



Universidade Federal de Juiz de Fora

Programa de Pós Graduação em

Engenharia Elétrica

Henrique Luis Moreira Monteiro

**CÁLCULO DE HARMÔNICOS E INTER-HARMÔNICOS
BASEADO NA NORMA IEC 61000-4-7**

Juiz de Fora

2014



Universidade Federal de Juiz de Fora

Programa de Pós Graduação em

Engenharia Elétrica

Henrique Luis Moreira Monteiro

CÁLCULO DE HARMÔNICOS E INTER-HARMÔNICOS BASEADO NA NORMA IEC 61000-4-7

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Juiz de Fora, área de concentração: Sistemas Eletrônicos, da Faculdade de Engenharia da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.

Juiz de Fora

2014

Henrique Luis Moreira Monteiro

**CÁLCULO DE HARMÔNICOS E INTER-HARMÔNICOS BASEADO
NA NORMA IEC 61000-4-7**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Juiz de Fora, área de concentração: Sistemas Eletrônicos, da Faculdade de Engenharia da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.

Aprovada em 17 de fevereiro de 2014

BANCA EXAMINADORA

Prof. Carlos Augusto Duque, D. Sc.

Universidade Federal de Juiz de Fora, UFJF

Orientador

Prof. Luciano Manhães de Andrade Filho, D. Sc.

Universidade Federal de Juiz de Fora, UFJF

Prof. Danton Diego Ferreira, D. Sc.

Universidade Federal de Lavras, UFLA

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida.

Aos meus pais, Heli e Rosilene, pelo incentivo e carinho dado em toda minha vida.

Aos meus irmãos, Gabriel e Melina, pela companhia e paciência durante todo esse tempo.

A todos meus familiares, que sempre me apoiaram a seguir em frente.

Agradeço aos amigos do NAEP pela amizade sincera.

Aos amigos do LAPTEL e PSCOPE, Mauro Prates, Leandro Manso, Eder Kapisch e Carlos Henrique, pela ajuda nas revisões dos textos, simulações, configurações das tabelas e pela amizade.

A família Ministério Universidade Renovadas, pelas orações e pela amizade de todos.

Ao professor Carlos Augusto Duque pelos ensinamentos, amizade e pela confiança depositada em mim durante todo esse tempo.

A CAPES, a Universidade Federal de Juiz de Fora e a Faculdade de Engenharia por todo o suporte dado para o desenvolvimento deste trabalho.

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Monteiro, Henrique Luis Moreira.
Cálculo de Harmônicos e Inter-harmônicos Baseado na Norma IEC 61000-4-7 / Henrique Luis Moreira Monteiro. -- 2014.
149 f.

Orientador: Carlos Augusto Duque
Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 2014.

1. harmônicos. 2. inter-harmônicos. 3. interpolação no domínio do tempo. 4. interpolação no domínio da frequência. 5. IEC 61000-4-7. I. Duque, Carlos Augusto, orient. II. Título.

RESUMO

O cálculo de componentes harmônicos e inter-harmônicos é efetuado geralmente através do cálculo da FFT (*Fast Fourier Transform*). Porém, com a utilização desta ferramenta, alguns problemas podem ser ocasionados de modo que a energia do sinal original se espalhe ao longo do espectro de frequência. Isto proporciona o surgimento de componentes que na realidade não existem. Este fenômeno é definido como espalhamento espectral e acontece pelo fato de haver algum componente inter-harmônico fora da resolução da frequência da FFT ou pelo fato do sinal ser amostrado de forma assíncrona. Para o primeiro caso, utiliza-se a norma IEC 61000-4-7 que apresenta uma abordagem de grupos e subgrupos a fim de englobar a energia dos inter-harmônicos espalhada ao longo do espectro de frequência. Quanto ao sinal amostrado de forma assíncrona, são apresentados métodos de interpolação no domínio da frequência e no domínio do tempo para corrigir o resultado obtido através da FFT. Dessa forma, este trabalho faz uma abordagem da norma IEC e de cada método de interpolação, comparando-os com intuito de se conhecer o melhor método a ser aplicado para o cálculo dos componentes contidos no sinal, de acordo com a norma IEC 61000-4-7.

Palavras chaves – Harmônicos, Inter-harmônicos, Interpolação no Domínio da Frequência, Interpolação no Domínio do Tempo, IEC 61000-4-7.

ABSTRACT

The harmonic and interharmonic components calculation is usually performance by using the FFT (Fast Fourier Transform). However, through the use of this tool, some problems may arise due the fact that the original signal energy can spread over the frequency spectrum, promoting the appearance of not actually existing components. This phenomenon is defined as spectral leakage and happens because either there is some interharmonic component whose frequency does not match the frequency resolution of the FFT, or because the signal is sampled asynchronously. In the first case, IEC 61000-4-7 provides the groups and subgroups approaches to include the interharmonic energy spreads over the frequency spectrum. In the case of asynchronous sampled rate, interpolation methods are presented both in the frequency domain and in time domain for correcting the result obtained through the FFT. Thus, this work addresses IEC approach and presents how the time and frequency interpolation can be used to improve the IEC criteria. The interpolation methods are compared in order to find the best method to be applied for the calculation of the components contained in the signal, in accordance with IEC 61000-4-7.

Keywords – Harmonics, Interharmonics, Frequency Domain Interpolation, Time Domain Interpolation, IEC 61000-4-7.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação do sinal $x(t)$ no tempo.	27
Figura 2 - Representação do sinal $x(t)$ na frequência.	28
Figura 3 – Representação dos principais componentes contidos em um sinal.....	31
Figura 4 – <i>Short-range leakage</i> em relação aos harmônicos com frequência de 120 e 180 Hz, devido à presença do componente de 157 Hz.....	32
Figura 5 – Representação do <i>Long-range leakage</i>	33
Figura 6 – Representação da sobreposição de sinais no <i>Long-range Leakage</i>	34
Figura 7 – Representação do sinal com (a) amostragem síncrona (60Hz) e (b) assíncrona (59Hz).....	35
Figura 8 – Espalhamento ocasionado pela amostragem assíncrona.....	36
Figura 9 – Representação das funções de janela (RIBEIRO, DUQUE, <i>et al.</i> , 2014).....	38
Figura 10 – Representação gráfica dos grupos e subgrupos de harmônicos.	40
Figura 11 – Representação gráfica dos grupos e subgrupos de inter-harmônicos.....	40
Figura 12 – Representação do método de interpolação na frequência.	46
Figura 13 – Relação entre δ (horizontal) e α (vertical) para janela retangular.....	49
Figura 14 – Relação entre δ (horizontal) e α (vertical) para janela de Hanning.	50
Figura 15 – Representação do sinal $x[n]$ no domínio da frequência.	50
Figura 16 – Representação do sinal $x[n]$ com a presença do terceiro e quinto harmônico.	52
Figura 17 – Erro na estimação das amplitudes dos componentes harmônicos e fundamental obtido através da interpolação aplicando (a) janela retangular e (b) janela de Hanning.....	54
Figura 18 – Erro da frequência obtido através da interpolação utilizando janela retangular e de Hanning.....	55
Figura 19 – Representação da aplicação dos grupos e sub-grupos. (a) Sinal na frequência, (b) agrupamento dos componentes harmônicos e inter-harmônicos.	57
Figura 20 – Representação do agrupamento dos componentes na frequência. (a) Agrupamento com a presença de todos os componentes, (b) agrupamento dos componentes harmônicos e (c) agrupamento dos componentes inter-harmônicos.	57

Figura 21 – Representação da aplicação de grupos e subgrupos em um sinal com amostragem assíncrona.....	58
Figura 22 – Representação do processo de interpolação.....	60
Figura 23 - Interpolação Polinomial (Lagrange).....	63
Figura 24 – Representação da interpolação de Lagrange em tempo Real.....	65
Figura 25–Representação esquemática da estrutura dos filtro do método de Lagrange de 3ª ordem.....	67
Figura 26 - Resultados obtidos através da interpolação de Lagrange em tempo real. (a) Sinal real, (b) sinal interpolado, (c) sinal ideal, (d) erro do sinal interpolado.....	69
Figura 27 - Funções B-spline de (a) 0º grau, (b) 1º grau, (c) 2º grau e (d) 3º grau.	72
Figura 28 - Representação das funções contidas nos intervalos das curvas B-spline de terceiro grau.....	73
Figura 29 - Demonstração da curva a ser interpolada.	74
Figura 30 - Representação da aplicação das funções B-spline no processo de interpolação.	75
Figura 31 - Representação do processo de interpolação B-spline com funções de 1º grau.	75
Figura 32 - Representação da função B-spline de terceiro grau e quarta ordem.....	76
Figura 33 - Função B-spline de terceiro grau.....	80
Figura 34 - Representação do processo de interpolação utilizando funções B-spline de terceiro grau.....	80
Figura 35 - Representação das funções $b_i(\alpha)$ de terceiro grau na região de interpolação.	81
Figura 36 - Interpolação B-spline (a) sinal real, (b) sinal interpolado, (c) sinal desejado, (d) erro do sinal interpolado com sinal desejado.....	84
Figura 37 – Representação esquemática do pré-filtro B-spline causal.....	89
Figura 38 - Representação do (a) sinal real; (b) sinal interpolado; (c) sinal desejado e erro entre o sinal interpolado e sina desejado.....	90
Figura 39 – Resposta na frequência da função B-spline, da função de aproximação e do interpolador ideal.....	92
Figura 40 – Resultados do processo de interpolação (a) sinal real, (b) sinal interpolado com pré-filtros Least Square, (c) sinal interpolado desejado e (d) erro entre os sinais interpolados.	93

Figura 41–Representação gráfica do erro obtido pelo método (a) Lagrange, (b) B-spline com pré-filtro spline cúbico causal e (c) B-spline com pré-filtro Least Square.....	95
Figura 42 – Representação esquemática do processo de interpolação no domínio da frequência.	101
Figura 43 – Erros dos subgrupos harmônicos (a) sem interpolação na frequência e (b) com interpolação na frequência.	103
Figura 44 – Subgrupos de inter-harmônicos (a) sem separação dos componentes e (b) com a separação dos componentes harmônicos e inter-harmônicos.	105
Figura 45 – Erros dos subgrupos harmônicos (a) sem a utilização da separação dos componentes na frequência e (b) com a separação dos componentes no domínio da frequência.	107
Figura 46 – Subgrupos de inter-harmônicos (a) sem a separação dos componentes na frequência e (b) com a separação dos componentes no domínio da frequência.....	109
Figura 47 – Erros dos subgrupos harmônicos (a) sem a utilização da interpolação na frequência e (b) com a interpolação na frequência.....	111
Figura 48 – Subgrupos de inter-harmônicos (a) sem a separação dos componentes na frequência e (b) com a separação dos componentes na frequência.	112
Figura 49 – Representação do erro obtido através da aplicação da interpolação no domínio da frequência.	113
Figura 50 – Representação esquemática do processo de interpolação no domínio do tempo.	113
Figura 51 – Erro dos subgrupos harmônicos obtidos através da interpolação no domínio do tempo, (a) Lagrange, (b) B-spline com pré-filtro de função inversa e (c) B-spline com pré-filtro função <i>least-square</i>	117
Figura 52 – Subgrupos de inter-harmônicos utilizando interpolação de (a) Lagrange e (b) B-spline com pré-filtro com função inversa e (c) B-spline com pré-filtro com função <i>least-square</i>	119
Figura 53 – Erro dos subgrupos harmônicos aplicando a interpolação (a) Lagrange, (b) B-spline com pré-filtro função inversa e (c) B-spline com pré-filtro função <i>least-square</i>	123
Figura 54 – Esboço dos subgrupos inter-harmônicos do processo de interpolação (a) Lagrange, (b) B-spline com pré-filtro função inversa e (c) B-spline com pré-filtro função <i>least-square</i>	125

Figura 55 – Erros dos subgrupos harmônicos utilizando a interpolação (a)Lagrange, (b) B-spline com ré-filtro função inversa e (c) B-spline com pré-filtro <i>least-square</i>	129
Figura 56 – Subgrupos inter-harmônicos calculados através do processo de interpolação (a) Lagrange, (b) B-spline com pré-filtro função inversa e (c) B-spline com pré-filtro <i>least-square</i>	131
Figura 57 – Variação de frequência do componente fundamental, (a) rampa e (b) senoidal.....	132
Figura 58 – Representação dos subgrupos harmônicos, (a) interpolação B-spline e (b) interpolação no domínio da frequência.	135
Figura 59 – Representação dos subgrupos de inter-harmônicos, (a) Interpolação B-spline e (b) interpolação no domínio da frequência.	136
Figura 60 – Resultados dos subgrupos harmônicos, (a) B-spline e (b) interpolação na frequência.	139
Figura 61 – Resultados dos subgrupos inter-harmônicos, (a) B-spline e (b) interpolação na frequência.....	141

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Janelas no domínio do tempo.	37
Tabela 2 – Janelas no domínio da frequência.....	37
Tabela 3 – Representação para o cálculo dos parâmetros α , δ e ω_0	48
Tabela 4 – Resultados obtidos através do método de interpolação na frequência.	51
Tabela 5 – Resultados obtidos através da aplicação da janela retangular, janela de Hanning e da interpolação no domínio da frequência (Os erros em porcentagem são dados em módulos).....	53
Tabela 6 - Algoritmo de Interpolação de Lagrange de 3ª ordem.....	68
Tabela 7 - Atribuição dos parâmetros de posição, derivada de primeira ordem e derivada de segunda ordem para a definição dos coeficientes das funções de 3º grau.....	77
Tabela 8 - Constantes das equações de terceiro grau contidas na função B-spline.....	79
Tabela 9 – Parâmetros estabelecidos para o caso 1.....	98
Tabela 10 – Parâmetros estabelecidos para o caso 2.....	99
Tabela 11 – Parâmetros estabelecidos para o caso 3.....	99
Tabela 12 – Parâmetros estabelecidos para o caso 4.....	100
Tabela 13 – Parâmetros estabelecidos para o caso 5.....	100
Tabela 14 – Resultados dos subgrupos harmônicos utilizando os valores sem interpolação e com interpolação no domínio da frequência.....	102
Tabela 15 – Resultados obtidos através da utilização dos subgrupos harmônicos sem interpolação e com a aplicação da interpolação n domínio da frequência.	103
Tabela 16 – Resultados obtidos através da aplicação da janela retangular e de Hanning, para a presença de um inter-harmônico com frequência igual a 83,25 Hz.....	104
Tabela 17 – Resultados dos subgrupos inter-harmônicos sem e com a separação dos componentes no domínio da frequência.	104
Tabela 18 – Resultados obtidos dos subgrupos harmônicos.	106
Tabela 19 – Resultados obtidos dos erros médio, médio quadrático e máximo dos subgrupos harmônicos.	107
Tabela 20 – Resultados obtidos do segundo subgrupo inter-harmônico sem a separação e com a separação dos componentes no domínio da frequência.	108

Tabela 21 – Resultados dos subgrupos inter-harmônicos obtidos sem a aplicação da separação dos componentes e com a separação dos componentes no domínio da frequência.	108
Tabela 22 – Amplitudes e erros dos subgrupos harmônicos com a aplicação da interpolação n domínio da frequência e sem a interpolação.....	110
Tabela 23 – Erros dos subgrupos harmônicos com a aplicação da interpolação na frequência e sem interpolação.	111
Tabela 24 – Resultados obtidos do segundo subgrupo inter-harmônico sem a separação e com a separação dos componentes no domínio da frequência.	112
Tabela 25 – Resultados dos subgrupos inter-harmônicos obtidos sem a aplicação da separação dos componentes e com a separação dos componentes no domínio da frequência.	112
Tabela 26 – Resultados dos subgrupos harmônicos obtidos através da interpolação de Lagrange.	115
Tabela 27 – Resultados dos subgrupos harmônicos obtidos através da aplicação da interpolação B-spline, utilizando pré-filtros.....	116
Tabela 28 – Resultados dos subgrupos harmônicos.....	117
Tabela 29 – Resultados dos subgrupos de inter-harmônicos obtidos utilizando a interpolação de Lagrange.....	118
Tabela 30 – Resultados dos subgrupos de inter-harmônicos utilizando a interpolação B-spline.....	118
Tabela 31 – Resultado dos erros dos subgrupos inter-harmônicos.	119
Tabela 32 – Resultados dos subgrupos harmônicos obtidos através da interpolação de Lagrange.	121
Tabela 33 – Resultados dos subgrupos harmônicos obtidos através da aplicação da interpolação B-spline, utilizando pré-filtros.....	122
Tabela 34 – Resultados dos subgrupos harmônicos.	123
Tabela 35 – Resultados dos subgrupos de inter-harmônicos obtidos utilizando a interpolação de Lagrange.....	124
Tabela 36 – Resultados dos subgrupos de inter-harmônicos utilizando a interpolação B-spline.....	124
Tabela 37 – Resultado dos erros dos subgrupos inter-harmônicos.	125
Tabela 38 – Resultados dos subgrupos harmônicos obtidos através da interpolação de Lagrange.	127

Tabela 39 – Resultados dos subgrupos harmônicos obtidos através da aplicação da interpolação B-spline, utilizando pré-filtros.....	128
Tabela 40 – Resultados dos subgrupos harmônicos.....	129
Tabela 41 – Resultados dos subgrupos de inter-harmônicos obtidos utilizando a interpolação de Lagrange.....	130
Tabela 42 – Resultados dos subgrupos de inter-harmônicos utilizando a interpolação B-spline.....	130
Tabela 43 – Resultado dos erros dos subgrupos inter-harmônicos.	131
Tabela 44 – Resultado dos subgrupos harmônicos e seus respectivos erros.	134
Tabela 45 – Resultado dos erros médio, médio quadrático e máximo dos subgrupos harmônicos.	135
Tabela 46 – Resultados obtidos do segundo subgrupo inter-harmônico.....	136
Tabela 47 – Resultados dos erros médio, médio quadrático e máximo dos subgrupos de inter-harmônicos.....	136
Tabela 48 – Resultados dos subgrupos harmônicos.....	138
Tabela 49 – Resultados dos erros médio, médio quadrático e máximo dos subgrupos harmônicos.	139
Tabela 50 – Resultados do segundo subgrupo inter-harmônico.....	140
Tabela 51 – Resultados dos erros médio, médio quadrático e máximo dos subgrupos inter-harmônicos.....	140

Sumário

1. INTRODUÇÃO.....	17
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	23
2.1. Introdução à análise espectral.....	23
2.2. Principais ferramentas de análise espectral.....	24
2.2.1. Cálculo da DFT de sequências reais.....	29
2.3. Espalhamento Espectral.....	30
2.4. Janelas.....	36
2.5. IEC 61000-4-7.....	38
2.6. Métodos utilizados para reduzir o espalhamento espectral.....	41
2.7. Conclusão do Capítulo.....	43
3. INTERPOLAÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA E APLICAÇÃO DE GRUPOS E SUBGRUPOS BASEADO NA NORMA IEC 61000-4-7.....	44
3.1. Interpolação no Domínio da Frequência.....	44
3.2. Aplicação dos grupos e sub-grupos.....	55
3.3. Conclusão.....	59
4. INTERPOLAÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO.....	60
4.1. Interpolação Polinomial (<i>off-line</i>).....	61
4.2. Interpolação Polinomial (<i>on-line</i>).....	64
4.3. Interpolação B-spline.....	70
4.3.1. Pré-Filtro Spline Cúbico Causal.....	85
4.3.2. Pré-Filtro <i>Least-Square</i>	90
4.4. Conclusão.....	95
5. RESULTADOS E COMPARAÇÕES DE MÉTODOS.....	97

5.1. Definição dos parâmetros do sinal para a obtenção dos resultados: casos simulados.....	98
5.1.1. Definição do Caso 1	98
5.1.2. Definição do Caso 2	98
5.1.3. Definição do Caso 3	99
5.1.4. Definição do Caso 4	99
5.1.5. Definição do Caso 5	100
5.2. Resultados obtidos através da interpolação no domínio da frequência	100
5.2.1. Resultado de simulação para o Caso 1	101
5.2.2. Resultados de simulação para o caso 2.....	105
5.2.3. Resultados de Simulação para o Caso 3	109
5.3. Resultados obtidos através da interpolação no domínio do tempo 113_Toc384036514	
5.3.1. Resultado de Simulação para o Caso 1.....	114
5.3.2. Resultado de Simulação para o Caso 2.....	120
5.3.3. Resultado de Simulação para o Caso 3.....	126
5.4. Comparação dos métodos de interpolação no domínio da frequência com interpolação B-spline	132
5.4.1. Resultado de Simulação para o Caso 4.....	133
5.4.2. Resultado de Simulação para o Caso 5.....	137
5.5. Conclusões do Capítulo	141
6. CONCLUSÕES FINAIS	143
7. TRABALHOS FUTUROS	145
8. BIBLIOGRAFIA	146
APÊNDICE A – PRODUÇÃO BIBLIOGRÁFICA.....	149
A.1 ARTIGOS EM CONGRESSOS INTERNACIONAIS	149

1. INTRODUÇÃO

Com a presença de dispositivos de eletrônica de potência, bem como a presença de fornos a arco, cargas não lineares, dentre outros, acontece a distorção do sinal pelo fato do surgimento de componentes, não desejáveis no sistema. Esses componentes podem ser denominadas como harmônicos e inter-harmônicos.

Podem-se definir os componentes harmônicos como sendo componentes que possuem valores de frequência iguais a algum valor múltiplo inteiro do componente fundamental e os inter-harmônicos como componentes que não possuem valores de frequência iguais a um múltiplo inteiro da frequência do componente fundamental.

Estes componentes são indesejáveis no sistema, uma vez que podem reduzir a vida útil de equipamentos (como transformador, relés e fusíveis), devido ao sobreaquecimento, ou de motores, ocasionando torques indevidos. Podem comprometer o funcionamento de equipamentos eletrônicos sensíveis a distorções na forma de onda de tensão. Podem provocar também a ocorrência de ressonância dos capacitores, além de outros problemas (TESTA, AKRAM, *et al.*, 2007), (LI, XU e TAYJASANANT, 2003).

Por isso, é importante o monitoramento destes componentes no sistema elétrico a fim de detectá-los e conseqüentemente eliminá-los ou reduzi-los. Isso proporciona maior tempo de vida útil aos dispositivos, bem como o melhor funcionamento dos mesmos.

Com o intuito de identificar a existência destes componentes, muitas técnicas têm sido propostas para monitorar o valor dos mesmos no sistema de potência. Dentre os métodos empregados, a Transformada Rápida de Fourier do inglês *Fast Fourier Transform* é o mais utilizado. Esta ferramenta é utilizada para a monitoração do sistema elétrico de potência por causa da sua eficiência computacional.

Porém, um problema com a utilização da FFT ocorre quando o sinal que está sendo monitorado contém componentes inter-harmônicos, ou se a frequência do componente fundamental sofre algum tipo de variação e a taxa de amostragem deixa de ser múltipla inteira desta frequência. Isto faz com que o processo de amostragem seja assíncrono. Com isso acontece um fenômeno denominado como espalhamento espectral, que faz a

energia dos componentes se espalhem ao longo do espectro de frequência. Assim, surgem componentes que na realidade não existem. Portanto, para monitorar os componentes contidos no sistema, este fenômeno deve ser controlado e minimizado.

Na primeira hipótese, onde há a presença de componentes inter-harmônicos, a energia espalhada pode ser classificada de acordo com a localização destes componentes. Se o inter-harmônico possuir um valor de frequência distante o suficiente de algum componente harmônico, de forma que o espalhamento, provocado pelos inter-harmônicos, é praticamente desconsiderado sobre estes componentes, o espalhamento é definido como espalhamento espectral de curta faixa, do inglês *short-range-leakage*. Se o componente inter-harmônico possuir uma frequência próxima a algum componente harmônico, de modo que o espalhamento espectral influencie em sua energia, define-se este tipo de espalhamento como espalhamento de longa faixa, do inglês *long-range-leakage* (LIU, HIMMEL e BONFIG, 2005). Este último, se estiver próximo à componente fundamental pode afetar uma maior faixa ao longo de todo o espectro de frequência ao se comparar com espalhamento em curta faixa.

O espalhamento espectral ocorre também, como comentado anteriormente, devido à variação na frequência do componente fundamental e quando a frequência de amostragem não corrige de algum modo esta variação, gerando um processo de amostragem não coerente. Este tipo de espalhamento é ocasionado devido ao sinal ser fornecido para a FFT de forma assíncrona. Assim o resultado obtido pela FFT é composto por espalhamento ao longo de todo o espectro de frequência. Consequentemente, este espalhamento proporciona maior erro na detecção dos componentes.

Em função deste fenômeno de espalhamento, ocasionado com a utilização da FFT, a IEC (*International Electrotechnical Commission*) introduziu, através da norma 61000-4-7, o método de grupos e subgrupos de harmônicos e inter-harmônicos (IEC, 61000-4-7, 2002), utilizando o somatório de cada componente elevado ao quadrado. Assim, para o cálculo dos grupos harmônicos, são considerados determinados componentes que se localizam dentro de uma faixa estabelecida pela norma IEC. Quanto aos inter-harmônicos, o cálculo é baseado na faixa entre um componente harmônico e outro. Portanto, esta norma estabelece uma maneira de agrupar a energia de cada componente, espalhada no espectro de frequência.

Porém, no caso da variação da frequência do componente fundamental, a aplicação somente da norma IEC não é o suficiente para englobar a energia de cada componente. Nesse caso, é utilizado o emprego de interpolação do sinal no sistema com o intuito de tornar síncrono o sinal amostrado, propiciando um bom desempenho da FFT. De fato, a norma IEC 61000-4-7 requer que a amostragem seja síncrona, não descrevendo em seu escopo o método necessário para realizar a sincronização.

O processo de interpolação é uma técnica para se realizar a sincronização de maneira indireta, ou seja, sem a necessidade de ajustar a frequência de amostragem do sistema de aquisição. Ela pode ser aplicada no domínio da frequência ou no domínio do tempo. O processo de interpolação na frequência é aplicado ao sinal depois do cálculo da FFT ser efetuado, de forma *off-line*, corrigindo os erros dos componentes através do espalhamento resultante no espectro de frequência (TESTA, GALLO e LANGELLA, 2004), (GALLO, LANGELLA e TESTA, 2004), (FERRERO, SALICONE e TOSCANI, 2011). A interpolação no domínio do tempo é empregada antes da aplicação da FFT e pode ser aplicada de forma *off-line* ou *on-line*.

O processo de interpolação no domínio da frequência se dá em localizar os componentes harmônicos e detectar sua respectiva variação na frequência a fim de corrigir seu valor de amplitude e frequência, de acordo com seus valores reais. Para isto, deve-se considerar qual função de janela foi aplicada ao sinal, a fim de efetuar o cálculo de forma adequada.

A interpolação no domínio da frequência pode ser utilizada também para separação entre os componentes harmônicos e inter-harmônicos (GALLO, LANGELLA e TESTA, 2004). Assim, a influência de algum componente é reduzida nos demais. A separação dos componentes pode ser realizada tanto na aplicação da janela retangular como da janela de Hanning e tem o objetivo de fazer com que o cálculo dos grupos e subgrupos harmônicos e inter-harmônicos englobe somente a energia de seus respectivos componentes.

Para o cálculo da interpolação no domínio do tempo, como dito anteriormente, este processo pode ser realizado de forma *off-line* e *on-line*. No processo *off-line*, todas as amostras do sinal são previamente conhecidas e, portanto, é aplicado o cálculo de forma a encontrar os valores intermediários às amostras e fornecer um sinal síncrono para o cálculo do espectro de frequência através da FFT. No processo de interpolação *on-line*,

à medida que as amostras são coletadas, precisa-se estimar o valor de frequência do sinal e efetuar o cálculo do valor de cada amostra, na nova escala de tempo, também para que o sinal fornecido seja síncrono (UNSER, ALDROUBI e EDEN, 1993), (FERRER-ARNAU, REIG-BOLAÑO, *et al.*, 2013), (LIM e MACLEOD, 1996).

Os métodos utilizados na interpolação no domínio do tempo, para este trabalho, são a interpolação de Lagrange e a interpolação B-spline (MOLER, 2004), (BHARATI, KHOSLA e SOOD, 2011), (PETRINOVIC, 2008), (BORKOWSKI e BIEN, 2009). A aplicação da interpolação de Lagrange é baseada no emprego de funções polinomiais para efetuar o cálculo das amostras do sinal que será fornecido para a FFT. Na aplicação da interpolação B-spline são utilizados funções, denominadas como funções de base, a fim de efetuar o processo de interpolação do sinal. Na interpolação B-spline são utilizados filtros na entrada do processo, denominados como pré-filtros, a fim de estabelecer melhores resultados no processo de interpolação. Esses filtros podem ser definidos como filtros baseados na função B-spline inversa ou denominados como mínimos quadrados (*least-square*) (BORKOWSKI e BIEN, 2009).

O pré-filtro baseado na função B-spline inversa, como o próprio nome diz, é composto da função B-spline inversa, com o objetivo de forçar o resultado da interpolação a assumir os mesmos valores que as amostras do sinal (PETRINOVIC, 2008). Já o pré-filtro baseado nos mínimos quadrados ou *least-square* se baseia na resposta em frequência da interpolação B-spline e é formado com o objetivo de fazer com que a função B-spline, juntamente com a aplicação do pré-filtro, forneça uma resposta em frequência que se aproxime de um interpolador ideal, representado por um filtro passa baixa.

Para a utilização destes métodos de interpolação, bem como da FFT e da norma IEC, são utilizadas funções denominadas como Janelas, aplicadas ao sinal de entrada a fim de reduzir o espalhamento espectral. As janelas mais utilizadas são as de Hanning e a retangular.

As principais contribuições deste trabalho podem ser expressas como segue:

- Descrever duas técnicas para a interpolação do sinal (na frequência e no tempo), mostrando como elas são empregadas conjuntamente com a norma IEC;

- Descrever detalhadamente as técnicas de interpolação no domínio do tempo, implementando-as e comparando-as entre si;
- Implementar e comparar as diversas técnicas de interpolação, mostrando os resultados comparativos.

No segundo capítulo são apresentados a Transformada de Fourier, o espalhamento espectral, os componentes existentes nos sinais, a aplicação de janelas nos sinais e a norma IEC. Na seção 2.2 que aborda sobre a Transformada de Fourier, são apresentados os tipos de transformada, como no tempo contínuo e discreto. Na seção 2.3 são apresentados os tipos de espalhamento espectral encontrados nos sinais: o espalhamento ocasionado pelos inter-harmônicos e pela variação da frequência do componente fundamental. Também são apresentados os componentes que podem estar contidos em algum sinal e como são definidos de acordo com seu valor de frequência. Para a aplicação de janelas, a seção 2.4 apresenta alguns tipos de funções de janela e é realizada uma comparação entre tais funções. Na seção 2.5 é abordado sobre a norma IEC, onde são apresentados os parâmetros definidos por tal norma a fim de estabelecer os cálculos dos grupos e subgrupos, harmônicos e inter-harmônicos.

No terceiro capítulo é apresentado o processo de interpolação no domínio da frequência e também discute-se o cálculo dos grupos e subgrupos indicados pela norma IEC. No processo de interpolação no domínio da frequência, é descrito todo o método de interpolação, como também é apresentado o processo de separação dos componentes harmônicos e inter-harmônicos no domínio da frequência. No cálculo dos grupos e subgrupos de harmônicos e inter-harmônicos, são apresentados alguns pontos, demonstrando quando se deve utilizar grupos e subgrupos de forma que se possa resultar em um melhor desempenho do processo de agrupamento dos componentes.

No quarto capítulo são apresentados dois métodos de interpolação no domínio do tempo, a interpolação de Lagrange e a interpolação B-spline. Na interpolação de Lagrange é demonstrada a forma *off-line* com intuito de demonstrar como se estabelece este processo e também é apresentada esta interpolação de modo *on-line*, ou seja, uma interpolação efetuada à medida que as amostras vão sendo coletadas. Na interpolação B-spline, são apresentados os métodos de interpolação sem a presença de pré-filtros e com

a presença desses filtros, de forma a estabelecer a eficiência dos mesmos quando são empregados no processo de interpolação B-spline.

No quinto capítulo são mostrados alguns resultados obtidos através do cálculo dos subgrupos harmônicos e inter-harmônicos, utilizando a FFT e os processos de interpolação no domínio da frequência e do tempo. Para isso é considerado um sinal com presença de inter-harmônicos, ruído e variação na frequência do componente fundamental a fim de averiguar a robustez do sistema de monitoramento dos componentes contidos no sinal. Nestes resultados é considerada primeiramente a presença de um estimador ideal, ou seja, não há erros na estimação da frequência fundamental, mesmo se este valor varie e, também, é considerada a presença de um estimador com o intuito de comparar a interpolação no domínio do tempo com a interpolação no domínio da frequência.

Por fim, no sexto capítulo são apresentadas as conclusões obtidas ao longo de todo o trabalho. As vantagens e desvantagens da utilização de cada método de interpolação e da norma IEC.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. Introdução à análise espectral

A Análise espectral é a área que estuda o espectro de frequência contido em algum sinal (energia do sinal ao longo da frequência) (STOICA e MOSES, 2005). A palavra espectro é oriunda do latim “*specter*”, que significa aparição fantasmagórica e foi introduzida por Newton em relação aos seus estudos de decomposição da luz branca em uma banda de luzes coloridas, quando passada através de um prisma. Mais detalhes históricos são apresentados em (MARPLE, 1987).

A análise espectral pode ser realizada de duas formas diferentes, denominadas como métodos paramétricos e não-paramétricos. Neste trabalho serão apresentados métodos de análise espectral não-paramétricos, determinísticos e que utilizam como ferramenta fundamental a Transformada Discreta de Fourier ou a sua forma computacionalmente rápida, a FFT.

Porém, devido à presença de alguns componentes, que não estão compreendidos na resolução da frequência, e devido ao desvio da frequência fundamental, alguns métodos utilizando interpolação, na frequência ou no tempo, como também a aplicação da norma IEC, devem ser utilizados.

Na seção 2.2 são demonstradas as principais ferramentas utilizadas na análise espectral, como a Transformada de Fourier e sua inversa. Na seção 2.3 é apresentado o fenômeno do espalhamento espectral e os conceitos de amostragem síncrona e assíncrona. Também é descrito sobre o espalhamento causado pelos componentes inter-harmônicos e pela amostragem assíncrona. Nas seções 2.4 e 2.5 são abordadas as funções de janela e a norma IEC, métodos inerentes ao cálculo do espectro de potência. Por fim, na seção 2.6 são apresentados alguns trabalhos que utilizam métodos para a redução do espalhamento espectral.

2.2. Principais ferramentas de análise espectral

Para o procedimento da análise espectral, deve-se transformar o sinal no domínio do tempo para o domínio da frequência, através da aplicação de algumas ferramentas específicas. Essas ferramentas podem proporcionar uma representação do sinal no domínio da frequência e, conseqüentemente, propiciar um conhecimento de como a energia está distribuída ao longo de todo o espectro de frequência. Uma ferramenta amplamente utilizada é a Transformada de Fourier. Em aplicações em tempo contínuo a Transformada de Fourier é definida como Transformada Contínua de Fourier do inglês *Continuous Time Fourier Transform* – CTFT. A equação que representa a transformação do domínio do tempo para o domínio da frequência é

$$X_a(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} dt. \quad (1)$$

Além da transformação do tempo para a frequência, pode-se estabelecer também a transformação do domínio da frequência para o domínio do tempo. Esta transformação é denominada como Transformada Inversa de Fourier e é representada por

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega. \quad (2)$$

Assim, (1) e (2) representam as transformações para sinais no tempo contínuo, com extensão de $-\infty$ a $+\infty$. Em (1), $x_a(t)$ representa o sinal no domínio do tempo e $X_a(j\Omega)$ representa o espectro em frequência do sinal. Onde Ω é a frequência angular dada em radianos por segundo.

Em aplicações da Transformada de Fourier para seqüências infinitas é utilizada a Transformada de Fourier de Tempo Discreto, do inglês *Discrete Time Fourier Transform* (DTFT), dada por

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}. \quad (3)$$

Em (3), $x[n]$ representa a sequência discreta infinita e $X(e^{j\omega})$ o espectro de frequência. Quanto à transformada inversa é representada por

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega, \quad (4)$$

onde o intervalo de integração se dá entre $-\pi$ e $+\pi$, devido ao fato desta transformada ser periódica em 2π , com altas frequências em torno de $\pm\pi$ e as baixas frequência em torno de 0 (MITRA, 2006).

Outra forma da Transformada de Fourier é definida como Transformada Discreta de Fourier (*Discrete Fourier Transform - DFT*), que representa a transformação de alguma sequência finita no domínio do tempo para o domínio da frequência. Isso porque na prática, os sinais analisados são de comprimento finito. Para a aquisição destas sequências é aplicado ao sinal, funções denominadas janelas, a fim de coletar a sequência para análise. A DFT é representada por

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (5)$$

onde N é o número de pontos compreendidos dentro da janela.

Também, pode-se representar a DFT como apresentada em (5) através da substituição de $e^{-j2\pi kn/N}$ por W_N^{kn} . Fazendo esta substituição tem-se

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1. \quad (6)$$

A sua transformada inversa é representada por

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{-kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (7)$$

onde $X[k]$ pode ser analisado como

$$X[k] = X(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega=2\pi k/N} = X(e^{j2\pi k/N}). \quad (8)$$

Dessa forma, pode-se estabelecer uma igualdade entre a DFT e a DTFT considerando a frequência angular do expoente da DTFT como $\Omega = 2\pi k/N$.

Porém, em relação à DFT, pode-se estabelecer uma forma a diminuir a complexidade computacional aplicando-se o cálculo de maneira mais eficaz. Note que em (6) o cálculo de cada amostra da sequência da DFT requer N multiplicações complexas e $N-1$ adições complexas. Portanto, para o cálculo da sequência completa haverá um total de N^2 multiplicações complexas e $(N-1)N$ adições complexas. Para altos valores de N , o número de multiplicações complexas e adições são de aproximadamente N^2 . Assim é interessante a aplicação de um método de forma a utilizar menos complexidade computacional. Uma forma vastamente utilizada para este fim é o algoritmo denominado como Transformada Rápida de Fourier (FFT – *Fast Fourier Transform*) (COOLEY e TUKEY, 1965).

Este método baseia-se em dividir a equação (6) em uma sequência par e outra ímpar de forma a diminuir o número de multiplicações e somas. Essa divisão da sequência é executada recursivamente até que se formem grupos com apenas duas amostras. Este procedimento equivale a reduzir o número de multiplicações e somas para $N \log_2 N$, reduzindo a complexidade computacional. É importante destacar que devido às separações efetuadas por este método, a sequência a ser analisada deverá conter um número de amostras equivalente à potência de 2.

Para demonstrar o processo de transformação de um sinal no domínio do tempo para o domínio da frequência, utilizando a Transformada de Fourier, é apresentado um exemplo considerando o sinal

$$x(t) = \text{sen}(2\pi 60t) + 0,3 \text{sen}(2\pi 120t) + 0,2 \text{sen}(2\pi 180t). \quad (9)$$

Para este exemplo, considera-se 60 Hz como o valor de frequência fundamental, como representado no primeiro termo, uma sequência com 1.024 pontos, resolução de 5 Hz no domínio da frequência. A resolução na frequência indica a menor frequência que pode ser identificada sem erros pela DFT.

Com o conhecimento da resolução na frequência e do número de pontos utilizados para a transformação, pode-se definir também a frequência e o período de amostragem através de (10) e (11), respectivamente.

$$\begin{aligned}\Delta f &= f_s / N \\ f_s &= \Delta f \cdot N.\end{aligned}\tag{10}$$

$$T_s = \frac{1}{f_s}.\tag{11}$$

Onde Δf representa a resolução da frequência, f_s a frequência de amostragem, N o número de pontos da sequência e T_s é o período de amostragem. Procedendo ao cálculo de (10) e (11), a frequência de amostragem torna-se igual a 5.120 Hz e o período de amostragem igual a 0,195 ms.

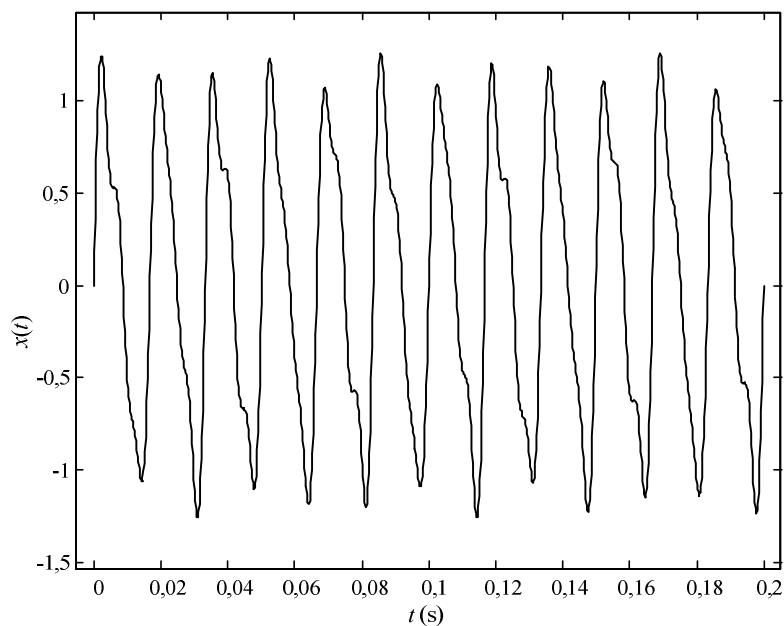


Figura 1 – Representação do sinal $x(t)$ no tempo.

Com os parâmetros estabelecidos, é apresentado nas Figura 1 e Figura 2 o sinal $x(t)$ no domínio do tempo e sua transformada no domínio da frequência, respectivamente.

Quanto ao domínio do tempo, representado pela Figura 1, pode-se analisar o comprimento do sinal entre 0 e 0,2s; de acordo com o valor estabelecido pelo período de amostragem. Na Figura 2 é apresentado o sinal transformado para o domínio da frequência, onde a linha preta contínua representa a DTFT e as hastes, denominadas como *bins*, representam a DFT. A diferença demonstrada entre a DTFT e a DFT é que a DTFT é contínua e possui ondulações, denominadas de lóbulos, já a DFT possui pontos somente em valores de frequência múltiplos da resolução. Isso permite que haja energia somente nos *bins* correspondentes aos componentes do sinal.

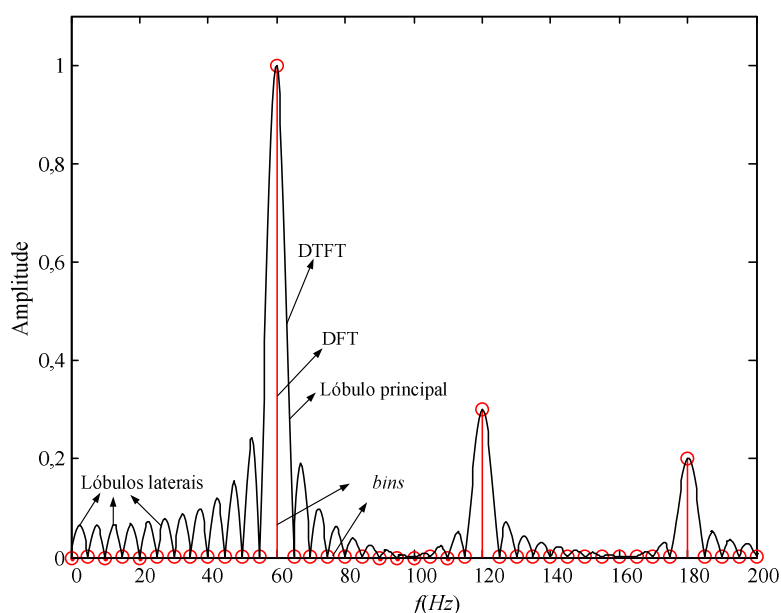


Figura 2 - Representação do sinal $x(t)$ na frequência.

As ondulações oriundas da DTFT é resultado da convolução na frequência de uma sequência periódica no tempo com alguma função de Janela. No caso das Figura 1 e da Figura 2 utiliza-se a janela retangular, que sua função na frequência é representada por uma função *sinc*. Para uma sequência periódica, o resultado no domínio da frequência é representado por uma função onde os valores diferentes de zero são representados somente nos valores de frequência dos componentes contidos no sinal. Considerando somente os valores absolutos da função *sinc* obtêm-se as ondulações representadas pela DTFT.

Dessa forma, a partir da Figura 2, percebe-se que a Transformada de Fourier propicia o cálculo do espectro de frequência de modo a se conhecer todos os componentes contidos em algum sinal no tempo. Como pode-se perceber, através da Figura 2, o resultado é uma convolução do sinal periódico, no domínio da frequência, com a função *sinc*. Outro ponto importante é o fato de possuir a vantagem de realizar os cálculos com baixa complexidade computacional.

2.2.1. Cálculo da DFT de sequências reais

Em muitas aplicações práticas, onde as sequências são reais, pode-se aplicar uma técnica de modo a tornar a DFT mais eficiente. Esta técnica proporciona o resultado de uma DFT com $2N$ pontos, de uma sequência real usando uma única DFT de N pontos (MITRA, 2006).

Para isso considera-se uma sequência real $v[n]$ de comprimento $2N$ com $V[k]$ denotando a DFT com $2N$ pontos. Definindo $g[n]$ e $h[n]$, como duas sequências de comprimento N , obtidas a partir de $v[n]$, conforme (2.12), tem-se:

$$g[n] = v[2n], \quad h[n] = v[2n+1], \quad 0 \leq n < N. \quad (12)$$

Dessa forma define-se a sequência complexa $x[n]$ da forma:

$$x[n] = g[n] + jh[n]. \quad (13)$$

Considerando $g[n]$ como parte real, $h[n]$ como parte imaginária e $G[k]$ e $H[k]$ sendo suas transformadas DFTs de N pontos, respectivamente, tem-se

$$G[k] = \frac{1}{2} \{ X[k] + X^*[\langle -k \rangle_N] \}, \quad (14)$$

$$H[k] = \frac{1}{2j} \left\{ X[k] - X^* \left[\langle -k \rangle_N \right] \right\}, \quad (15)$$

onde $X[k]$ representa a Transformada de Fourier de $x[n]$ e $X^* \left[\langle -k \rangle_N \right] = X^* \left[\langle N-k \rangle_N \right]$.

Portanto, em (14) e (15) são apresentadas duas Transformadas de Fourier de N pontos através de uma sequência $v[n]$ de $2N$ pontos.

Com o conhecimento de $G[k]$ e $H[k]$, pode-se utilizá-los para formar outra sequência de $2N$ pontos. Para isso aplicam-se as sequências $v[2n]$ e $v[2n+1]$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} V[k] &= \sum_{n=0}^{2N-1} v[n] W_{2N}^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} v[2n] + \sum_{n=0}^{N-1} v[2n+1] W_{2N}^{(2n+1)k} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} g[n] W_N^{nk} + W_{2N}^k \sum_{n=0}^{N-1} h[n] W_N^{nk}. \end{aligned} \quad (16)$$

Substituindo os somatórios por suas respectivas transformadas, tem-se

$$V[k] = G \left[\langle k \rangle_N \right] + W_{2N}^k H \left[\langle k \rangle_N \right] \quad 0 \leq k \leq 2N-1. \quad (17)$$

Portanto, a partir de (17) pode-se extrair uma sequência com $2N$ pontos através de duas sequências com N pontos.

Porém, se a amostragem do sinal for assíncrona ou existir algum componente com frequência que não seja múltiplo do valor da resolução de frequência, a energia se espalha para outros *bins*. Este fenômeno é denominado como espalhamento espectral e será apresentado nas próximas seções, como também os métodos utilizados para reduzir este fenômeno.

2.3. Espalhamento Espectral

O espalhamento espectral é o fenômeno definido quando alguma componente do sinal, no domínio da frequência, tem sua energia espalhada para outros *bins*. Para que esse

fenômeno aconteça, dois fatores devem ser considerados: a existência de componentes que não sejam múltiplas do valor da resolução da frequência e o fato da amostragem ser assíncrona (LIU, HIMMEL e BONFIG, 2005).

Porém, antes de descrever cada tipo de espalhamento, é interessante definir os principais componentes que podem ser encontrados nos sinais advindos de um sistema de potência, de forma a facilitar o entendimento sobre os espalhamento espectral. Essas componentes podem ser separadas em cinco categorias, de acordo o valor da sua respectiva frequência.

Primeiro é definido o componente fundamental, representado com o valor de frequência igual à frequência do sistema (50 ou 60 Hz). Depois há os componentes harmônicos, definidos pelos componentes com valor de frequência sendo um múltiplo inteiro do componente fundamental. O terceiro grupo é representado pelos inter-harmônicos, que possuem valores de frequência maiores ao valor do fundamental, porém não sendo múltiplos inteiros deste. O quarto grupo é definido pelos componentes compreendidos entre os valores maiores que 0 e menores que o valor de frequência do componente fundamental, estes são designados como sub-harmônicos. Por fim é definido o componente denominado como constante, com valor de frequência igual a 0. A Figura 3 esboça esses componentes.

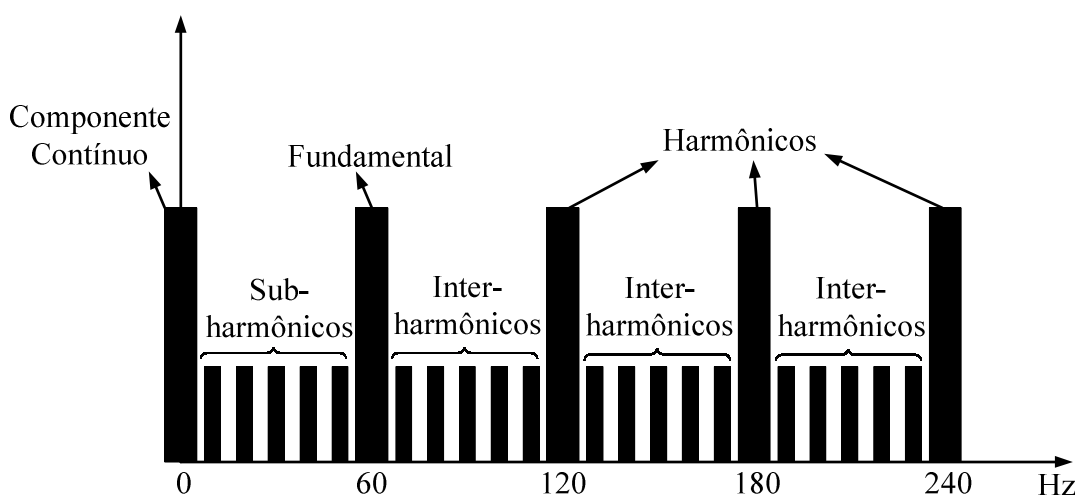


Figura 3 – Representação dos principais componentes contidos em um sinal.

Assim, com os principais componentes de um sinal definidos, pode-se retornar à descrição do espalhamento espectral.

No caso em que o espalhamento é ocasionado pela presença de componentes que possuem valores de frequências não múltiplos da resolução da frequência, ou seja, inter-harmônicos e sub-harmônicos, este tipo de espalhamento pode ser definido de duas formas, *short-range leakage* e *long-range leakage*. Estes espalhamentos são definidos de acordo com a distância em que se encontram dos componentes harmônicos ou do componente fundamental (LIU, HIMMEL e BONFIG, 2005).

Se o sub-harmônico ou o inter-harmônico estiver distante de algum componente harmônico, de modo que sua interferência na amplitude desse componente seja desprezada, este espalhamento é definido como *short-range leakage*. Este tipo de espalhamento pode ser considerado acrescentando algum componente de frequência em que não seja um múltiplo de 5, como por exemplo a inserção do componente de 157 Hz em (9). Para esse caso, o espectro de frequência obtido pela FFT é apresentado pela Figura 4.

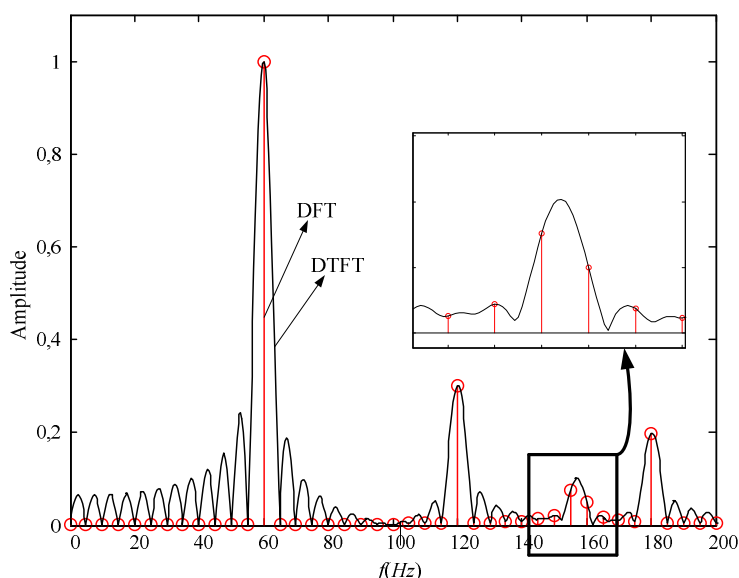


Figura 4 – *Short-range leakage* em relação aos harmônicos com frequência de 120 e 180 Hz, devido à presença do componente de 157 Hz.

Através da Figura 4 pode-se perceber um espalhamento nos *bins* em torno das frequências de 155 e 160 Hz. Isto acontece, pois o centro do lóbulo está compreendido

na frequência de 157 Hz, ou seja, um valor não múltiplo de 5 Hz, assim acontece o espalhamento de energia nos *bins* próximos a essa frequência. Note que o espalhamento está situado em uma região onde a influência sobre os componentes harmônicos pode ser desconsiderada.

Em relação ao *long-range leakage*, o componente sub-harmônico ou inter-harmônico se localiza próximo aos componentes harmônicos ou ao componente fundamental. Nesse caso acontece uma modulação entre as DTFTs ocasionando espalhamento de energia em uma longa faixa. Para exemplificar esta situação, considera-se um sinal com frequência de 60 Hz, juntamente com um componente de 62,5 Hz, como demonstrado em (18). O resultado é mostrado pela Figura 5.

$$x(t) = \text{sen}(2\pi 60t) + 0,7 \text{sen}(2\pi 62,5t). \quad (18)$$

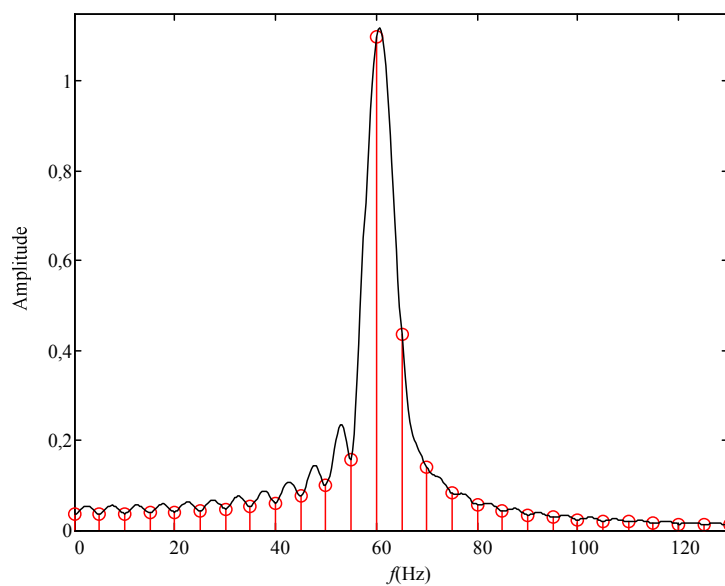


Figura 5 – Representação do *Long-range leakage*.

Nota-se através da Figura 5 que o espalhamento acontece em vários *bins*, pelo fato do componente inter-harmônico estar localizado próximo à frequência da componente fundamental. Neste caso, a interferência do inter-harmônico no componente fundamental é considerada por provocar um espalhamento em uma longa faixa no espectro de frequência. Como ressaltado anteriormente, essa interferência é provocada pela sobreposição das DTFTs das duas componentes, como demonstrado na Figura 6.

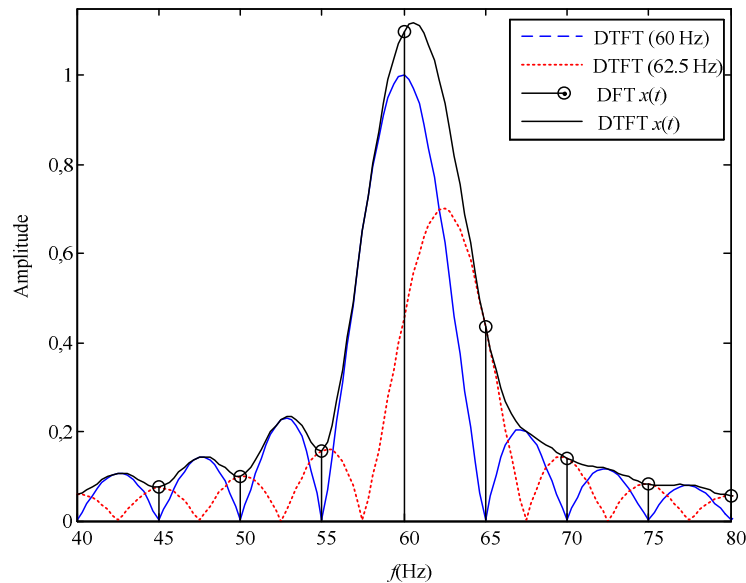


Figura 6 – Representação da sobreposição de sinais no *Long-range Leakage*.

Na Figura 6 é mostrado a DTFT do sinal do componente de 60 Hz pela curva de linha cheia de cor azul, a DTFT da componente de 62,5 Hz pela linha pontilhada em vermelho, a DTFT resultante da sobreposição das duas componentes é representada pela linha cheia preta e a DFT resultante é representada pelas hastes. Este espalhamento engloba uma região maior em relação ao espalhamento *short-range leakage* pelo fato do inter-harmônico estar bem próximo ao componente fundamental.

Outra forma de espalhamento é provocada pela amostragem assíncrona. Nesse caso a frequência do componente fundamental assume valor diferente da frequência estabelecida para o sistema. A Figura 7 mostra um sinal com um componente de 60 Hz representado por uma amostragem síncrona (Figura 7(a)) e o mesmo sinal com frequência igual a 59 Hz é apresentado na Figura 7(b), estabelecendo a amostragem assíncrona.

Para o exemplo apresentado na Figura 7, consideram-se 12 ciclos do sinal e a frequência de amostragem como 5.120 Hz. Na Figura 7(a), com a frequência igual a 60 Hz, é apresentado o sinal com 12 ciclos, sendo que o ponto inicial corresponde à amostra seguinte ao valor do último ponto apresentado na figura. Com isso, denomina-se a amostragem como amostragem síncrona. Na Figura 7(b), onde a frequência é 59 Hz, o sinal não completa totalmente o último ciclo, portanto denomina-se a amostragem como amostragem assíncrona.

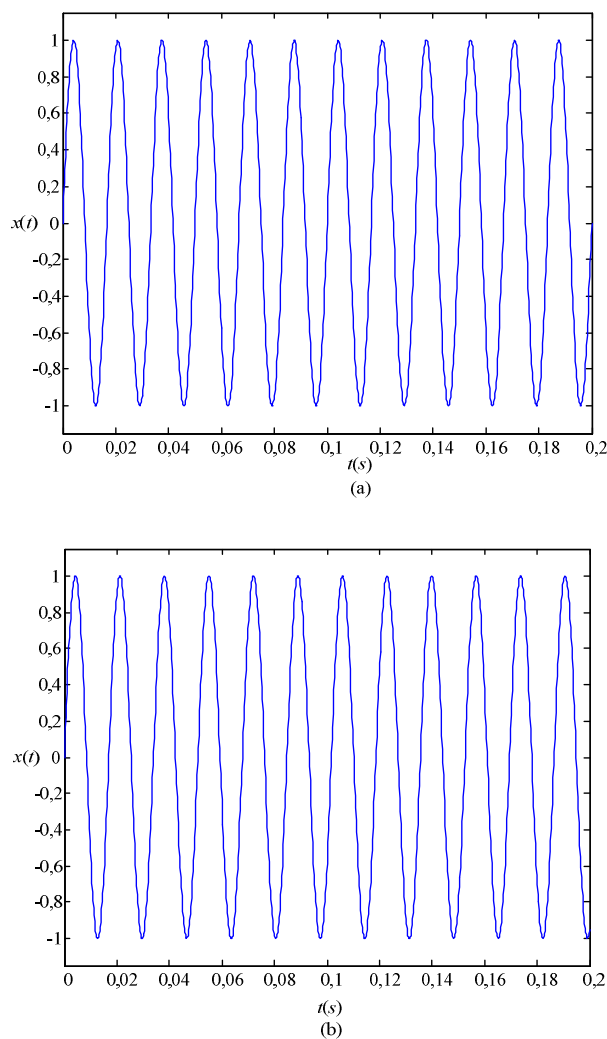


Figura 7 – Representação do sinal com (a) amostragem síncrona (60Hz) e (b) assíncrona (59Hz).

Para mostrar este espalhamento na frequência, é considerado um sinal no tempo com frequência igual a 58 Hz, com 12 ciclos do sinal e taxa de amostragem de 5.120 Hz, em um sistema de 60 Hz. A DTFT e a DFT deste sinal é demonstrado na Figura 8.

A partir da Figura 8 percebe-se o espalhamento pelo fato da DTFT estar deslocada da frequência do sistema de 60 Hz. Dessa forma, o *bin* da DFT do componente de 60 Hz não se localiza no máximo valor do lóbulo central, interferindo no valor real do componente. Quanto aos demais *bins* não se localizam nos pontos onde a DTFT é igual a zero, proporcionando o surgimento de componentes que na realidade não existem.

No entanto, a fim de reduzir o espalhamento, são utilizadas algumas técnicas como a aplicação de diferentes tipos de janela e a utilização da norma IEC 61000-4-7. Nas

seções seguintes serão relatados estes métodos utilizados para se reduzir o espalhamento.

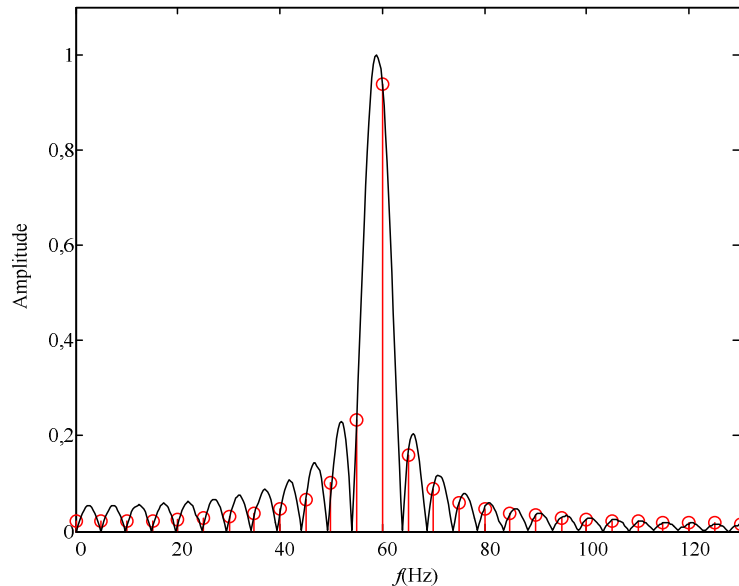


Figura 8 – Espalhamento ocasionado pela amostragem assíncrona.

2.4. Janelas

A aplicação de janelas está inerente ao processo de estimação espectral e é utilizada para o controle da amplitude dos lóbulos laterais. Este procedimento se dá pela multiplicação do sinal no domínio do tempo pela função da janela. Dentre algumas funções são encontradas a janela retangular, a janela de Hanning, Hamming e Bartlett (triangular). Estas janelas podem ser apresentadas no domínio do tempo e da frequência como apresentado através da Tabela 1 e Tabela 2, respectivamente (RIBEIRO, DUQUE, *et al.*, 2014).

Em relação à Tabela 1, nota-se que a função da janela retangular é igual a 1 para todo valor de n e as funções da janela de Hanning e Hamming são semelhantes seguindo a equação

$$w[n] = \alpha - \beta \cos(2\pi n / N) \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (19)$$

Tabela 1 – Janelas no domínio do tempo.

Janelas	Função no Tempo Discreto
Retangular	$w[n] = 1$
Barlet (triangular)	$w_B[n] = 1 - 2n / (N - 1) - 1 $
Hanning	$w_{Hn}[n] = 0.5 - 0.5 \cos(2\pi n / N)$
Hamming	$w_{Hm}[n] = 0.54 - 0.46 \cos(2\pi n / N)$

Tabela 2 – Janelas no domínio da frequência.

Janelas	Resposta no domínio da frequência
Retangular	$W(e^{j\omega})$
Bartlett (triangular)	$\frac{2}{N} W^2(e^{j\omega/2})$
Hanning	$W_{Hn}(e^{j\omega}) = 0.5W(e^{j\omega}) - 0.25(W(e^{j(\omega-\theta)}) + W(e^{j(\omega+\theta)}))$
Hamming	$W_{Hm}(e^{j\omega}) = 0.54W(e^{j\omega}) - 0.23(W(e^{j(\omega-\theta)}) + W(e^{j(\omega+\theta)}))$

Para aplicação da janela, como apresentada em (19), no domínio do tempo tem-se:

$$x_w[n] = x[n](\alpha - \beta \cos(2\pi n / N)). \quad (20)$$

Quanto às funções das janelas no domínio da frequência, representadas na Tabela 2, percebe-se que todas estão em função da janela retangular $W(e^{j\omega})$, representada por

$$W(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j(N-1)\omega/2}. \quad (21)$$

Utilizando (21) nas equações das janelas, demonstradas pela Tabela 2, é apresentado na Figura 9 o resultado obtido através dessas funções.

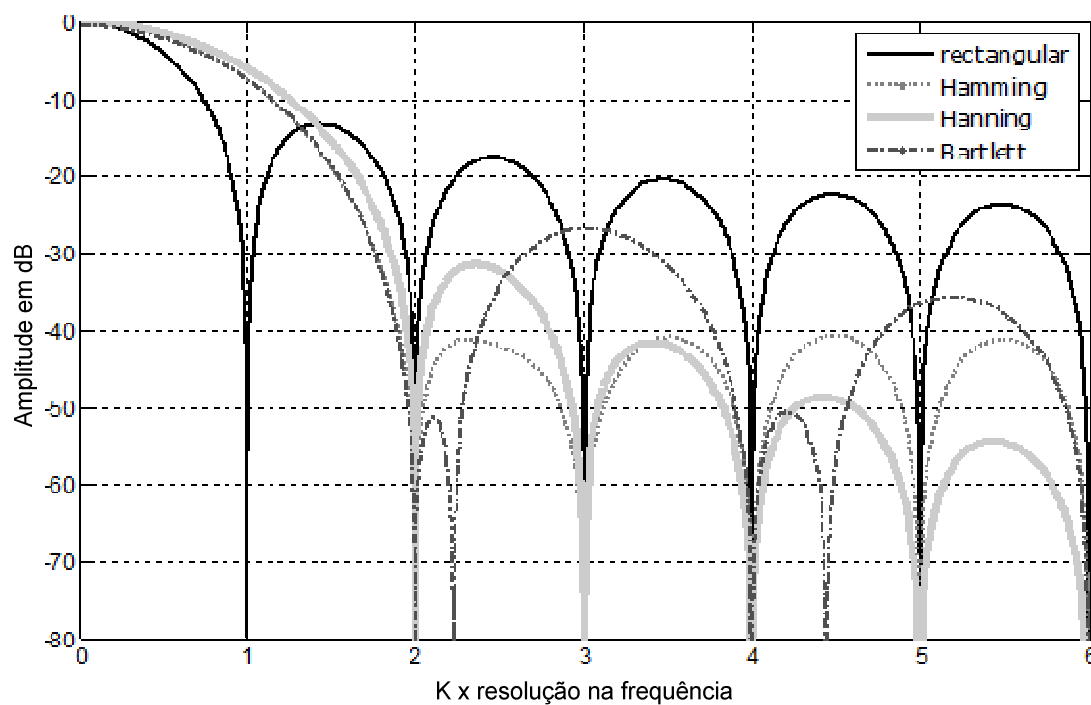


Figura 9 – Representação das funções de janela (RIBEIRO, DUQUE, *et al.*, 2014).

Assim, a partir da Figura 9 percebe-se que a janela de Hanning possui maior atenuação em relação aos lóbulos laterais. Portanto, ocasiona maior redução do espalhamento espectral. Já na janela retangular, os lóbulos laterais são maiores, provocando maior espalhamento entre as três janelas comparadas. A janela de Hamming possui lóbulos mais largos com atenuação menor em relação à janela de Hanning e a Bartlett. A janela de Hamming possui atenuação maior que a janela retangular e a janela de Bartlett, porém sua atenuação é menor que a janela de Hanning. Ao longo deste trabalho serão consideradas as janelas retangular e de Hanning, pelo fato de serem as mais utilizadas nas referências utilizadas neste trabalho de dissertação.

2.5. IEC 61000-4-7

A IEC (*Internacional Electrotechnical Commission*) 61000-4-7 é uma norma estabelecida para a detecção de componentes de frequência contidos em sinais de sistemas de potência. Nesta norma são considerados alguns métodos, denominados

como grupos e subgrupos de harmônicos e inter-harmônicos, que tem como função agrupar a energia dos componentes espalhados ao longo do espectro de frequência e estabelecer sua respectiva amplitude. As expressões utilizadas para o cálculo de grupos e subgrupos de harmônicos, para o sistema em 60 Hz, são apresentadas, respectivamente, em (22) e (23). As expressões para os grupos e subgrupos de inter-harmônicos, são definidas, respectivamente, por (24) e (25).

$$G_{g,h}^2 = \left\{ \frac{C_{k_h-6}^2}{2} + \sum_{i=-5}^5 C_{k_h+i}^2 + \frac{C_{k_h+6}^2}{2} \right\}, \quad (22)$$

$$G_{sg,h}^2 = \sum_{i=-1}^1 C_{k_h+i}^2 \quad (23)$$

$$G_{ig,h}^2 = \sum_{i=1}^{11} C_{k_h+i}^2, \quad (24)$$

$$G_{sig,h}^2 = \sum_{i=2}^{10} C_{k_h+i}^2, \quad (25)$$

Nas equações (22), (23), (24) e (25) os parâmetros $G_{g,h}^2$, $G_{sg,h}^2$, $G_{ig,h}^2$, $G_{sig,h}^2$, representam os valores quadráticos dos grupos harmônicos, subgrupos harmônicos, grupos inter-harmônicos e subgrupos inter-harmônicos, respectivamente. O esboço desses grupos e subgrupos são representados através da Figura 10 e Figura 11. Quanto a $C_{k_h+i}^2$, este representa o valor quadrático de cada *bin* com índice k_h+i . Onde k_h representa o índice do componente harmônico de ordem h . Para a aplicação da janela de Hanning, deve-se utilizar um fator de $\sqrt{2/3}$ (RIBEIRO, DUQUE, *et al.*, 2014), a fim de se estabelecer suas amplitudes de forma adequada, de acordo com a função desta Janela. Na Figura 10 e Figura 11 são apresentados estes métodos de grupos e subgrupos de harmônicos e inter-harmônicos, respectivamente.

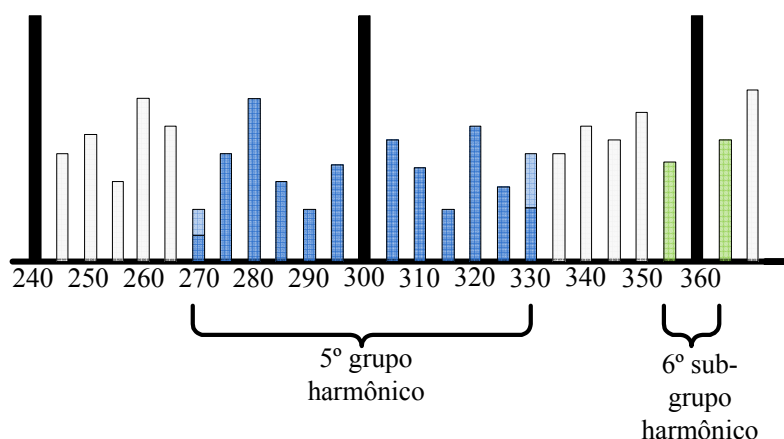


Figura 10 – Representação gráfica dos grupos e subgrupos de harmônicos.

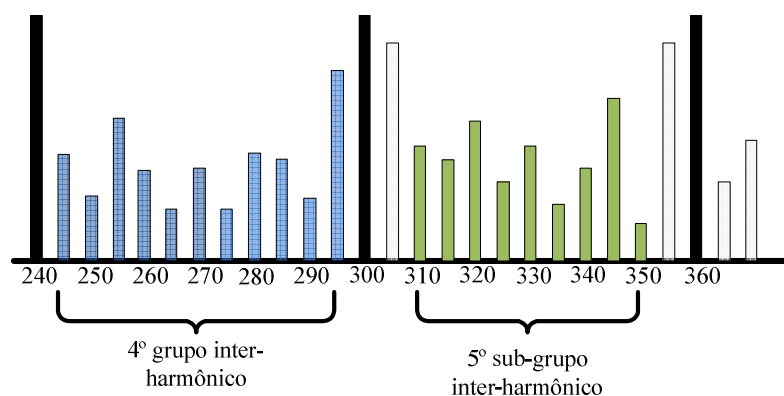


Figura 11 – Representação gráfica dos grupos e subgrupos de inter-harmônicos.

Na Figura 10 é mostrado o agrupamento da energia contida entre a frequência de 270 a 330 Hz. Esse agrupamento é denominado como 5º grupo harmônico por estar em torno do 5º harmônico. Para a realização deste agrupamento são consideradas as energias de todos os componentes, além do próprio componente harmônico, contidos entres os 12 *bins*, localizados em torno do 5º harmônico. Há de destacar-se que os dois *bins* mais distantes do harmônico, tanto do lado esquerdo quanto do lado direito, são considerados como influência dos dois componentes harmônicos próximos ao mesmo. Por isso a contribuição destes *bins*, para o grupo, é considerada como sendo a metade de sua amplitude. Em relação ao subgrupo harmônico, utiliza-se somente o componente harmônico com seus dois *bins* adjacentes, da esquerda e da direita, como exemplificado para o harmônico de 360 Hz na Figura 10. Como o *bin* central está localizado na frequência de 360 Hz, o subgrupo é definido como 6º subgrupo harmônico.

Na Figura 11 é mostrado o esboço do grupo e subgrupo de inter-harmônicos aplicados entre o 4º e 5º harmônico, como também entre o 5º e 6º harmônico. No primeiro caso é apresentado o agrupamento de todos os *bins* que estão entre os harmônicos 4 e 5, assim é denominado como 4º grupo de inter-harmônico. No segundo caso, são agrupadas as energias dos *bins* entre o 5º e 6º harmônico, exceto os dois *bins* endereçados nas frequências de 305 e 355 Hz, ou seja, os *bins* adjacentes aos componentes harmônicos.

Para a realização destes grupos a norma IEC 61000-4-7 propõe a utilização de 12 ciclos do sinal, o que corresponde a uma resolução de frequência de 5 Hz e deve ser aplicada para detectar até o 50º harmônico. Sobre a aplicação de janelas, a norma diz que esta deve ser retangular, porém podendo ser utilizada a janela de Hanning no caso de uma alta dessincronização da frequência fundamental. É também permitida a aplicação de métodos de interpolação no sinal de forma a evitar que a amostragem seja assíncrona. A seguir são apresentados alguns métodos a fim de melhorar a detecção dos componentes na frequência.

2.6. Métodos utilizados para reduzir o espalhamento espectral

Para a detecção de componentes de algum sinal, vários métodos são propostos, alguns propondo melhorias na norma IEC, outros sugerindo a utilização de janelas e outros ainda utilizando métodos diferentes aos propostos pela norma IEC.

Os métodos baseados na norma IEC e na aplicação de janelas, os mesmos podem ser encontrados em (TESTA, GALLO e LANGELLA, 2004), (VALENZUELA e PONTT, 2009), (GALLO, LANGELLA e TESTA, 2000), (LIU, HIMMEL e BONFIG, 2005), (GALLO, LANGELLA e TESTA, 2004), (TARASIUK, 2009) e (CHANG, CHEN, *et al.*, 2008).

Outros utilizam algumas metodologias mais complexas como a aplicação de filtros de Kalman como em (ELNAHDY e LUI, 2012), Prony (CHANG e CHEN, 2010) ou métodos que utilizam maior esforço computacional como (ZHANG, LIU, *et al.*, 2008). Nestes casos os métodos apresentados são métodos paramétricos.

O método abordado em (ZHANG, LIU, *et al.*, 2008) é muito eficiente. Nele são apresentadas simulações com amostragens assíncronas, ruído, inter-harmônicos e a precisão dos resultados é suavemente afetada pela presença de ruídos, não sendo afetada pela amostragem assíncrona. Isso porque é utilizada alta resolução no domínio da frequência fazendo com que os componentes sejam detectados eficientemente. Embora seja um bom método, o aumento da resolução na frequência resulta em alta complexidade computacional, tornando-se inviável para aplicações em tempo real.

Em (VALENZUELA e PONTT, 2009) é proposto uma melhoria na norma IEC, através da utilização da janela de Hanning ao invés da janela Retangular. Como resultados a janela de Hanning foi melhor em relação à janela retangular, pois demonstrou menor espalhamento espectral. Em (TESTA, GALLO e LANGELLA, 2004) é abordado o problema do espalhamento devido à dessincronização e algumas melhorias são propostas no processamento de sinais, baseado na utilização da janela de Hanning ao invés da janela retangular.

Outro método é proposto por (CHANG e CHEN, 2010), um procedimento que inclui alta resolução na frequência baseado no método Prony com a técnica de *downsampling*. Este método é utilizado para a detecção tanto dos componentes harmônicos como inter-harmônicos e os resultados são comparados com a aplicação da norma IEC e da Transformada de Fourier, com amostragem síncrona e assíncrona.

O método apresentado em (LIU, HIMMEL e BONFIG, 2005) propõe um filtro denominado como *Difference Filter*, para a detecção de harmônicos e inter-harmônicos, compatível com a norma IEC. Porém exige alto esforço computacional como também alto custo.

Para o presente trabalho de dissertação serão apresentadas algumas técnicas utilizando a norma IEC, como também a aplicação de interpolação, tanto no domínio do tempo, quanto no domínio da frequência.

Para a interpolação no domínio da frequência, pode-se encontrar trabalhos relacionados como (CHANG e CHEN, 2010) e (GALLO, LANGELLA e TESTA, 2004). Quanto à interpolação no domínio do tempo podem ser destacados os métodos apresentados em (PETRINOVIC, 2008) e (BORKOWSKI e BIEN, 2009), que apresentam a utilização da interpolação B-spline, juntamente com a aplicação de filtros em cascata para melhorar o

processo de interpolação. Estes métodos são aplicáveis para a detecção de todas as componentes e são compatíveis com a norma IEC. A vantagem da aplicação destes métodos de interpolação é o fato deles reduzirem o erro do cálculo de cada componente contido no sinal, ocasionado pelo espalhamento espectral.

2.7. Conclusão do Capítulo

Baseado na análise espectral utilizando a FFT, percebe-se uma baixa complexidade computacional. Porém há o problema do espalhamento espectral. Assim, tem-se a necessidade de utilizar métodos para reduzir este fenômeno ocasionado tanto pela presença de componentes não múltiplas da resolução na frequência, como também pela amostragem assíncrona.

A norma IEC propõe o agrupamento da energia de cada componente, detectando a componente de forma mais adequada. Porém, alguns métodos foram propostos no intuito de obter melhores resultados.

Dentre os métodos abordados são especificados alguns que exigem alto esforço computacional, como a utilização de Prony, filtros de Kalman e técnicas que aumentam a resolução na frequência. Em relação aos métodos propostos que abordam a aplicação da janela de Hanning, bem como a interpolação, seja no domínio do tempo ou da frequência, estas não exigem alto esforço computacional e são compatíveis com a norma IEC. Outro fato é que estes métodos podem reduzir o problema ocasionado pelo espalhamento espectral.

3. INTERPOLAÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA E APLICAÇÃO DE GRUPOS E SUBGRUPOS BASEADO NA NORMA IEC 61000-4-7

Para se conhecer os componentes espectrais de um sinal, geralmente utiliza-se a FFT. Porém, em alguns casos podem acontecer o espalhamento espectral, devido à amostragem assíncrona e a presença de inter-harmônicos. Em vista destas situações, algumas técnicas são aplicadas de forma a reduzir os erros causados pelo espalhamento espectral. Estas técnicas são definidas como interpolação e podem ser aplicadas tanto no domínio da frequência quanto no domínio do tempo.

Em primeiro lugar será apresentada a técnica de interpolação no domínio da frequência que é baseada no cálculo do desvio de frequência de cada componente harmônico e assim, com o conhecimento deste desvio, é possível melhorar as estimações espectrais. O segundo método utiliza o conceito de grupos e subgrupos de harmônicos e inter-harmônicos, onde a energia espalhada de cada componente, no espectro de frequência, é agrupada de forma a se estabelecer melhor precisão na detecção de cada componente contido no sinal.

Assim, são apresentados alguns casos de espalhamento ocasionados tanto na presença de inter-harmônicos como na presença de um sinal amostrado de forma assíncrona. Será demonstrado o comportamento da interpolação no domínio da frequência e dos grupos propostos pelo norma IEC 61000-4-7.

3.1. Interpolação no Domínio da Frequência

A interpolação no domínio da frequência é uma técnica muito utilizada para melhorar o resultado espectral de algum sinal com amostragem assíncrona. Esta técnica é utilizada para detectar o desvio de frequência de cada componente harmônico e, assim, corrigir o valor de frequência e de amplitude dos mesmos. Algumas aplicações desta técnica

podem ser encontradas em (CHANG, CHEN, *et al.*, 2008) e (GALLO, LANGELLA e TESTA, 2004).

Como forma de demonstrar uma aplicação deste método, considera-se um sinal senoidal no domínio do tempo $x[n]$ ao qual é aplicada uma janela retangular $w[n]$. Para este sinal, considera-se uma frequência de 58 Hz, em um sistema de 60 Hz, com taxa de amostragem igual a $60 \times Npc$ Hz, onde Npc é o número de pontos por ciclo. Assim, pode-se representar o sinal como:

$$x[n] = \text{sen}(2\pi f nT_s + \varphi) \cdot w[n], \quad (26)$$

onde f é a frequência do sinal, T_s é o período de amostragem e φ é a fase do sinal. A janela $w[n]$ possui comprimento igual a algum múltiplo inteiro de Npc , que representa o número de pontos por ciclo.

Assim, através das considerações estabelecidas, o espectro de frequência apresentará espalhamento devido à frequência do sinal ser diferente da frequência do sistema, ou seja, a amostragem do sinal é assíncrona. Portanto, o objetivo da interpolação no domínio da frequência é determinar o desvio de frequência para corrigir as amplitudes dos *bins* de cada componente harmônico. Para entender este procedimento considera-se a DTFT, da parte positiva (despreza-se a parte negativa pelo fato de ser a parte positiva de forma espelhada) de (26) no domínio da frequência como

$$X_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} e^{j\varphi} W(e^{j(\omega-\omega_0)}), \quad (27)$$

onde $X_p(e^{j\omega})$ representa a parte positiva do espectro de frequência e $\omega_0 = 2\pi f nT_s$. Representando (27) através da DFT, tem-se:

$$X_p[k] = X_p(e^{j\omega}) \Big|_{\omega_k} = \frac{1}{2} e^{j\varphi} W(e^{j(\omega_k-\omega_0)}). \quad (28)$$

Em relação a (28), conhecendo-se ω_0 , pode-se definir os valores reais de amplitude do sinal. A demonstração desse processo de interpolação é apresentada na Figura 12, onde

a curva de linha contínua representa a função da janela retangular no domínio da frequência, as hastes representam os *bins* da DFT e a linha tracejada representa o endereço real da frequência de 58 Hz (índice não inteiro). Para se calcular o endereço correto da frequência utiliza-se a função representada por

$$\omega_0 = (l_0 + \delta) \theta, \quad (29)$$

onde θ é a resolução na frequência em radianos, representada por $\theta = 2\pi/N$, onde N é o número de pontos, δ assume valores entre $-1/2$ e $1/2$ e l_0 é o *bin* que representa o endereço da frequência do componente de frequência.

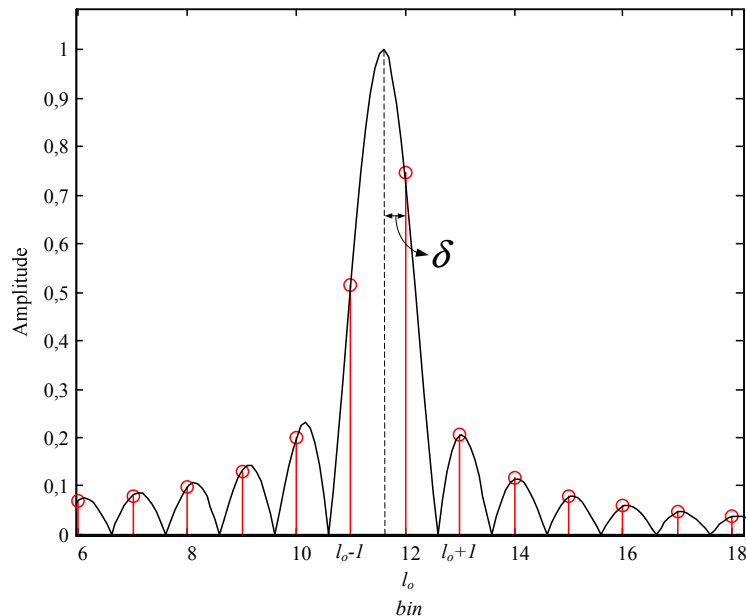


Figura 12 – Representação do método de interpolação na frequência.

O parâmetro δ , definido em (29) e na Figura 12, representa o desvio de frequência no sistema, contido entre o *bin* da frequência de 60 Hz e o ponto da frequência do sinal. Portanto, o objetivo é calcular este valor de forma a aplicar o resultado em (29). Para isto aplica-se uma equação de forma a calcular a relação entre os dois maiores *bins* da DFT demonstrada por

$$\alpha = \frac{|X_p[l_0 \pm 1]|}{|X_p[l_0]|}. \quad (30)$$

Quanto a função do numerador, o sinal dependerá da localização do segundo maior *bin*, representado na Figura 12 por $l_0 - 1$. Se este estiver contido à direita, utiliza-se $+1$, caso contrário, como apresentado na Figura 12, utiliza-se -1 . Considerando a localização dos *bins* como demonstrado na Figura 12 e efetuando o cálculo da razão entre os dois maiores *bins* contidos no lóbulo principal, e de acordo com (28), tem-se

$$\alpha = \frac{|W_p(e^{j(1+\delta)\theta})|}{|W_p(e^{-j\delta\theta})|}, \quad (31)$$

onde $W_p(e^{j(1+\delta)\theta})$ e $W_p(e^{-j\delta\theta})$ representam os valores dos *bins* contidos no lóbulo central e o sinal de δ será positivo pelo fato do maior *bin* estar à direita da linha tracejada (Figura 12). Outro ponto em relação à δ é o fato deste ser o único parâmetro desconhecido em (31). Porém a inversão de (31) não é trivial, necessitando de elaborar uma tabela para alocar os valores de δ . Assim, considerando a aplicação de uma janela retangular, tem-se a seguinte função

$$\alpha = \frac{|\sin(N\theta(1-\delta)/2) \cdot \sin(\theta\delta/2)|}{|\sin(\theta(1-\delta)/2) \cdot \sin(N\theta\delta/2)|}. \quad (32)$$

O esboço de (32) é representado na Figura 13, com os valores de δ encontrados no eixo das abscissas e α possuindo seus valores no eixo das ordenadas. Com o conhecimento do valor de δ pode-se calcular o valor de ω_0 através de (29). Uma demonstração das etapas para se calcular esses parâmetros é representada na Tabela 3. Quanto ao esboço do gráfico, apresentado na Figura 13, nota-se uma simetria em relação à posição 0 no eixo das abscissas.

Tabela 3 – Representação para o cálculo dos parâmetros α , δ e ω_0

Cálculo de α , δ e ω_0
1- Estabeleça a tabela com os valores de α e δ , através de (32);
2- Defina o componente harmônico e os <i>bins</i> a serem englobados no cálculo de cada componente;
3- Calcule o valor do maior <i>bin</i> no eixo das abscissas e das ordenadas
$[Y_{max}, X_{max}] = \max(X_p)$;
$X_p(I_{max}) = 0$;
4- Calcule o segundo maior <i>bin</i>
$[Y_{max1}, X_{max1}] = \max(X_p)$;
5- Encontre α através de (31);
Se $Y_{max1} = Y_{max}$
$\alpha = 0$;
Senão
$\alpha = Y_{max1} / Y_{max}$;
6- Através de α defina o valor de δ na tabela;
Se $X_{max} > X_{max1}$
$\delta_1 = -\delta$;
Senão
$\delta_2 = +\delta$;
7- Encontre ω_0 utilizando (29), com os valores de δ_1 ou δ_2 ;
8- Calcule o valor da amplitude utilizando ω_0 e a função janela no domínio da frequência;
$X_p[k] = \frac{1}{2} e^{j\varphi} W(e^{j(\omega_k - \omega_0)})$
Volte ao passo 2, se houver outras componentes para se calcular grupos e subgrupos, considerando o valor de frequência estimado no primeiro laço.

Para a utilização da função da janela de Hanning, considera-se a expressão como demonstrado por (31), porém substitui-se o numerador e o denominador por funções da janela de Hanning. Dessa forma tem-se:

$$\alpha = \frac{0,5W_p(e^{j(1+\delta)\theta}) - 0,25(W_p(e^{j((1+\delta)\theta-\theta)}) + W_p(e^{j((1+\delta)\theta+\theta)}))}{0,5W_p(e^{-j\delta\theta}) - 0,25(W_p(e^{-j(\delta+1)\theta}) + W_p(e^{-j(\delta-1)\theta}))}, \quad (33)$$

onde $W_p(e^{j\omega})$ representa a função da janela retangular. Graficamente, a relação entre α e δ , utilizando a janela de Hanning, pode ser mostrada através da Figura 14, onde a curva apresentada se assemelha com a curva da janela retangular (Figura 13), porém deve-se perceber que o menor valor no eixo das ordenadas é 0,5 e não 0.

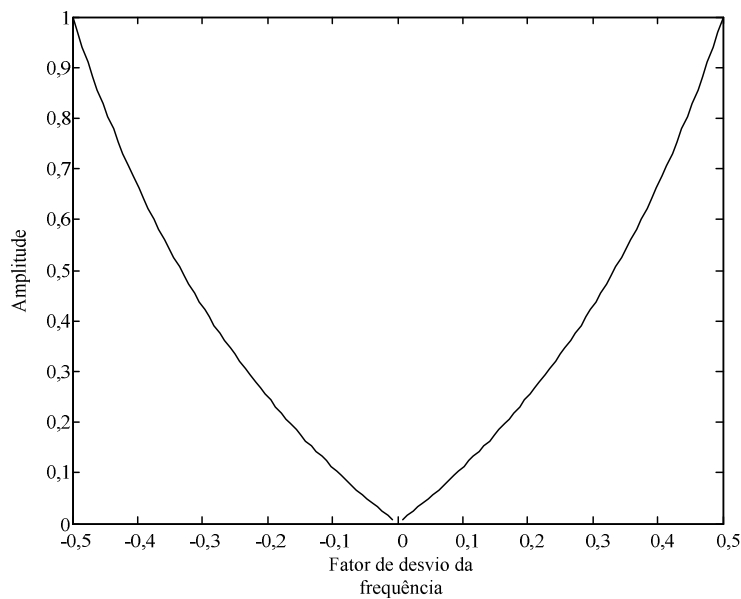


Figura 13 – Relação entre δ (horizontal) e α (vertical) para janela retangular.

Como exemplo do processo de interpolação na frequência, considera-se um sinal com frequência de 56 Hz, amostrado à frequência de amostragem de 5.120 Hz,

$$x[n] = \text{sen}(2\pi fnT_s). \quad (34)$$

Utilizando a função da janela retangular, com 1.024 amostras e aplicando a Transformada de Fourier obtém-se o resultado, da parte positiva do espectro de frequência, como apresentado na Figura 15. Nesta figura pode-se perceber o

espalhamento espectral ocasionado pela amostragem assíncrona e, portanto, utiliza-se a interpolação na frequência a fim de adquirir o valor de frequência e amplitude corretos.

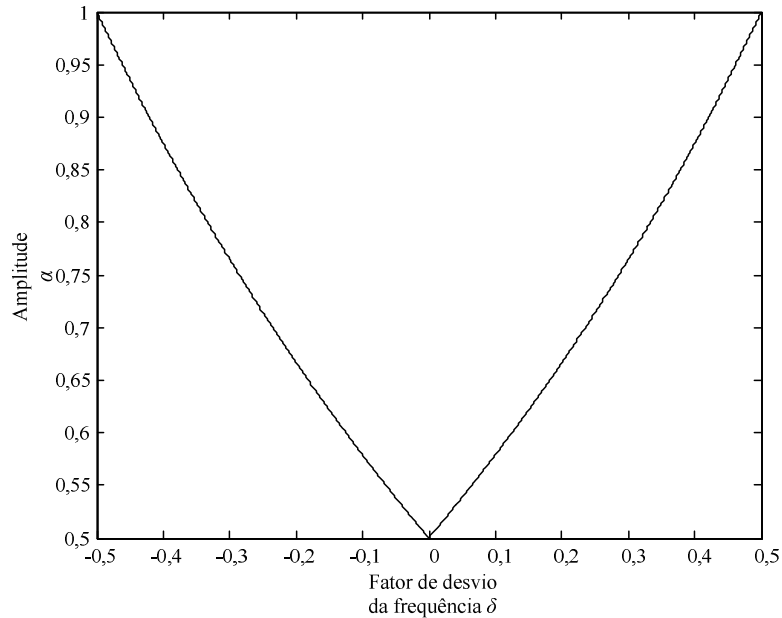


Figura 14 – Relação entre δ (horizontal) e α (vertical) para janela de Hanning.

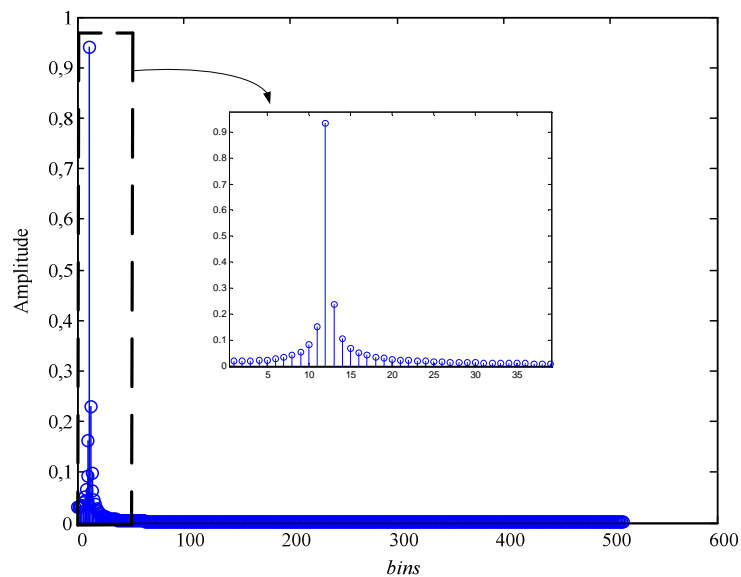


Figura 15 – Representação do sinal $x[n]$ no domínio da frequência.

Os resultados obtidos são mostrados através da Tabela 4, onde pode-se comparar os valores adquiridos através do sinal, sem interpolação e interpolado, utilizando a janela

retangular e de Hanning. A aplicação da janela de Hanning, juntamente com o processo de interpolação obteve melhores resultados.

Tabela 4 – Resultados obtidos através do método de interpolação na frequência.

	Sinal Ideal	Sinal sem interpolação		Sinal interpolado	
		Janela Retangular	Janela de Hanning	Janela Retangular	Janela de Hanning
Amplitude	1	0,9324	0,9745	0,9987	1,0000
Frequência	56	60	60	56,015	56,0000
Erro da frequência (%)	0	7	7	0,0268	0,0000
Erro da amplitude (%)	0	5,23	2,55	0,1294	0,0000

Outro exemplo a ser considerado é o sinal contendo a presença de componentes harmônicos. Para isto considera-se o sinal representado como

$$x[n] = \text{sen}(2\pi fnT_s) + \text{sen}(2\pi 3 fnT_s)/3 + \text{sen}(2\pi 5 fnT_s)/5. \quad (35)$$

Quanto aos parâmetros, considera-se a frequência do componente fundamental como 56 Hz em um sistema de 60 Hz, 12 ciclos, 1.024 pontos, resolução na frequência de 5 Hz e uma frequência de amostragem igual a 5.120 Hz.

O esboço do sinal, no domínio da frequência, é apresentado através da Figura 16, onde se percebe o acontecimento do espalhamento espectral devido à amostragem assíncrona, como também resulta nos valores diferentes dos componentes em relação aos apresentados em (35).

Aplicando as funções de janela retangular, janela de Hanning e o processo de interpolação no domínio da frequência obtêm-se os resultados apresentados através da Tabela 5.

Através da Tabela 5, percebe-se, em relação à aplicação das funções de janelas, melhores resultados obtido através da utilização da janela de Hanning. Com a aplicação da interpolação, os resultados possuem menores erros, em todos componentes harmônicos. A aplicação da interpolação, juntamente com a janela de Hanning possui erros menores ao se comparar com a interpolação utilizando a janela retangular.

A seguir será mostrado o erro obtido através da interpolação, juntamente com a aplicação das funções de janela retangular e de Hanning para valores de frequência entre 55 Hz e 65 Hz. Para este exemplo será considerado o sinal apresentado em (35), com os mesmos parâmetros utilizados anteriormente para obter os resultados da Tabela 5.

Os resultados obtidos são mostrados através da Figura 17. Assim, em comparação com a janela retangular (Figura 17(a)) e a janela de Hanning (Figura 17(b)), percebe-se melhores resultados quando é utilizada a janela de Hanning, onde os valores absolutos ficam abaixo de 0,005%.

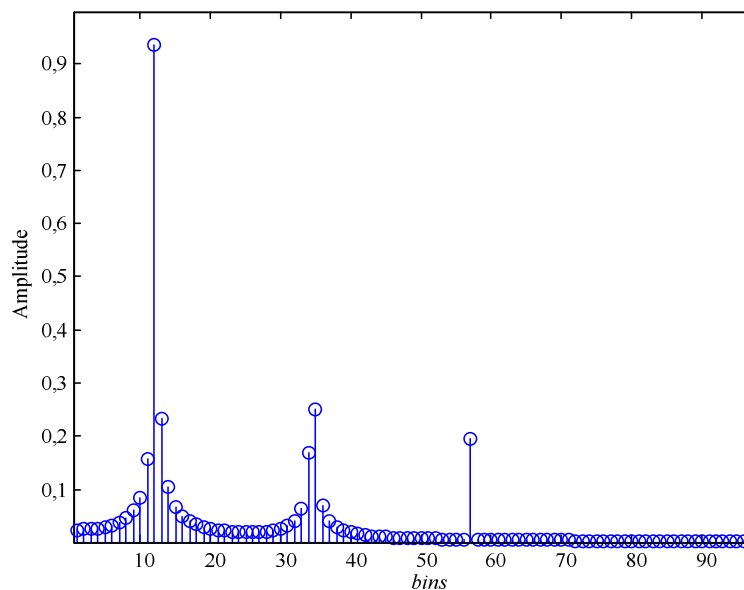


Figura 16 – Representação do sinal $x[n]$ com a presença do terceiro e quinto harmônico.

Tabela 5 – Resultados obtidos através da aplicação da janela retangular, janela de Hanning e da interpolação no domínio da frequência (Os erros em porcentagem são dados em módulos).

			Amplitude	Frequência	Erro da frequência (%)	Erro da amplitude (%)
Sinal Ideal	1°		1	56	0	0
	3°		0,333	168	0	0
	5°		0,2	280	0	0
Sinal sem interpolação	Janela Retangular	1°	0,93574	60	7,14	6,43
		3°	0,25117	180	7,14	24,65
		5°	0,19621	300	7,14	1,9
	Janela de Hanning	1°	0,97447	60	7,14	2,55
		3°	0,30033	180	7,14	9,89
		5°	0,2000	300	7,14	0
Sinal interpolado	Janela Retangular	1°	1,0003	56,0000	0	0,03
		3°	0,3336	167,9825	0,0104	0,08
		5°	0,1966	279,8375	0,058	1,70
	Janela de Hanning	1°	1,0000	56,0000	0	0
		3°	0,3334	167,9975	0,0015	0,02
		5°	0,2000	279,9975	0,0009	0

Quanto aos erros resultantes do cálculo da frequência do componente fundamental são apresentados na Figura 18. Assim percebe-se menores valores de erros obtidos com a aplicação da janela de Hanning.

Portanto, com a aplicação da interpolação na frequência, em sinais com amostragem assíncrona, os valores obtidos pelos componentes são reparados de forma a diminuir o erro da sua amplitude e frequência. Também são observados melhores resultados obtidos através da utilização da janela de Hanning em comparação com a janela retangular.

Outra forma de estabelecer melhores resultados quanto à detecção de componentes na frequência é em relação à manipulação dos métodos de grupos e sub-grupos de harmônicos e inter-harmônicos. Essas manipulações serão apresentadas na seção seguinte.

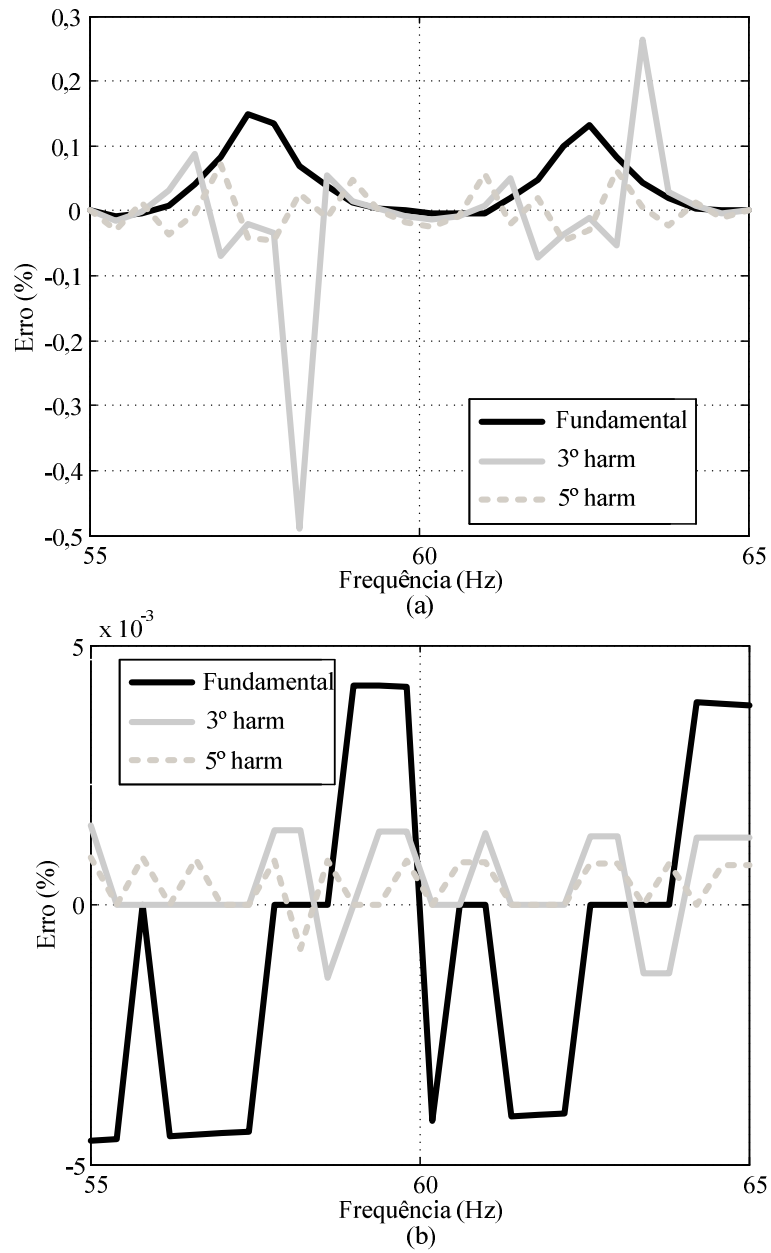


Figura 17 – Erro na estimação das amplitudes dos componentes harmônicos e fundamental obtido através da interpolação aplicando (a) janela retangular e (b) janela de Hanning.

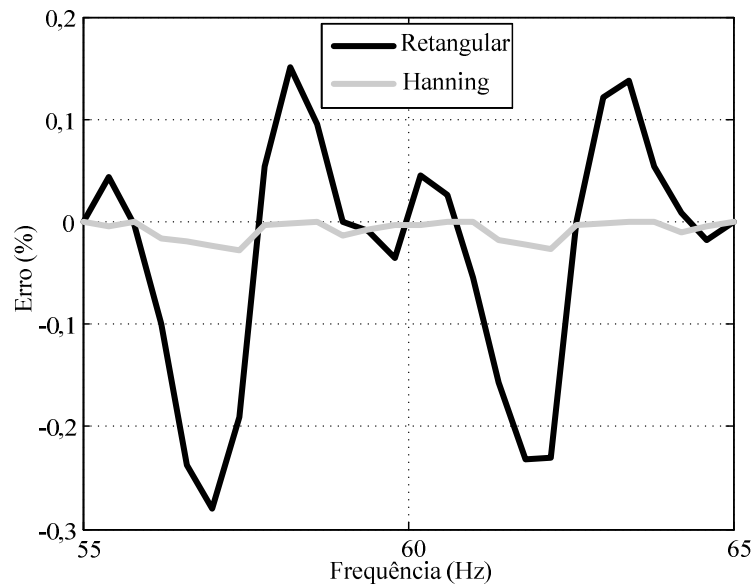


Figura 18 – Erro da frequência obtido através da interpolação utilizando janela retangular e de Hanning.

3.2. Aplicação dos grupos e sub-grupos

Uma questão importante a se destacar, é quanto à aplicação dos grupos e subgrupos de harmônicos, no intuito de se saber qual aplicação será a mais eficiente. Para isso considera-se um sinal com a componente fundamental de 60 Hz, dois componentes harmônicos de 120 e 180 Hz e um componente inter-harmônico de 157 Hz, representado por

$$x(t) = \text{sen}(2\pi 60t) + 0,3\text{sen}(2\pi 120t) + 0,2\text{sen}(2\pi 157t) + 0,2\text{sen}(2\pi 180t). \quad (36)$$

Considerando um sinal com 12 ciclos, 1.024 pontos, resolução na frequência de 5 Hz e uma frequência de amostragem igual a 5.120 Hz tem-se o espectro de frequência como mostrado na Figura 19 (a).

Dessa forma, para proceder ao agrupamento, deve-se notar, através da Figura 19(b), que a aplicação de grupos de harmônicos engloba a energia do componente inter-harmônico. Porém, utilizando o subgrupo harmônico, a energia do inter-harmônico não é agrupada, proporcionando o cálculo dos componentes harmônicos somente com suas respectivas energias, considerando que neste caso o sinal é síncrono. Quanto aos inter-harmônicos,

se a amostragem for síncrona, como neste exemplo, pode-se aplicar o método de grupo ou subgrupo, pois ambos não agruparão a energia dos harmônicos.

Outra análise, em relação aos grupos e sub-grupos, é quanto à presença de um componente inter-harmônico próximo à algum componente harmônico. Nesse caso considera-se um componente de 62,5 Hz substituindo o componente de 157 Hz em (36).

A utilização dos grupos e subgrupos de harmônicos e inter-harmônicos são apresentados nas Figura 20(a), (b) e (c). Na Figura 20(a) é apresentado o emprego tanto dos grupos como dos subgrupos dos harmônicos mostrando que tanto na aplicação do grupo como subgrupo, acontece o agrupamento da energia do inter-harmônico. Já na Figura 20(b) e (c) são apresentados o agrupamento através da presença de somente componentes harmônicos e inter-harmônicos, respectivamente. Essa separação é feita através da aplicação de janelas na frequência, como é demonstrado em (GALLO, LANGELLA e TESTA, 2004) e obtido a partir da equação

$$\hat{X}'[k] = X[k] - \sum_{n=1}^{L^H} \frac{\hat{A}_n^H e^{j\hat{\phi}_n}}{2j} \cdot W\left(\frac{k}{N} - \frac{\hat{f}_n}{f_s}\right), \quad (37)$$

em que $\hat{X}'[k]$ representa os componentes inter-harmônicos, $X[k]$ representa a DFT de $x[n]$, \hat{A}_n^H são as amplitudes de cada harmônico H , L^H representa o maior componente harmônico, W representa a função janela, $\hat{\phi}_n$ é o valor de fase estimado e \hat{f}_n é o valor da frequência estimado.

Efetuada a separação desses componentes, quando se aplica o agrupamento dos componentes harmônicos, como apresentado na Figura 20(b), há a presença de energia do inter-harmônico no *bin* correspondente à frequência de 60 Hz, pois a janela aplicada na frequência não consegue separar a contribuição de energia do inter-harmônico no harmônico. Assim, o inter-harmônico afeta a amplitude do grupo harmônico. Quanto ao grupo e subgrupo de inter-harmônicos, representado na Figura 20(c), pode-se perceber que uma parte da energia é agrupada pelo primeiro grupo e outra parte é agrupada pelo segundo grupo. Já a energia contida no *bin* da frequência de 60 Hz não é englobada nesse cálculo. Portanto, com a presença de inter-harmônicos próximos aos componentes

harmônicos ocorre o problema de não se conseguir agrupar a energia dos componentes de uma maneira eficaz.

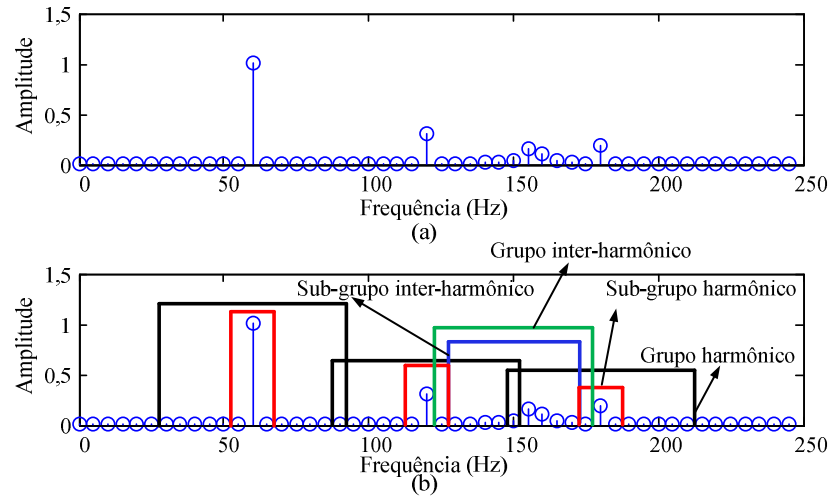


Figura 19 – Representação da aplicação dos grupos e sub-grupos. (a) Sinal na frequência, (b) agrupamento dos componentes harmônicos e inter-harmônicos.

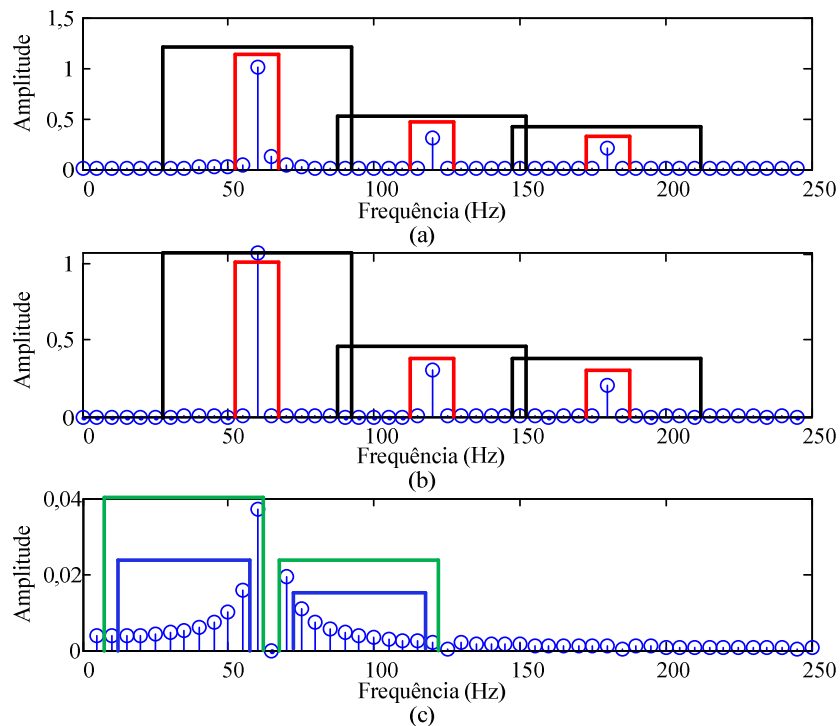


Figura 20 – Representação do agrupamento dos componentes na frequência. (a) Agrupamento com a presença de todos os componentes, (b) agrupamento dos componentes harmônicos e (c) agrupamento dos componentes inter-harmônicos.

Outro problema encontrado pelo agrupamento de harmônicos e inter-harmônicos se dá quando a amostragem do sinal é assíncrona, levando ao espalhamento dos componentes harmônicos. Isso faz com que a energia desses componentes interfira nos componentes inter-harmônicos, dificultando ainda mais o agrupamento e conseqüentemente a detecção de cada componente. Os resultados obtidos considerando este caso são mostrados pela Figura 21, onde a frequência do componente fundamental foi modificada para 58 Hz.

Note, a partir da Figura 21, que os grupos de harmônicos e inter-harmônicos englobam energia de ambos os componentes. Isto faz com que a detecção não seja efetuada de modo eficaz. Portanto, quando a amostragem é realizada de forma assíncrona ou quando há um componente inter-harmônico próximo a algum componente harmônico, o método de grupos não possui bom desempenho na detecção de tais componentes.

Quanto ao problema da amostragem assíncrona, pode ser amenizado com a aplicação da interpolação no domínio tempo ou da frequência, já a presença de componentes inter-harmônicos próximos aos componentes harmônicos é um problema a se buscar uma alternativa a fim de se conseguir separar e agrupar as energias de cada componente de uma melhor forma.

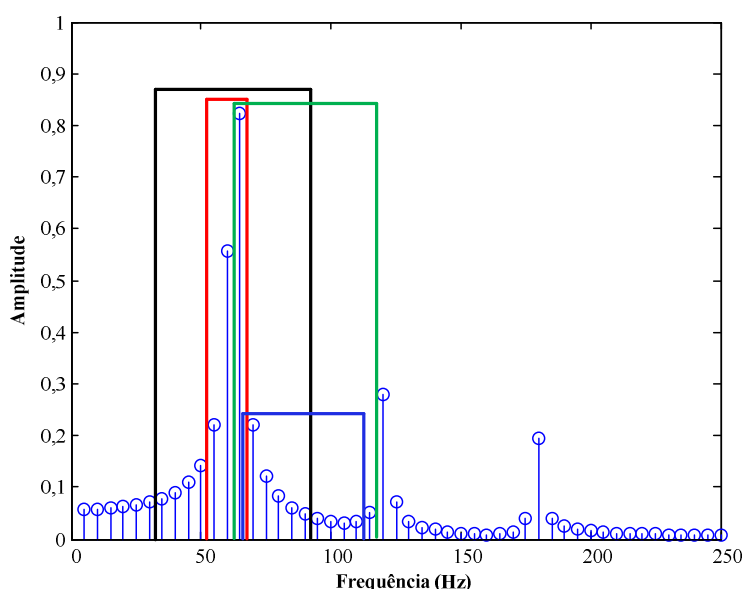


Figura 21 – Representação da aplicação de grupos e subgrupos em um sinal com amostragem assíncrona.

3.3. Conclusão

Neste capítulo foram apresentadas técnicas para detectar e corrigir os valores dos componentes de um sinal no domínio da frequência. Estes métodos são denominados como interpolação na frequência e grupos e subgrupos de harmônicos e inter-harmônicos.

Em relação à interpolação na frequência, foi demonstrado que para efetuar a correção dos valores dos componentes deve-se conhecer o valor de frequência de cada componente para que se possa endereçar determinado *bin* de forma adequada para se obter a amplitude correta.

Quanto aos grupos e subgrupos, demonstrou-se a aplicação deste para diversos casos do sinal. Quando o sinal é síncrono e existem harmônicos e inter-harmônicos no sinal, não é adequado se utilizar grupos de harmônicos pelo fato de agruparem energias dos inter-harmônicos, para isso utilizam-se os subgrupos. Já os inter-harmônicos podem ser calculados através do emprego tanto de grupos como subgrupos, pois não há espalhamento dos componentes harmônicos por haver amostragem assíncrona.

Quando existe algum inter-harmônico próximo a algum componente harmônico, a energia do inter-harmônico se dividirá em dois grupos de inter-harmônicos e também no componente harmônico. Dessa forma, existe um problema na detecção dos componentes, pelo fato de não se conhecer algum método que possa separar a energia desses componentes.

Por último, foi apresentado a aplicação de grupos com uma amostragem assíncrona. Com isso, demonstrou-se outro problema quanto aos grupos e subgrupos devido ao fato de serem englobadas energias de ambos os componentes. Para isso é necessário a aplicação de algum método de interpolação a fim de proporcionar um sinal síncrono.

4. INTERPOLAÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO

A interpolação é um método utilizado para definir os valores de uma determinada curva, contidos entre pontos previamente conhecidos (*nós*). Para representação deste método, um exemplo pode ser mostrado, considerando dois pontos em um plano bi-dimensional (t_1, x_1) e (t_2, x_2) , com $t_1 \neq t_2$. Supondo que esses pontos são interligados entre si, através de uma linha reta, os valores contidos entre esses pontos podem ser determinados através da interpolação, como é mostrado na Figura 22. Assim, a partir dos pontos (t_1, x_1) e (t_2, x_2) , são determinados outros valores, no caso (t_3, x_3) , contido entre os nós.

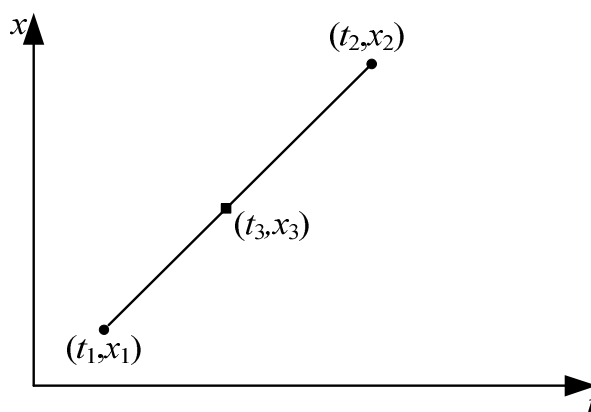


Figura 22 – Representação do processo de interpolação.

Várias são as aplicações para a interpolação, podendo ser em imagens, sinais de voz, sinais elétricos, dentre outras. Para este trabalho, será abordada a aplicação da interpolação em sinais elétricos, onde um sinal é amostrado em uma determinada frequência, denominada como frequência de amostragem, e deseja-se obter um sinal de saída com taxa de amostragem diferente.

Este processo é de grande importância para o cálculo dos componentes de frequências contidos no sinal, pelo fato de possibilitar que o sinal de entrada seja fornecido para o cálculo da Transformada de Fourier de forma síncrona. Sendo assim, os efeitos de

espalhamento espectral serão reduzidos no cálculo da transformada discreta de Fourier, pois, como já mencionado, a amostragem síncrona é de grande importância na análise discreta de Fourier.

Neste capítulo serão descritos dois métodos básicos de interpolação: a interpolação polinomial e a interpolação por seguimentos, em especial, a B-spline. Serão analisadas as estruturas de filtragem em tempo real e apresentada a comparação dos resultados fornecidos por cada método.

4.1. Interpolação Polinomial (*off-line*)

A interpolação polinomial recebe este nome devido ao fato de o resultado obtido representar uma função polinomial de determinado grau e conseguir reproduzir exatamente os pontos amostrados do sinal de entrada (MOLER, 2004), ou seja, dado o polinômio $P(t)$ cujos parâmetros são obtidos a partir dos dados (t_i, x_i) , $i = 1, \dots, N$, então,

$$P(t_i) = x_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (38)$$

O processo de interpolação polinomial pode ser definido de diferentes formas, porém um dos métodos mais compactos para a representação de polinômios é a forma de *Lagrange* (MOLER, 2004), representado por

$$P(t) = \sum_i \left(\prod_{j \neq i} \frac{t - t_j}{t_i - t_j} \right) x_i, \quad (39)$$

onde t_i e t_j representam os valores dos pontos amostrados, ou seja, os valores dos nós.

O método de Lagrange pode representar qualquer grau de polinômio, dependendo do número de pontos contidos na curva. Assim, o número de pontos “ N ” sempre corresponderá a um polinômio de grau “ $N-1$ ”, ou seja, se o sinal analisado contiver três amostras o resultado será uma função de segundo grau. Esta consideração pode ser

entendida através de (39), onde dentro do produtório haverá sempre “ $N-1$ ” multiplicações, considerando o número de pontos igual a “ N ”.

Outro fato relevante, em relação à interpolação polinomial de Lagrange, é que este método pode ser aplicado para qualquer ponto contido na curva, inclusive os nós. Isto porque se $x = x_i$, todos os elementos do somatório em (39) serão zero, exceto o i -ésimo produto. Para uma melhor compreensão do método de interpolação de Lagrange, apresenta-se o exemplo seguinte.

Considerando os seguintes vetores:

$$t = [1 \ 2 \ 3 \ 4]; \quad (40)$$

$$x = [4 \ 7 \ 9 \ 14]; \quad (41)$$

onde t representa o eixo das abscissas e x representa o eixo das ordenadas. Com a aplicação da interpolação de Lagrange tem-se:

$$P(t) = \frac{(t-2)(t-3)(t-4)}{(-6)}(4) + \frac{(t-1)(t-3)(t-4)}{(2)}(7) \\ + \frac{(t-1)(t-2)(t-4)}{(-2)}(9) + \frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{(6)}(14). \quad (42)$$

Através de (42) nota-se que cada termo é uma função de terceiro grau, o que demonstra que com N igual a 4, forma-se uma função de terceiro grau, ou seja, “ $N-1$ ”. Outro fato a se analisar são os pontos onde $t = t_i$, onde os valores de $P(t)$ são iguais aos nós. Nestes pontos, todos os termos dentro do produtório, onde $t = t_i$, são zero. Assim, a função resultará em um único termo não nulo que corresponderá ao valor de seu respectivo nó. Um exemplo pode ser dado ao considerarmos t igual a 1 em (42), ou seja, o primeiro ponto do vetor t . Assim, o único termo não nulo, será o primeiro, e possuirá valor igual a 4, correspondente ao primeiro elemento do vetor x .

Também, a interpolação de Lagrange pode ser representada, de maneira diferente da forma apresentada em (39). Esta maneira é apresentada através da forma polinomial, dada por

$$P(t) = a_1 t^{N-1} + a_2 t^{N-2} + \dots + a_{N-1} t + a_N. \quad (43)$$

Onde a_i , $i=1, \dots, N$ são os coeficientes de multiplicação do polinômio.

Considerando a forma polinomial, pode-se generalizar este processo de interpolação de modo a assumir N pontos de uma curva. Assim, a interpolação passa a ser apresentada na forma matricial como,

$$\begin{pmatrix} t_1^{N-1} & t_1^{N-2} & \dots & t_1 & 1 \\ t_2^{N-1} & t_2^{N-2} & \dots & t_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ t_N^{N-1} & t_N^{N-2} & \dots & t_N & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(1) \\ P(2) \\ \vdots \\ P(N) \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Nesse caso, a matriz representada pelos elementos de x em (44), é denominada matriz de Vandermonde e os elementos a são os coeficientes dos polinômios. Assim, como dito anteriormente, a utilização de “ $N-1$ ” nós possibilita o cálculo de N valores para a curva interpolada.

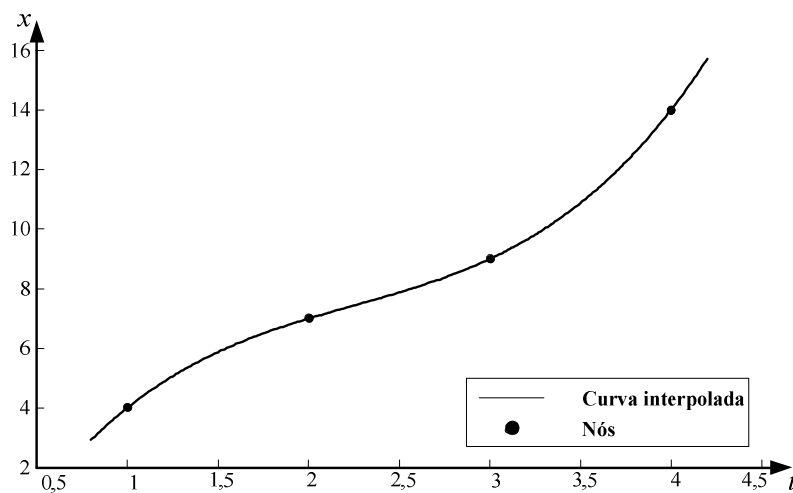


Figura 23 - Interpolação Polinomial (Lagrange).

Na Figura 23 é apresentado um esboço do processo de interpolação de Lagrange, aplicado aos vetores contidos em (40) e (41).

Através da Figura 23 nota-se a representação dos nós e do sinal interpolado, representado pelos pontos e pela linha cheia, respectivamente. Dessa forma percebe-se que a curva ou sinal interpolado assumem valores iguais aos nós em seus respectivos pontos. Isso é uma característica positiva desse método de interpolação, pelo fato de preservar os valores dos pontos amostrados. Outra questão é quanto à aplicação em tempo real deste método, que será abordada a seguir.

4.2. Interpolação Polinomial (*on-line*)

Até o momento, foi descrito o comportamento do método de interpolação de Lagrange para curvas com todos os pontos previamente conhecidos. Este caso é definido como uma interpolação *off-line*, ou seja, todos os nós da curva são utilizados ao mesmo tempo para a interpolação. Porém, para aplicações em tempo real, onde as amostras são conhecidas a cada novo período de amostragem, a interpolação só poderá ser realizada por blocos, ou como processo de filtragem, se um atraso puder ser admitido no processamento.

No processo de interpolação realizado em tempo real e com a utilização de filtros, as amostras geralmente são armazenadas em uma memória. Dessa forma se o processo de interpolação utilizar N pontos do sinal amostrado, à cada passo, o polinômio resultante será de grau $N-1$. Deve-se destacar também, que os valores contidos em cada memória são deslocados ou descartados à medida que novas amostras são adquiridas. Para isso considera-se o eixo das abscissas fixo, representando as posições da memória. Esta representação pode ser verificada através da Figura 24.

A Figura 24 mostra esse processo de interpolação no tempo real, onde foi considerado uma memória com 4 posições, sendo que a amostra “ n ” representa a amostra atual, “ $n - 2$ ” e “ $n - 1$ ” são as amostras passadas e “ $n + 1$ ” representa uma amostra futura. A distância da amostra $x[n]$ ao ponto a ser interpolado é denominado como α e pode variar de acordo com a mudança da frequência do sinal ao longo do tempo.

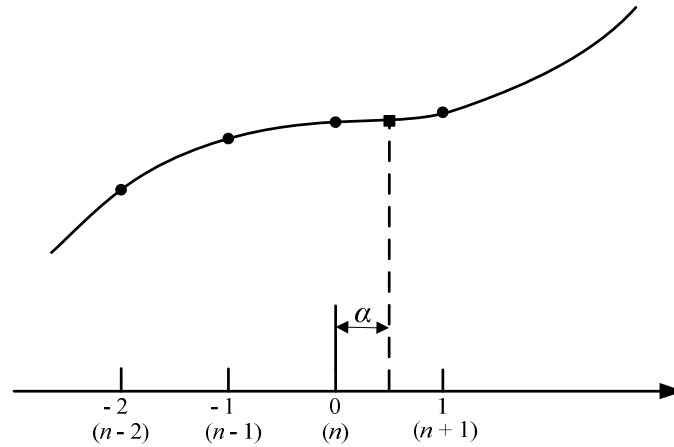


Figura 24 – Representação da interpolação de Lagrange em tempo Real.

Para demonstrar esse processo matematicamente, considera-se novamente (39), com os intervalos variando de $(n - 2)$ à $(n + 1)$ e considerando α no intervalo

$$n < \alpha < n+1. \quad (45)$$

Assim utilizando (39), obtém-se a função,

$$\begin{aligned}
 x[\alpha] = & \frac{\alpha - (n-1)}{(n-2) - (n-1)} \cdot \frac{(\alpha - n)}{(n-2) - n} \cdot \frac{\alpha - (n+1)}{(n-2) - (n+1)} \cdot x[n-2] \\
 & + \frac{\alpha - (n-2)}{(n-1) - (n-2)} \cdot \frac{\alpha - n}{(n-1) - n} \cdot \frac{\alpha - (n+1)}{(n-1) - (n+1)} \cdot x[n-1] \\
 & + \frac{\alpha - (n-2)}{n - (n-2)} \cdot \frac{\alpha - (n-1)}{n - (n-1)} \cdot \frac{\alpha - (n+1)}{n - (n+1)} \cdot x[n] \\
 & + \frac{\alpha - (n-2)}{(n+1) - (n-2)} \cdot \frac{\alpha - (n-1)}{(n+1) - (n-1)} \cdot \frac{\alpha - n}{(n+1) - n} \cdot x[n+1],
 \end{aligned} \quad (46)$$

que simplificando leva a

$$\begin{aligned}
 x[\alpha] = & \frac{(\alpha-n+1)}{-1} \cdot \frac{(\alpha-n)}{-2} \cdot \frac{(\alpha-n-1)}{-3} \cdot x[n-2] \\
 & + \frac{(\alpha-n+2)}{1} \cdot \frac{(\alpha-n)}{-1} \cdot \frac{(\alpha-n-1)}{-2} \cdot x[n-1] \\
 & + \frac{(\alpha-n+2)}{2} \cdot \frac{(\alpha-n+1)}{1} \cdot \frac{(\alpha-n-1)}{-1} \cdot x[n] \\
 & + \frac{(\alpha-n+2)}{3} \cdot \frac{(\alpha-n+1)}{2} \cdot \frac{(\alpha-n)}{1} \cdot x[n+1].
 \end{aligned} \tag{47}$$

Considerando o eixo das abscissas sendo fixo, de modo que a cada atualização das amostras para interpolação, n seja igual a zero e α esteja compreendido no intervalo $0 < \alpha < 1$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 x[\alpha] = & -\frac{1}{6} \cdot (\alpha+1) \cdot (\alpha) \cdot (\alpha-1) \cdot x[n-2] \\
 & + \frac{1}{2} \cdot (\alpha+2) \cdot (\alpha) \cdot (\alpha-1) \cdot x[n-1] \\
 & - \frac{1}{2} \cdot (\alpha+2) \cdot (\alpha+1) \cdot (\alpha-1) \cdot x[n] \\
 & + \frac{1}{6} \cdot (\alpha+2) \cdot (\alpha+1) \cdot (\alpha) \cdot x[n+1].
 \end{aligned} \tag{48}$$

Resolvendo os produtos de cada termo, encontram-se 4 termos de funções de 3º grau,

$$\begin{aligned}
 x[\alpha] = & -\frac{1}{6} \cdot (\alpha^3 - \alpha) \cdot x[n-2] + \frac{1}{2} \cdot (\alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha) \cdot x[n-1] \\
 & - \frac{1}{2} \cdot (\alpha^3 + 2\alpha^2 - \alpha - 2) \cdot x[n] + \frac{1}{6} \cdot (\alpha^3 + 3\alpha^2 - 2\alpha) \cdot x[n+1].
 \end{aligned} \tag{49}$$

Colocando α em evidência tem-se:

$$\begin{aligned}
 y[\alpha] = & \alpha^3 \cdot \left(-\frac{1}{6}x[n-2] + \frac{1}{2}x[n-1] - \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{6}x[n+1] \right) \\
 & + \alpha^2 \left(\frac{1}{2}x[n-1] - x[n] + \frac{1}{2}x[n+1] \right) \\
 & + \alpha \left(-\frac{1}{6}x[n-2] - x[n-1] + \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{3}x[n+1] \right) \\
 & + x[n].
 \end{aligned} \tag{50}$$

Aplicando a transformada z em cada termo, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 H_0(z) &= -\frac{1}{6}z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}z \\
 H_1(z) &= \frac{1}{2}z^{-1} - 1 + \frac{1}{2}z \\
 H_2(z) &= -\frac{1}{6}z^{-2} - z^{-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}z \\
 H_3(z) &= 1.
 \end{aligned} \tag{51}$$

Assim, a transformada z de $y[\alpha]$ pode ser representada como

$$Y(z) = \left(H_0(z)\alpha^3 + H_1(z)\alpha^2 + H_2(z)\alpha + H_3(z) \right) X(z) \tag{52}$$

Dessa forma é determinada uma estrutura de filtros como mostrado na Figura 25, onde o sinal de entrada é inserido nos quatro bancos, a fim de se obter o sinal de saída $y[n]$.

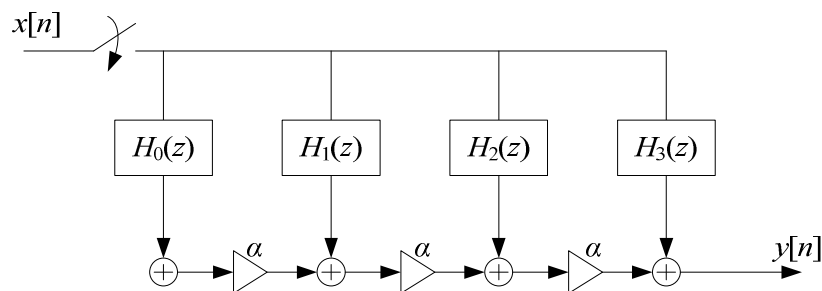


Figura 25–Representação esquemática da estrutura dos filtros do método de Lagrange de 3ª ordem.

Essa estrutura de filtros, representada pela Figura 25 é denominada como estrutura de *Farrow* (MITRA, 2006), na qual insere um multiplicador α nos trechos antes de cada somatório.

Para a implementação da interpolação de Lagrange em tempo real utilizando a estrutura de filtros, utiliza-se um algoritmo de acordo com a Tabela 6.

Tabela 6 - Algoritmo de Interpolação de Lagrange de 3ª ordem.

Interpolador de Lagrange de 3ª ordem	
1-	Inicialização: $n = 0$ $\alpha = 0$
2-	Atualize T'_s e calcule $\lambda = \frac{T'_s}{T_s}$
3-	Se $\alpha \leq 1$ Defina $y[\alpha]$ através da equação (50); $a = \alpha + \lambda$; $m = m + 1$; Se $\alpha > 1$ $a = \alpha - 1$; $n = n + 1$; atualize a memória dos filtros com as novas amostras $x[n]$;
4-	Volte ao passo 2 Fim

Onde T_s é o período de amostragem ideal, T'_s é o período de amostragem real do sinal em questão e λ é a razão dos dois períodos de amostragem. Quanto ao processo, este se inicia atribuindo ao período de amostragem real T'_s , o valor do período de amostragem ideal T_s e defini-se n e α iguais à zero. No segundo passo é definida a razão entre os períodos real T'_s e ideal T_s para o cálculo de α no terceiro passo. Além do cálculo de α , anteriormente é calculado $x[\alpha]$ através de (50), caso o valor de α seja menor ou igual a 1. Para α maior que 1, ao invés de proceder ao cálculo de $x[\alpha]$, subtrai-se 1 de α e atualiza-se a memória. Estes passos se repetem até que não existam mais amostras para serem analisadas ou se, por acaso, deseja-se terminar o processo.

Um exemplo de interpolação em tempo real pode ser representado considerando um sinal senoidal como, por exemplo:

$$x[n] = \text{sen}(2\pi fnT_s), \quad (53)$$

onde f é a frequência do sinal e T_s é o período de amostragem.

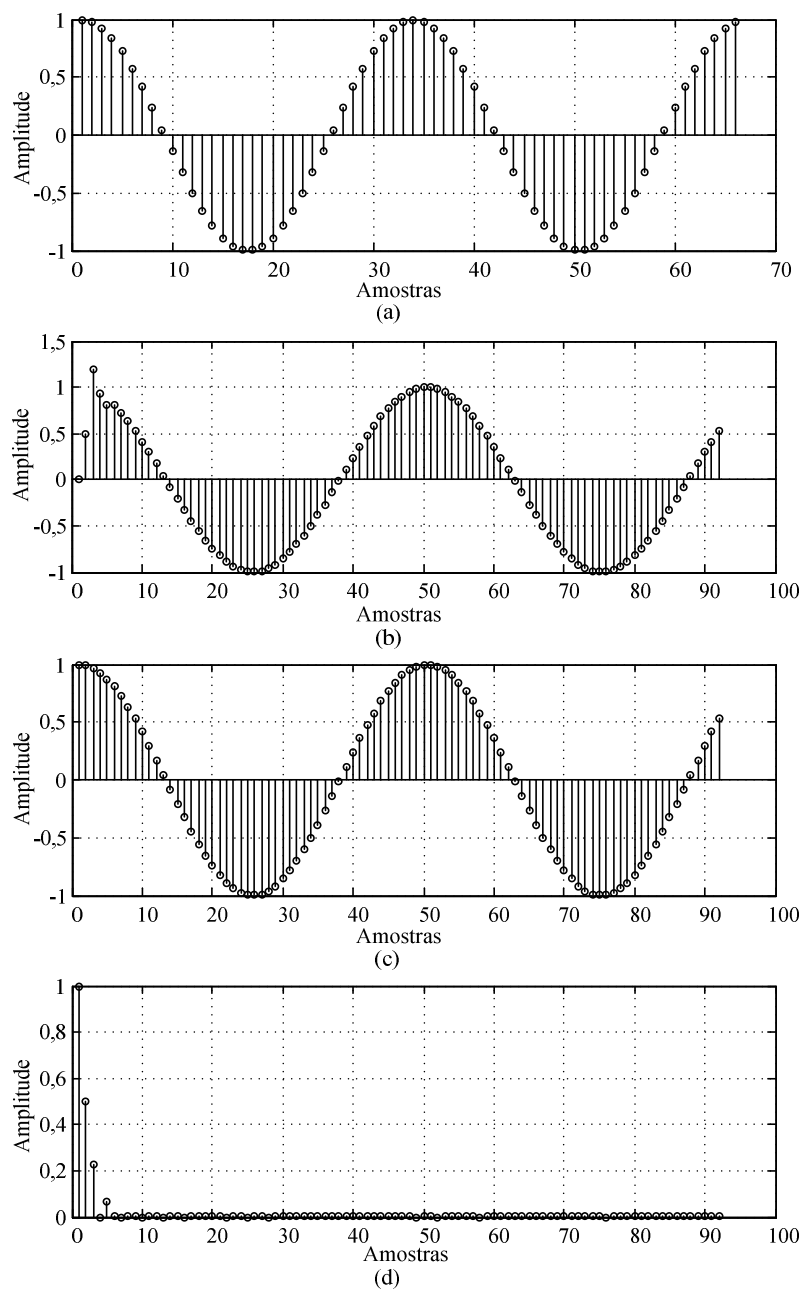


Figura 26 - Resultados obtidos através da interpolação de Lagrange em tempo real. (a) Sinal real, (b) sinal interpolado, (c) sinal ideal, (d) erro do sinal interpolado.

Para este exemplo será considerado f igual a 60 Hz e o período de amostragem T_s igual a 0,5ms. Para a realização do processo de interpolação será considerado uma taxa de amostragem igual a $\frac{3}{2}$ da taxa de amostragem do sinal de entrada. Assim, obtêm-se os seguintes resultados, esboçados na Figura 26.

Ao se comparar a Figura 26(b) com a Figura 26(c) obtêm-se valores de erros maiores nas cinco primeiras amostras. Isto devido ao processo de inicialização ou transitório do processo de interpolação. Para as demais amostras, têm-se um valor de erro abaixo de $55 \cdot 10^{-6}$.

4.3. Interpolação B-spline

A Interpolação B-spline é outro método para a conversão de sinais com taxas de amostragem diferentes que, assim como a interpolação de Lagrange, pode ser definida de modo a ser aplicada em tempo real ou *off-line*. O nome “*spline*” se refere ao instrumento utilizado para desenhos de curvas, de forma manual e a letra “*B*” se refere a bases ou básico, referente às funções utilizadas no processo de interpolação, daí a origem do nome. Este método surgiu na década de 1940 e foi introduzido por (SCHOENBERG, 1946). Uma qualidade a se destacar deste método, é em relação à suavização das curvas quando interpoladas. Porém, a curva interpolada não assume os valores dos nós, precisando da utilização de pré-filtros para que essa condição seja satisfeita. Essas considerações assim como a implementação deste método em tempo real serão descritas a seguir.

Considerando o método apresentado em (SCHOENBERG, 1946), a função de interpolação B-spline é representada por

$$\hat{x}(t) = \sum_{i=m}^{N+m} \beta_i^{(L)}(t)x(t), \quad (54)$$

onde $\hat{x}(t)$ é o sinal interpolado, $x(t)$ é o sinal de entrada e $\beta_i^{(L)}(t)$ representa as funções B-spline. Já os parâmetros N , m , i e L , representam o número de nós utilizados

para a interpolação, o nó em que se iniciará a função $\beta_i^{(L)}(t)$, o nó de cada função e o grau das funções $\beta_i^{(L)}(t)$, respectivamente. Cada função $\beta_i^{(L)}(t)$, de grau L , é representada pela convolução de $L+1$ funções retangulares, definida como $\beta^0(t)$ e representada por

$$\beta^0(t) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & |t| = \frac{1}{2} \\ 0, & \text{para outros casos.} \end{cases} \quad (55)$$

$$\beta^L(t) = \underbrace{\beta^0 * \beta^0 * \dots * \beta^0}_{L+1}. \quad (56)$$

Assim, considerando uma função de terceiro grau, serão necessárias quatro funções $\beta^0(t)$ no processo de convolução e resultará em uma função B-spline representada por

$$\beta^3(t) = \begin{cases} \frac{2}{3} - |t|^2 + \frac{|t|^3}{2}, & 0 < |t| < 1 \\ \frac{(2-|t|)^3}{6}, & 1 \leq |t| < 2 \\ 0, & 2 \leq |t|. \end{cases} \quad (57)$$

Para as demais funções $\beta^{(L)}(t)$, de grau L , o processo para defini-las se dá de maneira semelhante, com o número diferente de funções $\beta^0(t)$ utilizadas na convolução, que dependerá do grau da função. A Figura 27 mostra um esboço dessas funções B-spline, resultantes do processo de convolução, indo de funções de grau zero até o terceiro grau.

Assim, através da Figura 27, percebe-se que as curvas são formadas por funções contidas em um determinado intervalo (demonstrado pelos círculos). O número de trechos utilizados para formar a curva de cada função B-spline está relacionado com a ordem e o grau das funções contidas entre os intervalos. Portanto, uma função de primeira ordem e de grau zero é composta por um intervalo, representado por uma constante entre os pontos. Para a função de segunda ordem e primeiro grau tem-se duas funções de primeiro grau em intervalos diferentes. Para as demais curvas, a análise é realizada de forma similar, onde a ordem de cada função é igual ao número de funções e intervalos contidos nas funções $\beta^{(L)}(t)$.

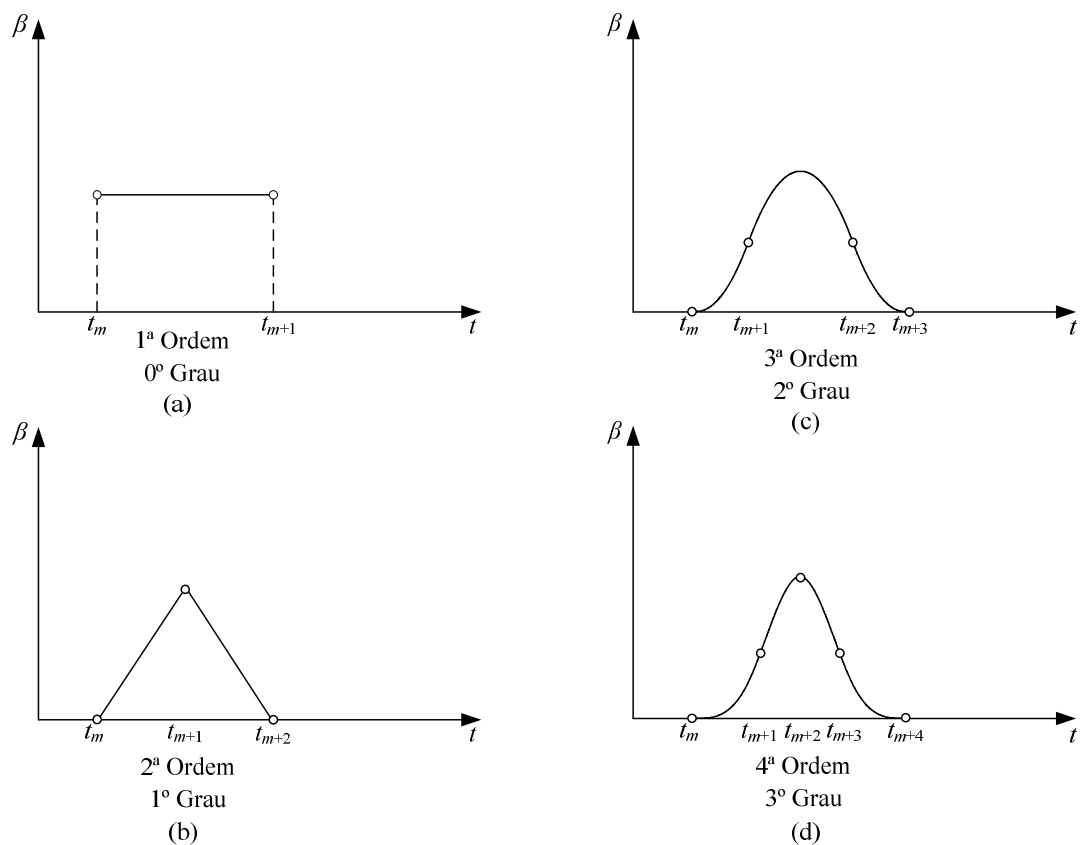


Figura 27 - Funções B-spline de (a) 0º grau, (b) 1º grau, (c) 2º grau e (d) 3º grau.

Essas $L+1$ funções contidas nos intervalos das curvas podem ser expressas como:

$$\begin{aligned}
 b_0(\alpha) &= a_0 + b_0\alpha + c_0\alpha^2 + d_0\alpha^3 + \dots + e_0\alpha^L \\
 b_1(\alpha) &= a_1 + b_1\alpha + c_1\alpha^2 + d_1\alpha^3 + \dots + e_1\alpha^L \\
 b_2(\alpha) &= a_2 + b_2\alpha + c_2\alpha^2 + d_2\alpha^3 + \dots + e_2\alpha^L \\
 &\vdots \\
 b_L(\alpha) &= a_L + b_L\alpha + c_L\alpha^2 + d_L\alpha^3 + \dots + e_L\alpha^L,
 \end{aligned} \tag{58}$$

Onde $b_i(\alpha)$ são funções de grau L e α é a variável localizada no intervalo $0 \leq \alpha \leq 1$. Ao longo do texto, será considerado a utilização de $b_i(\alpha)$ para representar as funções e b_i para representar as constantes das funções.

Uma maneira de representar essas funções, contidas nos intervalos da função B-spline é encontrada em (59), de forma generalizada, e na Figura 28, para uma função B-spline de primeiro grau.

$$\beta_i^{(L)}(t) = [b_0(\alpha) \quad b_1(\alpha) \quad b_2(\alpha) \quad \dots \quad b_{L+1}(\alpha)]. \tag{59}$$

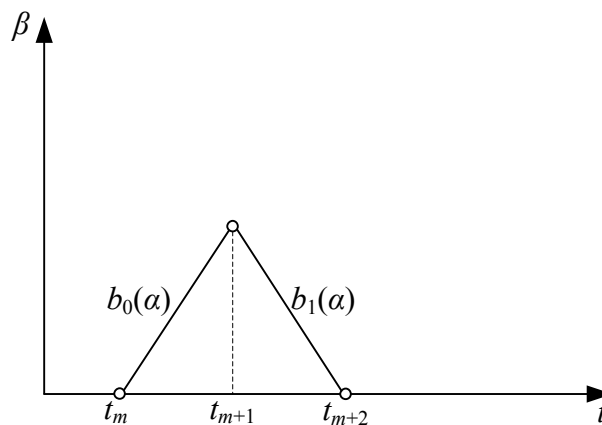


Figura 28 - Representação das funções contidas nos intervalos das curvas B-spline de primeiro grau.

Através da Figura 28, analisa-se todas as funções contidas nos intervalos de uma função B-spline de primeiro grau, onde as funções $b_0(\alpha)$ e $b_1(\alpha)$ estão contidas nos intervalos de t_m a t_{m+1} e t_{m+1} a t_{m+2} , respectivamente. A análise destas funções é de grande importância para o entendimento do processo de interpolação, pois todas se localizam no trecho a ser

interpolado e são utilizadas como produto para os pontos amostrados. Estes aspectos, bem como a aplicação das funções $b_i(\alpha)$ na interpolação, serão descritos a seguir.

Para descrever o comportamento das funções $b_i(\alpha)$, considera-se primeiramente uma curva qualquer, como esboçada na Figura 29, onde há seis nós interligados por linhas retas. Para determinar os valores intermediários aos nós, através da interpolação B-spline, admite-se, entre um ponto e outro, a existência de funções de primeiro grau. A Figura 30 mostra o esboço destas curvas.

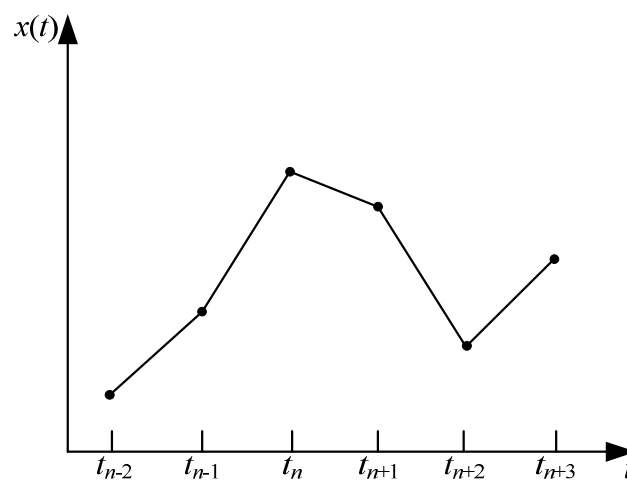


Figura 29 - Demonstração da curva a ser interpolada.

Na Figura 30 são representadas, em destaque, as funções de primeiro grau contidas em $\beta_{-1}^{(1)}(t)$, onde cada função possui seu respectivo ponto amostrado no sinal de entrada. Para uma melhor representação, é esboçada uma função $b_i(\alpha)$ correspondente ao nó $x[n+1]$, utilizada para encontrar o valor da curva em pontos intermediários aos nós, nesse caso entre os nós $x[n-1]$ à $x[n+1]$. Sendo assim, para o cálculo de cada ponto intermediário aos nós, procede-se utilizando (54).

Neste caso, para se calcular algum valor α entre os pontos t_n e t_{n+1} , como mostrado na Figura 31, utilizam-se as funções de base $\beta_{-1}^{(1)}(t)$ e $\beta_0^{(1)}(t)$, juntamente com os pontos $x[n-1]$ e $x[n]$, pois são as funções B-spline contidas neste intervalo. Dessa forma, a equação para o processo de interpolação é definida como

$$\hat{y}[\alpha] = \beta_{-1}^{(1)} x[n-1] + \beta_0^{(1)} x[n]$$

$$\hat{y}[\alpha] = \underbrace{(a_0 \alpha + b_0)}_{b_0(\alpha)} x[n-1] + \underbrace{(a_1 \alpha + b_1)}_{b_1(\alpha)} x[n]. \quad (60)$$

Onde $\beta_{-1}^{(1)}(t)$ e $b_0(\alpha)$ correspondem ao nó $x[n-1]$, $\beta_0^{(1)}(t)$ e $x[n]$ correspondem ao nó $x[n]$, a_0 e a_1 são constantes e α é a variável das funções, respectivamente.

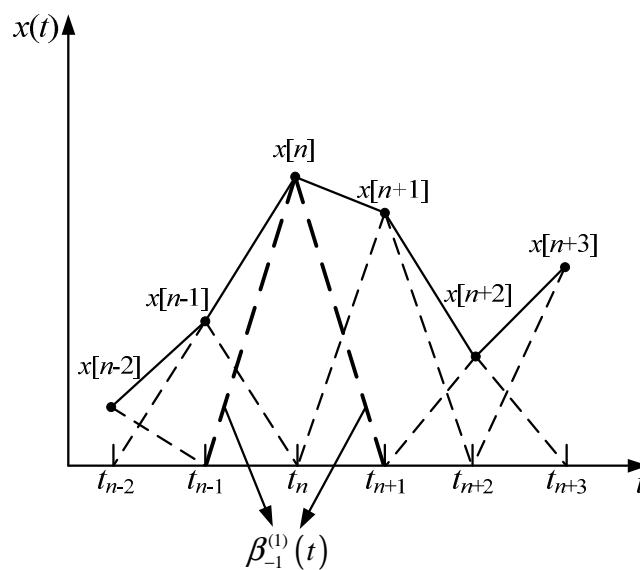


Figura 30 - Representação da aplicação das funções B-spline no processo de interpolação.

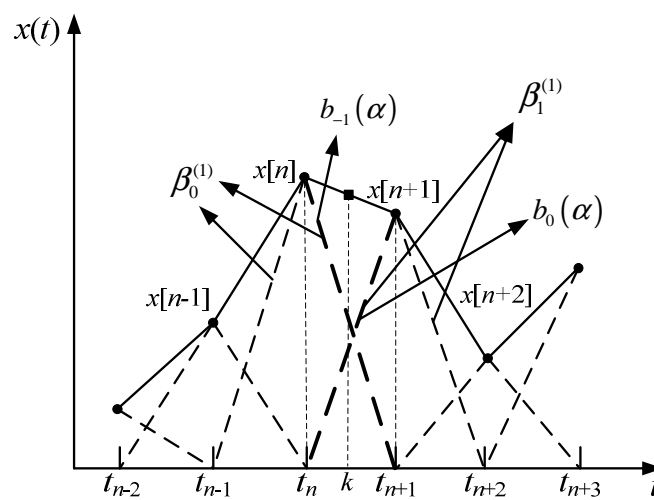


Figura 31 - Representação do processo de interpolação B-spline com funções de 1º grau.

Para a representação de funções $b_i(\alpha)$ de maior ordem, o procedimento é similar. As funções B-spline são estabelecidas a partir dos pontos que se deseja analisar e são formadas por outras funções, contidas em intervalos da função B-spline.

Para a demonstração da interpolação B-spline, de ordem maior, considera-se uma função B-spline, com quatro funções de 4ª ordem e 3º grau, como mostrado na Figura 27(d). Dessa forma, cada função de 3º grau contida entre os pontos da função de base é representada por

$$\begin{aligned}
 b_0(\alpha) &= a_0 + b_0\alpha + c_0\alpha^2 + d_0\alpha^3 \\
 b_1(\alpha) &= a_1 + b_1\alpha + c_1\alpha^2 + d_1\alpha^3 \\
 b_2(\alpha) &= a_2 + b_2\alpha + c_2\alpha^2 + d_2\alpha^3 \\
 b_3(\alpha) &= a_3 + b_3\alpha + c_3\alpha^2 + d_3\alpha^3.
 \end{aligned}
 \tag{61}$$

Uma representação gráfica dessas funções pode ser analisada através da Figura 32. Onde em cada trecho entre os pontos há uma função de 3º grau. Dessa forma, as quatro funções de terceiro grau formam a função B-spline para a aplicação no processo de interpolação.

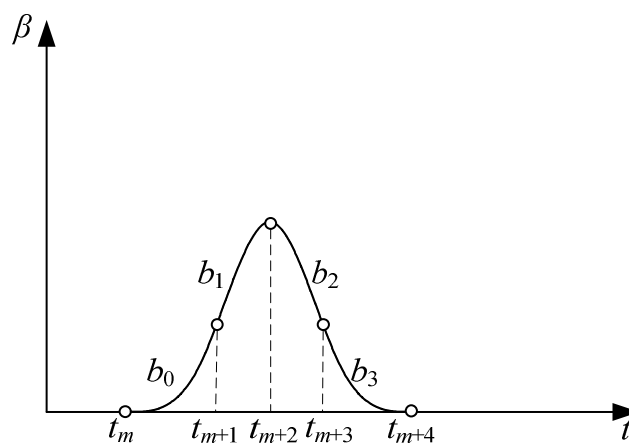


Figura 32 - Representação da função B-spline de terceiro grau e quarta ordem.

Atribuído o número de funções contidas na função B-spline, o próximo passo é definir os coeficientes das funções, representados em (61). Para isso, deve-se considerar que o primeiro ponto da função b_0 e o último ponto da função b_3 são iguais a zero. Outra

análise que deve ser feita é em relação às igualdades nos pontos de intercessão entre as funções, onde $b_0(1) = b_1(0)$, $b_1(1) = b_2(0)$ e $b_2(1) = b_3(0)$. Por fim, deve-se considerar a soma entre os pontos iniciais de cada função sendo igual a um. A Tabela 7 e a equação (62) mostram os valores e as considerações citadas anteriormente.

Tabela 7 - Atribuição dos parâmetros de posição, derivada de primeira ordem e derivada de segunda ordem para a definição dos coeficientes das funções de 3º grau.

Posição	Derivada de Primeira Ordem	Derivada de Segunda Ordem
$0 = b_0(0)$	$0 = b'_0(0)$	$0 = b''_0(0)$
$b_0(1) = b_1(0)$	$b'_0(1) = b'_1(0)$	$b''_0(1) = b''_1(0)$
$b_1(1) = b_2(0)$	$b'_1(1) = b'_2(0)$	$b''_1(1) = b''_2(0)$
$b_2(1) = b_3(0)$	$b'_2(1) = b'_3(0)$	$b''_2(1) = b''_3(0)$
$b_3(1) = 0$	$b'_3(1) = 0$	$b''_3(1) = 0$

$$b_0(0) + b_1(0) + b_2(0) + b_3(0) = 1 \quad (62)$$

Em relação à Tabela 7, são definidos valores das derivadas de primeira e segunda ordem, além dos valores de posição já definidos anteriormente. Essas considerações iniciais, como derivadas de primeira e segunda ordem, são importantes por serem necessárias dezesseis equações para definirem dezesseis constantes. A partir daí procede-se o cálculo das constantes, definindo as funções de posição, derivada de primeira e segunda ordem,

$$b_0(\alpha) = a_0 + b_0\alpha + c_0\alpha^2 + d_0\alpha^3 \quad (63)$$

$$b_1(\alpha) = a_1 + b_1\alpha + c_1\alpha^2 + d_1\alpha^3 \quad (64)$$

$$b_2(\alpha) = a_2 + b_2\alpha + c_2\alpha^2 + d_2\alpha^3 \quad (65)$$

$$b_3(\alpha) = a_3 + b_3\alpha + c_3\alpha^2 + d_3\alpha^3 \quad (66)$$

$$b'_0(\alpha) = b_0 + 2c_0\alpha + 3d_0\alpha^2 \quad (67)$$

$$b'_1(\alpha) = b_1 + 2c_1\alpha + 3d_1\alpha^2 \quad (68)$$

$$b'_2(\alpha) = b_2 + 2c_2\alpha + 3d_2\alpha^2 \quad (69)$$

$$b'_3(\alpha) = b_3 + 2c_3\alpha + 3d_3\alpha^2 \quad (70)$$

$$b''_0(\alpha) = 2c_0 + 6d_0\alpha \quad (71)$$

$$b''_1(\alpha) = 2c_1 + 6d_1\alpha \quad (72)$$

$$b''_2(\alpha) = 2c_2 + 6d_2\alpha \quad (73)$$

$$b''_3(\alpha) = 2c_3 + 6d_3\alpha \quad (74)$$

Através de (63) à (74) e considerando os parâmetros da Tabela 7, juntamente com (62), determina-se, portanto as constantes, a_i , b_i , c_i e d_i em (61), com os valores apresentados na Tabela 8.

Substituindo os valores das constantes em (61), obtêm-se as equações de 3º grau como demonstrado por

$$b_0(\alpha) = \frac{1}{6}\alpha^3, \quad (75)$$

$$b_1(\alpha) = \frac{1}{6}[1 + 3\alpha + 3\alpha^2 - 3\alpha^3], \quad (76)$$

$$b_2(\alpha) = \frac{1}{6}[4 - 6\alpha^2 + 3\alpha^3], \quad (77)$$

$$b_3(\alpha) = \frac{1}{6}[1 - 3\alpha + 3\alpha^2 - \alpha^3], \quad (78)$$

que são iguais as equações contidas em (57), porém definidas de uma forma diferente. Para a obtenção da função B-spline, aplicam-se as funções obtidas através de (75) à (78) como elementos do vetor

$$\beta^{(3)} = [b_3(\alpha) \quad b_2(\alpha) \quad b_1(\alpha) \quad b_0(\alpha)]. \quad (79)$$

Tabela 8 - Constantes das equações de terceiro grau contidas na função B-spline.

Coefficientes de 0° grau	Coefficientes de 1° grau	Coefficientes de 2° grau	Coefficientes de 3° grau
$a_3 = 0$	$b_3 = 0$	$c_3 = 0$	$d_3 = \frac{1}{6}$
$a_2 = \frac{1}{6}$	$b_2 = \frac{3}{6}$	$c_2 = \frac{3}{6}$	$d_2 = -\frac{3}{6}$
$a_1 = \frac{4}{6}$	$b_1 = 0$	$c_1 = -\frac{6}{6}$	$d_1 = \frac{3}{6}$
$a_0 = \frac{1}{6}$	$b_0 = -\frac{3}{6}$	$c_0 = \frac{3}{6}$	$d_0 = -\frac{1}{6}$

Assim, com a função B-spline definida, pode-se encontrar os valores dos pontos interpolados $\hat{y}[k]$, aplicando $\beta_i^{(3)}$ sobre o sinal de entrada. Dessa forma obtém-se

$$\hat{y}[k] = \sum_{i=-1}^2 \beta_i^{(3)}[\alpha] x[n+i]. \quad (80)$$

Onde k representa a distância entre os pontos 0 e o ponto a ser interpolado. Em relação ao parâmetro i , por sua vez varia de -1 a 2 e indica que serão utilizadas quatro funções B-spline no processo de interpolação, onde $\beta_{-1}^{(3)}$, $\beta_0^{(3)}$, $\beta_1^{(3)}$ e $\beta_2^{(3)}$ representam as curvas dos nós $x[n-1]$, $x[n]$, $x[n+1]$, $x[n+2]$, respectivamente. Um esboço dessas curvas é mostrado na Figura 33.

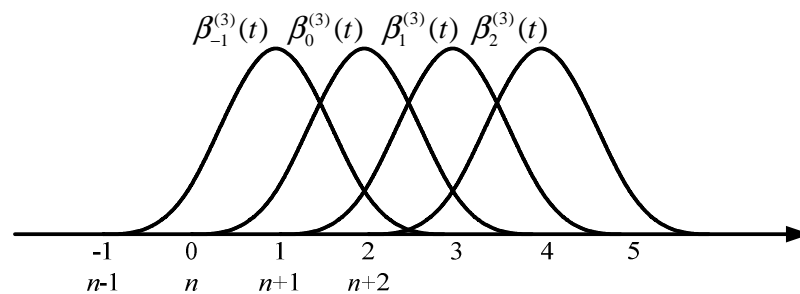


Figura 33 - Função B-spline de terceiro grau.

Na Figura 33 são mostradas quatro curvas B-spline de 3º grau, iniciando nos pontos onde se encontram as amostras do sinal correspondentes às curvas. Um esboço do processo de interpolação com a aplicação destas curvas é mostrado na Figura 34.

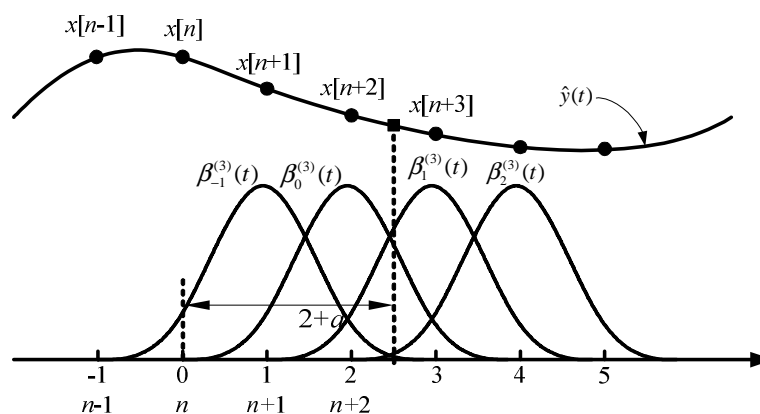


Figura 34 - Representação do processo de interpolação utilizando funções B-spline de terceiro grau.

Onde α é a distância entre a amostra $n+2$ e o ponto a ser interpolado. Os círculos representam os nós contidos no sinal, $\beta_{-1}^{(3)}(t)$, $\beta_0^{(3)}(t)$, $\beta_1^{(3)}(t)$ e $\beta_2^{(3)}(t)$ são as funções B-spline de terceiro grau e $\hat{y}(t)$ é o sinal estimado no tempo contínuo. Assim, pode-se analisar que a maior influência, no ponto interpolado, é exercida pelas amostras $x[n]$ e $x[n+1]$, pelo fato de suas respectivas funções de terceiro grau, contidas na função B-spline, assumirem amplitudes maiores em relação às outras funções correspondentes aos nós mais afastados do ponto interpolado. A Figura 35 esboça a representação dessas curvas na região de interpolação.

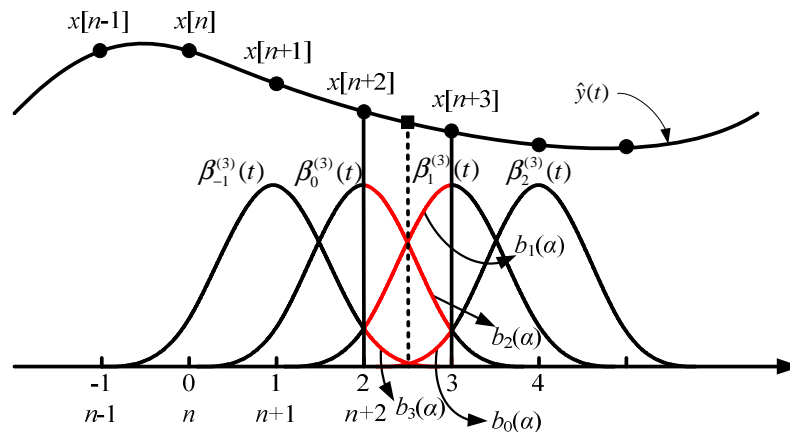


Figura 35 - Representação das funções $b_i(\alpha)$ de terceiro grau na região de interpolação.

Como pode ser analisado na Figura 35, cada função B-spline é representada por uma função $b_i(\alpha)$ de terceiro grau na região de interpolação. Em relação à Figura 35, $\beta_{-1}^{(3)}(t)$, $\beta_0^{(3)}(t)$, $\beta_1^{(3)}(t)$ e $\beta_2^{(3)}(t)$ são representados por $b_3(\alpha)$, $b_2(\alpha)$, $b_1(\alpha)$ e $b_0(\alpha)$ na região de interpolação, respectivamente. Portanto, para a implementação dos filtros deve-se levar em conta essas considerações, de forma a ter conhecimento de qual curva $b_i(\alpha)$ estará representando seu determinado nó na região de interpolação. Dessa forma as funções são aplicadas aos nós da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\hat{y}[k] = & x[n-1] \underbrace{\left[-\frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{6} \right]}_{b_3(\alpha)} \\
& + x[n] \underbrace{\left[\frac{\alpha^3}{2} - \alpha^2 + \frac{2}{3} \right]}_{b_2(\alpha)} \\
& + x[n+1] \underbrace{\left[-\frac{\alpha^3}{2} + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{6} \right]}_{b_1(\alpha)} \\
& + x[n+2] \underbrace{\left[\frac{\alpha^3}{6} \right]}_{b_0(\alpha)}.
\end{aligned} \tag{81}$$

Colocando α em evidência, tem-se:

$$\begin{aligned}
\hat{y}[k] = & \alpha^3 \left[-\frac{1}{6}x[n-1] + \frac{1}{2}x[n] - \frac{1}{2}x[n+1] + \frac{1}{6}x[n+2] \right] \\
& + \alpha^2 \left[\frac{1}{2}x[n-1] - x[n] + \frac{1}{2}x[n+1] \right] \\
& + \alpha \left[-\frac{1}{2}x[n-1] + \frac{1}{2}x[n+1] \right] \\
& + \left[\frac{1}{6}x[n-1] + \frac{2}{3}x[n] + \frac{1}{6}x[n+1] \right].
\end{aligned} \tag{82}$$

Definindo os filtros digitais cujos coeficientes encontram-se dentro dos colchetes em (82) e transformando as equações para o domínio z , têm-se os termos como demonstrados em (83).

$$\begin{aligned}
H_0(z) &= -\frac{1}{6}z^{-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z + \frac{1}{6}z^2. \\
H_1(z) &= \frac{1}{2}z^{-1} - 1 + \frac{1}{2}z. \\
H_2(z) &= -\frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z. \\
H_3(z) &= \frac{1}{6}z^{-1} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6}z.
\end{aligned} \tag{83}$$

Dessa maneira, a estrutura de filtros resultante do processo de interpolação B-spline cúbico é apresentado por

$$Y(z) = \left(H_0(z)\alpha^3 + H_1(z)\alpha^2 + H_2(z)\alpha + H_3(z) \right) X(z). \quad (84)$$

Assim, a partir de (84) pode-se perceber que a estrutura dos filtros da interpolação B-spline cúbica é semelhante à interpolação de Lagrange, diferenciando apenas nos termos contidos em $H_0(z)$, $H_1(z)$, $H_2(z)$ e $H_3(z)$. Quanto ao processo de interpolação, o procedimento é o mesmo utilizado pela interpolação de Lagrange em tempo real, representado pela Tabela 6.

As diferenças entre os processos de interpolação de Lagrange e B-spline, em tempo real, se dão nas estruturas dos filtros e na região de interpolação. No método de Lagrange, a região de interpolação está entre a amostra atual e a primeira amostra futura, no caso $x[n]$ e $x[n+1]$, enquanto que na interpolação B-spline essa região se dá no intervalo onde se encontram todas as funções B-spline. Sendo assim, essa região se dá entre o último nó utilizado para interpolação e a amostra subsequente, como demonstrada na Figura 35.

Como exemplo de interpolação B-spline cúbica, considera-se um sinal como apresentado em (53), com 66 amostras, um período de amostragem igual a 0,5 ms e deseja-se gerar um sinal com uma frequência de amostragem $\frac{3}{2}$ maior que a frequência do sinal a ser interpolado. Com a aplicação da interpolação B-spline cúbica tem-se as curvas como mostrado pela Figura 36.

A Figura 36(a) apresenta o sinal de entrada. O sinal interpolado é mostrado na Figura 36(b) e o sinal que se deseja obter através do processo de interpolação na Figura 36(c). O erro entre o sinal interpolado e o sinal desejado pode ser visto na Figura 36(d), desconsiderando o transitório. Em relação ao erro obtido, nota-se um valor maior na primeira amostra, com um valor de 0,0315 devido à inicialização do processo, enquanto que no restante da curva o erro máximo é de aproximadamente 0,006.

Portanto, para um sinal senoidal, o erro obtido com a interpolação B-spline é maior que o obtido com polinômio de Lagrange, entretanto se o sinal a ser interpolado contiver

componentes harmônicas a situação se inverte. Ao invés de mostrar este resultado, neste momento, demonstra-se a seguir como a interpolação B-Spline pode ser melhorada, com um processo de pré-filtragem.

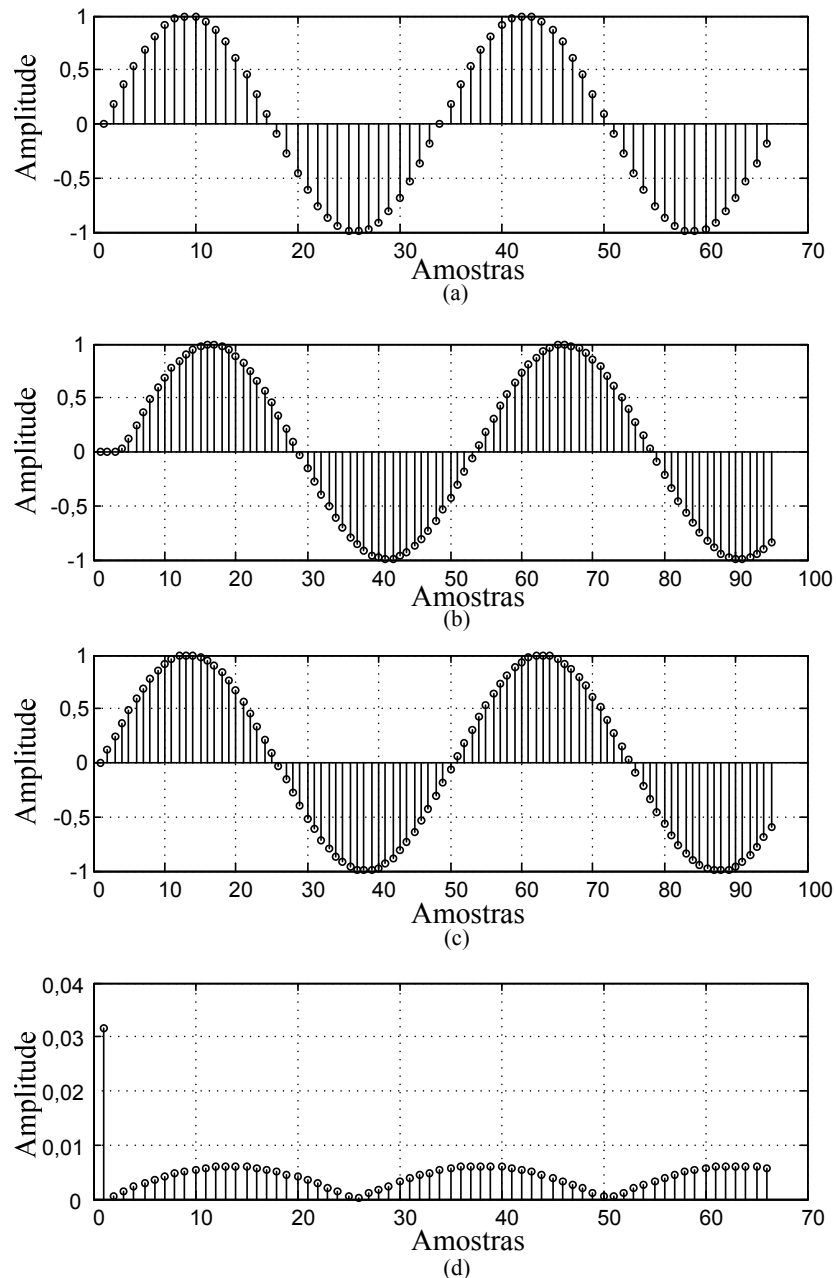


Figura 36 - Interpolação B-spline (a) sinal real, (b) sinal interpolado, (c) sinal desejado, (d) erro do sinal interpolado com sinal desejado.

Analisando a Figura 36, percebe-se que há um erro entre o sinal interpolado e o sinal desejado. Este erro segundo (PETRINOVIC, 2008) se deve ao fato da interpolação B-

spline não assumir os valores correspondentes aos nós do sinal de entrada. Para isto são utilizados filtros na entrada do processo a fim de minimizar esse erro. Estes filtros são denominados como pré-filtros e podem ser aplicados de forma que sejam uma inversão do filtro B-spline, denominado como Spline Cúbico Causal em (PETRINOVIC, 2008), ou da forma de aproximação *Least-Square*, como em (BORKOWSKI e BIEN, 2009) e (BLU e UNSER, 1999). A seguir, nas próximas duas subseções, serão apresentados esses dois métodos de aplicação do pré-filtro na interpolação B-spline.

4.3.1. Pré-Filtro Spline Cúbico Causal

Para este método é aplicada uma técnica baseada em filtros, de forma inversa ao filtro B-spline, a fim de se definir os coeficientes que fazem com que a interpolação assuma valores iguais aos valores dos nós. Este filtro é inserido no sinal de entrada e é denominado como pré-filtro. Neste trabalho será abordada a utilização de um filtro de terceira ordem, como apresentado em (UNSER, 1999) e (UNSER, ALDROUBI e EDEN, 1993) da forma

$$y[n] = \sum_{i=-1}^2 w[n+i] \beta_i^{(3)}[\alpha]. \quad (85)$$

Onde $w[n+i]$ são os coeficientes da nova expansão, correspondente à saída do pré-filtro e $\beta_i^{(3)}[\alpha]$ representa a função B-spline de terceiro grau.

Assim, pode-se demonstrar o desenvolvimento da equação da interpolação B-spline de forma a encontrar os valores dos coeficientes $w[n]$. Para isso, considera-se a aplicação dos coeficientes w no domínio z como

$$Y(z) = W(z) \cdot B(z), \quad (86)$$

$$W(z) = \frac{Y(z)}{B(z)}, \quad (87)$$

onde $Y(z)$ é o sinal de entrada e $B(z)$ é a função inversa do resultado de (82).

Considerando α igual à zero, ou seja, fazendo com que a interpolação ocorra nos locais das amostras, tem-se o resultado de (82) como:

$$\begin{aligned}\hat{y}[k] &= \left[\frac{1}{6}x[n-1] + \frac{2}{3}x[n] + \frac{1}{6}x[n+1] \right] \\ &= \frac{1}{6} \left[x[n-1] + 4x[n] + x[n+1] \right].\end{aligned}\tag{88}$$

Transformando (88) para o domínio z e fazendo a inversão de seus termos, obtém-se $B(z)$ como é definido em (UNSER, 1999) e (UNSER, ALDROUBI e EDEN, 1993).

$$B(z) = \frac{z + 4 + z^{-1}}{6}.\tag{89}$$

Dessa forma, percebe-se que $B(z)$, da equação (89), é igual ao filtro $H_3(z)$ em (84). Sendo assim, considerando α igual à zero, aplicando a transformada z em (88) e aplicando $W(z)$ no sinal de entrada, tem-se

$$\begin{aligned}\hat{Y}(z) &= H_3(z)W(z) \\ \hat{Y}(z) &= H_3(z) \cdot \frac{Y(z)}{B(z)} \\ \hat{Y}(z) &= Y(z).\end{aligned}\tag{90}$$

Como $B(z)$ é igual a $H_3(z)$, o sinal interpolado assume valor igual ao nó do sinal real.

Porém, existe um problema em relação à parte não causal do pré-filtro que, necessariamente, deve ser considerada em sua implementação. Uma maneira de eliminar esse problema é separar este filtro em duas partes de forma que o mesmo fique em uma estrutura de cascata e depois fazer o processo de transformação da parte não causal para causal.

A decomposição do filtro resulta na seguinte forma:

$$H(z) = \frac{1}{B(z)} = \frac{6}{z+4+z^{-1}} = 6 \left(\frac{1}{1-s_1 z^{-1}} \right) \left(\frac{-s_1}{1-s_1 z} \right). \quad (91)$$

Onde $H(z)$ é o inverso do filtro $B(z)$, $s_1 = -2 + \sqrt{3}$ e os termos entre parênteses são denominados como:

$$\begin{aligned} H_a(z) &= \frac{1}{1-s_1 z^{-1}} \\ H_b(z) &= \frac{-s_1}{1-s_1 z}. \end{aligned} \quad (92)$$

Onde $H_a(z)$ representa a parte causal do filtro e $H_b(z)$ representa a parte não causal. Dessa forma, há a necessidade de manipular $H_b(z)$ de forma a se tornar uma função causal. Assim, como definido por (PETRINOVIC, 2008), tem-se a função $H_b(z)$ da forma causal, como:

$$H_b(z) = \frac{-s_1 z^{-1}}{z^{-1} - s_1} = \frac{z^{-1}}{1 - (z^{-1} / s_1)} \quad (93)$$

Outra questão a se levar em consideração está relacionada com o filtro $H_0(z)$, apresentado em (83), onde há duas amostras futuras. Assim, é necessário inserir um atrasador a fim de tornar o filtro causal.

$$z^{-2} \cdot \hat{Y}(z) = W(z) B(z). \quad (94)$$

Com a inserção do atrasador, outra medida ainda deve ser tomada, além da questão de não causalidade, que é o truncamento do filtro $H_b(z)$, representado por uma série como demonstrado em (95).

$$H_b(z) = -z^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} (s_1 z)^k. \quad (95)$$

Aplicando o truncamento de (95), tem-se

$$\tilde{H}_b(z) = -z^{-1} \sum_{k=1}^{M+1} (s_1 z)^k = \frac{z^{-1}}{1 - s_1^{-1} z^{-1}} \cdot \left(1 - (s_1 z)^{M+1}\right). \quad (96)$$

Onde $\tilde{H}_b(z)$ é a resposta aproximada do filtro $H_b(z)$ e M representa o número de amostras futuras utilizadas para o cálculo do filtro, no caso 2 ou um valor maior de acordo com o projetista.

Em relação ao filtro ideal $H_b(z)$, pode-se definir $\tilde{H}_b(z)$ como:

$$\tilde{H}_b(z) = H_b(z) \cdot \left(1 - (s_1 z)^{M+1}\right) \quad (97)$$

Onde o termo subtraído de 1 é denominado como o erro do filtro $\tilde{H}_b(z)$. Calculando a função transferência total do filtro em cascata tem-se

$$\tilde{H}(z) = H_a(z) \cdot \tilde{H}_b(z) = H(z) - (s_1 z)^{M+1} H(z). \quad (98)$$

Assim, definem-se os coeficientes $\tilde{W}(z)$, considerando a aplicação do operador de atraso z^{-M} a fim de eliminar as amostras futuras. Dessa forma obtém-se:

$$\tilde{W}(z) = z^{-M} \tilde{H}(z) Y(z). \quad (99)$$

Por fim, encontra-se o erro obtido pelos coeficientes.

$$EW(z) = (s_1 z)^{M+1} H(z) \cdot Y(z) = (s_1 z)^{M+1} W(z). \quad (100)$$

Portanto, nota-se em (100) que o erro dos coeficientes está relacionado com o número de amostras futuras M utilizadas, ou seja, quanto maior for M , menor será o erro de $W(z)$ pelo fato de s_1 ser menor que 1, e conseqüentemente o erro entre o nó e o valor obtido pelo sinal interpolado.

Quanto à implementação do filtro em cascata, de ordem M , $\tilde{H}_{bM}(z)$, utilizando a função causal apresentada em (96), é apresentada através de (101).

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{bM}(z) &= z^{-M} \tilde{H}_b(z) = -\sum_{i=0}^M s_1^{M+1-i} z^{-i} = \\ &= -\left(s_1^{M+1} + s_1^M z^{-1} + \dots + s_1^2 z^{-(M-1)} + s_1 z^{-M}\right).\end{aligned}\tag{101}$$

Como representação esquemática do processo do pré-filtro, pode ser mostrado através da Figura 37.

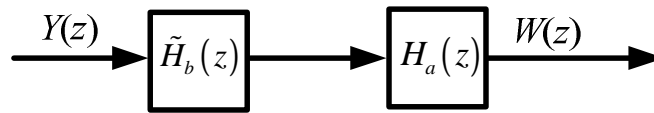


Figura 37 – Representação esquemática do pré-filtro B-spline causal.

Para exemplificar este método, considera-se um sinal como em (53), com 66 amostras, um período de amostragem igual a 0,5 ms e M igual a 11 (filtro de décima primeira ordem). Como resultado, deseja-se gerar um sinal com uma frequência de amostragem $\frac{3}{2}$ maior que a frequência do sinal a ser interpolado. Desenvolvendo o processo de interpolação B-spline encontra-se o resultado como mostrado na Figura 38.

Na Figura 38(a) é esboçado o sinal real, na Figura 38(b) é mostrado o sinal interpolado e na Figura 38(c) o sinal desejado. Em relação ao sinal interpolado pode-se perceber um atraso no início por causa das considerações iniciais serem formadas por 11 amostras iguais a zero, devido ao parâmetro M . O erro entre o sinal interpolado e o sinal desejado, desconsiderando o transitório, é mostrado na Figura 38(d) e permanece abaixo de $1 \cdot 10^{-8}$.

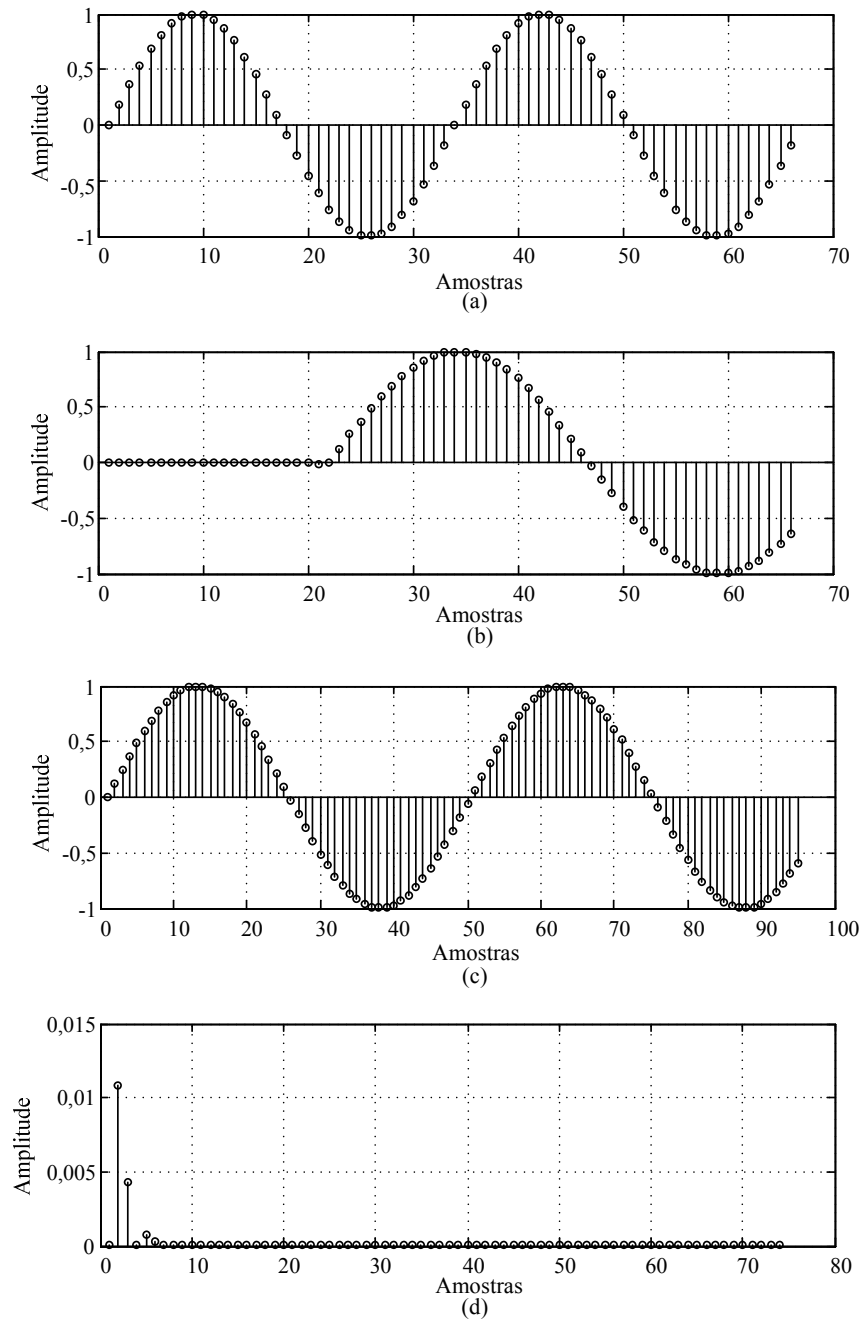


Figura 38 - Representação do (a) sinal real; (b) sinal interpolado; (c) sinal desejado e erro entre o sinal interpolado e sinal desejado.

4.3.2. Pré-Filtro *Least-Square*

A aplicação do pré-filtro *least-square* é baseada em aproximar, a resposta em frequência da função B-spline cúbica em um filtro passa-baixa ideal. Para isso, considera-se um

interpolador ideal, cuja função a ser convoluída com o sinal de entrada é infinita e da forma de uma função *sinc*, como demonstrado por

$$x(t_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t_0 - kT_s) x(kT_s) \quad (102)$$

Assim, através de (102) pode-se calcular os valores de um sinal contínuo $x(t)$ em uma posição arbitrária qualquer, como $t = nT_s + \alpha$ entre os intervalos das amostras $x[n]$. Este é um interpolador ideal segundo (BORKOWSKI e BIEN, 2009), onde a função $\text{sinc}(t)$ é representada por:

$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(\pi t)}{\pi t}, & \text{para } t \neq 0 \\ 1, & \text{para } t = 0. \end{cases} \quad (103)$$

Porém, em aplicações reais, com a janela da função *sinc* truncada, a resposta em frequência não é um filtro passa-baixa ideal. Sendo assim, se for utilizada uma função B-spline cúbica, que apresenta menor complexidade computacional, em relação à *sinc*, o objetivo é compensar a resposta dessa função na frequência de forma a aproximá-la da resposta de um interpolador ideal, ou seja, um filtro passa-baixa.

Quanto à resposta em frequência da função B-spline cúbica é representada por:

$$B(\omega) = \left(\frac{\text{sen}(\omega/2)}{\omega/2} \right)^4. \quad (104)$$

Assim, em (104) é representada uma curva diferente do resultado desejado, ou seja, do interpolador ideal, como mostrado na Figura 39. Por isso utiliza-se uma função, denominada como pré-filtro para compensar ou aproximar a curva da resposta em frequência do interpolador ideal. Para essa função de aproximação, é apresentado em (BLU e UNSER, 1999) uma função utilizando *least-square* da forma,

$$P_{LS}(\omega) = \frac{B(\omega)}{\sum_i |B(\omega + 2i\pi)|^2}. \quad (105)$$

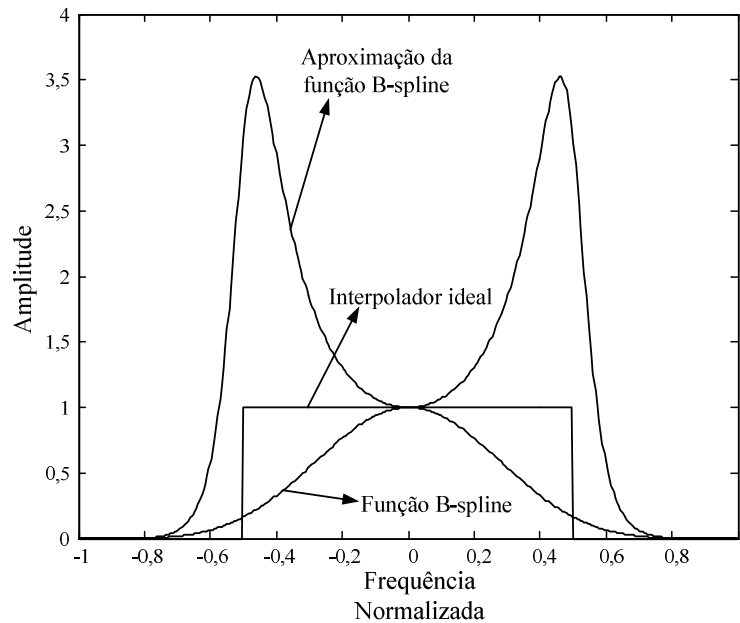


Figura 39 – Resposta na frequência da função B-spline, da função de aproximação e do interpolador ideal.

Com a função de aproximação estabelecida, o próximo passo é encontrar os coeficientes do filtro de modo que a diferença entre as curvas do pré-filtro ideal e do pré-filtro adquirido através de (105) seja mínima.

Um problema encontrado quanto ao projeto desses filtros, se dá pelo fato do pré-filtro ideal ser formado por filtros instáveis IIR, que não podem ser utilizados diretamente para o processo de filtragem. Sendo assim os coeficientes devem ser aproximados através de filtros FIR.

Para a aproximação desses componentes, será utilizado a função “*fir2*” do *software* MatLab[®], com uma janela retangular, porém uma outra aproximação é demonstrada em (BORKOWSKI e BIEN, 2009) para o cálculo dos coeficientes de um filtro de oitava ordem. A equação deste método pode ser representada por

$$Q = \int_0^{2\pi F_s} (\theta(\omega)(P_{ideal}(\omega) - P_{LS}(\omega)))^2 d\omega, \quad (106)$$

Onde $P_{ideal}(\omega)$ é o pré-filtro ideal (passa-baixa), Q são os coeficientes e $\theta(\omega)$ é a função peso, representada por:

$$\theta(\omega) = \left(\frac{\cos(\omega)}{2} + \frac{1}{2} \right)^{\frac{9}{10}} \quad (107)$$

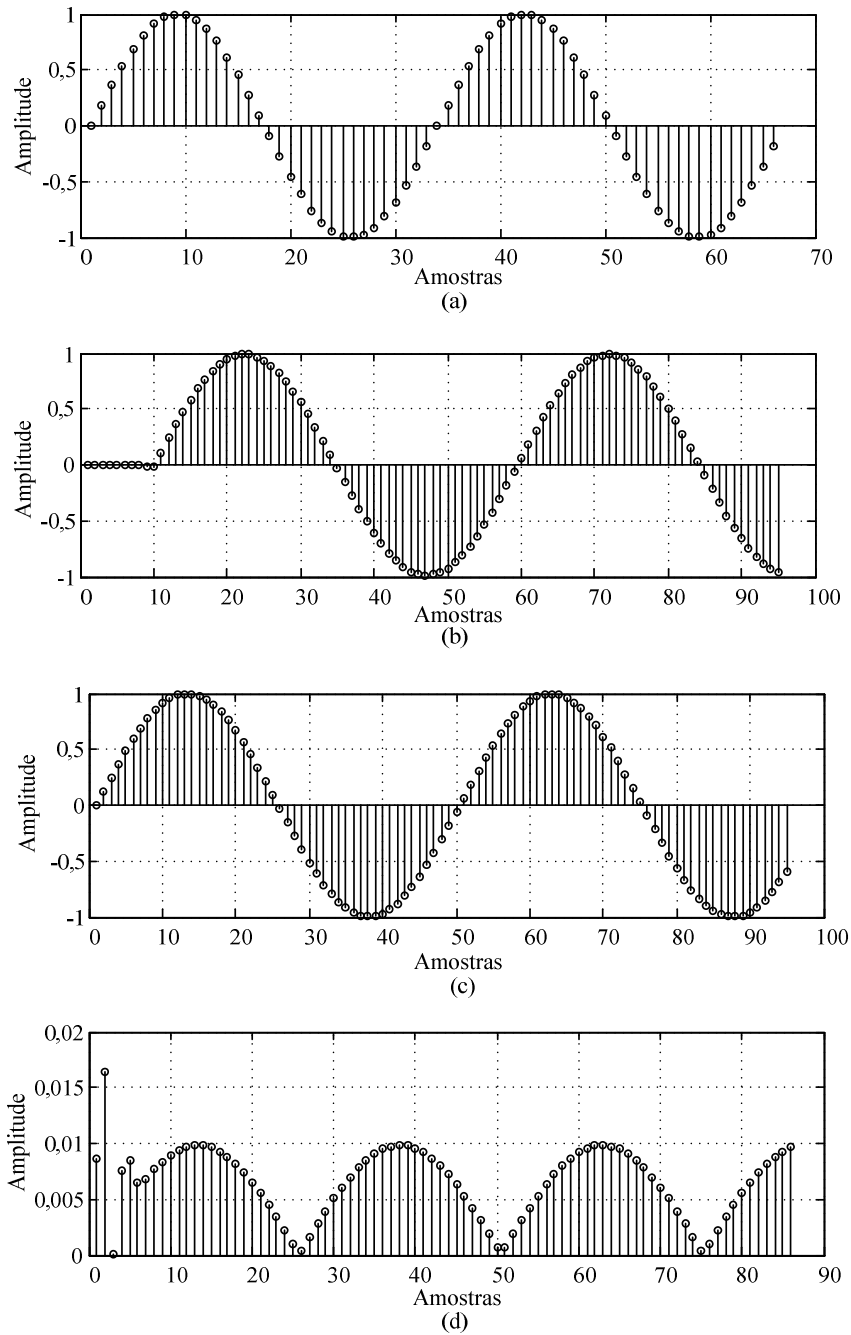


Figura 40 – Resultados do processo de interpolação (a) sinal real, (b) sinal interpolado com pré-filtros Least Square, (c) sinal interpolado desejado e (d) erro entre os sinais interpolados.

Para demonstrar o comportamento deste método, com a aplicação do pré-filtro *least-square*, é considerado um sinal como apresentado em (53), com 66 amostras, um período de amostragem igual a 0,5 ms e utiliza-se um filtro FIR de oitava ordem. Como resultado, deseja-se gerar um sinal com uma frequência de amostragem $\frac{3}{2}$ da frequência do sinal a ser interpolado.

O resultado obtido é mostrado na Figura 40(a), (b), (c) e (d), onde é apresentado o sinal a ser interpolado, o sinal interpolado com a aplicação do pré-filtro *least-square*, o sinal interpolado desejado e o erro entre os sinais interpolados desejado com o pré-filtro *least-square*, respectivamente. Analisando os resultados percebe-se um atraso do sinal interpolado como demonstrado nos outros métodos B-spline, devido às considerações iniciais. Em relação ao erro obtido encontra-se um valor de 0,016 no valor da amplitude devido ao transitório inicial e um erro abaixo de 0,01 para a comparação em regime permanente.

Sendo assim, em comparação com os outros métodos utilizados, percebe-se um erro maior na utilização da interpolação B-spline com o pré-filtro *least-square*, em relação ao método de Lagrange e o método B-spline com pré-filtro utilizando a inversão da própria função B-spline. Porém, deve-se considerar um sinal com a presença de harmônicos a fim de analisar o comportamento destes métodos quanto ao aumento do erro do sinal interpolado. Portanto, considera-se o mesmo sinal utilizado para as situações anteriores com a presença dos harmônicos de ordem 3, 10 e 15, com amplitudes de 0,3; 0,1 e 0,1; respectivamente. Os resultados são mostrados através da Figura 41.

Analisando a Figura 41 percebe-se um erro de interpolação maior obtido através do método de Lagrange de amplitude maior que 1 para o período transitório e de 0,15 em regime permanente. Quanto aos outros dois métodos, com a aplicação dos pré-filtros, a amplitude dos erros é semelhante entre si, atingindo aproximadamente 0,06 de amplitude, com o método do pré-filtro *least-square* atingindo valores um pouco maior. Assim, com o aumento de componentes no sinal, o erro obtido pelos dois métodos utilizando B-spline, juntamente com pré-filtro foram menores em relação ao de Lagrange.

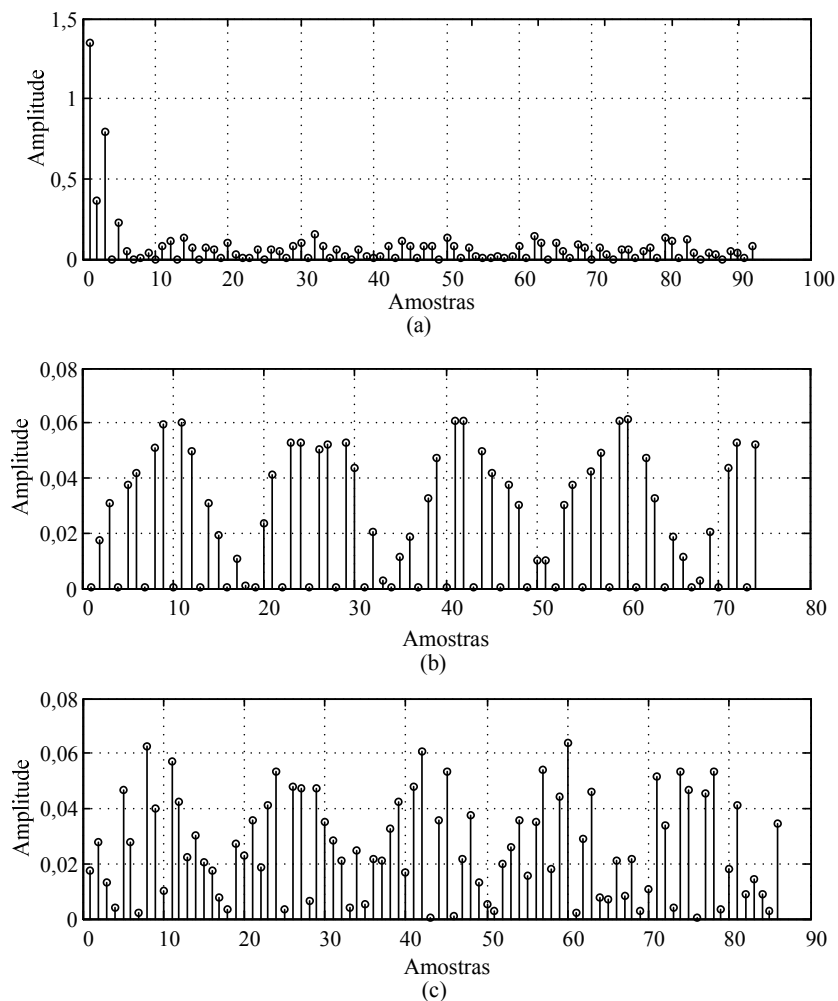


Figura 41–Representação gráfica do erro obtido pelo método (a) Lagrange, (b) B-spline com pré-filtro spline cúbico causal e (c) B-spline com pré-filtro Least Square.

4.4. Conclusão

Neste capítulo foi abordada a interpolação aplicada no domínio do tempo, com o objetivo de tornar algum sinal assíncrono em síncrono. Para isto, demonstrou-se a aplicação de dois métodos de interpolação, o primeiro denominado como interpolação de Lagrange e o segundo denominado como interpolação B-spline.

Em relação ao método de Lagrange, foi apresentada a aplicação da forma *off-line*, onde tem-se o conhecimento de todos os nós do sinal para a aplicação da interpolação e o modo *on-line*, que executa a interpolação enquanto o sinal vai sendo amostrado. Quanto à vantagem da utilização deste método, essa se dá pelo fato do mesmo conseguir assumir os valores dos nós amostrados no sinal interpolado.

Para a interpolação B-spline, apresentou-se a aplicação da interpolação para uma função de terceiro grau. Foi também demonstrada a necessidade da aplicação de filtros em cascata com a função B-spline. Sobre a implementação dos filtros, foram citados dois métodos, o primeiro se baseia na inversão da função B-spline, a fim de fazer o sinal interpolado assumir valores iguais ao dos nós, e o segundo se baseia na complementação da função B-spline na frequência para que a função se aproxime do filtro de interpolação ideal.

Por fim, demonstraram-se alguns resultados das diferentes formas de efetuar a interpolação. Assim, percebe-se que na presença de componentes de baixa frequência, a interpolação de Lagrange demonstra resultados melhores. Porém, na presença de componentes de alta frequência, os resultados são diferentes. Posteriormente, esta análise será melhor apresentada.

5. RESULTADOS E COMPARAÇÕES DE MÉTODOS

Neste capítulo serão mostrados os resultados obtidos à partir dos processos de interpolação no domínio da frequência e no domínio do tempo. Para isso, consideram-se os parâmetros sugeridos pela norma IEC, com um sinal de 12 ciclos, resolução na frequência igual a 5 Hz e uma precisão para o cálculo dos componentes até o de 50^a ordem. Com esses parâmetros, de acordo com o teorema de Nyquist, serão utilizados 2.048 pontos e uma frequência de amostragem igual a 10.240 Hz. Outras considerações apresentadas nesta seção são a utilização da FFT como abordado na seção 2.2.1, estabelecendo melhor eficiência e a aplicação da janela na frequência, para o cálculo dos inter-harmônicos. O sinal considerado para a apresentação dos resultados é composto do componente fundamental, com amplitude igual a 1; componentes harmônicos ímpares de 3^a a 49^a ordem, com amplitudes iguais a $1/h$ para os 19 primeiros componentes e 0,1 para os demais, onde h representa o componente harmônico. Também será considerada a presença de ruído com SNR igual a 40 dB e inter-harmônicos. Para os inter-harmônicos, estes serão considerados com valor de frequência próxima ao componente fundamental, fazendo com que estes estejam compreendido no lóbulo principal, do componente fundamental, no espectro de frequência obtido pela DTFT, e também componentes que não estejam contidos dentro do lóbulo principal, ou seja, estejam com valor de frequência mais distante do componente fundamental. A amplitude dos componentes inter-harmônicos será considerada igual a 0,1. Para os desvios da frequência, será considerado o caso da frequência do componente fundamental igual a 59 Hz, variações em forma senoidal e em rampa. Em relação à aplicação das janelas, serão consideradas a janela retangular e a janela de Hanning. Também será apresentado o resultado obtido dos componentes harmônicos e inter-harmônicos, utilizando a interpolação no domínio do tempo com a inserção de um estimador de frequência, como apresentado em (RIBEIRO, DUQUE, *et al.*, 2014).

5.1. Definição dos parâmetros do sinal para a obtenção dos resultados: casos simulados

Primeiramente, antes de apresentar os resultados, serão considerados alguns casos para os sinais. Dessa forma, os resultados serão estabelecidos através da definição dos casos considerados. Para todos os casos, será considerado um sinal com componente fundamental, componentes harmônicos, ruído e inter-harmônicos, de acordo com as especificações feitas em cada caso.

5.1.1. Definição do Caso 1

No caso 1 serão considerados os parâmetros de acordo com a Tabela 9, onde o valor de frequência do componente fundamental é constante e o inter-harmônico não está compreendido no lóbulo principal de algum componente harmônico.

Tabela 9 – Parâmetros estabelecidos para o caso 1.

	Tipo de variação	Valor (Hz)
Frequência Fund.	Constante	59
Frequência Inter-harmônico	Constante	83,25

5.1.2. Definição do Caso 2

Para o caso 2, os parâmetros são estabelecidos de acordo com a Tabela 10. Para este caso é considerado a frequência do componente fundamental constante e a frequência do inter-harmônico próxima ao componente fundamental de forma que este esteja compreendido dentro do lóbulo central.

Tabela 10 – Parâmetros estabelecidos para o caso 2.

	Tipo de variação	Valor (Hz)
Frequência Fund.	Constante	59
Frequência Inter-harmônico	Constante	62,5

5.1.3. Definição do Caso 3

Para o caso 3 será considerado a presença de dois inter-harmônicos, estabelecendo o efeito de flutuação de tensão (cintilação luminosa). Sendo assim, serão considerados a frequência do componente fundamental como fixa e os valores dos inter-harmônicos como 40 e 80 Hz, como apresentados pela Tabela 11.

Tabela 11 – Parâmetros estabelecidos para o caso 3.

	Tipo de variação	Valor (Hz)
Frequência Fund.	Constante	59
Frequência Inter-harmônico	Constante	41 e 79

5.1.4. Definição do Caso 4

Para o caso 4 será considerado a frequência do componente fundamental do sistema, variando em forma de rampa e para o valor do componente inter-harmônico será considerado uma frequência igual a 83,25 Hz constante. O valor inicial da frequência é considerado como 60 Hz e aumenta até o valor de 61 Hz.

Tabela 12 – Parâmetros estabelecidos para o caso 4.

	Tipo de variação	Valor Inicial (Hz)
Frequência Fund.	Rampa	60
Frequência Inter-harmônico	Constante	153

5.1.5. Definição do Caso 5

Para o caso 5 é considerado uma variação na frequência em forma de senóide e é considerado um componente inter-harmônico com valor de frequência igual a 83,25 Hz constante, de acordo com a Tabela 13.

Tabela 13 – Parâmetros estabelecidos para o caso 5.

	Tipo de variação	Valor Médio (Hz)
Frequência Fund.	Senoidal	60
Frequência Inter-harmônico	Constante	153

Considerando os casos citados anteriormente, são apresentados os resultados obtidos através de cada método, apresentado nas próximas seções.

5.2. Resultados obtidos através da interpolação no domínio da frequência

Nesta seção serão apresentados os resultados obtidos através da interpolação na frequência. Serão considerados os resultados para um sinal sem interpolação e

resultados com aplicação da interpolação no domínio da frequência, utilizando a janela retangular e de Hanning e será aplicado a separação dos componentes harmônicos e inter-harmônicos no domínio da frequência. O processo de interpolação pode ser analisado através da Figura 42, composto de quatro etapas.

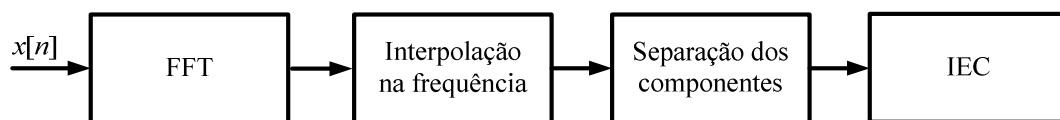


Figura 42 – Representação esquemática do processo de interpolação no domínio da frequência.

Na primeira etapa é aplicado a FFT para a obtenção do espectro de frequência. Logo após é aplicado a interpolação na frequência com o objetivo de corrigir as amplitudes dos componentes harmônicos, resultantes da amostragem assíncrona. Em seguida aplica-se a separação dos componentes harmônicos e inter-harmônicos no domínio da frequência e, por fim, o cálculo dos subgrupos harmônicos e inter-harmônicos é executado.

5.2.1. Resultado de simulação para o Caso 1

Aplicando o método de interpolação no domínio da frequência têm-se os resultados como mostrado pela Tabela 14, Tabela 15, Tabela 16 e Tabela 17 e pela Figura 43 e Figura 44. Na Tabela 14 são apresentados os resultados de amplitudes e erros dos subgrupos sem a aplicação da interpolação no domínio da frequência e com a aplicação da interpolação no domínio da frequência. Analisando os resultados, percebem-se erros próximos a 100% para os subgrupos sem a aplicação da interpolação. Isso porque o desvio de frequência não é considerado, utilizando 60 HZ como frequência do componente fundamental. Dessa forma, o cálculo dos subgrupos são feitos nos *bins* que não se referem ao dos valores de cada componente. Já com a utilização da interpolação, os *bins* referentes à energia dos componentes são englobados nos cálculos e consequentemente, são obtidos melhores resultados. Em comparação com a aplicação das janelas, melhores resultados são obtidos através da janela de Hanning.

Tabela 14 – Resultados dos subgrupos harmônicos utilizando os valores sem interpolação e com interpolação no domínio da frequência.

	Amplitude Desejada	Subgrupos (Sem interpolação)				Interpolação na frequência			
		Retangular		Hanning		Retangular		Hanning	
		Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)
1°	1	0,9709	2,9080	0,9990	0,0960	0,9966	0,3370	1,0002	0,0200
3°	0,3333	0,3092	7,2280	0,3276	1,7260	0,3324	0,2830	0,3332	0,0340
5°	0,2000	0,2015	0,7650	0,1826	8,7150	0,2023	1,1650	0,2004	0,1750
7°	0,1428	0,1215	14,9220	0,1083	24,1830	0,1439	0,7090	0,1429	0,0160
9°	0,1111	0,0326	70,6720	0,0592	46,7330	0,1110	0,0820	0,1114	0,2150
11°	0,0909	0,0232	74,5210	0,0265	70,8430	0,0925	1,7401	0,0912	0,3189
13°	0,0769	0,0233	69,7310	0,0073	90,5030	0,0766	0,3940	0,0771	0,2443
15°	0,0666	0,0053	92,0110	0,0004	99,4570	0,0687	3,0380	0,0663	0,4990
17°	0,0588	0,0144	75,5590	0,0012	97,8870	0,0594	0,8967	0,0590	0,3102
19°	0,0526	0,0061	88,3550	0,0007	98,6740	0,0531	0,9375	0,0528	0,3979
21°	0,1000	0,0114	88,6340	0,0006	99,3960	0,1010	1,0200	0,0999	0,0750
23°	0,1000	0,0141	85,8690	0,0006	99,3570	0,1000	0,0490	0,1002	0,2100
25°	0,1000	0,0031	96,8580	0,0005	99,5430	0,1019	1,8600	0,1002	0,2000
27°	0,1000	0,0135	86,4700	0,0005	99,4700	0,0997	0,3270	0,1002	0,2400
29°	0,1000	0,0064	93,5850	0,0003	99,6630	0,1006	0,5500	0,1000	0,0130
31°	0,1000	0,0087	91,3220	0,0009	99,1260	0,1011	1,1000	0,0999	0,1120
33°	0,1000	0,0103	89,7340	0,0005	99,5470	0,1000	0,0340	0,0997	0,3150
35°	0,1000	0,0026	97,4280	0,0004	99,5800	0,1017	1,7100	0,0997	0,3350
37°	0,1000	0,0108	89,1860	0,0007	99,3030	0,1003	0,3500	0,1003	0,3000
39°	0,1000	0,0051	94,8640	0,0008	99,2270	0,0999	0,0890	0,0999	0,0840
41°	0,1000	0,0076	92,3840	0,0003	99,7030	0,1012	1,1900	0,0999	0,0560
43°	0,1000	0,0088	91,1590	0,0006	99,3720	0,0997	0,2600	0,0998	0,1560
45°	0,1000	0,0028	97,1510	0,0004	99,5720	0,1016	1,5500	0,1003	0,2600
47°	0,1000	0,0107	89,2790	0,0005	99,5140	0,1003	0,3500	0,1002	0,2400
49°	0,1000	0,0071	92,8830	0,0008	99,1520	0,0999	0,0860	0,1000	0,0300

Na Tabela 15, têm-se os valores de erro médio, médio quadrático e erro máximo de cada método empregado. Novamente os resultados sem a utilização da interpolação no domínio da frequência assumem altos valores de erros em relação aos resultados obtidos através da aplicação da interpolação. Com a utilização da interpolação, a janela de

Hanning obteve melhores resultados em relação à janela retangular. A Figura 43 mostra os subgrupos de harmônicos sem a aplicação da interpolação e com a utilização da interpolação no domínio da frequência.

Tabela 15 – Resultados obtidos através da utilização dos subgrupos harmônicos sem interpolação e com a aplicação da interpolação n domínio da frequência.

	Subgrupos (Sem interpolação)		Interpolação na frequência	
	Retangular	Hanning	Retangular	Hanning
Erro Médio (%)	74,9	81,2	0,8043	0,1943
Erro Médio Quad. (%)	6.569,6	7.743,1	1,1740	0,0546
Erro Máximo (%)	97,4	99,7	3,0380	0,4990

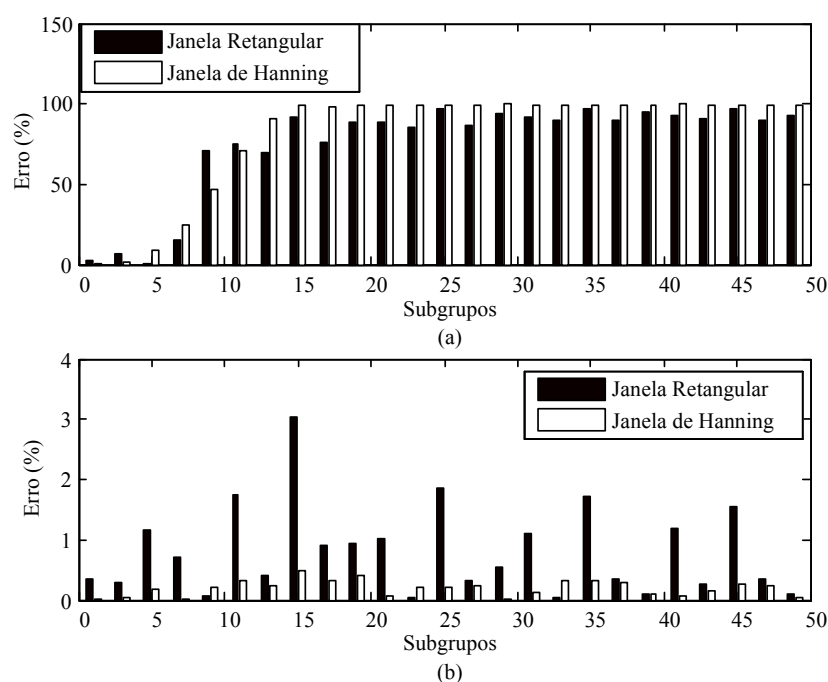


Figura 43 – Erros dos subgrupos harmônicos (a) sem interpolação na frequência e (b) com interpolação na frequência.

Para os subgrupos inter-harmônicos, os resultados são apresentados através da Tabela 16, Tabela 17 e Figura 44.

Na Tabela 16 são mostrados os resultados de erros do segundo subgrupo inter-harmônico, onde o menor erro é encontrado através da utilização da janela de Hanning

sem interpolação (0,5%). Na Tabela 17, onde são apresentados os erros médio, médio quadrático e erro máximo, calculado através dos subgrupos inter-harmônicos sem e com a aplicação da separação dos componentes no domínio da frequência. O menor valor é obtido com a utilização da janela de Hanning, utilizando a separação dos componentes harmônicos e inter-harmônicos. A Figura 44 mostra o esboço dos subgrupos inter-harmônicos.

Tabela 16 – Resultados obtidos através da aplicação da janela retangular e de Hanning, para a presença de um inter-harmônico com frequência igual a 83,25 Hz.

	Amplitude Desejada	Sem aplicação da separação dos componentes				Separação dos componentes na frequência			
		Retangular		Hanning		Retangular		Hanning	
		Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)
2º	0,1	0,1626	62,6	0,1001	0,1	0,0948	5,2	0,1005	0,5

Tabela 17 – Resultados dos subgrupos inter-harmônicos sem e com a separação dos componentes no domínio da frequência.

	Subgrupos (Sem separação dos componentes na frequência)		Subgrupos (Separação dos componentes na frequência)	
	Retangular	Hanning	Retangular	Hanning
Erro Médio	0,0406	0,0089	0,0216	0,0011
Erro Médio Quad.	0,0125	0,0002	0,0005	0,0000
Erro Máximo	0,1613	0,0395	0,0569	0,0220

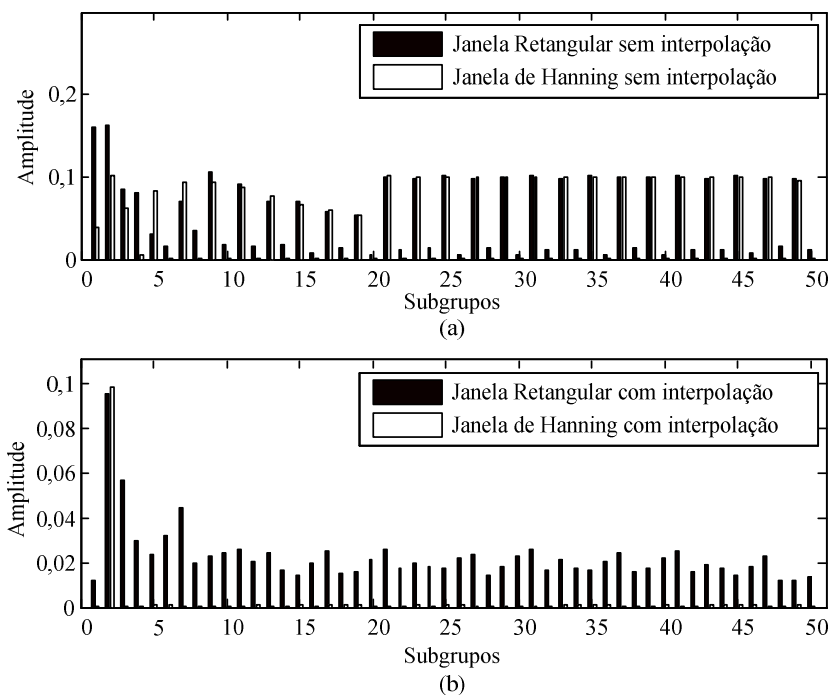


Figura 44 – Subgrupos de inter-harmônicos (a) sem separação dos componentes e (b) com a separação dos componentes harmônicos e inter-harmônicos.

Na Figura 44(a) são mostrados os subgrupos obtidos através do método sem interpolação, onde pode-se perceber maior espalhamento ocasionado por ambas as janelas. Na Figura 44(b) são mostrados os subgrupos adquiridos através de processo de separação dos componentes, onde os menores valores são obtidos com a utilização da janela de Hanning, pois possui menor espalhamento espectral.

5.2.2. Resultados de simulação para o caso 2

Outro ponto a ser analisado é quanto a presença de inter-harmônicos próximos ao componente fundamental. Nesse caso é considerado um componente inter-harmônico com valor de frequência igual a 62,5 Hz, ao invés de um componente de 83,25 Hz. Os resultados dos subgrupos harmônicos são mostrados através da Tabela 18, Tabela 19, Tabela 20 e da Figura 45.

Assim, com a presença do inter-harmônico próximo ao componente fundamental percebe-se através dos valores de erros obtidos, no primeiro subgrupo harmônico,

encontrado na Tabela 18, maiores valores de erros, em relação ao caso 1, onde o componente inter-harmônico localiza-se em uma distância maior.

Tabela 18 – Resultados obtidos dos subgrupos harmônicos.

	Amplitude Desejada	Subgrupos (Sem interpolação)				Interpolação na frequência			
		Retangular		Hanning		Retangular		Hanning	
		Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)
1°	1	0,9540	4,5990	0,9953	0,4680	0,9716	2,8390	0,9719	2,8120
3°	0,3333	0,3093	7,1980	0,3275	1,7410	0,3321	0,3760	0,3325	0,2470
5°	0,2000	0,2020	1,0150	0,1824	8,8200	0,2024	1,1750	0,2023	1,1550
7°	0,1428	0,1218	14,7540	0,1082	24,2670	0,1440	0,7860	0,1439	0,7020
9°	0,1111	0,0327	70,5673	0,0587	47,1421	0,1107	0,3430	0,1107	0,3880
11°	0,0909	0,0229	74,7880	0,0264	70,9204	0,0930	2,3517	0,0929	2,1702
13°	0,0769	0,0232	69,8049	0,0077	89,9955	0,0765	0,5357	0,0768	0,1431
15°	0,0666	0,0051	92,3746	0,0005	99,2547	0,0687	3,0155	0,0684	2,6150
17°	0,0588	0,0142	75,9093	0,0015	97,5267	0,0596	1,2996	0,0592	0,6230
19°	0,0526	0,0059	88,7315	0,0006	98,8730	0,0526	0,0030	0,0526	0,0331
21°	0,1000	0,0119	88,0880	0,0008	99,2175	0,1015	1,5300	0,1014	1,4300
23°	0,1000	0,0142	85,8240	0,0007	99,2615	0,1000	0,0100	0,1000	0,0400
25°	0,1000	0,0028	97,1524	0,0005	99,4556	0,1013	1,2800	0,1015	1,5000
27°	0,1000	0,0132	86,7560	0,0007	99,3302	0,1003	0,3300	0,1006	0,6400
29°	0,1000	0,0066	93,4174	0,0005	99,4838	0,1004	0,3600	0,1004	0,3700
31°	0,1000	0,0086	91,3555	0,0005	99,5453	0,1013	1,2900	0,1011	1,0600
33°	0,1000	0,0105	89,5120	0,0005	99,4933	0,1000	0,0400	0,1009	0,9100
35°	0,1000	0,0029	97,0642	0,0005	99,5174	0,1013	1,3000	0,1015	1,5300
37°	0,1000	0,0108	89,2290	0,0006	99,3563	0,1000	0,0400	0,1005	0,5300
39°	0,1000	0,0047	95,2576	0,0004	99,6020	0,1002	0,2300	0,0999	0,0940
41°	0,1000	0,0075	92,5446	0,0006	99,3501	0,1007	0,7300	0,1013	1,3300
43°	0,1000	0,0092	90,8290	0,0005	99,4640	0,0998	0,1910	0,1000	0,0100
45°	0,1000	0,0031	96,9307	0,0008	99,1909	0,1017	1,6700	0,1017	1,7000
47°	0,1000	0,0106	89,3750	0,0008	99,1633	0,1004	0,4300	0,1006	0,6300
49°	0,1000	0,0068	93,2285	0,0006	99,3844	0,1003	0,2700	0,0998	0,2140

Em relação aos erros médio, médio quadrático e máximo, dos subgrupos harmônicos (Tabela 19), os resultados obtidos, para a janela retangular, assumem valores maiores de erros. O melhor resultado é obtido com aplicação da janela de Hanning com a separação dos componentes na frequência. Na Figura 45 é mostrado o esboço dos subgrupos com a separação dos componentes na frequência e sem a separação dos componentes.

Tabela 19 – Resultados obtidos dos erros médio, médio quadrático e máximo dos subgrupos harmônicos.

	Subgrupos (Sem interpolação)		Interpolação na frequência	
	Retangular	Hanning	Retangular	Hanning
Erro Médio (%)	75,1	81,2	0,8970	0,9151
Erro Médio Quad. (%)	6.577,1	7.733,2	1,5264	1,4572
Erro Máximo (%)	97,2	99,6	3,0155	2,8120

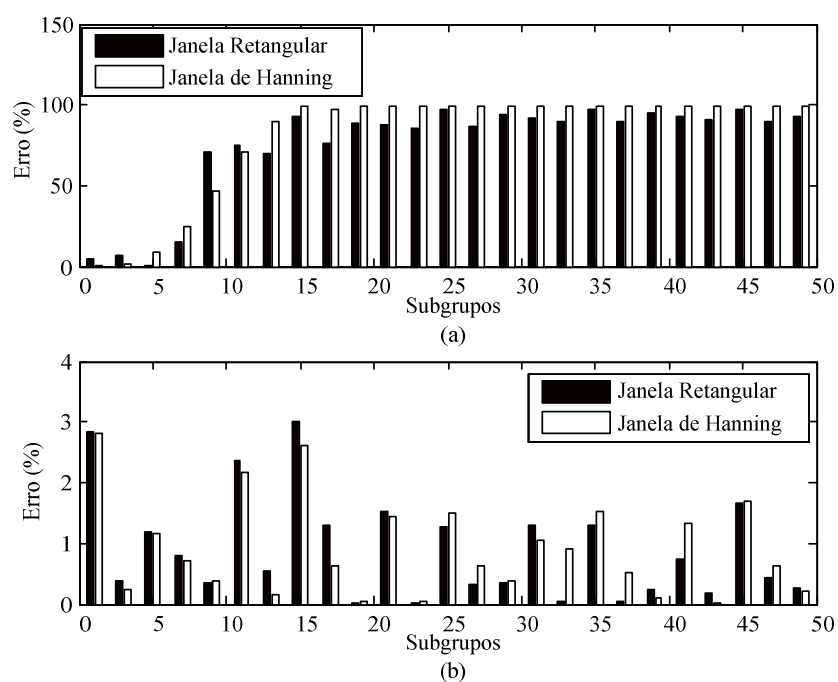


Figura 45 – Erros dos subgrupos harmônicos (a) sem a utilização da separação dos componentes na frequência e (b) com a separação dos componentes no domínio da frequência.

Tabela 20 – Resultados obtidos do segundo subgrupo inter-harmônico sem a separação e com a separação dos componentes no domínio da frequência.

	Amplitude Desejada	Sem aplicação da janela na frequência				Separação dos componentes Harmônicos e Inter-harmônicos			
		Retangular		Hanning		Retangular		Hanning	
		Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)
2°	0,1	0,1483	48,3	0,0248	75,2	0,0499	50,1	0,0059	94,1

Tabela 21 – Resultados dos subgrupos inter-harmônicos obtidos sem a aplicação da separação dos componentes e com a separação dos componentes no domínio da frequência.

	Subgrupos (Sem separação dos componentes na frequência)		Subgrupos (Separação dos componentes na frequência)	
	Retangular	Hanning	Retangular	Hanning
Erro Médio	0,0435	0,0597	0,0308	0,0194
Erro Médio Quad.	0,0094	0,0154	0,0057	0,0177
Erro Máximo	0,1630	0,7520	0,5060	0,9400

Para o subgrupo inter-harmônico, onde há a presença do componente inter-harmônico, percebe-se valores de erros acima de 48% para a aplicação da janela retangular e valores acima de 75% para a aplicação da janela de Hanning. Dessa forma, percebe-se que a aplicação dos subgrupos não engloba a energia do componente inter-harmônico. Isso faz com que os erros máximos, mostrados através da Tabela 21, assumam valores maiores com a aplicação da janela de Hanning. Isso acontece pelo fato desta janela resultar em um baixo espalhamento espectral em relação à janela retangular. Um esboço dos subgrupos inter-harmônicos, sem a separação dos componentes e com a separação dos componentes no domínio da frequência, é apresentado na Figura 46.

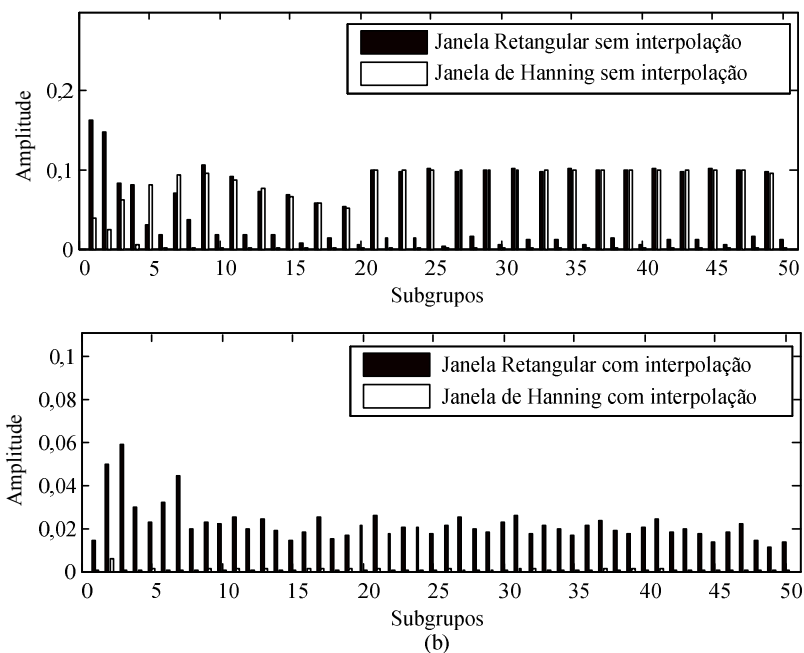


Figura 46 – Subgrupos de inter-harmônicos (a) sem a separação dos componentes na frequência e (b) com a separação dos componentes no domínio da frequência.

5.2.3. Resultados de Simulação para o Caso 3

No caso 3 é considerada a presença de dois inter-harmônicos, com valores de frequência iguais a 41 e 79 Hz. Para esse caso, os resultados são apresentados na Tabela 22, Tabela 23, Tabela 24, Tabela 25, pela Figura 51 e Figura 52.

Dessa forma, os erros dos subgrupos harmônicos, apresentados pela Tabela 22, em relação aos erros obtidos através da presença de um inter-harmônico com frequência igual a 83,25 Hz, são semelhantes. Assim, o processo de interpolação com a aplicação da janela de Hanning obteve menores erros em relação aos demais métodos. Isto se dá também para os valores de erros médio, médio quadrático e máximo, apresentados pela Tabela 23. A Figura 47 mostra o esboço dos subgrupos harmônicos sem a utilização da interpolação no domínio da frequência e com a aplicação da interpolação no domínio da frequência.

Tabela 22 – Amplitudes e erros dos subgrupos harmônicos com a aplicação da interpolação n domínio da frequência e sem a interpolação.

	Amplitude Desejada	Subgrupos (Sem interpolação)				Interpolação na frequência			
		Retangular		Hanning		Retangular		Hanning	
		Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)
1°	1	0,9709	2,9130	0,9983	0,1670	0,9969	0,3100	1,0004	0,0400
3°	0,3333	0,3095	7,1380	0,3280	1,5940	0,3328	0,1720	0,3332	0,0370
5°	0,2000	0,2015	0,7550	0,1827	8,6750	0,2025	1,2550	0,2001	0,0300
7°	0,1428	0,1214	15,0130	0,1086	23,9730	0,1435	0,4220	0,1424	0,3340
9°	0,1111	0,0330	70,2919	0,0589	46,9648	0,1109	0,1990	0,1112	0,0350
11°	0,0909	0,0227	74,9783	0,0264	70,9589	0,0928	2,1229	0,0907	0,2564
13°	0,0769	0,0232	69,8920	0,0077	89,9852	0,0768	0,1054	0,0769	0,0508
15°	0,0666	0,0050	92,5206	0,0008	98,8226	0,0685	2,7635	0,0667	0,0980
17°	0,0588	0,0143	75,6475	0,0013	97,7852	0,0592	0,6434	0,0589	0,1810
19°	0,0526	0,0056	89,4299	0,0004	99,2310	0,0527	0,0464	0,0524	0,4343
21°	0,1000	0,0119	88,0800	0,0008	99,2351	0,1012	1,2300	0,1000	0,0300
23°	0,1000	0,0139	86,1020	0,0012	98,7982	0,0993	0,6900	0,1001	0,1100
25°	0,1000	0,0028	97,2018	0,0007	99,3243	0,1014	1,3900	0,0996	0,4000
27°	0,1000	0,0135	86,4950	0,0006	99,3927	0,1004	0,3800	0,1006	0,5700
29°	0,1000	0,0060	94,0149	0,0006	99,3811	0,1002	0,2000	0,0999	0,1420
31°	0,1000	0,0088	91,2255	0,0005	99,4507	0,1012	1,1700	0,1002	0,1500
33°	0,1000	0,0106	89,4030	0,0004	99,6053	0,0998	0,1560	0,0999	0,1050
35°	0,1000	0,0025	97,5479	0,0008	99,2230	0,1012	1,1600	0,0996	0,3710
37°	0,1000	0,0107	89,2660	0,0004	99,6259	0,1003	0,2900	0,1007	0,6500
39°	0,1000	0,0047	95,2547	0,0008	99,2323	0,1002	0,2200	0,1001	0,0600
41°	0,1000	0,0074	92,5911	0,0006	99,4401	0,1012	1,1600	0,0996	0,4050
43°	0,1000	0,0090	90,9686	0,0005	99,5042	0,0999	0,0930	0,1004	0,3900
45°	0,1000	0,0028	97,1636	0,0004	99,6280	0,1014	1,4000	0,0993	0,6850
47°	0,1000	0,0104	89,6440	0,0006	99,3959	0,1007	0,7300	0,0996	0,4350
49°	0,1000	0,0075	92,4667	0,0005	99,5429	0,0999	0,0670	0,1000	0,0100

Para os subgrupos inter-harmônicos, onde há a presença de componentes inter-harmônicos, os resultados são apresentados através da Tabela 24. Assim, percebe-se que

os menores erros são obtidos através da aplicação da janela de Hanning. Em relação aos erros médio, médio quadrático e máximo, apresentados na Tabela 25, o menor erro médio é dado pela aplicação da janela de Hanning utilizando a interpolação na frequência. Para o erro médio quadrático, a utilização da janela de Hanning sem e com interpolação assumem o mesmo valor e, para o erro máximo, menor valor é assumido somente com a aplicação da janela de Hanning, sem a separação dos componentes. A Figura 48 mostra o esboço dos subgrupos inter-harmônicos sem a aplicação e com a interpolação no domínio da frequência.

Tabela 23 – Erros dos subgrupos harmônicos com a aplicação da interpolação na frequência e sem interpolação.

	Subgrupos (Sem interpolação)		Interpolação na frequência	
	Retangular	Hanning	Retangular	Hanning
Erro Médio (%)	75	81,2	0,7350	0,2404
Erro Médio Quad. (%)	6,588	7.733,1	1,0127	0,1002
Erro Máximo (%)	97,5	99,6	2,7635	0,6850

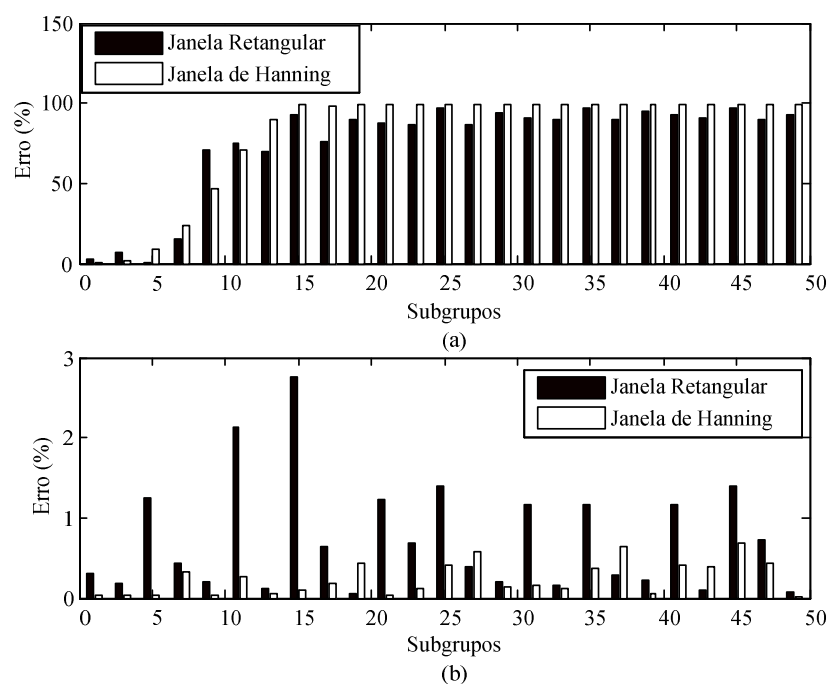


Figura 47 – Erros dos subgrupos harmônicos (a) sem a utilização da interpolação na frequência e (b) com a interpolação na frequência.

Tabela 24 – Resultados obtidos do segundo subgrupo inter-harmônico sem a separação e com a separação dos componentes no domínio da frequência.

	Amplitude Desejada	Sem aplicação da janela na frequência				Separação dos componentes Harmônicos e Inter-harmônicos			
		Retangular		Hanning		Retangular		Hanning	
		Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)
1°	0,1	0,1765	76,5	0,1067	6,7	0,0335	66,5	0,0922	7,8
2°	0,1	0,1781	78,1	0,1020	2,0	0,1026	2,6	0,0960	4,0

Tabela 25 – Resultados dos subgrupos inter-harmônicos obtidos sem a aplicação da separação dos componentes e com a separação dos componentes no domínio da frequência.

	Subgrupos (Sem separação dos componentes na frequência)		Subgrupos (Separação dos componentes na frequência)	
	Retangular	Hanning	Retangular	Hanning
Erro Médio	0,0189	0,0041	0,0326	0,0031
Erro Médio Quad.	0,0281	0,0002	0,0093	0,0002
Erro Máximo	0,1058	0,0335	0,6650	0,0780

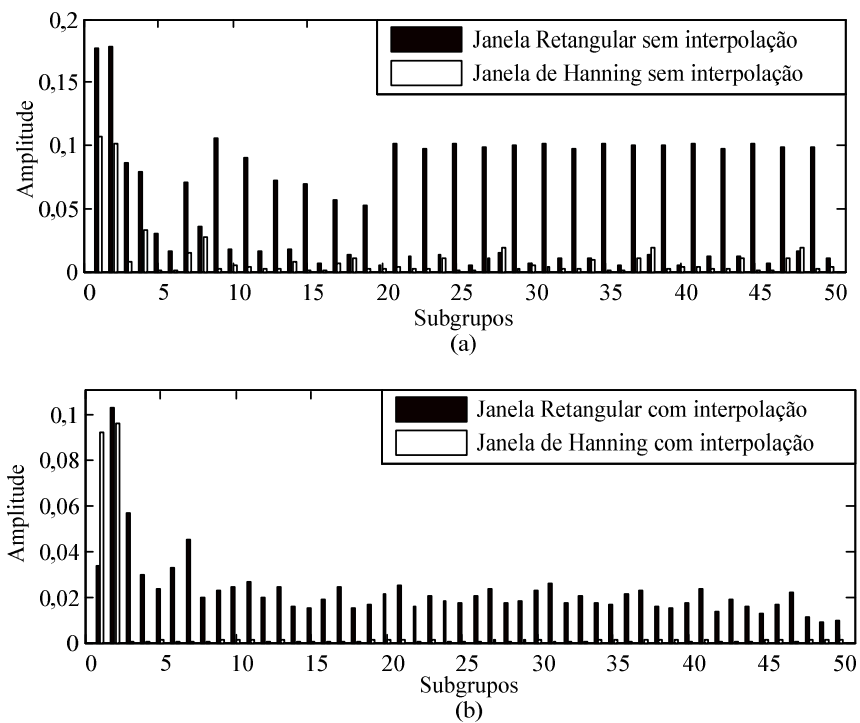


Figura 48 – Subgrupos de inter-harmônicos (a) sem a separação dos componentes na frequência e (b) com a separação dos componentes na frequência.

Por fim é mostrado através da Figura 49 o erro máximo obtido com a aplicação da interpolação no domínio da frequência utilizando as janelas retangular e de Hanning. Para o sinal são considerados os parâmetros definidos no caso 3, porém variando a frequência de 55 Hz à 65 Hz. A utilização da interpolação com a aplicação da janela de Hanning obteve melhores resultados em relação à janela retangular.

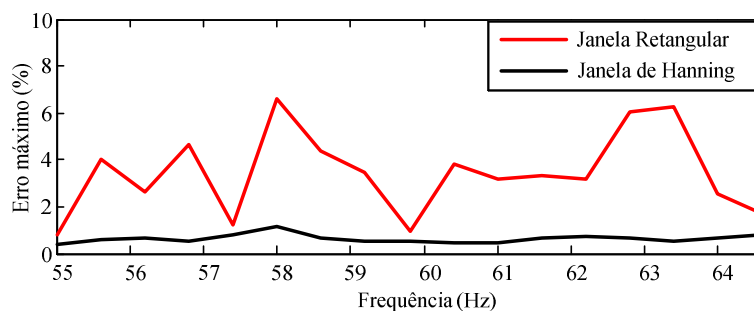


Figura 49 – Representação do erro obtido através da aplicação da interpolação no domínio da frequência.

5.3. Resultados obtidos através da interpolação no domínio do tempo

Nesta seção serão apresentados os resultados dos subgrupos obtidos através da aplicação da interpolação no domínio do tempo. Os métodos utilizados para interpolação são a interpolação de Lagrange e B-spline, sendo que no último método, são considerados dois pré-filtros, um baseado na inversão da função B-spline e o outro baseado na função *least-square*. Os parâmetros do sinal serão considerados iguais aos utilizados na interpolação no domínio da frequência. A representação esquemática desse processo de interpolação pode ser mostrada através da Figura 50.

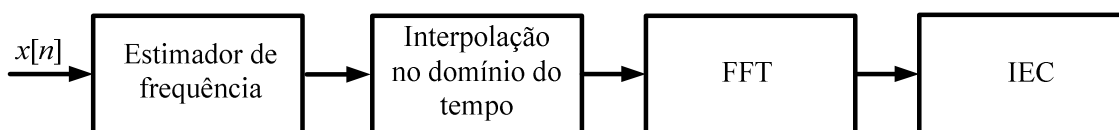


Figura 50 – Representação esquemática do processo de interpolação no domínio do tempo.

Dessa forma, percebe-se que o processo é formado por quatro etapas, desde a estimação da frequência até o cálculo dos subgrupos pela norma IEC. Na primeira etapa, onde se encontra o estimador de frequência, inicialmente será considerado como um processo ideal, isento de erros. No final será apresentado a aplicação de um estimador de frequência não ideal no projeto. Na segunda etapa serão aplicados os métodos de interpolação para o domínio do tempo, considerados neste trabalho. Na terceira etapa é estabelecido o cálculo da FFT, adquirindo a representação do sinal na frequência e por último, o cálculo dos subgrupos, baseado na norma IEC. Assim, os resultados serão apresentados e comparados nas subseções seguintes.

5.3.1. Resultado de Simulação para o Caso 1

Em primeiro lugar, para mostrar os resultados dos componentes contidos em um sinal, será considerado uma frequência constante do componente fundamental, porém fora do valor nominal. Os resultados dos subgrupos harmônicos, utilizando a janela retangular e a janela de Hanning, são apresentados através da Tabela 26, Tabela 27, Tabela 28 e Figura 51.

Na Tabela 26 e na Tabela 27 são apresentados os subgrupos e seus respectivos erros obtidos através da interpolação de Lagrange e da interpolação B-spline com a aplicação dos pré-filtros utilizando a função B-spline inversa e *least-square*.

Assim, percebe-se melhores resultados, para a interpolação de Lagrange, obtidos com a aplicação da janela de Hanning até o 25º subgrupo harmônico. Para os demais subgrupos, a utilização da janela retangular assume menores erros.

Em relação a interpolação B-spline, a aplicação da janela de Hanning resulta em menores valores de erro para a maior parte dos subgrupos, utilizando o pré-filtro função inversa e para todos os subgrupos, utilizando o pré-filtro *least-square*.

Analisando os erros médio, médio quadrático e máximo, apresentados pela Tabela 28, percebe-se melhores resultados obtidos através da aplicação da interpolação B-spline com a utilização do pré-filtro *least-square* e da janela de Hanning. O pior caso foi

obtido utilizando a interpolação B-spline com o pré-filtro *least-square* e a janela retangular.

Tabela 26 – Resultados dos subgrupos harmônicos obtidos através da interpolação de Lagrange.

	Amplitude Desejada	Interpolação de Lagrange			
		Retangular		Hanning	
		Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)
1°	1	0,9994	0,0600	1,0006	0,0600
3°	0,3333	0,3322	0,3400	0,3337	0,1100
5°	0,2000	0,2000	0	0,2000	0
7°	0,1428	0,1431	0,1700	0,1430	0,1000
9°	0,1111	0,1123	1,0700	0,1109	0,1900
11°	0,0909	0,0924	1,6400	0,0913	0,4300
13°	0,0769	0,0789	2,5700	0,0775	0,7500
15°	0,0666	0,0685	2,7500	0,0662	0,7000
17°	0,0588	0,0607	3,1900	0,0590	0,3000
19°	0,0526	0,0540	2,6000	0,0529	0,5100
21°	0,1000	0,1018	1,8000	0,1003	0,3000
23°	0,1000	0,1014	1,4000	0,1008	0,8000
25°	0,1000	0,1013	1,3000	0,1010	1,0000
27°	0,1000	0,1011	1,1000	0,1015	1,5000
29°	0,1000	0,1018	1,8000	0,1020	2,0000
31°	0,1000	0,1015	1,5000	0,1022	2,2000
33°	0,1000	0,1020	2,0000	0,1022	2,2000
35°	0,1000	0,1026	2,6000	0,1032	3,2000
37°	0,1000	0,1030	3,0000	0,1034	3,4000
39°	0,1000	0,1030	3,0000	0,1040	4,0000
41°	0,1000	0,1035	3,5000	0,1034	3,4000
43°	0,1000	0,1033	3,3000	0,1039	3,9000
45°	0,1000	0,1034	3,4000	0,1041	4,1000
47°	0,1000	0,1032	3,2000	0,1036	3,6000
49°	0,1000	0,1028	2,8000	0,1042	4,2000

Tabela 27 – Resultados dos subgrupos harmônicos obtidos através da aplicação da interpolação B-spline, utilizando pré-filtros.

	Amplitude Desejada	Interp. B-spline Inv.				Interp. B-spline L.S.			
		Retangular		Hanning		Retangular		Hanning	
		Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)
1°	1	0,9985	0,1500	1,0020	0,2000	0,9746	2,5400	0,9976	0,2400
3°	0,3333	0,3306	0,8200	0,3340	0,2000	0,3143	5,7100	0,3340	0,2000
5°	0,2000	0,1985	0,7500	0,2001	0,0500	0,1889	5,5500	0,2008	0,4000
7°	0,1428	0,1417	0,8100	0,1430	0,1000	0,1379	3,4700	0,1425	0,2500
9°	0,1111	0,1111	0,0100	0,1108	0,2800	0,1082	2,6200	0,1104	0,6400
11°	0,0909	0,0913	0,4300	0,0912	0,3200	0,0872	4,0800	0,0909	0,0100
13°	0,0769	0,0780	1,4000	0,0773	0,4900	0,0730	5,1000	0,0767	0,2900
15°	0,0666	0,0676	1,4000	0,0660	1,0000	0,0637	4,4500	0,0665	0,2500
17°	0,0588	0,0598	1,6600	0,0588	0,0400	0,0580	1,4000	0,0589	0,1300
19°	0,0526	0,0531	0,8900	0,0526	0,0600	0,0513	2,5300	0,0523	0,6300
21°	0,1000	0,1004	0,4000	0,0995	0,5000	0,0969	3,1000	0,0999	0,1000
23°	0,1000	0,0997	0,3000	0,0998	0,2000	0,0956	4,4000	0,1000	0
25°	0,1000	0,0993	0,7000	0,0997	0,3000	0,0954	4,6000	0,0999	0,1000
27°	0,1000	0,0988	1,2000	0,0998	0,2000	0,0966	3,4000	0,0999	0,1000
29°	0,1000	0,0990	1,0000	0,1000	0	0,0966	3,4000	0,1005	0,5000
31°	0,1000	0,0984	1,6000	0,0998	0,2000	0,0957	4,3000	0,0996	0,4000
33°	0,1000	0,0985	1,5000	0,0994	0,6000	0,0947	5,3000	0,1002	0,2000
35°	0,1000	0,0987	1,3000	0,0999	0,1000	0,0959	4,1000	0,0995	0,5000
37°	0,1000	0,0987	1,3000	0,0996	0,4000	0,0972	2,8000	0,1004	0,4000
39°	0,1000	0,0984	1,6000	0,0997	0,3000	0,0972	2,8000	0,1000	0
41°	0,1000	0,0986	1,4000	0,0987	1,3000	0,0959	4,1000	0,0998	0,2000
43°	0,1000	0,0981	1,9000	0,0986	1,4000	0,0956	4,4000	0,0992	0,8000
45°	0,1000	0,0979	2,1000	0,0984	1,6000	0,0964	3,6000	0,1007	0,7000
47°	0,1000	0,0973	2,7000	0,0976	2,4000	0,0970	3,0000	0,1005	0,5000
49°	0,1000	0,0971	2,9000	0,0978	2,2000	0,0978	2,2000	0,1001	0,1000

Ao se analisar os resultados obtidos pela interpolação de Lagrange, nota-se melhores resultados de erro médio quadrático e erro máximo obtidos com a utilização da janela

retangular e menor erro médio obtido com a utilização da janela de Hanning. Para a interpolação B-spline, considerando os dois tipos de pré-filtros, os menores erros são apresentados pela utilização da janela de Hanning. A Figura 51 mostra o esboço dos subgrupos obtidos através da interpolação de Lagrange e B-spline, utilizando os dois tipos de pré-filtros.

Tabela 28 – Resultados dos subgrupos harmônicos.

		Erro Médio	Erro Quadrático	Erro Máximo
Interp. Lagrange	Retangular	2,0036	5,2086	3,5000
	Hanning	1,7180	5,2516	4,2000
Interp. B-spline Inv.	Retangular	1,2088	1,9670	2,9000
	Hanning	0,5776	0,7763	2,4000
Interp. B-spline LS	Retangular	3,7180	14,9950	5,7100
	Hanning	0,3056	0,1444	0,8000

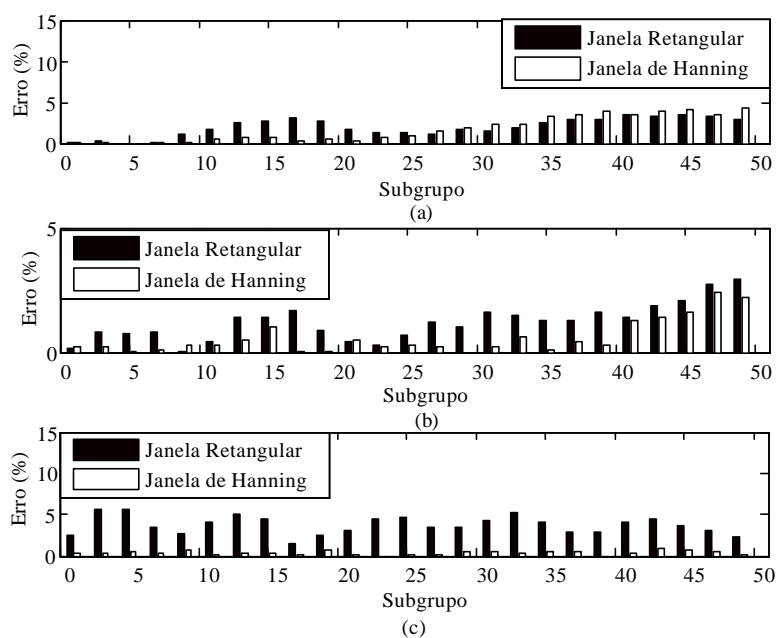


Figura 51 – Erro dos subgrupos harmônicos obtidos através da interpolação no domínio do tempo, (a) Lagrange, (b) B-spline com pré-filtro de função inversa e (c) B-spline com pré-filtro função *least-square*.

Quanto aos inter-harmônicos, os resultados são apresentados através da Tabela 29, Tabela 30, Tabela 31 e Figura 52. Assim, percebe-se, através da Tabela 29 e da Tabela 30, melhores resultados obtidos com a aplicação da janela de Hanning para todos os métodos de interpolação. Em relação aos métodos utilizados para interpolação, o melhor resultado é encontrado com a interpolação de Lagrange e B-spline utilizando o pré-filtro com função inversa, para o segundo subgrupo inter-harmônico. Em relação aos erros médio, médio quadrático e máximo, apresentados na Tabela 31, a janela de Hanning também apresentou menores erros em todos os métodos de interpolação. Com a utilização da interpolação B-spline com o pré-filtro *least-square* e janela de Hanning obtiveram menores erros médio e médio quadrático. Para o erro máximo, o melhor resultado foi obtido utilizando a interpolação B-spline com o pré-filtro função inversa e janela de Hanning.

Tabela 29 – Resultados dos subgrupos de inter-harmônicos obtidos utilizando a interpolação de Lagrange.

	Amplitude Desejada	Interpolação de Lagrange			
		Retangular		Hanning	
		Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)
2°	0,1	0,1008	0,8	0,1000	0,0

Tabela 30 – Resultados dos subgrupos de inter-harmônicos utilizando a interpolação B-spline.

	Amplitude Desejada	Interp. B-spline Inv.				Interp. B-spline L.S.			
		Retangular		Hanning		Retangular		Hanning	
		Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)
2°	0,1	0,1049	4,9	0,1000	0	0,1410	41,0	0,1009	0,9

Um esboço dos subgrupos de inter-harmônicos é apresentado através da Figura 52 (a), (b) e (c). Dessa forma, pode-se analisar os resultados dos subgrupos de inter-harmônicos com a aplicação dos métodos de interpolação no domínio do tempo, como

também a aplicação das janelas retangular e de Hanning. Dessa forma percebe-se maior espalhamento ocasionado pela janela retangular, principalmente na aplicação da interpolação B-spline com pré-filtro *least-square*. Também percebe-se que em todos os casos houve a detecção do componente inter-harmônico.

Tabela 31 – Resultado dos erros dos subgrupos inter-harmônicos.

		Erro Médio	Erro Quadrático	Erro Máximo
Interp. Lagrange	Retangular	0,0029	0,0000	0,0064
	Hanning	0,0013	0,0000	0,0062
Interp. B-spline Inv.	Retangular	0,0056	0,0001	0,0157
	Hanning	0,0009	0,0000	0,0017
Interp. B-spline LS	Retangular	0,0081	0,0038	0,0789
	Hanning	0,0009	0,0000	0,0020

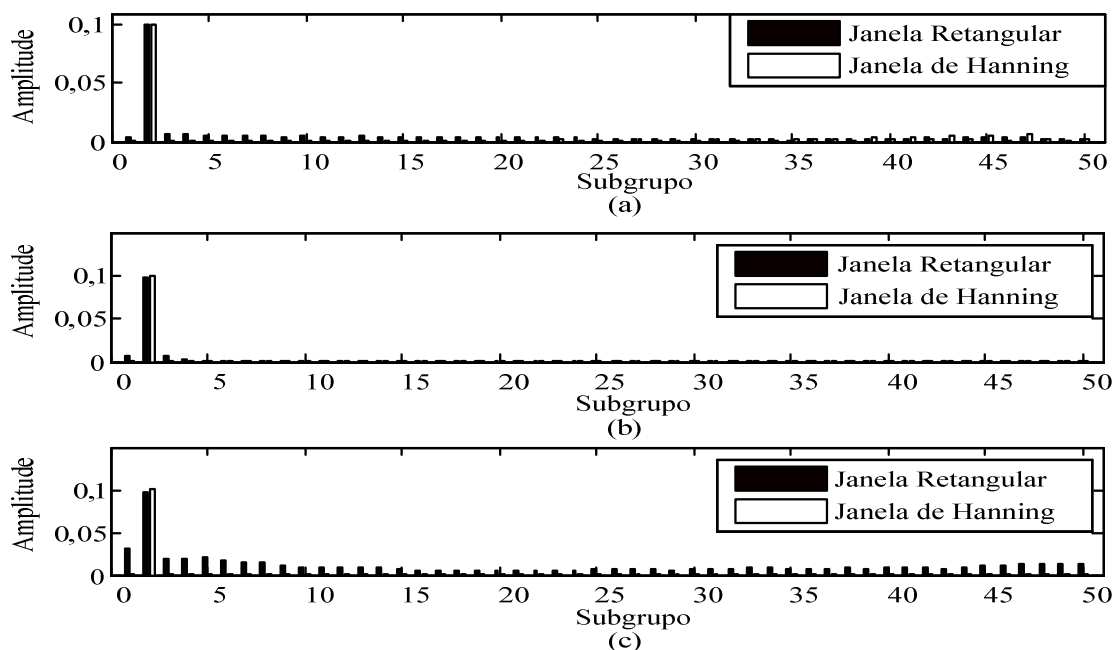


Figura 52 – Subgrupos de inter-harmônicos utilizando interpolação de (a) Lagrange e (b) B-spline com pré-filtro com função inversa e (c) B-spline com pré-filtro com função *least-square*.

Assim, após a obtenção dos resultados para subgrupos harmônicos e inter-harmônicos, percebe-se melhores resultados dos subgrupos harmônicos obtidos com a aplicação da interpolação B-spline com o pré-filtro *least-square*. Para o segundo subgrupo inter-harmônico, o melhor resultado é obtido com a utilização da interpolação B-spline com o pré-filtro função invertida. Quanto aos erros médio e médio quadrático, a aplicação do método B-spline obteve melhores resultados, quando comparados à interpolação de Lagrange. Para todos os casos os menores erros foram obtidos com a aplicação da janela de Hanning.

5.3.2. Resultado de Simulação para o Caso 2

Para a próxima análise, serão mostrados os resultados obtidos com a presença de um inter-harmônico com valor de frequência próximo ao da fundamental, ou seja, considerando que o componente esteja inserido dentro do lóbulo principal, no espectro de frequência. Para isso, como na interpolação no domínio da frequência, utiliza-se um componente com frequência igual a 62,5 Hz. Os resultados, para os subgrupos harmônicos, são apresentados pela Tabela 32, Tabela 33, Tabela 34 e pela Figura 53.

A Tabela 32 e a Tabela 33 mostram os resultados obtidos das amplitudes dos subgrupos, com seus respectivos erros. Analisando os resultados, percebe-se menores valores de erros obtidos pela aplicação da interpolação B-spline com o pré-filtro *least-square*. Quanto ao método que apresenta os maiores valores de erros é o processo de interpolação de Lagrange.

Em relação à utilização das janelas para a interpolação de Lagrange, a janela retangular obteve melhores resultados para os 25 primeiros subgrupos e a aplicação da janela de Hanning assumiu menores valores de erros, para os demais subgrupos. Para a interpolação B-spline, a janela de Hanning obteve melhores resultados exceto para os subgrupos 43°, 45° e 49°. Já a aplicação da interpolação B-spline com o pré-filtro *least-square*, obtiveram menores erros para todos os subgrupos utilizando a janela de Hanning.

Tabela 32 – Resultados dos subgrupos harmônicos obtidos através da interpolação de Lagrange.

	Amplitude Desejada	Interpolação de Lagrange			
		Retangular		Hanning	
		Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)
1°	1	0,9789	2,1100	0,9475	5,2500
3°	0,3333	0,3335	0,0500	0,3335	0,0500
5°	0,2000	0,2006	0,3000	0,1998	0,1000
7°	0,1428	0,1440	0,8000	0,1424	0,3200
9°	0,1111	0,1128	1,5200	0,1113	0,1700
11°	0,0909	0,0933	2,6300	0,0909	0,0100
13°	0,0769	0,0792	2,9600	0,0765	0,5500
15°	0,0666	0,0688	3,2000	0,0660	1,0000
17°	0,0588	0,0607	3,1900	0,0589	0,1300
19°	0,0526	0,0540	2,6000	0,0531	0,8900
21°	0,1000	0,1016	1,6000	0,1009	0,9000
23°	0,1000	0,1014	1,4000	0,1007	0,7000
25°	0,1000	0,1015	1,5000	0,1014	1,4000
27°	0,1000	0,1005	0,5000	0,1016	1,6000
29°	0,1000	0,1014	1,4000	0,1018	1,8000
31°	0,1000	0,1018	1,8000	0,1024	2,4000
33°	0,1000	0,1022	2,2000	0,1025	2,5000
35°	0,1000	0,1022	2,2000	0,1029	2,9000
37°	0,1000	0,1029	2,9000	0,1030	3,0000
39°	0,1000	0,1035	3,5000	0,1035	3,5000
41°	0,1000	0,1029	2,9000	0,1036	3,6000
43°	0,1000	0,1033	3,3000	0,1037	3,7000
45°	0,1000	0,1033	3,3000	0,1036	3,6000
47°	0,1000	0,1030	3,0000	0,1042	4,2000
49°	0,1000	0,1025	2,5000	0,1033	3,3000

Para os erros médio, médio quadrático e máximo, os resultados são apresentados pela Tabela 34. Assim, os menores valores obtidos para o erro médio e médio quadrático foram encontrados pela aplicação da interpolação B-spline com a utilização do pré-filtro

least-square. Para o erro máximo, o menor valor foi obtido com a aplicação da interpolação de Lagrange com a janela retangular. Uma representação dos subgrupos é dada pela Figura 53.

Tabela 33 – Resultados dos subgrupos harmônicos obtidos através da aplicação da interpolação B-spline, utilizando pré-filtros.

	Amplitude Desejada	Interp. B-spline Inv.				Interp. B-spline L.S.			
		Retangular		Hanning		Retangular		Hanning	
		Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)
1°	1	0,9775	2,2500	0,9487	5,1300	0,9499	5,0100	0,9426	5,7400
3°	0,3333	0,3311	0,6700	0,3335	0,0500	0,3132	6,0400	0,3340	0,2000
5°	0,2000	0,1987	0,6500	0,1997	0,1500	0,1887	5,6500	0,2010	0,5000
7°	0,1428	0,1421	0,5300	0,1430	0,1000	0,1382	3,2600	0,1426	0,1800
9°	0,1111	0,1115	0,3500	0,1112	0,0800	0,1078	2,9800	0,1108	0,2800
11°	0,0909	0,0918	0,9800	0,0910	0,1000	0,0869	4,4100	0,0909	0,0100
13°	0,0769	0,0782	1,6600	0,0768	0,1600	0,0722	6,1400	0,0775	0,7500
15°	0,0666	0,0680	2,0000	0,0670	0,5000	0,0643	3,5500	0,0670	0,5000
17°	0,0588	0,0598	1,6600	0,0587	0,2100	0,0583	0,8900	0,0586	0,3800
19°	0,0526	0,0532	1,0800	0,0526	0,0600	0,0513	2,5300	0,0529	0,5100
21°	0,1000	0,1000	0	0,0998	0,2000	0,0972	2,8000	0,1001	0,1000
23°	0,1000	0,1001	0,1000	0,0996	0,4000	0,0953	4,7000	0,1002	0,2000
25°	0,1000	0,0993	0,7000	0,0997	0,3000	0,0958	4,2000	0,0999	0,1000
27°	0,1000	0,0996	0,4000	0,1001	0,1000	0,0963	3,7000	0,0998	0,2000
29°	0,1000	0,0988	1,2000	0,0997	0,3000	0,0965	3,5000	0,1006	0,6000
31°	0,1000	0,0987	1,3000	0,0997	0,3000	0,0955	4,5000	0,1004	0,4000
33°	0,1000	0,0987	1,3000	0,0997	0,3000	0,0949	5,1000	0,0999	0,1000
35°	0,1000	0,0989	1,1000	0,0995	0,5000	0,0960	4,0000	0,0996	0,4000
37°	0,1000	0,0986	1,4000	0,1001	0,1000	0,0967	3,3000	0,1000	0
39°	0,1000	0,0986	1,4000	0,0996	0,4000	0,0965	3,5000	0,1000	0
41°	0,1000	0,0986	1,4000	0,0991	0,9000	0,0956	4,4000	0,1001	0,1000
43°	0,1000	0,0985	1,5000	0,0983	1,7000	0,0956	4,4000	0,0997	0,3000
45°	0,1000	0,0981	1,9000	0,0979	2,1000	0,0968	3,2000	0,1001	0,1000
47°	0,1000	0,0974	2,6000	0,0976	2,4000	0,0974	2,6000	0,1002	0,2000
49°	0,1000	0,0973	2,7000	0,0971	2,9000	0,0976	2,4000	0,0995	0,5000

Tabela 34 – Resultados dos subgrupos harmônicos.

		Erro Médio	Erro Quadrático	Erro Máximo
Interp. Lagrange	Retangular	2,1344	5,5340	3,5000
	Hanning	1,9028	5,9475	5,2500
Interp. B-spline Inv.	Retangular	1,2332	2,0182	2,7000
	Hanning	0,7776	1,9985	5,1300
Interp. B-spline LS	Retangular	3,8704	16,4140	6,1400
	Hanning	0,4940	1,4302	5,7400

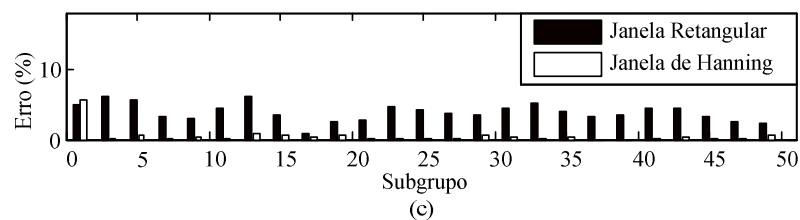
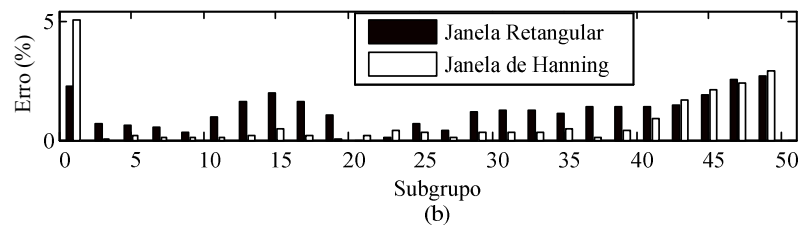
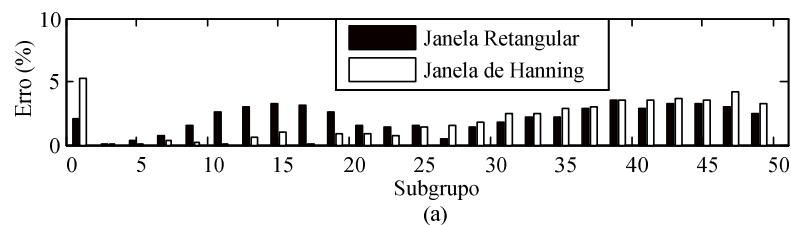


Figura 53 – Erro dos subgrupos harmônicos aplicando a interpolação (a) Lagrange, (b) B-spline com pré-filtro função inversa e (c) B-spline com pré-filtro função *least-square*.

Para os resultados obtidos pelos subgrupos inter-harmônicos, os mesmos são apresentados através da Tabela 35, Tabela 36 e Figura 54. Para a Tabela 35, onde são mostrados os valores obtidos no segundo subgrupo inter-harmônico, os erros assumem valores que podem ser consideráveis para o cálculo dos componentes. Assim, pelo fato

do componente inter-harmônico se encontrar próximo ao componente fundamental, os métodos utilizados não detectam o componente inter-harmônico.

Na Tabela 37, onde são mostrados os erros médio, médio quadrático e máximo, os menores erros são obtidos por diferentes métodos de interpolação. O menor erro médio é encontrado através da interpolação B-spline com o pré-filtro função inversa ou função *least-square*, utilizando a janela de Hanning. O menor erro médio quadrático e máximo são encontrados através da aplicação da interpolação B-spline com o pré-filtro *least-square* utilizando a janela retangular.

Esses erros, obtidos através dos subgrupos inter-harmônicos, não devem ser considerados de forma que seu menor valor estabeleça se o método é melhor ou não em relação aos outros. No caso do componente inter-harmônico se localizar próximo ao fundamental faz com que os métodos agrupem sua energia no subgrupo harmônico do componente fundamental. Isto faz ocasionar alto valor de erro. Para os outros métodos, por conterem maior espalhamento espectral em relação aos outros, o erro obtido é menor. Assim, convém analisar os esboço dos subgrupos inter-harmônicos a fim de visualizar o resultado obtido na aplicação de cada método.

Tabela 35 – Resultados dos subgrupos de inter-harmônicos obtidos utilizando a interpolação de Lagrange.

	Amplitude Desejada	Interpolação de Lagrange			
		Retangular		Hanning	
		Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)
2°	0,1	0,0265	73,5	0,0210	79,0

Tabela 36 – Resultados dos subgrupos de inter-harmônicos utilizando a interpolação B-spline.

	Amplitude Desejada	Interp. B-spline Inv.				Interp. B-spline L.S.			
		Retangular		Hanning		Retangular		Hanning	
		Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)
2°	0,1	0,0286	71,4	0,0207	79,3	0,0646	35,4	0,0208	79,2

Tabela 37 – Resultado dos erros dos subgrupos inter-harmônicos.

		Erro Médio	Erro Quadrático	Erro Máximo
Interp. Lagrange	Retangular	0,0120	0,0064	0,7350
	Hanning	0,0106	0,0073	0,7900
Interp. B-spline Inv.	Retangular	0,0139	0,0060	0,7140
	Hanning	0,0102	0,0074	0,7930
Interp. B-spline LS	Retangular	0,0123	0,0017	0,3540
	Hanning	0,0102	0,0074	0,7920

Um esboço desses subgrupos, considerando a interpolação de Lagrange e B-spline, é mostrado através da Figura 54. Através do esboço dos subgrupos percebe-se maiores espalhamentos ocasionados pela aplicação da janela retangular. Isso faz com que os erros obtidos pelo segundo subgrupo sejam menores para todos os métodos utilizando a janela retangular. No caso da interpolação B-spline com a aplicação do pré-filtro *least-square*, onde o espalhamento ocasionado pela janela retangular é maior, o erro chega a assumir 35%, valor menor que todos os outros métodos.

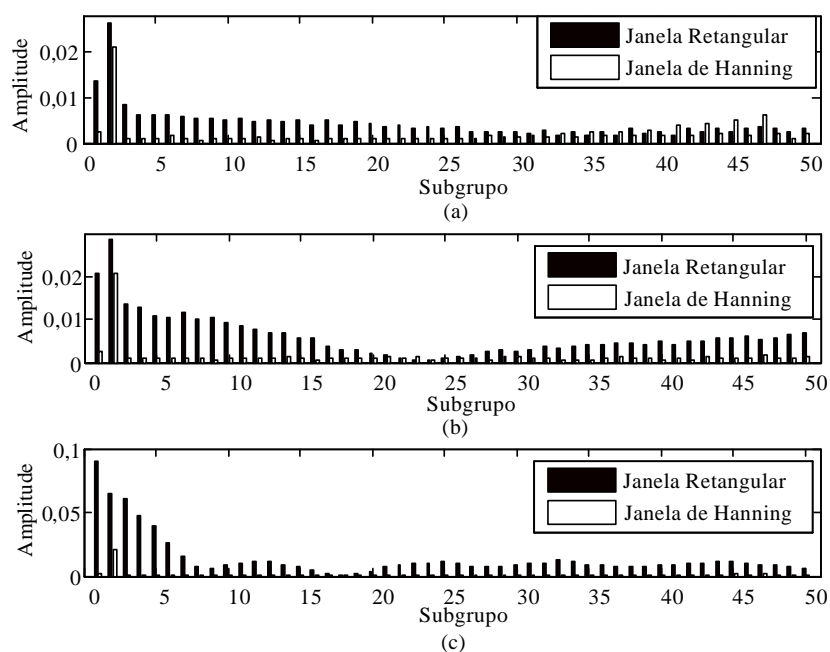


Figura 54 – Esboço dos subgrupos inter-harmônicos do processo de interpolação (a) Lagrange, (b) B-spline com pré-filtro função inversa e (c) B-spline com pré-filtro função *least-square*.

5.3.3. Resultado de Simulação para o Caso 3

Nesta subseção são mostrados os resultados obtidos através da aplicação dos métodos de interpolação no domínio do tempo com a presença de dois inter-harmônicos, com valores e frequências iguais a 41 e 79 Hz. Para os subgrupos harmônicos, os resultados são mostrados através da Tabela 38, Tabela 39, Tabela 40 e da Figura 55.

Para a Tabela 38 e Tabela 39, são apresentados os valores de subgrupos de cada método de interpolação e seus respectivos erros. Dessa forma, nota-se menores valores de erros obtidos pela interpolação de Lagrange, utilizando a janela de Hanning, para alguns subgrupos até o 17º subgrupo. Para a interpolação B-spline, esta por sua vez assume maiores valores de erros para os primeiros subgrupos e menores valores de erros para subgrupos de maior ordem, em relação à interpolação de Lagrange. Pode-se perceber que este detalhe é ainda mais considerável para a interpolação B-spline com o pré-filtro *least-square*, pois a utilização do pré-filtro com função inversa, assume erros maiores para os componentes de maior ordem, ao se comparar com o pré-filtro *least-square*.

Os erros médio, médio quadrático e máximo são apresentados pela Tabela 40. Assim, analisa-se melhores resultados obtidos com a utilização da janela de Hanning para todos os erros, em todos os métodos, exceto para o erro máximo utilizando a interpolação de Lagrange. Os menores erros são obtidos com o método de interpolação B-spline, utilizando o pré-filtro *least-square*, juntamente com a janela de Hanning. Na Figura 55 é mostrado o esboço dos erros dos subgrupos harmônicos. Assim, analisa-se maior espalhamento obtido através da utilização da janela retangular, considerando os três métodos analisados.

Para os subgrupos de inter-harmônicos, os resultados são mostrados através da Tabela 41, Tabela 42, Tabela 43 e Figura 56.

Tabela 38 – Resultados dos subgrupos harmônicos obtidos através da interpolação de Lagrange.

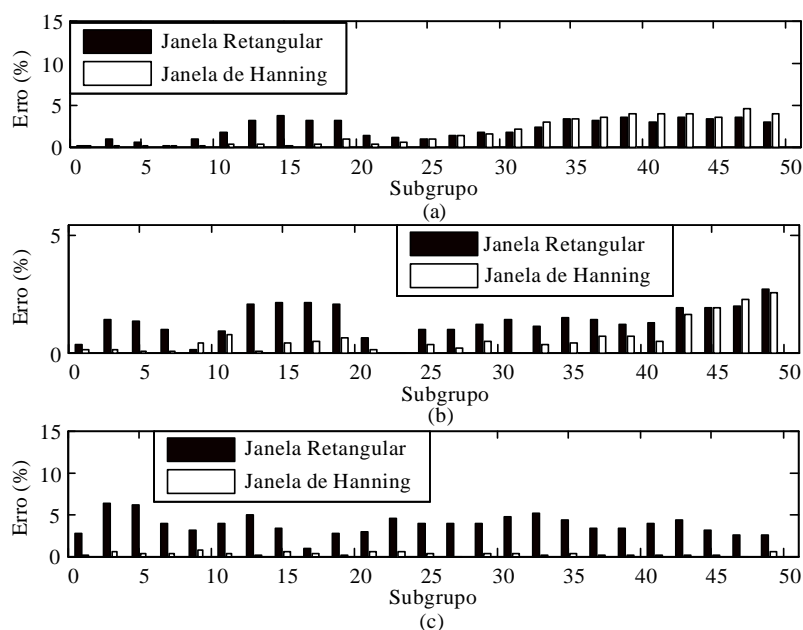
	Amplitude Desejada	Interpolação de Lagrange			
		Retangular		Hanning	
		Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)
1°	1	0,9986	0,1400	0,9999	0,0100
3°	0,3333	0,3306	0,8200	0,3329	0,1300
5°	0,2000	0,1988	0,6000	0,2002	0,1000
7°	0,1428	0,1427	0,1100	0,1428	0,0400
9°	0,1111	0,1121	0,8900	0,1111	0,0100
11°	0,0909	0,0925	1,7500	0,0911	0,2100
13°	0,0769	0,0793	3,0900	0,0767	0,2900
15°	0,0666	0,0691	3,6500	0,0667	0,0500
17°	0,0588	0,0606	3,0200	0,0590	0,3000
19°	0,0526	0,0543	3,1700	0,0531	0,8900
21°	0,1000	0,1014	1,4000	0,1003	0,3000
23°	0,1000	0,1011	1,1000	0,1005	0,5000
25°	0,1000	0,1009	0,9000	0,1010	1,0000
27°	0,1000	0,1014	1,4000	0,1014	1,4000
29°	0,1000	0,1017	1,7000	0,1016	1,6000
31°	0,1000	0,1018	1,8000	0,1021	2,1000
33°	0,1000	0,1023	2,3000	0,1030	3,0000
35°	0,1000	0,1032	3,2000	0,1032	3,2000
37°	0,1000	0,1031	3,1000	0,1035	3,5000
39°	0,1000	0,1035	3,5000	0,1039	3,9000
41°	0,1000	0,1029	2,9000	0,1038	3,8000
43°	0,1000	0,1035	3,5000	0,1038	3,8000
45°	0,1000	0,1032	3,2000	0,1034	3,4000
47°	0,1000	0,1035	3,5000	0,1044	4,4000
49°	0,1000	0,1029	2,9000	0,1038	3,8000

Tabela 39 – Resultados dos subgrupos harmônicos obtidos através da aplicação da interpolação B-spline, utilizando pré-filtros.

	Amplitude Desejada	Interp. B-spline Inv.				Interp. B-spline L.S.			
		Retangular		Hanning		Retangular		Hanning	
		Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)
1°	1	0,9971	0,2900	1,0008	0,0800	0,9724	2,7600	0,9980	0,2000
3°	0,3333	0,3287	1,3900	0,3330	0,1000	0,3120	6,4000	0,3347	0,4100
5°	0,2000	0,1973	1,3500	0,2001	0,0500	0,1878	6,1000	0,2005	0,2500
7°	0,1428	0,1415	0,9500	0,1429	0,0300	0,1372	3,9600	0,1432	0,2400
9°	0,1111	0,1110	0,1000	0,1107	0,3700	0,1076	3,1600	0,1104	0,6400
11°	0,0909	0,0917	0,8700	0,0902	0,7800	0,0873	3,9700	0,0912	0,3200
13°	0,0769	0,0785	2,0500	0,0769	0,0300	0,0732	4,8400	0,0768	0,1600
15°	0,0666	0,0681	2,1500	0,0664	0,4000	0,0644	3,4000	0,0670	0,5000
17°	0,0588	0,0601	2,1700	0,0591	0,4700	0,0583	0,8900	0,0586	0,3800
19°	0,0526	0,0537	2,0300	0,0523	0,6300	0,0512	2,7200	0,0527	0,1300
21°	0,1000	0,1006	0,6000	0,1001	0,1000	0,0971	2,9000	0,0996	0,4000
23°	0,1000	0,1000	0	0,1000	0	0,0955	4,5000	0,1006	0,6000
25°	0,1000	0,0990	1,0000	0,0997	0,3000	0,0960	4,0000	0,0997	0,3000
27°	0,1000	0,0990	1,0000	0,0998	0,2000	0,0961	3,9000	0,1000	0
29°	0,1000	0,0988	1,2000	0,1005	0,5000	0,0961	3,9000	0,1003	0,3000
31°	0,1000	0,0986	1,4000	0,1000	0	0,0953	4,7000	0,1004	0,4000
33°	0,1000	0,0989	1,1000	0,0997	0,3000	0,0948	5,2000	0,1001	0,1000
35°	0,1000	0,0985	1,5000	0,0996	0,4000	0,0956	4,4000	0,1003	0,3000
37°	0,1000	0,0986	1,4000	0,0993	0,7000	0,0967	3,3000	0,0999	0,1000
39°	0,1000	0,0988	1,2000	0,0993	0,7000	0,0966	3,4000	0,1002	0,2000
41°	0,1000	0,0987	1,3000	0,0995	0,5000	0,0961	3,9000	0,0999	0,1000
43°	0,1000	0,0981	1,9000	0,0984	1,6000	0,0956	4,4000	0,0999	0,1000
45°	0,1000	0,0981	1,9000	0,0981	1,9000	0,0969	3,1000	0,0999	0,1000
47°	0,1000	0,0980	2,0000	0,0977	2,3000	0,0974	2,6000	0,1000	0
49°	0,1000	0,0973	2,7000	0,0974	2,6000	0,0974	2,6000	0,0996	0,4000

Tabela 40 – Resultados dos subgrupos harmônicos.

		Erro Médio	Erro Quadrático	Erro Máximo
Interp. Lagrange	Retangular	2,1456	5,9191	3,6500
	Hanning	1,6692	5,2901	4,4000
Interp. B-spline Inv.	Retangular	1,3420	2,2393	2,7000
	Hanning	0,6016	0,8653	2,6000
Interp. B-spline LS	Retangular	3,8000	15,7640	6,4000
	Hanning	0,2652	0,0991	0,6400

Figura 55 – Erros dos subgrupos harmônicos utilizando a interpolação (a) Lagrange, (b) B-spline com ré-filtro função inversa e (c) B-spline com pré-filtro *least-square*.

Na Tabela 41 e Tabela 42 são mostrados os resultados obtidos do segundo subgrupo inter-harmônico. Em comparação com a aplicação das janelas em cada método, obtiveram-se melhores resultados com a utilização da janela de Hanning. Em comparação com os métodos de interpolação, os melhores resultados são obtidos com a aplicação da interpolação de Lagrange, assumindo os mesmos valores de erros para os

dois componentes. Quanto aos erros médio, médio quadrático e máximo (Tabela 43), a interpolação B-spline, utilizando o pré-filtro função inversa obteve menores valores de erro.

Tabela 41 – Resultados dos subgrupos de inter-harmônicos obtidos utilizando a interpolação de Lagrange.

	Amplitude Desejada	Interpolação de Lagrange			
		Retangular		Hanning	
		Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)
1°	0,1	0,0982	1,8	0,0998	0,2
2°	0,1	0,0968	3,2	0,1002	0,2

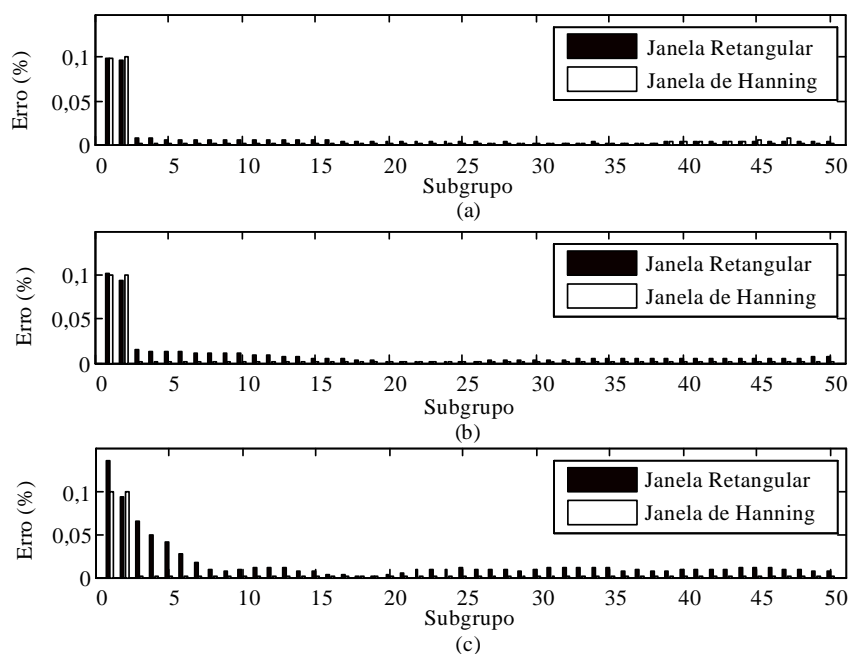
Tabela 42 – Resultados dos subgrupos de inter-harmônicos utilizando a interpolação B-spline.

	Amplitude Desejada	Interp. B-spline Inv.				Interp. B-spline L.S.			
		Retangular		Hanning		Retangular		Hanning	
		Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)
1°	0,1	0,1010	1,0	0,1003	0,3	0,1348	34,8	0,0994	0,6
2°	0,1	0,0947	15,3	0,0996	0,4	0,0923	7,7	0,0993	0,7

O esboço dos subgrupos dos inter-harmônicos é mostrado através da Figura 56. Assim, percebe-se o maior espalhamento espectral ocasionado pela interpolação B-spline com o pré-filtro *least-square*, aplicando a janela retangular. Para os demais métodos, o espalhamento espectral não se dá de maneira relevante como na interpolação citada anteriormente.

Tabela 43 – Resultado dos erros dos subgrupos inter-harmônicos.

		Erro Médio	Erro Quadrático	Erro Máximo
Interp. Lagrange	Retangular	0,0039	0,0000	0,0320
	Hanning	0,0013	0,0000	0,0066
Interp. B-spline Inv.	Retangular	0,0058	0,0001	0,0530
	Hanning	0,0008	0,0000	0,0040
Interp. B-spline LS	Retangular	0,0040	0,0016	0,0770
	Hanning	0,0010	0,0000	0,0070

Figura 56 – Subgrupos inter-harmônicos calculados através do processo de interpolação (a) Lagrange, (b) B-spline com pré-filtro função inversa e (c) B-spline com pré-filtro *least-square*.

Analisando os resultados obtidos dos subgrupos harmônicos e inter-harmônicos, percebem-se melhores resultados encontrados pela utilização da interpolação B-spline com o pré-filtro *least-square*. Em alguns casos, como o apresentado pelo caso 3, este método não assume valores de erro menores que os demais, porém a diferença pode ser desconsiderada em aplicações de detecção de componentes de algum sinal. Sendo assim, será apresentada a seguir uma comparação entre o método de interpolação B-spline com pré-filtro *least-square* no domínio do tempo, com o método de interpolação

no domínio da frequência. Essa comparação será realizada de forma a se comparar os métodos com o valor de frequência do sistema variante. Visto que a interpolação no domínio da frequência obtém melhores resultados para os erros dos subgrupos harmônicos e a interpolação B-spline com pré-filtro *least-square* demonstra melhores resultados na aplicação dos subgrupos inter-harmônicos.

5.4. Comparação dos métodos de interpolação no domínio da frequência com interpolação B-spline

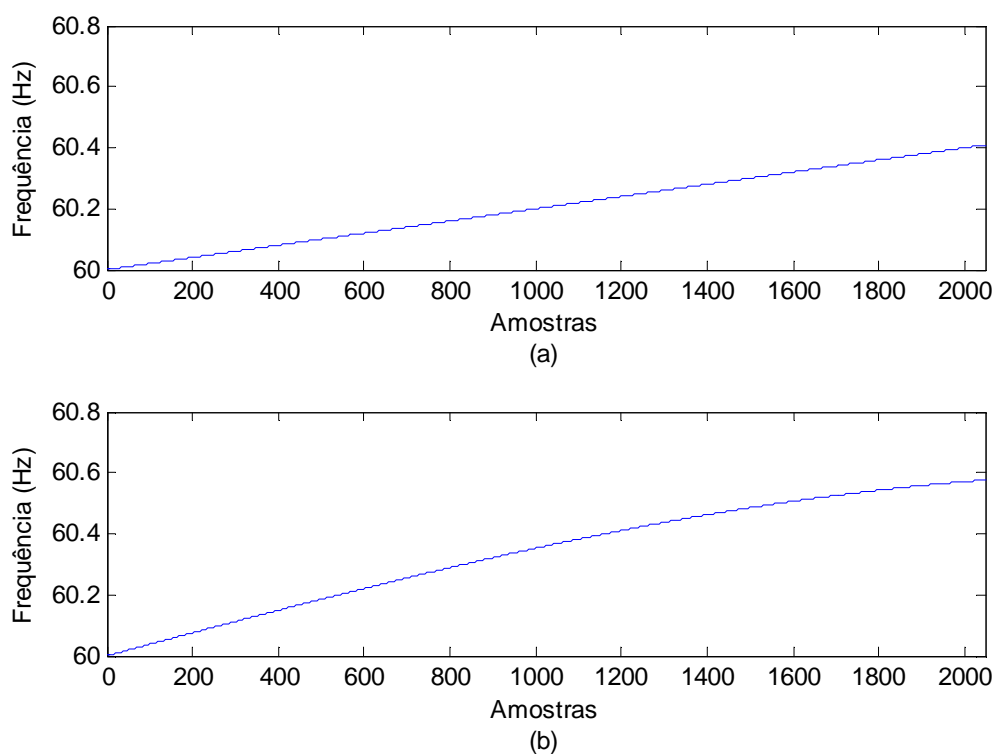


Figura 57 – Variação de frequência do componente fundamental, (a) rampa e (b) senoidal.

Para mostrar os resultados obtidos pela aplicação dos métodos de interpolação no domínio da frequência e B-spline, será considerado um sinal com frequência do componente fundamental igual a 60 Hz e uma variação nos valores de frequências como mostrado pela Figura 57(a) e (b). Assim, na Figura 57(a) é mostrado uma variação em forma de rampa, com valor inicialmente igual a 60 Hz e aumentando até atingir um valor de 60,41 Hz (caso 4). Na Figura 57(b) é mostrado uma variação da frequência em forma senoidal, onde a frequência se inicia em 60 Hz até atingir o valor de 60,58 Hz,

com uma variação no valor da frequência igual a 0,5 Hz (caso 5). Para a aplicação da interpolação no domínio do tempo, será utilizado um estimador de frequência como apresentado em (RIBEIRO, DUQUE, *et al.*, 2014).

5.4.1. Resultado de Simulação para o Caso 4

Primeiramente será mostrado os resultados obtidos a partir da frequência variando em forma de rampa. Portanto, o componente fundamental assume inicialmente o valor de frequência igual a 60 Hz e varia de forma crescente até atingir o valor de 60,41 Hz. Os resultados dos subgrupos harmônicos dos métodos de interpolação são mostrados através da Tabela 44, Tabela 45 e da Figura 58.

Analisando os valores de erros, percebe-se melhores resultados obtidos através da interpolação B-spline, utilizando a janela de Hanning. O esboço dos subgrupos é apresentado através da Figura 58. Outro fato importante a se destacar, é em relação à interpolação no domínio da frequência, utilizando a janela de Hanning. Este método, resulta em menores valores de erro médio, médio quadrático e máximo em relação à interpolação no domínio do tempo, utilizando a janela retangular.

Os resultados dos subgrupos inter-harmônicos são mostrados através da Tabela 46, Tabela 47 e da Figura 59. Analisando estes resultados percebe-se maior espalhamento ocasionado pela interpolação no domínio da frequência.

Na Tabela 46 são mostrados os valores de erro, obtidos através do terceiro subgrupo inter-harmônico. Analisando estes resultados, a interpolação B-spline resulta em menores valores de erro ao serem comparados com os resultados obtidos através da interpolação no domínio da frequência. Considerando as funções de janela, têm-se melhores resultados utilizando a janela de Hanning. Para a Tabela 47, a interpolação no domínio do tempo assume menores valores de erro, exceto para valor de erro máximo.

Tabela 44 – Resultado dos subgrupos harmônicos e seus respectivos erros.

	Amplitude Desejada	Interp. Freq.				Interp. B-spline L.S.			
		Retangular		Hanning		Retangular		Hanning	
		Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)
1°	1	1,0025	0,2500	0,9998	0,0180	0,9921	0,7947	0,9975	0,2479
3°	0,3333	0,3319	0,4270	0,3336	0,0800	0,3348	0,4378	0,3338	0,1378
5°	0,2000	0,1992	0,3950	0,1998	0,1050	0,2004	0,2004	0,2009	0,4358
7°	0,1428	0,1411	1,2020	0,1423	0,4180	0,1438	0,6329	0,1424	0,3348
9°	0,1111	0,1097	1,2520	0,1110	0,0730	0,1101	0,8912	0,1105	0,5137
11°	0,0909	0,0897	1,2761	0,0898	1,1870	0,0899	1,1073	0,0906	0,3542
13°	0,0769	0,0760	1,1610	0,0759	1,2819	0,0763	0,7572	0,0775	0,8085
15°	0,0666	0,0661	0,8470	0,0665	0,2770	0,0650	2,4841	0,0668	0,1294
17°	0,0588	0,0587	0,1301	0,0584	0,6554	0,0561	4,6108	0,0584	0,6518
19°	0,0526	0,0531	0,9052	0,0521	1,0328	0,0503	4,3636	0,0526	0,1333
21°	0,1000	0,1008	0,7800	0,0986	1,4020	0,0930	6,9510	0,1003	0,2907
23°	0,1000	0,1019	1,8700	0,0977	2,2680	0,0920	7,9741	0,0992	0,7698
25°	0,1000	0,0345	65,5420	0,0975	2,5330	0,0910	8,9861	0,1001	0,1417
27°	0,1000	0,0383	61,7150	0,0977	2,2960	0,0902	9,8180	0,0995	0,4680
29°	0,1000	0,0414	58,6090	0,0969	3,1490	0,0903	9,7141	0,0999	0,1425
31°	0,1000	0,0422	57,7940	0,0966	3,3540	0,0901	9,9315	0,0996	0,3868
33°	0,1000	0,0425	57,5360	0,0962	3,7610	0,0890	11,0433	0,0988	1,2467
35°	0,1000	0,0398	60,2110	0,0960	3,9770	0,0902	9,7839	0,0994	0,5582
37°	0,1000	0,0365	63,4760	0,0955	4,4630	0,0903	9,6867	0,0998	0,2456
39°	0,1000	0,0318	68,2150	0,0956	4,4230	0,0904	9,6354	0,0990	1,0107
41°	0,1000	0,0273	72,7070	0,0950	4,9670	0,0907	9,2583	0,0987	1,2516
43°	0,1000	0,0245	75,4950	0,0943	5,6750	0,0915	8,5083	0,0987	1,3098
45°	0,1000	0,0230	76,9760	0,0932	6,7840	0,0923	7,7331	0,0985	1,4741
47°	0,1000	0,0237	76,2670	0,0921	7,8600	0,0923	7,6689	0,0988	1,1802
49°	0,1000	0,0099	90,0849	0,0905	9,4710	0,0940	6,0039	0,0982	1,7534

Tabela 45 – Resultado dos erros médio, médio quadrático e máximo dos subgrupos harmônicos.

	Separação dos componentes através de Janelas		Interpolação B-spline L.S.	
	Retangular	Hanning	Retangular	Hanning
Erro Médio (%)	35,8	2,8604	5,9591	0,6391
Erro Médio Quad.(%)	245,41	14,7440	49,9800	0,6336
Erro Máximo (%)	90,1	9,4710	11,0430	1,7534

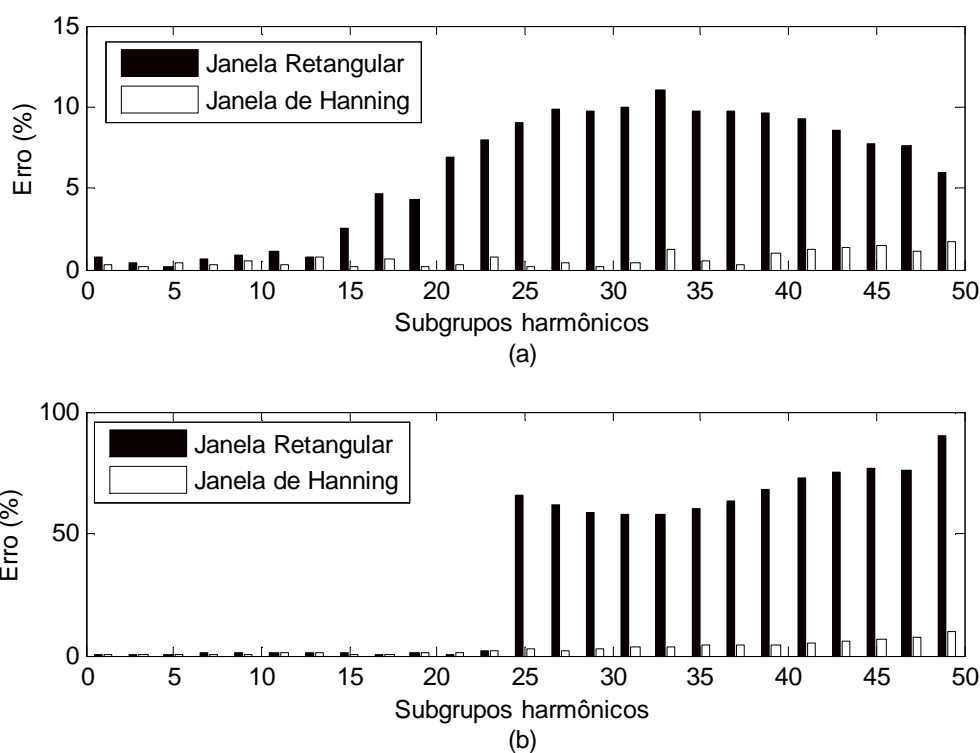


Figura 58 – Representação dos subgrupos harmônicos, (a) interpolação B-spline e (b) interpolação no domínio da frequência.

Assim, como o processo de interpolação na frequência é estabelecido de forma *off-line*, a dessincronização do sinal faz com que os erros neste processo sejam maiores. Já no caso da interpolação B-spline, o processo é realizado de forma *on-line*, proporcionando um sinal síncrono para a FFT e consequentemente, encontra-se melhores resultados em relação ao processo realizado *off-line*.

Tabela 46 – Resultados obtidos do segundo subgrupo inter-harmônico.

	Amplitude Desejada	Separação dos componentes através de Janelas				Interpolação B-spline L.S.			
		Retangular		Hanning		Retangular		Hanning	
		Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)
2°	0,1	0,0721	27,9	0,0994	0,6	0,1022	2,2	0,0999	0,1

Tabela 47 – Resultados dos erros médio, médio quadrático e máximo dos subgrupos de inter-harmônicos.

	Separação dos componentes através de Janelas		Interpolação B-spline L.S.	
	Retangular	Hanning	Retangular	Hanning
Erro Médio (%)	0,0385	0,0058	0,0216	0,0051
Erro Médio Quad. (%)	0,0035	0,0001	0,0006	0,0001
Erro Máximo (%)	0,2820	0,0148	0,0410	0,0200

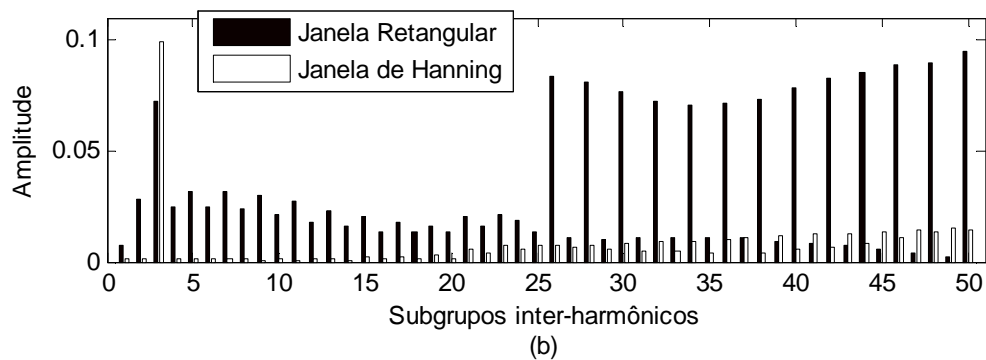
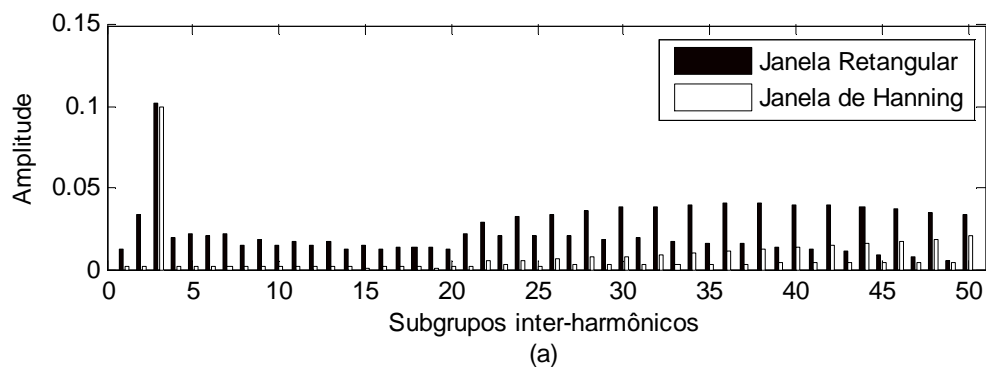


Figura 59 – Representação dos subgrupos de inter-harmônicos, (a) Interpolação B-spline e (b) interpolação no domínio da frequência.

Além da variação em forma de rampa, também será apresentado os resultados obtidos pelos dois métodos de interpolação com a frequência do componente fundamental variando em forma de senoide. Estes resultados serão apresentados na próxima subseção.

5.4.2. Resultado de Simulação para o Caso 5

Outra consideração a ser feita é em relação ao sinal sofrer uma variação no valor da frequência fundamental em forma senoidal. Os resultados para os subgrupos harmônicos são mostrados através da Tabela 48, Tabela 49 e da Figura 60.

Através dos resultados obtidos pelo processo de interpolação no domínio da frequência, mostrado através da Tabela 48, nota-se valores de erro menores com a utilização da interpolação no domínio do tempo e a janela de Hanning. Porém, para o componente fundamental, a interpolação no domínio da frequência obteve menores valores ao se comparar com a interpolação no domínio do tempo.

Em relação aos valores obtidos para os erros médio, médio quadrático e máximo, os menores valores também foram obtidos através da interpolação B-spline com a utilização da janela de Hanning. Através desses resultados pode-se perceber altos valores de erros obtidos através da interpolação no domínio da frequência e no domínio do tempo utilizando a janela retangular. Isso pelo fato desses métodos possuírem maior espalhamento espectral. O esboço dos erros dos subgrupos harmônicos são mostrados através da Figura 60.

Tabela 48 – Resultados dos subgrupos harmônicos.

	Amplitude Desejada	Interp. Freq.				Interp. B-spline L.S.			
		Retangular		Hanning		Retangular		Hanning	
		Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)
1°	1	1,0020	0,2000	0,9997	0,0310	0,9935	0,6512	0,9977	0,2262
3°	0,3333	0,3302	0,9520	0,3331	0,0610	0,3334	0,0214	0,3339	0,1728
5°	0,2000	0,1988	0,5950	0,1998	0,1000	0,2010	0,4968	0,2006	0,2854
7°	0,1428	0,1410	1,3070	0,1422	0,4390	0,1441	0,8838	0,1424	0,2939
9°	0,1111	0,1101	0,9100	0,1107	0,4150	0,1104	0,6092	0,1105	0,5555
11°	0,0909	0,0910	0,0956	0,0904	0,5457	0,0905	0,4057	0,0907	0,2608
13°	0,0769	0,0798	3,7894	0,0757	1,6290	0,0765	0,5370	0,0770	0,0651
15°	0,0666	0,0682	2,3555	0,0651	2,2960	0,0647	2,9714	0,0670	0,4281
17°	0,0588	0,0582	1,0022	0,0575	2,1905	0,0569	3,3004	0,0592	0,6735
19°	0,0526	0,0495	5,8892	0,0512	2,6972	0,0503	4,4615	0,0525	0,1949
21°	0,1000	0,0924	7,6240	0,0971	2,8520	0,0937	6,3161	0,0998	0,2332
23°	0,1000	0,0908	9,2320	0,0964	3,5710	0,0927	7,3089	0,0994	0,5935
25°	0,1000	0,0922	7,8090	0,0954	4,5700	0,0920	8,0456	0,0995	0,5124
27°	0,1000	0,0958	4,1940	0,0936	6,3930	0,0905	9,5016	0,1001	0,0919
29°	0,1000	0,0960	4,0210	0,0932	6,7840	0,0907	9,2954	0,0998	0,2404
31°	0,1000	0,0922	7,7930	0,0937	6,2820	0,0895	10,5318	0,0996	0,3596
33°	0,1000	0,0861	13,8640	0,0926	7,4180	0,0887	11,2526	0,0995	0,4636
35°	0,1000	0,0809	19,1000	0,0926	7,3980	0,0886	11,3747	0,0994	0,6091
37°	0,1000	0,0778	22,1650	0,0911	8,8780	0,0886	11,3605	0,0993	0,6653
39°	0,1000	0,0787	21,3380	0,0898	10,2460	0,0880	11,9949	0,0989	1,1278
41°	0,1000	0,0839	16,1390	0,0881	11,9210	0,0867	13,3470	0,0988	1,2266
43°	0,1000	0,0882	11,8330	0,0867	13,2580	0,0866	13,3649	0,0983	1,7305
45°	0,1000	0,0883	11,7000	0,0873	12,7450	0,0865	13,5065	0,0995	0,5354
47°	0,1000	0,0844	15,5590	0,0868	13,2470	0,0860	13,9947	0,0991	0,9445
49°	0,1000	0,0772	22,7690	0,0861	13,8870	0,0864	13,6353	0,0997	0,3275

Tabela 49 – Resultados dos erros médio, médio quadrático e máximo dos subgrupos harmônicos.

	Interp. Freq.		Interp. B-spline L.S.	
	Retangular	Hanning	Retangular	Hanning
Erro Médio (%)	8,4894	5,5942	7,1668	0,5127
Erro Médio Quad.(%)	126,3900	53,2400	77,4980	0,4102
Erro Máximo (%)	22,7690	13,8870	13,9950	1,7305

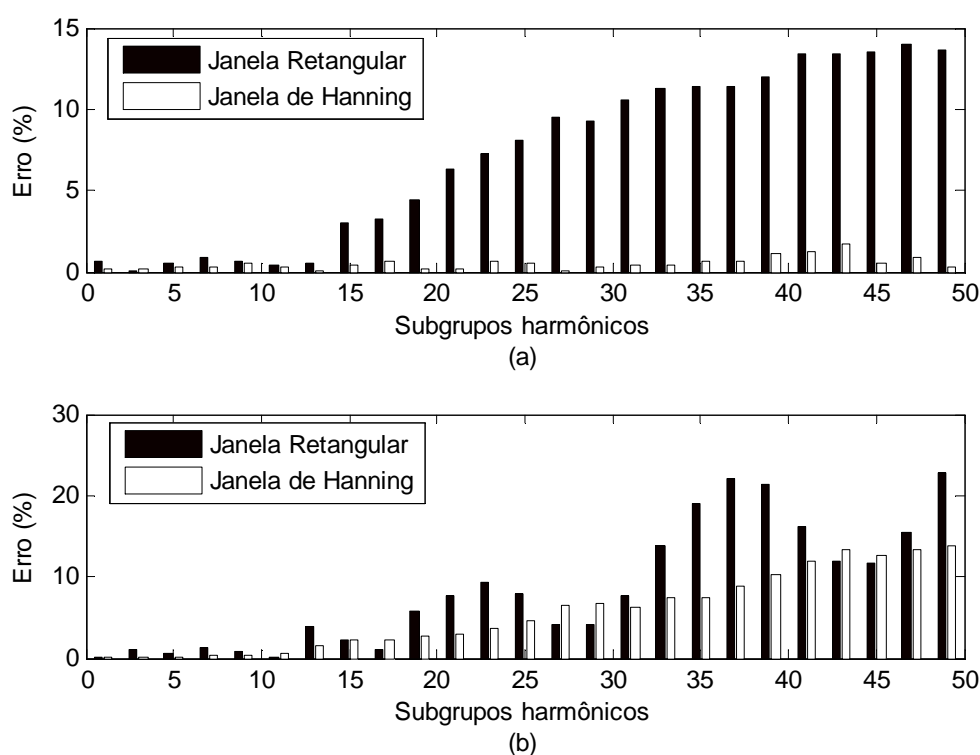


Figura 60 – Resultados dos subgrupos harmônicos, (a) B-spline e (b) interpolação na frequência.

Para os subgrupos inter-harmônicos, os resultados são mostrados na Tabela 50, Tabela 51 e na Figura 61. Analisando estes resultados, onde há a presença do componente inter-harmônicos, percebe-se valores menores obtidos com a utilização da interpolação B-spline aplicando a janela de Hanning (Tabela 50). Para os erros médio, médio quadrático e máximo, os menores valores foram obtidos utilizando a interpolação B-

spline com a janela de Hanning. O esboço desses subgrupos são apresentados através da Figura 61.

Tabela 50 – Resultados do segundo subgrupo inter-harmônico.

	Amplitude Desejada	Separação dos componentes através de Janelas				Interpolação B-spline L.S.			
		Retangular		Hanning		Retangular		Hanning	
		Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)	Amp.	Er. (%)
2°	0,1	0,0684	31,6	0,0995	0,5	0,1023	2,3	0,1003	0,3

Tabela 51 – Resultados dos erros médio, médio quadrático e máximo dos subgrupos inter-harmônicos.

	Interp. Freq.		Interp. B-spline L.S.	
	Retangular	Hanning	Retangular	Hanning
Erro Médio (%)	0,0319	0,0088	0,0227	0,0050
Erro Médio Quad. (%)	0,0026	0,0001	0,0007	0,0000
Erro Máximo (%)	0,3120	0,0221	0,0464	0,0178

Na Figura 61(a) é notado um maior espalhamento espectral por parte da aplicação da janela retangular, em ambos os métodos de interpolação. Em relação aos processos de interpolação, a interpolação no domínio da frequência possui maior espalhamento em relação a interpolação B-spline.

Portanto, após as análises, percebe-se menores valores de erro para a interpolação na frequência, quando se é comparada com a interpolação B-spline para os casos 1 e 3. Para o caso 2, onde se encontra um componente inter-harmônico próximo ao fundamental, a interpolação B-spline assume menores valores para o erro médio e médio quadrático. Nos casos 4 e 5, com a frequência variando em forma de rampa e senóide, a interpolação B-spline também obteve melhores resultados.

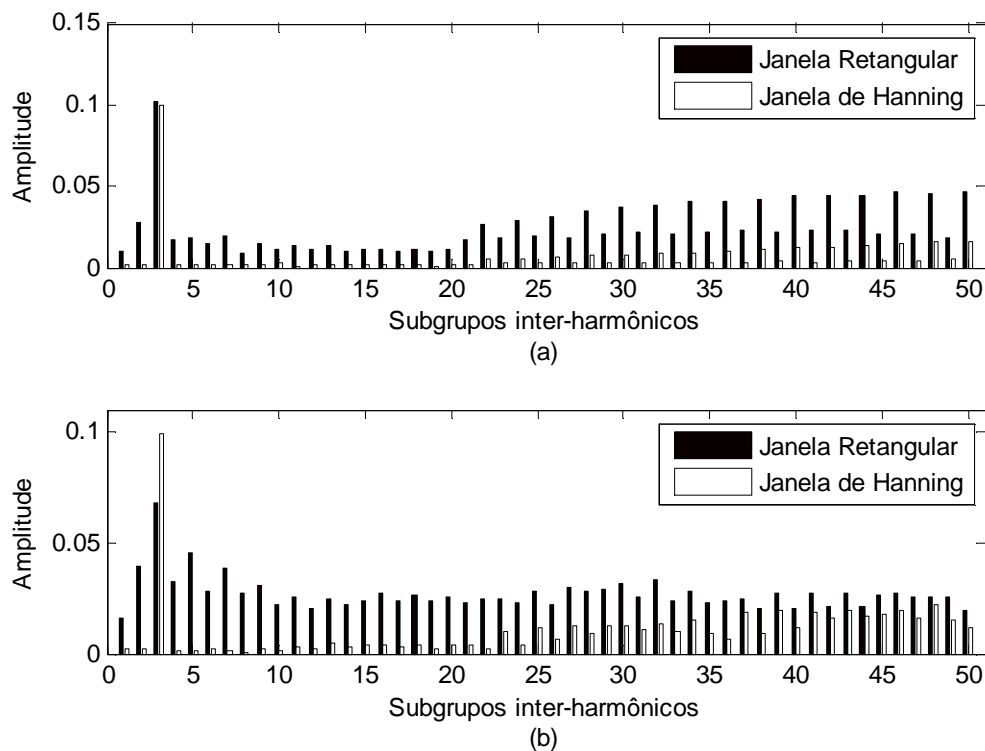


Figura 61 – Resultados dos subgrupos inter-harmônicos, (a) B-spline e (b) interpolação na frequência.

5.5. Conclusões do Capítulo

Com a aplicação dos métodos de interpolação no domínio da frequência, percebe-se melhores resultados obtidos através da aplicação da janela de Hanning em relação à janela retangular. Em relação à utilização da separação dos componentes no domínio da frequência, os componentes inter-harmônicos possuem menores erros quando comparados com os valores obtidos sem a utilização da separação dos componentes.

Para a aplicação dos métodos de interpolação no domínio do tempo, o método B-spline com o pré-filtro *least-square*, utilizando a janela de Hanning, obteve melhores resultados em relação à interpolação B-spline com pré-filtro função inversa e em relação ao método de Lagrange.

Comparando os métodos de interpolação no domínio da frequência com a interpolação no domínio do tempo, utilizando a função B-spline com pré-filtro *least-square*, a

interpolação no domínio da frequência obteve melhores resultados para os subgrupos harmônicos, quando se considera o desvio da frequência constante. Para os subgrupos inter-harmônicos, a interpolação B-spline com o pré-filtro *least-square* obteve menores erros. Com a aplicação da frequência variando em forma de rampa ou em forma senoidal, a interpolação no domínio do tempo resultou em menores valores de erro tanto para os subgrupos harmônicos, como para os subgrupos inter-harmônicos. Isso, comparando os valores de erro médio, médio quadrático e máximo

Em relação à presença de inter-harmônicos, quando este se localiza fora do lóbulo central, de modo que a energia do mesmo não interfira ou possa ser desconsiderada no cálculo dos componentes harmônicos, a aplicação dos subgrupos harmônicos consegue detectá-lo. Porém, quando é utilizado um componente próximo ao componente fundamental, com frequência de 62,5 Hz, a aplicação dos subgrupos não consegue englobar a energia dos componentes inter-harmônicos.

6. CONCLUSÕES FINAIS

Neste trabalho foi apresentado o cálculo de componentes contidos no sinal da rede elétrica, utilizando algumas técnicas baseadas na norma IEC. Assim, utilizou-se a FFT para a transformação do sinal no domínio do tempo para o domínio da frequência, a aplicação do processo de interpolação e o método de grupos baseado na própria norma da IEC. Sendo que para todos os métodos, é utilizada a aplicação das janelas retangular e de Hanning.

Primeiramente, foi descrito o algoritmo da FFT, que é uma ferramenta muito utilizada para transformar o sinal no domínio do tempo para o domínio da frequência. Assim, percebe-se que a utilização da FFT em sinais com a presença de inter-harmônicos ou sinais assíncronos, resulta no que se denomina espalhamento espectral. Para isso, alguns métodos são empregados.

A primeira abordagem descrita foi a aplicação de grupos e subgrupos definidos pela norma IEC, com o objetivo de agrupar as energias dos componentes harmônicos e inter-harmônicos. Verificou-se que esta técnica não possui bom desempenho em sinais com componentes inter-harmônicos próximos aos harmônicos e com sinais amostrados de forma assíncrona. Isso faz com que apareçam componentes que, na verdade, não existem no sinal. Assim, são aplicados métodos de interpolação com o objetivo de estabelecer melhores resultados no cálculo dos componentes harmônicos e inter-harmônicos, no caso de um sinal com amostragem assíncrona.

Com a aplicação da interpolação no domínio da frequência, os menores erros obtidos foram através da utilização da janela de Hanning, com a aplicação da separação dos componentes no domínio da frequência. A separação dos componentes fez com que a energia dos harmônicos não influenciassem no cálculo dos componentes inter-harmônicos, proporcionando menores valores de erro, obtidos no cálculo dos componentes.

Aplicando-se os métodos de interpolação no domínio do tempo, os resultados obtidos com a interpolação B-spline foram melhores quando comparados com a interpolação de

Lagrange. Em relação à interpolação B-spline, a utilização do pré-filtro *least-square* obteve menores erros ao se comparar com a utilização da interpolação B-spline utilizando o pré-filtro com a função B-spline inversa. Em comparação com as janelas retangular e de Hanning, aplicadas aos métodos de interpolação, a janela de Hanning obteve menores valores de erro.

Também foram comparados os resultados obtidos através da interpolação no domínio da frequência e no domínio do tempo. Assim, para um desvio de frequência com valor constante, a interpolação no domínio da frequência obteve menores erros para os valores dos subgrupos harmônicos. Para os subgrupos inter-harmônicos, o processo de interpolação B-spline utilizando o pré-filtro *least-square*, obteve melhor desempenho. Em relação à variação do valor de frequência, a interpolação B-spline resulta em melhor desempenho ao se comparar com a interpolação no domínio da frequência. Para essa comparação, foram utilizados os erros médio, médio quadrático e máximo.

7. TRABALHOS FUTUROS

Como sugestões para possíveis trabalhos futuros, baseado neste trabalho, são sugeridos:

1. Estudo para a detecção de componentes inter-harmônicas que estejam próximas aos componentes harmônicos.
2. Definir um estimador de frequência de forma a proporcionar melhores resultados na presença de harmônicos e inter-harmônicos.
3. Implementação do sistema de interpolação no tempo em tempo real, utilizando arquitetura FPGA.

8. BIBLIOGRAFIA

61000-4-7, I. S. Testing and measurement techniques - General guide on harmonics and interharmonics measurement and instrumentation, for power supply systems and equipment connected thereto, 2002.

BHARATI, N.; KHOSLA, A.; SOOD, N. Image reconstruction using cubic B-spline interpolation. **India Conference (INDICON), 2011 Annual IEEE**, v. 1, p. 16-18, dezembro de 2011.

BLU, T.; UNSER, M. Quantitative Fourier Analysis of Approximation Techniques: Part I - Interpolators and Projectors. **Transactions on Signal Processing, IEEE**, v. 47, no.10, p. 2783-2795, outubro de 1999.

BORKOWSKI, D.; BIEN, A. Improvement of Accuracy of Power System Spectral Analysis by Coherent Resampling. **Transactions on Power Delivery, IEEE**, v. 24, no.3, p. 1004-1013, Julho de 2009.

CHANG, G. W. et al. Measuring power system harmonics and interharmonics by an improved fast Fourier transform-based algorithm. **Generation, Transmission & Distribution, IET**, v. 2, n° 2, p. 193-201, 2008.

CHANG, G. W.; CHEN, C.-I. An Accurate Time-Domain Procedure for Harmonics and Interharmonics Detection. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 25, n° 3, p. 1787-1795, Julho 2010.

CHANG, G. W.; CHEN, C.-I. Measurement Techniques for Stationary and Time-Varying Harmonics. **IEE Power and Energy Society General Meeting**, p. 1-5, Julho 2010.

COOLEY, J. W.; TUKEY, J. W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. **Math, Computation**, v. 19, p. 297-301, 1965.

ELNAHDY, A.; LUI, Y. F. Accurate Frequency Tracking for Subharmonics and Interharmonics in Power Systems. **Electric Power Components and Systems**, v. 40, n° 59, p. 1-8, fevereiro de 2012.

FERRER-ARNAU, L. et al. Efficient cubic spline interpolation implemented with FIR filters. **Internacional Journal of Computer Information Systems and Industrial Management Applications.**, v. 5, p. 098-105, 2013.

FERRERO, A.; SALICONE, S.; TOSCANI, S. A fast, simplified frequency-domain interpolation method for the evaluation of the frequency and amplitude of spectral components. **Instrumentation and measurement, IEEE Transactions**, v. 60, p. 1579-1587, maio de 2011.

GALLO, D.; LANGELLA, R.; TESTA, A. On the processing of harmonics and interharmonics in electrical power systems. **Power Engineering Society Winter Meeting**, v. 3, p. 1581-1586, janeiro 2000.

GALLO, D.; LANGELLA, R.; TESTA, A. Desynchronized Processing Technique for Harmonic and Interharmonic Analysis. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 19, n° 3, p. 993-1001, julho 2004.

LI, C.; XU, W.; TAYJASANANT, T. Interharmonics: basic concepts and techniques for their detection and measurement. **Elsevier Science**, p. 39-48, 2003.

LIM, T. J.; MACLEOD, M. D. On-Line Interpolation Using Spline Functions. **IEEE Signal Processing Letters**, v. 3, p. 144-146, 1996.

LIU, Z.; HIMMEL, J.; BONFIG, K. W. Improved Processing of Harmonics and Interharmonics by Time-Domain Averaging. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 20, n° 4, p. 2370-2380, outubro 2005.

MARPLE, L. **Digital Spectral Analysis with Applications**. [S.l.]: Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1987.

MITRA, S. K. **Digital Signal Processing, A Computer-Based Approach**. 3ª Edição. ed. Santa Barbara: McGraw-Hill, 2006.

MOLER, C. Mathworks. **Numerical Computing with MatLab**, 2004. Disponível em: <<http://www.mathworks.com/moler/chapters.html>>. Acesso em: 06 de agosto de 2013.

PETRINOVIC, D. Causal Cubic Splines: Formulations, Interpolation Properties and Implementations. **Transactions on Signal Processing, IEEE**, v. 56, no.11, p. 5442-5453, novembro de 2008.

RIBEIRO, P. F. et al. **Power Systems Signal Processing for Smart Grids**. 1ª edição. ed. [S.I.]: Wiley, 2014.

SCHOENBERG, I. J. Contribution to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. **Quart. Appl. Math**, v. 4, p. 45-99, 112-141, 1946.

STOICA, P.; MOSES, R. **Spectral Analysis of Sinals**. New Jersey: Pearson Education, 2005.

TARASIUK, T. Comparative Study of Various Methods of DFT Calculation in the Wake of IEC Standard 61000-4-7. **IEEE Transaction on Instrumentation and Measurement**, v. 58, nº 10, p. 3666 - 3677, outubro de 2009.

TESTA, A. et al. Interharmonics: Theory and Modeling. **IEEE Transaction on Power Delivery**, v. 22, p. 2335-2348, outubro de 2007.

TESTA, A.; GALLO, D.; LANGELLA, R. On the Processing of Harmonics and Interharmonics: Using Hanning Window in Standard Framework. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 19, nº 1, p. 28-34, Janeiro 2004.

UNSER, M. Splines: A Perfect Fit for Signal and Image Processing. **Signal Processing Magazine, IEEE**, v. 16, no.6, p. 22-38, novembro de 1999.

UNSER, M.; ALDROUBI, A.; EDEN, . M. B-Spline Signal Processing: Part I-Theory. **Transactions on Signal Processing, IEEE**, v. 16, no.2, p. 821-833, fevereiro de 1993.

VALENZUELA, J.; PONTT, J. Real-Time Inteharmonics Detection and Measurement Based on FFT Algoorithm. **Applied Electronics**, p. 259-264, setembro 2009.

ZHANG, Q. et al. A precise and Adaptative Algoritm for Interharmonics Measurement Based on Iterative DFT. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 23, nº 4, p. 1728-1735, outubro 2008.

APÊNDICE A – PRODUÇÃO BIBLIOGRÁFICA

A.1 ARTIGOS EM CONGRESSOS INTERNACIONAIS

MONTEIRO, Henrique Luis Moreira; Silva, Leandro R. M.; Duque, Carlos A.; Filho, Luciano M. de A.; Ribeiro, Paulo F., Comparison of interpolation methods in time and frequency domain for the estimation of harmonics and interharmonics according to IEC standard.

Abstract — The fast Fourier transform (FFT) is the most commonly used technique in power systems signals analysis. However, it is known that if the signal is not synchronized or in the presence of interharmonics, the spectral leakage may occur. To overcome this issue, several techniques are found in literature. The present paper will show a comparison between results of calculating the IEC 61000-4-7 harmonics and interharmonics groups and subgroups using two of these techniques, one that uses frequency domain interpolation and other that uses time domain interpolation.