncer de mama?

Ter o câncer de mama e não ter o câncer de mama são possibilidades mutuamente excludentes, colocadas na tabela abaixo.

	Tem câncer	Não tem câncer
Prob. a *priori*	0,01	0,99

O resultado da mamografia: Se o câncer de mama está presente, a probabilidade condicional de a mamografia ser positiva é $0,80$ (80%), e se não está presente é de $0,096$ $(9,6\%)$.

	Tem câncer	Não tem câncer
Prob. a *priori*	0,01	0,99
Prob. Condicional	0,8	0,096

Multiplicando a probabilidade a *priori* pela condicional, obtemos a probabilidade conjunta:

	Tem câncer	Não tem câncer
Prob. a *priori*	0,01	0,99
Prob. Condicional	0,8	0,096
Prob. Conjunta	$0,1 \cdot 0,8 = 0,08$	$0,99 \cdot 0,096 = 0,0095$

Note que a soma das probabilidades a *priori* é 1, porém o mesmo não ocorre com as probabilidades conjuntas. Para fazer com que essa segunda soma se torne 1, usaremos um artifício de normalização, dividindo a probabilidade conjunta pela soma das duas, no caso $0,008 + 0,0095 = 0,0175$. Só assim chegamos soma 1, conforme tabela. Ao fazermos a divisão por $0,0175$ encontraremos a probabilidade a *posteriori*.

	Tem câncer	Não tem câncer
Prob. a *priori*	0,01	0,99
Prob. Condicional	0,8	0,096
Prob. Conjunta	$0,1 \cdot 0,8 = 0,08$	$0,99 \cdot 0,096 = 0,0095$
Prob. *Posteriori*	$0,08/0,0175 = 0,46$	$0,096/0,0175 = 0,54$

Agora a conclusão baseada na probabilidade a *posteriori*, isto é, após o teste, que Dona Maria não tenha um câncer de mama é de 54% e ela pode ficar mais tranquila pois a situação não é irreversível.

Quando Eliezer Yudkowsky, apresentou esse problema a várias pessoas, inclusive estudantes de medicina, se observou uma tendência a superestimar a probabilidade a *posteriori* da doença. Isso revela que o raciocínio bayesiano não é intuitivo.

Usando a definição, poderíamos ter resolvido tal exercício assim:

Sejam: C o evento ter câncer;

$\bar{C}$ o evento não ter câncer;

M o evento exame de mamografia dar positivo.

$$P(\bar{C} \mid M) = \frac{P(\bar{C}) \cdot P(M \mid \bar{C})}{P(C) \cdot P(M \mid C) + P(\bar{C}) \cdot P(M \mid \bar{C})}$$

$$P(\bar{C} \mid M) = \frac{0,99 \cdot 0,096}{0,008 + 0,0095} \quad \Longrightarrow \quad P(\bar{C} \mid M) = 0,54$$

4 O PARADOXO DE MONTY HALL

4.1 O QUE É UM PARADOXO?

Num sentido amplo, “paradoxo” significa o que é contrário à opinião comum, ou à opinião admitida como válida, contra senso, causando indecisão. Em Filosofia, paradoxo significa o que é aparentemente contraditório, mas que apesar de tudo tem sentido.

Em Matemática, entende-se por paradoxo matemático ou paradoxo lógico, uma contradição deduzida em sistemas lógicos ou das teorias matemáticas. Entende-se por um paradoxo lógico, duas proposições contrárias ou contraditórias derivadas conjuntamente a partir de argumentos que não se revelaram incorretos fora do contexto particular que gera o paradoxo. Partindo de premissas geralmente aceitas e utilizadas, é a opção menos possível, em certas condições específicas, inferir duas proposições que ou afirmam exatamente o inverso uma da outra ou não podem ser ambas verdadeiras.

As defiinições do conceito de paradoxo não estão muito bem defiinidas. As ideias de conflito ou de dificuldade insuperável parecem acompanhar de forma estável a ideia de paradoxo.

4.2 O PARADOXO

Monte Halparin, figura 6, mais conhecido pelo seu nome artístico *Monty Hall*, nascido em 25 de agosto, 1921 Winnipeg, Manitoba, Canadá. Fez carreira como cantor, ator, produtor entre outros, porém fez sucesso como apresentador do *game show Let's Make a Deal* tipo de programa de auditório televisivo norte americano da década de 60.

Figura 6 – Monte Halparin

Fonte: http://www.biography.com/people/monty-hall-9542238

A declaração mais conhecido do problema é:

> Suponha que você está no *game show* do apresentador *Monty Hall* e você terá a opção escolher entre três portas numeradas um, dois e três: Atrás de uma porta está o prêmio (um carro); atrás das outras, cabras. Você escolhe uma porta e não a abre, por exemplo, a número um, e o apresentador, que sabe o que está por trás das portas, abre outra porta, digamos, a número três, que tem uma cabra. Ele, então, lhe diz: "Você quer trocar sua porta pela porta número dois?"
>
> Qual decisão você toma?
>
> Troca de porta ou permanece na porta inicial!
>
> A pergunta paradoxal é:
>
> É vantagem mudar a sua escolha inicial?
>
> Matematicamente, fará diferença manter a porta inicial ou trocar?

O paradoxo de *Monty Hall* quando apresentado pela primeira para as pessoas provoca uma forte tendência dessas pessoas assumirem que cada porta tem uma probabilidade igual e concluem que a mudança de porta não importa e permanecem em sua escolha inicial. O que realmente seria natural em pensarmos que não fará diferença a troca de portas, uma vez que aberta uma porta, sobram duas e há 50% de chance de se escolher entre uma ou outra porta. O contraditório está em dizer que trocar de porta dobram as chances de encontrar o prêmio.

Monty Hall apenas ilustra a história emprestando seu nome ao problema, tal situação nunca aconteceu de fato. Podemos dizer que devido ao sucesso do *game show Let's Make a Deal* o problema foi contextualizado dessa forma para a época e sendo batizado de *Monty Hall paradox*.

4.3 A HISTÓRIA DO PARADOXO

Há vários problemas de probabilidade publicados anteriormente que são, em essência, o problema de *Monty Hall*. O primeiro entre vários problemas de probabilidade que podem ser relacionados ao problema *Monty Hall* é *paradoxo caixa de Bertrand*, apresentado por Joseph Bertrand [1], em 1889, em sua obra *Calcul des probabilités*. Nesta obra, Bertrand apresenta um quebra-cabeça onde há três caixas: uma caixa contendo duas moedas de ouro, uma caixa com duas moedas de prata, e uma caixa com uma moeda de cada. Depois de escolher uma caixa de forma aleatória é retirada uma moeda ao acaso, sabendo que essa é uma moeda de ouro, a pergunta é: Qual é a probabilidade de que a outra moeda

[1] Joseph Louis François Bertrand, nascido em 11 de Março de 1822, falecido em 5 de abril de 1900, nasceu e morreu em Paris, foi um francês matemático que trabalhou nas áreas de teoria dos números, geometria diferencial, teoria da probabilidade, economia e termodinâmica.

seja de ouro? Como no problema de *Monty Hall* a resposta intuitiva é uma probabilidade de 1/2 (50%), mas a probabilidade correta é, na verdade, 2/3 ($66,6...\%$).

Uma variante muito semelhante apareceu no ano de 1959, quando Martin Gardner [2] apresentou o problema como o jogo dos três prisioneiros, que é matematicamente equivalente ao problema de *Monty Hall*, em sua coluna de abril e outubro de 1959 na revista *Scientific American* (GARDNER, 1959a) (GARDNER, 1959b).

Quando o matemático e estatístico Fred Mosteller [3] incluiu em 1965 sua antologia de problemas de probabilidade (MOSTELLER, 1965), ele comentou que este problema atraiu mais correspondência do que qualquer outro problema.

Escrevendo em seu livro de 1968, *Mathematical Ideas in Biology* Smith (1968), o biólogo John Smith [4] disse: "Esse problema deveria ser chamado de o problema Serbelloni, pois quase destruiu uma conferência sobre biologia teórica no grande hotel *Serbelloni Villa* (Itália) no verão de 1966".

No formato atual, *Monty Hall Paradox* como ficou conhecido o problema, aparece pela primeira vez em 1975 na edição da revista acadêmica *the American Statistician* na seção *letter to the editor* (SELVIN, 1975a) do matemático Steve Selvin [5] que o expôs como um exercício de sala de aula em probabilidade condicional. Nessa revista, ele pondera e resolve o problema, intitulado de *A Problem in Probability.* Essa foi a primeira vez que o nome *Monty Hall Paradox* apareceu na imprensa. Selvin, contextualiza toda a história com o *game show* televisivo norte americano *Let's Make a Deal* do apresentador *Monty Hall*.

Steve Selvin, em sua primeira solução recebeu algumas críticas, então ele resolveu escrever uma nova carta Sobre o Problema, que foi publicada (SELVIN, 1975b) em agosto do mesmo ano. Nesta segunda carta Steve Selvin propôs uma solução baseada no teorema de Bayes e explicitamente descreve algumas suposições sobre o comportamento do apresentador (Monty Hall). Embora tenha apresentado a solução correta, Steve Selvin

[2] Martin Gardner nasceu em Tulsa, Oklahoma em 1914, foi um escritor de matemática recreacional, literatura de divulgação científica e matemática, mas com interesses que englobavam micromagia, ilusionismo, literatura, filosofia, ceticismo científico e religião. Ele faleceu em Norman, Oklahoma em 2010 com mais de 100 livros publicados.

[3] Charles Frederick Mosteller nasceu em Clarksburg, West Virginia em 1916, foi um dos mais eminentes estatísticos do século 20. Ele foi o presidente fundador da Harvard 's departamento de estatísticas e atuou como presidente de diversas organizações, a Associação Americana de Estatística, o Instituto de Estatística Matemática, a Associação Americana para o Avanço da Ciência, e o Instituto Internacional de Estatística. Faleceu em Arlington, Virginia no ano 2006.

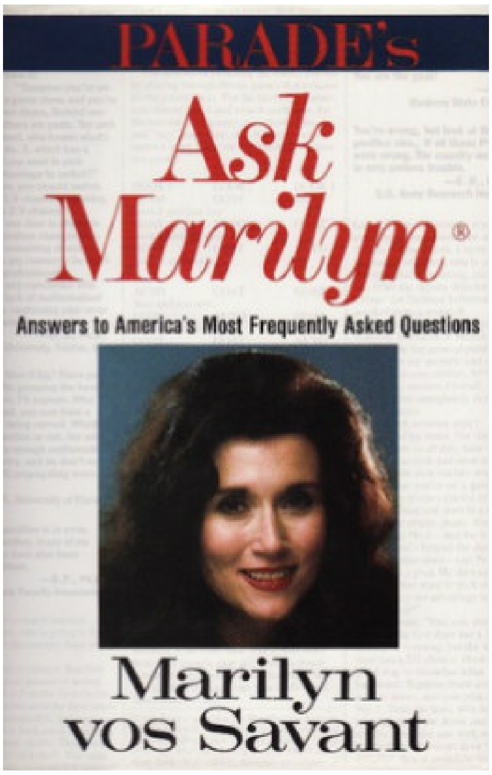
[4] John Maynard Smith nasceu em Londres, em 1920 foi um geneticista e pesquisador em biologia evolutiva. Seu pai morreu quando ele tinha apenas oito anos de idade. Quando de sua morte, sua mãe o levou para morar no campo, onde seu interesse pela natureza começou a crescer. Originalmente um engenheiro aeronáutico durante a Segunda Guerra Mundial. Faleceu em Lewes, Inglaterra em 2004.

[5] Steve Selvin nasceu em 1941, atualmente é professor de bioestatística na Universidade de Berkeley. Nesta universidade recebeu vários prêmios por suas realizações no ensino. Publicou mais de 200 artigos e autor de vários livros nas áreas de bioestatística e epidemiologia

encontrou-se, novamente, contestado por cartas, que foram enviadas ao editor da coluna.

O problema, ainda assim permanece desconhecido da maioria das pessoas. Quinze anos mais tarde este problema retorna se torna realmente popular, consolidando sua história no formato atual. Isto ocorre quando ele foi publicado na revista *Parade's Magazine* na coluna *Ask Marilyn* de Marilyn vos Savant, ver figura 7.

Figura 7 – Livro de vos Savant



Fonte: www.amazon.com/Parades-Marilyn-Americas-Frequently-Questions/dp/031209745X.

Vos Savant desde criança já batia records nos teste de QI (quociente de inteligência), tendo atingido, aos dez anos, um resultado nunca visto de 228 pontos. Por apresentar tal desempenho, vos Savant já foi citada no *Guinness Book of World Records* como a mulher com o QI mais alto do mundo durante cinco anos, ingressando na galeria dos mais notáveis de todos os tempos *Guinness Hall of Fame*. Lê-se no seu site na *Web* em www.marilynvossavant.com.

Apesar de seu QI, vos Savant não iria se dedicar a carreira acadêmica, abandonou a universidade e se enveredou por outras vias. Quando seu desempenho foi divulgado pela primeira vez no *Guinness*, a revista *Parade's Magazine* convidou-a a escrever uma coluna semanal, intitulada *Ask Marilyn*. Vos Savant responde aí a todo o tipo de perguntas, desde ciências exatas à ética e à filosofia, passando por questões mais pessoais dos leitores. E as suas respostas não são triviais.

Por não se saber ao certo o que medem os testes de QI, estes tem sua validade contestada e assim esse índice foi retirado do *Guinness*. O certo seria dizer que todos os resultados obtidos nos testes de QI por vos Savant ao longo da vida, foram sempre extremamente elevados.

A coluna que talvez tenha consagrado vos Savant, como uma mulher de inteligência superior remonta a 1990 e desencadeou um debate acalorado nos Estados Unidos. Tudo começou quando vos Savant respondeu um leitor acerca de um problema de teoria das probabilidades, que ficaria conhecido por *The Monty Hall Paradox*.

Na edição número 9 da *Parade's Magazine* de setembro de 1990, em reposta a pergunta proposta por um leitor sobre o problema de *Monty Hall*: É ou não é mais vantajoso alterar a escolha?

Vos Savant respondeu que sim, argumentando que, o concorrente deve mudar de porta, por que na mudança, o concorrente dobra suas chances de ganhar o carro, passa de uma chance de 1/3 de ganhar o carro para uma chance de 2/3 de ganhar o carro.

Esta resposta provocou, a princípio, o envio de milhares de cartas de leitores, 92% dos leitores diziam que ela estava errada e 65% das cartas dos professores universitários não concordavam com sua resposta. A grande maioria argumentava que todas as portas tem iguais chances de sucesso, que não fazia diferença em trocar ou não trocar de porta.

> Você errou feio, e o estrago foi muito grande! Vejo que você parece ter dificuldade em entender o princípio básico desse problema, eu vou explicar:
>
> Após o anfitrião revela uma cabra, agora você tem uma chance em duas de estar correta. Se você alterar sua seleção ou não, as chances são as mesmas. Há analfabetismo matemático suficiente neste país, e nós não precisamos de $QI's$ mais alto do mundo propagando mais Vergonha!
>
> *Scott Smith, Ph.D. Universidade da Flórida*

> Vejo que você gosta de ir direto ao ponto, eu vou fazer o mesmo. Você errou muito! Deixe-me explicar ...
>
> ... Como um matemático profissional, estou muito preocupado com a falta de habilidades matemáticas do público em geral. Por favor, ajude-nos, confessando seu erro e, no futuro, seja mais cuidadosa.
>
> *Robert Sachs, Ph.D. Universidade George Mason*

> Sua resposta para a questão está errada. Mas, se serve de consolo, muitos dos meus colegas também ficaram perplexo com este problema.
>
> *Barry Pasternack, Ph.D., Califórnia Faculdade Association*

> Posso sugerir que você procure consultar um livro didático padrão em probabilidade antes de tentar responder a uma pergunta desse tipo de novo? *Charles Reid, Ph.D. University of Florida*

> Talvez as mulheres olhem para os problemas de matemática de forma diferente do que os homens.
>
> *Don Edwards Sunriver, Oregon*

Muitos leitores da coluna de *vos Savant* se recusaram a acreditar que trocar é a melhor escolha, apesar de sua explicação. Depois que o problema aparece na revista, cerca de 10.000 leitores, incluindo cerca de 1.000 com PhD (doutorado), escreveram para a revista, a maioria deles alegando que *vos Savant* estava errada.

Vos Savant resolveu escrever outra coluna com outra explicação, com exemplos e provas matemáticas formais. Pode-se pensar, ou pelo menos esperar, que esta segunda coluna resolveria o problema. Mas, em sua coluna de 17 de fevereiro, 1991, muitas pessoas ainda não aceitam que a mudança era a melhor estratégia:

> Estou em estado de choque que, depois de ser corrigida por pelo menos três grandes matemáticos, você ainda não vê o seu erro.
>
> *Kent Ford, Universidade Estadual de Dickinson*

> . . .
>
> Tenho sido um fiel leitor de sua coluna, e eu não tinha, até agora, qualquer razão para duvidar de você. No entanto, nesta matéria (para o qual eu tenho conhecimento), a sua resposta é claramente em desacordo com a verdade.
>
> *James Rauff, Ph.D., University Millikin*

> . . . Albert Einstein ganhou um lugar mais caro nos corações das pessoas depois que ele admitiu seus erros.
>
> *Frank Rose, Ph.D., da Universidade de Michigan*

> Você está totalmente errada sobre o *game show* em questão, e espero que essa polêmica consiga chamar a atenção do público para a grave crise nacional em educação matemática. Se você pode admitir o seu erro, você terá contribuído de forma construtiva para a solução de uma situação deplorável. Quantos mais matemáticos irados serão necessários para levá-la a mudar de ideia?
>
> *E. Ray Bobo, Ph.D., da Universidade de Georgetown*

> ... Se todos esses doutores estão errados, o país estará em sérios apuros.
>
> *Everett Harman, Ph.D., Instituto de Pesquisa do Exército dos EUA*

Em sua revista, *vos Savant* foi muito contestada, seguida de várias rodadas de correspondência e leitores com raiva, em que os mesmos duvidavam da solução apresentada por ela.

Durante 1990 á 1991 mais três de suas colunas na revista *Parade* foram dedicadas ao paradoxo, e a discussão foi repetida em outros locais, e relatada em jornais.

O húngaro e matemático *Paul Erdös* [6] não se convencera até que ele recebeu uma resposta por simulação computacional de Monte Carlo Carlo [7] confirmando o resultado previsto.

Assim todos os desafiantes mais tarde tiveram que aceitar quando era mostrado o resultado de *Monte Carlo* garantindo que *vos Savant* estava correta, mas não antes da briga chegar até à primeira página do *The New York Times* (TIERNEY, 1991).

O *New York Times* dedica duas paginas sobre o problema, ver figura 8 nela o próprio Monty é entrevistado. Na entrevista Monty será colocado diante do problema e até uma simulação do problema com três portas de papelão em miniatura será realizada na casa de Monty em *Beverly Hills.*

Outros grandes jornais estadunidenses também deram considerável atenção ao problema. o próprio *The New York Times* (TIERNEY, 1991) voltará a dedicar interesse ao problema em outras edições subsequentes.

> Você está correta!
>
> Meus colegas de trabalho ficaram perplexos com esse problema, e ouso dizer que a maioria deles, inclusive eu, a princípio, pensei que você estava errada!
>
> *Seth Kalson, Ph.D. Massachusetts Institute of Technology*

O Paradoxo de *Monty Hall* além de ter sua resposta aparentemente contraditória, teve como fator decisivo para sua polêmica, o fato de uma mulher ter sido veementemente contestada por homens doutores em matemática de conceituadas universidades e assim

[6] Paul Erdös de pais judeus nasceu em Budapeste, Hungria (26 março de 1913) faleceu em Varsóvia de ataque cardíaco (20 setembro de 1996) Um dos matemáticos mais prolíficos, trabalhou com problemas de combinatória, teoria dos grafos, teoria dos números, análise clássica, teoria da aproximação, teoria dos conjuntos e teoria da probabilidade.

[7] A simulação de *Monte Carlo* é uma técnica matemática computadorizada que possibilita levar em conta o risco em análises quantitativas e tomadas de decisão. A simulação de *Monte Carlo* fornece ao tomador de decisão uma gama de resultados possíveis e as probabilidades de ocorrências desses resultados de acordo com a ação escolhida como decisão. Essa técnica foi usada inicialmente pelos cientistas que trabalharam na bomba atômica, e foi chamada de *Monte Carlo* como referência à cidade do Mônaco e seus cassinos.

Figura 8 – The New York Times - July 21, 1991

The New York Times U.S.

WORLD | U.S. | N.Y. / REGION | BUSINESS | TECHNOLOGY | SCIENCE | HEALTH | SPORTS | OPINION

POLITICS EDUCATION TEXAS

Behind Monty Hall's Doors: Puzzle, Debate and Answer?

By JOHN TIERNEY,
Published: July 21, 1991

BEVERLY HILLS, Calif., July 20— Perhaps it was only an illusion, but for a moment here it seemed that an end might be in sight to the debate raging among mathematicians, readers of Parade magazine and fans of the television game show "Let's Make a Deal."

They began arguing last September after Marilyn vos Savant published a puzzle in Parade. As readers of her "Ask Marilyn" column are reminded each week, Ms. vos Savant is listed in the Guinness Book of World Records Hall of Fame for "Highest I.Q.," but that credential did not impress the public when she answered this question from a reader:

"Suppose you're on a game show, and you're given the choice of

FACEBOOK TWITTER GOOGLE+ EMAIL SHARE PRINT SINGLE PAGE REPRINTS

Fonte: http://www.nytimes.com

mesmo ela manteve seu ponto de vista, isso chamou a atenção e provocou um debate nacional sobre este tema.

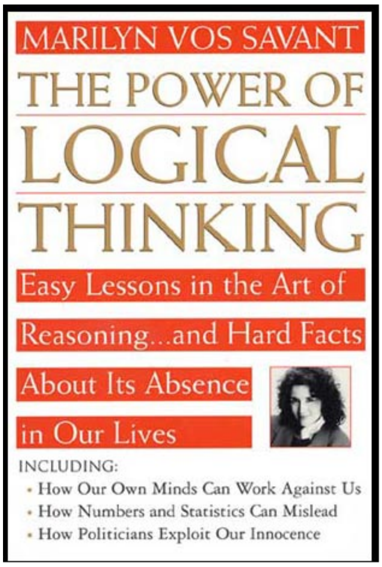
Diversos trabalhos sobre o assunto foram realizados e o problema foi debatido na *Central Intelligence Agency*, no quartel de pilotos de caça no Golfo Pérsico, *Massachusetts Institute of Technology*, programadores de computador de *Los Alamos National Laboratory in New Mexico*, foi testado em salas de aula com alunos do ensino secundário até universitário, entre outros.

Toda essa história com detalhes é mais tarde contada por *vos Savant* em *The Power of Logical Thinking* (SAVANT, 1996) 9. Nela Vos Savant, explica ainda as suas hipóteses e raciocínios.

Vos Savant também pediu aos professores para apresentarem e simularem este problema em suas salas de aula e escrever de volta para ela com os resultados. Em sua última coluna sobre o problema, ela mostrou os resultados destes ensaios em sala de aula. Quase 100% deles concluíram que ela estava certa e que o competidor deve mudar portas.

O fenômeno é particularmente interessante justamente por causa da sua contradição lógica, sua atualidade e sua facilidade em ser reproduzido.

Figura 9 – Livro de vos Savant



Fonte: www.amazon.com/Power-Logical-Thinking-Lessons-Reasoning.

No final, toda essa situação foi bem resumida pelo cientista cognitivo *Massimo Piattelli Palmarini*[8] que disse:

> "... Nenhum outro quebra-cabeça em probabilidade vem tão perto de enganar tantas pessoas por tanto tempo ... "

[8] Massimo Piattelli Palmarini, atualmente é Professor de Ciência Cognitiva da Universidade do Arizona, depois de se formar em física na Universidade de Roma, trabalhou como professor e pesquisador em prestigiadas instituições italianas e estrangeiras, incluindo o Instituto Pasteur, o Instituto de Tecnologia de Massachusetts, da Universidade Harvard. É membro de diversas sociedades científicas internacionais e também do conselho editorial das revistas mais importantes da ciência cognitiva.

5 ATIVIDADES

5.1 PROPOSTAS DE ATIVIDADES ENVOLVENDO O PARADOXO DE MONTY HALL - PMH

A ideia é oferecer algumas propostas de atividades didáticas envolvendo o estudo das probabilidades para os alunos dos ensinos fundamental e médio. Essa proposta pretende, principalmente, ser uma forma divertida de aplicar probabilidade tanto experimental quanto teórica.

Em especial aos alunos do 9^0 ano do ensino fundamental e do 2^0 ano do ensino médio.

Em turmas de cursos técnicos é aconselhável para o professor optar por fazer uma atividade conjunta, utilizando simulação computacional. Aconselhamos softwares como Pascal, Fortran ou até mesmo IDE's como Matlab, ou Scilab (gratuito) por serem de fácil acesso. Para essa atividade sugerimos acrescentar, pelo menos, mais uma aula de 50 minutos. Nessa sugestão, está bem claro que o uso de um recurso computacional não implica apenas na articulação com os temas interdisciplinares, mas numa estratégia de ensino-aprendizagem favorecendo o desenvolvimento cognitivo, a autonomia. O que propomos se resume a exemplos simples de aplicação da probabilidade, em particular, quando esta representa uma oportunidade de apresentar a Lei dos Grandes Números.

O PMH também se torna interessante quando o público alvo possui maturidade matemática para ser desafiado a resolver o problema para um número maior de portas, isto é, quando o numero de portas aumentar de 3 para 4, 5, 6, ... n. Assim será levado a analisar e a estabelecer relações entre o aumento do número de casos e apresentar uma relação de recorrência e até mesmo a indução finita num problema que aparentemente era de probabilidade.

Claro que é esperado que cada professor adapte e enriqueça a proposta a realidade e universo escolar de seus educandos, que pode variar de turma para turma num mesmo ano de escolaridade.

Não é interessante para o professor aprofundar numa discussão axiomática, estamos mais preocupados com os processos dedutivos que é a proposta deste trabalho. Sendo assim, o professor deve colaborar para a formação níveis empírico-experimentais, conforme foi dito em 2.4.

Em linhas gerais, a proposta se resume em três tipos, a saber:

- Apresentação do PMH para turmas de 9^0 ano (EF) respeitando o desenvolvimento cognitivo desses alunos onde devesse ter cuidado e evitar alguns formalismos;

- Apresentação do PMH para turmas de 2^0 ano (EM) onde já se pressupõem que possam dominar ou assimilar algum formalismo;
- Apresentação do PMH para turmas de 2^0 ano (EM) mais avançadas em habilidades matemáticas e computacionais.

5.1.1 RECURSO E MATERIAL

Materiais necessários:

Usamos copos de isopor ou plástico para representar as três portas, o ideal é que esses copos sejam grandes para que toda a sala veja o experimento. Numere com uma caneta pilot os copos conforme o número de portas.

Os prêmios, para o carro poderia ser um bombom, as cabras podem ser feitas de papel ou o copo vazio. Poderia comprar um carro de plástico e animais a partir de uma loja do tipo 1,99 para adicionar um toque especial para a sua simulação.

Uma toalha para cobrir os copos para esconder o prêmio sem ser visto pelos demais participantes.

5.2 O JOGO

5.2.1 ATIVIDADE - JOGANDO COM A CLASSE

As atividades Jogando com a Classe e Jogando com 3 Copos devem ser realizadas em sequência, o tempo previsto para ambas é de uma aula de 50 minutos.

Convide um(a) aluno(a) da classe para jogar contigo. Explique brevemente o jogo, se ele(a) descobrir em que copo se encontra o carro você dará a ele(a) um bombom, a figura 10 representa o jogo que será realizado para a classe. Onde usamos copos de plástico e como prêmio no lugar do carro o aluno(a) ganhará um bombom. Repita o experimento (jogo) para melhor compreensão de todos.

Figura 10 – Jogando com a Classe

Fonte: Próprio autor

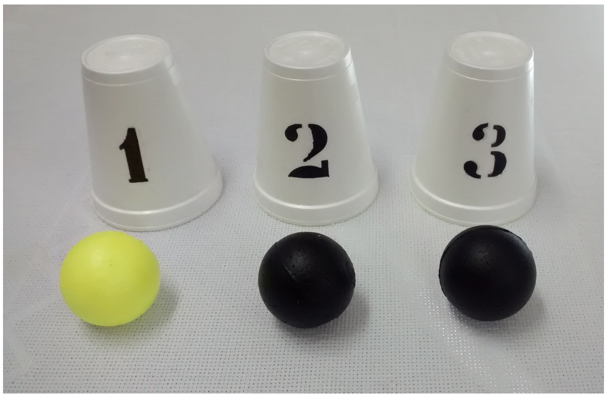
É importante ressaltar que; quando o aluno tomar sua primeira decisão por um dos copos, por exemplo, o numero 1. Neste momento o professor deve levantar um copo revelando uma cabra e então oferecer ao aluno a oportunidade de escolher o outro copo, o professor deve "entrar no personagem" e dramatizar um pouco antes de levantar o outro copo sem prêmio (professor sempre sabe onde está o prêmio). Isso diverte a turma e chama a atenção para o centro do problema. Seria interessante que o professor convidasse um outro aluno para jogar depois.

Porém não aconselhamos, em hipótese alguma, que seja dito o nome *Monty Hall* ou faça qualquer menção que possa levar um aluno mais "espertinho" a fazer uma busca na internet por um *smartphone*.

5.2.2 ATIVIDADE - JOGANDO COM 3 COPOS

As atividades Jogando com a Classe e Jogando com 3 Copos devem ser realizadas em sequência, o tempo previsto para ambas é de uma aula de 50 minutos. Divida a turma em grupos de cinco ou seis alunos. Explique brevemente o jogo, na figura 11 usamos um kit com copos de isopor numerados de 1 à 3 e três bolas, sendo duas pretas e uma dourada para representar o premio.

Figura 11 – Kit com 3 copos



Fonte: Próprio autor

Após divida a turma em grupos de seis ou mais alunos e distribua a primeira folha de atividade (vide sugestão no último capítulo) para cada grupo e depois o kit para cada grupo.

O grupo deve escolher entre si um colega para preencher a tabela de atividade, vide exemplo 3, este aluno será o anfitrião futuramente no jogo.

Explique que o jogo será realizado dentro de cada grupo.

O anfitrião de cada grupo deve iniciar o jogo com os integrantes de seu grupo e cada integrante deve seguir a sua própria estratégia para vencer. Com calma o anfitrião anotará cada resultado obtido na tabela 3 da folha de atividade. O anfitrião deve participar por último, para isso outro colega assume a sua função. O professor deve permitir que cada aluno jogue segundo sua própria estratégia.

Vencida essa etapa, cada grupo deve fazer os seus cálculos do total relativo e percentual dos que acertaram mudando de copo e os seus cálculos do total relativo e percentual dos que acertaram permanecendo no copo inicial e anotar na tabela, vide exemplo 4.

O professor não deve perguntar aos alunos o que eles acham do jogo e se faz diferença mudar de porta quando há possibilidade de mudar, isto deve acontecer naturalmente. Caso algum aluno pergunte se faz diferença para ganhar, trocar de copo ou permanecer no copo da escolha inicial, agora sim provocar a discussão no grupo.

As discursões dentro do grupo é momento é muito fértil e deve-se deixar que o aluno exponha e discuta sua opinião dentro e fora do grupo. O professor deve ouvir atentamente o que cada aluno tem a dizer, incentivar, principalmente, a discussão em sala de aula e confrontar o ponto de vista dos alunos.

O professor deve recolher as folhas de atividade e coletar os dados de todos os grupos anotando no quadro “negro” o total de respostas relativas e percentuais de cada grupo e fazer o um novo cálculo relativo e percentual que agora representa o quantitativo da turma.

O professor deve aproveitar a oportunidade para discutir com a turma as diferentes respostas percentuais de cada grupo e avaliar se há alguma tendência nas respostas, provavelmente não deva ser evidente tal tendência pela pequena amostragem.

5.2.3 ATIVIDADE - JOGANDO COM 4 COPOS

Tempo previsto para essa atividade é de uma aula de 50 minutos. Será entregue ao anfitrião de cada grupo uma folha de atividade, quatro copos de isopor ou plástico numerados de 1 a 4 conforme figura 12, onde sugerimos a bola dourada representando o carro e as bolas pretas às cabras. Caso as aulas sejam geminadas (seguidas), daremos continuidade à anterior, sendo assim o professor entrega para cada grupo mais um copo numerado (4) e nova folha de atividade agora para quatro copos.

Nova rodada com quatro copos, conforme figura, explique que o jogo é o mesmo, porém com quatro copos e depois da escolha do copo pelo competidor o anfitrião que antes levantar um copo sem o prêmio, agora levantará dois copos sem o prêmio.

Todo o processo é o mesmo. Novamente o anfitrião anota na nova folha de atividades as respostas da participação de todos os membros de seu grupo, roteiro similar ao anterior.

Figura 12 – Jogando com 4 copos

Fonte: Próprio autor

O professor deve conduzir os alunos a concluírem que há duas estratégias básicas que o jogador poderia seguir: ou mudar de copo após a primeira escolha para o copo que não foi levantado ou ficar com o copo da primeira escolha. Discuta a existência de vantagem estratégica em mudar ou não de copo.

Peça aos grupos para analisar os dados e escolherem estratégia, caso exista, de acordo com as probabilidades experimentais observadas anteriormente e anotar essa estratégia na opinião do grupo na folha de atividade.

O professor, novamente, deve recolher a folha de atividade e coletar os dados de todos os grupos anotar no quadro "negro" o total de respostas relativas e percentuais de cada grupo e fazer o um novo cálculo relativo e percentual que agora representa o quantitativo da turma.

O professor deve procurar uma tendência nesses dados e questionar com a turma a veracidade dessa tendência, caso haja uma evidencia que leve a uma tendência, como melhorar essa tendência, isto é, sua convergência.

É altamente recomendável realizar a atividade 3 antes de conduzir a classe, na medida do possível, na direção da probabilidade baseada em defiinições e frequência relativa.

O trabalho de coletar dados e de montar tabelas, pode ser transformado em outra atividade, por exemplo, para casa.

5.2.4 ATIVIDADE - JOGANDO COM 5 COPOS

Acreditamos que numa turma de nono ano do ensino fundamental seria altamente recomendável realizar uma terceira rodada com cinco copos, porém nas turmas de segundo ano do ensino médio essa decisão fica a cargo do professor e das duvidas apresentadas pela classe. Lembrando que essa atividade só reforça o experimento.

Tempo previsto para essa atividade é de uma aula de 50 minutos. Será entregue ao anfitrião de cada grupo cinco copos de isopor ou plástico numerados de 1 a 5 conforme figura 13, onde sugerimos a bola dourada representando o carro e as bolas pretas às cabras. Caso as aulas sejam geminadas (seguidas), daremos continuidade à anterior, sendo assim o professor entrega para cada grupo mais um copo numerado (5) e nova folha de atividade.

Figura 13 – Jogando com 5 copos

Fonte: Próprio autor

O professor, novamente, deve recolher a folha de atividade e coletar os dados de todos os grupos anotar no quadro “negro” o total de respostas relativas e percentuais de cada grupo e fazer o um novo cálculo relativo e percentual que agora representa o quantitativo da turma.

Novamente, com todas as informações no quadro, surge a oportunidade de trabalhar, a Lei dos Grades Números onde a probabilidade observada aproxima-se da real probabilidade na medida que uma experiência é repetida muitas vezes. Lembrando que o nosso foco especial é levar a classe a uma conclusão probabilística o quê não impede de trabalhar outro subtema, como:

Coleta de dados e tabelas podem se transformar em outra atividade para casa, por exemplo, montar gráfico dos valores encontrados em cada grupo.

5.2.5 ATIVIDADE - SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

Tempo previsto para essa atividade é de duas aulas de 50 minutos. Recurso necessário é um bom laboratório de informática. A simulação computacional é a forma explicita de utilização da Lei dos Grandes Números e isso tem que ficar evidente. Nessa atividade apresentamos a interdisciplinaridade com a informática através Simulação Computacional, sem a necessidade de grande conhecimento de linguagem de programação, usamos para isso a linguagens básica do *Fortran*, porém poderíamos utilizar IDE’s como Matlab, ou Scilab (gratuito).

```
    PROGRAM sorteio_de_portas

       IMPLICIT none
       INTEGER :: i_porta, pp, pe !pp=portapremiada,pe=portaescolhida
       INTEGER :: tbs=0, tf=0
       INTEGER :: escolha, nova_escolha, i_sorteio
       INTEGER ::num_sorteios
       REAL :: xaleatorio
    PRINT *, "QUANTAS VEZES DESEJA REPETIR O EXPERIMENTO?"
    READ(5,*) num_sorteios

       CALL random_seed
       DO i_sorteio=1,num_sorteios
         CALL random_number(xaleatorio)
          pp=floor(3.*xaleatorio)+1
          CALL random_number(xaleatorio)
          escolha=floor(3.*xaleatorio)+1
          DO
             CALL random_number(xaleatorio)
              pe=floor(3.*xaleatorio)+1
             IF (pe.ne.pp.and.pe.ne.escolha) exit
           END DO
          DO
             CALL random_number(xaleatorio)
              nova_escolha=floor(3.*xaleatorio)+1
             IF ((nova_escolha.ne.escolha) .and. (nova_escolha.ne.pe)) EXIT
           END DO
          IF (nova_escolha==pp) THEN
             tbs=tbs+1
          ELSE
             tf=tf+1
          END IF
       END DO
       PRINT *, "O numero de tentativas bem sucedidas foi: ",tbs
       PRINT *, "O numero de tentativas mal sucedidas foi: ",tf
       PRINT *, "O numero de execucoes do loop foi de ",num_sorteios
       PRINT *, "Sucesso em %",REAL(tbs)*100./REAL(num_sorteios),"%"

read(5,*) i_porta
```

```
END PROGRAM sorteio_de_portas
```

Como sugestão, os alunos poderiam anotar os resultados para valores diferentes da quantidade de experimento e verificar como converge para um determinado número a medida que o número de experimentos aumenta. Exemplo de tabela completada 1 com o programa acima, onde:

N_e É o número de experimentos simulados;

N_S É o número de experimentos simulados com sucesso;

$N_{\%}$ É o número de experimentos simulados com sucesso percentual.

N_e	N_S	$N_{\%}$
10	5	50,00
100	63	63,00
1.000	664	66,40
10.000	6.620	66,20
100.000	66.401	66,40
1.000.000	666.113	66,61
10.000.000	6.664.436	66,64
100.000.000	66.661.122	66,66

Tabela 1 – Simulação

5.2.6 ATIVIDADE - RESOLVENDO ERRADO

Tempo previsto para essa atividade é de, no máximo, uma aula de 50 minutos. Será apresentada pelo menos uma solução prática porém errada para a classe, que consiste em listar (escrever) todos os casos possíveis e depois conta-los:

Sejam:

P_1, P_2 e P_3 as portas 1, 2 e 3 respectivamente. Suponhamos o prêmio atrás da porta 1 (P_1);

Vamos contar todos os casos onde o competidor sempre muda de porta:

Prêmio atrás da porta 1;

Por raciocínio equivalente, vemos que não é necessário escrever os casos onde o prêmio está atrás da porta 2 ou porta 3.

O quociente entre o número de casos favoráveis (ganhar) e o número total de casos possíveis é a probabilidade de ganhar $P(G)$.

competidor escolhe:	anfitrião abre:	competidor muda para:	Prêmio na P_1
P_1	P_2	P_3	Perde
P_1	P_3	P_2	Perde
P_2	P_3	P_1	Ganha
P_3	P_2	P_1	Ganha

$$P(G) = \frac{\textit{número de casos favoráveis}}{\textit{número de casos possíveis}}$$

$$P(G) = \frac{2}{4}$$

$$P(G) = \frac{1}{2}$$

A segunda solução sugerida é a mais visual e não necessita de maior conhecimento em probabilidade. Consiste em lista todos os casos.

- Prêmio atrás da porta 1;

  $P_1 \ P_2 \ P_3$

  O competidor escolhe a porta 1:

  $\underbrace{P_1} \ P_2 \ P_3$

  O anfitrião abre a porta 2:

  $\underbrace{P_1} \quad P_3$

  O competidor muda para a porta 3:

  $P_1 \quad \underbrace{P_3}$

  E, perde! Por que o prêmio estava na porta 1.

- Prêmio atrás da porta 1;

  $P_1 \ P_2 \ P_3$

  O competidor escolhe a porta 1:

  $\underbrace{P_1} \ P_2 \ P_3$

  O anfitrião abre a porta 3:

  $\underbrace{P_1} \ P_2$

  O competidor muda para a porta 2:

  $P_1 \ \underbrace{P_2}$

E, perde! Por que o prêmio estava na porta 1.

- prêmio atrás da porta 1;

  $P_1 \;\; P_2 \;\; P_3$

  O competidor escolhe a porta 2:

  $P_1 \;\; \underbrace{P_2} \;\; P_3$

  O anfitrião abre a porta 3:

  $P_1 \;\; \underbrace{P_2}$

  O competidor muda para a porta 1:

  $\underbrace{P_1} \;\; P_2$

  E, ganha! Por que o prêmio estava na porta 1.

- prêmio atrás da porta 1;

  $P_1 \;\; P_2 \;\; P_3$

  O competidor escolhe a porta 3:

  $P_1 \; P_2 \;\; \underbrace{P_3}$

  Anfitrião e abre a porta 2:

  $P_1 \qquad P_3$

  O competidor muda para a porta 1:

  $\underbrace{P_1} \qquad P_3$

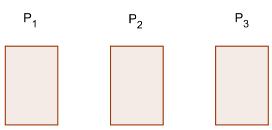
  E, ganha! Por que o prêmio estava na porta 1.

Novamente, vamos desenhar a situação, para que não haja duvida quanto a estratégia adota para resolver o problema, assim sendo, a melhor maneira de não errar é contar todos os casos, seja então:

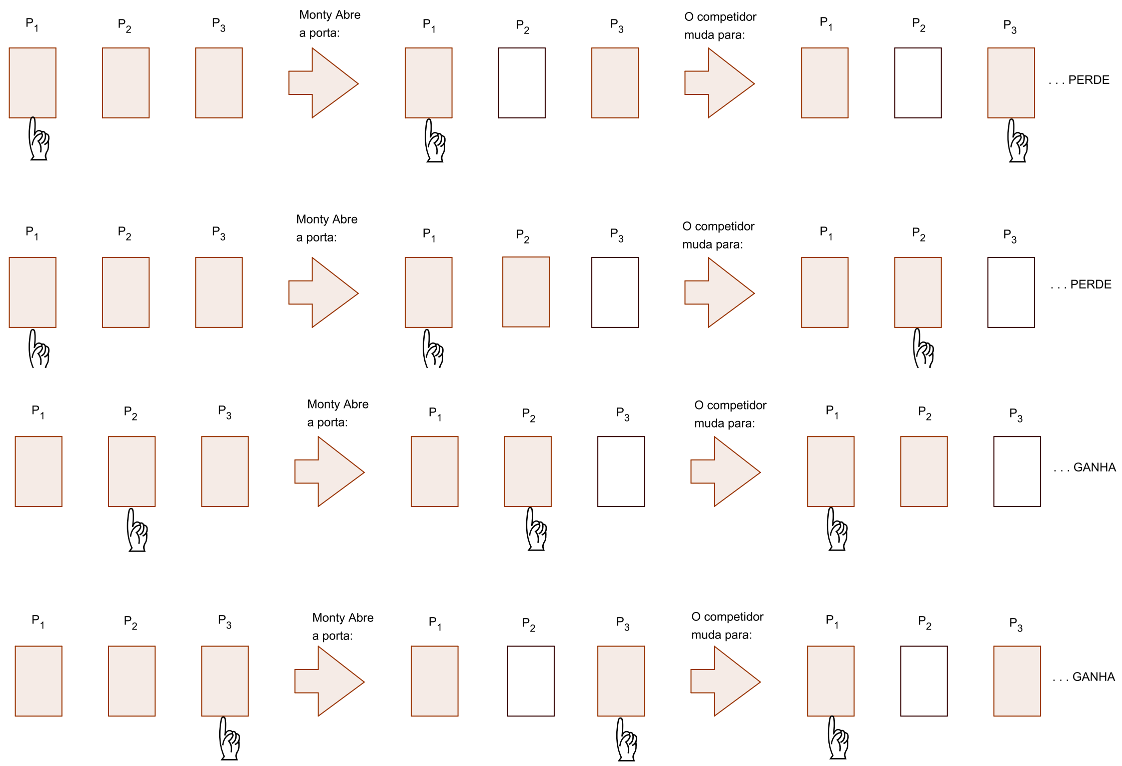
P_1 a primeira porta;

P_2 a segunda porta;

P_3 a terceira porta.



Suponhamos o prêmio atrás da porta 1



Fonte: Fonte Próprio autor

Por raciocínio equivalente, vemos que não é necessário escrever os casos onde o prêmio está atrás da porta 2 ou porta 3.

São duas estratégias que levam a porta premiada e duas que não levam, então:

$$P(G) = \frac{\textit{número de casos favoráveis}}{\textit{número de casos possíveis}}$$

$$P(G) = \frac{2}{4}$$

5.2.7 ATIVIDADE - HISTÓRIA DO PMH

Tempo previsto para essa atividade é de, no máximo, uma aula de 50 minutos. Apresente o Problema de *Monty Hall* contando a sua história e como ele confundiu grandes matemáticos, atividade que também pode ser realizada num laboratório de informática como atividade de pesquisa.

Caso queira, o professor pode usar um notebook e um projetor de multimídia para apresentar algum vídeo de filme ou de programa televisivo onde esse problema já foi debatido (fácil de encontrar no Youtube) e também simuladores de jogo (miniaplicativo), existem alguns applet na internet, como sugestão math.ucsd.edu/ crypto/Monty/monty.htm.

5.2.8 ATIVIDADE - RESOLVENDO CERTO

Tempo previsto para essa atividade é de, no máximo, uma aula de 50 minutos.

Todas maneiras de solucionar o problema apresentadas anteriormente levaram ao mesmo resultado, porém essa não é a resposta correta. Para procurar o erro depois de nos convencermos com as soluções apresentadas anteriormente estão corretas é tarefa difícil. Merece atenção essa atividade, não que esperemos que um aluno veja o erro mas entenda sua complexidade.

Afinal, onde está o erro da solução anterior?

Não é uma pergunta fácil de ser respondida. Foi exatamente assim que esse problema enganou tantas pessoas.

Quando se observa que os casos listados na tabela não tem a mesma chance de acontecer, isto é, não são equiprováveis.

Ou seja, o erro da atividade anterior é usar a probabilidade de Laplace apresentada na definição 3.3.6 quando os casos não são equiprováveis, os eventos elementares não têm a mesma chance de acontecer.

Por que os eventos elementares não têm a mesma chance de acontecer?

Por que o anfitrião nunca abre a porta que está o prêmio!

Na atividade anterior faltaram dois casos, os casos onde o anfitrião abreria a porta P_1 que está o prêmio, quando o competidor começasse escolhendo a porta P_2 ou P_3.

Como resolver certo?

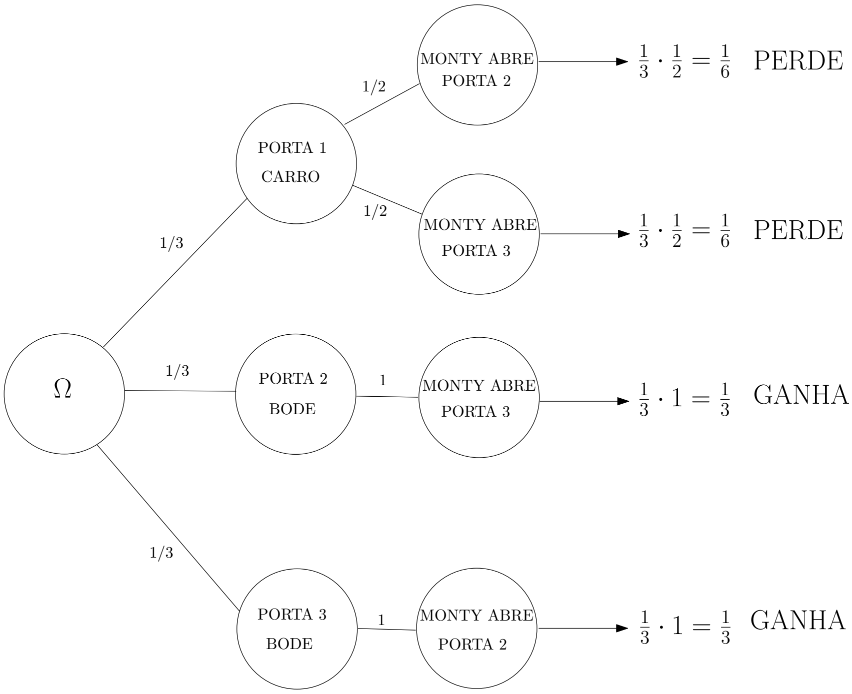
Serão apresentadas três soluções corretas:

- A primeira solução sugerida está representada na figura 14 é a que usa o diagrama de árvore, tal solução é bem didática e não necessita de maior conhecimento em probabilidade, no caso o Teorema de Bayes.

  Suponhamos o carro atrás da porta 1, temos:

  O primeiro círculo é o espaço amostral Ω onde começa o jogo; o competidor tem três portas fechadas a sua frente e atrás de apenas uma porta há o bom prêmio. Então o competidor tem 1/3 de chance de escolher a porta certa, que na figura 14 supomos atrás da porta 1 e também supondo que o competidor tenha escolhido como estratégia sempre trocar de porta. Podemos resumir de três formas:

Figura 14 – Diagrama de Árvore



Fonte: Próprio autor

Escolhendo a porta premiada, no caso a porta 1, o apresentador pode abrir duas portas, a porta 2 ou a porta 3, o que se traduz em duas opções para o competidor escolher, isto é a porta 2 ou a porta 3, tem 1/2 para cada porta. Feito dessa forma ele perde.

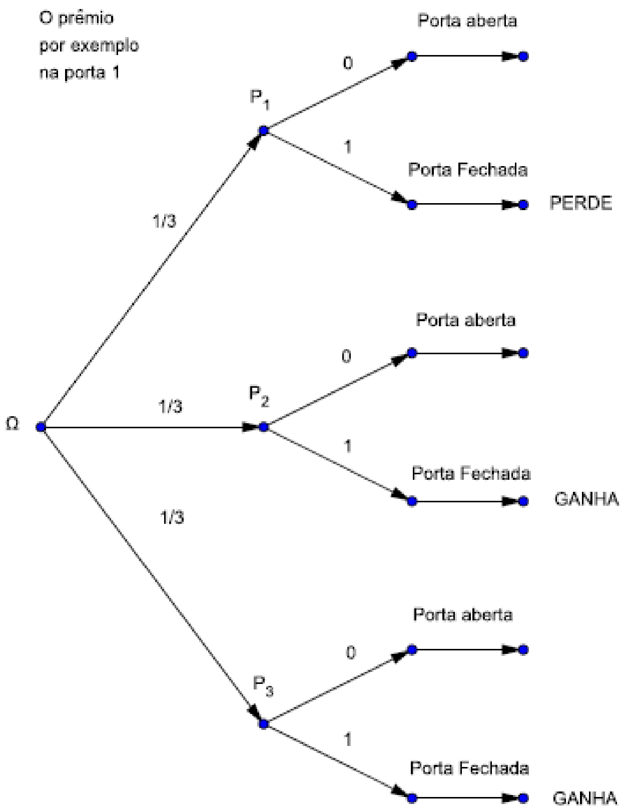
Escolhendo a porta não premiada, no caso a porta 2, apresentador só pode abrir uma porta, a porta 3, por que ele nunca abre a porta onde está o bom prêmio, o que se traduz em uma única opção para o competidor escolher, isto é, a porta 1. feito dessa forma ele ganha.

No último caso, escolhendo a porta não premiada, no caso a porta 3, apresentador só pode abrir uma porta, a porta 2, por que ele nunca abre a porta onde está o bom prêmio, o que se traduz em uma única opção para o competidor escolher, isto é, a porta 1. Feito dessa forma ele ganha.

O diagrama da figura 15 é uma forma simplificada do diagrama da figura 14 mostrado anteriormente, por assingelar sua estrutura tornando sua construção mais fácil e sem deixar de ser visual, principalmente por isso será novamente utilizado em outras atividades.

- O professor deve ter em mente que é muito difícil convencer todos os alunos de que trocar é mais vantajosos, e isso deve ser bem entendido por todos. Uma maneira interessante de mostrar ao aluno a vantagem do competidor em trocar de porta é pensar da seguinte forma:

Figura 15 – Diagrama para três portas



Fonte: Próprio autor

Você escolhe uma porta em meio a três portas fechadas. Em seguida, sem mostrar o que está por trás de qualquer uma das portas, o anfitrião diz o seguinte:

Que você pode ficar com a sua primeira escolha ou você pode trocar sua porta pelas duas outras portas fechadas?

Provavelmente a grande maioria vai preferir trocar uma porta por duas portas!

Entendeu a ideia aqui? Em vez de descartar (abrir) uma porta, o anfitrião deixa você trocar uma porta por duas portas de uma só vez. Tal raciocínio é equivalente a abrir uma porta, porque abrir uma porta é a mesma coisa que dar a porta para o competidor.

- Está solução exige como pré requisito o conhecimento do Teorema de Bayes.

  Primeiro suponhamos que o competidor escolhe a porta 1 e assim denotamos:

  P_1, P_2 e P_3 os eventos o carro está atrás da porta P_i;

  A_1, A_2 e A_3 os eventos Monty abre a porta A_i.

  Suponhamos que o competidor escolha a porta 1, e sejam as probabilidades:

$P(A_2 \mid P_1) = \frac{1}{2}$ Por que Monty pode escolher entre as portas 2 ou 3.

$P(A_2 \mid P_2) = 0$ Por que Monty nunca abre a porta aonde está o prêmio.

$P(A_2 \mid P_3) = 1$ Por que Monty nunca abre a porta aonde está o prêmio então ele só pode abrir a porta 2 (P_2).

Uma vez que P_1, P_2 e P_3 são eventos mutuamente excludentes.

$$P(A_2) = P(A_2 \mid P_1) \cdot P(P_1) + P(A_2 \mid P_2) \cdot P(P_2) + P(A_2 \mid P_3) \cdot P(P_3)$$

$$P(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad P(A_2) = \frac{1}{2}$$

Lembrando que o competidor escolheu a porta 1 e agora, Monty oferece a oportunidade de mudar para a porta 2 ou para a porta 3, que dependendo da escolha de Monty uma delas permanece fechada. Caso o competidor não mude de porta a probabilidade é:

$$\begin{aligned} P(P_1 \mid A_2) &= \frac{P(A_2 \mid P_1) \cdot P(P_1)}{P(A_2)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Entretanto, se o competidor mudar da porta 1 para outra porta, por exemplo a porta 3:

$$\begin{aligned} P(P_3 \mid A_2) &= \frac{P(A_2 \mid P_3) \cdot P(P_3)}{P(A_2)} \\ &= \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

5.2.9 ATIVIDADE - EVENTO COMPLEMENTAR

Tempo previsto para essa atividade é de, no máximo, uma aula de 50 minutos.

Julgue a afirmação de Joãozinho:

A probabilidade de ganhar mudando de porta é a mesma de perder não mudando de porta!

Vamos pensar que o competidor não troca de porta, então a probabilidade de ganhar é 1/3, logo, a probabilidade de perder é o complementar de 1/3 , ou seja, 2/3, pela probabilidade do evento complementar.

$P(G) = 1 - P(\bar{G})$

Nesse contexto, parece difícil de visualizar que a probabilidade de ganhar mudando é a mesma de perder não mudando. Vamos tentar novamente explicar:

Há uma chance de 1/3 de acertar a porta premiada, e uma chance de 2/3 de perder o prêmio, pois ganhar e perder são eventos mutuamente excludentes e complementares. Caso o competidor não mude de porta, 1/3 é a sua probabilidade de obter o prêmio. No entanto, se o competidor quer perder, ele tem a probabilidade de 2/3, em seguida, o prêmio está por trás de uma das duas portas restantes. Além disso, destas duas, o anfitrião vai abrir a porta sem prêmio, deixando a porta premiada fechada. Portanto, se você perde e depois muda, você está certo de obter o prêmio. Resumindo, a chance de ganhar mudando é de 2/3 ao passo que se deseja perder e não fizer a mudança a chance é de 2/3, não é apenas uma coincidência numérica, são eventos complementares.

Vale ressaltar que esse raciocínio é um exercício de abstração da matemática.

5.2.10 ATIVIDADE -7 PORTAS

Tempo previsto para essa atividade é de, no máximo, uma aula de 50 minutos. Essa atividade visa eliminar qualquer dúvida, que possa ainda existir, que a melhor estratégia seja mudar.

Suponho que você está jogando uma versão de sete porta do Paradoxo com somente um prêmio bom por trás de uma dessas portas. Você escolhe, de uma só vez, três portas. O apresentador, agora podemos chamá-lo de Monty, abre três das quatro portas restantes para mostrar-lhe que não há nenhum prêmio por trás delas. Monty, então, diz:

Você gostaria de ficar com as três portas que você escolheu, ou você prefere trocá-las para a única porta que eu não abri?

O que você faz?

Você ficará com suas três portas ou você fará a troca de 3 por 1, que Monty está oferecendo?

Provavelmente você trocará as suas três portas por uma porta. Por quê?

Não é difícil ver que você não está trocando 3 por 1 e sim 3 por 4. Não deixe de calcular essa probabilidade.

Vale a pena observar que essa atividade é equivalente ao problema já comentado sobre trocar 1 por 2, isto é, trocar uma porta por duas portas, revejamos esse problema:

Suponha que você esteja no programa e escolhe uma porta em meio a três portas fechadas. Em seguida, sem mostrar o que está por trás de qualquer uma das portas, *Monty Hall* diz o seguinte:

Você pode ficar com a sua primeira escolha ou você pode trocar a sua porta pelas outras duas portas?

Esses dois exemplos apresentados são ótimas atividades para diluir as dúvidas remanescentes e compreender o raciocínio e as estratégias envolvida no PMH.

5.2.11 ATIVIDADE DESAFIO - UMA VARIANTE DO PMH

Tempo previsto para essa atividade é de, pelo menos, uma aula de 50 minutos. Agora retornaremos ao problema com quatro portas (copos), porém nessa atividade se começa o jogo normalmente, isto é, o candidato escolhe uma porta em meio a quatro portas. Feita a escolha, abre-se uma única porta sem o prêmio e faz-se a primeira pergunta, o candidato quer mudar de porta? Tomada essa decisão, abre-se a outra porta sem o prêmio e faz-se a segunda pergunta, o candidato quer mudar de porta?

O que sugerimos, é uma modificação interessante para PMH:

Existem 4 portas, e três etapas:

Primeira etapa; o competidor escolhe uma porta;

Segunda etapa; o anfitrião abre uma porta sem prêmio entre as outras três e pergunta se o competidor quer mudar de porta;

Terceira etapa; Novamente o anfitrião abre uma porta sem prêmio entre as outras duas e pergunta se o competidor quer mudar de porta.

Por fim, o competidor pode abrir a porta que escolheu e recebe tudo o que está por trás da porta por ele escolhida.

Qual a melhor estratégia para ganhar, qual probabilidade aplicar?

Aparentemente essa modificação sugere que a probabilidade será a mesma, isto é, a estratégia para ganhar parece não ser diferente. Mas há de se ter cautela...

Há quatro diferentes estratégias que podemos aplicar, escolhida uma porta:

I Nunca trocar de porta;

II Não trocar na primeira oportunidade e trocar na segunda oportunidade;

III Trocar na primeira oportunidade e não trocar na segunda oportunidade;

IV Trocar sempre de porta.

Em todas as atividades anteriores trocar de porta se mostrou a melhor das estratégias, então podemos generalizar que, trocar sempre é a melhor estratégia, baseando apenas nas soluções para as versões anteriores.

É natural o aluno pensar que a melhor estratégia para o competidor é sempre mudar de porta toda vez que for permitido. Porque o aluno está familiarizado com os problemas de 3 ou mais portas, intuitivamente, mudar sempre parece ser a melhor estratégia. No entanto, não é esse o caso aqui!

Esse pensamento recursivo, oriundo das atividades anteriores, infelizmente está errado, a probabilidade de ganhar com a estratégia de sempre mudar é 62,5%.

A única forma de termos certeza de qual seria a melhor estratégia é calcularmos todas as possibilidades.

Veja na tabela 2 as três etapas nessa variante do problema e suas respectivas probabilidades em função das quatro estratégias possíveis de serem adotadas.

Etapa 1	Etapa 2	Etapa 3	Probabilidade de Ganhar
escolhe	não troca	não troca	0,250
escolhe	não troca	troca	0,750
escolhe	troca	não troca	0,325
escolhe	troca	troca	0,675

Tabela 2 – Desafio 4 Portas

Uma boa atividade para casa, seriam os grupos formados anteriormente tentarem provar que as probabilidades da tabela 2 estão corretos.

Vamos apresentar o resultado de todas as probabilidades de cada estratégia apresentada:

I O caso mais trivial para calcular a probabilidade é o caso escolhido uma porta não troca de porta. Fica com a porta escolhida até o fim, nesse caso a probabilidade em acerta é uma em quatro, ou em porcentagem 25%.

II Probabilidade do caso escolhida uma porta, não troca na primeira oportunidade e troca na segunda oportunidade.

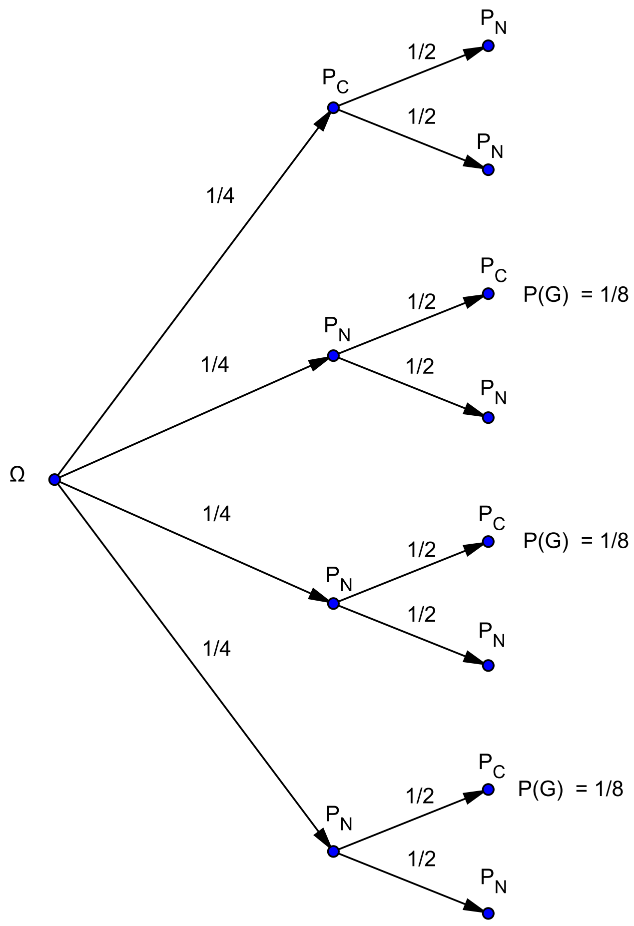
Para calcular a probabilidade desse caso recorreremos ao PMH para quatro portas, pois essa probabilidade já foi calculada lá. Não trocar de potra na primeira oportunidade e trocar na segunda oportunidade é equivalente a abrir duas portas de uma só vez. Dessa forma a probabilidade de encontrar o carro é $3/4$ ou em porcentagem 75%. Observe que probabilidades dos itens I e II são complementares.

III Probabilidade do caso escolhida uma porta, troca na primeira oportunidade e não troca na segunda oportunidade.

Para a escolha da primeira porta há quatro opções, então a probabilidade é 1/4 de chance de escolha para cada porta, como trocará na primeira oportunidade sobram duas portas para escolher, porque duas saíram do jogo, uma que foi aberta e outra que está o competidor. assim há duas portas para a escolha com probabilidade 1/2 de escolha para cada porta. Pela estratégia adotada não haverá nova escolha, dessa forma a probabilidade de encontrar o prêmio é de 1/8, veja figura 16, isso ocorrerá em apenas três ramos, somando as probabilidades temos 3/8 de encontrar o prêmio com essa estratégia.

seja G o evento ganhar o carro e $P(G)$ probabilidade final do ramo em ganhar o carro. Sendo P_C e P_N os nós respectivamente, da porta com carro e da porta sem carro.

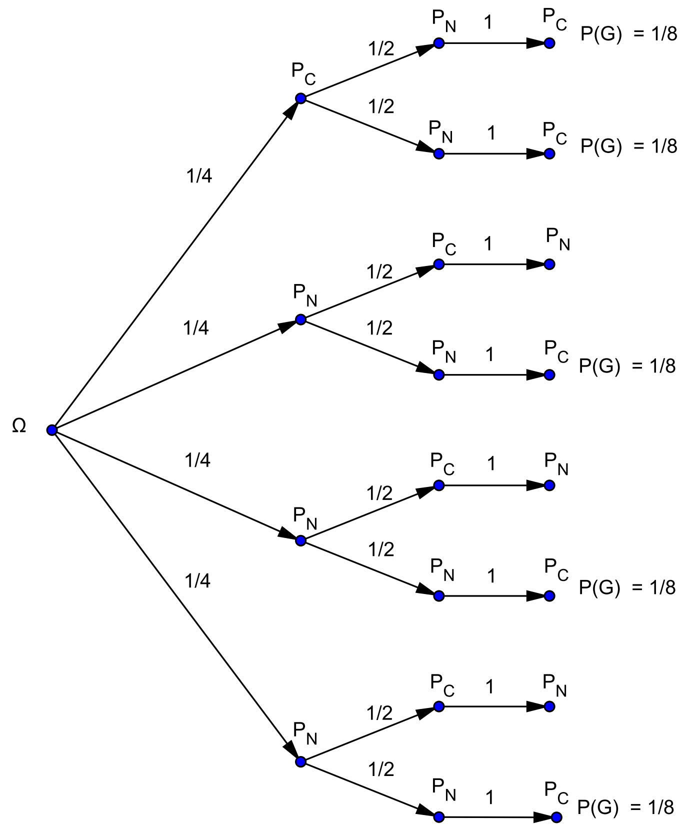
Figura 16 – estratégia troca não troca



Fonte: Próprio autor

IV O mais paradoxal é o caso onde o competidor escolhe uma porta e depois troca de porta nas duas oportunidades distintas do problema. Vamos utilizar o diagrama de árvore por ser visual e relativamente simples para quatro portas. Veja na figura 17 onde aparece o diagrama de árvore com sua probabilidade condicional em cada ramo, seja G o evento ganhar o carro e $P(G)$ probabilidade final do ramo em ganhar o carro. Sendo P_C e P_N os nós respectivamente, da porta com carro e da porta sem carro.

Figura 17 – Estratégia trocar sempre



Fonte: Próprio autor

A probabilidades de cada ramo com prêmio é: $P(G) = \frac{1}{8}$, então a probabilidade final em ganhar o carro é o seu somatório, isto é, $P(G) = \frac{5}{8}$.

6 MODELO DE FOLHA ATIVIDADES

NOME DA ESCOLA		
Nome dos Integrantes do Grupo		**número**
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

Atenção: O primeiro aluno da lista será o anfitrião do jogo, ele poderá jogar porém por último. O anfitrião será também o responsável pelo preenchimento da tabela 3 com ajuda do grupo.

NOME DOS ALUNOS	ESCOLHE A PORTA			ABRE A PORTA			MUDA OU FICA EM			GANHA	
	P_1	P_2	P_3	P_1	P_2	P_3	P_1	P_2	P_3	SIM	NÃO

Tabela 3 – MODELO PARA A ATIVIDADE DE TRÊS PORTAS

O cálculo para o preenchimento da tabela 4 é de responsabilidade de todos do grupo.

NÚMEROS DO JOGO	**TOTAL**
QUANTOS GANHARAM	
QUANTOS PERDERAM	
TOTAL DE JOGADAS *	
PERCENTUAL DE VITÓRIAS EM RELAÇÃO (*)	
PERCENTUAL DE DERROTAS EM RELAÇÃO (*)	
QUANTOS GANHARAM MUDANDO DE PORTA	
QUANTOS GANHARAM NÃO MUDANDO DE PORTA	
% VITÓRIAS MUDANDO DE PORTA EM RELAÇÃO (*)	
% VITÓRIAS NÃO MUDANDO DE PORTA EM RELAÇÃO (*)	

Tabela 4 – A Matemática do Jogo

Conclusão do grupo, caso haja, com relação as chances de ganhar:

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PROPOSTAS FUTURAS

7.1 O PMH COM N PORTAS

Observando as atividades desenvolvidas com os alunos, para os casos do PMH com:

- 3 portas a probabilidade de sucesso é $P_3(S) = \frac{2}{3}$
- 4 portas a probabilidade de sucesso é $P_4(S) = \frac{3}{4}$
- 5 portas a probabilidade de sucesso é $P_5(S) = \frac{4}{5}$

Esses resultados foram provados ora de forma teórica ora de forma experimental para até 5 portas, porém parece ser intuitivo e recorrente que a probabilidade de sucesso para o problema de *Monty Hall* com *n portas* seja:

com n portas a probabilidade de sucesso é $P_n(S) = \frac{n-1}{n}$

A própria *vos Savant* na tentativa de explicar para seus leitores que há vantagem em trocar de porta. Ilustra uma situação onde há mil portas em vez de três e 999 com cabras atrás delas e atrás de somente uma porta um carro. Depois que o jogador escolhe uma porta em meio a mil portas, *Monty Hall* (o anfitrião) abre 998 portas com cabras e pergunta ao jogador se quer trocar? Com esse exemplo parece evidente a vantagem em trocar de porta porque você passa de uma probabilidade de $\frac{1}{1000}$ de ganhar para uma probabilidade de $\frac{999}{1000}$ de ganhar.

Fica como sugestão para um trabalho futuro aborda com mais detalhes a probabilidade de sucesso para o caso de n portas.

$$P_n(S) = \frac{n-1}{n}$$

$n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$

Porém não há garantias matemáticas que essa probabilidade esteja correta. Uma vez que nossas suspeitas são baseadas em observações e indução empírica.

Segundo (CEZAR; MORGADO, 2011), é preciso ter clareza que a Indução Matemática é diferente da indução empírica das ciências naturais, em que é comum, após um certo número de experimentos, necessariamente finito, enunciar leis gerais que governam o fenômeno em estudo. Essas leis são tidas como verdades, até prova em contrário. Na matemática, não há lugar para afirmações “é verdadeiras até prova em contrário”. A Prova por Indução Matemática trata de estabelecer que determinada sentença sobre os naturais é sempre verdadeira.

7.2 GENELIZAÇÃO DA ATIVIDADE DESAFIO

Para a atividade desafio com quatro portas as probabilidades de sucesso com cada estratégia estão listadas na tabela 2, conforme já apresentado. Também vimos nessa atividade as probabilidades de cada estratégia adotada, porém a estratégia de sempre trocar de porta é a mais complexa de se calcular.

Agora se o nosso desafio fosse com 5 portas?

Das seguintes estratégias, quais tem a maior chance de sucesso no problema desafio com 5 portas:

- ♦ Fique com sua escolha inicial até o fim sem mudar;
- ♦ Fique com sua escolha inicial sem mudar e apenas mude na última etapa;
- ♦ Mude a sua escolha logo no início e fique com essa escolha até o fim sem mudar;
- ♦ Mudar em todas as etapas possíveis.

Vamos listar as probabilidades de apenas quatro estratégias, conforme apresentada anteriormente na tabela 5.

Etapa 1	Etapa 2	Etapa 3	Etapa 4	Probabilidade de Ganhar
escolhe	não troca	não troca	não troca	0,200
escolhe	não troca	não troca	troca	0,800
escolhe	troca	não troca	não troca	0,267
escolhe	troca	troca	troca	0,633

Tabela 5 – Desafio 5 Portas

Vamos apresentar o resultado de todas as probabilidades de cada estratégia apresentada:

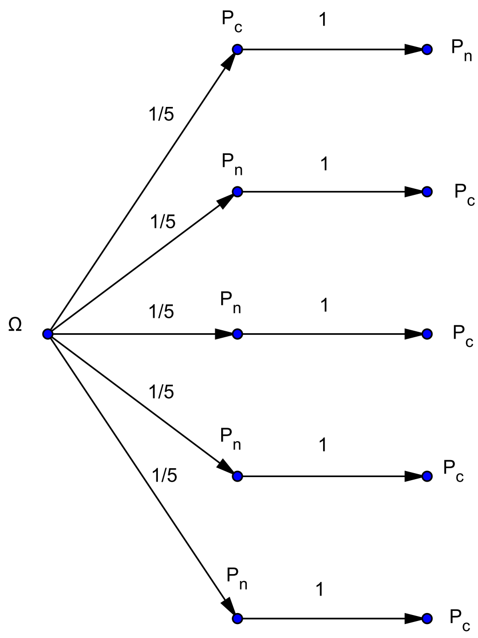
I O caso mais trivial para calcular a probabilidade é o caso escolhido uma porta não troca de porta. Fica com a porta escolhida até o fim, nesse caso a probabilidade de sucesso é uma em cinco, ou em percentagem 20%.

II Probabilidade do caso escolhida uma porta, não troca na primeira e segunda oportunidade e troca na terceira oportunidade.

Para calcular a probabilidade desse caso, novamente, recorreremos ao PMH para cinco portas portas, pois essa probabilidade já foi calculada lá. Não trocar de potra na primeira e segunda oportunidade e trocar na terceira e última oportunidade é equivalente a abrir três portas de uma só vez.

Sejam P_c e P_n respectivamente os nós porta carro e porta não carro.

Figura 18 – estratégia não troca não troca e troca



Fonte: Próprio autor

Observe diagrama de árvore figura 18 com as probabilidade de sucesso consiste em encontrar no final de cada ramo P_c que representa a porta com carro, assim contamos quatro P_c. Então temos quatro em cinco de sucesso ou 4/5 ou em percentagem 80%. Note que probabilidades dos itens I e II são complementares.

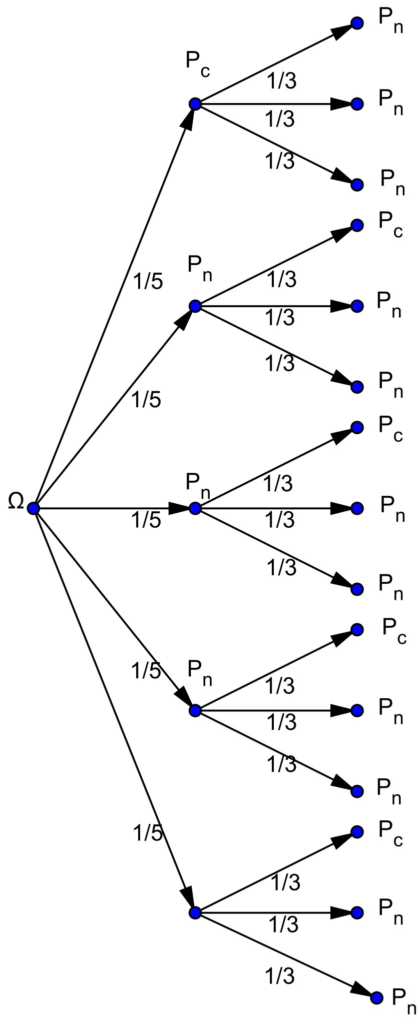
III Probabilidade do caso escolhida uma porta, troca na primeira oportunidade e não troca na segunda e terceira oportunidade.

Para a escolha da primeira porta há cinco opções, então a probabilidade é 1/5 de chance de escolha para cada porta, como trocará na primeira oportunidade sobram três portas para escolher, porque duas saíram do jogo, uma que foi aberta e outra que está o competidor. assim há três portas para a escolha com probabilidade 1/3 de escolha para cada porta. Pela estratégia adotada não haverá nova escolha, dessa forma a probabilidade de encontrar o prêmio é de 1/15, veja figura 19, isso ocorrerá em apenas quatro ramos, somando as probabilidades temos 4/15 de encontrar o prêmio com essa estratégia.

Sejam P_c e P_n respectivamente os nós porta carro e porta não carro.

IV O mais complexo é o caso onde o competidor escolhe uma porta e depois troca de porta nas três oportunidades distintas do problema. Vamos utilizar o diagrama de árvore, porém só mostraremos dois ramos, os ramos oriundos dos nós P_c e P_n que são respectivamente os nós porta carro e porta não carro, o nó porta não carro ocorre em quatro ramos, pois só há um prêmio. Veja na figura 20 onde aparece o

Figura 19 – estratégia troca não troca não troca



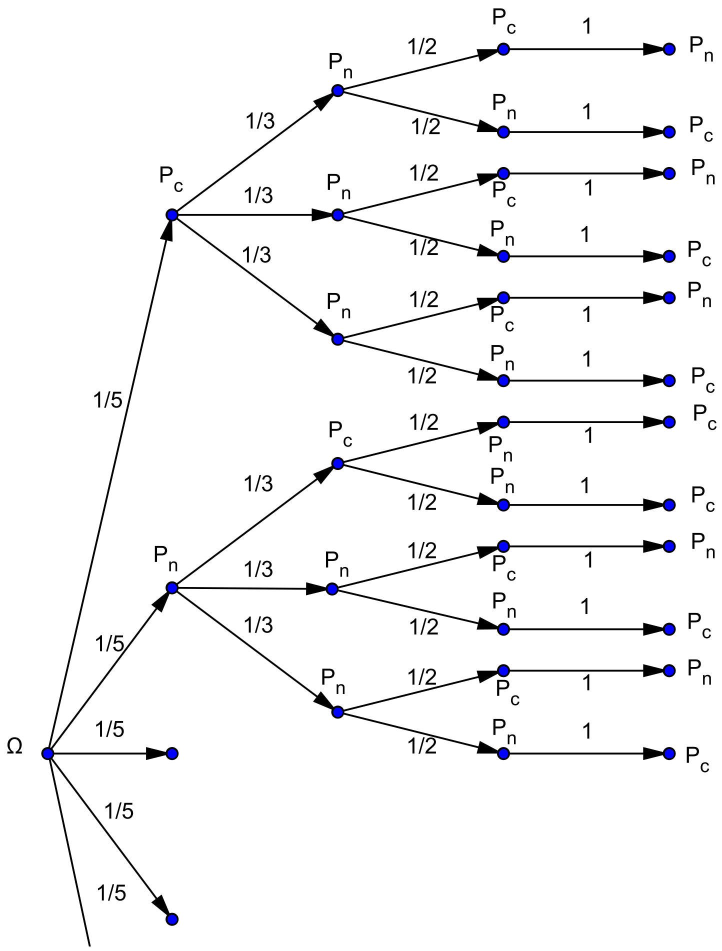
Fonte: Próprio autor

diagrama de árvore com sua probabilidade condicional em cada ramo, dos nós P_c e P_n.

A probabilidades de cada ramo com prêmio oriundo do nó P_c de ganhar é $\frac{3}{30}$ e a probabilidades de cada ramo com prêmio oriundo do nó P_n de ganhar é $\frac{4}{30}$, então a probabilidade final em ganhar o carro é o somatório de $1 \cdot P_c + 4 \cdot P_n$, isto é, a probabilidade de sucesso nessa estratégia é $\frac{19}{30}$.

Observe que os itens III e IV não são eventos complementares, logo a soma de suas probabilidades não é 1, por exemplo, o complemento do evento IV não foi listado, seria o caso trocar, trocar e não trocar.

Figura 20 – Estratégia trocar sempre



Fonte: Próprio autor

Fica assim, como sugestão para um outro trabalho modelar e analisar uma lei de formação para a probabilidade de sucesso na atividade desafio para um o número maior de portas.

REFERÊNCIAS

CEZAR, L. L. P.; MORGADO, A. C. *Matemática Discreta*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011. 323 p.

GARDNER, M. Problems involving questions of probability and ambiguity. *Scientific American*, v. 201, p. 174–182, Apr 1959. Disponível em: <http://www.scientificamerican.com/magazine/sa/1959/04-01/>. Acesso em: 11 jun. 2014.

GARDNER, M. The second scientific american book of mathematical puzzles and diversions. *Scientific American*, v. 208, p. 180–182, Oct 1959. Disponível em: <http://www.scientificamerican.com/article/mathematical-games-1959-10/>. Acesso em: 11 jun. 2014.

LOPES, C. A. E. *A Probabilidade e a Estatística no Ensino Fundamental: Uma Análise Curricular*. Campinas: Unicamp, 1998. 11 p.

MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC/SEF, 1999. 257 p.

MORGADO, A. C. *Analise Combinatória e Probabilidade*. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 371 p.

MOSTELLER, F. *Fifty Challenging Problems in Probability With Solutions*. New York: Dover Publications, 1965. 88 p.

PAIS, L. C. *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa*. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. 125 p.

SAVANT, M. vos. *The Power of Logical Thinking Easy Lessons in the Art of Reasoning...and Hard Facts About Its Absence in Our Lives*. New York: Griffin Edtion, 1996. 228 p.

SELVIN, S. Letters to the editor. *The American Statistician*, Taylor and Francis, v. 29, p. 67–71, Fev 1975. Disponível em: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00031305.1975.10479121#.U8WjApRdWQg>. Acesso em: 15 jun. 2014.

SELVIN, S. Letters to the editor. *The American Statistician*, v. 29, p. 131–134, Aug 1975. Disponível em: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00031305.1975.10477398#.U8We7ZRdWQg>. Acesso em: 15 jun. 2014.

SMITH, J. M. *Mathematical Ideas in Biology*. Londres: Cambridge University Press, 1968.

TIERNEY, J. Behind monty hall's doors: Puzzle, debate and answer? *The New York Times*, p. 1, July21 1991. Disponível em: <http://www.nytimes.com/1991/07/21/us/behind-monty-hall-s-doors-puzzle-debate-and-answer.html>. Acesso em: 12 jun. 2014.