Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

**Thamyres Ribeiro Medeiros**

# Esboço de gráficos: rigor na abordagem de funções quadráticas

Juiz de Fora

2018

**Thamyres Ribeiro Medeiros**

**Esboço de gráficos: rigor na abordagem de funções quadráticas**

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: José Barbosa Gomes

Juiz de Fora

2018

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Medeiros, Thamyres Ribeiro.
Esboço de gráficos: rigor na abordagem de funções quadráticas / Thamyres Ribeiro Medeiros. – 2018.
67 f. : il.

Orientador: José Barbosa Gomes
Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2018.

1. Gráficos. 2. Parábola. 3. Função Quadrática. I. Gomes, José Barbosa, orient. II. Título.

**Thamyres Ribeiro Medeiros**

**Esboço de gráficos: rigor na abordagem de funções quadráticas**

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 03 de abril de 2018

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Barbosa Gomes - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Luís Fernando Crocco Afonso
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Alexandre Miranda Alves
Universidade Federal de Viçosa

## AGRADECIMENTOS

O caminho para a realização de uma grande conquista sempre conta com a ajuda, o auxílio e o apoio de várias pessoas.

Neste momento preciso agradecer primeiramente a Deus por sempre me conceder sabedoria e força em todos os momentos, por me conduzir com segurança em todas as idas e vindas a Juiz de Fora, e por colocar em minha vida pessoas tão importantes e especiais em minha caminhada.

Ao meu orientador, Professor Doutor José Barbosa Gomes, muito obrigada pela atenção, pela compreensão e pelos ensinamentos.

Aos meus familiares que sempre me apoiam em todos meus planos, muito obrigada pelo carinho, principalmente minha mãe Mônica e seu esposo Ivanildo, que acordaram durante estes dois anos toda sexta-feira as 4:30h da manhã para arrumar meu café da manhã, me levar até a rodoviária e me desejar uma boa aula.

Obrigada a minha irmã Mariana, pelo incentivo e companhia de sempre.

Ao meu noivo Wesley, quero agradecer pelo companheirismo, pela paciência e por sempre me incentivar a buscar a realização dos meus sonhos.

Pai, Tárik, Tia Suzane, Tia Nilva, Cidinha, Monize, Márcia, Yara, Janaína, Madrinha Beth e Padrinho Arlindo, muito obrigada pelas orações e pela torcida de sempre.

Aos meus queridos colegas do mestrado, em especial, Claúdio, Marcella, Eduardo e Isabella, por todos momentos de estudos, pelas conversas, pela amizade e conselhos trocados durante esses dois anos.

Gostaria de agradecer a todos do Colégio Nossa Senhora do Carmo e da Escola Estadual Raul de Leoni. Muito obrigada aos alunos por participarem da aula da proposta, por serem os motivadores do meu trabalho, em especial a turma da 1ª Série A de 2017, do Colégio Nossa Senhora do Carmo. Aos professores, meus colegas de trabalho, obrigada por sempre torcerem pela minha conquista e estarem dispostos a ajudar! À direção e coordenação das escolas, obrigada por se empenharem para atender minhas necessidades de horários de aulas e por apoiarem minha especialização.

Quero agradecer a minha amiga Juliana, professora de química, mãe do João Gabriel, que se fez presente em todos os momentos me ouvindo, aconselhando e comemorando cada etapa concluída.

Aos professores de matemática que contribuíram com o trabalho, obrigada pela atenção e disponibilidade em responder aos questionários.

Em especial gostaria de agradecer ao Professor Natan, do Colégio Nossa Senhora do Carmo, que com todo carinho e atenciosidade me ajudou na confecção do material prático utilizado na proposta. Também agradeço ao Deivid, meu colega de graduação e marceneiro, pelo auxílio na confecção do material prático.

À minha querida amiga de infância, Ana Carolina, que com todo carinho me hospedou em sua casa, em Juiz de Fora, durante a disciplina de verão do Mestrado em janeiro de 2017.

Aos professores das disciplinas do PROFMAT: Nelson, Crocco, Sérgio, Sandro e Olímpio, agradeço pelas experiências e conhecimentos partilhados.

Quero também agradecer a CAPES pela bolsa concedida durante todo o Mestrado.

"A vida é uma viagem a três estações: ação, experiência e recordação."

Júlio Camargo

**RESUMO**

O presente trabalho tem por objetivo desenvolver uma proposta de ensino em matemática para alunos do ensino médio. O conteúdo abordado na proposta são gráficos de funções, em especial, o gráfico da função quadrática: a parábola. A necessidade de um maior rigor matemático na explicação da justificativa do gráfico da função quadrática ser uma parábola fez com que desenvolvêssemos uma proposta de roteiro de aula com explicações e definições matemáticas mais rigorosas em relação as que são apresentadas atualmente nos livros didáticos. Utilizamos de cálculos algébricos para as demonstrações e também fizemos uso de um material prático, um quadro branco onde nele temos acoplado um esquadro, e com uso de pinos, barbante e pincel para quadro branco conseguimos traçar a parábola levando em conta sua propriedade. O material prático auxilia na explicação bem como exemplifica visualmente o que queremos mostrar com os cálculos algébricos. A proposta foi apresentada aos alunos de duas escolas, uma pública estadual e outra privada, que leciono no município de Viçosa - MG e também foi apresentada a seis professores de matemática, colegas de trabalho, sendo cinco destes professores de escolas públicas estaduais, municipais e privadas do município de Viçosa - MG e um professor de escola pública estadual do município de Teixeiras - MG.

Palavras-chave: Gráficos. Parábola. Função Quadrática.

## ABSTRACT

The present work aims to develop a teaching proposal in mathematics for high school students. The content addressed in the proposal are graphs of functions, especially the graph of the quadratic function: the parabola. The need for greater mathematical rigor in explaining the justification of the quadratic function graph to be a parable has led us to develop a lesson plan proposal with more rigorous mathematical explanations and definitions than are currently presented in textbooks. We used algebraic calculations for the demonstrations and also made use of a practical material, a white board where we have attached a square, and with the use of pins, string and whiteboard brush we can draw the parable taking into account its property. The practical material helps in the explanation as well as visually exemplifies what we want to show with the algebraic calculations. The proposal was presented to the students of two schools, one state public and the other private, which I teach in the city of Viçosa - MG and was also presented to six mathematics teachers, co-workers, five of these teachers from state, municipal and state public schools. private schools of the municipality of Viçosa - MG and a teacher of a state public school in the municipality of Teixeiras - MG.



Key-words: Graphs. Parabola. Quadratic Function.

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|---|---|
| PNLD | Programa Nacional do Livro e do Material Didático |
| CBC | Currículo Básico Comum |
| MDF | Medium Density Fiberboard, que significa placa de fibra de média densidade. |
| PROFMAT | Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional |
| EJA | Educação de Jovens e Adultos |
| MG | Minas Gerais |
| GeoGebra | (Aglutinação das palavras Geometria e Álgebra) é um aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra. |

## LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|---|---|
| $\forall$ | Para todo |
| $\in$ | Pertence |
| $>$ | Maior |
| $<$ | Menor |
| $\Rightarrow$ | Implica |
| $\Leftrightarrow$ | Se e somente se |
| $\mathbb{R}$ | Conjunto dos números reais |

## SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

Iniciamos o presente trabalho visando desenvolver uma proposta de ensino que abordasse com um maior rigor matemático os gráficos das funções. Para o desenvolvimento do trabalho utilizamos como referências os livros da coleção PROFMAT, MA 36 - Recursos Computacionais no Ensino de Matemática ([1]), MA 11 - Números e Funções Reais ([2]) e MA 22 - Fundamentos de Cálculo ([3]), alguns conteúdos trabalhados nas aulas do PROFMAT e minha experiência como professora da rede pública estadual e privada no município de Viçosa - MG.

De muita importância foram as opiniões dos professores de matemática, colegas de trabalho das escolas que leciono identificarei como Colégio A e Colégio B, sendo do Colégio B, Professora 1 e Professora 2 e do Colégio A, Professora 3, Professora 4 e Professor 5. Nas conversas informais, foram destacadas a necessidade de usar em suas aulas recursos e uma abordagem do conceito de gráficos de funções diferentes das que os livros didáticos que eles utilizavam apresentavam.

Para iniciarmos o estudo da elaboração da proposta, analisamos livros didáticos utilizados atualmente nas escolas, e disponíveis para escolha no ano de 2017, para uso a partir de 2018. Muitas críticas surgiram a partir dessas análises que foram feitas nos capítulos de introdução às funções, de função afim e de função quadrática, levando em conta uma maior abordagem ao estudo dos gráficos das funções e como era apresentado pelos livros.

Muitas vezes os gráficos eram apresentados nos livros apenas com ideias intuitivas sem nenhum ou pouco rigor matemático em relação às propriedades da reta ou da parábola.

Mediante estudos das funções do 1º e 2º graus, no decorrer da pesquisa notamos a necessidade de justificar para o aluno da 1ª série do Ensino Médio, o gráfico da função quadrática de uma abordagem com mais rigor matemático, levando em conta a propriedade da parábola e o significado conceitual do gráfico. Apenas a explicação algébrica e demonstrativa não seria suficiente, então utilizamos de um material prático, um quadro branco com um esquadro acoplado, que auxilia a explicação do professor e orienta e ilustra para o aluno geometricamente o que se deseja apresentar.

Quando é utilizado com os alunos nas aulas materiais práticos, o interesse e o envolvimento deles na aula, na maioria das vezes, ajuda fortemente a desenvolver o significado dos conceitos e os resultados ficam mais evidentes para eles. Foi possível notar esta satisfação nos questionários respondidos pelos alunos ao término das aulas da proposta.

As aulas das proposta foram desenvolvidas em 3 turmas, dos colégios que lecionei em 2017, sendo elas: Turma A do Colégio A, Turma B do Colégio A, e Turma 1 do Colégio

B. O Colégio A é uma escola privada e o Colégio B é uma escola pública estadual. Ambas escolas situadas no município de Viçosa - MG. As turmas do Colégio A são turmas da 1ª Série do Ensino Médio e a turma do Colégio B é da 2ª Série do Ensino Médio.

Os alunos participantes das aulas da propostas já tinham conhecimento do conteúdo de função quadrática, já haviam estudado anteriormente à aula da proposta. Já sabiam que o gráfico da função quadrática é uma parábola. Não era do conhecimento deles, nenhuma demonstração para justificar que o gráfico da função quadrática é uma parábola.

Aos professores de matemática, Professora 1, Professora 2, Professora 3, Professora 4, Professor 5, colegas de trabalho das escolas que leciono, e ainda Professor 6, que leciona numa escola pública estadual no município de Teixeiras - MG, foi apresentada a proposta e foi pedido a eles o preenchimento de um questionário para avaliação e viabilidade do uso do material e do roteiro da aula. A maioria dos professores consideraram positiva a proposta porém reconhecem que o rigor matemático para a aula exige dos alunos alguns conhecimentos prévios que muitas vezes os alunos não possuem, outras vezes não possuem concentração suficiente para manter a atenção numa aula com demonstrações e cálculos algébricos. Mediante a realidade de cada escola e de cada turma, os professores consideraram possível a aplicação da proposta mediante a disponibilidade nas escolas dos materiais necessários.

A busca por um ensino de qualidade e da matemática numa abordagem mais significativa sem a perda do rigor dos seus conceitos deve ser intimamente ligada à participação e motivação dos professores, que procuram despertar em seus alunos o interesse e a curiosidade apesar de certas abstrações em alguns conceitos matemáticos.

Nos capítulos seguintes temos a abordagem das críticas com base na análise dos livros didáticos. Em seguida, a elaboração da Proposta, que foi feita passo a passo, a começar pelo conteúdo matemático da função afim e quadrática, depois a elaboração do plano de aula (APÊNDICE A) e a construção do material (APÊNDICE B). Após, temos a apuração dos resultados obtidos mediante observações na condução das aulas da proposta, também análise dos questionários aplicados aos alunos e aos professores.

# 2 CRÍTICAS

A cada três anos na rede estadual de ensino, realiza-se a escolha do livro didático a ser utilizado no ensino médio. O ano de 2017 foi um ano de escolha. Recebemos para análise no Colégio B, colégio da rede pública estadual, sete das oito obras aprovadas no PNLD 2018 [4]. Para auxiliar a pesquisa em relação ao estudo e ensino dos gráficos das funções, a análise dos livros didáticos disponibilizados no PNLD [5], foi de fundamental importância.

Fizemos a análise dos livros didáticos [6], [7], [8], [9], [10], [11] e [12], juntamente com duas professoras (Professora 1 e Professora 2) que trabalham comigo na rede estadual de BalestriQuadranteDanteIezziLeonardoPaivaSouzaensino.

Inicialmente pela praticidade, a opinião é comum em escolher um livro que contenha exercícios de fixação e complementares.

Em matemática, a prática em exercícios é considerada muito importante.

Foram eliminados os livros que não possuíam ordem cronológica dos conteúdos. Existem livros, em que a função modular está antes da função de 1º Grau.

A professora 2 ressaltou que os livros deveriam vir de acordo com o CBC (Currículo Básico Comum), porque muitas vezes precisamos completar conteúdos, ou até mesmo adicionar capítulos. Também criticou o fato de não ser feito um levantamento, uma pesquisa entre os professores da rede pública estadual, dos livros didáticos que preferem, antes da disponibilização dos livros para apreciação e escolha.

Foram enviados às escolas públicas estaduais, de acordo com o PNLD [5], oito livros didáticos de matemática para o ensino médio para apreciação. Analisamos levando em conta para a escolha a apresentação visual dos livros, quantidade de exercícios e linguagem da explicação dos conteúdos.

A professora 1 afirma a dificuldade dos alunos na interpretação de enunciados de exercícios e critica o livro atualmente utilizado pela linguagem muito elaborada na explicação dos conteúdos. Diz que o livro é muito rico em relação a conceitos, porém não muito prático para os alunos.

A professora 2 afirma que em suas aulas enfatiza a ordem dos conteúdos e suas relações. Dessa forma, ela busca escolher um livro que facilite seus planos de aulas.

Agora, especificando a análise dos livros didáticos em relação ao estudo dos gráficos das funções, analisei também o livro didático utilizado no Colégio A [13]. Pude notar, mediante a análise dos oito livros didáticos sobre a apresentação do gráfico da função polinomial do 1º grau, que há uma notável variedade de abordagens relativas a esse conceito e interpretações para as funções, para os estudos das funções.

Apenas um dos livros apresentou, e ainda de maneira incompleta, a justificativa do preenchimento dos pontos da reta pertencerem ao gráfico da função.

Nenhum dos livros utilizou o rigor da igualdade evidenciando que o conjunto dos pontos da reta $r$ está contido no conjunto dos pontos do gráfico da função $f$ e o conjunto dos pontos do gráfico da função $f$ está contido no conjunto dos pontos da reta $r$.

A principal abordagem nos livros para apresentação e justificativa do gráfico de uma função polinomial do 1º grau ser uma reta é feita por meio de exemplos. Nestes exemplos, substituem apenas valores inteiros a $x$ encontrando o valor de $y$ associado pela lei de formação, dentre eles o zero, uns valores positivos e uns valores negativos, não há a exemplificação com valores racionais ou irracionais, onde encontram os pares ordenados e em sua representação no plano cartesiano os remetem à ideia do gráfico da função do 1º grau ser uma reta. Para um primeiro contato do aluno, essa ideia intuitiva vinda de um exemplo ou de exemplos ilustra a representação gráfica, mas não houve um rigor matemático para a demonstração completa.

Dois dos livros analisados comentam a existência da demonstração do gráfico de uma função polinomial do 1º grau ser uma reta.

Quatro dos livros demonstram, sendo que a maioria utilizando a semelhança de triângulos, para concluir que três pontos quaisquer do gráfico da função pertencem a uma mesma reta.

Um dos livros traz a demonstração por absurdo e um outro utiliza o Teorema de Pitágoras.

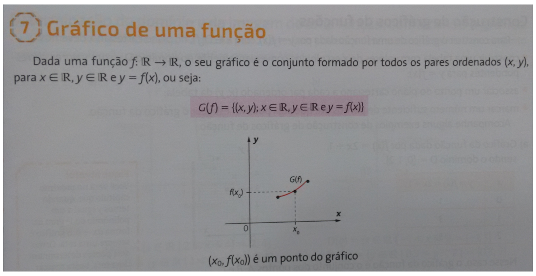
A maioria dos livros traz um capítulo anterior ao capítulo de função polinomial do 1º grau destacando conceitos gerais de funções tais como: domínio, contra-domínio, imagem, crescimento e decrescimento de funções, dentre outros. Neles, os detalhes e algumas demonstrações vêm nos capítulos seguintes mediante avanço dos estudos de cada uma das funções.

Na análise dos livros foi interessante a observação e inferência que um dos livros fez em relação à geometria plana, explorando a existência de uma reta e sua determinação por dois de seus pontos, detalhe favorável no esboço do gráfico.

Os textos dos livros referentes à explicação e até à conclusão do gráfico da função polinomial do 1º grau ser uma reta, algumas vezes podem gerar interpretações confusas aos alunos, tais como: reta oblíqua, gráfico com desenho curvo, gráfico com dois segmentos de reta não colineares sem que tenha feito inferência com relação a suposições, passagens incompletas sem substituições algébricas de sentenças.

Abaixo, seguem algumas imagens representativas das incoerências acima citadas:

Figura 1 – Incoerência 1



## 7 Gráfico de uma função

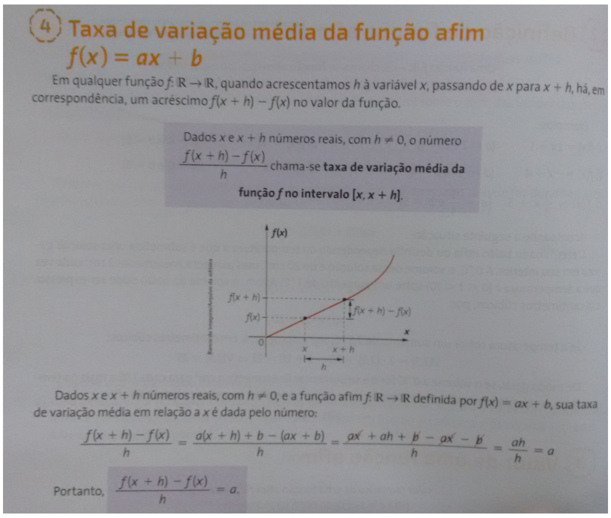
Dada uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o seu gráfico é o conjunto formado por todos os pares ordenados $(x, y)$, para $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $y = f(x)$, ou seja:

$$G(f) = \{(x, y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ e } y = f(x)\}$$



Fonte: Livro para análise do professor ([8])

Figura 2 – Incoerência 2



## 4 Taxa de variação média da função afim $f(x) = ax + b$

Em qualquer função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, quando acrescentamos $h$ à variável $x$, passando de $x$ para $x + h$, há, em correspondência, um acréscimo $f(x + h) - f(x)$ no valor da função.

Dados $x$ e $x + h$ números reais, com $h \neq 0$, o número $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ chama-se **taxa de variação média da função $f$ no intervalo $[x, x + h]$**.



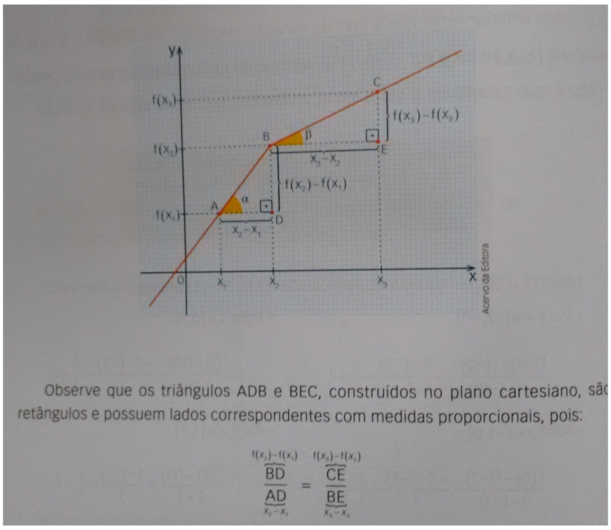
Dados $x$ e $x + h$ números reais, com $h \neq 0$, e a função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, sua taxa de variação média em relação a $x$ é dada pelo número:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a(x + h) + b - (ax + b)}{h} = \frac{\cancel{ax} + ah + \cancel{b} - \cancel{ax} - \cancel{b}}{h} = \frac{ah}{h} = a$$

Portanto, $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = a$.

Fonte: Livro para análise do professor ([8])

Figura 3 – Incoerência 3





Observe que os triângulos ADB e BEC, construídos no plano cartesiano, são retângulos e possuem lados correspondentes com medidas proporcionais, pois:

$$\frac{\overbrace{\overline{BD}}^{f(x_2)-f(x_1)}}{\underbrace{\overline{AD}}_{x_2 - x_1}} = \frac{\overbrace{\overline{CE}}^{f(x_3)-f(x_2)}}{\underbrace{\overline{BE}}_{x_3 - x_2}}$$

Fonte: Livro para análise do professor([6])

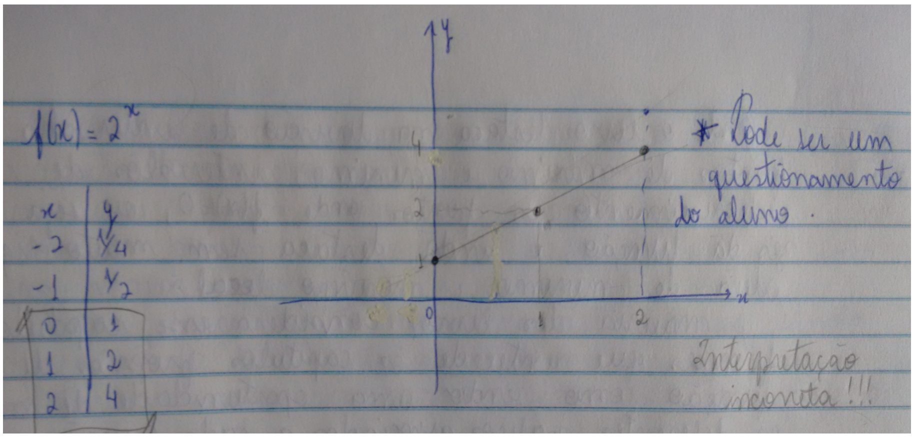
Um outro fato percebido na análise dos livros se refere à função constante. Poucos livros dentre os analisados abordam o fato do gráfico também ser uma reta e como caso particular da função polinomial do 1º grau.

A maioria dos livros didáticos analisados no capítulo destinado a funções de um modo geral tratam dos gráficos de forma intuitiva, com definição restrita a pontos do plano cartesiano de coordenadas $(x, f(x))$.

Visto que é o primeiro contato dos alunos com a representação gráfica de uma função, os livros atribuem sem formalidade e/ou rigor matemático: a reta, a parábola, ou as curvas em exemplos de gráficos de funções. A forma de construção desses gráficos é por substituição de valores de $x$, elemento do domínio, que muitas vezes só utilizam valores inteiros, positivos e negativos e causam apenas uma 'ideia intuitiva' do gráfico aos alunos sem nenhuma justificativa ou demonstração.

Dependendo da falta de rigor na escala do plano cartesiano, essa 'ideia intuitiva' pode levar o aluno a uma compreensão errada do esboço do gráfico, como, por exemplo, ao esboçar o gráfico de uma função exponencial $f(x) = 2^x$ o aluno substitui valores para $x = 0, x = 1$ e $x = 2$, e poderia atribuir uma reta ao gráfico. Uma interpretação errada!

Figura 4 – Incoerência 4




Fonte: Anotações pessoais

Uma proposta, seria uma justificativa adequada com relação aos conhecimentos prévios dos alunos, para ser mostrado a eles a demonstração da representação geometrica dos gráficos das funções, um método que não fique apenas em substituição de pontos, mas que também não aborde o cálculo em dimensões que os alunos não tenham conhecimentos prévios para compreensão.

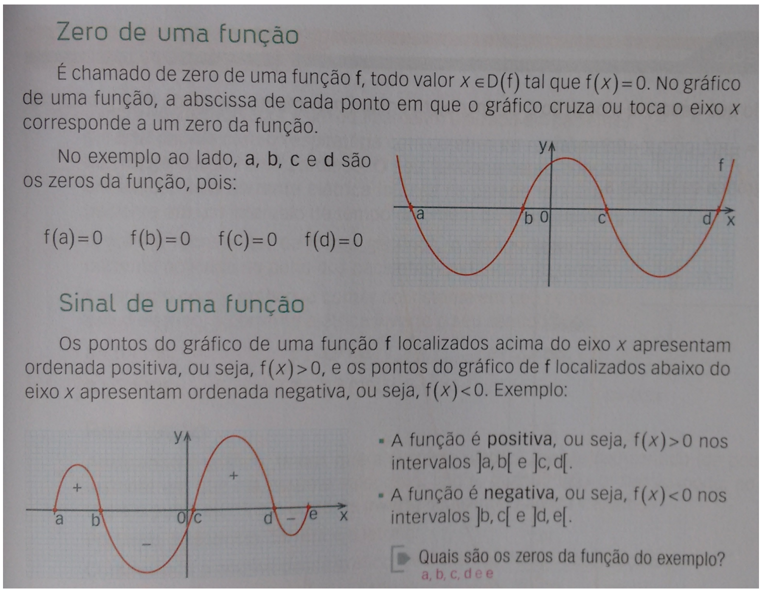
Às vezes os alunos aceitam a justificativa, mas como em matemática eles atribuem uma ciência exata, só na intuição ou observação o aluno não fica realmente convencido.

Um dos livros analisados na seção plano cartesiano, conceitua relações e explica que toda função é uma relação, mas existem relações que não são funções e o livro não comenta este fato.

Um outro livro sem mencionar sobre relações, utiliza de gráficos de relações para explicar por análise visual do gráfico se é ou não é função.

Interessante foi notar em um dos livros analisados o esboço de um gráfico como da figura abaixo, onde o livro destaca na divisão de intervalos os pontos de máximo e mínimo, intervalos de crescimento e decrescimento, os pontos onde a função se anula, ou seja, os zeros da função e ainda, destaca com rigor a ideia de máximo e mínimo local.

Figura 5 – Exemplo



Zero de uma função

É chamado de zero de uma função f, todo valor $x \in D(f)$ tal que $f(x)=0$. No gráfico de uma função, a abscissa de cada ponto em que o gráfico cruza ou toca o eixo $x$ corresponde a um zero da função.

No exemplo ao lado, **a**, **b**, **c** e **d** são os zeros da função, pois:

$f(a)=0 \quad f(b)=0 \quad f(c)=0 \quad f(d)=0$

Sinal de uma função

Os pontos do gráfico de uma função **f** localizados acima do eixo $x$ apresentam ordenada positiva, ou seja, $f(x)>0$, e os pontos do gráfico de f localizados abaixo do eixo $x$ apresentam ordenada negativa, ou seja, $f(x)<0$. Exemplo:

- A função é **positiva**, ou seja, $f(x)>0$ nos intervalos $]a,b[$ e $]c,d[$.
- A função é **negativa**, ou seja, $f(x)<0$ nos intervalos $]b,c[$ e $]d,e[$.

Quais são os zeros da função do exemplo?
a, b, c, d e e



Fonte: Livro para análise do professor([6])

A maioria dos livros analisados considera esse capítulo de funções que antecede os capítulos próprios de cada função como sendo uma oportunidade de mostrar os diferentes gráficos associados a cada função e dentro do possível tentam explorar as interpretações gráficas.

Apenas um livro, dentre os analisados, exemplifica o gráfico de quociente de polinômios, gerando uma hipérbole. Porém faz a construção no 'passo a passo' do gráfico intuitivamente pela substituição de pontos.

Como justificar a curva da hipérbole para um aluno da 1ª Série do Ensino Médio que ainda não tem conhecimento de geometria analítica?

Os professores de matemática que lecionam nos mesmos colégios que eu, em conversas informais, relatam que consideram que a apresentação dos gráficos de função ficam subjetivos aos alunos, mas ressaltam a falta de conhecimentos prévios dos alunos para uma aula com um maior rigor matemático. Consideram que para justificar ou demonstrar o gráfico das funções vão precisar aprofundar em conceitos de cálculo que os alunos não conhecem.

Pensando nesta questão desenvolvemos um estudo e uma proposta para justificar e demonstrar o gráfico da função quadrática ser uma parábola. O intuito é elaborar uma explicação diferenciada, com um rigor matemático apropriado para os alunos e que auxilie os professores durante a explicação, além de apresentar resultado quanto ao entendimento por parte dos alunos, do fato do gráfico de uma função quadrática ser uma parábola.

# 3 GRÁFICOS DA FUNÇÃO AFIM E DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Com base nos livros e nos conteúdos estudados nas disciplinas do PROFMAT, MA 36 - Recursos Computacionais no Ensino de Matemática ([1]), MA 11 - Números e Funções Reais ([2]) e MA 22 - Fundamentos de Cálculo ([3]), fizemos o desenvolvimento da proposta.

Definindo gráfico de uma função: Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o gráfico de $f$ é o subconjunto $G_f$ do produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, definido por

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; y = f(x)\}.$$

O livro de MA 36 - Recursos Computacionais, em seu capítulo de Ambientes Gráficos, nos leva a refletir em sua introdução sobre a concepção de gráfico de função apenas pela lei de formação. Este modelo é utilizado na maioria dos livros didáticos, onde relaciona o gráfico das funções apenas aos pontos $(x, y)$ que são substituídos na lei de formação, através de exemplos onde consideram um roteiro para representação das funções através dos gráficos.

O modelo que o livro diz se refere à sequência Fórmula $\to$ Tabela $\to$ Gráfico. Onde fórmula significa a lei de formação da função, tabela é uma tabela de valores atribuídos a $x$ no domínio gerando as imagens $y$, onde teremos os pares ordenados do plano cartesiano para determinarmos então o gráfico da função.

O método descrito acima compreende um modelo quantitativo, utiliza de finitos valores e muitas vezes só inteiros para o domínio. Há pouca reflexão matemática nessa explicação. O livro sugere ser importante articular outras diferentes formas de representação como uso de 'softwares' que auxiliem na interpretação e construção dos gráficos.

Pensando ainda um pouco mais além de usar 'softwares' para representar os gráficos das funções, ou até mesmo fazer sua construção, gostaríamos de desenvolver algum material prático para ensino do gráfico das funções e, além disso, elaborar uma proposta que contenha demonstrações matemáticas com um certo rigor para os alunos do ensino médio.

## 3.1 A FUNÇÃO AFIM

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constantes $a$, $b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

O gráfico de uma função afim

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & ax+b \end{array}$$

é uma linha reta.

Para demonstrarmos que o gráfico de uma função afim é uma reta, devemos mostrar que todo ponto do gráfico da função pertence à reta $r$ e que todo ponto da reta $r$ pertence ao gráfico da função.

Considerando três pontos arbitrários $P_1, P_2$ e $P_3$ do gráfico da função $P_1 = (x_1, ax_1 + b)$, $P_2 = (x_2, ax_2 + b)$ e $P_3 = (x_3, ax_3 + b)$ vamos verificar se são colineares.

Para verificarmos a colinearidade entre os pontos $P_1, P_2$ e $P_3$, precisamos garantir que o maior dos três números $d(P_1, P_2), d(P_2, P_3)$ e $d(P_1, P_3)$ seja igual à soma dos outros dois.

Considerando $x_1 < x_2 < x_3$, temos as distâncias tais que:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|\sqrt{1 + a^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$

$$d(P_2, P_3) = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + a^2(x_3 - x_2)^2} = |x_3 - x_2|\sqrt{1 + a^2} = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$$

$$d(P_1, P_3) = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + a^2(x_3 - x_1)^2} = |x_3 - x_1|\sqrt{1 + a^2} = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$

Logo,

$$\begin{aligned} d(P_1, P_3) &= |x_3 - x_1|\sqrt{1 + a^2} \\ &= |x_3 - x_2 + x_2 - x_1|\sqrt{1 + a^2} \\ &= (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2} + (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2} \\ &= d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3). \end{aligned}$$

O número $a$ chama-se inclinação ou coeficiente angular dessa reta $r$ (em relação ao eixo horizontal $OX$). E $b$ é a ordenada do ponto onde o gráfico da função $f : x \mapsto ax + b$ intersecta o eixo $OY$.

Assim, todo ponto do gráfico da função pertence à reta $r$.

Agora, vamos provar a recíproca: toda reta não-vertical $r$ é o gráfico de uma função afim.

Uma reta fica inteiramente determinada quando se conhecem dois de seus pontos. Dados dois pontos quaisquer $(x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2)$, com $x_1 \neq x_2$, vamos primeiros provar que existe uma, e somente uma, função afim definida em $\mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$.

Queremos determinar os coeficientes $a$ e $b$ de modo que se tenha $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Assim, $y_1 = ax_1 + b$ e $y_2 = ax_2 + b$. Subtraindo as equações temos $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$.

Logo,

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

e

$$b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}.$$

Portanto, dados quaisquer dois pontos $(x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2)$, com $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, e $x_1 \neq x_2$, existe uma e somente uma função afim $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$.

Tomemos dois pontos distintos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ com $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, na reta $r$. Do resultado anterior, segue que existe uma função afim $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $g(x_1) = y_1$ e $g(x_2) = y_2$.

Agora, considere um ponto $P = (x, y)$ arbitrário nessa reta $r$, tal que $P \neq P_1$ e $P \neq P_2$. Esse ponto $P$ pertence ao gráfico de $g$ pois $P$ e $P_1$ determinam exatamente uma função afim $h$, definida em $\mathbb{R}$, que passa por esses dois pontos e $h = g$ visto que tem $P_1$ como ponto em comum e o coeficiente angular é o mesmo.

## 3.2 A FUNÇÃO QUADRÁTICA

Dada uma reta horizontal $r$ que não contém um ponto $F$ dado, o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de $F$ e de $r$ é chamado uma parábola, com eixo de simetria vertical.

Comentário: Em Geometria Analítica, temos casos de parábola em que $r$ não é horizontal.

Inicialmente pensamos em dividir a demonstração em 3 casos, sendo: o caso 1 em que a função é $f(x) = ax^2$, o caso 2 em que a função é $f(x) = ax^2 + bx$ e o caso 3 em que a função é $f(x) = ax^2 + bx + c$. Desenvolvemos o caso 1 e o caso 2, que seguem abaixo.

Caso 1) Consideremos o caso $f(x) = ax^2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, com $a > 0$. Vamos mostrar que o gráfico de $f$ é o conjunto de todos os pontos que distam igualmente de $F = (0, \frac{1}{4a})$ e $r : y = -\frac{1}{4a}$. Ou seja, vamos verificar que o gráfico de $f$ é uma parábola com concavidade voltada para cima.

Seja graf$(f) = \{(x, ax^2);\, x \in \mathbb{R}\}$. Iremos provar que, para $P \in graf(f)$,

$$d(P, F) = d(P, r)$$

.

$$\begin{aligned}
d(P,F) &= \sqrt{(0-x)^2+(\frac{1}{4a}-ax^2)^2} = \sqrt{x^2+\frac{1}{16a^2}-\frac{2ax^2}{4a}+a^2x^4} = \\
&= \sqrt{x^2+\frac{1}{16a^2}-\frac{x^2}{2}+a^2x^4} = \sqrt{a^2x^4+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{16a^2}} = \\
&= \sqrt{a^2x^4+\frac{2ax^2}{4a}+\frac{1}{16a^2}} = \sqrt{(ax^2+\frac{1}{4a})^2} = \\
&= ax^2+\frac{1}{4a} \\
&= d(P,r) \qquad .
\end{aligned}$$

Analogamente para $a<0$.

Agora, precisamos provar que dado um ponto $P=(x,y)$, na parábola, ele pertence ao gráfico de $f$. Isto é, precisamos provar que se $P=(x,y)$ é tal que $d(P,F)=d(P,r)$, então $P=(x,ax^2)$.

Sejam $P(x,y), F(0,\frac{1}{4a})$ e $r: y=-\frac{1}{4a}$. Vamos mostrar que se $d(P,F)=d(P,r)$, então $y=ax^2$.

$$\begin{aligned}
d(P,F)=d(P,r) \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{(x-0)^2+(y-\frac{1}{4a})^2} = (y+\frac{1}{4a}) \\
&\Rightarrow \quad 0 \le x^2+(y-\frac{1}{4a})^2 = (y+\frac{1}{4a})^2 \\
&\Rightarrow \quad x^2+y^2-\frac{2y}{4a}+\frac{1}{16a^2} = y^2+\frac{2y}{4a}+\frac{1}{16a^2} \\
&\Rightarrow \quad x^2 = \frac{4y}{4a} \\
&\Rightarrow \quad x^2 = \frac{y}{a} \\
&\Rightarrow \quad y = ax^2.
\end{aligned}$$

Portanto, $P=(x,ax^2)$. Concluímos que todo ponto da parábola é um ponto do gráfico da função.

Caso 2) Consideremos o caso $f(x)=ax^2+bx$, para todo $x\in\mathbb{R}$, com $a>0$. Vamos mostrar que o gráfico de f é o conjunto de todos os pontos que distam igualmente de $F=(-\frac{b}{2a},\frac{-b^2+1}{4a})$ e $r: y=-\frac{(b^2+1)}{4a} := y_2$.

Seja graf$(f) = \{(x, ax^2+bx);\ x \in \mathbb{R}\}$. Iremos provar que, para $P = (x_1, ax^2+bx_1) \in$ graf$(f)$,

$$d(P, F) = d(P, r)$$

.

Considerando $P = (x_1, y_1)$, o vértice $V = (\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2}{4a})$ da parábola e $r : y = y_2$, temos

$$y_2 = -\tfrac{(b^2+1)}{4a} \Rightarrow y_2 = -\frac{(b^2+1)(4a^2x_1^2 + b^2 + 4abx_1)}{4a(4a^2x_1^2 + 4abx_1 + b^2)}$$

$$\Rightarrow \quad y_2 = \frac{-(4a^2x_1^2b^2 + 4ab^3x_1 + b^4 + b^2 + 4a^2x_1^2 + 4abx_1)}{16a^3x_1^2 + 16a^2bx_1 + 4ab^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(16a^3x_1^2 + 16a^2bx_1 + 4ab^2)y_2}{4a^2} = \frac{-4a^2x_1^2b^2 - 4ab^3x_1 - b^4 - b^2 - 4a^2x_1^2 - 4abx_1}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \quad (4ax_1^2 + 4bx_1 + \frac{b^2}{a})y_2 = -x_1^2b^2 - \frac{b^3x_1}{a} - \frac{b^4}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} - x_1^2 - \frac{x_1b}{a}$$

$$\Rightarrow \quad 4ax_1^2y_2 + 4bx_1y_2 + x_1^2b^2 + \frac{b^3x_1}{a} + \frac{y_2b^2}{a} + \frac{b^4}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2} + x_1^2 + \frac{x_1b}{a} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4(ax_1^2 + bx_1)y_2 + \frac{(ax_1^2 + bx_1)b^2}{a} + \frac{y_2b^2}{a} + \frac{b^4}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2} + x_1^2 + \frac{x_1b}{a} = 0$$

Como $y_1 = ax_1^2 + bx_1$, segue que

$$4y_1y_2 + \frac{y_1b^2}{a} + \frac{y_2b^2}{a} + \frac{b^4}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2} + x_1^2 + \frac{x_1b}{a} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2y_1y_2 + \frac{y_1b^2}{a} + y_2^2 + \frac{2y_2b^2}{2a} + \frac{b^4}{4a^2} + x_1^2 + \frac{x_1b}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = -2y_1y_2 + y_2^2$$

$$\Rightarrow \quad -2y_1(-y_2 - \frac{b^2}{2a}) + (-y_2 - \frac{b^2}{2a})^2 + x_1^2 + \frac{x_1b}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = -2y_1y_2 + y_2^2$$

$$\Rightarrow \quad -2y_1y_3 + y_3^2 + x_1^2 + \frac{x_1b}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = -2y_1y_2 + y_2^2 \text{ em que } y_3 = -y_2 - \frac{b^2}{2a} = \frac{-b^2+1}{4a}$$

$$\Rightarrow \quad -2y_1y_3 + y_3^2 + x_1^2 + \frac{2x_1b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} = -2y_1y_2 + y_2^2$$

$$\Rightarrow \quad y_1^2 - 2y_1y_3 + y_3^2 + x_1^2 + \frac{x_1b}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2$$

$$\Rightarrow \quad (y_1 - y_3)^2 + (x_1 + \frac{b}{2a})^2 = y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2$$

$$\Rightarrow \quad (y_1 - y_3)^2 + (x_1 + \frac{b}{2a})^2 = (y_1 - y_2)^2$$

$$\Rightarrow \quad d(P, F) = d(P, r).$$

De maneira análoga ao caso de $f(x) = ax^2$, mas com mais trabalho, mostramos que se $d(P, F) = d(P, r)$ então $P \in graf(f)$.

Mediante a extensão dos cálculos e a necessidade de utilizar na aula da proposta cálculos não muito extensos, visto a concentração dos alunos e o tempo para realização da aula, decidimos não aprofundar no caso 3, e nem utilizar na aula o caso 2. Mostraremos o caso 1 e utilizaremos translação do gráfico para representar o gráfico das funções dadas por $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Mediante uma translação vertical seguida de uma translação horizontal, a parábola do gráfico da função $h(x) = ax^2$ transforma-se na parábola que é o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Aplicamos à parábola de $h(x) = ax^2$ uma translação vertical $(x, y) \mapsto (x, y - k)$, em que $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$, teremos uma nova parábola, cujo vértice tem abcissa igual a zero, ou seja, está sobre o eixo $OY$.

Note que:

$$h(x) = g(x) - k = ax^2 + k - k \Rightarrow g(x) = ax^2 + k.$$

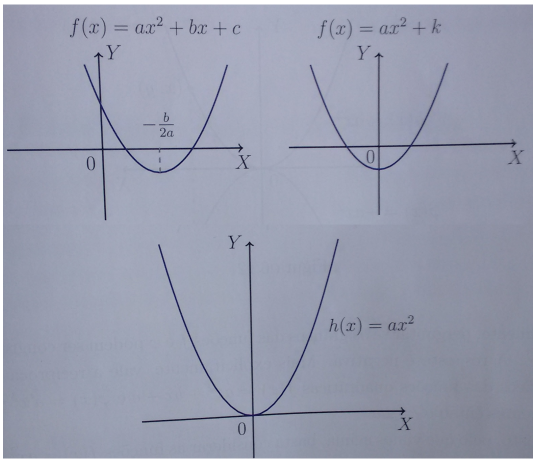
Aplicando nessa nova parábola da função $g$ a translação horizontal $(x, y) \mapsto (x - m, y)$, em que $m = \frac{b}{2a}$, obtemos uma segunda parábola cujo vértice tem abcissa $m = \frac{b}{2a}$.

$$\begin{aligned} g(x) &= ax^2 + k \\ &= a(x - \tfrac{b}{2a})^2 + b(x - \tfrac{b}{2a}) + c \\ &= f(x - \tfrac{b}{2a}) \\ &= f(x - m) \end{aligned}$$

em que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Isto significa que a parábola que é o gráfico da função $h(x) = ax^2$ mediante uma translação vertical e outra translação horizontal transforma-se na parábola que é o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$. Isto significa que estas duas parábolas são congruentes.

Figura 6 – Translação vertical e horizontal




Fonte: Livro Números e Funções Reais [2]

Analogamente, o gráfico da função $t(x) = -ax^2 + bx + c$ é congruente ao gráfico da função $w(x) = -ax^2$. Pode-se notar a reflexão em torno do eixo horizontal $OX$, ou seja, a transformação $(x, y) \mapsto (x, -y)$, que leva o gráfico de $w(x) = -ax^2$ no gráfico de $h(x) = ax^2$.

# 4 CONSTRUÇÃO DO MATERIAL

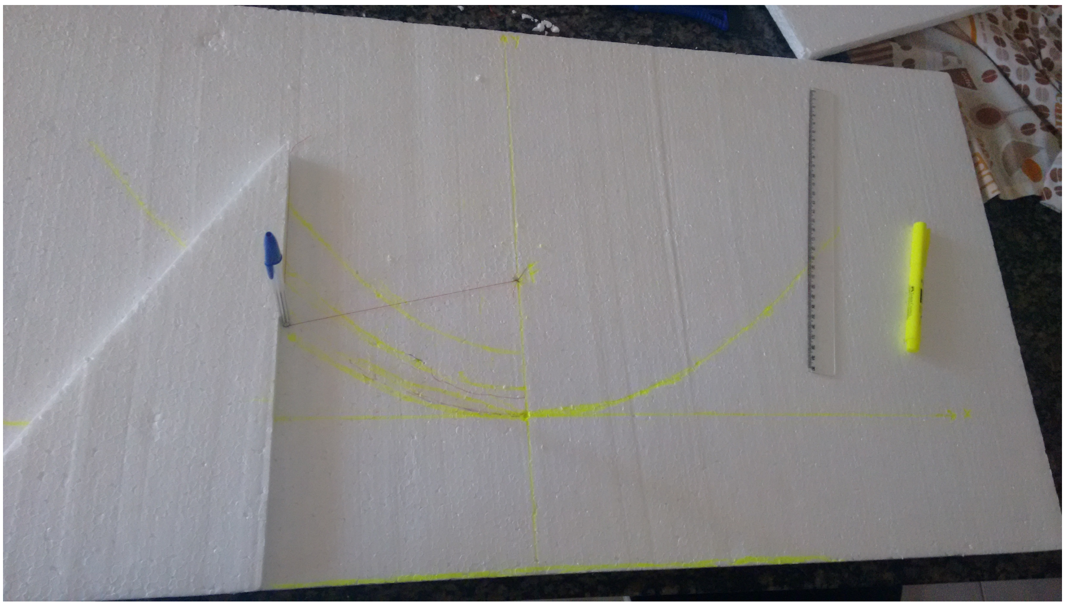
Pela visualização, desejamos que a aprendizagem fique mais significativa para o aluno, uma vez que percebe a real aplicação dos conceitos envolvidos de forma prática.

Pensando nisso, precisávamos de um instrumento para construir o esboço da parábola de forma a atender a representação dos conceitos envolvidos e que fosse de fácil utilização e manuseio pelos professores. A ideia de construir parábolas utilizando barbante e esquadro já era um pouco conhecida, mas tão pouco divulgada que temos dificuldades de encontrar livros didáticos de matemática, em particular, geometria analítica, que a mencionam. Porém, procuramos construir um material de forma a facilitar sua utilização em sala de aula com mais possibilidades de construções de parábolas, facilidade de manuseio e durabilidade.

Para confecção do material foram necessários uma placa de MDF na cor branca, com um lado liso e brilhante (como um quadro branco) com 1 metro de comprimento por 50 centímetros de largura, um esquadro móvel de preferência da mesma altura da placa de MDF (50 centímetros), barbante, dois pinos de metal e pincel para quadro branco. Para que o esquadro deslizasse, foi necessário anexar um suporte na base inferior da placa de MDF, com abertura ('gaveta') onde o esquadro se encaixasse exatamente.

Fizemos o experimento em um isopor para perceber qual seriam os melhores exemplos a serem utilizados com o material, e em seguida, com ajuda de um marceneiro confeccionamos o material em MDF.

Figura 7 – Testando o material prático em um isopor

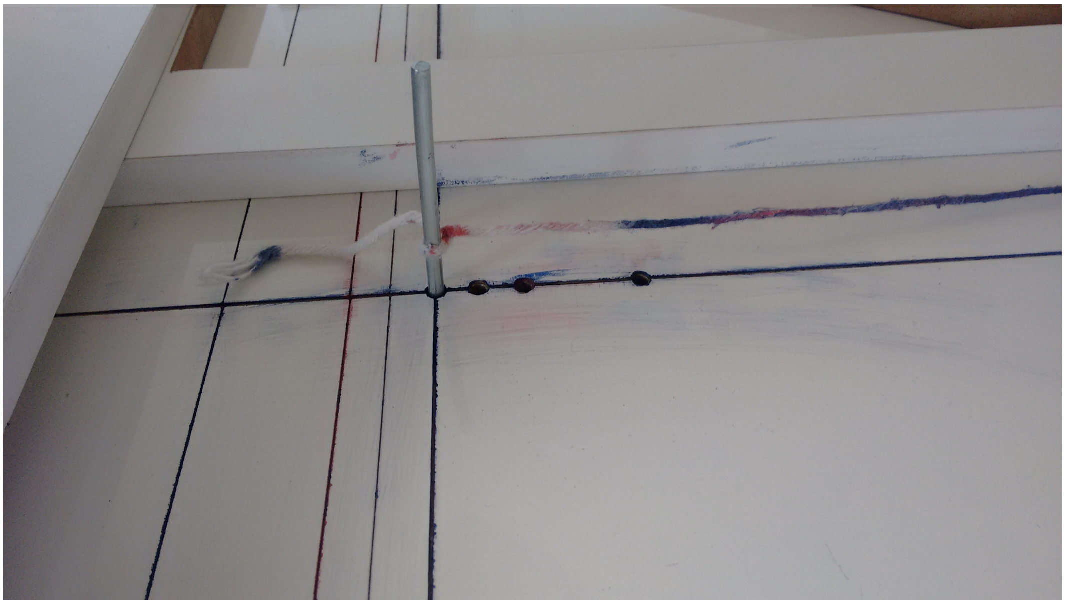


Fonte: Arquivo Pessoal: foto tirada durante o teste para confecção do material prático

De início, procuramos marcar no MDF o plano cartesiano de forma que o eixo $OY$ ficasse centralizado e o eixo $OX$ ficasse na razão de 4 para 1, ou seja, 40 centímetros em sua parte positiva e 10 centímetros em sua parte negativa.

Após, foram marcadas as retas $y = -1, y = -2$ e $y = -5$. Também foram marcados os seguintes pontos $(0, 0), (0, 1), (0, 2)$ e $(0, 5)$, para fixação, quando necessário, dos pinos de metal.

Figura 8 – Material prático

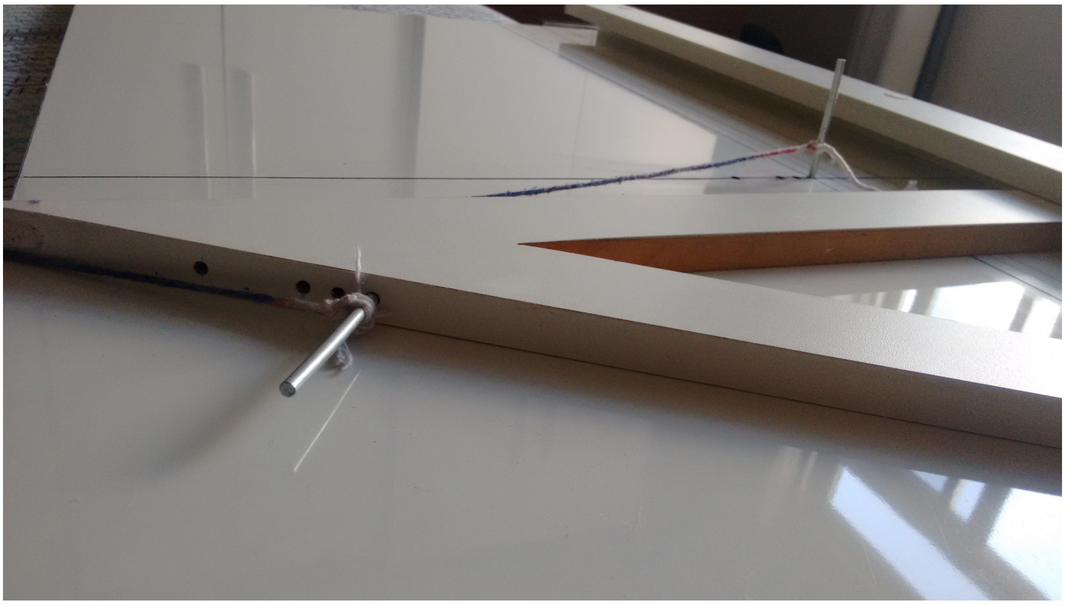


Fonte: Arquivo Pessoal: foto tirada do material prático.

No esquadro, em sua lateral, foram marcados também quatro pontos pela necessidade de variar o comprimento do barbante mediante os três exemplos determinados para serem usados na aula. Esses pontos tinham distâncias, respectivamente, 5, 8, 9 e 10 centímetros, a contar da ponta superior do esquadro. Na ponta do esquadro foi necessária uma placa de alumínio dobrada para que o barbante atingisse um ponto fixo e ficasse firme para o tracejado da parábola.

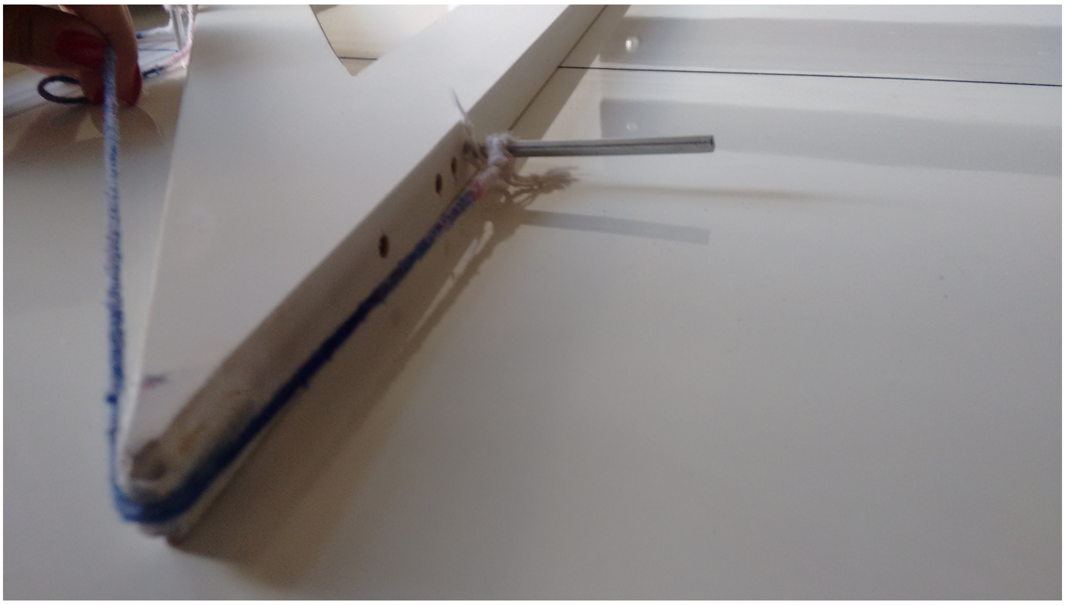
O barbante possui comprimento de 50 centímetros e em suas extremidades estão os dois pinos de metal amarrados.

Figura 9 – Material prático



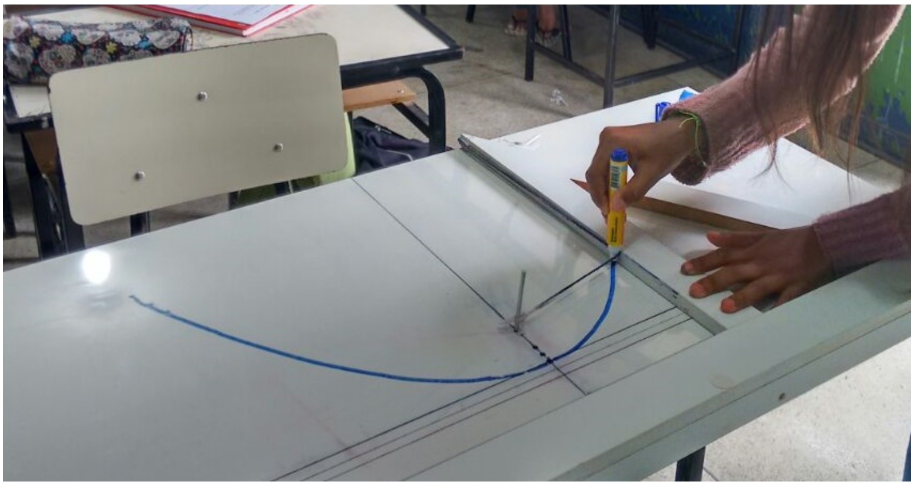
Fonte: Arquivo Pessoal: foto tirada do material prático.

Figura 10 – Material prático



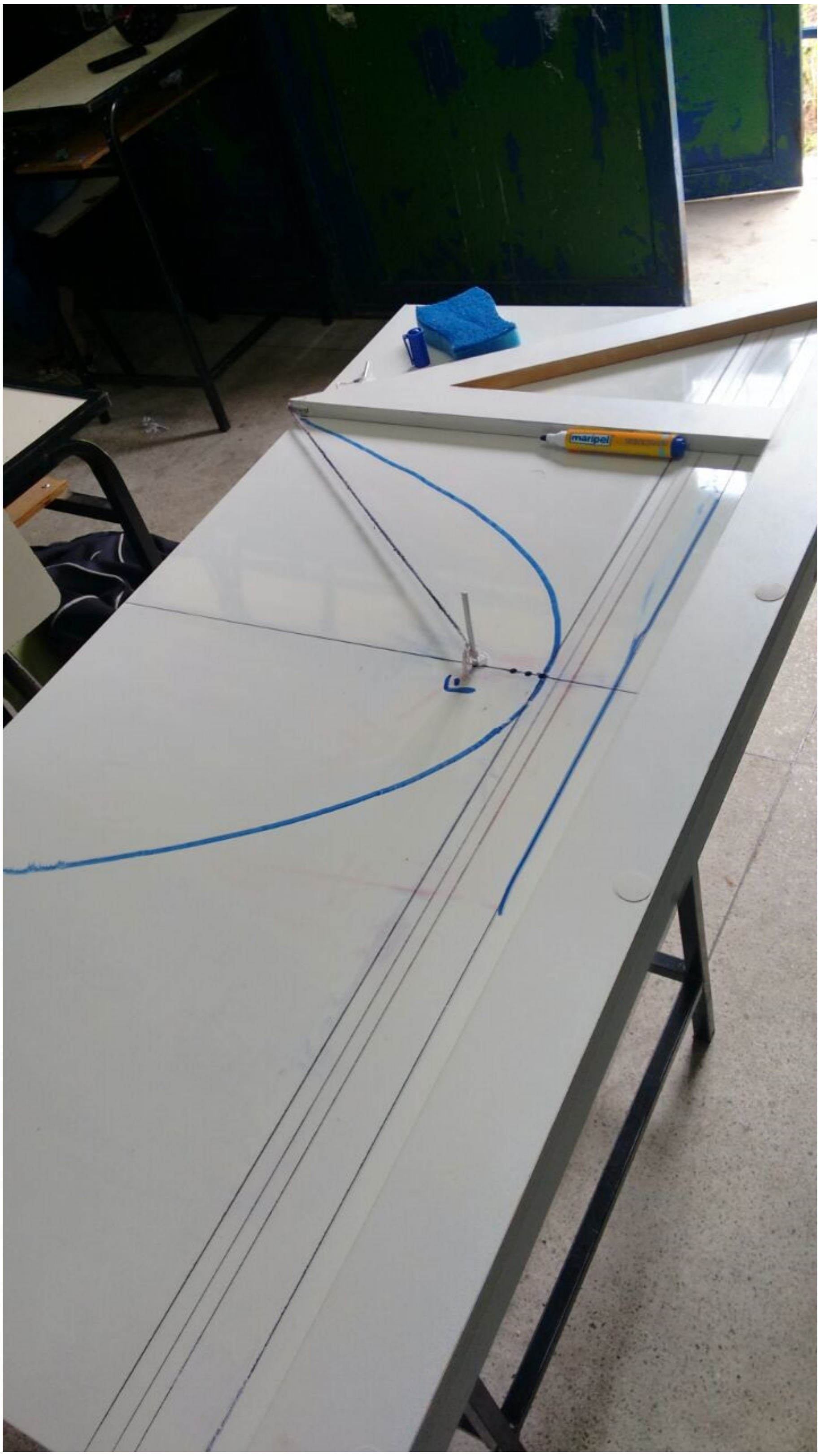
Fonte: Arquivo Pessoal: foto tirada do material prático.

Figura 11 – Material prático



Fonte: Fotos da aula de desenvolvimento da proposta.

Figura 12 – Material prático



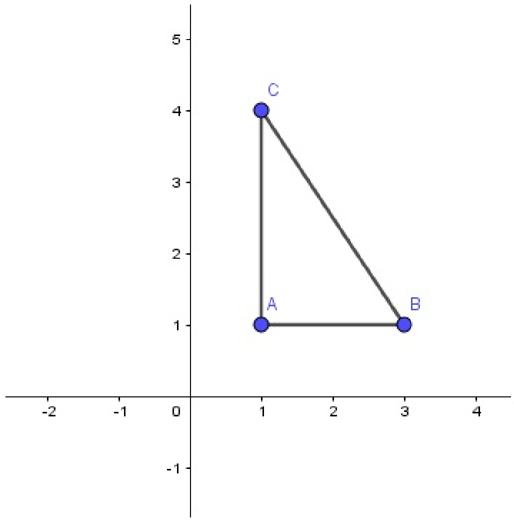

Fonte: Fotos da aula de desenvolvimento da proposta.

# 5 PROPOSTA

## 5.1 REVISÃO: DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Considerando, de acordo com a Figura 13: $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, onde $x_A = x_C$ e $y_A = y_B$, temos:

Figura 13 – Distância entre dois pontos




Fonte: Arquivo Pessoal: Imagem feita através do 'software' GeoGebra.

distância horizontal: $d(A, B) = x_B - x_A$

distância vertical: $d(A, C) = y_C - y_A$

distância entre dois pontos: pelo Teorema de Pitágoras, segue que

$$
\begin{aligned}
(d(B,C))^2 &= (d(A,C))^2 + (d(A,B))^2 \\
(d(B,C))^2 &= (y_C - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2 \\
(d(B,C))^2 &= (y_C - y_B)^2 + (x_B - x_C)^2 \\
d(B,C) &= \sqrt{(y_C - y_B)^2 + (x_B - x_C)^2}
\end{aligned}
$$

## 5.2 DEFINIÇÃO DE PARÁBOLA

Vamos com esta aula provar que o gráfico de uma função polinomial do 2º grau é uma parábola.

Definição: Dados um ponto $F$ e uma reta horizontal $r$ que não o contém, a parábola é o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de $F$ e de $r$.

Iremos esboçar, no plano cartesiano, o gráfico de uma função quadrática.

Com o uso do quadro branco, de um esquadro, de um barbante e de um pincel para quadro branco, dados um ponto $F$ e uma reta horizontal, os alunos poderão observar o experimento do esboço da parábola. (Ver Figura 12).

Vamos provar que um ponto $P$ qualquer do gráfico de $f$ dista igualmente de $F$ e de $r$, para concluir então que todo ponto do gráfico de $f$ está na parábola determinada por $F$ e a reta $r$.

O gráfico da função $f$ dada por $f(x) = ax^2$, para todo $x$ real, é o conjunto de pontos $P = (x, y = f(x))$ tais que a distância de $P$ até $F = (0, \frac{1}{4a})$ é a mesma que a distância de $P$ até a reta $r : y = -\frac{1}{4a}$.

Para visualização do aluno da aplicação da definição de parábola e utilização do material prático, vamos explicar e exemplificar o gráfico da função $f(x) = \frac{x^2}{20}$ onde temos $F = (0, 5)$ e $r : y = -5$.

Exemplo: $f(x) = \frac{x^2}{20}$ tem $F = (0, 5)$ e $r : y = -5$.

A partir daí vamos demonstrar a definição algebricamente.

Mostremos que todo ponto do gráfico satisfaz $d(P, F) = d(P, r)$.

Seja $P = (x, ax^2)$, $F = (0, \frac{1}{4a})$ e $r : y = -\frac{1}{4a}$, temos

$$d(P,F) = \sqrt{(0-x)^2 + (\frac{1}{4a} - ax^2)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{16a^2} - \frac{2ax^2}{4a} + a^2x^4}$$
$$= \sqrt{a^2x^4 + \frac{2ax^2}{4a} + \frac{1}{16a^2}} = \sqrt{(ax^2 + \frac{1}{4a})^2} = ax^2 + \frac{1}{4a} = d(P,r).$$

Concluímos então que todo ponto do gráfico pertence à parábola.

Agora, precisamos provar que dado um ponto $P = (x, y)$, na parábola, tal que $d(P, F) = d(P, r)$, este ponto $P$ é da forma $P = (x, ax^2)$, ou seja, $P$ pertence ao gráfico de $f$, para concluir então que todo ponto da parábola determinada por $F$ e a reta $r$ é um ponto do gráfico de $f$.

Sejam $P(x, y), F(0, \frac{1}{4a})$ e $r : y = -\frac{1}{4a}$. Vamos mostrar que se $d(P, F) = d(P, r)$, então $y = ax^2$.

$$
\begin{aligned}
d(P,F) \quad &= \quad d(P,r) \\
\Rightarrow \sqrt{(x-0)^2+(y-\tfrac{1}{4a})^2} \quad &= \quad (y+\tfrac{1}{4a}) \\
\Rightarrow 0 \leq x^2+(y-\tfrac{1}{4a})^2 \quad &= \quad (y+\tfrac{1}{4a})^2 \\
\Rightarrow x^2+y^2-\tfrac{2y}{4a}+\tfrac{1}{16a^2} \quad &= \quad y^2+\tfrac{2y}{4a}+\tfrac{1}{16a^2} \\
\Rightarrow x^2=\tfrac{4y}{4a} \quad &\Rightarrow \quad x^2=\tfrac{y}{a} \\
\Rightarrow y=ax^2.
\end{aligned}
$$

Portanto, $P=(x,ax^2)$. Concluímos que todo ponto da parábola é um ponto do gráfico da função.

## 5.3 TRANSLAÇÃO DO GRÁFICO

Utilizamos para os cálculos e para representação do esboço do gráfico no material prático funções do tipo $f(x)=ax^2$, com intuito de reduzir os cálculos durante a explicação. Para generalizarmos o resultado a todas as funções $f(x)=ax^2+bx+c$ vamos utilizar da translação do gráfico.

Note que toda função polinomial do 2º grau pode ser escrita como:

$$
\begin{aligned}
y \quad &= \quad ax^2+bx+c \\
\Leftrightarrow \quad y \quad &= \quad ax^2+\frac{2abx}{2a}+\frac{ab^2}{4ab^2}-\frac{b^2}{4a}+\frac{4ac}{4a} \\
\Leftrightarrow \quad y \quad &= \quad a(x^2+\frac{2bx}{2a}+\frac{b^2}{4a^2})-(\frac{b^2-4ac}{4a}) \\
\Leftrightarrow \quad y \quad &= \quad a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a}
\end{aligned}
$$

em que $-\frac{b}{2a}=x_V$ e $-\frac{\Delta}{4a}=y_V$.

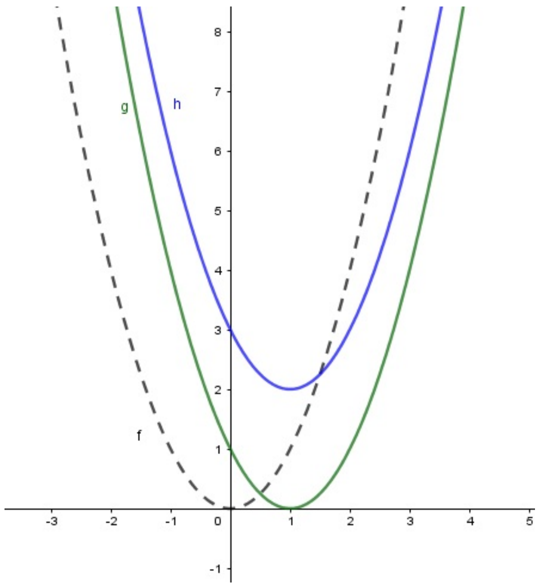
Logo, $y=a(x-x_V)^2+y_V$.

O $x_V$ está relacionado com a translação horizontal. E o $y_V$ está relacionado com a translação vertical.

Podemos observar simplesmente que o gráfico de $g(x)=a(x-x_V)^2$ resulta do gráfico $f(x)=ax^2$ pela translação horizontal $(x,y)\to(x+x_V,y)$, a qual leva o eixo $x=0$ no eixo $x=x_V$.

E ainda, o gráfico de $h(x) = a(x-x_V)^2+y_V$ é obtido do gráfico de $g(x) = a(x-x_V)^2$ por meio da translação vertical $(x, y) \to (x, y + y_V)$, que leva o eixo $OX$ na reta $y = y_V$.

Figura 14 – Translação vertical e horizontal




Fonte: Arquivo Pessoal: Imagem feita através do 'software' GeoGebra.

Portanto, concluímos que o gráfico da função polinomial do 2º grau é uma parábola.

Para esboçar o gráfico da função afim basta obter dois pontos do gráfico da função, pois uma reta é definida por dois pontos. Para esboçar o gráfico de uma função quadrática basta determinar 3 pontos não colineares do gráfico e traçar a parábola que passa por eles, como veremos a seguir.

A justificativa é que sejam $x_1, x_2$ e $x_3$ três números reais distintos e $y_1, y_2, y_3$ números tais que os pontos $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ em $\mathbb{R}^2$, onde $A$, $B$ e $C$ sejam não colineares. Existe uma, e somente uma, função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$ e $f(x_3) = y_3$.

Para demonstrar este fato, queremos mostrar que o sistema de equações abaixo admite solução única.

$$\begin{array}{rcl} ax_1^2 + bx_1 + c & = & y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c & = & y_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + c & = & y_3 \end{array}$$

Subtraindo a primeira equação de cada uma das outras, segue que:

$$\begin{array}{rcl} a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) & = & y_2 - y_1 \\ a(x_3^2 - x_1^2) + b(x_3 - x_1) & = & y_3 - y_1 \end{array}$$

Como $x_2 - x_1 \neq 0$ e $x_3 - x_1 \neq 0$, podemos dividir a primeira equação por $x_2 - x_1$ e a segunda por $x_3 - x_1$, obtemos:

$$\begin{aligned} a(x_1 + x_2) + b &= \tfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ a(x_1 + x_3) + b &= \tfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \end{aligned}$$

Subtraindo membro a membro, temos $a(x_3 - x_2) = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Como $x_3 - x_2 \neq 0$, temos

$$a = \frac{1}{x_3 - x_2}\left[\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right].$$

Continuando, encontramos também $b$ e $c$ únicos.

Portanto, dados três números reais distintos $x_1, x_2, x_3$ e números reais arbitrários $y_1, y_2, y_3$, existe um, e somente um, terno de números $a, b$ e $c$ tais que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ cumpre $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$ e $f(x_3) = y_3$.

Porém a função acima pode não ser quadrática. Isso ocorrerá se $\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Mas, analisando os pontos $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2), C = (x_3, y_3)$ em $\mathbb{R}^2$, a condição garante que as retas $AC$ e $AB$ têm o mesmo coeficiente angular, ou seja, os pontos $A, B, C$ são colineares.

Logo, sejam $x_1, x_2, x_3$ três números reais distintos e $y_1, y_2, y_3$ números tais que os pontos $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ são não-colineares em $\mathbb{R}^2$. Existe uma, e somente uma, função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$ e $f(x_3) = y_3$.

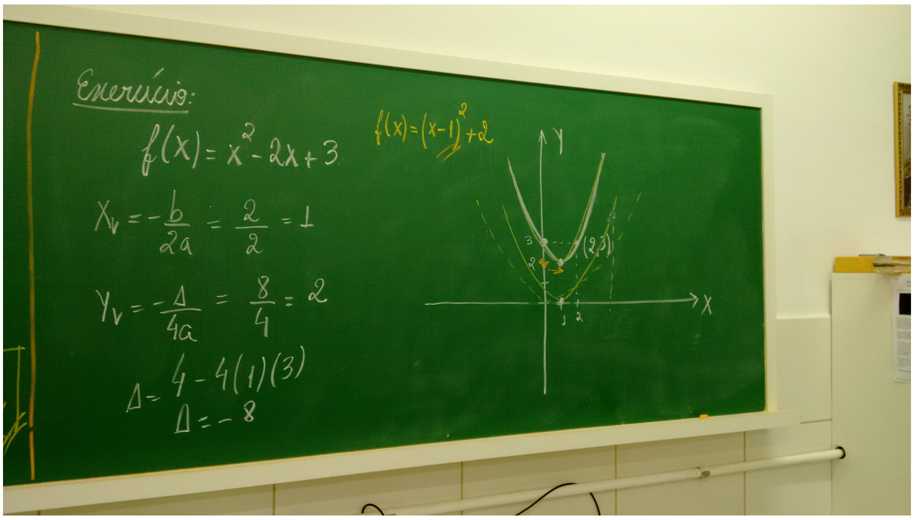
Desses 3 pontos, sempre convém ter dentre eles o vértice e o ponto em que o gráfico intersecta o eixo $y$ (que, em alguns casos, coincide com o vértice). O(s) ponto(s) em que o gráfico intersecta o eixo $x$, se existirem, também são convenientes.

## 5.4 EXERCÍCIO

Esboce o gráfico da função $f$ dada por $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

Neste exercício exploramos a translação vertical e horizontal, além da simetria do gráfico em relação à reta $x = x_V$.

Figura 15 – Resolução do Exercício no quadro




Fonte: Fotos da aula de desenvolvimento da proposta.

# 6 RESULTADOS

## 6.1 A AULA DA PROPOSTA

A aula foi lecionada para as minhas turmas, sendo duas turmas de 1ª Série do Ensino Médio e uma turma de 2ª Série do Ensino Médio do ano de 2017, sendo duas turmas de 1ª Série do Ensino Médio do Colégio A, e uma turma de 2ª Série do Ensino Médio do Colégio B.

Todas as três turmas já tinham visto comigo, de acordo com o livro didático seguido, o estudo do gráfico da função quadrática, eles já tinham conhecimento do gráfico da função quadrática ser uma parábola. A turma de 2ª Série do Ensino Médio do Colégio B, estudou este conteúdo comigo em 2016 quando estavam cursando a 1ª Série do Ensino Médio. A demonstração do gráfico da função quadrática ser uma parábola que não era do conhecimento dos alunos, apenas comentei com eles que quando eles fossem estudar geometria analítica na 3ª Série do Ensino Médio, eles teriam a justificativa. Esse fato de não justificar aos alunos muito me incomodava, foi uma motivação para o desenvolvimento da proposta.

Inicialmente, expliquei aos alunos sobre o objetivo da aula de demonstrar que o gráfico da função quadrática é uma parábola. Reafirmei que eles já estudaram este conteúdo comigo, porém esta aula seria uma nova proposta e que no final da aula seria aplicado a eles um questionário, para avaliar as duas abordagens das aulas.

Continuei explicando que para a demonstração seria necessário calcular a distância entre dois pontos e que na sequência seria feita uma revisão deste conceito.

Posterior à revisão, conceituei geometricamente uma parábola, e passei para explicação da demonstração do gráfico da função quadrática ser uma parábola.

Para representar a definição da parábola utilizei o material prático a fim de ficar claro aos alunos e bem ilustrada a propriedade da definição da parábola em relação à distância de qualquer ponto $(x, y)$ da parábola até a reta $r$ e o ponto $F$.

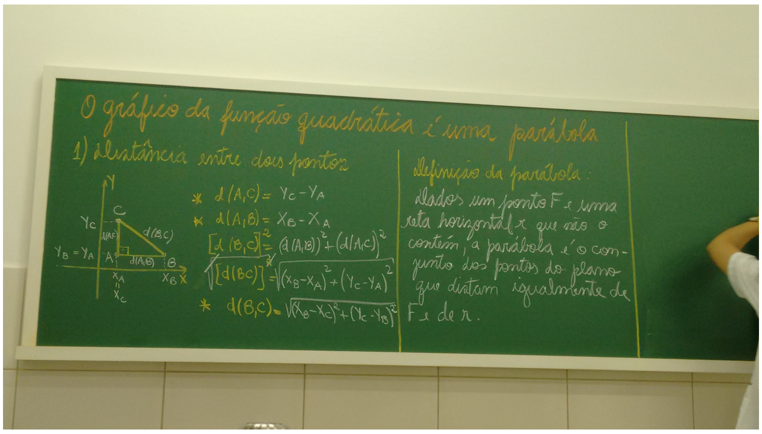
Procurando oferecer uma aula com mais detalhes, expliquei e escrevi no quadro para que os alunos realmente entendessem os próximos cálculos que seriam feitos, onde é necessário mostrar duas etapas, para então concluir o que desejamos. De fato, é preciso provar que dado um ponto $(x, y)$ qualquer da parábola, satisfazendo sua definição, este ponto pertence ao gráfico da função quadrática. E ainda, provar que dado qualquer ponto do gráfico da função $(x, f(x))$ este atende a definição da parábola.

Após a prova, resolvemos um exercício, onde evidenciei a translação no gráfico.

Para realização das aulas da proposta foram necessárias duas aulas consecutivas de 50 minutos, totalizando 100 minutos. Para não interromper o raciocínio e desenvolvimento da sequência lógica das demonstrações e conclusões, optei por duas aulas consecutivas. O conteúdo da aula exige concentração e muita atenção dos alunos por ser uma aula quase toda expositiva. Tentei dinamizar a aula com os esquemas das demonstrações, com o uso do material prático, mas ainda assim alguns alunos perderam o foco durante a explicação.

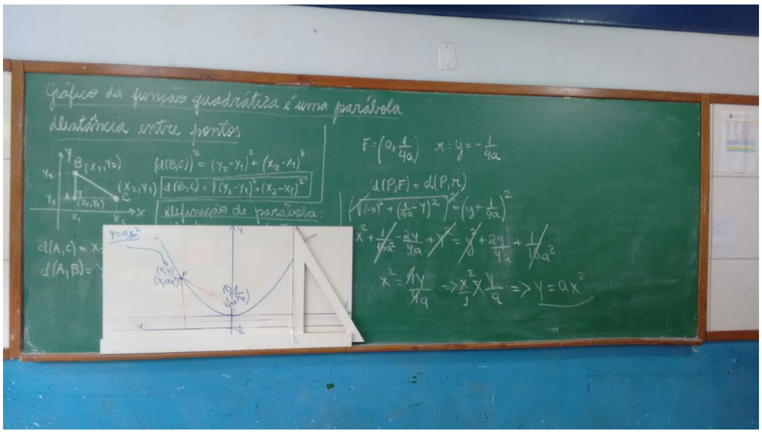
Notei pela participação dos alunos na aula, que eles puderam reforçar os conhecimentos já adquiridos sobre o gráfico da função quadrática com a aula da proposta, e o interessante foram os comentários dos alunos em relação à definição da parábola, à associação da geometria e do cálculo algébrico. Comentaram ser interessante associar e utilizar vários conceitos matemáticos para uma mesma finalidade.

Figura 16 – Aula da Proposta




Fonte: Fotos da aula de desenvolvimento da proposta.

Figura 17 – Aula da Proposta




Fonte: Fotos da aula de desenvolvimento da proposta.

## 6.2 QUESTIONÁRIO AOS ALUNOS

Após a aula referente à proposta, os alunos responderam um questionário nominal com as seguintes perguntas:

1) Em comparação ao estudo da parábola feito anteriormente e a explicação e experimento feito nessa aula, o que você tem a dizer sobre a justificativa do gráfico da função quadrática ser uma parábola?

2) Qual metodologia foi mais significativa para justificar a curva da parábola: a substituição por pontos da função ou o experimento desta aula? Justifique.

3) Estava seguro da curva da função do 2º grau ser uma parábola? E agora, ficou mais justificado? Sentiu diferença na interpretação do gráfico com a nova experiência?

4) Deixe seus comentários sobre a aula e a proposta.

Foram realizadas 3 aulas da proposta, foram estas Turma A e Turma B do Colégio A e Turma 1 do Colégio B. Na turma A do Colégio A tinham 19 alunos(as), na Turma B do Colégio A tinham 25 alunos(as) e na Turma 1 do Colégio B tinham 16 alunos(as). O Colégio A é uma escola privada e o Colégio B é uma escola pública estadual. O total de alunos participantes das aulas da proposta foram 60 alunos(as), dos quais apenas 1 se recusou a preencher o questionário. Desta forma, a pesquisa foi realizada analisando 59 questionários de alunos(as).

De acordo com as respostas, pude analisar de acordo com cada pergunta e em cada turma, obtendo os seguintes resultados quantitativos:

De acordo com o quadro, na Turma 1 do Colégio B, na pergunta 1 em relação à justificativa do gráfico da função quadrática ser uma parábola, 14 alunos(as) preferem a proposta, enquanto que 2 alunos(as) preferem a explicação feita pelos livros didáticos. Na pergunta 2, em relação à metodologia que justifica a curva da parábola, 15 alunos(as) preferem a explicação desenvolvida na aula da proposta e 1 aluno prefere a explicação com o desenvolvimento de acordo com o livro didático. Já na pergunta 3, 11 alunos(as) disseram que não estavam seguros da curva da função quadrática ser uma parábola e agora estão, enquanto que 5 alunos(as) disseram que já estavam seguros.

A Turma B do Colégio A, na pergunta 1 em relação à justificativa do gráfico da função quadrática ser uma parábola, 24 alunos(as) preferem a proposta, enquanto que 1 aluno prefere a explicação feita pelos livros didáticos. Na pergunta 2, em relação à metodologia que justifica a curva da parábola, 22 alunos(as) preferem a explicação desenvolvida na aula da proposta e 3 alunos(as) preferem a explicação com o desenvolvimento de acordo com o livro didático. Já na pergunta 3, 13 alunos(as) disseram que não estavam seguros da curva da função quadrática ser uma parábola e agora estão, enquanto que 12 alunos(as) disseram que já estavam seguros.

Figura 18 – Análise do Questionário dos Alunos

| Turma 1 Colégio B | Preferem a proposta e/ou não estavam seguros com a explicação anterior e agora estão. | Preferem a explicação anterior feita com base nos livros e/ou já estavam seguros com a explicação anterior. |
|---|---|---|
| Pergunta 1 | 14 | 2 |
| Pergunta 2 | 15 | 1 |
| Pergunta 3 | 11 | 5 |

| Turma B Colégio A | Preferem a proposta e/ou não estavam seguros com a explicação anterior e agora estão. | Preferem a explicação anterior feita com base nos livros e/ou já estavam seguros com a explicação anterior. |
|---|---|---|
| Pergunta 1 | 24 | 1 |
| Pergunta 2 | 22 | 3 |
| Pergunta 3 | 13 | 12 |

| Turma A Colégio A | Preferem a proposta e/ou não estavam seguros com a explicação anterior e agora estão. | Preferem a explicação anterior feita com base nos livros e/ou já estavam seguros com a explicação anterior. | Preferem ambas explicações. |
|---|---|---|---|
| Pergunta 1 | 16 | 2 | 0 |
| Pergunta 2 | 14 | 3 | 1 |
| Pergunta 3 | 5 | 13 | 0 |

Fonte: Arquivo Pessoal: planilha montada com os dados do questionário doa alunos.

A Turma A do Colégio A, na pergunta 1 em relação à justificativa do gráfico da função quadrática ser uma parábola, 16 alunos(as) preferem a proposta, enquanto que 2 alunos(as) preferem a explicação feita pelos livros didáticos. Na pergunta 2, em relação à metodologia que justifica a curva da parábola, 14 alunos(as) preferem a explicação desenvolvida na aula da proposta, 3 alunos(as) preferem a explicação com o desenvolvimento de acordo com o livro didático e 1 aluno prefere ambas as explicações. Já na pergunta 3, 5 alunos(as) disseram que não estavam seguros da curva da função quadrática ser uma parábola e agora estão, enquanto que 13 alunos(as) disseram que já estavam seguros.

Algumas respostas dos alunos em relação a questão 2, onde responderam com relação a metodologia e o significado da justificativa do gráfico da função quadrática ser uma parábola.

'Apesar da substituição de pontos ser mais fácil e mais didático na minha opinião, o experimento desta aula mostrou com mais clareza e profundidade a justificativa da parábola ser usada.' Aluna da Turma A Colégio A.

'A explicação dessa aula abriu nossas mentes com uma nova explicação e experimentos, mas ainda prefiro a substituição de pontos.' Aluno Turma A Colégio A.

Como a questão 4 é para que os alunos deixem seus comentários sobre a aula e a proposta, não coloquei sua análise de forma quantitativa no quadro. Gostaria de destacar algumas respostas dos alunos da pergunta 4.

'A aula deixou muito mais claro o motivo da função quadrática ser uma parábola em comparação com o livro, que era muito vago.' Aluno Turma A do Colégio A.

'A aula foi bem desenvolvida com uma explicação bem detalhada e técnica. Achei a proposta interessante e acho que ajuda bastante para entendermos as parábolas. Apesar de ser uma explicação mais complexa, com um pouco de atenção entendemos bem o que foi proposto.' Aluna Turma A Colégio A.

'Foi interessante aprofundar mais sobre uma matéria, com uma didática diferente, que nós nunca vimos.' Aluno Turma B Colégio A.

'A aula foi bastante produtiva, não deixou oportunidades para dúvidas e se mostrou bastante detalhada, tais detalhes não estiveram presentes nas aulas anteriores (que explicavam a parábola pela substituição de pontos).' Aluna Turma B colégio A.

'Gostei, principalmente do 'criador de parábolas'.' Aluno Turma 1 Colégio B.

'A aula foi bastante interessante, bem explicada no instrumento que a professora usou, com desenhos e todas as marcações de uma parábola.' Aluna Turma 1 Colégio B.

## 6.3 QUESTIONÁRIO AOS PROFESSORES

Aos professores que conversei sobre a proposta e os que trabalham comigo nas escolas, tanto na pública, quanto na privada, o questionário tinha as seguintes perguntas:

1) De acordo com a sua prática em relação ao ensino do gráfico das funções do 1º e 2º graus, em especial, a função quadrática, como desenvolve sua explicação nas aulas?

2) Qual é a sua opinião sobre os capítulos referentes às funções do 1º e 2º graus nos livros didáticos que utiliza?

3) Comente sobre a proposta apresentada sobre o gráfico da função quadrática.

4) Se o material estiver disponível em sua escola utilizaria em suas aulas? Qual é a dificuldade? Qual é a viabilidade do uso?

5) Considera válida a proposta para os alunos? Justifique.

A proposta foi apresentada a seis professores (Professora 1, Professora 2, Professora

3, Professora 4, Professor 5, Professor 6). As professoras 1 e 2 trabalham comigo no Colégio B, que é um colégio estadual. As professoras 3 e 4 e o Professor 5 trabalham comigo no Colégio A, uma escola privada. O professor 6 leciona em uma escola estadual (Colégio C).

Todos os professores que participaram da pesquisa já trabalharam, ou atualmente trabalham, com a 1ª Série do Ensino Médio. Alguns deles trabalham com a EJA (Educação de Jovens e Adultos).

Mediante as questões respondidas pelos colegas, apresento as seguintes conclusões:

Na questão 1) do questionário, os seis professores disseram que utilizam durante sua explicação em sala de aula exemplos para explicar o gráfico das funções de 1º e 2º grau, substituição de valores e construção de tabelas com os pontos, pares ordenados do gráfico, e identificam as diferenças entre o comportamento dos gráficos. O Professor 6 diz usar ferramentas como o GeoGebra em suas aulas.

'O ensino do gráfico das funções do 1º e 2º graus, inicialmente, é feito por meio da escolha de alguns exemplos de funções, cujos gráficos são construídos em planos cartesianos, a partir da escolha de pontos aleatórios. Na sequência, a partir dos gráficos construídos, é feito um estudo analítico dos efeitos dos coeficientes na forma do gráfico. Na parte final, são propostas atividades de construção de gráficos de funções em programas computacionais como o GeoGebra, com o objetivo de reforçar os conceitos estudados. Vale ressaltar que não são feitas demonstrações comprobatórias acerca das formas dos gráficos. A constatação da forma (reta ou parábola) é feita por meio do reconhecimento visual.' Professor 6.

Na questão 2) o Professor 5 considera que os livros didáticos são bem exemplificados e contextualizados. Já os cinco demais professores relatam que o livro didático servem de apoio diário as suas aulas, porém, muitas vezes traz o conteúdo de forma 'mecânica' de modo que os próprios professores, em sala de aula, precisam acrescentar conceitos que os livros trazem incompletos, e ainda ressaltam que alguns livros não utilizam linguagens adequadas aos alunos.

'As explicações dos livros são mecânicas, onde o aluno segue um roteiro para a construção do gráfico sem compreensão efetiva.' Professora 3.

Na questão 3) referente ao comentário sobre a proposta, os professores consideraram do ponto de vista matemática, uma boa referência para explicação do gráfico da função quadrática. Comentaram a respeito do conteúdo ser explicado e exemplificado de forma concreta, o que facilita a aprendizagem do aluno.

'Achei a proposta apresentada excelente, porque esta utiliza de conceitos já estudados para construir com os alunos a ideia de 'parábola', isso ajuda a efetivar o aprendizado de forma clara e objetiva. Acredito que o construir faça toda a diferença.' Professora 4.

Na questão 4) onde desejamos saber a opinião dos professores em relação à utilização da proposta e do material em suas aulas, bem como a viabilidade do uso e também as dificuldades para o seu uso, pude notar com as respostas dos professores o receio em relação à apresentação com seus alunos, em relação a conhecimentos prévios, ao tempo de duração da aula da proposta, o desconforto em transportar o material até as salas de aula, à dinâmica nas demonstrações que deverão ser feitas. Principalmente nas turmas de EJA (Educação de Jovens e Adultos), a professora 3 relata que usaria, porém encontraria dificuldades na explicação das demonstrações uma vez que os alunos apresentam deficiências nos conceitos prévios necessários e não há tempo para explicações aprofundadas, o ensino neste sistema é mais superficial.

O Professor 5 disse que não usaria o material, apesar de afirmar que o material atende a proposta. Julga que na prática a proposta atenderia a poucos alunos. Ele critica o não uso de termos tais como reta diretriz e foco da parábola.

'Não. Atende a pequeno grupo de alunos por vez, um pouco abstrato por não podermos entrar em detalhes, como a reta diretriz da parábola. O material atende a sua proposta.' Professor 5.

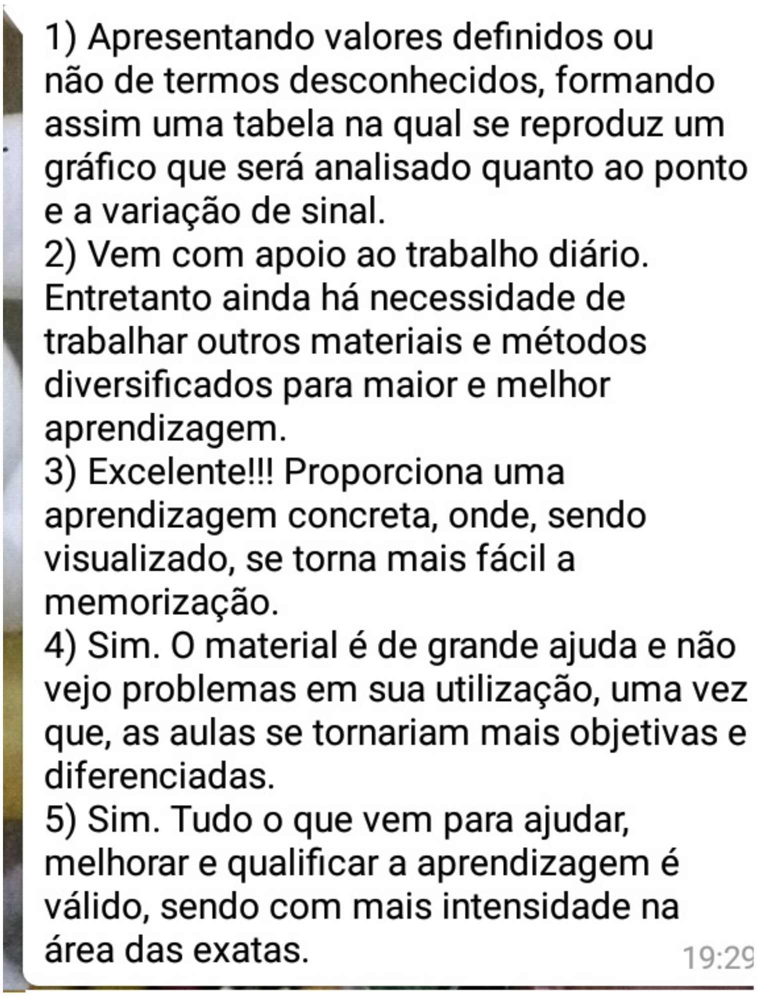
'Utilizaria o material em turmas, cujo processo de abstração esteja bem desenvolvido, pois a maior parte dos meus alunos não mantém a concentração em atividades muito longas. A dificuldade de utilização está atrelada ao tempo que será gasto para desenvolver o conteúdo utilizando o material e, ao mesmo tempo, manter o aluno envolvido. A viabilidade está associada à relação que este material propicia entre o conhecimento teórico e prático, evidenciada pela utilização do material concreto.' Professor 6.

Na questão 5), que pergunta se a proposta é válida aos alunos, todos responderam que sim, julgam importante a visão concreta dos conceitos, valorizam a utilização de metodologias práticas em sala de aula, e compreendem que os alunos ficam mais interessados com materiais práticos na aula.

'Sim. Tudo o que vem para ajudar, melhorar e qualificar a aprendizagem é válido, sendo com mais intensidade na área das exatas' Professora 1.

Abaixo as imagens dos questionários dos professores. A Professora 1 enviou as respostas por mensagem e a Professora 2 enviou por mensagem a foto do questionário respondido. A Professora 3, a Professora 4 e o Professor 5 entregaram os questionários impressos respondidos. E o Professor 6 enviou o questionário por 'e-mail' respondido.

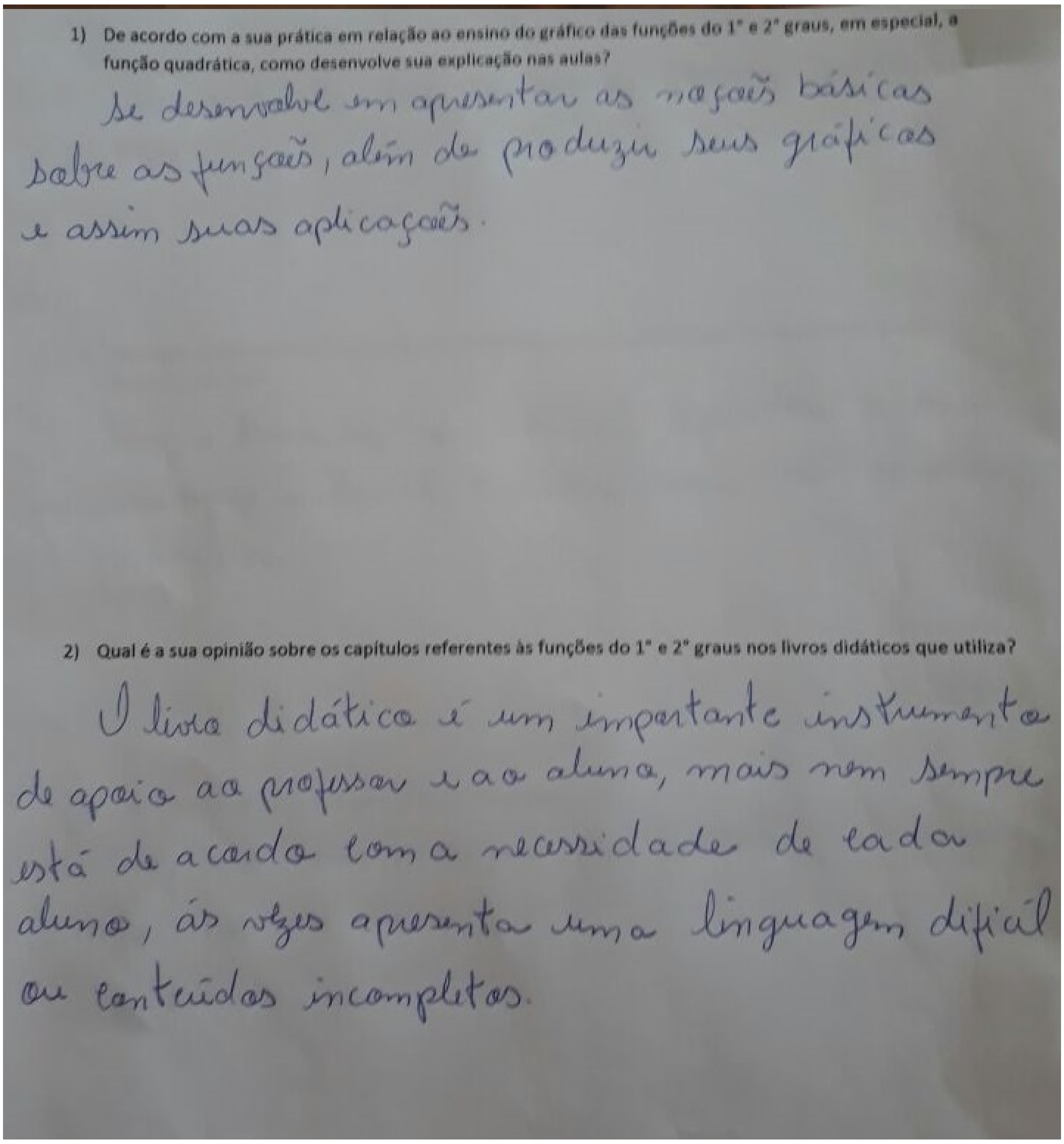
Figura 19 – Questionário Professora 1



1) Apresentando valores definidos ou não de termos desconhecidos, formando assim uma tabela na qual se reproduz um gráfico que será analisado quanto ao ponto e a variação de sinal.
2) Vem com apoio ao trabalho diário. Entretanto ainda há necessidade de trabalhar outros materiais e métodos diversificados para maior e melhor aprendizagem.
3) Excelente!!! Proporciona uma aprendizagem concreta, onde, sendo visualizado, se torna mais fácil a memorização.
4) Sim. O material é de grande ajuda e não vejo problemas em sua utilização, uma vez que, as aulas se tornariam mais objetivas e diferenciadas.
5) Sim. Tudo o que vem para ajudar, melhorar e qualificar a aprendizagem é válido, sendo com mais intensidade na área das exatas.
19:29

Fonte: Arquivo Pessoal: foto do questionário enviado por mensagem pela professor

Figura 20 – Questionário Professora 2



1) De acordo com a sua prática em relação ao ensino do gráfico das funções do 1° e 2° graus, em especial, a função quadrática, como desenvolve sua explicação nas aulas?

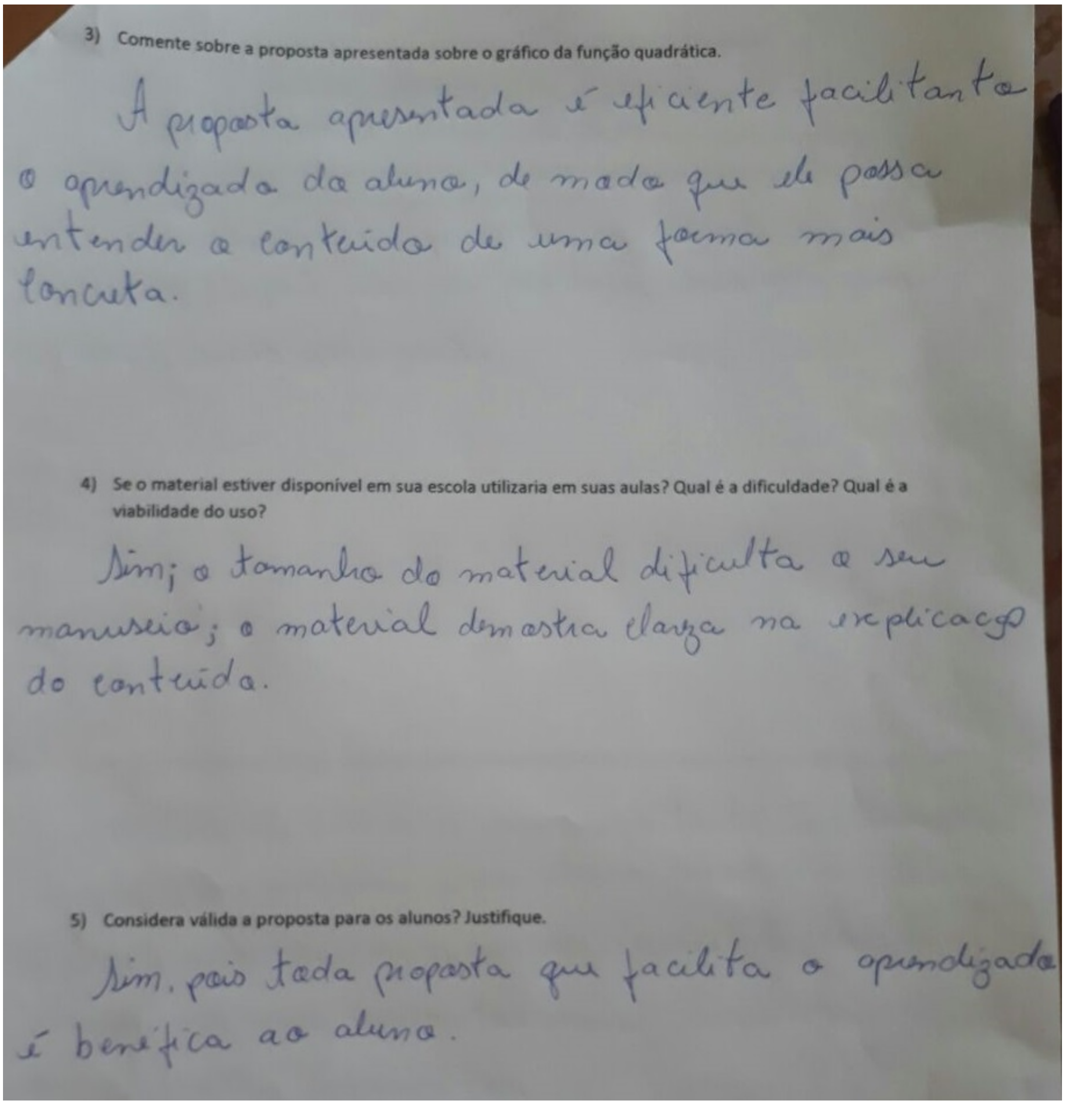
Se desenvolve em apresentar as noções básicas sobre as funções, além de produzir seus gráficas e assim suas aplicações.

2) Qual é a sua opinião sobre os capítulos referentes às funções do 1° e 2° graus nos livros didáticos que utiliza?

O livro didático é um importante instrumento de apoio ao professor e ao aluno, mais nem sempre está de acordo com a necessidade de cada aluno, às vezes apresenta uma linguagem difícil ou conteúdos incompletos.

Fonte: Arquivo Pessoal: foto do questionário respondido pela professora

Figura 21 – Questionário Professora 2



3) Comente sobre a proposta apresentada sobre o gráfico da função quadrática.

A proposta apresentada é eficiente facilitanto o aprendizado do aluno, de modo que ele possa entender o conteúdo de uma forma mais concreta.

4) Se o material estiver disponível em sua escola utilizaria em suas aulas? Qual é a dificuldade? Qual é a viabilidade do uso?

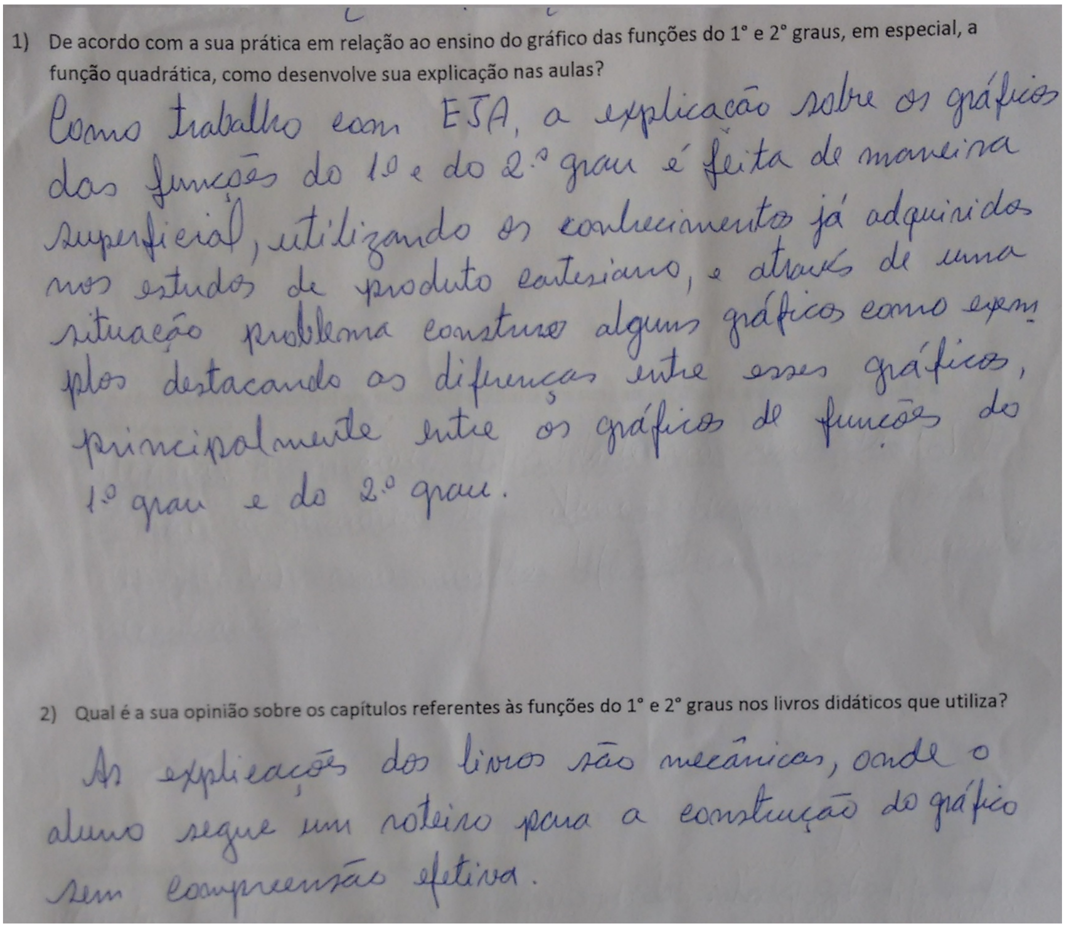
Sim; o tamanho do material dificulta o seu manuseio; o material demostra clareza na explicação do conteúdo.

5) Considera válida a proposta para os alunos? Justifique.

Sim, pois toda proposta que facilita o aprendizado é benéfica ao aluno.

Fonte: Arquivo Pessoal: foto do questionário respondido pela professora

Figura 22 – Questionário Professora 3



1) De acordo com a sua prática em relação ao ensino do gráfico das funções do 1° e 2° graus, em especial, a função quadrática, como desenvolve sua explicação nas aulas?

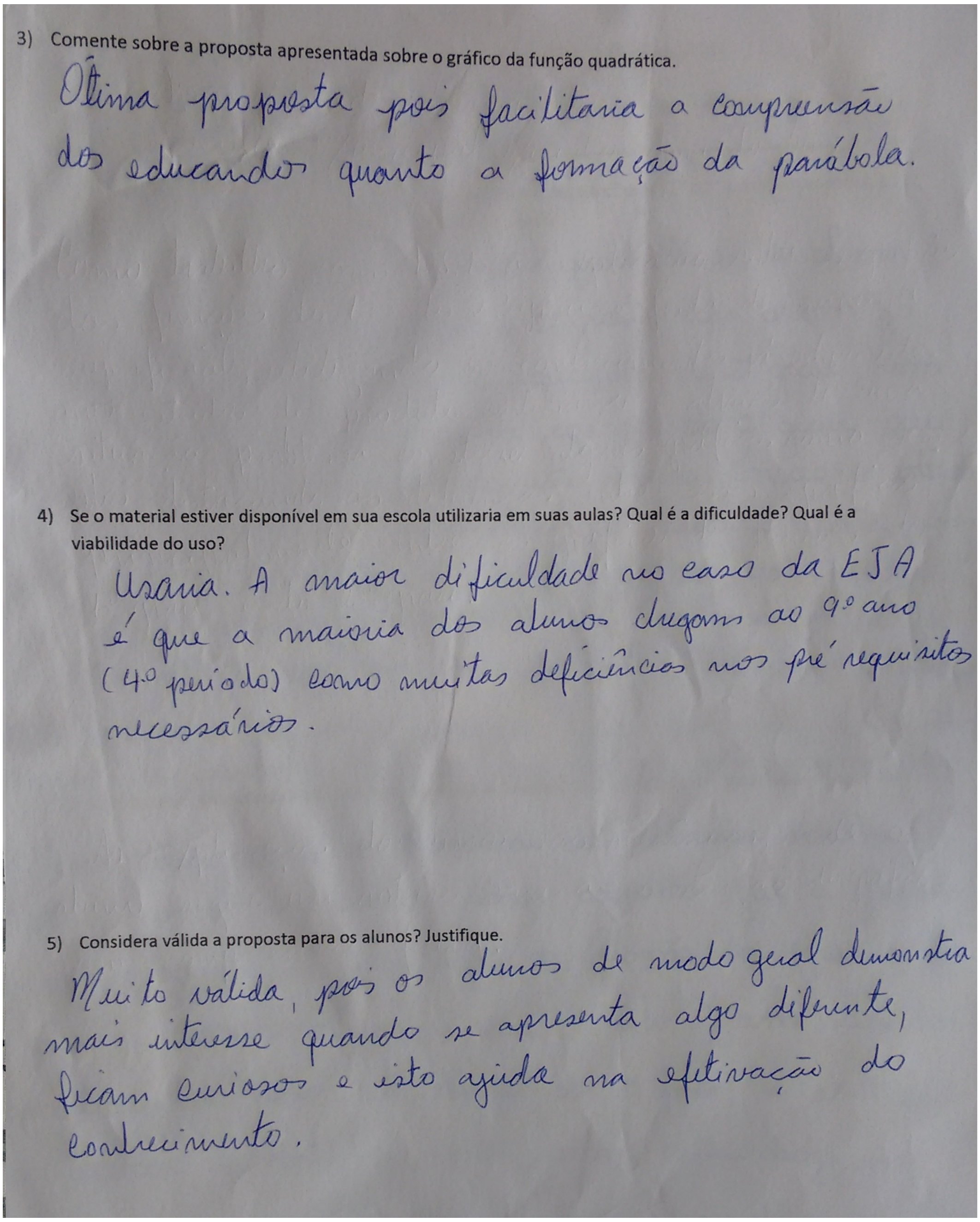
Como trabalho com EJA, a explicação sobre os gráficos das funções do 1º e do 2º grau é feita de maneira superficial, utilizando os conhecimentos já adquiridos nos estudos de produto cartesiano, e através de uma situação problema construo alguns gráficos como exemplos destacando as diferenças entre esses gráficos, principalmente entre os gráficos de funções do 1º grau e do 2º grau.

2) Qual é a sua opinião sobre os capítulos referentes às funções do 1° e 2° graus nos livros didáticos que utiliza?

As explicações dos livros são mecânicas, onde o aluno segue um roteiro para a construção do gráfico sem compreensão efetiva.

Fonte: Arquivo Pessoal: foto do questionário respondido pela professora

Figura 23 – Questionário Professora 3



3) Comente sobre a proposta apresentada sobre o gráfico da função quadrática.

Ótima proposta pois facilitaria a compreensão dos educandos quanto a formação da parábola.

4) Se o material estiver disponível em sua escola utilizaria em suas aulas? Qual é a dificuldade? Qual é a viabilidade do uso?

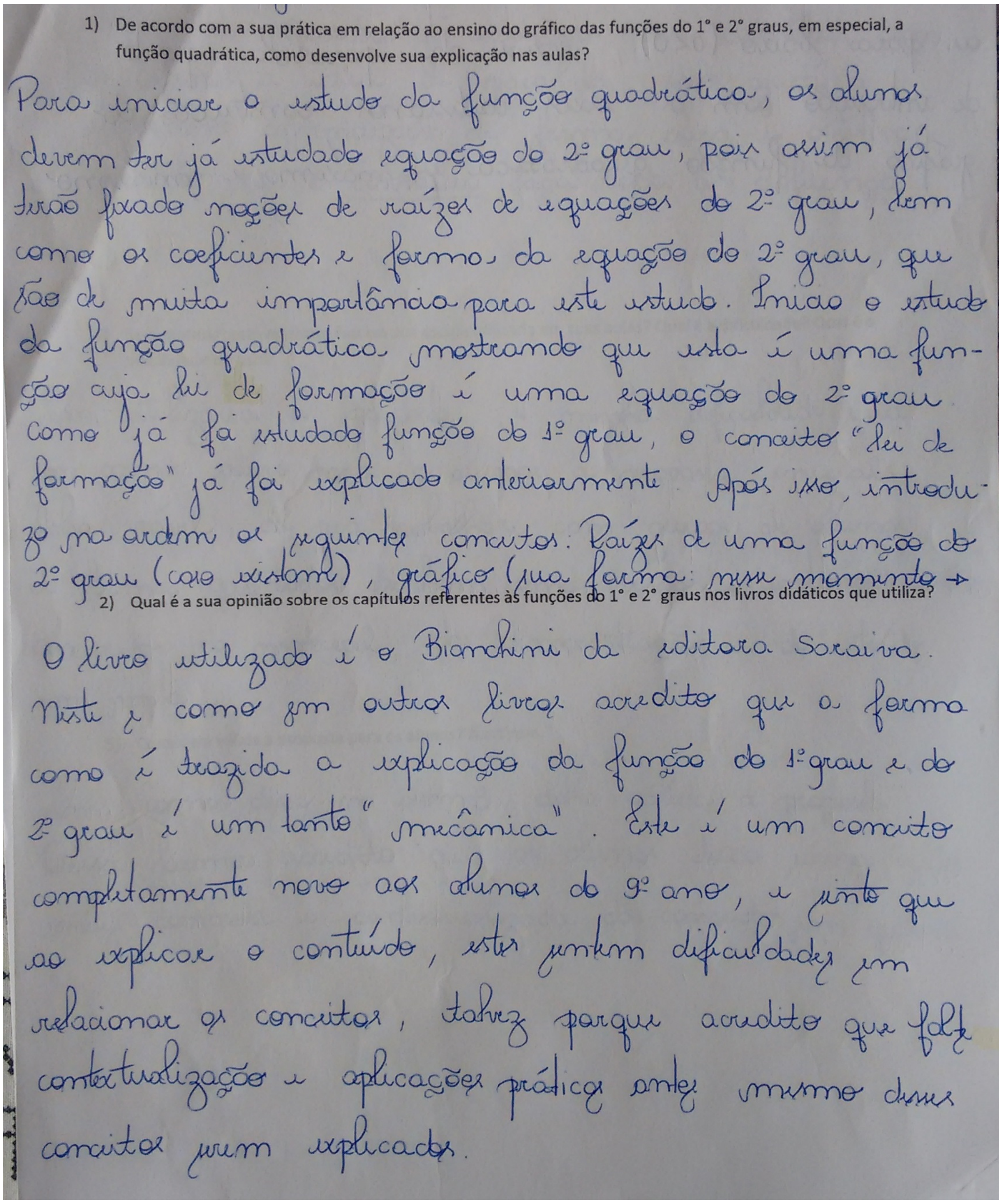
Usaria. A maior dificuldade no caso da EJA é que a maioria dos alunos chegam ao 9.º ano (4.º período) com muitas deficiências nos pré requisitos necessários.

5) Considera válida a proposta para os alunos? Justifique.

Muito válida, pois os alunos de modo geral demonstra mais interesse quando se apresenta algo diferente, ficam curiosos e isto ajuda na efetivação do conhecimento.

Fonte: Arquivo Pessoal: foto do questionário respondido pela professora

Figura 24 – Questionário Professora 4



1) De acordo com a sua prática em relação ao ensino do gráfico das funções do 1° e 2° graus, em especial, a função quadrática, como desenvolve sua explicação nas aulas?

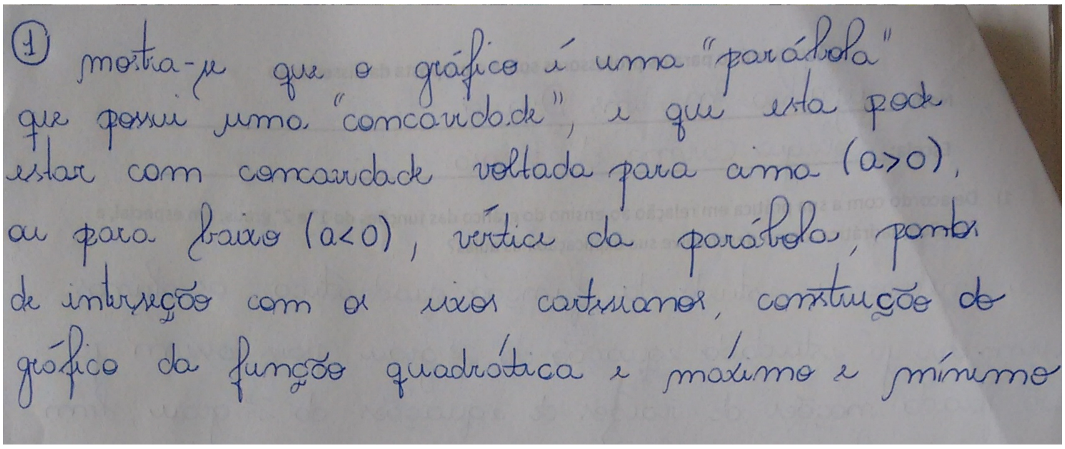
Para iniciar o estudo da função quadrática, os alunos devem ter já estudado equação do 2º grau, pois assim já terão fixado noções de raízes de equações do 2º grau, bem como os coeficientes e forma da equação do 2º grau, que são de muita importância para este estudo. Inicio o estudo da função quadrática mostrando que esta é uma função cuja lei de formação é uma equação do 2º grau. Como já foi estudado função do 1º grau, o conceito "lei de formação" já foi explicado anteriormente. Após isso, introduzo na ordem os seguintes conceitos: Raízes de uma função do 2º grau (caso existam), gráfico (sua forma: nesse momento →

2) Qual é a sua opinião sobre os capítulos referentes às funções do 1° e 2° graus nos livros didáticos que utiliza?

O livro utilizado é o Bianchini da editora Saraiva. Neste e como em outros livros acredito que a forma como é trazida a explicação da função do 1º grau e do 2º grau é um tanto "mecânica". Este é um conceito completamente novo aos alunos do 9º ano, e sinto que ao explicar o conteúdo, estes tenham dificuldades em relacionar os conceitos, talvez porque acredito que falta contextualização e aplicações práticas antes mesmo desses conceitos serem explicados.

Fonte: Arquivo Pessoal: foto do questionário respondido pela professora

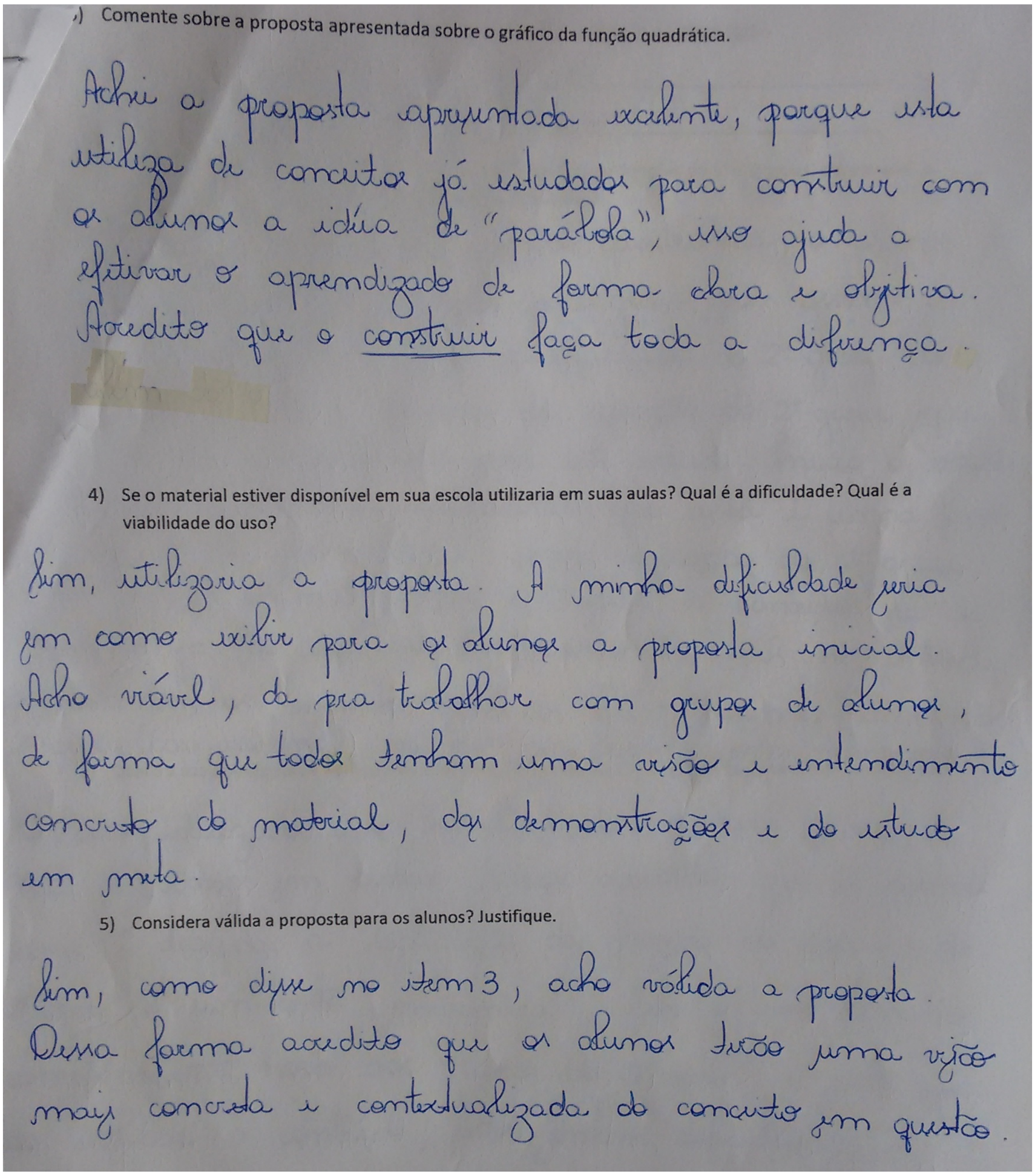
Figura 25 – Questionário Professora 4



① mostra-se que o gráfico é uma "parábola" que possui uma "concavidade", e que esta pode estar com concavidade voltada para cima (a>0), ou para baixo (a<0), vértice da parábola, pontos de interseção com os eixos cartesianos, construção do gráfico da função quadrática e máximo e mínimo

Fonte: Arquivo Pessoal: foto do questionário respondido pela professora

Figura 26 – Questionário Professora 4



) Comente sobre a proposta apresentada sobre o gráfico da função quadrática.

Achei a proposta apresentada excelente, porque esta utiliza de conceitos já estudados para construir com os alunos a idéia de "parábola", isso ajuda a efetivar o aprendizado de forma clara e objetiva. Acredito que o construir faça toda a diferença.

4) Se o material estiver disponível em sua escola utilizaria em suas aulas? Qual é a dificuldade? Qual é a viabilidade do uso?

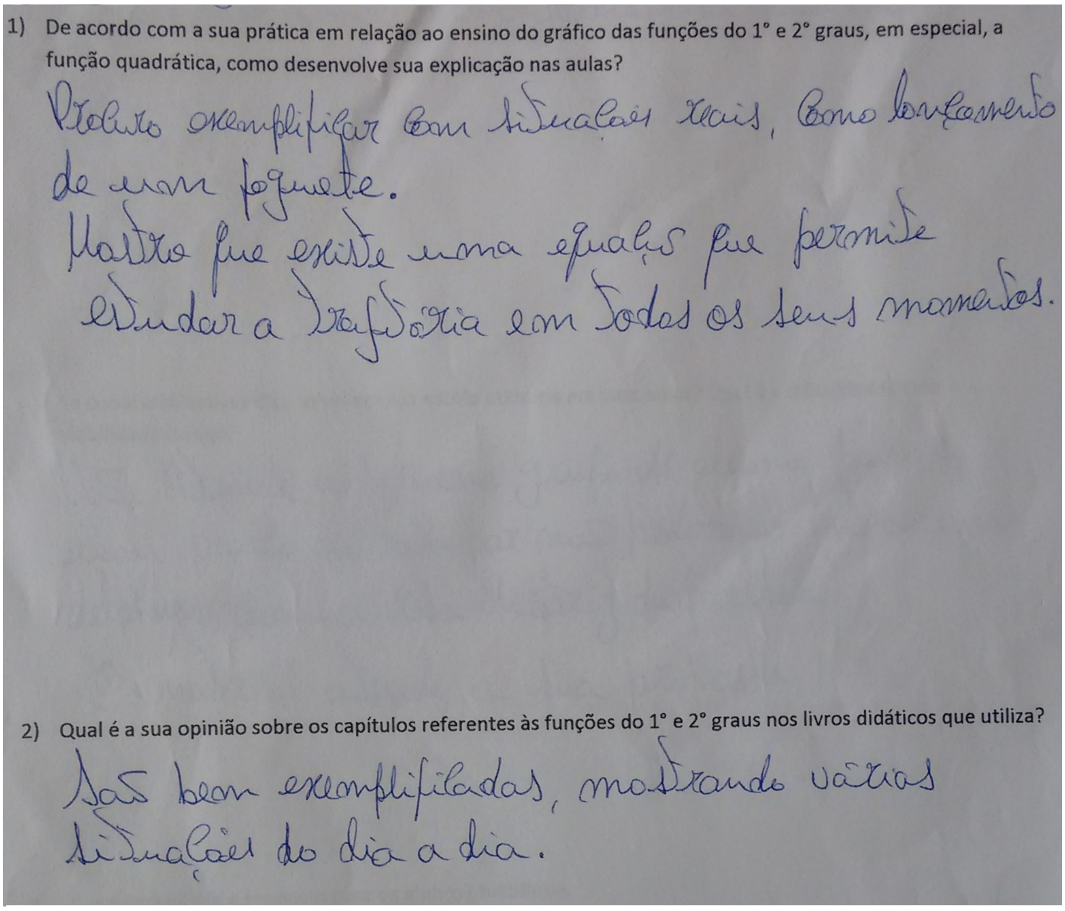
Sim, utilizaria a proposta. A minha dificuldade seria em como exibir para os alunos a proposta inicial. Acho viável, da pra trabalhar com grupos de alunos, de forma que todos tenham uma visão e entendimento concreto do material, das demonstrações e do estudo em meta.

5) Considera válida a proposta para os alunos? Justifique.

Sim, como disse no item 3, acho válida a proposta. Dessa forma acredito que os alunos terão uma visão mais concreta e contextualizada do conceito em questão.

Fonte: Arquivo Pessoal: foto do questionário respondido pela professora

Figura 27 – Questionário Professor 5



1) De acordo com a sua prática em relação ao ensino do gráfico das funções do 1° e 2° graus, em especial, a função quadrática, como desenvolve sua explicação nas aulas?

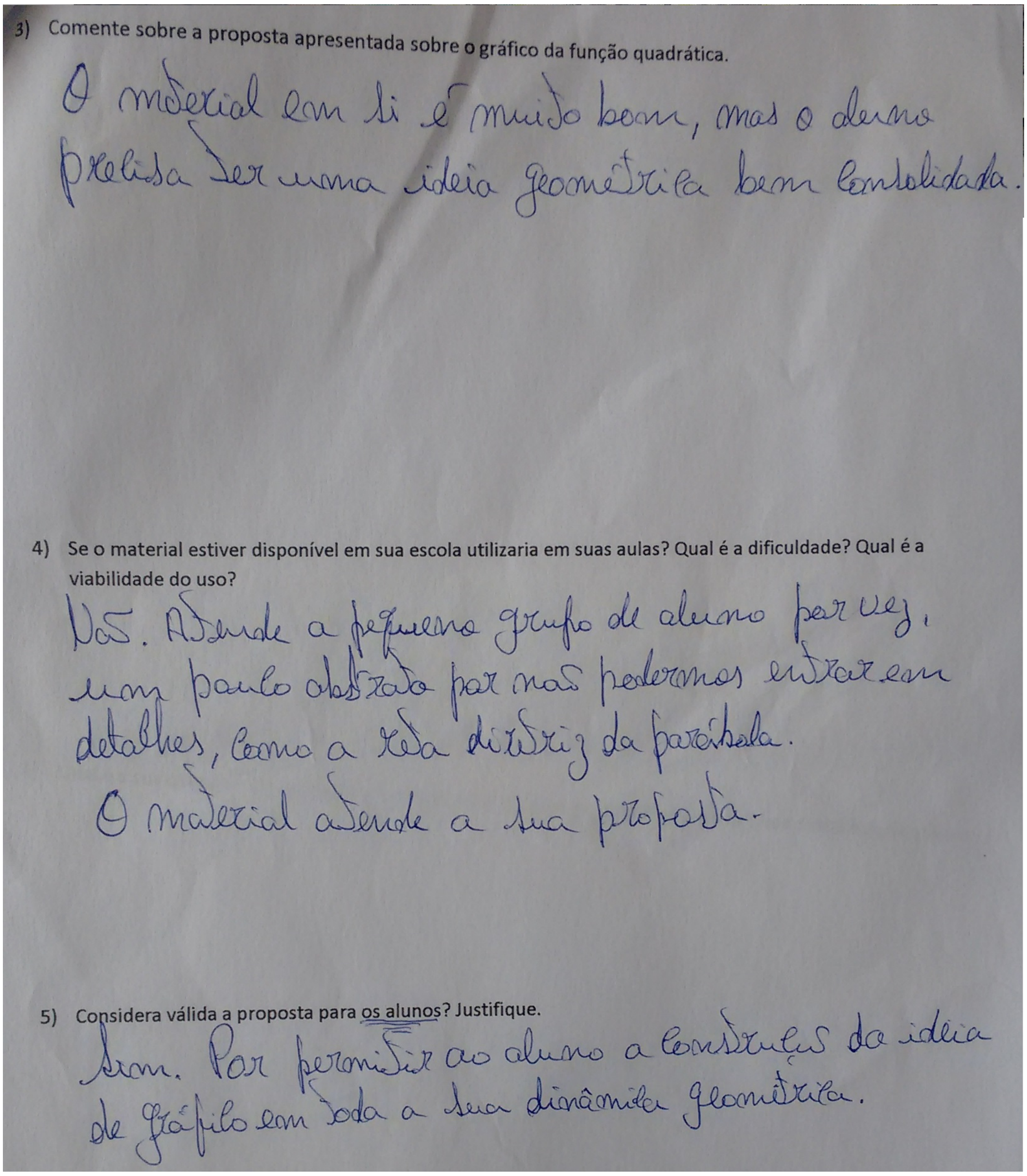
Procuro exemplificar com situações reais, como lançamento de um foguete.
Mostro que existe uma equação que permite estudar a trajetória em todos os seus momentos.

2) Qual é a sua opinião sobre os capítulos referentes às funções do 1° e 2° graus nos livros didáticos que utiliza?

São bem exemplificadas, mostrando várias situações do dia a dia.

Fonte: Arquivo Pessoal: foto do questionário respondido pelo professor

Figura 28 – Questionário Professor 5



3) Comente sobre a proposta apresentada sobre o gráfico da função quadrática.

O material em si é muito bom, mas o aluno precisa ter uma ideia geométrica bem consolidada.

4) Se o material estiver disponível em sua escola utilizaria em suas aulas? Qual é a dificuldade? Qual é a viabilidade do uso?

Não. Atende a pequeno grupo de aluno por vez, um pouco abstrato por nós podermos entrar em detalhes, como a reta diretriz da parábola.

O material atende a sua proposta.

5) Considera válida a proposta para os alunos? Justifique.

Sim. Por permitir ao aluno a construção da ideia de gráfico em toda a sua dinâmica geométrica.

Fonte: Arquivo Pessoal: foto do questionário respondido pelo professor

Figura 29 – Questionário Professor 6

1) De acordo com a sua prática em relação ao ensino do gráfico das funções do 1º e 2º graus, em especial, a função quadrática, como desenvolve sua explicação nas aulas?

O ensino do gráfico das funções do 1º e 2º graus, inicialmente, é feito por meio da escolha de alguns exemplos de funções, cujos gráficos são construídos em planos cartesianos, a partir da escolha de pontos aleatórios. Na sequência, a partir dos gráficos construídos, é feito um estudo analítico dos efeitos dos coeficientes na forma do gráfico. Na parte final, são propostas atividades de construção de gráficos de funções em programas computacionais como o GEOGEBRA, com o objetivo de reforçar os conceitos estudados.
Vale ressaltar que não são feitas demonstrações comprobatórias acerca das formas dos gráficos. A constatação da forma (reta ou parábola) é feita por meio do reconhecimento visual.

2) Qual é a sua opinião sobre os capítulos referentes às funções do 1º e 2º graus nos livros didáticos que utiliza?

Os livros didáticos que utilizo introduzem os capítulos com textos que mostram aplicações dos conteúdos, o que motiva o aluno a perceber o caráter prático e utilitário do conteúdo. Além disso, eles apresentam as demonstrações. Entretanto, elas exigem uma capacidade de abstração que a maioria dos alunos ainda não atingiu, além de elas demandarem um tempo do qual o professor não dispõe para o ensino dos conteúdos. Como proposta para fixar os conteúdos, os livros propõem alguns exercícios simples e repetitivos e, ainda, problemas de aplicação muito complexos. A partir dessa descrição, afirmo que os livros são bons, entretanto, exigem uma postura crítica e atenta do professor para selecionar partes do conteúdo e dos exercícios, considerando o perfil de cada turma, uma vez que os capítulos são longos.

Fonte: Arquivo Pessoal: foto do arquivo enviado pelo professor

Figura 30 – Questionário Professor 6

3) Comente sobre a proposta apresentada sobre o gráfico da função quadrática.

Do ponto de vista matemático, a proposta apresentada é muito interessante, uma vez que possibilita ao aluno verificar que os conceitos relacionados ao estudo da função quadrática podem ser demonstrados. Considerando que o estudo é feito a partir de uma experimentação prática, o processo ensino-aprendizagem se dá de forma mais dinâmica, o que pode atrair mais a atenção dos alunos. Entretanto, percebe-se que, para a execução das atividades relacionadas na proposta, precisa-se de um número significativo de aulas e, isto, muitas vezes, faz com que os alunos percam o foco. Desta forma, pode-se afirmar que a proposta apresenta-se como uma estratégia diferenciada de aprendizagem pelo seu caráter prático, entretanto, deve-se atentar para o tempo de execução para que ele não seja tão longo a ponto de desmotivar o aluno.

4) Se o material estiver disponível em sua escola, você o utilizaria em suas aulas? Qual é a dificuldade? Qual é a viabilidade do uso?

Utilizaria o material em turmas, cujo processo de abstração esteja bem desenvolvido, pois a maior parte dos meus alunos não mantém a concentração em atividades muito longas. A dificuldade de utilização está atrelada ao tempo que será gasto para desenvolver o conteúdo utilizando o material e, ao mesmo tempo, manter o aluno envolvido. A viabilidade está associada à relação que este material propicia entre o conhecimento teórico e prático, evidenciada pela utilização do material concreto.

5) Considera válida a proposta para os alunos? Justifique.

Enquanto professor de Matemática, penso que toda vez que tenho a oportunidade de desenvolver um conteúdo com o auxílio de material concreto, o aluno será beneficiado em sua aprendizagem, uma vez que este tipo de material facilita o processo de abstração que se configura como um grande obstáculo para a aprendizagem de Matemática, quando não está devidamente consolidado. Diante do exposto, considero que a proposta é válida.

Fonte: Arquivo Pessoal: foto do arquivo enviado pelo professor

# 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Desenvolver uma proposta de um conteúdo tão relevante no ensino da matemática durante o ensino médio, como é o caso do gráfico de funções, sem dúvidas seria um desafio, visto que os alunos não possuem conhecimentos prévios de introdução ao cálculo para acompanhar uma explicação rigorosa deste conceito.

Após as análises dos livros didáticos, pesquisas e conversas informais com professores de matemática, pude perceber a necessidade de insistir neste tema, nesta pesquisa e sugerir um roteiro de aula com auxílio de material prático para enriquecer a explicação dos gráficos de funções. No decorrer dos estudos para elaboração da proposta, surgiu a curiosidade de aprofundar a explicação do gráfico da função quadrática, a parábola.

Durante a preparação do plano de aula, utilizando como base os livros da Coleção PROFMAT [1], [2] e [3], em especial o livro Números e Funções Reais [2], todo cuidado com os conceitos e justificativas foram atentamente preparados, de forma a auxiliar o professor em sua explicação e também o aluno em seu entendimento.

No questionário respondidos pelos professores pude notar de forma unânime que o recurso visual, concreto, nas aulas auxilia a aprendizagem e torna a explicação mais significativa. Com a realidade que temos nas escolas, alguns professores não utilizariam das demonstrações com rigor matemático em suas aulas, mas o material prático desenvolvido teve boa aceitação de uso por parte deles.

Durante as aulas da proposta com meus alunos pude notar o interesse deles na justificativa do gráfico, despertei em alguns alunos o interesse em entender a matemática usando mais demonstrações. Foi possível relacionar conceitos de geometria com a álgebra das funções de forma a representar a todo momento com o uso do material prático o que os cálculos algébricos representavam. Foi uma experiência positiva, podendo ser confirmada nas respostas dos alunos nos questionários.

Considero que cada escola possui seu sistema, cada turma sua necessidade, e cada professor sua metodologia. Com o presente trabalho procuramos sugerir uma nova abordagem do gráfico da função quadrática, diferente dos livros didáticos e com utilização de um material prático que auxilia nesse entendimento que envolve cálculo algébrico e representação geométrica.

## REFERÊNCIAS

[1] GIRALDO, V.; CAETANO, P.; MATTOS, F. *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[2] LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[3] NETO, A. C. M. *Fundamentos de Cálculo*. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[4] BRASIL. Portaria nº 62, 01 de agosto de 2017. Diário Oficial da União, Poder Executivo, Brasília, DF, 02 ago. 2017. Seção 1, p. 16-17.

[5] Portal PNLD. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/pnld-2018/>. Acesso em: 22 de janeiro de 2018.

[6] BALESTRI, R. *Matemática: interação e tecnologia*, volume 1, 2.ed. São Paulo: Leya, 2016.

[7] CHAVANTE, E. *Quadrante matemática*, volume 1, 1. ed. São Paulo: Edições SM, 2016.

[8] DANTE, L. R. *Matemática: contexto & aplicações*, volume 1, 3.ed. São Paulo: Ática, 2016.

[9] IEZZI, G. et al. *Matemática: ciência e aplicações*, volume 1, 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

[10] LEONARDO, F. M. Obra coletiva. *Conexões com a matemática*, volume 1, 3. ed. São Paulo: Moderna, 2016.

[11] PAIVA, M. *Matemática*, volume 1, 3. ed. São Paulo; Moderna, 2015.

[12] SOUZA, J. R. et al. *#Contato matemática*, volume 1, 1. ed. São Paulo: FTD, 2016.

[13] GIOVANNI, J. R. et al. *Matemática uma nova abordagem: trigonometria*, volume 1, 3. ed. São Paulo: FTD, 2013.

# APÊNDICE A – Plano de Aula

A aula da proposta é destinada a alunos da 1ª Série do Ensino Médio e tem a duração de 100 minutos.

Essa aula pode ser ministrada na introdução de gráfico de função quadrática, com o objetivo geral de demonstrar que o gráfico da função quadrática é uma parábola, utilizando de recursos geométricos e algébricos.

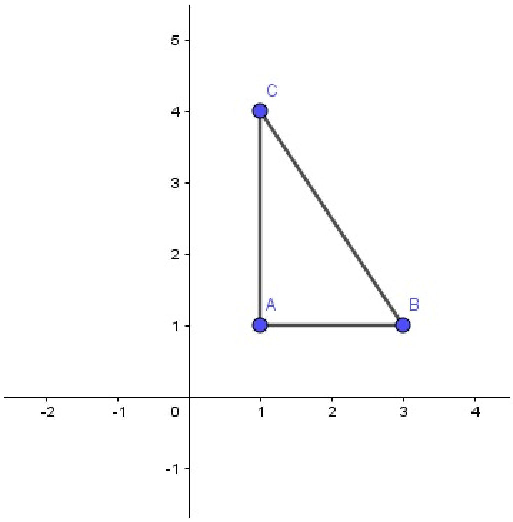
O roteiro da aula será:

1. Revisão: distância entre dois pontos
2. Definição da parábola
3. Translação do gráfico
4. Exercício

Iniciando com a revisão: distância entre dois pontos.

Considerando, de acordo com a figura que deve ser ilustrada no quadro negro $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, onde $x_A = x_C$ e $y_A = y_B$, temos:

Figura 31 – Distância entre dois pontos




Fonte: Arquivo Pessoal:Imagem feita através do 'software' GeoGebra

distância horizontal: $d(A, B) = x_B - x_A$

distância vertical: $d(A, C) = y_C - y_A$

distância entre dois pontos: pelo Teorema de Pitágoras, segue que

$$\begin{aligned}
(d(B,C))^2 &= (d(A,C))^2 + (d(A,B))^2 \\
(d(B,C))^2 &= (y_C - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2 \\
(d(B,C))^2 &= (y_C - y_B)^2 + (x_B - x_C)^2 \\
d(B,C) &= \sqrt{(y_C - y_B)^2 + (x_B - x_C)^2}
\end{aligned}$$

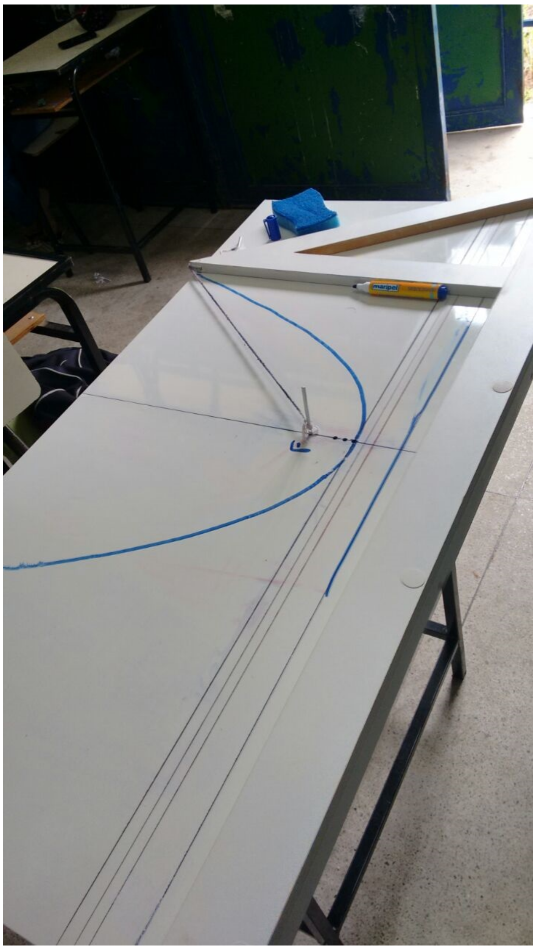
Vamos com esta aula provar que o gráfico de uma função polinomial do 2º grau é uma parábola.

Definição: Dados um ponto $F$ e uma reta horizontal $r$ que não o contém, a parábola é o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de $F$ e de $r$.

Iremos esboçar, no plano cartesiano, o gráfico de uma função quadrática.

Com o uso do quadro branco, de um esquadro, de um barbante e de um pincel para quadro branco, dados um ponto $F$ e uma reta horizontal, os alunos poderão observar o experimento do esboço da parábola.

Figura 32 – Material prático



Fonte: Fotos da aula de desenvolvimento da proposta.

Vamos provar que um ponto $P$ qualquer do gráfico de $f$ dista igualmente de $F$ e de $r$, para concluir então que todo ponto do gráfico de $f$ está na parábola determinada por $F$ e a reta $r$.

O gráfico da função $f$ dada por $f(x) = ax^2$, para todo $x$ real, é o conjunto de pontos $P = (x, y = f(x))$ tais que a distância de $P$ até $F = (0, \frac{1}{4a})$ é a mesma que a distância de $P$ até a reta $r : y = -\frac{1}{4a}$.

Para visualização do aluno da aplicação da definição de parábola e utilização do material prático, vamos explicar e exemplificar o gráfico da função $f(x) = \frac{x^2}{20}$ onde temos $F = (0, 5)$ e $r : y = -5$.

Exemplo: $f(x) = \frac{x^2}{20}$ tem $F = (0, 5)$ e $r : y = -5$.

A partir daí vamos demonstrar a definição algebricamente.

Mostremos que todo ponto do gráfico satisfaz $d(P, F) = d(P, r)$.

Seja $P = (x, ax^2)$, $F = (0, \frac{1}{4a})$ e $r : y = -\frac{1}{4a}$, temos

$$\begin{aligned} d(P,F) &= \sqrt{(0-x)^2 + (\frac{1}{4a} - ax^2)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{16a^2} - \frac{2ax^2}{4a} + a^2x^4} \\ &= \sqrt{a^2x^4 + \frac{2ax^2}{4a} + \frac{1}{16a^2}} = \sqrt{(ax^2 + \frac{1}{4a})^2} = ax^2 + \frac{1}{4a} = d(P,r). \end{aligned}$$

Concluímos então que todo ponto do gráfico pertence à parábola.

Agora, precisamos provar que dado um ponto $P = (x, y)$, na parábola, tal que $d(P, F) = d(P, r)$, este ponto $P$ é da forma $P = (x, ax^2)$, ou seja, $P$ pertence ao gráfico de $f$, para concluir então que todo ponto da parábola determinada por $F$ e a reta $r$ é um ponto do gráfico de $f$.

Sejam $P(x, y), F(0, \frac{1}{4a})$ e $r : y = -\frac{1}{4a}$. Vamos mostrar que se $d(P, F) = d(P, r)$, então $y = ax^2$.

$$\begin{aligned} d(P,F) &= d(P,r) \\ \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y - \tfrac{1}{4a})^2} &= (y + \tfrac{1}{4a}) \\ \Rightarrow 0 \le x^2 + (y - \tfrac{1}{4a})^2 &= (y + \tfrac{1}{4a})^2 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - \tfrac{2y}{4a} + \tfrac{1}{16a^2} &= y^2 + \tfrac{2y}{4a} + \tfrac{1}{16a^2} \\ \Rightarrow x^2 = \tfrac{4y}{4a} &\Rightarrow x^2 = \tfrac{y}{a} \\ \Rightarrow y = ax^2. \end{aligned}$$

Portanto, $P = (x, ax^2)$. Concluímos que todo ponto da parábola é um ponto do gráfico da função.

Para explicar a translação do gráfico note que toda função polinomial do 2º grau pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ \Leftrightarrow y &= ax^2 + \frac{2abx}{2a} + \frac{ab^2}{4ab^2} - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} \\ \Leftrightarrow y &= a(x^2 + \frac{2bx}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}) - (\frac{b^2 - 4ac}{4a}) \\ \Leftrightarrow y &= a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a} \end{aligned}$$

em que $-\frac{b}{2a} = x_V$ e $-\frac{\Delta}{4a} = y_V$.

Logo, $y = a(x - x_V)^2 + y_V$.

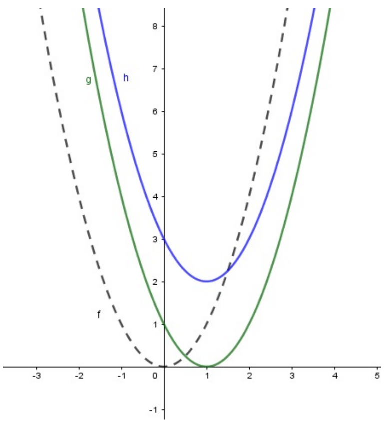
O $x_V$ está relacionado com a translação horizontal. E o $y_V$ está relacionado com a translação vertical.

Podemos observar simplesmente que o gráfico de $g(x) = a(x - x_V)^2$ resulta do gráfico $f(x) = ax^2$ pela translação horizontal $(x, y) \to (x + x_V, y)$, a qual leva o eixo $x = 0$ no eixo $x = x_V$.

E ainda, o gráfico de $h(x) = a(x - x_V)^2 + y_V$ é obtido do gráfico de $g(x) = a(x - x_V)^2$ por meio da translação vertical $(x, y) \to (x, y + y_V)$, que leva o eixo $OX$ na reta $y = y_V$.

Utilize da ilustração abaixo no quadro negro para auxiliar a explicação.

Figura 33 – Translação vertical e horizontal



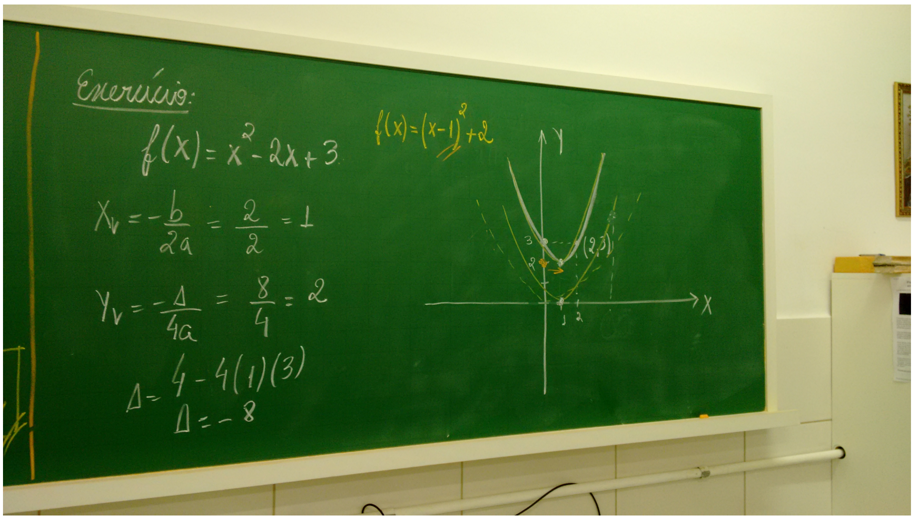

Fonte: Arquivo Pessoal:Imagem feita através do 'software' GeoGebra

Portanto, concluímos que o gráfico da função polinomial do 2º grau é uma parábola.

Comentar com os alunos que para esboçar o gráfico da função afim basta obter dois pontos do gráfico da função, pois uma reta é definida por dois pontos, para esboçar o gráfico de uma função quadrática basta determinar 3 pontos não-colineares do gráfico e traçar a parábola que passa por eles.

E na sequência fazer o exercício: Esboce o gráfico da função $f$ dada por $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

Figura 34 – Resolução do Exercício no quadro




Fonte: Fotos da aula de desenvolvimento da proposta.

Neste exercício exploramos a translação vertical e horizontal, além da simetria do gráfico em relação à reta $x = x_V$.

A avaliação da aula é dada por meio da participação dos alunos.

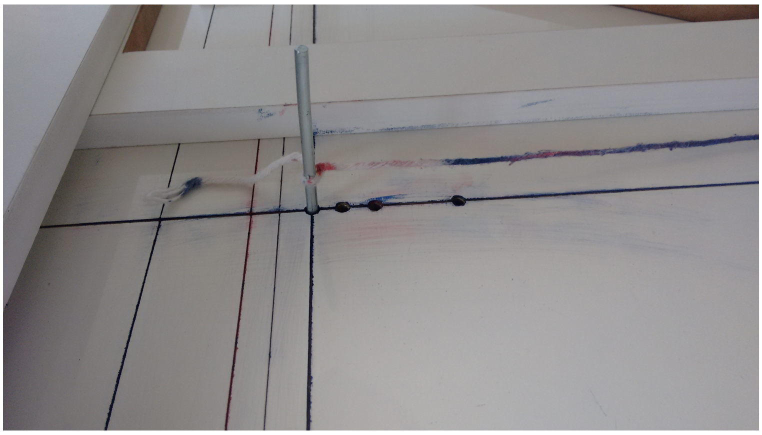
# APÊNDICE B – Construção do Material

Para confecção do material foram necessários uma placa de MDF na cor branca, com um lado liso e brilhante (como um quadro branco) com 1 metro de comprimento por 50 centímetros de largura, um esquadro móvel de preferência da mesma altura da placa de MDF (50 centímetros), barbante, dois pinos de metal e pincel para quadro branco. Para que o esquadro deslizasse, foi necessário anexar um suporte na base inferior da placa de MDF, com abertura ('gaveta') onde o esquadro se encaixasse exatamente.

De início, procuramos marcar no MDF o plano cartesiano de forma que o eixo $OY$ ficasse centralizado e o eixo $OX$ ficasse na razão de 4 para 1, ou seja, 40 centímetros em sua parte positiva e 10 centímetros em sua parte negativa.

Após, foram marcadas as retas $y = -1, y = -2$ e $y = -5$. Também foram marcados os seguintes pontos $(0,0), (0,1), (0,2)$ e $(0,5)$, para fixação, quando necessário, dos pinos de metal.

Figura 35 – Material prático

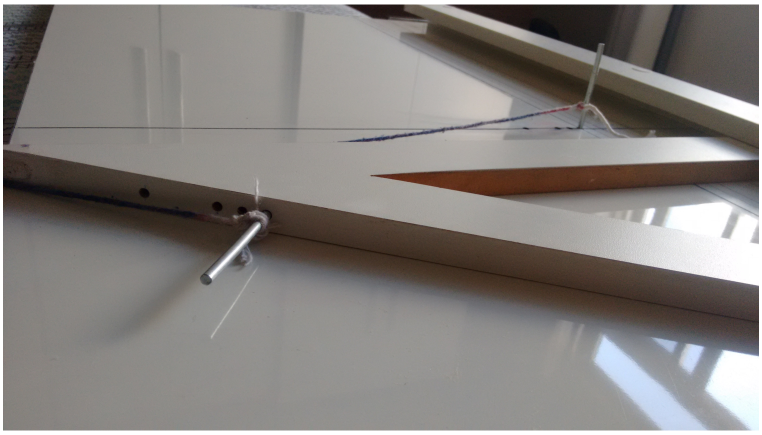


Fonte: Arquivo Pessoal: foto tirada do material prático.

No esquadro, em sua lateral, foram marcados também quatro pontos pela necessidade de variar o comprimento do barbante mediante os três exemplos determinados para serem usados na aula. Esses pontos tinham distâncias, respectivamente, 5, 8, 9 e 10 centímetros, a contar da ponta superior do esquadro. Na ponta do esquadro foi necessária uma placa de alumínio dobrada para que o barbante atingisse um ponto fixo e ficasse firme para o tracejado da parábola.

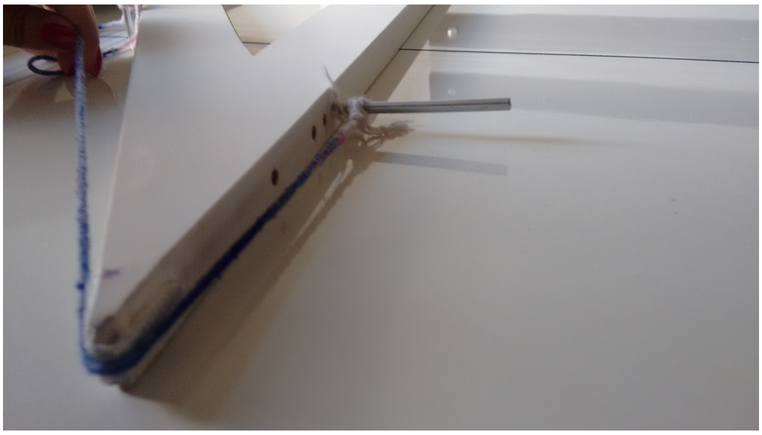
O barbante possui comprimento de 50 centímetros e em suas extremidades estão os dois pinos de metal amarrados.

Figura 36 – Material prático



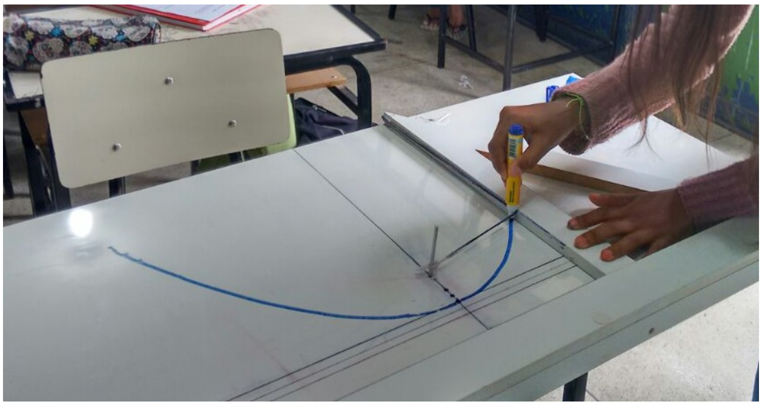
Fonte: Arquivo Pessoal: foto tirada do material prático.

Figura 37 – Material prático



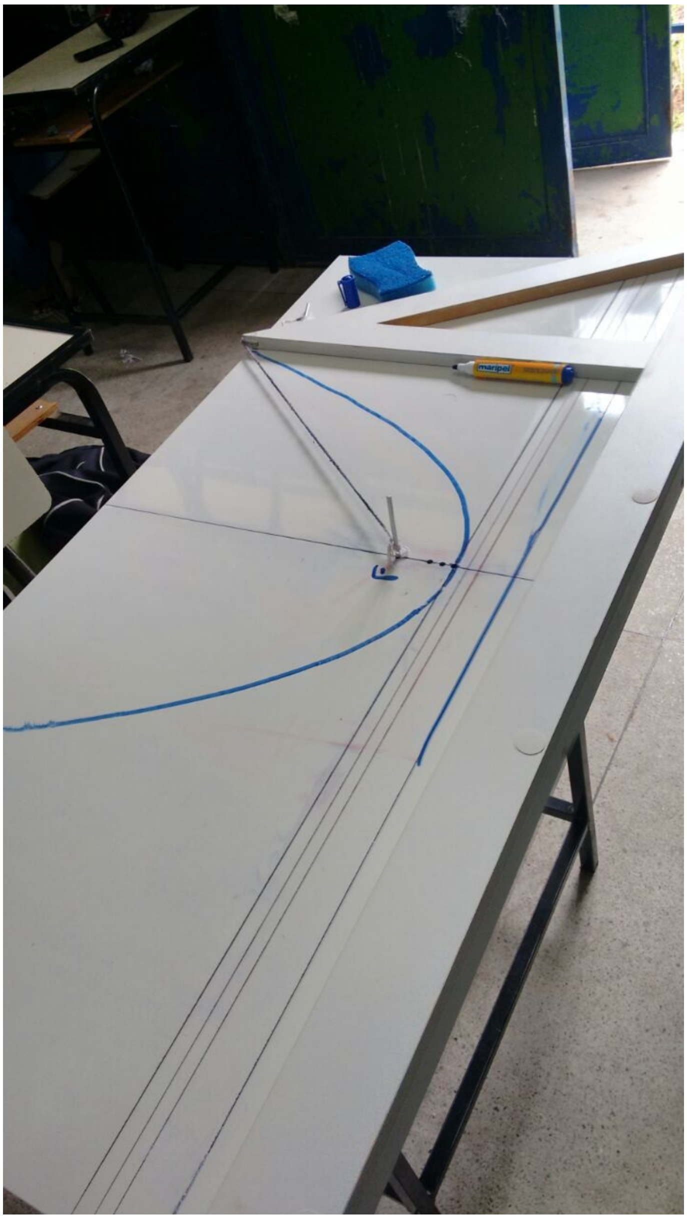
Fonte: Arquivo Pessoal: foto tirada do material prático.

Figura 38 – Material prático



Fonte: Fotos da aula de desenvolvimento da proposta.

Figura 39 – Material prático



Fonte: Fotos da aula de desenvolvimento da proposta.