UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA - UFJF
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Física

Tese de Doutorado

As Ambiguidades de Escolha de Calibre e de Parametrização da Métrica em Gravitação Quântica

Jeferson Dias Gonçalves

Juiz de Fora - MG
2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Tese de doutoramento

As Ambiguidades de Escolha de Calibre e de Parametrização da Métrica em Gravitação Quântica

Autor: Jeferson Dias Gonçalves

Orientador: Ilya Lvovich Shapiro

Co-orientador: Tibério de Paula Netto

Tese de doutoramento submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Física.

Juiz de Fora - MG, Brasil
2018

Agradecimentos

Criar uma lista de agradecimentos é sempre uma tarefa árdua, cujo resultado raramente reflete a realidade de forma justa. Mesmo assim, seguem abaixo alguns nomes de pessoas que fizeram parte da minha vida durante o doutorado e as quais eu não poderia deixar de mencionar.

Sou grato:

Ao *prof. Ilya L. Shapiro*, por sua orientação, pelas disciplinas ministradas, pela sugestão e auxílio na resolução do problema aqui apresentado, bem como, pelas correções no texto desta tese.

Ao *Dr. Tibério de Paula Netto*, pela co-orientação, por diversos esclarecimentos técnicos e pela colaboração no artigo: *Gauge and parametrization ambiguity in quantum gravity.*

Ao *Prof. Gil de Oliveira Neto*, pelas frutíferas disciplinas ministradas, a saber, *Mecânica Quântica IV* e *Relatividade Geral Quântica*, as quais, além de complementarem a minha formação também me motivaram (um pouco mais) na contínua busca de tornar-me um educador melhor.

Ao *Prof. Virgílio de Carvalho dos Anjos*, pela sua constante preocupação comigo e com minha família.

Ao *Prof. Wallon Nogueira*, pela amizade e pelo profissionalismo ao conduzir as equipes de tutoria da disciplina de Física 2, das quais fiz parte.

Ao senhor *Domingos Souza de Oliveira Lopes*, nosso secretário da pós-graduação, por sua extrema eficiência e constante disposição. Agradeço pelos inúmeros auxílios a mim prestados.

À *Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior* (CAPES) pelo suporte financeiro ao longo destes quatro anos.

Ao *Departamento de Física* da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), por fornecer a estrutura necessária para a realização do meu doutorado.

Ao *Felipe Pedrosa*, pela amizade, pelas longas conversas sobre Física e Matemática (sempre bem humoradas), bem como pelas muitas horas de questionamentos e trabalho conjunto ao longo das disciplinas do Prof. Gil.

Ao *Cleber Abrahão*, um ser humano do bem, do qual tive a honra de me tornar amigo. Agradeço também por todo material técnico que me concedeu acesso.

Ao *Sebastião Mauro Filho*, pela amizade, pelas inúmeras conversas e por esclarecimentos em questões técnicas. Tua independência de pensamento é uma inspiração.

Ao *Fillipe Salles*, pela amizade, pela breve colaboração (que infelizmente, por motivos de força maior, não se concretizou em artigo) e pelas notas de aula emprestadas.

À *Ilza Tenório*, por sua amizade e pelo apoio no período final deste trabalho.

À *Jupira Fernandes (Dona Ju)*, por ter sido uma grande amiga, uma avó para o Miguel, e uma mãe para Angelica e para mim. Obrigado por toda a ajuda fornecida em nossa passagem por Juiz de Fora.

Ao *Seu Fabiano*, um ser humano de luz, que tive o grande privilégio de encontrar em terras mineiras. Obrigado por todo carinho, conversas e auxílios.

Diversas outras pessoas foram importantes na minha estadia na UFJF, gostaria de citar alguns poucos nomes, já me desculpando pela inevitável omissão de muitos outros: Vahid, Simpliciano, Thiago (Moralles), Fabrício, Poliane, Laysa, Maxwel, Josiel, Rodrigo (Rodrigues), Rafael (Nunes). A todos, obrigado.

Agradeço à minha família:

Ao meu filho, *Miguel Dominique* que, embora ainda seja muito pequeno para compreender, foi o porto seguro para o qual me direcionei todas as vezes que precisei renovar minhas forças. Te amo filho, tuas risadas e teus carinhos me transformaram em alguém mais sereno. Tu és a minha motivação maior para seguir em frente.

À minha esposa, *Angelica Christine*, pelo companheirismo e constante encorajamento durante a execução deste trabalho. Se antes eu já a admirava por toda a sua inteligência, força e indiscutível beleza, hoje, depois de a ter conhecido como mãe, sou seu completo fã. Obrigado por ser esta mãezona sempre presente e preocupada com o nosso filho. Te amo, preta!

Aos meus pais: *Claudio Ireno*, por ter sido um trabalhador incansável, pela sua

integridade e seu amor a vida e a nós. Sinto tua falta pai! *Neiva Regina*, por ser a nossa fortaleza, pelo seu amor incondicional e sua grandiosidade de caráter. Eles sem dúvidas foram os modelos em que sempre busquei inspirações para me tornar uma pessoa mais justa e próspera.

À minha irmã: *Brenda*, pelo seu amor, alegria e confiança. Apesar de já há quatro anos sem nos vermos, tu ainda és a minha criança e nunca deixei de me preocupar contigo.

À minha cachorrinha: *Lua*, minha companhia nas longas horas de trabalho, cuja fidelidade e carinho ultrapassam todos os limites.

Dedico este trabalho à minha maior riqueza:

Miguel Dominique, Angelica Christine, Claudio Ireno (in memoriam), Neiva Regina, Brenda.

“Cette harmonie que l’intelligence humaine croit découvrir dans la nature, existe-t-elle en dehors de cette intelligence?

(...)Mais ce que nous appelons la réalité objective, c’est, en dernière analyse, ce qui est commun à plusieurs êtres pensants, et pourrait être commun à tous; cette partie commune, nous le verrons, ce ne peut être que l’harmonie exprimée par des lois mathématiques.

C’est donc cette harmonie qui est la seule réalité objective, la seule vérité que nous puissions atteindre; et si j’ajoute que l’harmonie universelle du monde est la source de toute beauté, on comprendra quel prix nous devons attacher aux lents et pénibles progrès qui nous la font peu à peu mieux connaître.”

Henri Poincaré, *Valeur de la science*

"Essa harmonia que a inteligência humana crê descobrir na natureza, existirá fora desta inteligência?

(...) Mas o que chamamos de realidade objetiva é, em última análise, o que é comum a muitos seres pensantes, e poderia ser comum a todos; essa parte comum, como veremos, só pode ser a harmonia expressa por leis matemáticas.

É portanto essa harmonia a única realidade objetiva, a única verdade que podemos atingir; e se acrescento que a harmonia universal do mundo é a fonte de toda beleza, será possível compreender que valor devemos atribuir aos lentos e penosos progressos que nos fazem, pouco a pouco, conhecê-la melhor."

Tradutor(a): MARIA HELENA FRANCO MARTINS, *"O Valor da Ciência"*, Ed. Contraponto, 1995

Resumo

Nesta tese expomos primeiramente um breve histórico-motivacional para a construção de uma teoria de gravitação quântica, bem como, rápidas revisões orientadas sobre elementos de teorias quânticas de campos e sobre a técnica de Schwinger-Dewitt. De posse destas ferramentas, discutimos a dependência de calibre e da parametrização para uma teoria quântica de gravitação em um espaço-tempo de dimensão arbitrária D. Com este objetivo, calculamos explicitamente as correções quânticas a *1-loop*, da ação efetiva da teoria, considerando a parametrização mais geral possível para a métrica quântica. Essa parametrização contém inicialmente sete parâmetros, sendo que alguns deles serão fixados através da *condição de fixação de calibre*, o que torna o nosso cálculo um pouco mais simples. Por fim, para esta teoria, confirmamos a validade de um teorema geral, o qual garante a independência das divergências *on-shell*, a *1-loop*, com respeito às ambiguidades nas escolhas de calibre e de parametrização da métrica quântica.

Palavras-Chave: Gravitação Quântica, Dependência de Calibre, Dependência de Parametrização, Ação Efetiva, Técnica de Schwinger-DeWitt.

Abstract

In this thesis we first present a brief historical-motivational for a construction of a theory of quantum gravitation, as well as quick reviews oriented on elements of quantum field theory and Schwinger-Dewitt technique. In possession of these tools, the gauge and parametrization dependence is discussed in quantum gravity in an arbitrary dimension D. Explicit one-loop calculations are performed within the most general parametrization of quantum metric with seven arbitrary parameters. On the other hand, some of the gauge fixing parameters are fixed to make the calculations relatively simple. We confirm the general theorem stating that the on shell local terms in the one-loop effective action are independent of the gauge and parametrization ambiguity.

Keywords: Quantum gravity, Gauge dependence, Parametrization dependence, Effective Action, Schwinger-DeWitt technique.

Notações e definições

No decorrer deste trabalho utilizaremos uma combinação particular de notações, definições e terminologias entre as várias possibilidades que podem ser escolhidas a partir da literatura.

- Utilizamos o sistema natural de unidades, no qual $c = \hbar = 1$. Nestas unidades temos que

$$[\text{comprimento}] = [\text{tempo}] = [\text{massa}]^{-1} = [\text{energia}]^{-1}.$$

- O tensor métrico possui assinatura $(+, -, -, -, \dots)$.

- Os índices latinos, e.g., i, j, k, ... assumem os valores 1, 2, 3; enquanto os índices gregos, e.g., μ, ν, ... podem ter valores 0, 1, 2, 3.

- A derivada parcial de uma quantidade A com respeito à coordenada x^μ é representada em alguma das formas abaixo

$$\frac{\partial A}{\partial x^\mu} = \partial_\mu A = A_{,\mu}\,.$$

- Os símbolos de Christoffel são definidos por

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(\partial_\alpha g_{\lambda\beta} + \partial_\beta g_{\lambda\alpha} - \partial_\lambda g_{\alpha\beta} \right).$$

- A derivada covariante de uma quantidade tensorial $A^{\alpha\cdots}{}_{\beta\dots}$ pode ser representada por qualquer um dos símbolos a seguir: $\nabla_\mu A^{\alpha\cdots}{}_{\beta\dots} = A^{\alpha\cdots}{}_{\beta\dots;\mu}$. A mesma possui a seguinte regra de aplicação

$$\nabla_\mu T^{\alpha\cdots}{}_{\beta\dots} = \partial_\mu T^{\alpha\cdots}{}_{\beta\dots} + \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} T^{\lambda\cdots}{}_{\beta\dots} - \Gamma^\lambda_{\beta\mu} T^{\alpha\cdots}{}_{\lambda\dots} + \cdots\,.$$

- O tensor de Riemann é definido por

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\beta\mu}.$$

- Suas contrações são: o tensor de Ricci, $R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu}$, e o escalar de Ricci, $R = R^{\mu}{}_{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$.

- Definimos, também, a seguinte notação abreviada para produtos de tensores idênticos

$$T^2_{\alpha\beta\ldots} \equiv T_{\alpha\beta\ldots}T^{\alpha\beta\ldots}.$$

- Usaremos a seguinte notação para o determinante da métrica

$$g \equiv \det{(g_{\mu\nu})}.$$

Sumário

Introdução

Descrever o Universo que nos cerca é indubitavelmente uma das maiores aventuras jamais iniciadas pela espécie humana. Na ânsia de compreender de forma logicamente consistente e unificada a natureza do Universo observável, em seu amplo espectro de fenômenos físicos, as primeiras civilizações cultuaram admiradas a intensidade, a beleza e as modificações exercidas (no meio) pelos fenômenos naturais. No que tange às *ciências "exatas"*, já no Egito Antigo e na Mesopotâmia surgiram a astronomia[1] e a matemática. Todavia, foi na Grécia Antiga que o pensamento matemático atingiu um senso de profunda beleza através do estabelecimento da geometria euclidiana, alicerçada em ideais de unidade e simplicidade.

É bastante razoável inferir que a primeira das quatro forças fundamentais da natureza (gravitacional, eletromagnética, nuclear forte e nuclear fraca), tais como as compreendemos na atualidade, que possivelmente foi observada e para a qual tentou-se buscar explicações foi a *força gravitacional*[2]. Ela é a responsável pelo movimento regular dos corpos celestes e também pela queda de objetos próximos à superfície terrestre. Diversas foram as tentativas de explicá-la, desde a bem conhecida teoria dos quatro elementos desenvolvida por Aristóteles na Grécia Antiga[3], até às engenhosas experiências com planos inclinados executadas por *Galileu Galilei* na Itália renascentista [53].

Um passo importante foram as fundamentais contribuições de *Johannes Kepler*, que formulou um conjunto de três leis empíricas (obtidas através de cuidadosa análise dos dados astronômicos coletados por *Tycho Brahe*) capazes de descrever o movimento dos planetas do sistema solar. No entanto, foi com as descobertas de *Sir Isaac Newton* que a força gravitacional ganhou sua primeira formulação matematicamente robusta.

[1] O estudo dos astros ou corpos celestes: Sol, Lua, estrelas, planetas, cometas, etc.

[2] Ou, apenas, *gravidade*.

[3] Aristóteles afirmava que um objeto que caia de sua mão, quando elevado à uma certa altura e depois abandonado, o fazia porque "buscava" o seu *lugar natural* [6].

A teoria newtoniana para a gravidade, conhecida como *Gravitação Universal*, imortalizada nos *Principia* [81], faz parte de uma teoria *Mecânica* mais abrangente e é ainda hoje um exemplo de teoria física bem sucedida. Ao modelar matematicamente todos os fenômenos físicos gravitacionais[4] através de uma única equação

$$\vec{F}_g = -G\frac{mM}{r^2}\hat{r}, \tag{1}$$

cujo limite de aplicabilidade se estende por uma escala de distância que vai de alguns poucos milímetros até a aproximadamente o tamanho do nosso sistema solar, Newton unificou a descrição dos movimentos dos objetos celestes e terrestres. Um ato de coragem para época, uma vez que os objetos celestes estavam envoltos por um caráter de contemplação e por um ideal de perfeição que não eram admitidos ao mundo terrestre. Um dos triunfos de Newton foi reobter as *Leis de Kepler* do movimento planetário revelando que sua teoria formulada *a primeiros princípios* era uma generalização confiável de todas as descrições anteriores de que dispúnhamos. Mais de um século depois a teoria newtoniana teve sua primeira corroboração com H. Cavendish, por meio de um experimento de alta sensibilidade, no qual este utilizou uma balança de torção para medir a força gravitacional entre duas esferas [25]. A Gravitação Universal se manteve, assim, até o final do século XIX como a melhor descrição disponível para os fenômenos gravitacionais, quando suas limitações se tornaram evidentes. Entre elas podemos citar a incapacidade de explicar o *movimento anômalo do periélio de Mercúrio*[5] e sua incompatibilidade com a recém fundamentada teoria eletromagnética de *J.C. Maxwell* [72]. Enquanto, na formulação mecanicista de Newton as interações entre quaisquer dois corpos se davam de maneira instantânea, uma das previsões do eletromagnetismo maxwemiliano era a de que as interações eletromagnéticas eram mediadas por um *campo* e, por isto, se davam a velocidade finita, igual a velocidade da luz no vácuo $c \approx 2,9 \times 10^8 m/s$. O conceito de campo (clássico) neste contexto foi criado por M. Faraday a fim de visualizar os fenômenos eletromagnéticos. Contudo, o campo eletromagnético mostrou ter realidade física, e impôs que a noção de *causalidade* deveria ser respeitada na formulação de uma nova mecânica compatível com o eletromagnetismo. Coube a Albert Einstein desenvolver esta nova visão mecanicista da natureza [42]. Denominada Relatividade Restrita[6] (RR) a teoria de Einstein é fundamentada em dois

[4]Conhecidos à época.

[5]Descoberto por *Urbain Le Verrier* em 1859. [117]

[6]Ou Relatividade Especial.

postulados:

1. As leis da natureza são idênticas em todos os referênciais inerciais.

2. A velocidade da luz, no vácuo, é uma constante finita e independe do movimento da fonte.

A relatividade restrita trouxe uma profunda revolução na maneira como enxergávamos a natureza do espaço e do tempo. Na teoria newtoniana, o movimento de qualquer corpo poderia ser encarado como o movimento de um conjunto de partículas materiais pontuais, através do espaço euclidiano tridimensional, e descritas por uma equação diferencial de segunda ordem

$$\vec{F} = \sum_i m_i \frac{d^2\vec{x_i}}{dt^2}, \tag{2}$$

em que m_i são as massas das partículas, $\vec{x_i} = \vec{x_i}(t)$ suas posições em relação à origem de um dado *sistema de referência inercial* e $\vec{F}$ sendo a força[7] resultante que atua no conjunto de partículas. Uma vez conhecida a posição $\vec{x}_0$ e a velocidade $\vec{v}_0$ do corpo em um dado instante t_0 de tempo, então poderíamos determinar completamente o movimento deste corpo para qualquer posição $\vec{x}$ e velocidade $\vec{v}$ no instante de tempo t. Sendo assim, o tempo tinha caráter absoluto e independente do espaço. Ao contrário, na teoria einsteniana o espaço e o tempo formam uma nova entidade física, denominada *espaço-tempo*, e apenas esta entidade quadridimensional tem realidade física. Além disso, na RR a energia e o *momentum* são apenas duas componentes de um único *quadrivetor* [8] mais geral, batizado de *quadrimomentum*. Logo, também poderíamos relacionar a massa do sistema físico com a norma deste novo *quadrivetor*.

Neste contexto, o próximo passo naturalmente seria a formulação de uma nova teoria de gravitação, tendo como *ponto de partida* a RR. Esta teoria foi erigida cerca de uma década depois, em 1916, pelo próprio Einstein [43]. Conhecida como *Relatividade Geral* (RG), a teoria gravitacional de Einstein trouxe uma revolução ainda maior do que a primeira. Nela o próprio espaço-tempo é uma entidade dinâmica, capaz de afetar (ou ser afetado por) a matéria/energia contida nele. O que pode ser visto através das

[7]Tal qual a força gravitacional, (1), ou a força eletromagnética: $\vec{F}_e = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, em que E/B é o campo elétrico/magnético e $e/\vec{v}$ é a carga/velocidade da partícula sujeita à esta força.

[8]Um vetor de quatro componentes, uma temporal e três espaciais.

equações dinâmicas[9] da teoria

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\,\pi\,G\,T_{\mu\nu}, \tag{3}$$

em que o lado esquerdo representa a geometria do espaço-tempo e o lado direito designa o conteúdo de matéria/energia contido neste espaço-tempo.

Ao desenvolver a RG, Einstein propôs três testes experimentais/observacionais para sua teoria: a medida da deflexão de um feixe de luz por um campo gravitacional (comprovada pela observação da luz de estrelas distantes, que era curvada ao passar pelo campo gravitacional do sol, durante um eclipse de 1919 na cidade de Sobral - CE) [30]; o *desvio para o vermelho* da frequência de um feixe de luz em um campo gravitacional (comprovado pela experiência de Pound e Rebka em 1959 [92]); e a explicação para o movimento anômalo do periélio de mercúrio (comprovada pelo próprio Einstein, quando este calculou a órbita deste planeta e encontrou o valor quase exato da diferença entre a órbita observada e aquela calculada com a gravitação newtoniana).

Concomitantemente às teorias de Einstein, surgia no começo do século XX outra teoria física, ainda mais revolucionária em seus fundamentos e consequências, que junto à dupla RR/RG formaria o outro pilar de sustentação de toda a pesquisa em física que se desenvolveu ao longo do referido século. A ela damos o nome de *Mecânica Quântica* (MQ).

A MQ foi construída pela necessidade de entendermos certos fenômenos para os quais as teorias clássicas[10] não conseguiam dar explanações satisfatórias. Citamos três dos primeiros problemas fundamentais sobre os quais a MQ foi formulada: a explicação para o *espectro de radiação de corpo negro*, dada por M. Planck ao introduzir a ideia de que a energia da radiação emitida por um *corpo negro* deveria ser discretizada em pequenas porções chamadas de *quanta* de energia; a descrição do *movimento browniano*, que corroborou de maneira cabal com a existência de moléculas e átomos; e a compreensão do *efeito fotoelétrico*, que levou à noção de *quantização*[11] da matéria, ambos solucionados por Einstein. Para explicações detalhadas e referências originais veja, por exemplo, [26].

Indo além dos triunfos da *primeira geração da MQ*, mudanças ainda mais drásticas seriam realizadas quando na *segunda geração* foram formulados os *princípios de in-*

[9] Conhecidas como *equações de campo de Einstein.*

[10] Mecânica, Termodinâmica e Eletromagnetismo.

[11] Discretização em *quanta*.

certeza de Heinsenberg, a *equação ondulatória de Schrödinger* e estabelecida a *interpretação probabilística de Born*, os quais implicaram que o determinismo da física clássica deveria ser abandonado em escalas de *pequenas distâncias*[12] ou *altas energias*.

Entretanto, a equação de Schrödinger não era capaz de descrever o movimento de elétrons[13] com velocidades relativísticas, isto exigia a junção da RR com a MQ. Construir uma equação relativística e quântica era uma tarefa formidável, que só foi concretizada em uma série de trabalhos começados em 1928 por P.A.M. Dirac, nos quais ele descobriu a equação que leva o seu nome e descreve o movimento de partículas relativísticas de spin 1/2, como os elétrons; introduziu o conceito de vácuo quântico; previu a existência de monopolos magnéticos[14]; propôs uma explicação para a quantização da carga elétrica; e previu a existência da antimatéria (descoberta 1932 por C.D. Anderson, apenas um ano após sua previsão) [37].

Todos estes avanços fundaram bases sólidas para a construção, àquela época em curso, de uma teoria quântica relativística para o eletromagnetismo, conhecida como *Eletrodinâmica Quântica* (*Quantum Electrodynamics*, QED). A QED foi a primeira *teoria quântica de campos* (TQC) e entre as ideias inicialmente estabelecidas, que logo seriam a base para as demais TQCs, estavam a quantização do campo (eletromagnético) através de um conjunto de osciladores harmônicos com a utilização dos operadores criação e aniquilação de partículas neste processo de quantização. Muitas pessoas contribuíram para a construção da QED, entre os trabalhos fundacionais está o clássico artigo de Enrico Fermi [47]. Dito isto, ao longo da década de trinta acreditava-se que era possível calcular todos os processos físicos envolvendo fótons e as partículas carregadas conhecidas[15], quando foi mostrado que apenas os cálculos em primeira ordem na expansão perturbativa, cujo parâmetro é a constante de acoplamento[16], faziam sentido. Por que as ordens superiores, nesta expansão, fornecem contribuições com valores infinitos. O que ficou conhecido como *o problema dos infinitos* e fez o desenvolvimento da teoria cessar por aproximadamente uma década [63]. Este problema foi resolvido por H. Bethe quando ele teve a ideia de considerar que os valores infinitos

[12] Comprimentos com a ordem de grandeza próximas, ou menores do que, ao tamanho do átomo, ou seja, $1\text{Å} = 10^{-10}m$.

[13] As primeiras *partículas elementares*, "blocos de construção" de todo o Universo observável, a serem descobertas.

[14] Ainda não detectados.

[15] Elétrons, prótons e pósitrons, essencialmente.

[16] A qual para a QED é a carga elementar do elétron.

que apareciam na teoria não eram de fato os valores das grandezas físicas medidas em laboratório, mas sim infinitas correções quânticas a estas grandezas, as quais poderiam ser absorvidas por constantes e dependiam da escala de energia considerada [15]. Nos anos subsequentes este esquema (denominado *renormalização*) foi generalizado, para todas as ordens da expansão perturbativa, por diversas pessoas, entre elas: Tomonaga, Schwinger, Feynman e Dyson [104, 105].

Na sequência, contínuos avanços foram realizados quando da aplicação das técnicas da QED em outras interações, bem como a formulação de novas ferramentas, tais como as integrais (funcionais) de trajetória, esquemas de regularização e a utilização da teoria de grupos, levaram à uma melhor compreensão das forças fraca e forte. Consequentemente houve uma unificação entre as interações eletromagnética e fraca, no que ficou conhecido como *modelo padrão eletrofraco* (MPE). Simultaneamente formulou-se uma teoria robusta para a interação forte, conhecida como *Cromodinâmica Quântica* (*Quantum Chromodynamics*, QCD). O MPE e a QCD logo foram abrigados sob uma única estrutura teórica denominada *modelo padrão - das partículas elementares* - (MP) [74]. O MP é, desde então, a nossa teoria física mais bem sucedida na busca de um entendimento unificado da natureza. Ela é capaz de explicar três das quatro forças fundamentais com alto grau de precisão [87].

Apesar de sua enorme importância, o MP não contém em seu arcabouço a interação gravitacional. Logo, ele não pode ser a “palavra final” como descrição da natureza. Na realidade, a situação é, ainda, bem menos favorável para que alcancemos uma teoria final da física, já que os dados astrofísicos e cosmológicos das últimas décadas estimam que toda a matéria e energia visíveis[17] correspondem a apenas $4,9\%$ de todo o conteúdo de matéria e energia que existe no Universo [91]. Sendo que o restante deste conteúdo não pode ser detectado de maneira direta pela nossa tecnologia atual. Estima-se que este, assim denominado, *setor escuro* é composto por $68,3\%$ de um novo tipo de energia, a *energia escura*, e $26,8\%$ por um novo tipo de matéria, a *matéria escura.*

Em vista deste excitante cenário, no qual desconhecemos a maior parte do conteúdo material e energético do Universo, buscar por uma teoria quântica da gravitação talvez seja um dos caminhos para um melhor entendimento da física do *setor escuro*. Esta busca, hoje, só é possível devido aos contínuos progressos realizados na compreensão da quantização das *teorias de calibre*, das quais a gravidade é um exemplo. Entre eles podemos citar: o *formalismo de integral funcional* [48], o método de Faddeev-Popov

[17] Aquelas que podem ser descritas pelo MP.

[50], a regularização dimensional [41, 70] e o método de campo de fundo [33, 32].

Entre os obstáculos identificados para a formulação de uma teoria de gravitação quântica está o fato da constante de acoplamento da teoria gravitacional ser proporcional a $[\text{massa}]^{-1}$, enquanto no eletromagnetismo, por exemplo, a *cte.* de acoplamento é adimensional. Como consequência, por meio de argumentos de *power counting*, se tentarmos aplicar a abordagem perturbativa à gravitação assim como foi feito na QED, chegaremos à uma teoria *não-renormalizável*. Em outras palavras, precisaríamos fixar um número infinito de parâmetros para que a teoria fosse capaz de realizar previsões, o que é naturalmente impraticável.

O artigo pioneiro que explicitou a não-renormalizabilidade de uma teoria de gravitação quântica, baseada na RG, foi escrito por 't Hooft e Veltman em 1974 [62]. Neste trabalho foi mostrado que em um modelo de gravidade pura (sem matéria) as divergências, a *1-loop*, da RG se anulam *on-shell* [18]. Mas, ao considerar-se a interação do campo gravitacional com um campo escalar a teoria perde sua finitude. Resultados semelhantes foram obtidos por Deser e van Nieuwenhuizen, que estudaram a interação do campo gravitacional com o campo eletromagnético e com campos fermiônicos [38]. Posteriormente, Goroff e Sagnotti confirmaram que a gravitação já perde sua renormalizabilidade, de qualquer maneira, quando são consideradas as correções quânticas de *2-loops* para a teoria clássica [57] (para referências mais modernas, usando métodos avançados, veja [122, 14]). O questionamento natural que surge é: como evitar os problemas da não-renormalizabilidade de uma teoria quântica da gravitação? Uma das primeiras tentativas de responder esta questão foi desenvolvida por Stelle [114]. Neste trabalho foi descoberto que quando adicionamos à ação de Einstein-Hilbert[19] termos com quatro derivadas da métrica temos como resultado uma teoria renormalizável. Entretanto, este procedimento resulta também no surgimento de estados não-físicos, de spin 2, com energia cinética negativa. Estes estados foram chamados de *fantasmas massivos*.

Outra questão de relevância nas investigações de uma teoria gravitacional é a dependência dos contratermos com respeito aos parâmetros de calibre. Entre os trabalhos pioneiros que investigaram esta dependência está aquele realizado por Kallosh, Tarasov e Tyutin. Cujo cálculo, envolvendo condições de calibre com dois parâmetros comple-

[18]Quando consideramos que o campo de fundo (clássico) deve obedecer às equações de movimento da teoria.

[19]Aquela que gera as equações de campo de Einstein.

tamente gerais, revelou que é possível eliminar certos tipos de divergências em teorias de calibre arbitrárias. Dessa maneira, as divergências são reduzidas a um único termo topológico que não afeta a matriz S de grávitons. Assim, para a gravidade quântica pura, na aproximação de *1-loop*, é possível encontrar calibres em que a teoria é finita mesmo *off-shell* [69].

As correções quânticas de *1-loop* são muito importantes devidas às suas diversas possibilidades de aplicação. Podemos mencionar sua importância, por exemplo, no programa de *gravidade quântica assintoticamente segura*. Ao leitor interessado, deixamos as referências [84, 29, 82]. Outro contexto de interesse é a abordagem de *gravidade quântica efetiva* [40], em que especificamente a análise da independência de calibre nos elementos da matriz S é de grande utilidade [83]. Logo, uma questão central é conhecermos as ambiguidade das divergências[20] da RG com respeito a escolha dos parâmetros de calibre.

O procedimento geral para explorar as ambiguidades na fixação de calibre da ação efetiva de teorias de calibre foi estabelecido por Voronov, Lavrov e Tyutin em [121]. Veja o livro-texto [21] para uma versão direcionada a cálculos de *1-loop*. E, desde que, uma teoria de gravidade quântica se configura como uma teoria de calibre, podemos estabelecer a dependência da ação efetiva com as condições de fixação de calibre tanto de um ponto de vista geral, quanto para escolhas particulares de calibre [65].

Entre os artigos que primeiro exploraram esta questão está o artigo de Fradkin and Tseytlin [51], o qual versa majoritariamente sobre modelos de gravitação quântica com quatro derivadas. Podemos citar também os seguintes trabalhos dedicados ao estudo desta dependência [1, 8, 9, 110, 94, 95].

É um fato conhecido que as divergências de *1-loop*, bem como as divergências líderes em *loops* superiores, são independentes do calibre escolhido quando os cálculos são *on-shell*. Em princípio, espera-se que isto seja válido também com relação aos parâmetros escolhidos para a parametrização da métrica. Pode ser instrutivo verificar argumentos tão gerais como este para determinadas parametrizações e/ou escolha de calibres. O trabalho pioneiro neste tipo de verificação direta foi, como já citamos, aquele da referência [69], em que a dependência de fixação de calibre foi estudada. Além desse, outros artigos investigaram a dependência com respeito a parametrização da métrica, podemos citar [66, 67, 90]. Nos dois primeiros o cálculo foi realizado de maneira direta e através de uma rotina computacional pesada. Esta abordagem direta tem a

[20]Tanto logarítmicas, quanto quadráticas.

desvantagem de ser notoriamente difícil de ser reproduzida. Por outro lado, a abordagem usada em [90], que forneceu um resultado qualitativo idêntico, foi obtida de maneira muito mais simples. É este procedimento mais elegante que é o objeto de estudo desta tese, e com o qual generalizamos os cálculos das divergências de *1-loop* para a RG, considerando a parametrização mais geral possível da métrica quântica. Veja o capítulo 3 para detalhes técnicos. Notamos ainda que o nosso trabalho se insere em um contexto no qual as questões da dependência das divergências com respeito à fixação de calibre e à parametrização da métrica [46, 86] estão sendo reestudadas. A principal diferença entre os primeiros trabalhos [66, 67, 90] e os últimos [46, 86] é o fato de que nos trabalhos mais recentes não é pressuposto que a métrica de fundo deva necessariamente obedecer às equações clássicas de movimento. Nestes trabalhos são usados argumentos de simplicidade para obter métricas de fundo específicas. De qualquer forma, é considerado que as métricas de fundo devem ser independentes de calibre. Concomitantemente, os argumentos gerais - sobre as ambiguidades existentes em teorias de calibre - estruturados nos trabalhos inaugurais [121, 51] indicavam que a independência das divergências com respeito às ambiguidades dificilmente seria realizada no contexto mais geral possível para a escolha de parametrização e fixação de calibre. Tendo em vista todas estas considerações, em nosso trabalho, foi utilizada a parametrização métrica mais geral possível, enquanto que a métrica de fundo foi mantida arbitrária. Desta maneira, os nossos resultados são capazes de reproduzir quaisquer outros resultados obtidos para escolhas de métricas de fundo específicas, motivadas por argumentos estéticos e/ou físicos. Ademais, em nossos cálculos houve um forte controle de erros, baseado em argumentos da universalidade *on-shell*.

Os limites de aplicabilidade da RG ou motivações para uma teoria quântica da gravitação

Na RG, como anteriormente argumentamos, o campo gravitacional não é encarado como um campo de força, tal qual era na gravitação newtoniana, mas sim como uma manifestação da geometria do próprio espaço-tempo. Fato que ficou impresso na emblemática frase de J.A. Wheeler: *"A matéria diz ao espaço como se curvar e o espaço diz à matéria como se mover"*.

Vimos que a RG passou gloriosamente pelos três testes experimentais/observacionais propostos por Einstein, no entanto, seu poder de previsão vai muito além. Adicionamos a esta lista, como exemplos:

- a previsão da existência de *buracos negros* (BNs). Uma das possíveis fases finais para uma estrela de grande massa, que ao perder todo o seu combustível interno colapsa devido à gravidade de sua própria massa, tornando-se assim um objeto tão compacto que nem mesmo a luz é capaz de escapar do seu intenso campo gravitacional, comprovados indiretamente pela observação do sistema binário Cygnus X-1 [24, 19, 115];

- a previsão de *lentes gravitacionais*. Efeito da curvatura de raios luminosos provocada por objetos astronômicos de grande massa localizados entre a fonte luminosa e o observador. A primeira observação documentada de uma lente gravitacional foi aquela observada no eclipse solar em Sobral. No entanto, modernos telescópios, como o telescópio espacial Hubble, fotografaram acentuados fenômenos de lentes gravitacionais, inclusive em regiões aparentemente vazias, entre a fonte e o observador, o que revelou-se um instrumento alternativo para pesquisar/corroborar a existência de BNs e, talvez, de *matéria escura* [130, 123];

- a previsão da existência de *ondas gravitacionais*. Ondulações no próprio espaço-tempo causadas por eventos de enorme intensidade, tal como a interação entre dois BNs; comprovadas[21] apenas em 2016, e novamente detectadas em 2017, pelas colaborações LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) e Virgo [58, 59].

Nosso objetivo, aqui, não é fornecer uma lista exaustiva dos experimentos que comprovaram o amplo domínio de aplicabilidade e a precisão do poder preditivo da RG. Para esta finalidade citamos a referência [131].

A despeito dos sucessos expostos acima, a RG não pode ser a teoria final para a gravitação. No que segue indicamos alguns dos motivos que nos revelam que precisaremos de uma teoria de gravitação mais abrangente. Citamos:

- a discordância entre os resultados teóricos e os dados observacionais para as *curvas de rotação* de galáxias espirais. Atualmente, a solução mais aceita para este problema é a consideração da existência de um halo de *matéria escura* ao

[21] Cem anos após sua previsão teórica.

redor das galáxias. O que não obrigatoriamente invoca a necessidade de uma abordagem quântica para sua completa compreensão [20, 99, 10, 101];

- a expansão acelerada do Universo descoberta em 1998 através da medida do desvio gravitacional para o vermelho de supernovas do tipo Ia. A solução mais aceita para este problema é considerarmos que a *constante cosmológica*, Λ, deve ter um valor positivo. O que equivale a dizer que a energia de vácuo (denominada *energia escura*) é positiva e é a causa da expansão acelerada do Universo. Esta abordagem é incorporada no atual *modelo padrão cosmológico*, o modelo ΛCDM, muito embora ainda não compreendamos de maneira satisfatória qual é a natureza da *energia escura* [78, 129];

- a existência de *singularidades*. É um fato matemático conhecido que as soluções mais elementares das *equações de campo de Einstein*, a saber, a *solução esfericamente simétrica de Schwarzschild* (que descreve: planetas, estrelas e BNs) e a *solução cosmológica de FLRW* (que descreve um Universo homogêneo e isotrópico), possuem regiões em que a curvatura e a densidade de energia do espaço-tempo assumem valores infinitos. Uma interpretação natural para este fato é a de que RG não é válida em todas as escalas de energia, e estas regiões provavelmente assinalam a necessidade de uma teoria quântica de gravitação [109, 106];

- a existência da *escala de Planck*. Devido a presença de singularidades no espaço-tempo nas proximidades destas regiões os efeitos quânticos possivelmente se tornam relevantes. Como consequência, nesta escala todas as quantidades físicas deveriam ser expressas em função de três constantes fundamentais:

  - a *velocidade da luz* (no vácuo): $c \approx 2,9 \times 10^{10} cm/s$;
  - a constante (reduzida) de Planck: $\hbar \approx 1,054 \times 10^{-27} erg \cdot s$;
  - a constante gravitacional de Newton: $G \approx 6,67 \times 10^{-8} cm^3/g \cdot s^2$.

  É um fato notável que com apenas estas três constantes possamos construir de maneira unívoca unidades de:

  - tempo: $t_P = G^{1/2}\,\hbar^{1/2}\,c^{-5/2} \approx 0,7 \times 10^{-43}\, s$;
  - comprimento: $\ell_P = G^{1/2}\,\hbar^{1/2}\,c^{-3/2} \approx 1,4 \times 10^{-33}\, cm$;

– massa: $M_P = G^{-1/2}\,\hbar^{1/2}\,c^{1/2} \approx 0,2 \times 10^{-5}\,g \approx 10^{19}\,GeV$,

denominadas *unidades de Planck*. A possibilidade de fixação de um conjunto de unidades baseadas em constantes fundamentais da natureza assinala que nos domínios onde a escala de Planck é relevante existe uma física mais fundamental e que esta física deve ser quântica, relativística e gravitacional. Infelizmente, não existe uma maneira única de determinar que teoria física seria capaz de descrever os fenômenos nesta escala. Visto que podemos pensar em pelos menos três abordagens distintas para construir uma tal teoria. São elas: 1) quantizar a métrica e a matéria; 2) quantizar apenas a matéria, mantendo a métrica clássica de fundo; 3) quantizar objetos ainda mais elementares que possam existir na natureza, sendo as quatro interações conhecidas apenas *efeitos efetivos de baixa energia* da teoria quântica (na escala de Planck) destes objetos. Como, por exemplo, a *Teoria de Cordas* [106].

Na próxima seção dissertaremos brevemente a respeito das abordagens 1) e 2), sendo que o problema de estudo desta tese tem como foco parte da abordagem 1), como ilustraremos no capítulo 3.

Indo além da Relatividade Geral

Anteriormente motivamos a necessidade de uma teoria quântica para a gravitação. Todavia, como alertamos, não há ainda um perfil exclusivo que esta teoria deva possuir e, atualmente, nem mesmo dados experimentais/observacionais que sejam suficientes para indicar qual perfil deva ser preterido. Já que os efeitos quânticos do campo gravitacional devem ser extremamente fracos, pois ocorrem na escala de pequeníssimos comprimentos[22]. Exigindo, assim, uma enorme quantidade de energia para que sejam sondados. Na continuação, citaremos brevemente dois[23] modelos teóricos, entre os muitos disponíveis, para uma teoria quântica de gravitação.

Um dos modelos teóricos melhor compreendidos até o presente é a denominada *abordagem semiclássica* da gravitação, também chamada de *teoria quântica de campos em espaços curvos*. Este modelo se enquadra no item 2) da classificação da seção anterior, ou seja, nele os campos de matéria são quantizados, enquanto que o campo

[22]Como nos é indicado pela escala de Planck [124].

[23]Para uma lista, contendo muitas referências, veja [36].

gravitacional não o é. Desta forma, a métrica clássica é considerada apenas um fundo onde os campos quânticos de matéria desenvolvem suas interações. O elemento de interesse central nesta abordagem é a derivação das correções quânticas da ação clássica do campo gravitacional. Ainda que tais correções, a princípio, sejam desconhecidas, existem indícios de que elas sejam de grande importância para as teorias físicas em escalas cosmológicas e para a compreensão da física dos BNs. Uma característica chave é o fato de que estas correções quânticas podem, inclusive, nos fornecer informações que reforcem, ou descartem, os demais modelos existentes para uma teoria quântica de gravitação [106].

A gravitação semiclássica é uma área rica tanto do ponto de vista do seu formalismo quanto de seu amplo "leque" de aplicações. Como esta tese é dedicada à *gravitação quântica*, que se enquadra na opção 1) da classificação anterior, paramos nossas considerações por aqui e convidamos o leitor interessado em gravitação semiclássica a consultar alguns livros-texto padrões desta abrangente área de pesquisa [12, 125, 79, 97] e, também, o artigo de revisão [106].

Por outro lado, uma teoria de gravitação em que tanto a métrica quanto os campos de matéria são quantizados recebe o título de *gravitação quântica* e é tratada, na abordagem padrão, através da teoria de perturbação. Para construir esta expansão perturbativa devemos considerar a métrica $g_{\mu\nu}$ como um campo de calibre e, com o auxílio do *método de campo de fundo*, realizarmos uma reparametrização do tipo

$$g_{\mu\nu} \to g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{4}$$

em que $h_{\mu\nu}$ é uma *perturbação métrica quântica* que altera a métrica clássica de fundo, $g_{\mu\nu}$, de uma quantidade suficientemente pequena. Desta maneira, a métrica inversa $g^{\mu\nu}$ admite uma expansão em potências de $h^{\mu\nu}$. O que acarreta em uma expansão para o tensor de curvatura, e suas contrações, em potências do campo quântico $h_{\mu\nu}$. Como consequência, teremos correções quânticas adicionadas à ação clássica (original). Infelizmente, estas correções geram termos divergentes e acabamos com uma teoria não-renormalizável, como já foi observado anteriormente. Ainda assim, com esta abordagem somos capazes de obter informações importantes sobre os parâmetros e sobre as divergências da teoria. Para a extração de informações relativas aos parâmetros, essencialmente as constantes de acoplamento, é utilizada uma abordagem assentada no *Grupo de Renormalização*. Já para a obtenção das divergências da teoria, utilizamos o *método de campo de fundo* em adição com a *técnica de Schwinger-DeWitt*.

No capítulo 3, utilizaremos exatamente esta última via de ataque para encontrar as divergências de *1-loop*, e explorar sua dependência com respeito ao calibre e à parametrização da métrica quântica, para uma teoria de gravitação quântica com uma métrica completamente arbitrária, contendo sete parâmetros livres.

Estrutura da tese

Neste capítulo, introdutório, tentamos fornecer uma abordagem histórico-motivacional para a construção de uma teoria quântica de gravitação. No capítulo seguinte, 1, revisaremos de maneira concisa certos elementos de TQC, em sua abordagem funcional, necessários à compreensão dos capítulos restantes. Logo em seguida, expomos no capítulo 2 a poderosa técnica de Schwinger-DeWitt, com a qual somos capazes de executar o cálculo das divergências de *1-loop* de uma TQC. A vantagem desta técnica, em comparação ao uso de diagramas de Feynman, por exemplo, reside no fato de que ela mantém a covariância da teoria explícita em todas as ordens da expansão perturbativa. De posse destas ferramentas, no capítulo 3 conseguiremos, então, realizar o nosso cálculo das divergências de *1-loop* para uma teoria quântica de gravitação, baseada na RG, com a parametrização mais geral possível para a métrica quântica e considerando uma métrica (clássica) de fundo arbitrária. Por fim, no capítulo 4 expomos as nossas conclusões acerca do trabalho desenvolvido, além de perspectivas para futuros trabalhos.

Capítulo 1

Elementos de Teoria Quântica de Campos

A Teoria Quântica de Campos pode ser formulada através de duas abordagens diferentes e independentes entre si. A primeira a ser desenvolvida e extensivamente empregada foi a *quantização canônica*. Ela é construída sobre o formalismo hamiltoniano e associa operadores quânticos a observáveis físicos. Sua utilização se baseia no cálculo de comutadores entre pares de operadores, avaliados em instantes de tempo fixos. Por isto, ela quebra a covariância explícita das teorias físicas que desejamos quantizar [64, 77]. De outro lado, temos a *quantização funcional*. Esta abordagem foi desenvolvida por R.P. Feynman e é formulada no arcabouço do formalismo lagrangeano, seu principal conceito é o da *integral de trajetória*. Apesar de ainda hoje não existir uma fundamentação matemática completamente sólida para a mesma, o seu poder de síntese, a sua capacidade de gerar teorias corretas e o seu amplo espectro de aplicações conferem motivos suficientes para empregarmos-na. Entre as vantagens da quantização funcional estão: o fato de ser mais facilmente aplicável às teorias com interação, em comparação com a quantização canônica; sua capacidade de manter explícitas todas as simetrias das teorias físicas; e, por característica unificadora, sua versatilidade na construção de um formalismo único que descreve tanto sistemas quânticos relativísticos, tanto em regimes de altas energias quanto em sistemas mecânicos estatísticos [48, 93]. No desenvolvimento deste capítulo utilizamos as referências [100, 21, 93, 16].

1.1 A integral de trajetória

No contexto da representação de Schrödinger, um sistema quântico que se encontra em um dado estado inicial $|\varphi'\rangle$, no instante t', pode atingir outro estado $|\varphi''\rangle$, no instante t'', com $t'' > t'$. Esta dinâmica dos estados quânticos do sistema é realizada através do, assim denominado, *operador evolução temporal* $\hat{\mathscr{U}}(t'', t')$. Sendo a *amplitude de (probabilidade de) transição* entre estes dois estados fornecida pelo seguinte elemento de matriz

$$\langle\varphi''|\hat{\mathscr{U}}(t'', t')|\varphi'\rangle \equiv \langle\varphi'', t''|\varphi', t'\rangle. \tag{1.1}$$

Salientamos, então, que existe uma representação integral para o operador evolução, e para os seus elementos de matriz, bastante versátil. Nossa meta, nesta subseção, é estabelecer esta representação.

Começamos pela consideração de um sistema quântico simples, unidimensional, representado por um operador coordenada $\hat{q}$ e um operador *momentum* $\hat{p}$. Sabemos que, para este caso, os autoestados dos operadores posição e *momentum*, simbolicamente denotados por $|q\rangle$ e $|p\rangle$, respectivamente, devem obedecer às seguintes equações de autovalores

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \hat{q}|q\rangle & = & q|q\rangle \\ \hat{p}|p\rangle & = & p|p\rangle \end{array} \right. , \tag{1.2}$$

em que q e p são os, respectivos, autovalores associados aos referidos autoestados. É um resultado conhecido[1] que a projeção de $|q\rangle$ sobre $|p\rangle$ é dada por

$$\langle p|q\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-i\,p\,q/\hbar} \tag{1.3}$$

e que estes estados satisfazem às seguintes *relações de fechamento*

$$\int dq|q\rangle\langle q| = \int dp|p\rangle\langle p| = \hat{\mathbb{1}}. \tag{1.4}$$

O análogo de (1.1) para este sistema é

$$\langle q''|\hat{\mathscr{U}}(t'', t')|q'\rangle = \langle q'', t''|q', t'\rangle, \tag{1.5}$$

[1] Veja, por exemplo, [100].

que pode ser reescrita com o auxílio da relação de fechamento no espaço dos *momenta*

$$\langle q'', t''|q', t'\rangle = \int dp \langle q''|p\rangle\langle p|\hat{\mathscr{U}}(t'', t')|q'\rangle. \tag{1.6}$$

O elemento de matriz contendo o operador evolução, no lado direito, pode ser posto em uma forma bastante sugestiva se admitirmos que o intervalo temporal $t'' - t'$ possa ser considerado infinitesimal. O que nos habilita a escrever o operador evolução como

$$\hat{\mathscr{U}}(t'', t') \approx \hat{\mathbb{1}} - \frac{i}{\hbar}(t'' - t')\hat{H}, \tag{1.7}$$

em que $\hat{H} = H(q, p)|_{q=\hat{q},\, p=\hat{p}}$ é o operador hamiltoniana associado à hamiltoniana, $H(q, p)$, do sistema clássico equivalente. Com (1.7) chegamos a

$$\begin{aligned} \langle p|\hat{\mathscr{U}}(t'', t')|q'\rangle &\approx \langle p|\left[\hat{\mathbb{1}} - \frac{i}{\hbar}(t'' - t')\hat{H}\right]|q'\rangle = \langle p|q'\rangle - \frac{i}{\hbar}(t'' - t')\langle p|\hat{H}|q'\rangle \\ &= \langle p|q'\rangle\left[\hat{\mathbb{1}} - \frac{i}{\hbar}(t'' - t')H(q', p)\right] \approx \langle p|q'\rangle e^{-i(t''-t')H(q',p)/\hbar}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Usando as eqs. (1.3) e (1.8), a eq. (1.6) torna-se

$$\langle q''|\hat{\mathscr{U}}(t'', t')|q'\rangle = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(t'' - t')\left[p\left(\frac{q'' - q'}{t'' - t'}\right) - H(q', p)\right]\right\}. \tag{1.9}$$

Como, até então, o intervalo temporal é considerado infinitesimal, mas de outra forma arbitrário, podemos supor que ele pode ser subdividido em N partes iguais, cujo comprimento é $\delta t = (t'' - t')/N$.

Assim, através da propriedade de composição do operador evolução temporal somos capazes de escrever

$$\hat{\mathscr{U}}(t'', t') = \hat{\mathscr{U}}(t'', t_{N-1})\hat{\mathscr{U}}(t_{N-1}, t_{N-2}) \ldots \hat{\mathscr{U}}(t_2, t_1)\hat{\mathscr{U}}(t_1, t'). \tag{1.10}$$

"Sanduichando" este operador entre os estados $|q''\rangle$ e $|q'\rangle$ e usando a relação de fechamento no espaço das coordenadas $N - 1$ vezes obtemos

$$\begin{aligned} \langle q''|\hat{\mathscr{U}}(t'', t')|q'\rangle = \int dq_{N-1} \ldots dq_1 \langle q''|\hat{\mathscr{U}}(t'', t_{N-1})|q_{N-1}\rangle \ldots \\ \ldots \langle q_2|\hat{\mathscr{U}}(t_2, t_1)|q_1\rangle\langle q_1|\hat{\mathscr{U}}(t_1, t')|q'\rangle. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Sendo δt infinitesimal podemos utilizar a aproximação (1.9) para cada elemento matricial da eq. (1.11), e notando que δt é o mesmo para cada uma das subdivisões do intervalo $t'' - t'$, escrevemos

$$\langle q''|\hat{\mathscr{U}}(t'',t')|q'\rangle \approx \int \frac{dq_1\,dp_1}{2\pi\hbar}\cdots\frac{dq_{N-1}dp_{N-1}}{2\pi\hbar}\frac{dp_N}{2\pi\hbar}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\delta t\left[p_N\frac{q''-q_{N-1}}{\delta t}\right.\right.$$
$$+\quad p_{N-1}\frac{q_{N-1}-q_{N-2}}{\delta t}+\cdots+p_2\frac{q_2-q_1}{\delta t}+p_1\frac{q_1-q_2}{\delta t}-H(q_{N-1},p_N)-H(q_{N-2},p_{N-1})$$
$$-\quad\left.\left.\cdots-H(q_1,p_2)-H(q',p_1)\right]\right\}. \qquad (1.12)$$

Quando calculamos o limite $\delta t \to 0$ (ou, equivalentemente, quando fazemos $N \to \infty$) a exponencial torna-se

$$S_H(t'',t') = \int_{t'}^{t''} dt\,[p(t)\dot{q}(t) - H(q(t),p(t))]\,, \qquad (1.13)$$

sendo $S_H(t'',t')$ é a ação clássica associada à hamiltoniana $H(q(t),p(t))$. No momento em que calculamos o limite de N indo para infinito estamos fazendo o número de integrais da eq. (1.12) ir também para o infinito. Isto significa que estamos integrando sobre todas as possíveis trajetórias existentes entre os estados $|q',t'\rangle$ e $|q'',t''\rangle$. Definindo a seguinte notação compacta

$$\int \mathcal{D}q\,\mathcal{D}p \equiv \lim_{N\to\infty}\int\prod_{i=1}^{N-1}\prod_{j=1}^{N}\frac{dq_i\,dp_j}{(2\pi\hbar)^N} \qquad (1.14)$$

somos capazes de reescrever a eq. (1.12) como

$$\langle q''|\hat{\mathscr{U}}(t'',t')|q'\rangle = \int \mathcal{D}q\,\mathcal{D}p\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S_H(t'',t')\right\}, \qquad (1.15)$$

que é a representação em *integrais de trajetória (no espaço de fase)* da amplitude de transição $\langle q'',t''|q',t'\rangle$. Um conjunto de sistemas importantes é aquele cuja hamiltoniana admite a forma padrão

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q). \qquad (1.16)$$

Para estes sistemas a equação (1.15) transforma-se em

$$\langle q''|\hat{\mathscr{U}}(t'',t')|q'\rangle = \int \mathcal{D}q\,\mathcal{D}p\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}dt\left[p(t)\dot{q}(t) - \frac{[p(t)]^2}{2m} - V(q(t))\right]\right\}. \qquad (1.17)$$

Ela ainda pode ser posta em uma forma mais simples. Para isto façamos a seguinte mudança de variáveis, na coordenada $p(t)$,

$$p(t) \to p(t) + m\dot{q}(t). \tag{1.18}$$

Então, substituindo (1.18) em (1.17), após algumas manipulações, somos levados a

$$\langle q''|\hat{\mathscr{U}}(t'',t')|q'\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}q \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_H(t'',t')\right\}, \tag{1.19}$$

em que o fator de normalização

$$\mathcal{N}^{-1} = \int \mathcal{D}p \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''} dt\, \frac{p(t)^2}{2m}\right\} \tag{1.20}$$

será considerado igual a 1, sem perda de generalidade, a seguir. A eq. (1.19) é a representação em *integrais de trajetória (no espaço de configuração)* para a amplitude de transição $\langle q'', t''|q', t'\rangle$.

Estas representações, a saber, as equações (1.15) e (1.19), que acabamos de construir para um sistema quântico unidimensional, podem ser generalizadas para um sistema com infinitos graus de liberdade. Seja $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi)$ a densidade lagrangeana que descreve um campo escalar $\varphi(\vec{x}, t)$. É um fato que este campo pode ser discretizado se utilizarmos o vetor posição $\vec{x}$ como um rótulo contabilizador. Desta maneira, a representação da amplitude de transição do campo escalar de uma configuração inicial $\varphi(\vec{x}', t')$ para uma configuração final $\varphi(\vec{x}'', t'')$ fica dado por

$$\langle \varphi'', t''|\varphi', t'\rangle = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S(t'',t')\right\}, \tag{1.21}$$

em que a ação clássica é agora um funcional dado por

$$S(t'',t') = \int_{t'}^{t''} dt \int d^3x\, \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi). \tag{1.22}$$

Uma amplitude de transição frequente no formalismo de TQC é aquela que descreve a transição entre os estados inicial e final de processos de espalhamento. Como nestes processos as partículas encontram-se livres antes e depois da colisão, interagindo apenas por um brevíssimo intervalo temporal, podemos atrelar aos seus estados inicial e final valores infinitamente grandes na coordenada temporal. Além disso, desde que elas estejam no vácuo, nestas configurações, podemos escrever essa amplitude de transição como

$$\langle 0,\infty|0,-\infty\rangle = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{\frac{i}{\hbar}S[\varphi]\right\}, \tag{1.23}$$

em que a ação que surge na exponencial de (1.23) é aquela cujo domínio de integração é todo o espaço-tempo

$$S[\varphi] = \int d^4x\, \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi), \tag{1.24}$$

sendo $\varphi = \varphi(x^\nu)$.

Na seção seguinte utilizaremos a amplitude (1.23) para construir algumas das relações mais importantes do formalismo de integrais de trajetória.

1.2 O funcional gerador de funções de Green e a Ação Efetiva

As *funções de Green* são estruturas matemáticas de notável importância na resolução de problemas e na construção de teorias físicas, particularmente, em TQC elas possuem um papel central na descrição de teorias com interação. Consideremos uma função de Green de $n-$pontos, ou seja,

$$G_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle T\hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(x_2)\dots\hat{\varphi}(x_n)\rangle, \tag{1.25}$$

em que usamos a notação abreviada $\langle \dots \rangle$ para representar a amplitude[2] de vácuo-vácuo $\langle 0|\dots|0\rangle$, e introduzimos o símbolo de ordenamento temporal[3], T, por conveniência. Seguindo raciocínios análogos aos desenvolvidos anteriormente podemos construir a seguinte expressão para a função de Green de $n-$pontos

$$G_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\int \mathcal{D}\varphi\, \varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n)e^{iS[\varphi]}}{\int \mathcal{D}\varphi\, e^{iS[\varphi]}}. \tag{1.26}$$

O conjunto de funções de Green $G_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pode ser representado por um único funcional, denominado *funcional gerador das funções de Green*, definido por

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi\, e^{i(S[\varphi]+\varphi\, J)}, \tag{1.27}$$

[2]Também chamado valor esperado de vácuo.

[3]O qual impõe que os campos devem ser dispostos em ordem decrescente, da esquerda para a direita, na coordenada temporal.

em que $J(x)$ é um campo escalar chamado de *fonte*, e empregamos uma das *notações condensadas de DeWitt*

$$\varphi\, J \equiv \varphi^i\, J_i = \int dx\, \varphi(x) J(x). \tag{1.28}$$

A eq. (1.27) é válida tanto para teorias livres quanto para aquelas com interação. Sempre podemos calcular uma determinada função de Green através da seguinte diferenciação funcional

$$G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta i J(x_1) \delta i J(x_2) \ldots \delta i J(x_n)}\bigg|_{J=0}. \tag{1.29}$$

Outra quantidade relevante é o *funcional gerador das funções de Green conectadas*, $W[J]$, construído através da relação

$$Z[J] = e^{i\, W[J]}, \tag{1.30}$$

que pode ser escrito, explicitamente, como

$$W[J] = -i\, \ln Z[J]. \tag{1.31}$$

O funcional $W[J]$ em termos gráficos gera todos os diagramas de Feynman conectados, ou seja, aqueles em que não conseguimos separar as partes que não são conectadas por linhas [21]. Definamos ainda mais um objeto importante, através da derivada

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta i J(x)} = \frac{\int \mathcal{D}\varphi\, \varphi(x) e^{i(S[\varphi + \varphi\, J])}}{\int \mathcal{D}\varphi\, e^{i(S[\varphi + \varphi\, J])}} = \langle \hat{\varphi}(x|J) \rangle, \tag{1.32}$$

o qual é denominado *campo médio.* Salientamos que ele é um campo escalar e também dependente da fonte $J(x)$. Adotaremos, a partir de agora, a seguinte notação simplificada para o campo médio

$$\phi(x|J) \equiv \langle \hat{\varphi}(x|J) \rangle. \tag{1.33}$$

Se a relação

$$\phi(x|J) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \tag{1.34}$$

puder ser solucionada de maneira inversa, de tal forma que a fonte seja dependente do campo médio $J = J(x|\phi)$, então, poderemos definir, através da seguinte *transformada de Legendre*,

$$\Gamma[\phi] = \Big(W[J] - \phi\, J \Big)_{J = J(x|\phi)}, \tag{1.35}$$

o funcional *ação efetiva*, $\Gamma[\phi]$. Como resultado imediato destas definições, vemos que a ação efetiva deve obedecer à equação

$$\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi} = \frac{\delta W[J]}{\delta J}\frac{\delta J}{\delta\phi} - \phi\frac{\delta J}{\delta\phi} - J = -J, \tag{1.36}$$

ou explicitando as dependências

$$\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)} = -J(x). \tag{1.37}$$

Esta equação é completamente análoga à equação de movimento clássica para um campo escalar $\varphi(x)$ que interage com uma fonte externa $J(x)$, a saber,

$$\frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(x)} = -J(x). \tag{1.38}$$

Desta maneira, percebemos que a ação efetiva $\Gamma[\phi]$ desempenha, na teoria quântica, o mesmo "papel" que a ação clássica, $S[\varphi]$, tem na teoria clássica. Portanto, a eq. (1.36) é uma equação de movimento para o campo médio, $\phi(x)$.

1.3 A expansão em loops da Ação Efetiva

Em teorias com interação é muito difícil, e via de regra impossível, conseguirmos calcular a ação efetiva de maneira exata. Logo, um esquema de aproximação se faz necessário. A construção de um tal esquema é a meta desta seção.

Partimos da igualdade entre as definições do funcional gerador

$$Z[J] = e^{\frac{i}{\hbar}W[J]} = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(S[\varphi] + \varphi\, J\right)\right] \tag{1.39}$$

notando o fato de que recuperamos a constante de Planck reduzida, $\hbar$. Reescrevendo $W[J]$, através de (1.35), obtemos

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\Gamma[\phi] + \phi\, J\right)\right] = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(S[\varphi] + \varphi\, J\right)\right]. \tag{1.40}$$

Com o uso da eq. (1.37) e da mudança de variáveis $\varphi \to \varphi + \phi$, chegamos a

$$e^{\frac{i}{\hbar}\Gamma[\phi]} = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(S[\varphi + \phi] - \varphi\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi}\right)\right]. \tag{1.41}$$

Logo, o funcional $S[\phi + \varphi]$ quando expandido em uma série de Taylor funcional no campo $\varphi(x)$ é

$$S[\phi + \varphi] = S[\phi] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \ldots dx_n \, \frac{\delta^n S[\phi]}{\delta\phi(x_1) \ldots \delta\phi(x_n)} \, \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n), \quad (1.42)$$

que nas notações condensada de DeWitt torna-se

$$S[\phi + \varphi] = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)} = S[\phi] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} S_n[\phi] \varphi^n. \quad (1.43)$$

As $n-$derivadas funcionais

$$S_n[\phi] \equiv \frac{\delta^n S[\phi]}{\delta\phi(x_1) \ldots \delta\phi(x_n)} \quad (1.44)$$

representam as funções de vértice. Inserindo (1.43) em (1.41) alcançamos

$$e^{\frac{i}{\hbar}\Gamma[\phi]} = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \left(S[\phi] + \frac{1}{2} S_2[\phi] \, \varphi^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} S_n[\phi] \, \varphi^n - \varphi \frac{\delta}{\delta\phi} \left(\Gamma[\phi] - S[\phi] \right) \right) \right\}. \quad (1.45)$$

Agora, realizando a seguinte mudança de variáveis $\varphi \to \hbar^{1/2} \varphi$ chegamos a

$$\begin{aligned} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left(\Gamma[\phi] - S[\phi] \right) \right] &= \int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \left(\frac{\hbar}{2} \varphi \, S_2[\phi] \, \varphi + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\hbar^{n/2}}{n!} S_n[\phi] \varphi^n \right.\right. \\ &- \left.\left. \hbar^{1/2} \, \varphi \, \frac{\delta}{\delta\phi} \left(\Gamma[\phi] - S[\phi] \right) \right) \right\}. \quad (1.46) \end{aligned}$$

Percebamos que a ação efetiva $\Gamma[\phi]$ está presente na equação (1.46) num arranjo especial. Definamos, então, o funcional

$$\bar{\Gamma}[\phi] \equiv \Gamma[\phi] - S[\phi]. \quad (1.47)$$

Suponhamos, também, que ele admite uma expansão em série em termos de um parâmetro, $\hbar$, suficientemente pequeno, tal qual

$$\bar{\Gamma}[\phi] = \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n \, \bar{\Gamma}^{(n)}[\phi]. \quad (1.48)$$

Substituindo (1.48) em (1.47) chegamos à *expansão em loops da ação efetiva*

$$\Gamma[\phi] = S[\phi] + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n \, \bar{\Gamma}^{(n)}[\phi]. \tag{1.49}$$

e, desta forma, a ação clássica $S[\phi]$ é o termo de ordem zero nesta expansão, sendo os demais termos correções quânticas à ação clássica. A ordem n na expansão indica o número de *loops* associados a cada termo. Reescrevendo a eq. (1.46), com a ajuda de (1.49), alcançamos

$$\begin{aligned} \exp\left\{ i \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^{n-1} \bar{\Gamma}^{(n)}[\phi] \right\} &= \int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{ \frac{i}{2} \varphi \, S_2[\phi] \, \varphi + i \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\hbar^{(n-2)/2}}{n!} \, S_n[\phi] \, \varphi^n \right. \\ &- \left. i\hbar^{(2n-1)/2} \, \varphi \, \frac{\delta \bar{\Gamma}^{(n)}}{\delta \phi}[\phi] \right\}. \end{aligned} \tag{1.50}$$

Este resultado é de grande importância, desde que com a eq. (1.50) podemos construir uma teoria de perturbações, no parâmetro $\hbar$, para a ação efetiva. Cada termo do expoente, ao lado direito, tem associado a si um diagrama de Feynman. Em particular o termo quadrático $i \, S_2[\phi] \, \varphi^2/2$ está associado ao propagador e os demais termos estão relacionados às interações entre campos [21]. A avaliação de (1.50) em primeira ordem nos fornece

$$e^{i\bar{\Gamma}^{(1)}[\phi]} = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{ \frac{i}{2} \, \varphi \, S_2[\phi] \, \varphi \right\} = \left(\mathrm{Det} \ S_2[\phi]\right)^{-1/2}, \tag{1.51}$$

em que na última igualdade utilizamos a integração funcional gaussiana. Consequentemente escrevemos

$$\bar{\Gamma}^{(1)}[\phi] = \frac{i}{2} \ln \mathrm{Det} \ S_2[\phi] = \frac{i}{2} \mathrm{Tr} \ \ln S_2[\phi]. \tag{1.52}$$

E com a seguinte notação operatorial para a forma bilinear

$$\hat{H} = \hat{H}(x, y) = S_2[\phi] = \frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta\phi(x) \, \delta\phi(y)}; \tag{1.53}$$

chegamos, finalmente, a

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = \frac{i}{2} \ln \mathrm{Det} \ \hat{H} = \frac{i}{2} \mathrm{Tr} \ \ln \hat{H}, \tag{1.54}$$

para a *ação efetiva de 1-loop*, cuja importância é enorme, configurando-se como a ferramenta padrão para os cálculos de *1-loop* para TQCs envolvendo, no máximo, campos escalares e fermiônicos. No caso das teorias de calibre devemos remover uma degenerescência extra, relacionada à simetria de calibre. Este assunto será discutido na subseção 1.4.1.

É importante notar que em (1.54) foram usados os conceitos de *determinante funcional*, Det $\hat{\mathcal{O}}$, e *traço funcional*, Tr $\hat{\mathcal{O}}$, de um operador $\hat{\mathcal{O}}$. Ambos conectados através da fórmula

$$\text{Det}\ \hat{\mathcal{O}} = \exp\left[\text{Tr}\ \hat{\mathcal{O}}\right], \tag{1.55}$$

em que o traço funcional é dado por

$$\text{Tr}\ \hat{\mathcal{O}} = \rho \int d^4x \lim_{x \to x'} \text{tr}\ \hat{\mathcal{O}}(x, x'), \tag{1.56}$$

sendo $\rho = +1$ para campos bosônicos e $\rho = -1$ para campos fermiônicos.

1.4 As teorias de calibre e sua quantização

Na construção das TQCs, no formalismo funcional de Feynman, um ponto relevante e tecnicamente elaborado é a representação das *teorias de calibre* através das integrais de trajetória. Desde que todas as forças fundamentais da natureza podem ser enquadradas como sendo teorias de calibre [127], devemos nos preocupar com as ambiguidades originadas devido a arbitrariedades na escolha dos campos frente às *transformações de calibre*. Essas ambiguidades precisam ser fixadas, de modo que consigamos estabelecer de maneira unívoca a ação da teoria de calibre em estudo. A nossa tarefa, no que segue, é desenvolvermos um método capaz de realizar este objetivo. Para a construção desta seção utilizamos as referências [21, 107, 45, 85].

1.4.1 O método de Faddeev-Popov

O método de Faddeev-Popov (FP), desenvolvido por L.D. Faddeev e V.N. Popov em [50, 44] e independentemente por B.S. DeWitt [33], é capaz de implementar a *fixação do calibre* em teorias escritas no formalismo de integrais de trajetória. Para isto estabelece-se um vínculo sobre os campos da teoria, de modo que o número de *órbitas de calibre* acessíveis seja reduzido.

Seja $S[\phi]$ a ação que descreve uma teoria física que contém um conjunto, $\phi^A(x)$, de campos bosônicos (aqui o índice A inclui tanto os índices internos, quanto os índices relativísticos), então, com o uso das notações condensadas de DeWitt podemos escrever

$$\phi^A(x) \equiv \phi^i, \tag{1.57}$$

em que o índice i agrupa o índice A e as variáveis espaço-tempo x. Consequentemente, nestas notações a derivada covariante de um funcional $F[\phi]$, com respeito aos campos ϕ^i, é escrita como

$$F_{,i}\,[\phi] \equiv \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi^i} \tag{1.58}$$

e também temos

$$F_{,i}\,[\phi]\,\delta\phi^i \equiv \int dx\,\frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi^i}\,\delta\phi^i. \tag{1.59}$$

As equações de movimento da teoria, por sua vez, se apresentam em uma forma bastante condensada

$$S_{,i}\,[\phi] = 0. \tag{1.60}$$

Consideremos uma transformação infinitesimal dos campos ϕ^i com parâmetros $\xi^a(x) \equiv \xi^\alpha$,

$$\delta\phi^i = R^i{}_\alpha[\phi]\,\xi^\alpha, \tag{1.61}$$

sendo $\alpha = \{a, x\}$. Salientamos que no lado direito desta equação está implícita uma soma sobre o índice a e uma integração sobre as variáveis x. Logo, sob a transformação (1.61), a ação $S[\phi]$ se transforma como

$$\delta S[\phi] = S_{,i}\,R^i{}_\alpha[\phi]\xi^\alpha. \tag{1.62}$$

Impondo o *princípio de Hamilton* somos levados a

$$S_{,i}\,R^i{}_\alpha[\phi] = 0, \tag{1.63}$$

uma vez que os parâmetros ξ^α são arbitrários. Se esta relação for satisfeita sem o uso das equações de movimento (1.60), a teoria descrita pela ação $S[\phi]$ é denominada *teoria de calibre*, a qual está sujeita às *transformações de calibre* (1.61), que por sua vez são geradas pelos *geradores de calibre* $R^i{}_\alpha$. Por fim, os campos ϕ^i são igualmente denominados *campos de calibre*. Podemos citar, pelo menos, três exemplos de campos de calibre importantes: o campo eletromagnético $A_\mu(x)$, o campo de Yang-Mills $A_\mu^a(x)$ e o campo gravitacional $g_{\mu\nu}(x)$.

Seja o funcional gerador das funções de Green da teoria dado por

$$Z[\phi] = \int \mathcal{D}\{\phi\}\ e^{i\,S[\phi]}, \tag{1.64}$$

em que ignoramos, por ora, o termo de fonte $\phi^i\, J_i$, pois podemos adicioná-lo apenas no final da análise sem que haja prejuízo ao desenvolvimento do nosso raciocínio. Notamos aqui que o elemento de integração $\{\phi\}$ indica que estamos integrando sobre todas as diferentes órbitas de calibre. O significado desta integração sobre órbitas é o seguinte: a integral funcional deve, por definição, contabilizar todas as contribuições dos campos ϕ^i, com peso $\exp\{iS[\phi]\}$ para cada uma delas. Todavia, devido à simetria de calibre, todas as configurações idênticas a menos de uma transformação de calibre irão produzir a mesma contribuição. Isto se traduz como uma integral ao longo de uma única órbita de calibre. Desta maneira, esta integral sobre a órbita será divergente, e precisaremos eliminar esta divergência. Veremos como fazer isto no que segue.

Considere, agora, ao invés da equação (1.64), a seguinte integral de caminho padrão

$$\int \mathcal{D}\phi\, e^{i\,S[\phi]}, \tag{1.65}$$

que quando comparada à forma anterior, devido a invariância de calibre da ação $S[\phi]$, possui uma degenerescência extra causada pela integração sobre o *grupo de calibre*. Desta maneira, a integração sobre todas as órbitas deve ser fatorizada, resultando em um fator multiplicativo, vol G, que é o *volume do grupo de calibre*. Sendo assim, a equação (1.65) torna-se

$$\int \mathcal{D}\phi\, e^{i\,S[\phi]} = \mathrm{vol}\ G \int \mathcal{D}\{\phi\}\ e^{i\,S[\phi]}. \tag{1.66}$$

Por outro lado, é desejável reescrevermos a integral (1.64) em função dos campos originais ϕ^i. Para realizar isto, consideremos um funcional $\chi^\alpha[\phi]$, denominado *calibre*, introduzido através da seguinte equação

$$\chi^\alpha[\phi] - \ell^\alpha = 0, \tag{1.67}$$

em que $\ell^\alpha = \ell^\alpha(x)$ é uma função arbitrária chamada de *parâmetro de fixação de calibre*. A expressão (1.67) pode ser interpretada como uma equação de uma superfície. Se impormos que esta superfície seja interceptada uma única vez por cada órbita de calibre, então, o número de equações contidas em (1.67) será idêntico ao número de parâmetros de calibre da transformação. Logo, a integral funcional (1.64) sobre todos os campos ϕ^i vinculados à superfície definida por (1.67) deve incluir o fator $\delta(\chi^\alpha[\phi] - \ell^\alpha)$. Consequentemente, esta integral será reescrita como

$$\int \mathcal{D}\phi \, e^{i\,S[\phi]} \, \delta(\chi^\alpha[\phi] - \ell^\alpha) \, \Delta[\phi], \tag{1.68}$$

para um dado funcional $\Delta[\phi]$, até então arbitrário. Nossa tarefa é encontrar este funcional.

Buscaremos, assim, representar a integral funcional do lado direito de (1.66) como um produto de dois fatores. Um deles é vol G, então, o outro deve ser a integral (1.64) em termos dos campos originais ϕ^i. Chegaremos a uma integral análoga a (1.68) com o funcional $\Delta[\phi]$ explícito. Nosso ponto de partida será escrever o *ansatz* de Faddeev-Popov

$$\Delta[\phi] \int \mathcal{D}h \, \delta(\chi^\alpha[{}^h\phi] - \ell^\alpha) = 1, \tag{1.69}$$

em que ${}^h\phi^i$ é o resultado da ação de um elemento h, pertencente ao grupo G das transformações de calibre, sobre os campos ϕ^i. Sendo a integral sobre h uma integral formal, com respeito ao grupo de calibre, teremos

$$\int \mathcal{D}h \, 1 = \text{vol } G. \tag{1.70}$$

Se, então, multiplicarmos (1.65) pela unidade, na forma (1.69), alcançaremos

$$\int \mathcal{D}\phi \, e^{iS[\phi]} = \int \mathcal{D}\phi \, \mathcal{D}h \, e^{iS[\phi]} \, \delta(\chi^\alpha[{}^h\phi] - \ell^\alpha)\Delta[\phi]. \tag{1.71}$$

Façamos, assim, a seguinte mudança de variáveis ${}^h\phi^i \to \phi^i$ em (1.71). Uma observação importante é que para a teoria gravitacional existem parametrizações dos campos ϕ^i para as quais os geradores associados dependem linearmente dos campos. Neste contexto, o jacobiano da mudança de variáveis acima é uma constante que pode ser ignorada. Além disso, esta parametrização pode ser vista como uma transformação de calibre. Assim, os funcionais $S[\phi]$ e $\Delta[\phi]$ são mantidos invariantes. Logo,

$$\begin{aligned}\int \mathcal{D}\phi \, e^{iS[\phi]} &= \int \mathcal{D}h \int \mathcal{D}\phi \, e^{iS[\phi]} \, \delta(\chi^\alpha[\phi] - \ell^\alpha)\Delta[\phi] \\ &= \text{vol } G \int \mathcal{D}\phi \, e^{iS[\phi]} \, \delta(\chi^\alpha[\phi] - \ell^\alpha)\Delta[\phi]. \qquad (1.72)\end{aligned}$$

Se, agora, compararmos (1.66) com (1.72) chegamos a

$$\int \mathcal{D}\{\phi\}\, e^{iS[\phi]} = \int \mathcal{D}\phi\, e^{iS[\phi]}\, \delta(\chi^\alpha[\phi] - \ell^\alpha)\Delta[\phi]. \tag{1.73}$$

Esta equação nos possibilita o estabelecimento de uma integral funcional para uma teoria de calibre, isto é,

$$\int \mathcal{D}\phi\, e^{iS[\phi]}\, \delta(\chi^\alpha[\phi] - \ell^\alpha)\Delta[\phi]. \tag{1.74}$$

No entanto, ainda precisamos determinar o funcional $\Delta[\phi]$. Observando a eq. (1.74) percebemos que este funcional deve ser calculado sobre os campos ϕ^i, os quais devem satisfazer (1.67). Desta maneira, é suficiente que integremos sobre h próximo ao elemento identidade para os campos ϕ^i, os quais obedecem (1.69). O que é implementado através da seguinte relação

$$^h\phi^i = \phi^i + \delta\phi^i = \phi^i + R^i{}_\alpha[\phi]\chi^\alpha. \tag{1.75}$$

Uma integral sobre o grupo de calibre, considerando a medida $\mathcal{D}h$, nas proximidades do elemento identidade é uma integral sobre os parâmetros ξ^α, de tal forma que podemos trocar sem perda de generalidade $\mathcal{D}h \to \mathcal{D}\xi$. Assim, teremos

$$\begin{aligned} 1 &= \Delta[\phi]\int \mathcal{D}\xi\, \delta(\chi^\alpha[\phi^i + R^i{}_\alpha[\phi]\xi^\alpha] - \ell^\alpha) \\ &= \Delta[\phi]\int \mathcal{D}\xi\, \delta(\chi^\alpha[\phi] + \chi^\alpha{}_{,i}[\phi]R^i{}_\beta\xi^\beta - \ell^\alpha) \\ &= \Delta[\phi]\int \mathcal{D}\xi\, \delta(\xi^\alpha)\left(\text{Det}\ \chi^\alpha{}_{,i}[\phi]R^i{}_\beta[\phi]\right)^{-1}, \end{aligned} \tag{1.76}$$

em que para obter a última igualdade utilizamos o fato de que os campos ϕ^i devem satisfazer (1.67). De maneira imediata a equação (1.76) nos fornece que

$$\Delta[\phi] = \text{Det}\ M^\alpha{}_\beta[\phi], \tag{1.77}$$

sendo

$$M^\alpha{}_\beta[\phi] \equiv \chi^\alpha{}_{,i}[\phi]R^i{}_\beta[\phi]. \tag{1.78}$$

Consequentemente, a integral (1.68) pode ser posta na forma

$$\int \mathcal{D}\phi\, e^{iS[\phi]}\, \delta(\chi^\alpha[\phi] - \ell^\alpha)\,\text{Det}\ M^\alpha{}_\beta[\phi]. \tag{1.79}$$

Alertamos que a eq. (1.79) pode ser reescrita de uma maneira ainda mais útil. Para isto, introduzimos um funcional $G_{\alpha\beta}[\phi]$, de modo que possamos formar uma unidade com ele, tal qual

$$1 = (\text{Det } G_{\alpha\beta}[\phi])^{1/2} \int \mathcal{D}\ell \, \exp\left\{ \frac{i}{2} \, \ell^\alpha \, G_{\alpha\beta}[\phi] \, \ell^\beta \right\}. \tag{1.80}$$

Multiplicando a eq. (1.79) por esta unidade chegamos a

$$\int \mathcal{D}\phi \, \exp\left\{ i \, S[\phi] + \frac{1}{2} \, \chi^\alpha[\phi] \, G_{\alpha\beta}[\phi] \, \chi^\beta[\phi] \, \text{Det } M^\alpha{}_\beta \, [\phi] \, (\text{Det } G_{\alpha\beta}[\phi])^{1/2} \right\}. \tag{1.81}$$

O determinante da matriz $M^\alpha{}_\beta$ admite uma representação integral funcional sobre campos anticomutativos, ou seja,

$$\text{Det } M^\alpha{}_\beta \, [\phi] = \int \mathcal{D}\bar{C} \, \mathcal{D}C \, \exp\left\{ \frac{i}{2} \, \bar{C}_\alpha \, M^\alpha{}_\beta \, C^\beta \right\}, \tag{1.82}$$

em que os campos $\bar{C}_\alpha$ e C^β são os chamados *fantasmas de Faddeev-Popov.* Eles são campos bosônicos com estatística fermiônica, logo, não podem ser campos físicos. Justificando, assim, o nome fantasmas. O mesmo tipo de representação pode ser utilizada para expressar o Det $^{1/2} G_{\alpha\beta}[\phi]$ como

$$(\text{Det } G_{\alpha\beta}[\phi])^{1/2} = \int \mathcal{D}b \, \exp\left\{ \frac{i}{2} \, b^\alpha \, G_{\alpha\beta} \, b^\beta \right\}. \tag{1.83}$$

Usando estas representações somos capazes de reescrever a eq. (1.81) na forma

$$\int \mathcal{D}\phi \, \mathcal{D}\bar{C} \, \mathcal{D}C \, \mathcal{D}b \, \exp\left\{ i \left(S[\phi] + S_{GF}[\phi] + S_{Gh}[\phi, \bar{C}, C, b] \right) \right\}, \tag{1.84}$$

em que S é a ação original da teoria, S_{GF} é a *ação de fixação de calibre*[4], dada por

$$S_{GF}[\phi] = \frac{1}{2} \, \chi^\alpha[\phi] \, G_{\alpha\beta}[\phi] \, \chi^\beta[\phi], \tag{1.85}$$

e S_{Gh} é a *ação dos fantasmas*[5], expressa como

$$S_{Gh}[\phi, \bar{C}, C, b] = \bar{C}_\alpha \, M^\alpha{}_\beta \, C^\beta + \frac{1}{2} \, b^\alpha \, G_{\alpha\beta}[\phi] \, b^\beta, \tag{1.86}$$

[4] Gauge Fixing, em inglês.
[5] Ghosts, no inglês.

sendo o campo b^α, o assim denominado, terceiro fantasma. A eq. (1.84), juntamente com as definições (1.85) e (1.86), é utilizada para estabelecer a definição do *funcional gerador das funções de Green* de uma teoria de calibre. Este funcional gerador tem a seguinte forma

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi\, \mathcal{D}\bar{C}\, \mathcal{D}C\, \mathcal{D}b \, \exp\left\{ i\left(S[\phi] + S_{GF}[\phi] + S_{Gh}[\phi, \bar{C}, C, b] + \phi^i\, J_i \right) \right\}, \quad (1.87)$$

em que já incluímos o termo de fonte $\phi^i\, J_i$. Façamos uma observação importante para os nossos cálculos futuros. O funcional $G_{\alpha\beta}[\phi]$ geralmente não depende dos campos, sendo assim, o $\mathrm{Det}^{\,1/2} G_{\alpha\beta}[\phi]$ é constante e podemos omiti-lo. Dessa maneira, o terceiro fantasma é irrelevante, inclusive para o nosso cálculo no capítulo 3.

Por fim, com o uso do funcional (1.87) podemos realizar, também, um procedimento análogo àquele que ultilizamos na subseção 1.3 e considerar a espansão em *loops* da ação efetiva. Neste caso, a expressão (1.87) escrita na ordem de *1-loop* fica

$$\begin{aligned} e^{i\,\bar{\Gamma}^{(1)}[\phi]} &= \int \mathcal{D}\phi\, \mathcal{D}C\, \mathcal{D}\bar{C}\, \exp\left\{ i \left[\frac{1}{2} S_{,\,ij}[\phi]\, \phi^i\, \phi^j + \frac{1}{2} S_{GF,\,ij}[\phi]\, \phi^i\, \phi^j + \bar{C}_\alpha\, M^\alpha{}_\beta[\phi]\, C^\beta \right] \right\} \\ &= \mathrm{Det}^{\,-1/2}\left(S_{,\,ij}[\phi] + S_{GF,\,ij}[\phi] \right) \mathrm{Det}\; M^\alpha{}_\beta[\phi]. \end{aligned} \quad (1.88)$$

Consequentemente,

$$\bar{\Gamma}^{(1)}[\phi] = \frac{i}{2} \mathrm{Tr}\; \ln\left(S_{,\,ij}[\phi] + S_{GF,\,ij}[\phi] \right) - i\, \mathrm{Tr}\; \ln M^\alpha{}_\beta[\phi]. \quad (1.89)$$

Agora, usando as definições $\hat{H} \equiv S_{,\,ij} + S_{GF,\,ij}$ e $\hat{H}_{GH} \equiv M^\alpha{}_\beta$, podemos reescrever a equação (1.89) como

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = \frac{i}{2} \mathrm{Tr}\; \ln \hat{H} - i\, \mathrm{Tr}\; \ln \hat{H}_{GH}. \quad (1.90)$$

Esta fórmula é a generalização da equação (1.54) para as teorias de calibre, por isto, sua importância é central. Será com ela que efetivamente calcularemos, no capítulo 3, as divergências de *1-loop* para o problema proposto nesta tese.

1.5 O método de campo de fundo

Em consonância com a subseção anterior, discutiremos aqui, sucintamente, uma técnica bastante útil na quantização dos campos de calibre, cuja principal vantagem é a sua capacidade de manter explícita a invariância de calibre de uma teoria clássica mesmo após a sua quantização. Esta técnica se chama *método de campo de fundo* e foi introduzida por B.S. DeWitt em um contexto cuja aplicabilidade se restringia a processos de *1-loop* [33]. A sua posterior extensão para todas as ordens da expansão perturbativa foi desenvolvida por várias pessoas, entre elas: 't Hooft, DeWitt, Boulware e Abbott [2].

No estudo de uma teoria de campos de calibre começamos primeiro estabelecendo uma ação *invariante de calibre*[6] que descreva a teoria de interesse. Todavia, para quantizarmos a teoria um calibre deve ser escolhido. Além disso, a ação total consiste da soma de uma ação clássica, uma ação de fixação de calibre e uma ação dos fantasmas de Faddeev-Popov, tal qual mostramos na subseção anterior. Logo, esta ação total não é um invariante de calibre. Desta maneira, no método de campo de fundo o formalismo é estruturado de modo que a invariância de calibre, explícita na ação original, seja, também, explícita na ação de fixação de calibre e na ação dos fantasmas de Faddeev-Popov.

Como vimos anteriormente, as funções de Green $G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ são obtidas através do cálculo das derivadas funcionais do funcional gerador $Z[J]$ com respeito à fonte $J(x)$. No entanto, estas funções de Green são *funções de Green desconectadas*. Sendo assim, elas não contribuem para a matriz S da teoria, ou seja, aquela que nos possibilita o cálculo de seções de choque e taxas de decaimento. Em vista disto, definimos o funcional gerador $W[J]$ das funções de Green conectadas, aquelas que de fato contribuem para a matriz S da teoria. Vimos, ainda, que um objeto de grande importância é a ação efetiva, $\Gamma[\phi]$, dada pela eq. (1.35). Esta gera todos os diagramas de Feynman do tipo 1PI (*one-particle-irreducible*), aqueles diagramas que são conectados e não podem ser desconectados pelo corte de somente uma única linha interna [28]. O método de campo de fundo, como mostraremos, é um procedimento eficiente para o cálculo da ação efetiva.

Iremos aqui considerar apenas teorias gerais, que não são invariantes de calibre. Construiremos, assim, os argumentos principais do método, os quais podem ser estendidos para as teorias de calibre de maneira imediata. Desta forma, dado o funcional gerador $Z[J]$, definido pela equação (1.27), consideramos um novo funcional gerador,

[6] Ou seja, aquela que não é alterada sob uma transformação de calibre, equação (1.61).

$\widetilde{Z}[J]$, obtido através da seguinte mudança nas variáveis de campo na ação clássica

$$\varphi^i \to \varphi^i + \eta^i. \tag{1.91}$$

Desta maneira, o novo funcional gerador será

$$\widetilde{Z}[J,\eta] = \int \mathcal{D}\varphi \, e^{i(S[\varphi+\eta]+\varphi\, J)}, \tag{1.92}$$

sendo ele dependente tanto da fonte $J(x)$ quanto do *campo de fundo* η^i. Por analogia direta, podemos definir o funcional

$$\widetilde{W}[J,\eta] = -i \, \ln \widetilde{Z}[J,\eta] \tag{1.93}$$

e o *campo médio*

$$\widetilde{\phi} = \frac{\delta \widetilde{W}}{\delta J}, \tag{1.94}$$

além da *ação efetiva*

$$\widetilde{\Gamma}[\widetilde{\phi},\eta] = \widetilde{W}[J,\eta] - J\,\widetilde{\phi}. \tag{1.95}$$

Realizando uma nova mudança de variáveis $\varphi^i \to \varphi^i - \eta^i$ na eq. (1.92) somos capazes de relacionar os funcionais geradores $\widetilde{Z}[J,\eta]$ e $Z[J]$ através da equação

$$\widetilde{Z}[J,\eta] = Z[J]\, e^{-i\,J\,\eta}, \tag{1.96}$$

cujo logaritmo nos fornece

$$\widetilde{W}[J,\eta] = W[J] - J\,\eta. \tag{1.97}$$

Diferenciando (1.97) com respeito a $J(x)$ e usando as equações (1.34) e (1.94), obtemos

$$\widetilde{\phi}^i = \phi^i - \eta^i. \tag{1.98}$$

Logo, a partir das fórmulas (1.35) e (1.95) chegamos a

$$\widetilde{\Gamma}[\widetilde{\phi},\eta] = W[J] - J\,\eta - J\,\phi + J\,\eta = \Gamma[\phi]. \tag{1.99}$$

Invertendo a equação (1.98), podemos escrever ainda

$$\widetilde{\Gamma}[\widetilde{\phi},\eta] = \Gamma[\widetilde{\phi}+\eta]. \tag{1.100}$$

As relações (1.99) e (1.100) são de grande importância. Um caso especial de interesse é aquele em que fazemos $\widetilde{\phi} = 0$ em (1.100). Resultando, então, em

$$\widetilde{\Gamma}[0, \eta] = \Gamma[\eta]. \tag{1.101}$$

Desta maneira, vemos que a ação efetiva $\widetilde{\Gamma}[\widetilde{\phi}, \eta]$ é a ação efetiva habitual calculada na presença do campo de fundo η^i. Por outro lado, a ação $\widetilde{\Gamma}[0, \eta]$ não depende de $\widetilde{\phi}$ sendo, portanto, a soma dos diagramas de vácuo do tipo 1PI na presença do campo de fundo η^i. Para o cálculo de $\widetilde{\Gamma}[0, \eta]$ podemos tratar o campo de fundo η^i de maneira perturbativa. Nesta abordagem o campo de fundo é considerado arbitrário. Calculando a parte quadrática da ação com respeito ao campo ϕ^i somos capazes de estabelecer o propagador da teoria, sendo os termos não-quadráticos responsáveis pelas interações campo-campo. Com isto, podemos calcular qualquer função de Green do tipo 1PI. Uma extensão para as teorias de calibre no contexto da teoria de Yang-Mills, onde inclusive é mostrada a invariância de calibre da ação efetiva, pode ser encontrada em [2]. Por fim, salientamos que a aplicação do método de campo de fundo para as teorias de calibre é completamente análoga à realizada aqui com uma única diferença crucial: a necessidade da fixação de um calibre. Mostraremos este procedimento em funcionamento no capítulo 3.

Capítulo 2

O Método de Heat-Kernel para o cálculo de divergências a 1-loop

O *método de heat kernel* [1] é um tema extensivamente estudado devido a sua vasta gama de aplicações tanto em Física, quanto em Matemática. Na Física ele é capaz de nos fornecer, por exemplo, o comportamento para propagadores a pequenas distâncias, divergências a *1-loop*, anomalias quânticas e pode ser usado também em cálculos envolvendo o efeito Casimir e condensados de Bose-Einstein [118]. Já em matemática, é uma ferramenta poderosa no estudo do *teorema do índice* de Atiyah e Singer e no estudo de operadores diferenciais em variedades não triviais. Naturalmente, muitas são as áreas em que foram sentidas suas influências: as teorias quânticas de gravitação, a teoria de cordas e as teorias quânticas de gauge são alguns exemplos [120].

Lembremos que no capítulo 1 aprendemos que as correções quânticas a *1-loop*, da ação efetiva podem ser escritas como

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = \frac{i}{2}\mathrm{Tr}\ \ln \hat{H}. \tag{2.1}$$

Uma variação desta ação, com respeito a parâmetros externos, é realizada através do operador bilinear $\hat{H}$ associado a $S^{(2)}$,

$$\delta\bar{\Gamma}^{(1)} = \frac{i}{2}\mathrm{Tr}\ \hat{H}^{-1}\delta\hat{H}. \tag{2.2}$$

Um fato importante é que o operador $\hat{H}^{-1}$ admite a *representação integral de Fock-*

[1] Em teoria de campos, também chamado de *técnica de Schwinger-Dewitt.*

Schwinger-DeWitt

$$\hat{H}^{-1} = i \int_0^{\infty} ds \, e^{-is\hat{H}}, \tag{2.3}$$

em que integramos sobre o *tempo-próprio* s, para mais detalhes veja: [102], [32] e [9]. Substituindo (2.3) em (2.2) obtemos

$$\begin{aligned} \delta\bar{\Gamma}^{(1)} &= \frac{i}{2}\mathrm{Tr}\, \left(i \int_0^{\infty} ds \, e^{-is\hat{H}} \right) \delta\hat{H} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\, \int_0^{\infty} ds \, e^{-is\hat{H}}\delta\hat{H} \\ &= \delta\left(-\frac{i}{2}\mathrm{Tr}\, \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} \, e^{-is\hat{H}} \right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Com o auxílio de (2.4), reescrevemos a *ação efetiva a 1-loop* como

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}\, \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} \, e^{-is\hat{H}}, \tag{2.5}$$

a menos de uma constante aditiva que pode ser desprezada com segurança.

No integrando de (2.5), o termo

$$\hat{\mathscr{U}}(s) \equiv e^{-is\hat{H}} \tag{2.6}$$

é denominado *operador de evolução* ou *heat kernel* [9]. Desde que no espaço das coordenadas podemos representá-lo como

$$\hat{\mathscr{U}}(x, x'|s) = \langle x| e^{-is\hat{H}} |x'\rangle, \tag{2.7}$$

é possível verificar que ele obedece à uma equação dinâmica do tipo-Schrödinger

$$i\frac{\partial}{\partial s}\hat{\mathscr{U}}(x, x'|s) = -\hat{H}\hat{\mathscr{U}}(x, x'|s), \tag{2.8}$$

em que o parâmetro s é, naturalmente, uma coordenada tipo-tempo. À equação (2.8) devemos implementar a seguinte condição inicial

$$\hat{\mathscr{U}}(x, x'|0) = \delta(x - x'). \tag{2.9}$$

Desta forma, solucionando a equação dinâmica (2.8), somos capazes de obter uma expressão para o operador evolução e em última instância obter $\bar{\Gamma}^{(1)}$.

Vamos agora supor que o operador bilinear, $\hat{H}$, possa ser escrito na forma mínima

$$\hat{H} = \hat{1}\Box + \hat{\Pi}, \tag{2.10}$$

em que $\hat{\Pi}$ é, a princípio, uma matriz arbitrária dependente do modelo da teoria de campos em questão. Então, segundo [102] e [32] é possível solucionar a equação (2.8) através do seguinte *ansatz*

$$\hat{\mathscr{U}}(x,x'|s) = -\frac{i}{(4\pi)^2}\frac{[\mathscr{D}(x,x')]^{1/2}}{s^2}\exp\left[\frac{i\sigma(x,x')}{2\,s}\right]\sum_{n=0}^{\infty}(is)^n\hat{a}_n(x,x'), \tag{2.11}$$

em que $\sigma(x,x')$ é denominado *intervalo geodésico*[2] e equivale à metade do quadrado da distância geodésica entre os pontos x e x'; $\mathscr{D}(x,x')$ é o *determinante de van Vleck-Pauli-Morette*, dado por

$$\mathscr{D}(x,x') = -\det\left[\frac{\partial^2\sigma(x,x')}{\partial x^\mu \partial x'^\nu}\right]. \tag{2.12}$$

Podemos ainda definir a *bidensidade escalar de van Vleck* como

$$\Delta(x,x') = g^{-1/2}(x)\mathscr{D}(x,x')g^{-1/2}(x'), \tag{2.13}$$

que nos será bastante útil no que segue, enquanto que os termos $\hat{a}_n(x,x')$ são os *coeficientes de Hadamard-Minakshisundaram-Dewitt* (HAMIDEW)[3] ou, simplesmente, *coeficientes de DeWitt*. Estes são de grande importância para a determinação de divergências e anomalias em TQCs. De particular utilidade são os valores destes coeficientes no, assim chamado, *limite de coincidência*, isto é, quando $x \to x'$.

Com o objetivo de conciliarmos a técnica de Schwinger- DeWitt com o procedimento de regularização dimensional é importante generalizarmos nossas expressões para um espaço-tempo 2ω dimensional, podendo o parâmetro ω inclusive ser complexo [70]. Sendo assim, devemos generalizar a expressão (2.11) para

$$\hat{\mathscr{U}}(x,x'|s) = -\frac{i}{(4\pi)^\omega}\frac{[\mathscr{D}(x,x')]^{1/2}}{s^\omega}\exp\left[\frac{i\sigma(x,x')}{2\,s}\right]\hat{\Omega}(x,x'), \tag{2.14}$$

em que $\hat{\Omega}(x,x') = \sum_{n=0}^{\infty}(is)^n\hat{a}_n(x,x')$. Substituindo a solução (2.14) na equação dinâmica (2.8), obteremos uma relação recursiva que nos habilita a determinação dos coeficientes de DeWitt. Calculando, então, separadamente as derivadas de (2.8), obtemos para o termo com derivada tipo-tempo o resultado

$$i\partial_s\mathscr{U} = \frac{\mathscr{D}^{1/2}}{(4\pi)^\omega}\exp\left(\frac{i\sigma}{2s}\right)\left\{-\frac{i\sigma}{2s^{2+\omega}}\hat{\Omega} - \frac{\omega}{s^{1+\omega}}\hat{\Omega} + \frac{i}{s^\omega}\sum_{n=1}^{\infty}n(is)^{n-1}\hat{a}_n\right\}. \tag{2.15}$$

[2] Ou *função mundo* [116].

[3] Como estabelecido em [54].

Já para o termo com o d'Alembertiano,

$$
\begin{aligned}
\Box\mathscr{U} = \nabla^{\mu}\nabla_{\mu}\mathscr{U} &= \frac{-i}{(4\pi s)^{\omega}}\left\{\Box\left(\mathscr{D}^{1/2}\hat{\Omega}\right)\exp\left(\frac{i\sigma}{2s}\right) + 2\,\nabla_{\mu}\left(\mathscr{D}^{1/2}\hat{\Omega}\right)\nabla^{\mu}\left[\exp\left(\frac{i\sigma}{2s}\right)\right]\right. \\
&+ \left.\mathscr{D}^{1/2}\hat{\Omega}\,\Box\left[\exp\left(\frac{i\sigma}{2s}\right)\right]\right\}, \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

em que omitimos as dependências em x e x' para uma notação mais limpa. No cálculo do último termo do lado direito da equação (2.16), chegaremos a uma estrutura da forma $\sigma,^{\mu}\sigma,_{\mu}$. Esta estrutura pode ser avaliada através da importante relação

$$
\sigma = \frac{1}{2}\sigma,^{\mu}\sigma,_{\mu}\,, \qquad (2.17)
$$

cuja prova pode ser encontrada em [32]. Após algumas manipulações reescrevemos a equação (2.8) como

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\exp\left(i\sigma/2s\right)}{(4\pi s)^{\omega}}\left\{-\frac{\omega}{s}\mathscr{D}^{1/2}\hat{\Omega} + i\sum_{n=1}^{\infty} n(is)^{n-1}\mathscr{D}^{1/2}\hat{a}_n - i\,\Box\left(\mathscr{D}^{1/2}\hat{\Omega}\right)\right. \\
&+ \left.\frac{1}{s}\nabla_{\mu}\left(\mathscr{D}^{1/2}\hat{\Omega}\right)\sigma,^{\mu} + \frac{1}{2s}\mathscr{D}^{1/2}\,\hat{\Omega}\,\Box\sigma\right\}. \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

Analisemos primeiro a aproximação de ordem zero da eq. (2.18)

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{\exp\left(i\sigma/2s\right)}{(4\pi s)^{\omega}}\mathscr{D}^{1/2}&\left\{-\frac{\omega}{s}\hat{a}_0 - i\mathscr{D}^{-1/2}\,\Box\left(\mathscr{D}^{1/2}\hat{a}_0\right)\right. \\
&\left. + \frac{1}{s}\mathscr{D}^{-1/2}\,\sigma,^{\mu}\,\nabla_{\mu}\left(\mathscr{D}^{1/2}\hat{a}_0\right) + \frac{1}{2s}\hat{a}_0\,\Box\,\sigma\right\}. \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

É importante salientar que o segundo termo de (2.19) é de ordem $\mathcal{O}(s^0)$, enquanto os demais são de ordem $\mathcal{O}(s^{-1})$. Desta forma, o segundo termo só será relevante para determinação dos $\hat{a}_n$ com $n \geq 1$. Multiplicando essa equação por s e usando a identidade

$$
\Box\sigma = 2\omega - \sigma,^{\mu}\mathscr{D}^{-1}\mathscr{D},_{\mu}\,, \qquad (2.20)
$$

cuja prova encontra-se no apêndice A, ficaremos com

$$
0 = -\omega\hat{a}_0 + \mathscr{D}^{-1/2}\,\sigma,^{\mu}\,\nabla_{\mu}\left(\mathscr{D}^{1/2}\,\hat{a}_0\right) + \frac{\hat{a}_0}{2}\left(2\omega - \sigma,^{\mu}\mathscr{D}^{-1}\mathscr{D},_{\mu}\right), \qquad (2.21)
$$

que após algumas simplificações nos leva a

$$\sigma,^{\mu} \nabla_{\mu} \hat{a}_0 = 0. \tag{2.22}$$

Esta é a primeira das relações de recorrência desejadas. A segunda relação é obtida quando reconsideramos novamente a equação (2.18) na forma

$$\begin{aligned} &\omega \sum_{n=0}^{\infty} (is)^n \hat{a}_n - \sum_{n=1}^{\infty} n(is)^n \hat{a}_n + \mathscr{D}^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (is)^{(n+1)} \Box \left(\mathscr{D}^{1/2}\, \hat{a}_n \right) \\ - \quad & \mathscr{D}^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (is)^n \nabla_{\mu} \left(\mathscr{D}^{1/2}\, \hat{a}_n \right) \sigma,^{\mu} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (is)^n \hat{a}_n \Box \sigma = 0. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Substituindo $n \to n+1$ em todos os termos cujas potências de is são n, e manipulando a equação resultante chegamos a

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} (is)^{(n+1)} \Big[\omega\, \hat{a}_{n+1} - (n+1)\hat{a}_{n+1} + \mathscr{D}^{-1/2} \Box \left(\mathscr{D}^{1/2}\, \hat{a}_n \right) - \mathscr{D}^{-1/2}\, \sigma,^{\mu} \nabla_{\mu} \left(\mathscr{D}^{1/2}\, \hat{a}_{n+1} \right) \\ - \quad & \frac{1}{2} \Box\, \sigma\, \hat{a}_{n+1} \Big] + \left[\omega \hat{a}_0 - \mathscr{D}^{-1/2}\, \sigma,^{\mu} \nabla_{\mu} \left(\mathscr{D}^{1/2} \hat{a}_0 \right) - \frac{1}{2} \Box\, \sigma\, \hat{a}_0 \right] = 0. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Agora, manipulando os termos no interior dos últimos colchetes e fazendo uso das equações (2.20) e (2.22), podemos mostrar que estes termos combinados dão zero. Além disso, se substituirmos $\mathscr{D}$ por Δ, com o auxílio de (2.13), e usarmos o fato de que a métrica é *covariantemente constante*, então, somos capazes de escrever

$$\omega\, \hat{a}_{n+1} - (n+1)\hat{a}_{n+1} + \Delta^{-1/2} \Box \left(\Delta^{1/2}\, \hat{a}_n \right) - \Delta^{-1/2}\, \sigma,^{\mu} \nabla_{\mu} \left(\Delta^{1/2}\, \hat{a}_{n+1} \right) - \frac{1}{2} \Box\, \sigma\, \hat{a}_{n+1} = 0, \tag{2.25}$$

em que subentendemos a soma, de zero a infinito, sobre todos os índices n, e ignoramos as constantes multiplicativas globais. Com mais uma substituição de $\mathscr{D}$ por Δ na relação (2.20), e com o cálculo da derivada $\nabla_{\mu} \left(\Delta^{1/2}\, \hat{a}_{n+1} \right)$, conseguimos, finalmente, após um trabalho algébrico, obter a segunda relação de recorrência

$$\Delta^{-1/2} \Box \left(\Delta^{1/2} \hat{a}_n \right) = (n+1)\hat{a}_{n+1} + \sigma,^{\mu} \nabla_{\mu} \left(\hat{a}_{n+1} \right). \tag{2.26}$$

Um fato importante é que esta é a relação obtida para a solução em que $\hat{H} = \hat{1}\,\Box$. Considerando um operador bilinear mais geral, do tipo $\hat{H} = \hat{1}\,\Box + \hat{\Pi}$, a segunda relação de recorrência se modificará para

$$\Delta^{-1/2} \Box \left(\Delta^{1/2} \hat{a}_n \right) + \hat{\Pi}\, \hat{a}_n = (n+1)\hat{a}_{n+1} + \sigma,^{\mu} \nabla_{\mu} \left(\hat{a}_{n+1} \right), \tag{2.27}$$

conforme pode ser visto em [23].

Como alertamos anteriormente, é importante para os nossos propósitos apenas o limite de coincidência dos coeficientes de DeWitt. Isto se deve ao fato de que na fórmula para a ação efetiva, equação (2.1), o traço funcional inclui o limite em que $x \to x'$. Sendo assim, dadas as relações de recorrência (2.22) e (2.27) é possível, através de um cálculo laborioso e o uso intenso de diversas identidades envolvendo as derivadas da função $\sigma(x, x')$, obter os seguintes valores para os três primeiros coeficientes de DeWitt

$$\begin{aligned} \hat{a}_0 &= \hat{\mathbb{1}}; \\ \hat{a}_1 &= \hat{P}; \\ \hat{a}_2 &= \frac{\hat{\mathbb{1}}}{180}\left(R^2_{\mu\nu\alpha\beta} - R^2_{\mu\nu} + \Box\, R\right) + \frac{1}{2}\hat{P}^2 + \frac{1}{6}\Box\,\hat{P} + \frac{1}{2}\hat{S}^2_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{2.28}$$

em que definimos

$$\hat{a}_n \equiv \lim_{x \to x'} \hat{a}_n(x, x'), \tag{2.29}$$

com $n = 0, 1, 2, \ldots$, e os operadores

$$\hat{P} \equiv \hat{\Pi} + \frac{\mathbb{1}}{6}R, \tag{2.30}$$

$$\hat{S}_{\mu\nu} \equiv [\nabla_\mu, \nabla_\nu] \equiv \nabla_\mu\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\mu, \tag{2.31}$$

em que estabelecemos a definição do comutador $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$. Os limites (2.28) foram calculados pela primeira vez por B.S. DeWitt, veja, por exemplo, [31, 32]. Já o limite do coeficiente $\hat{a}_3(x, x')$ foi calculado por Gilkey em [55] e o do coeficiente $\hat{a}_4(x, x')$ por Avramidi em [9]. No último cálculo Avramidi desenvolveu novas técnicas para a obtenção deste limites, já que a cada termo da expansão a exigência computacional aumenta consideravelmente.

Vislumbramos a importância dos coeficientes de DeWitt ao substituírmos a equação (2.14) na equação (2.5) para chegar a

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}\int_0^\infty \frac{ds}{s}\,\frac{[\mathscr{D}(x, x')]^{1/2}}{(4\pi i s)^\omega}\exp\left[\frac{i\sigma(x, x')}{2\,s}\right]\sum_{n=0}^{\infty}(is)^n\,\hat{a}_n(x, x'). \tag{2.32}$$

O limite inferior desta integral corresponde ao limite ultravioleta, o que pode ser visto pela análise dimensional de s, que tem dimensão de comprimento ao quadrado. Então, pequenos valores de s corresponderão a pequenos comprimentos. O que significa que a técnica de Schwinger-DeWitt é adequada para o estudo de efeitos locais, tais como: a polarização do vácuo e as divergências de uma TQC. No espaço-tempo quadridimensional apenas os termos contendo os coeficientes $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ e $\hat{a}_2$ em (2.32) são divergentes, sendo que estes coeficientes definem, respectivamente, as divergências: quárticas, quadráticas, e logarítmicas. É importante salientar que no esquema de *regularização dimensional*, em quatro dimensões, os termos contendo $\hat{a}_0$ e $\hat{a}_1$ se anulam, enquanto que o termo contendo $\hat{a}_2$ é o único que contribui para a determinação das divergências. Logo, na regularização dimensional a equação (2.32) se reduz a

$$\bar{\Gamma}^{(1)}_{div} = -\frac{\mu^{n-4}}{\epsilon} \int d^4x \sqrt{-g}\, \mathrm{tr}\ \hat{a}_2(x,x), \tag{2.33}$$

em que $\epsilon = (4\pi)^2(2\omega - 4)$ é o *parâmetro divergente do esquema de regularização* e μ é o *parâmetro dimensional da renormalização.*

As fórmulas (2.32) e (2.33) são de grande importância por possibilitar o cálculo das divergências de uma TQC, até mesmo no espaço curvo ou em gravitação quântica. É relevante notar que elas valem apenas para operadores mínimos, do tipo (2.10). Para situações mais complicadas como, por exemplo, aquela envolvendo operadores não-mínimos, é preciso utilizar a *técnica de Schwinger-DeWitt generalizada* desenvolvida por Barvinsky e Vilkovisky [23]. Já para situações em que os campos de fundo oscilam rapidamente e/ou são muito intensos precisaremos recorrer à *teoria de perturbação covariante* desenvolvida por Vilkovisky *et al.* [120].

Capítulo 3

O cálculo das divergências de 1-loop na parametrização mais geral possível para a métrica quântica e a análise on-shell dos resultados

Neste capítulo desenvolvemos os cálculos relativos ao nosso trabalho [56], em que consideramos o cálculo das divergências de uma teoria quântica de gravitação, baseada na ação de Einstein-Hilbert (EH) com a parametrização mais geral possível para a métrica. Utilizamos o método de campo de fundo e a técnica de Schwinger-DeWitt ao longo deste desenvolvimento, que será efetuado em um espaço-tempo $D-$dimensional.

Começamos considerando a ação de EH na forma

$$S = -\frac{1}{\kappa^2}\int d^D x\sqrt{-g}(R+2\Lambda), \tag{3.1}$$

em que $\kappa^2 = 16\pi G$ e Λ é a *constante cosmológica.* Logo, as equações de movimento extraídas desta ação, via princípio de Hamilton, correspondem às *equações de campo de Einstein* no vácuo

$$\varepsilon^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\big(R+2\Lambda\big)g^{\mu\nu} = 0. \tag{3.2}$$

É um fato conhecido[1] que, através da exigência de covariância e de argumentos de *power counting*, que podemos estabelecer para a parte divergente da ação efetiva a

[1]Veja, por exemplo, [108].

1-loop, a forma

$$\bar{\Gamma}^{(1)}_{div} \;=\; \frac{1}{\epsilon}\int d^4x\sqrt{-g}\,\left\{c_1 R^2_{\mu\nu\alpha\beta} + c_2 R^2_{\alpha\beta} + c_3 R^2 + c_4\Box R + c_5 R + c_6\right\}, \qquad (3.3)$$

em que $1/\epsilon$ é um coeficiente divergente.

As ambiguidades na determinação de $\bar{\Gamma}^{(1)}_{div}$ devem ser proporcionais às equações de movimento [121, 21]. Além disso, na regularização dimensional a covariância geral é mantida, veja, por exemplo, o capítulo 8 do livro [21]. Por outro lado, o *teorema de Weinberg* [127, 128] nos diz que estas ambiguidades são locais, logo sua forma mais geral é

$$\begin{aligned} \delta\bar{\Gamma}^{(1)}_{div} &= \bar{\Gamma}^{(1)}_{div}(\alpha_i) - \bar{\Gamma}^{(1)}_{div}(\alpha_i^0) \\ &= \frac{1}{\epsilon}\int d^4x\sqrt{-g}\,(b_1 R_{\mu\nu} + b_2 R g_{\mu\nu} + b_3 g_{\mu\nu}\Lambda + b_4 g_{\mu\nu}\Box + b_5\nabla_\mu\nabla_\nu)\,\varepsilon^{\mu\nu}, \qquad (3.4) \end{aligned}$$

em que os α_i indicam o conjunto de parâmetros possíveis para a fixação de calibre e/ou para a parametrização da métrica. Em particular, os valores α_i^0 já estão associados a alguma escolha particular destes parâmetros. Já, os $b_{1,2,..,5}$ dependem da escolha dos α_i. Salientamos que esta dependência só pode ser conhecida através de cálculos explícitos.

Uma observação relevante é se $\Lambda = 0$ a equação (3.4) nos diz que o contratermo de Gauss-Bonnet é o único que não pode ser anulado por uma escolha de fixação de calibre, resultado descoberto por cálculo direto em [69]. Sendo a matriz S correspondente ao limite *on-shell* da ação efetiva, esta deve ser finita para $\Lambda = 0$. Por outro lado, quando $\Lambda \neq 0$ a análise torna-se mais complicada. Neste caso, pelas identidades de Bianchi podemos verificar que o parâmetro b_5 não contribuirá para as divergências. Sendo assim, podemos escolher quatro parâmetros $b_{1,2,3,4}$ para fixar os seis coeficientes $c_{1,2,\ldots 6}$, implicando que somente duas combinações destes coeficientes podem ser independentes de calibre.

Ainda sobre as ambiguidades na fixação de calibre, podemos mostrar que os parâmetros $c_{1,2,\ldots,6}$ devem ser modificados segundo

$$\left\{\begin{array}{lcl} c_1 & \to & c_1 \\ c_2 & \to & c_2 + b_1 \\ c_3 & \to & c_3 - \big(b_2 + \frac{1}{2}\,b_1\big) \\ c_4 & \to & c_4 - b_4 \\ c_5 & \to & c_5 - \big(b_1 + 4b_2 + b_3\big)\Lambda \\ c_6 & \to & c_6 - 4b_3\Lambda^2 \end{array}\right. . \qquad (3.5)$$

Desta maneira, as únicas duas combinações invariantes de calibre são

$$c_1 \quad \text{e} \quad c_{\text{inv}} \equiv c_6 - 4\Lambda c_5 + 4\Lambda^2 c_2 + 16\Lambda^2 c_3. \tag{3.6}$$

Em outras palavras, estas quantidades não se modificam sob mudanças nos parâmetros de fixação de calibre α_i. Com esta escolha de parâmetros, as expressões *on-shell* para a ação clássica e para a parte divergente da ação efetiva de *1-loop* são[2]

$$S\Big|_{\text{on shell}} = \frac{2\Lambda}{\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-g} \tag{3.7}$$

$$\bar{\Gamma}^{(1)}_{div}\Big|_{\text{on shell}} = \frac{1}{\epsilon}\int d^4x\sqrt{-g}\left\{c_1 R^2_{\mu\nu\alpha\beta} + c_{\text{inv}}\right\}, \tag{3.8}$$

as quais, naturalmente, consistem apenas de quantidades invariantes de calibre, como deveria de ser. Este fato é a origem da *equação do grupo de renormalização on-shell*, resultado reportado em [51]. Este tipo de consideração pode ser estendida para modelos teóricos na abordagem de Einstein-Cartan com constante cosmológica e corrente espinorial externa, como discutido em [22, 113].

Considerações gerais[3] mostram que a expressão (3.4) poderia ser aplicada também às ambiguidades na parametrização, as quais são mais difíceis de serem estudadas. Contudo, neste caso os argumentos não foram estabelecidos com o mesmo grau de generalidade e segurança que no caso da dependência de calibre [121]. Portanto, é uma prática justificada realizar cálculos explícitos para conferir as características de (3.8) para parametrizações específicas.

3.1 O método do campo de fundo

3.1.1 A parametrização mais geral

Nosso propósito é obter os dois primeiros coeficientes de DeWitt não triviais, ou seja, $\hat{a}_1$ e $\hat{a}_2$, considerando a parametrização da métrica quântica mais geral possível. Para este fim, usaremos o método de campo de fundo que nos permite decompor a

[2] Observamos que o coeficiente global de $S|_{\text{on shell}}$ correto é 2Λ. Em nosso artigo [56] este coeficiente contém um erro de digitação.

[3] Veja, por exemplo, [119].

métrica na forma

$$
\begin{aligned}
g_{\alpha\beta} \;\; &\to \;\; g'_{\alpha\beta} = e^{2\kappa r\sigma}\Big[g_{\alpha\beta} + \kappa\big(\gamma_1\phi_{\alpha\beta} + \gamma_2\phi g_{\alpha\beta}\big) \\
&+ \;\; \kappa^2\big(\gamma_3\phi_{\alpha\rho}\phi^{\rho}_{\beta} + \gamma_4\phi_{\rho\omega}\phi^{\rho\omega}g_{\alpha\beta} + \gamma_5\phi\phi_{\alpha\beta} + \gamma_6\phi^2 g_{\alpha\beta}\big)\Big], \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

em que $\phi_{\mu\nu}$ e σ são campos quânticos e $\phi = \phi^{\mu}_{\mu}$. Estabelecemos, também, que todos os índices são abaixados e elevados com a métrica de fundo $g_{\alpha\beta}$ e sua inversa $g^{\alpha\beta}$. Finalmente, os $\gamma_{1,2,\ldots,6}$ e r são coeficientes arbitrários usados para parametrizar nossa escolha de variáveis quânticas.

É importante notarmos que, como consequência do fato de que os cálculos das divergências a *1-loop* só necessitam da parte bilinear da ação, é possível verificar que a configuração (3.9) representa a escolha mais geral possível para a parametrização da métrica quântica.

Se reescrevermos a métrica como: $g_{\alpha\beta} \to g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$, teremos as seguintes expansões correspondentes

$$
\begin{aligned}
g^{\alpha\beta} \;\; &\to \;\; g'^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} + h^{\alpha\lambda}h^{\beta}_{\lambda} + \cdots \\
\sqrt{-g} \;\; &\to \;\; \sqrt{-g'} = \sqrt{-g}\left(1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}h^2_{\alpha\beta} + \frac{1}{8}h^2 + \cdots\right) \\
R \;\; &\to \;\; R' = R + R^{(1)} + R^{(2)} + \cdots\,, \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

em que a *perturbação métrica* pode ser obtida por meio da eq. (3.9), depois de realizarmos a expansão em séries de potência do termo exponencial contido nessa equação, tendo como resposta

$$
h_{\alpha\beta} = \kappa h^{(1)}_{\alpha\beta} + \kappa^2 h^{(2)}_{\alpha\beta} + \cdots\,, \qquad (3.11)
$$

com

$$
\begin{aligned}
h^{(1)}_{\alpha\beta} \;\; &= \;\; \gamma_1\,\phi_{\alpha\beta} + (\gamma_2\,\phi + 2\,r\,\sigma)\,g_{\alpha\beta} \\
h^{(2)}_{\alpha\beta} \;\; &= \;\; 2\,r\,\gamma_1\,\sigma\,\phi_{\alpha\beta} + \gamma_3\,\phi_{\alpha\rho}\,\phi^{\rho}_{\beta} + \big(2\,r^2\,\sigma^2 + 2\,r\,\gamma_2\,\sigma\,\phi + \gamma_4\,\phi^2_{\rho\omega} + \gamma_6\,\phi^2\big)\,g_{\alpha\beta} \\
&+ \;\; \gamma_5\,\phi\,\phi_{\alpha\beta}. \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

Na fórmula (3.11) os pontos indicam os termos de ordem superior nos campos quânticos, que são irrelevantes para os cálculos de *1-loop*. Já na equação (3.10) as correções de primeira e de segunda ordem do escalar de Riemann são calculadas através das seguintes fórmulas gerais

$$
\begin{aligned}
R^{(1)} &= \nabla_\alpha \nabla_\beta h^{\alpha\beta} - \Box h - h^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\
R^{(2)} &= h^{\alpha\beta}\left(\nabla_\alpha \nabla_\beta h - \nabla_\alpha \nabla_\lambda h^\lambda_\beta + \Box\, h_{\alpha\beta} - \nabla_\lambda \nabla_\alpha h^\lambda_\beta\right) + \nabla^\lambda h \nabla_\alpha h^\alpha_\lambda - \frac{1}{4}\nabla^\lambda h \nabla_\lambda h \\
&- \nabla_\lambda h^{\alpha\lambda} \nabla_\beta h^\beta_\alpha - \frac{1}{2} h^\alpha_\lambda \nabla_\alpha h^{\beta\lambda} + \frac{3}{4}\nabla_\lambda h^\alpha_\beta \nabla^\lambda h^\beta_\alpha + h^{\alpha\theta} h^\beta_\theta R_{\alpha\beta}.
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Logo, a correspondente expansão da ação (3.1) no campo quântico $h_{\mu\nu}$ fica dado por

$$
S[g+h] = S[g] + \int d^Dx\sqrt{-g}\,\frac{\delta S}{\delta h_{\mu\nu}}\,h_{\mu\nu} + \int d^Dx\sqrt{-g}\,h_{\alpha\beta}\frac{\delta^2 S}{\delta h_{\alpha\beta}\delta h_{\mu\nu}}\,h_{\mu\nu} + \cdots \tag{3.14}
$$

Observamos que é preciso um certo cuidado ao considerarmos (3.14), pois existirão estruturas de segunda ordem que serão originados do termo linear em $h_{\mu\nu}$, uma vez que este também contém objetos de ordem superior. As possíveis fontes de termos bilineares são obtidas a partir de três diferentes produtos: $(\sqrt{-g})^{(2)}\,(R+2\Lambda)$, $(\sqrt{-g})^{(1)}\,R^{(1)}$ e $(\sqrt{-g})^{(0)}R^{(2)}$. Logo, com os resultados destes cálculos podemos reescrever a ação de EH até a segunda ordem nos campos quânticos, cuja representação simbólica é $S^{(2)}$

$$
S^{(2)} = \kappa^2 \int d^Dx\sqrt{-g}\,\frac{\delta S}{\delta h_{\mu\nu}}\,h^{(2)}_{\mu\nu} + \kappa^2 \int d^Dx\sqrt{-g}\,h^{(1)}_{\alpha\beta}\frac{\delta^2 S}{\delta h_{\alpha\beta}\delta h_{\mu\nu}}\,h^{(1)}_{\mu\nu}. \tag{3.15}
$$

3.1.2 A ação bilinear nos campos quânticos

Por meio da equação (3.15), depois de uma longa álgebra, e colecionando termos quadráticos nos campos $\phi_{\mu\nu}$ e σ somos capazes de escrever a forma bilinear da ação de EH na forma

$$
\begin{aligned}
S^{(2)} = -\int d^Dx\sqrt{-g}\Big\{\phi_{\alpha\beta}\Big[\frac{d_1}{4}\delta^{\alpha\beta,\mu\nu}\Box - \frac{d_2}{4}g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\Box + \frac{d_3}{4}\left(g^{\mu\nu}\nabla^\alpha\nabla^\beta + g^{\alpha\beta}\nabla^\mu\nabla^\nu\right) \\
- \frac{d_4}{2}g^{\beta\nu}\nabla^\alpha\nabla^\mu - 2L^{\alpha\beta,\mu\nu}\Lambda + \gamma_1^2\mathcal{M}^{\alpha\beta,\mu\nu}\Big]\phi_{\mu\nu} + \phi_{\alpha\beta}\left[\ell_0\nabla^\alpha\nabla^\beta + \ell_1 g^{\alpha\beta}\Box + \ell_2 g^{\alpha\beta}\right. \\
\left. + \Lambda\ell_3 R^{\alpha\beta} + \ell_4 g^{\alpha\beta}R\right]\sigma + \sigma\left[s_1\Box + s_2\Lambda + s_3 R\right]\sigma\Big\},
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

com os coeficientes dispostos a seguir:

- setor $\phi\phi$:

$$\begin{aligned} d_1 &= d_4 = \gamma_1^2, \\ d_2 &= \gamma_1^2 + 2(D-2)\gamma_1\gamma_2 + (D-2)(D-1)\gamma_2^2, \\ d_3 &= \gamma_1^2 + (D-2)\gamma_1\gamma_2; \end{aligned} \tag{3.17}$$

- setor $\phi\sigma$:

$$\begin{aligned} \ell_0 &= (D-2)\gamma_1 r, \\ \ell_1 &= -(D-2)\left[\gamma_1 + (D-1)\gamma_2\right] r, \\ \ell_2 &= D\left(\gamma_1 + D\gamma_2\right) r, \\ \ell_3 &= -(D-2)\gamma_1 r, \\ \ell_4 &= \frac{(D-2)}{2}\left[\gamma_1 + (D-2)\gamma_2\right] r; \end{aligned} \tag{3.18}$$

- setor $\sigma\sigma$:

$$\begin{aligned} s_1 &= -(D-2)(D-1)r^2, \\ s_2 &= D^2 r^2, \\ s_3 &= \frac{(D-2)^2}{2} r^2. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Sendo os objetos tensoriais, expostos em (3.16), definidos por:

- a *delta de DeWitt*:

$$\delta^{\alpha\beta,\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu}\right), \tag{3.20}$$

  que é a matriz identidade no espaço dos campos simétricos de rank 2;

- o operador $\hat{\mathcal{M}}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{\alpha\beta,\mu\nu} &= \frac{1}{2}R^{\alpha\mu\beta\nu} - \frac{(1+x_1)}{4}\delta^{\alpha\beta,\mu\nu}R + \frac{(1+x_2)}{2}R^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} \\ &- \frac{(1+x_3)}{4}\left(R^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} + R^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\right) + \frac{(1+x_4)}{8}g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}R, \end{aligned} \tag{3.21}$$

com

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -2\left[\gamma_3 + (D-2)\gamma_4\right]/\gamma_1^2, \\
x_2 &= -2\gamma_3/\gamma_1^2, \\
x_3 &= (D-4)(\gamma_2/\gamma_1) + 2(\gamma_5/\gamma_1^2), \\
x_4 &= 2(D-4)(\gamma_2/\gamma_1) + (D-2)(D-4)(\gamma_2^2/\gamma_1^2) + (4/\gamma_1^2)\left[\gamma_5 + (D-2)\gamma_6\right];
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

- o operador $\hat{L}$:

$$L^{\alpha\beta,\mu\nu} = K^{\alpha\beta,\mu\nu} - \frac{1}{2}(\gamma_3 + D\gamma_4)\delta^{\alpha\beta,\mu\nu} - \frac{1}{2}\left(\gamma_5 + D\gamma_6\right) g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}; \tag{3.23}$$

e,

- o operador $\hat{K}$:

$$K^{\alpha\beta,\mu\nu} = \frac{1}{4}\left\{\gamma_1^2\delta^{\alpha\beta,\mu\nu} - \frac{1}{2}\left[\gamma_1^2 + 2(D-2)\gamma_1\gamma_2 + D(D-2)\gamma_2^2\right] g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\right\}. \tag{3.24}$$

O tensor $\hat{K}$ é um objeto matemático importante. Já que, após a fixação de calibre, que efetuaremos na seção a seguir, com uma *escolha mínima* para os parâmetros de calibre, o operador $\hat{K}$ representará a delta-métrica de DeWitt generalizada para o espaço dos campos em consideração.

Dito isto, cabe uma explicação sobre as notações condensadas que utilizamos nas equações anteriores, nas quais todas as simetrias algébricas estão implícitas. Para obter as equações completas devemos escrever os termos levando em consideração todas as seguintes permutações de índices

$$(\alpha\beta) \leftrightarrow (\mu\nu), \qquad (\alpha \leftrightarrow \beta), \qquad (\mu \leftrightarrow \nu).$$

Por exemplo, os termos $R^{\alpha\mu\beta\nu}$ e $R^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}$ devem ser entendidos como sendo

$$R^{\alpha\mu\beta\nu} \to \frac{1}{4}\left(R^{\alpha\mu\beta\nu} + R^{\alpha\nu\beta\mu} + R^{\beta\nu\alpha\mu} + R^{\beta\mu\alpha\nu}\right), \tag{3.25}$$

e

$$R^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} \to \frac{1}{4}\left(R^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} + R^{\alpha\nu}g^{\beta\mu} + R^{\beta\nu}g^{\alpha\mu} + R^{\beta\mu}g^{\alpha\nu}\right), \tag{3.26}$$

em que as simetrias estão restauradas.

3.1.3 A ação de fixação de calibre

Consideremos a *ação de fixação de calibre*

$$S_{GF} = -\frac{1}{\alpha}\int d^D x\sqrt{-g}\,\chi_\mu\chi^\mu, \tag{3.27}$$

em que

$$\chi_\mu = \nabla_\rho\phi^\rho_\mu - \beta_1\nabla_\mu\phi - \beta_2\nabla_\mu\sigma \tag{3.28}$$

é a *função de fixação de calibre* e α, β_1 e β_2 são os *parâmetros de fixação de calibre*. Realizando a contração $\chi_\mu\chi^\mu$, com o auxílio de (3.28), integrando por partes e substituindo o resultado em (3.27) obtemos a forma bilinear de S_{GF},

$$\begin{aligned} S^{(2)}_{GF} = \int d^D x\sqrt{-g}\Bigg\{\phi_{\alpha\beta}\Bigg[\frac{1}{\alpha}g^{\beta\nu}\nabla^\alpha\nabla^\mu - \frac{\beta_1}{\alpha}(g^{\mu\nu}\nabla^\alpha\nabla^\beta + g^{\alpha\beta}\nabla^\mu\nabla^\nu) \\ + \frac{\beta_1^2}{\alpha}g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\Box\Bigg]\phi_{\mu\nu} + \phi_{\alpha\beta}\Bigg[\frac{2\beta_1\beta_2}{\alpha}g^{\alpha\beta}\Box - \frac{2\beta_2}{\alpha}\nabla^\alpha\nabla^\beta\Bigg]\sigma + \frac{\beta_2^2}{\alpha}\sigma\Box\sigma\Bigg\}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Comparando $S^{(2)}$ com $S^{(2)}_{GF}$, observamos que para os valores

$$\alpha = -\frac{2}{\gamma_1^2}, \qquad \beta_1 = \frac{1}{2}\left[1 + (D-2)\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right], \qquad \beta_2 = (D-2)\frac{r}{\gamma_1}, \tag{3.30}$$

a ação total, $S^{(2)} + S^{(2)}_{GF}$, é mínima. Isto quer dizer que, para essa escolha de parâmetros de calibre o correspondente operador bilinear contém apenas derivadas do tipo $\Box = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$. Logo, a ação total em sua forma bilinear mínima é

$$\begin{aligned} S^{(2)}_{total} \equiv S^{(2)} + S^{(2)}_{(GF)} = -\int d^D x\sqrt{-g}\Bigg\{\phi_{\alpha\beta}\left[K^{\alpha\beta,\mu\nu}\Box - 2L^{\alpha\beta,\mu\nu}\Lambda + \gamma_1^2\mathcal{M}^{\alpha\beta,\mu\nu}\right]\phi_{\mu\nu} \\ +\phi_{\alpha\beta}\left[\tilde{\ell}_1 g^{\alpha\beta}\Box + \ell_2 g^{\alpha\beta}\Lambda + \ell_3 R^{\alpha\beta} + \ell_4 g^{\alpha\beta}R\right]\sigma + \sigma\left[\tilde{s}_1\Box + s_2\Lambda + s_3 R\right]\sigma\Bigg\}, \end{aligned} \tag{3.31}$$

em que

$$\tilde{\ell}_1 = -\frac{(D-2)}{2}(\gamma_1 + D\gamma_2)r, \qquad \tilde{s}_1 = -\frac{D(D-2)}{2}r^2. \tag{3.32}$$

É notável que possamos obter a forma mínima do operador bilinear para uma parametrização arbitrária e completamente geral, assim como a nossa.

3.1.4 A decomposição em partes sem traço e no traço

Um procedimento de grande utilidade, por tornar os cálculos mais simples, é decompor o campo quântico em uma parte sem traço ($\bar{\phi}_{\alpha\beta}$) e outra no seu traço (ϕ)

$$\phi_{\alpha\beta} = \bar{\phi}_{\alpha\beta} + \frac{1}{D} g_{\alpha\beta}\phi, \tag{3.33}$$

separando em $S^{(2)}_{total}$ as matrizes dos operadores de interesse em setores de naturezas distintas. Chegamos, assim, a

$$\begin{aligned} S^{(2)}_{total} = -\int d^D x\sqrt{-g}\bigg\{ & \bar{\phi}_{\alpha\beta}\Big[\frac{\gamma_1^2}{4}\bar{\delta}^{\alpha\beta,\mu\nu}(\Box - 2(1+z_1)\Lambda) + \gamma_1^2\overline{\mathcal{M}}^{\alpha\beta,\mu\nu}\Big]\bar{\phi}_{\mu\nu} \\ & + \bar{\phi}_{\alpha\beta}\left[-2z_2R^{\alpha\beta}\right]\phi + \bar{\phi}_{\alpha\beta}\left[\ell_3 R^{\alpha\beta}\right]\sigma + \phi\left[y_1\Box + y_2\Lambda + y_3 R\right]\phi \\ & + \phi\left[\tilde{\ell}_1\Box + \ell_2\Lambda + \tilde{\ell}_3 R\right]\sigma + \sigma\left[\tilde{s}_1\Box + s_2\Lambda + s_3 R\right]\sigma\bigg\}, \end{aligned} \tag{3.34}$$

com coeficientes

$$z_1 = -\frac{2}{\gamma_1^2}\left(\gamma_3 + D\gamma_4\right), \qquad z_2 = \frac{(D-4)}{4D}\gamma_1\left(\gamma_1 + D\gamma_2\right) + \frac{\gamma_3}{D} + \frac{\gamma_5}{2},$$

$$\tilde{\ell}_3 = \frac{(D-2)^2}{2D}\left(\gamma_1 + D\gamma_2\right)r, \qquad y_1 = -\frac{(D-2)}{8D}\left(\gamma_1 + D\gamma_2\right)^2,$$

$$y_2 = \frac{(D-2)}{4D}\left(\gamma_1 + D\gamma_2\right)^2 + \frac{1}{D}\left(\gamma_3 + D\gamma_4\right) + \left(\gamma_5 + D\gamma_6\right),$$

$$y_3 = \frac{(D-2)}{8D^2}\Big\{(D-4)\left(\gamma_1 + D\gamma_2\right)^2 + 4(\gamma_3 + D\gamma_4) + 4D(\gamma_5 + D\gamma_6)\Big\}. \tag{3.35}$$

Definimos, também, o projetor no espaço dos tensores sem traço

$$\bar{\delta}^{\alpha\beta,\mu\nu} = \delta^{\alpha\beta,\mu\nu} - \frac{1}{D}g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} \tag{3.36}$$

e o operador

$$\overline{\mathcal{M}}^{\alpha\beta,\mu\nu} = \frac{1}{2}R^{\alpha\mu\beta\nu} - \frac{(1+x_1)}{4}\bar{\delta}^{\alpha\beta,\mu\nu}R + \frac{(1+x_2)}{2}R^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}. \tag{3.37}$$

3.1.5 Fixação do calibre conforme

Para remover a degenerescência remanescente relacionada a *simetria conforme*, fixamos esta simetria através de

$$\sigma = \beta_3 \phi, \tag{3.38}$$

sendo β_3 um novo parâmetro de calibre. A fixação da *simetria conforme* não exige a inclusão de fantasmas de Faddeev-Popov, porque a transformação de simetria conforme não possui derivadas [51].

Fixando a *simetria conforme*, obtemos

$$\begin{aligned} S^{(2)}_{total} = \int d^D x \sqrt{-g} \Bigg\{ & \bar{\phi}_{\alpha\beta} \left[\frac{\gamma_1^2}{4} \bar{\delta}^{\alpha\beta,\mu\nu} (\Box - 2(1+z_1)\Lambda) + \gamma_1^2 \overline{\mathcal{M}}^{\alpha\beta,\mu\nu} \right] \bar{\phi}_{\mu\nu} \\ & + \bar{\phi}_{\alpha\beta} \left[-2cR^{\alpha\beta} \right] \phi + \phi \left[b_1 \Box + 2b_2 \Lambda + b_3 R \right] \phi \Bigg\}, \end{aligned} \tag{3.39}$$

com os seguintes coeficientes

$$c = \frac{(D-4)}{4D} \gamma_1 (\gamma_1 + D\gamma_2) + \frac{\gamma_3}{D} + \frac{\gamma_5}{2} + \frac{(D-2)}{2} \gamma_1 r \beta_3,$$

$$b_1 = -\frac{(D-2)}{8D} \left[\gamma_1 + D(\gamma_2 + 2r\beta_3) \right]^2,$$

$$\begin{aligned} b_2 = & \frac{(D-2)}{8D} (\gamma_1 + D\gamma_2)^2 + \frac{1}{2D} (\gamma_3 + D\gamma_4) + \frac{1}{2} (\gamma_5 + D\gamma_6) \\ & + \frac{D}{2} (\gamma_1 + D\gamma_2) r\beta_3 + \frac{D^2}{2} r^2 \beta_3^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_3 = (D-2) \Bigg\{ & \frac{(D-4)}{8D^2} (\gamma_1 + D\gamma_2)^2 + \frac{1}{2D^2} \left[(\gamma_3 + D\gamma_4) + D (\gamma_5 + D\gamma_6) \right] \\ & + \frac{(D-2)}{2D} (\gamma_1 + D\gamma_2) r\beta_3 + \frac{(D-2)}{2} r^2 \beta_3^2 \Bigg\}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

3.1.6 Operador bilinear nos campos quânticos

Estamos, agora, aptos a escrever o operador bilinear, $\hat{H}$, nos campos $\bar{\phi}_{\alpha\beta}$ e ϕ. Sendo assim,

$$S^{(2)}_{total} = -\int d^Dx\sqrt{-g} \begin{pmatrix} \bar{\phi}_{\alpha\beta} & \phi \end{pmatrix} \hat{H} \begin{pmatrix} \bar{\phi}_{\mu\nu} \\ \phi \end{pmatrix}, \tag{3.41}$$

em que

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1^2}{4}\bar{\delta}^{\alpha\beta,\mu\nu}(\Box - 2(1+z_1)\Lambda) + \gamma_1^2\overline{\mathcal{M}}^{\alpha\beta,\mu\nu} & -cR^{\alpha\beta} \\ -cR^{\mu\nu} & b_1\Box + 2b_2\Lambda + b_3R \end{pmatrix}. \tag{3.42}$$

Para reduzir o operador (3.42) à sua forma mínima, $\hat{\mathbb{1}}\Box + \hat{\Pi}$, consideramos um novo operador $\hat{H}' = \hat{C}\cdot\hat{H}$, em que $\hat{C}$ é uma matriz c-número. Com isto

$$\mathrm{Tr}\ \ln\hat{H}' = \mathrm{Tr}\ \ln(\hat{C}\cdot\hat{H}) = \mathrm{Tr}\ \ln\hat{C} + \mathrm{Tr}\ \ln\hat{H}, \tag{3.43}$$

notando que $\mathrm{Tr}\ \ln\hat{C}$ não produz divergências. Então, temos que

$$\mathrm{Tr}\ \ln\hat{H}'\Big|_{div} = \mathrm{Tr}\ \ln\hat{H}\Big|_{div}. \tag{3.44}$$

Escolhendo a matriz $\hat{C}$ na forma

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} \frac{4}{\gamma_1^2}\,\bar{\delta}^{\alpha\beta,\mu\nu} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b_1} \end{pmatrix} \tag{3.45}$$

encontramos

$$\hat{H}' = \hat{\mathbb{1}}\Box + \hat{\Pi}, \tag{3.46}$$

em que

$$\hat{\mathbb{1}} = \begin{pmatrix} \bar{\delta}^{\alpha\beta,\mu\nu} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.47}$$

e

$$\hat{\Pi} = \begin{pmatrix} -2\,(1+z_1)\,\Lambda\,\bar{\delta}^{\alpha\beta,\mu\nu} + 4\,\overline{\mathcal{M}}^{\alpha\beta,\mu\nu} & -\dfrac{4c}{\gamma_1^2}\,R^{\alpha\beta} \\ -\dfrac{c}{b_1}R^{\mu\nu} & \dfrac{2b_2}{b_1}\Lambda + \dfrac{b_3}{b_1}R \end{pmatrix}. \tag{3.48}$$

Obtidas as matrizes $\hat{\mathbb{1}}$ e $\hat{\Pi}$ podemos utilizá-las para calcular o operador

$$\hat{P} = \hat{\Pi} + \hat{\mathbb{1}}R/6, \tag{3.49}$$

com o qual podemos construir $\hat{a}_1$ e parte de $\hat{a}_2$, que são os *coeficientes de Schwinger-DeWitt* fornecidos pelas eqs. (2.28).

3.2 Divergências de 1-loop

Como já vimos, na subseção 1.4.1, a *ação efetiva de 1-loop* é dada através da fórmula

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = \frac{i}{2}\mathrm{Tr}\ \ln \hat{H} - i\mathrm{Tr}\ \ln \hat{H}_{GH}, \tag{3.50}$$

em que já definimos $\hat{H}$ e $\hat{H}_{GH}$ é o *operador de Faddeev-Popov*, que será calculado mais a frente.

Em $D = 2$, as divergências logarítmicas de (3.50) são dadas pelo coeficiente $\hat{a}_1$. Em $D = 4$, $\hat{a}_1$ nos fornece as divergências quadráticas, relevantes para aplicações *em gravitação assintoticamente segura* [84, 82]. Já, em $D = 4$ é o coeficiente $\hat{a}_2$ que nos fornece as divergências logarítmicas. Visando ampliar as possibilidades de aplicação de nossa análise calcularemos $\hat{a}_1$ e $\hat{a}_2$ em uma dimensão arbitrária D, o que pode ser útil também para as aproximações $2-\epsilon$ e $4-\epsilon$, entre outras aplicações.

3.2.1 Derivações das contribuições métricas

Calcularemos, separadamente, cada termo da (3.50). Começamos pelo termo mais complicado

$$\hat{a}_2 = \mathrm{tr}\left\{\frac{\hat{\mathbb{1}}}{180}\left(R^2_{\mu\nu\alpha\beta} - R^2_{\alpha\beta} + \Box R\right) + \frac{1}{2}\hat{P}^2 + \frac{1}{6}\Box\hat{P} + \frac{1}{12}\hat{S}^2_{\rho\omega}\right\}, \tag{3.51}$$

em que, para o nosso caso,

$$\hat{S}_{\rho\omega} = [\nabla_\rho, \nabla_\omega]\,\hat{\mathbb{1}} = \begin{pmatrix} 2R^{\mu\alpha}{}_{\cdot\cdot\rho\omega}\, g^{\nu\beta} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.52}$$

Além disso, temos

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} P_{\bar{\phi}\bar{\phi}}^{\alpha\beta,\mu\nu} & P_{\bar{\phi}\phi}^{\alpha\beta} \\ \\ P_{\phi\bar{\phi}}^{\mu\nu} & P_{\phi\phi} \end{pmatrix}, \tag{3.53}$$

sendo as entradas da matriz $\hat{P}$ dadas por

$$P_{\bar{\phi}\bar{\phi}}^{\alpha\beta,\mu\nu} = -\left[\left(x_1 + \frac{5}{6}\right) R + 2(1+z_1)\Lambda\right] \bar{\delta}^{\alpha\beta,\mu\nu} + 2(1+x_2)R^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} + 2R^{\alpha\mu\beta\nu},$$

$$P_{\bar{\phi}\phi}^{\alpha\beta} = -4\frac{c}{\gamma_1^2}R^{\alpha\beta}, \qquad P_{\phi\bar{\phi}}^{\mu\nu} = -\frac{c}{b_1}R^{\mu\nu}, \qquad P_{\phi\phi} = \frac{2b_2}{b_1}\Lambda + \left(\frac{b_3}{b_1} + \frac{1}{6}\right) R. \tag{3.54}$$

Para conseguirmos avaliar (3.51), começamos pelo cálculo do traço tr $\hat{P}^2$. Usando (3.53) chegamos a

$$\hat{P}^2 = \begin{pmatrix} \hat{P}_{\bar{\phi}\bar{\phi}} \cdot \hat{P}_{\bar{\phi}\bar{\phi}} + \hat{P}_{\bar{\phi}\phi} \cdot \hat{P}_{\phi\bar{\phi}} & \cdots \\ \\ \cdots & \hat{P}_{\phi\phi} \cdot \hat{P}_{\phi\phi} + \hat{P}_{\phi\bar{\phi}} \cdot \hat{P}_{\bar{\phi}\phi} \end{pmatrix}. \tag{3.55}$$

Na equação acima não escrevemos os índices nem os termos da diagonal secundária explicitamente a fim de limpar a notação. Segue, então, que

$$\text{tr } \hat{P}^2 = \text{tr } \hat{P}_{\bar{\phi}\bar{\phi}}^2 + 2\text{tr } (\hat{P}_{\bar{\phi}\phi} \cdot \hat{P}_{\phi\bar{\phi}}) + \text{tr } \hat{P}_{\phi\phi}^2. \tag{3.56}$$

Notamos que os traços são calculados em subespaços métricos quânticos diferentes.

Introduzindo a notação compacta

$$k_1 = \bar{\delta}^{\alpha\beta,\mu\nu}, \qquad k_2 = R^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}, \qquad k_3 = R^{\alpha\mu\beta\nu} \tag{3.57}$$

obtemos para a equação (3.56)

$$\begin{aligned} \text{tr } \hat{P}^2 = & \left[\left(x_1 + \frac{5}{6}\right) R + 2\,(1+z_1)\,\Lambda\right]^2 \text{tr } (k_1 \cdot k_1) + 4\,(1+x_2)^2\, \text{tr } (k_2 \cdot k_2) \\ & + 4\, \text{tr } (k_3 \cdot k_3) - 4\left[\left(x_1 + \frac{5}{6}\right) R + 2\,(1+z_1)\,\Lambda\right] [(1+x_2)\, \text{tr } (k_1 \cdot k_2) \\ & + \text{tr } (k_1 \cdot k_3)] + 8\,(1+x_2)\, \text{tr } (k_2 \cdot k_3) + \frac{8c^2}{b_1\gamma_1^2}\, R_{\alpha\beta}\, \bar{\delta}^{\alpha\beta,\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ & + \left[\frac{2b_2}{b_1}\,\Lambda + \left(\frac{b_3}{b_1} + \frac{1}{6}\right) R\right]^2. \end{aligned} \tag{3.58}$$

Calculando os traços, chegamos à seguinte tabela

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}\ (k_1 \cdot k_1) &= \frac{(D-1)(D+2)}{2}, \\
\mathrm{tr}\ (k_2 \cdot k_2) &= \frac{(D-2)(D+4)}{4D} R^2_{\alpha\beta} + \frac{(D^2+4)}{4D^2} R^2, \\
\mathrm{tr}\ (k_3 \cdot k_3) &= \frac{3}{4} R^2_{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{2}{D} R^2_{\alpha\beta} + \frac{1}{D^2} R^2, \\
\mathrm{tr}\ (k_1 \cdot k_2) &= \frac{(D-1)(D+2)}{2D} R, \\
\mathrm{tr}\ (k_1 \cdot k_3) &= -\frac{(D+2)}{2D} R, \\
\mathrm{tr}\ (k_2 \cdot k_3) &= -\frac{(D+4)}{2D} R^2_{\alpha\beta} + \frac{1}{D^2} R^2.
\end{aligned} \tag{3.59}
$$

Além disso, precisaremos do traço

$$R_{\alpha\beta} \bar{\delta}^{\alpha\beta,\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^2_{\alpha\beta} - \frac{1}{D} R^2. \tag{3.60}$$

Calculamos os traços acima através do seguinte raciocício: sejam A e B duas matrizes, que são elementos do espaço dos operadores que atuam sobre o campo $\bar{h}_{\lambda\tau}$, o traço do produto $A \cdot B$ é fornecido pela equação

$$\mathrm{tr}\ (A \cdot B) = \bar{\delta}^{\mu\nu,\rho\lambda} A_{\rho\lambda,\sigma\tau} \bar{\delta}^{\sigma\tau,\alpha\beta} B_{\alpha\beta,\mu\nu}. \tag{3.61}$$

Logo, usando a tabela anterior e um programa de cálculo numérico, como o Mathematica [71], chegamos a

$$\mathrm{tr}\ \hat{P}^2 = p_1(D) R^2_{\mu\nu\alpha\beta} + p_2(D) R^2_{\alpha\beta} + p_4(D) R^2 + p_5(D) \Lambda R + p_6(D) \Lambda^2, \tag{3.62}$$

em que

$$
\begin{aligned}
&p_1(D) = 3,\\
&p_2(D) = \frac{D^2 - 2D - 32}{D} + \frac{8c^2}{b_1\gamma_1^2} + \frac{D+4}{D}\left[(D-2)x_2^2 + 2(D-4)x_2\right],\\
&p_4(D) = \frac{25D^4 - 95D^3 + 24D^2 + 480D + 1152}{72D^2} + \frac{b_3}{3b_1} + \frac{b_3^2}{b_1^2} - \frac{8c^2}{Db_1\gamma_1^2}\\
&+ (D+2)\left[\frac{D-1}{2}x_1^2 + \frac{(5D^2 - 17D + 24)}{6D}x_1 - \frac{2(D-1)}{D}x_1x_2\right]\\
&+ \frac{(D^2+4)}{D^2}x_2^2 - \frac{(5D^3 - D^2 - 10D - 48)}{3D^2}x_2,\\
&p_5(D) = \frac{D+2}{D}\left[\frac{5D^2 - 17D + 24}{3} + 2(D-1)(Dx_1 - 2x_2)\right](1+z_1)\\
&+ \frac{2(b_1 + 6b_3)b_2}{3b_1^2},\\
&p_6(D) = 2(D-1)(D+2)(1+z_1)^2 + \frac{4b_2^2}{b_1^2}.
\end{aligned}
\tag{3.63}
$$

Com o resultado de tr $\hat{P}^2$ e com os seguintes traços

$$
\mathrm{tr}\ \hat{\mathbb{1}} = \frac{D(D+1)}{2}, \qquad \mathrm{tr}\ \hat{S}_{\alpha\beta}^2 = -(D+2)R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 \tag{3.64}
$$

obtemos que

$$
\hat{a}_2 = h_1(D)R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 + h_2(D)R_{\alpha\beta}^2 + h_3(D)\Box R + h_4(D)R^2 + h_5(D)\Lambda R + h_6(D)\Lambda^2, \tag{3.65}
$$

com

$$h_1(D) = \frac{(D^2 - 29D + 480)}{360},$$

$$h_2(D) = -\frac{D^3 - 179D^2 + 360D + 5760}{360D} + \frac{4c^2}{b_1\gamma_1^2} + \frac{D+4}{D}\left[\frac{D-2}{2}x_2^2 + (D-4)x_2\right],$$

$$h_3(D) = -\frac{2D^3 - 3D^2 - 5D + 20}{30D} - \frac{(D-1)(D+2)}{12D}\left(Dx_1 - 2x_2\right) + \frac{b_3}{6b_1},$$

$$\begin{aligned} h_4(D) &= \frac{25D^4 - 95D^3 + 24D^2 + 480D + 1152}{144D^2} + \frac{b_3}{6b_1} + \frac{b_3^2}{2b_1^2} - \frac{4c^2}{Db_1\gamma_1^2}4 \\ &+ (D+2)\left(\frac{D-1}{4}x_1^2 + \frac{5D^2 - 17D + 24}{12D}x_1 - \frac{D-1}{D}x_1x_2\right) \\ &+ \frac{(D^2+4)}{2D^2}x_2^2 - \frac{(5D^3 - D^2 - 10D - 48)}{6D^2}x_2, \end{aligned}$$

$$h_5(D) = \frac{D+2}{D}\left[\frac{5D^2 - 17D + 24}{6} + (D-1)(Dx_1 - 2x_2)\right](1+z_1) + \frac{(b_1 + 6b_3)b_2}{3b_1^2},$$

$$h_6(D) = (D-1)(D+2)(1+z_1)^2 + \frac{2b_2^2}{b_1^2}. \tag{3.66}$$

Agora, calculamos o termo $\hat{a}_1$

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 = \mathrm{tr}\ \hat{P} = &-\left[\left(x_1 + \frac{5}{6}\right)R + 2(1+z_1)\Lambda\right]\mathrm{tr}\ (k_1 \cdot k_1) \\ &+ 2\left(1 + x_2\right)\mathrm{tr}\ (k_1 \cdot k_2) + 2\,\mathrm{tr}\ (k_1 \cdot k_3) + 2\left(\frac{b_2}{b_1}\right)\Lambda + \left(\frac{b_3}{b_1} + \frac{1}{6}\right)R. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Depois de algumas manipulações chegamos a

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 \quad &= \left[\frac{b_3}{b_1} - \frac{5D^3 - 7D^2 - 12D + 48}{12D} - \frac{(D-1)(D+2)(Dx_1 - 2x_2)}{2D}\right]R \\ &+ \left[\frac{2b_2}{b_1} - (D-1)(D+2)(1+z_1)\right]\Lambda. \end{aligned} \tag{3.68}$$

Logo, a expressão para as divergências para o caso em que $D \to 4$, usando a regularização dimensional, será

$$\frac{i}{2}\mathrm{Tr}\ \ln \hat{H}\Big|_{div} = -\frac{\mu^{D-4}}{\epsilon}\int d^4x\sqrt{-g}\,\hat{a}_2, \tag{3.69}$$

em que $\epsilon = (4\pi)^2(D-4)$ e μ é o parâmetro dimensional da renormalização. Consequentemente,

$$\frac{i}{2}\mathrm{Tr}\ \ln \hat{H}\Big|_{div} = -\frac{\mu^{D-4}}{\epsilon}\int d^4x\sqrt{-g}\Bigg\{h_1(4)R^2_{\mu\nu\alpha\beta} + h_2(4)R^2_{\alpha\beta} + h_3(4)\Box R$$
$$+ h_4(4)R^2 + h_5(4)\Lambda R + h_6(4)\Lambda^2\Bigg\}, \tag{3.70}$$

em que

$$\begin{aligned}
h_1(4) &= \frac{19}{18},\\
h_2(4) &= -\frac{55}{18} + 2x_2^2 + \frac{4c^2}{b_1\gamma_1^2},\\
h_3(4) &= -\frac{2}{3} + \frac{b_3}{6b_1} - \frac{3}{4}\left(2x_1 - x_2\right),\\
h_4(4) &= \frac{59}{36} + \frac{b_3}{6b_1} + \frac{b_3^2}{2b_1^2} - \frac{c^2}{b_1\gamma_1^2} + \frac{9}{2}\left(x_1^2 - x_1x_2 + x_1\right) - \frac{9}{4}x_2 + \frac{5x_2^2}{8},\\
h_5(4) &= 9 + \frac{b_2}{3b_1} + \frac{2b_2b_3}{b_1^2} + 9\left[(2x_1 - x_2)(1+z_1) + z_1\right],\\
h_6(4) &= 18(1+z_1)^2 + \frac{2b_2^2}{b_1^2}.
\end{aligned} \tag{3.71}$$

3.2.2 A contribuição do fantasma de Faddeev-Popov

O operador fantasma de Faddeev-Popov foi construido na subseção 1.4.1, sendo que a equação (1.78) pode ser reescrita como

$$\hat{H}_{GH} = \frac{\delta\chi^\mu}{\delta\phi_{\alpha\beta}}R^\nu_{\alpha\beta} + \frac{\delta\chi^\mu}{\delta\sigma}R^\nu\Bigg|_{\phi_{\alpha\beta}\to 0,\sigma\to 0}, \tag{3.72}$$

em que χ^μ é a *função de fixação de calibre*, dada pela equação (3.28), e $R^\nu_{\alpha\beta}$, R^ν sendo os geradores de calibre com respeito aos campos quânticos $\phi_{\alpha\beta}$ e σ, respectivamente. Para difeomorfismos temos que

$$\delta\phi_{\alpha\beta} = R^\mu_{\alpha\beta}\xi_\mu, \qquad\qquad \delta\sigma = R^\mu\xi_\mu, \tag{3.73}$$

em que

$$R^\mu_{\alpha\beta} = -\frac{1}{\gamma_1}\left(\delta^\mu_\alpha\nabla_\beta + \delta^\mu_\beta\nabla_\alpha - \frac{2\gamma_2}{\gamma_1 + D\gamma_2}g_{\alpha\beta}\nabla^\mu\right), \quad R^\mu = \nabla^\mu\sigma. \tag{3.74}$$

Os detalhes da derivação do gerador ${R^\mu}_{\alpha\beta}$ podem ser encontrados no apêndice B, enquanto que, a derivação de R^μ pode ser vista, por exemplo, em [21]. Calculando as derivadas variacionais chegamos a

$$\frac{\delta\chi^\mu}{\delta\phi_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2}(g^{\mu\alpha}\nabla^\beta + g^{\mu\beta}\nabla^\alpha) - \beta_1 g^{\alpha\beta}\nabla^\mu \quad \text{e} \quad \frac{\delta\chi^\mu}{\delta\sigma} = -\beta_2\nabla^\mu. \tag{3.75}$$

Como resultado o operador $\hat{H}_{GH}$ será dado por

$$\hat{H}_{GH} = -\frac{1}{\gamma_1}\left\{g^{\mu\nu}\Box + \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + D\gamma_2}\left[1 - 2\beta_1 + (D-2)\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right]\nabla^\mu\nabla^\nu + R^{\mu\nu}\right\}. \tag{3.76}$$

Notamos que a contribuição de σ em (3.76) é irrelevante porque no final tomamos o limite $\sigma \to 0$. Explicitando β_1, obtemos

$$\hat{H}_{GH} = -\frac{1}{\gamma_1}\left(g^{\mu\nu}\Box + R^{\mu\nu}\right). \tag{3.77}$$

A escolha dos parâmetros de fixação de calibre que faz o operador $\hat{H}$ mínimo é a mesma que faz o operador (3.77) mínimo. Assim, a forma mínima do operador $\hat{H}_{GH}$ será

$$\hat{H'}_{GH} = g^{\mu\nu}\Box + R^{\mu\nu}. \tag{3.78}$$

Desde que a expressão (3.78) nos fornece um operador vetorial mínimo, podemos usar novamente o algoritmo de Schwinger-DeWitt para obter os valores dos dois primeiros coeficientes não triviais associados ao fantasma

$$(\hat{a}_1)_{GH} = \text{tr}\ \hat{P}_{GH}, \tag{3.79}$$

$$(\hat{a}_2)_{GH} = \mathrm{tr}\,\left[\frac{1}{180}\hat{\mathbb{1}}_{GH}\left(R^2_{\mu\nu\alpha\beta} - R^2_{\alpha\beta} + \Box R\right) + \frac{1}{2}\hat{P}^2_{GH} + \frac{1}{6}\Box\hat{P}_{GH} + \frac{1}{12}(\hat{S}_{GH})^2_{\alpha\beta}\right], \tag{3.80}$$

com

$$\hat{\mathbb{1}}_{GH} = g^{\mu\nu}, \quad \mathrm{tr}\,\hat{P}_{GH} = R^{\mu\nu} + \frac{1}{6}g^{\mu\nu}R, \quad (\hat{S}_{GH})_{\alpha\beta} = R^{\mu\nu}{}_{..\alpha\beta}. \tag{3.81}$$

Calculando o traço das últimas estruturas obtemos

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\,\hat{\mathbb{1}}_{GH} &= D, \qquad \mathrm{tr}\,\hat{P}_{GH} = \frac{(D+6)}{6}R, \\ \mathrm{tr}\,\hat{P}^2_{GH} &= R^2_{\alpha\beta} + \frac{(D+12)}{36}R^2, \qquad \mathrm{tr}\,(\hat{S}_{GH})^2_{\alpha\beta} = -R^2_{\mu\nu\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{3.82}$$

Com o auxílio destes resultados chegamos ao valor do coeficiente $(\hat{a}_1)_{GH}$

$$(\hat{a}_1)_{GH} = \frac{(D+6)}{6}R \tag{3.83}$$

e do coeficiente $(\hat{a}_2)_{GH}$

$$(\hat{a}_2)_{GH} = \frac{(D-15)}{180}R^2_{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{(D-90)}{180}R^2_{\mu\nu} + \frac{(D+5)}{30}\Box R + \frac{(D+12)}{72}R^2. \tag{3.84}$$

No limite $D \to 4$, temos

$$-i\mathrm{Tr}\,\ln\hat{H}_{GH}\big|_{div} = -\frac{\mu^{D-4}}{\epsilon}\int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{11}{90}R^2_{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{43}{45}R^2_{\mu\nu} - \frac{3}{5}\Box R - \frac{4}{9}R^2\right\}, \tag{3.85}$$

ou simplesmente,

$$-i\mathrm{Tr}\,\ln\hat{H}_{GH}\big|_{div} = \frac{\mu^{D-4}}{\epsilon}\int d^4x\sqrt{-g}\left\{-\frac{11}{90}E_4 + \frac{7}{15}R^2_{\mu\nu} + \frac{3}{5}\Box R + \frac{17}{30}R^2\right\}, \tag{3.86}$$

em que usamos a definição do termo de Gauss-Bonnet quadridimensional

$$E_4 = R^2_{\mu\nu\alpha\beta} - 4R^2_{\alpha\beta} + R^2. \tag{3.87}$$

3.2.3 A parte divergente da ação efetiva

Para obtermos o valor total do coeficiente $\hat{a}_2$ precisamos substituir (3.65) e (3.84) na expressão (3.50). Então, através da equação $(\hat{a}_2)_{\text{total}} = \hat{a}_2 - 2(\hat{a}_2)_{GH}$ chegamos à seguinte estrutura geral

$$\begin{aligned} (\hat{a}_2)_{total} &= f_1(D)R^2_{\mu\nu\alpha\beta} + f_2(D)R^2_{\alpha\beta} + f_3(D)\Box R + f_4(D)R^2 \\ &+ f_5(D)\Lambda R + f_6(D)\Lambda^2, \end{aligned} \tag{3.88}$$

com os coeficientes dados por

$$f_1(D) = \frac{(D^2 - 33D + 540)}{360},$$

$$f_2(D) = -\frac{D^3 - 183D^2 + 720D + 5760}{360D} + \frac{4c^2}{b_1\gamma_1^2} + \frac{D+4}{D}\left[\frac{D-2}{2}x_2^2 + (D-4)x_2\right],$$

$$f_3(D) = -\frac{2D^3 - D^2 + 5D + 20}{30D} - \frac{(D-1)(D+2)}{12D}\left(Dx_1 - 2x_2\right) + \frac{b_3}{6b_1},$$

$$f_4(D) = \frac{25D^4 - 99D^3 - 24D^2 + 480D + 1152}{144D^2} + \frac{b_3}{6b_1} + \frac{b_3^2}{2b_1^2} - \frac{4c^2}{Db_1\gamma_1^2}$$
$$+ (D+2)\left(\frac{D-1}{4}x_1^2 + \frac{5D^2 - 17D + 24}{12D}x_1 - \frac{D-1}{D}x_1x_2\right)$$
$$+ \frac{(D^2+4)}{2D^2}x_2^2 - \frac{(5D^3 - D^2 - 10D - 48)}{6D^2}x_2,$$

$$f_5(D) = \frac{D+2}{D}\left[\frac{5D^2 - 17D + 24}{6} + (D-1)\left(Dx_1 - 2x_2\right)\right](1+z_1) + \frac{(b_1 + 6b_3)b_2}{3b_1^2},$$

$$f_6(D) = (D-1)(D+2)(1+z_1)^2 + \frac{2b_2^2}{b_1^2}. \tag{3.89}$$

Em $D \to 4$ obtemos as seguintes divergências

$$\bar{\Gamma}^{(1)}_{div} = -\frac{\mu^{D-4}}{\epsilon}\int d^4x\,\sqrt{-g}\,(\hat{a}_2)_{total}. \tag{3.90}$$

Reescrevendo (3.90) em função do termo de Gauss-Bonnet e do quadrado do tensor de Weyl

$$C^2 = E_4 + 2\left(R^2_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}R^2\right), \tag{3.91}$$

por meio das seguintes relações inversas

$$\begin{aligned} R^2_{\mu\nu\alpha\beta} &= 2C^2 - E_4 + \frac{1}{3}R^2, \\ R^2_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}C^2 - \frac{1}{2}E_4 + \frac{1}{3}R^2, \end{aligned} \tag{3.92}$$

a expressão para as divergências na parametrização mais geral possível fica

$$\bar{\Gamma}^{(1)}_{div} = -\frac{\mu^{D-4}}{\epsilon}\int d^4x\sqrt{-g}\left\{g_1 C^2 + g_2 E_4 + g_3 \Box R + g_4 R^2 + g_5 \Lambda R + g_6 \Lambda^2\right\}, \quad (3.93)$$

em que

$$g_1 = \frac{7}{20} + x_2^2 + \frac{2c^2}{b_1\gamma_1^2},$$

$$g_2 = \frac{149}{180} - x_2^2 - \frac{2c^2}{b_1\gamma_1^2},$$

$$g_3 = -\frac{19}{15} + \frac{b_3}{6b_1} - \frac{3}{4}\left(2x_1 - x_2\right),$$

$$g_4 = \frac{1}{4} + \frac{b_3}{6b_1} + \frac{b_3^2}{2b_1^2} + \frac{c^2}{3b_1\gamma_1^2} + \frac{9}{2}\left(x_1^2 - x_1x_2 + x_1\right) - \frac{9}{4}x_2 + \frac{31}{24}x_2^2,$$

$$g_5 = 9 + \frac{b_2}{3b_1} + \frac{2b_2b_3}{b_1^2} + 9\left[(2x_1 - x_2)(1+z_1) + z_1\right],$$

$$g_6 = 18(1+z_1)^2 + \frac{2b_2^2}{b_1^2}. \quad (3.94)$$

Ainda é possível escrever os g's em termos dos parâmetros de $\gamma_{1,2...,6}$, r e β_3, tal como

$$\begin{aligned}
g_1 &= \frac{7}{20} + \frac{4\gamma_3^2}{\gamma_1^4} - \frac{2A^2}{\gamma_1^2 B^2},\\
g_2 &= \frac{149}{180} - \frac{4\gamma_3^2}{\gamma_1^4} + \frac{2A^2}{\gamma_1^2 B^2},\\
g_3 &= -\frac{19}{15} + \frac{3E}{2} - \frac{C}{6B^2},\\
g_4 &= \frac{1}{4} - \frac{9E}{2} + \frac{31\gamma_3^2 + 216\gamma_4(\gamma_3 + 2\gamma_4)}{6\gamma_1^4} - \frac{A^2}{3\gamma_1^2 B^2} - \frac{C}{6B^2} + \frac{C^2}{2B^4},\\
g_5 &= 9(1-2E)^2 - \left(\frac{1}{3} - \frac{2C}{B^2}\right)\frac{D}{B^2},\\
g_6 &= 18(1-2E)^2 + \frac{2D^2}{B^4};
\end{aligned} \quad (3.95)$$

com as seguintes notações condensadas

$$
\begin{aligned}
A &= \gamma_3 + 2\gamma_5 + 4r\beta_3\gamma_1, \\
B &= \gamma_1 + 4\gamma_2 + 8r\beta_3, \\
C &= 8r\beta_3(\gamma_1 + 4\gamma_2 + 4r\beta_3) + (\gamma_3 + 4\gamma_4) + 4(\gamma_5 + 4\gamma_6), \\
D &= (\gamma_1 + 4\gamma_2)^2 + 2\left[(\gamma_3 + 4\gamma_4) + 4(\gamma_5 + 4\gamma_6)\right] + 32\beta_3\left[r(\gamma_1 + 4\gamma_2) + 4r^2\beta_3\right], \\
E &= (\gamma_3 + 4\gamma_4)/\gamma_1^2.
\end{aligned}
\tag{3.96}
$$

Um cálculo análogo, com $(\hat{a}_1)_{\text{total}} = \hat{a}_1 - 2(\hat{a}_1)_{GH}$, nos leva ao resultado

$$
\begin{aligned}
(\hat{a}_1)_{total} &= \left[\frac{b_3}{b_1} - \frac{5D^3 - 3D^2 + 12D + 48}{12D} - \frac{(D-1)(D+2)(Dx_1 - 2x_2)}{2D}\right] R \\
&+ \left[\frac{2b_2}{b_1} - (D-1)(D+2)(1+z_1)\right] \Lambda.
\end{aligned}
\tag{3.97}
$$

3.3 Análise dos resultados

3.3.1 Limites conhecidos

Consideremos alguns casos especiais da nossa expressão anterior para $(\hat{a}_2)_{total}$. No limite em que

$$
\begin{aligned}
&x_{1,2} \to 0, \qquad z_1 \to 0, \qquad c \to 0, \\
&b_1 \to -\frac{1}{16}, \qquad b_2 \to \frac{1}{16}, \qquad b_3 \to 0
\end{aligned}
\tag{3.98}
$$

reproduzimos os resultados das divergência obtidas na RG considerando o calibre e a parametrização mais simples possível

$$
\bar{\Gamma}^{(1)}_{div} = -\frac{\mu^{D-4}}{\epsilon}\int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{7}{20}C^2 + \frac{149}{180}E_4 - \frac{19}{15}\Box R + \frac{1}{4}R^2 + \frac{26}{3}\Lambda R + 20\Lambda^2\right\}. \tag{3.99}
$$

Utilizando (3.91) a expressão acima torna-se

$$
\bar{\Gamma}^{(1)}_{div} = -\frac{2\mu^{D-4}}{\epsilon}\int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{53}{90}E_4 + \frac{7}{20}R^2_{\mu\nu} + \frac{1}{120}R^2 + \frac{13}{3}\Lambda R + 10\Lambda^2\right\}, \tag{3.100}
$$

que é o famoso resultado de 't Hooft and Veltman [62].

Já no limite

$$
\begin{aligned}
& x_{1,2} \to 0, \qquad z_1 \to 0, \qquad c \to \beta_3, \\
& b_1 \to -\frac{1}{16} - \beta_3 - 4\beta_3^2, \qquad b_2 \to \frac{1}{16} + 2\beta_3 + 8\beta_3^2, \\
& b_3 \to \frac{1}{2}\beta_3 + 2\beta_3^2,
\end{aligned}
\tag{3.101}
$$

reobtemos o resultado de [90], artigo em que pela primeira vez foram calculadas as divergências para RG utilizando-se uma parametrização conforme para a métrica. Sua importância reside em ter mostrado que certas discrepâncias de resultados na gravitação de Weyl não eram originadas na fixação do calibre conforme.

3.3.2 Limite on-shell próximo a $D = 4$

Iremos, agora, considerar o limite *on-shell* do resultado das divergencias (3.88) quando $D = 4$. Para isto, dadas as equações de Einstein

$$
R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(R + 2\Lambda) = 0,
\tag{3.102}
$$

e o cálculo do seu traço, com algumas manipulações, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
R_{\alpha\beta}^2 &= 4\Lambda^2, \qquad R^2 = 16\Lambda^2, \qquad \Box R = 0, \\
\Lambda R &= -4\Lambda^2, \qquad C^2 = E_4 - \frac{8\Lambda^2}{3}.
\end{aligned}
\tag{3.103}
$$

De posse destes resultados reescrevemos (3.93) como

$$
\begin{aligned}
\bar{\Gamma}^{(1)}_{div}\Big|_{\text{on shell}} &= -\frac{\mu^{D-4}}{\epsilon} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{53}{45} E_4 - \frac{224}{15}\Lambda^2 + 18(2x_1 - x_2 - z_1)^2 \Lambda^2 \right. \\
&- \left. \frac{2(b_2 - 2b_3)(2b_1 - 3b_2 + 6b_3)}{3b_1^2} \Lambda^2 \right\}.
\end{aligned}
\tag{3.104}
$$

O terceiro termo de (3.104) se anula, já que

$$
2x_1 - x_2 - z_1 = 0.
\tag{3.105}
$$

No quarto termo temos

$$
b_2 - 2b_3 = \frac{1}{16} \left(\gamma_1 + 4\gamma_2 + 8r\beta_3 \right)^2,
\tag{3.106}
$$

além de que

$$(2b_1 - 3b_2 + 6b_3) = -\frac{5}{16}\left(\gamma_1 + 4\gamma_2 + 8r\beta_3\right)^2 \tag{3.107}$$

e, por fim,

$$b_1^2 = \frac{1}{16^2}\left(\gamma_1 + 4\gamma_2 + 8r\beta_3\right)^4. \tag{3.108}$$

Logo,

$$-\frac{2(b_2 - 2b_3)(2b_1 - 3b_2 + 6b_3)}{3b_1^2}\Lambda^2 = \frac{10}{3}\Lambda^2. \tag{3.109}$$

Portanto, (3.104) se reduz a

$$\bar{\Gamma}^{(1)}_{div}\Big|_{\text{on shell}} = -\frac{\mu^{D-4}}{\epsilon}\int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{53}{45}E_4 - \frac{58}{5}\Lambda^2\right\}. \tag{3.110}$$

Concluímos que, no limite *on-shell*, as divergências de *1-loop* não dependem de parâmetros de calibre e da parametrização.

Analogamente, para $\hat{a}_1$, no limite *on-shell*, temos

$$(\hat{a}_1)_{total}\Big|_{\text{on shell}} = \left[\frac{38}{3} + 18(2x_1 - x_2 - z_1) + \frac{2(b_2 - 2b_3)}{b_1}\right]\Lambda. \tag{3.111}$$

O segundo termo se anula por causa da equação (3.105). Já o terceiro fica

$$\frac{2(b_2 - 2b_3)}{b_1}\Lambda = -2\Lambda, \tag{3.112}$$

que finalmente nos leva a

$$(\hat{a}_1)_{total}\Big|_{\text{on shell}} = \frac{32}{3}\Lambda, \tag{3.113}$$

que novamente não depende de quaisquer parâmetros.

3.3.3 Análise *on-shell* em D dimensões

Finalmente, analisamos o limite *on-shell* dos coeficientes $\hat{a}_1$ e $\hat{a}_2$ em D dimensões. Eles não correspondem necessariamente à parte divergente da ação efetiva. Começamos calculando o traço das equações de Einstein

$$R = -\frac{2D}{(D-2)}\Lambda \tag{3.114}$$

e as equações de campo podem ser reescritas como

$$R_{\mu\nu} = -\frac{2g_{\mu\nu}}{(D-2)}\Lambda. \tag{3.115}$$

Com estas relações chegamos aos resultados

$$(\hat{a}_1)_{total}\Big|_{\text{on shell}} = -\frac{D\,(D^2-3D-36)}{6(D-2)}\Lambda \tag{3.116}$$

e

$$(\hat{a}_2)_{total}\Big|_{\text{on shell}} = \frac{(D^2-33D+540)}{360}R^2_{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{D\,(5D^3-17D^2-354D-720)}{180(D-2)^2}\Lambda^2. \tag{3.117}$$

Como é explícito, ambos os coeficientes são independentes, *on-shell*, tanto em relação aos parâmetros de calibre, quanto aos parâmetros escolhidos para modelar a parametrização da métrica quântica. Lembramos que este resultado foi obtido considerando um espaço-tempo D dimensional arbitrário, o que é um claro indicativo da importância da localidade na fixação de calibre e da independência da ação efetiva de *1-loop* com respeito à parametrização da métrica quântica. Por fim, a universalidade *on-shell* é válida independentemente se o termo considerado é finito ou divergente.

Capítulo 4

Conclusões e perspectivas

Nesta tese estudamos as ambiguidades na dependência da ação efetiva, a *1-loop*, com respeito às escolhas de calibre e de parametrização em uma teoria quântica de gravitação baseada na RG.

É um fato conhecido na literatura que as ambiguidades na fixação de calibre podem ser controladas por condições *on-shell*. No entanto, já para as ambiguidades da parametrização não existem teoremas, para o caso geral, que garantem sua independência no nível *on-shell*. Consequentemente, se faz necessário realizar cálculos explícitos (como o nosso) para checar esta dependência. Como resultado verificamos que os dois primeiros *coeficientes de DeWitt* não triviais, a saber, $\hat{a}_1$ e $\hat{a}_2$, são universais *on-shell* em D dimensões. Estes coeficientes não dependem de quaisquer tipos de parâmetros (sejam eles associados à parametrização da métria ou à fixação de calibre) quando são válidas as equações de movimento. Em nossos cálculos, usamos a parametrização mais geral possível para a métrica quântica no nível de *1-loop* e encontramos, surpreendentemente, que para esta parametrização arbitrária, o operador bilinear $\hat{H}$, associado à ação da teoria, pode ser posto em sua forma mínima. Além disso, de maneira natural, recuperamos resultados conhecidos, tais como: o resultado do primeiro cálculo das divergências, a *1-loop*, de uma teoria quântica de gravitação [62] e o resultado do cálculo das divergências de *1-loop* da RG com uma parametrização conforme da métrica quântica [90].

As nossas conclusões indicam que as independências com respeito a escolha de calibre e parametrização são devidas ao caráter local dos coeficientes de DeWitt na expansão de Schwinger-DeWitt. Logo, conjecturamos que os coeficientes $\hat{a}_k$ com $k \geq 3$

também devem ser universais *on-shell*.

A universalidade *on-shell* é uma ferramenta valorosa em QG. Ela foi usada, por exemplo, para sondar a independência da fixação de calibre das *funções beta* em modelos super-renormalizáveis de gravitação quântica [5]. O que permite algumas aplicações interessantes, tais como a possibilidade de derivar uma função beta exata e universal para a constante de Newton [76].

Além disso, mais recentemente com a universalidade *on-shell* solucionou-se um longo debate, sobre modelos tensoriais-escalares, em que a utilização de referenciais diferentes, de Einstein e de Jordan, gerou resultados diferentes. Nossas conclusões indicam que esta equivalência pode ser estendida para a parte finita da ação efetiva. Ao menos a parte local e a parte não-local, que puder ser obtida através da soma dos coeficientes de Schwinger-DeWitt.

Como perspectiva futura seria interessante estender a nossa análise para estudar de maneira explícita, e tentar provar, esta questão da equivalência entre os referenciais de Einstein e Jordan em modelos tensoriais-escalares.

Apêndice A

A dedução da relação para $\Box\sigma$

Vamos construir, agora, uma importante identidade para o d'Alembertiano do intervalo geodésico, $\sigma(x, x')$. Identidade que teve um "papel chave" na dedução das relações de recorrência que nos fornecem os coeficientes de DeWitt, conforme discussão do capítulo 2.

Começamos pela relação "raíz"

$$\sigma = \frac{1}{2}\sigma,^{\rho}\sigma,_{\rho}\,, \tag{A.1}$$

cuja segunda derivada com respeito aos pontos x'^{ν} e x^{α} é

$$\sigma_{\nu'\alpha} = \sigma,^{\mu}{}_{\alpha}\,\sigma,_{\mu\nu'} + \sigma^{\mu}\sigma,_{\mu\nu'\alpha}\,. \tag{A.2}$$

Mas, como $\mathscr{D}_{\mu\nu'} = -\sigma,_{\mu\nu'}$, temos que

$$\mathscr{D}_{\nu'\alpha} = \sigma,^{\mu}{}_{\alpha}\,\mathscr{D}_{\mu\nu'} + \sigma,^{\mu}\,\mathscr{D}_{\mu\nu',\alpha}. \tag{A.3}$$

Notando que os índices das derivadas podem comutar, e usando a relação inversa $(\mathscr{D}^{-1})\,,^{\alpha\nu'}$ pelo lado direto na equação (A.3), escrevemos

$$\delta_{\alpha}{}^{\alpha} = \sigma,^{\mu}{}_{\alpha}\,\delta_{\mu}{}^{\alpha} + \sigma,^{\mu}\,\mathscr{D}_{\alpha\nu',\mu}\left(\mathscr{D}^{-1}\right),^{\alpha\nu'}\,, \tag{A.4}$$

em que utilizamos o fato $\mathscr{D}_{\mu\nu'}\,(\mathscr{D}^{-1})\,,^{\alpha\nu'} = \delta_{\mu}{}^{\alpha}$. Como $\delta_{\alpha}{}^{\alpha} = 2\omega$ chegamos a

$$\Box\,\sigma = \sigma,^{\mu}{}_{\mu} = 2\omega - \sigma,^{\mu}\,\mathscr{D}_{\alpha\nu',\mu}\left(\mathscr{D}^{-1}\right),^{\alpha\nu'}\,. \tag{A.5}$$

Podemos reescrever o último termo, do lado direito de (A.5), com o auxílio da *fórmula de Jacobi*[1], a saber,

$$\frac{d}{dt}\left[\det(A(t))\right] = \operatorname{tr}\,\left[(\det A)A^{-1}\frac{dA}{dt}\right], \tag{A.6}$$

que para o nosso caso torna-se

$$\partial_\mu(\det \mathscr{D}_{\alpha\nu'}) = \operatorname{tr}\,\left[\det(\mathscr{D}_{\alpha\nu'})(\mathscr{D}^{-1})_{\alpha\nu'}\,\partial_\mu \mathscr{D}_{\alpha\nu'}\right]. \tag{A.7}$$

Calculando o traço chegamos a

$$\partial_\mu \mathscr{D} = \mathscr{D}_{,\mu} = \mathscr{D}(\mathscr{D}^{-1})^{\alpha\nu'}\mathscr{D}_{\alpha\nu',\mu}. \tag{A.8}$$

Agora, multiplicando (A.8) por $\mathscr{D}^{-1}$ encontraremos

$$\mathscr{D}^{-1}\mathscr{D}_{,\mu} = (\mathscr{D}^{-1})^{\alpha\nu'}\mathscr{D}_{\alpha\nu',\mu}. \tag{A.9}$$

Substituindo (A.9) em (A.5), obteremos por fim

$$\Box\,\sigma = 2\omega - \sigma_{,}{}^{\mu}\,\mathscr{D}^{-1}\mathscr{D}_{,\mu}\,, \tag{A.10}$$

que é a relação desejada.

[1] Veja [73] para uma prova.

Apêndice B

A derivação do gerador $R^{\mu}_{\alpha\beta}$

Neste apêndice expomos alguns detalhes de como obtemos o gerador $R^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ da equação (3.74). Observamos que a decomposição da métrica de fundo pode ser reescrita como

$$g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + \kappa h^{(1)}_{\alpha\beta} + \kappa^2 h^{(2)}_{\alpha\beta} + \cdots \,, \tag{B.1}$$

em que

$$h^{(1)}_{\alpha\beta} \;=\; \gamma_1 \phi_{\alpha\beta} + \gamma_2 \phi g_{\alpha\beta}, \tag{B.2}$$

$$h^{(2)}_{\alpha\beta} \;=\; \gamma_3 \phi_{\alpha\rho}\phi^{\rho}_{\beta} + \gamma_4 \phi_{\rho\omega}\phi^{\rho\omega} g_{\alpha\beta} + \gamma_5 \phi\phi_{\alpha\beta} + \gamma_6 \phi^2 g_{\alpha\beta}. \tag{B.3}$$

Aqui, os pontos indicam os termos dependentes do campo σ, que não estão sendo levados em consideração nesta etapa. O motivo é porque, de acordo com a equação (3.72), a transformação de calibre deste termo deve ser considerada separadamente. Ressaltamos, também, que todos os termos em (B.3) podem ser seguramente ignorados, pois eles são de segunda ordem no campo quântico $\phi_{\alpha\beta}$. Logo, a parte do gerador de calibre correspondente a (B.3) deve ser proporcional a $\phi_{\alpha\beta}$ e, consequentemente, não fornece nenhuma contribuição no limite $\phi_{\alpha\beta} \to 0$. Portanto, o uso da equação (B.2) é suficiente para os nossos propósitos, já que os termos que dependem de σ são relevantes apenas somente a partir de *2-loops*.

A forma inversa desta equação (B.1), dada (B.2), é

$$\phi_{\alpha\beta} = \frac{1}{\gamma_1}\Big(\delta_{\alpha\beta,}{}^{\mu\nu} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + D\gamma_2} g_{\alpha\beta} g^{\mu\nu}\Big) h^{(1)}_{\mu\nu}. \tag{B.4}$$

Considerando a transformação infinitesimal nas coordenadas

$$x^{\mu} \to x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu} \tag{B.5}$$

podemos escrever

$$\delta h^{(1)}_{\mu\nu} = -\left(g_{\mu\rho}\nabla_{\nu} + g_{\nu\rho}\nabla_{\mu}\right)\xi^{\rho} \tag{B.6}$$

e, finalmente, chegaremos a

$$\delta\phi_{\alpha\beta} = -\frac{1}{\gamma_1}\Big[g_{\alpha\rho}\nabla_{\beta} + g_{\beta\rho}\nabla_{\alpha} - \frac{2\gamma_2}{\gamma_1 + D\gamma_2}g_{\alpha\beta}\nabla_{\rho}\Big]\xi^{\rho}, \tag{B.7}$$

que nos fornece a eq. (3.74).

Referências Bibliográficas

[1] I.G. Avramidi and A.O. Barvinsky, *Asymptotic freedom in higher-derivative quantum gravity,* Phys. Lett. **B159** (1985) 269.

[2] L.F. Abbott, *Introduction to the Background Field Method*, Acta Physica Polonica, Vol. **B** 13, N^0 1-2, (1982).

[3] I.J.R. Aitchison and A.J.G. Hey 2002 *"Gauge theories in particle physics: A practical introduction. Vol. 1: From relativistic quantum mechanics to QED"*, 3^aed. (Ed. IOP Publishing., Bristol, UK).

[4] E.S. Abers and B.W. Lee, *Gauge Theories*, *Phys. Rep.* **9**, 1 (1973).

[5] M. Asorey, J.L. López and I.L. Shapiro, *Some remarks on high derivative quantum gravity,* Int. Journ. Mod. Phys. **A12** (1997) 5711.

[6] Aristóteles, *Aristotelis Opera* (Didot, Paris, 1850), t. II, cap. V, p. 291, citado por P.M.M. Duhem, *Le Système du Monde: Histoire des Doctrines Cosmologiques de Platon a Copernic*, (Hermann, Paris, 1997), v. 1, pg. 207; Aristóteles, *The Works of Aristotle, II*, (Clarendon Press, Oxford, 1930), 208b pg. 8-22; G.E.R. Lloyd, *Early Greek Science: Thales to Aristotle*, Revised Edition, (W.W.Norton & Company, Inc, Nova York, 1974).

[7] M. Abramowitz and I.A. Stegun 1972 *"Handbook of Mathematical Functions"*, 1^aed. (National Bureau of Standards, USA).

[8] I.G. Avramidi, *Asymptotic behavior of the quantum theory of gravity with higher derivatives*, Sov. J. Nucl. Phys. **44**, 255 (1986).

[9] I.G. Avramidi, *Covariant methods for the calculation of the effective action in quantum field theory and investigation of higher-derivative quantum gravity.* (Ph.D. thesis, Moscow University, 1986); hep-th/9510140.

[10] K.G. Begeman, A.H. Broeils and R.H. Sanders, *Extended rotation curves of spiral galaxies: dark haloes and modified dynamics*, Mon. Not. R. Astr. Soc. **249** (1991) 523.

[11] J. Bjorken and S. Drell 1964 *Relativistic Quantum Mechanics*, Internacional Series in Pure and Applied Physics (Ed. McGraw-Hill Book Company).

[12] N.D. Birrell and P.C.W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press, Cambridge (1982).

[13] N.E.J. Bjerrum-Bohr, J.F. Donoghue, and B.R. Holstein, *Quantum gravitational corrections to the nonrelativistic scattering potential of two masses,* Phys. Rev. **D67** (2003) 084033, Erratum: Phys. Rev. **D71** (2005) 069903(E), arXiv: hep-th/0211072.

[14] Z. Bern, H.H. Chi, L. Dixon, and A. Edison, *Two-Loop Renormalization of Quantum Gravity Simplified*, Phys.Rev. **D95** (2017) 046013, arXiv: hep-th/1701.02422.

[15] H. Bethe, *The Electromagnetic Shift of Energy Levels*, Physical Review **72** (4): 339-41 (1947).

[16] D. Bailin and A. Love 1986 *Introduction to Gauge Field Theory*, (IOP Publishing Limited).

[17] A.O. Barvinski, A. Kamenschik, and B. Karmazin, *Renormalization group for nonrenormalizable theories: Einstein gravity with a scalar field*, Phys. Rev. **D48** (1993) 3677.

[18] N.N. Bogoliubov and D.V. Shirkov 1959 *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, Monographs and Texts in Physics and Astronomy - Vol. III (Interscience Publishers Inc., New York).

[19] C.T. Bolton *Identification of Cygnus X-1 with HDE 226868*, Nature, 235 (5336): 271-273 (1972).

[20] A. Bosma, *The Distribution and Kinematics of Neutral Hydrogen in Spiral Galaxies of Various Morphological Types*, (PhD), Rijksuniversiteit Groningen (1978).

[21] I.L. Buchbinder, S.D. Odintsov and I.L. Shapiro 1992 *Effective Action in Quantum Gravity* (IOP Publishing, Bristol).

[22] I.L. Buchbinder and I.L. Shapiro, *On the asymptotic freedom in the Einstein-Cartan theory*, Sov. J. Phys. **31** (1988) 40.

[23] A.O. Barvinsky and G.A. Vilkovisky, *The generalized Schwinger-DeWitt Tecnique in Gauge Theories and Quantum Gravity*, Phys. Rep. 119, 1 (1985).

[24] S. Bowyer, E.T. Byram, T.A. Chubb and H. Friedman, *Cosmic X-ray Sources*, Science **147** (3656): 394 (1965).

[25] H. Cavendish, *Experiments to Determine the Density of the Earth*, (1798) In MacKenzie, A. S. Scientific Memoirs Vol.9: The Laws of Gravitation. American Book Co. (published 1900). pp. 59.

[26] F. Caruso e V. Oguri 2006 *Física Moderna, Origens Clássicas e Fundamentos Quânticos*, Editora Campus.

[27] J.C. Collins 1984 *Renormalization*, (Cambridge University Press), Cambridge.

[28] S. Coleman 1985 *Aspects of Symmetry, Selected Erice Lectures*, (Cambridge University Press), Cambridge.

[29] A. Codello, R. Percacci, and Ch. Rahmede, *Investigating the Ultraviolet Properties of Gravity with a Wilsonian Renormalization Group Equation*, Annals Phys. **324** (2009) 414, arXiv: hep-th/0805.2909.

[30] F. Dyson, A. Eddington, and C. Davidson, *A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations made at the Total Eclipse of May 29, 1919*, Philos. T. R. Soc. Lond. 220 (1920) 291.

[31] B.S. DeWitt, *Relativity, Groups and Topology*, Lectures delivered at Les Houches Summer School, edited by C. DeWitt and B.S. DeWitt (Gordon and Breach, 1963).

[32] B.S. DeWitt, *Dynamical Theory of Groups and Fields.* (Gordon and Breach, 1965).

[33] B.S. DeWitt (1967), *Quantum Theory of Gravity, I. The Canonical Theory*, Phys. Rev. **171**, 1834; *Quantum Theory of Gravity, II. The Manifestly Covariant Theory* Phys. Rev. **162**, 1195; *Quantum Theory of Gravity, III. Applications of the Covariant Theory* Phys. Rev. **162**, 1239.

[34] B.S. DeWitt, *Quantum field theory in curved spacetime*, Phys. Rep. C, (1975), Vol. 19, 296.

[35] B.S. DeWitt, *The Global Approach to Quantum Field Theory*, Vols. I e II, Claredon Press, Oxford (2003).

[36] B.S. DeWitt and G. Esposito, *An Introduction to Quantum Gravity*, hep-th: 0711.2445v1 (2007).

[37] P.A.M. Dirac, *The Quantum Theory of Electron I*, *Proc. Royal Soc. A* **117**, 610, (1928); *The Quantum Theory of Electron II*, **118**, 351 (1928); *The Proton*, Nature *nº* 3181, Vol. 126 (1930); *A Theory of Electrons and Protons*, Proc. Roy. Soc. A 133, 60 (1929); *Quantised Singularities in the Electromagnetic Field*, Proc. Roy. Soc. A 133, 60 (1931).

[38] S. Deser and P. van Nieuwenhuisen, *One-loop divergences of quantized Einstein-Maxwell fields*, *Phys. Rev.* **D10**, 401 (1974); *Nonrenormalizability of the quantized Dirac-Einstein system*, **D10**, 411 (1974).

[39] S. Dodelson 2003 *Modern Cosmology* (Academic Press, New York).

[40] J. Donoghue, *Leading quantum correction to the Newtonian potential*, Phys. Rev. Lett. **72**, 2996 (1994); *General relativity as an effective field theory: The leading quantum corrections*, Phys. Rev. **D50**, 3874 (1994).

[41] G.'t Hooft and Veltman, *Regularization and renormalization of gauge fields*, Nucl. Phys. **B 44** (1972) 189; C.G. Bollini and J.J. Giambiagi, *Dimensional renormalization: the number of dimension as a regularizing parameter*, Nuovo Cim. **B 12** (1972) 20.

[42] A. Einstein, *Zur Elektrodynamik Bewegter Koerper*, Annalen der Physik **17**, 891 (1905). Tradução para o inglês: *On the electrodynamics of moving bodies*, in H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski and H. Weyl, *The Principle of Relativity:*

A collection of original memoirs on the Special and General theory of Relativity, (Methuen and Company, Ltd., London (1923).

[43] A. Einstein, *Die Grundlage der allgemeinen Relativitatstheorie*, Annalen der Physik **49**, 769 (1916). Tradução para o inglês: *The foudation of the general theory of relativity*, in H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski and H. Weyl, *The Principle of Relativity: A collection of original memoirs on the Special and General theory of Relativity*, (Methuen and Company, Ltd., London (1923).

[44] L.D. Faddeev, *Feynman integral for singular Lagrangians*, Theor. Math. Phys. 1: 1 (1969).

[45] L.D. Faddeev, *Faddeev-Popov ghosts*, Scholarpedia, 4(4): 7389 (2009).

[46] K. Falls, *Renormalization of Newton's constant*, Phys. Rev. **D92** (2015) 124057, arXiv: hep-th/1501.05331.

[47] E. Fermi, *Quantum Theory of Radiation*, Reviews of Modern Physics **4**: 87-132 (1932).

[48] R.P. Feynman, *Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics*, Reviews of Modern Physics 20 (2): 367-387 (1948); R.P. Feynman and A.R. Hibbs 1965 *Quantum Mechanics and Path Integrals*, New York: McGraw-Hill.

[49] V. A. Fock, *The proper time in classical and quantum mechanics*, Izvestiya of USSR Academy of Sciences, Physics, (1937), N^0 4/5, 551.

[50] L.D. Faddeev and V.N. Popov, *Feynman diagrams for the Yang-Mills field*, Phys. Lett. **B 25** (1967) 29.

[51] E.S. Fradkin and A.A. Tseytlin, *Renormalizable asymptotically free quantum theory of gravity, Nucl. Phys.* **B201** (1982) 469.

[52] S.A. Fulling, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-time*, Cambridge University Press, Cambridge (1989).

[53] G. Galilei, *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* (1632), Tradução para o inglês: *Dialogue Concerning the Two Chief World Systems*; *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche Intorno a Due Nuove Scienze* (1638), Tradução para o inglês: *Discourses and Mathematical Demonstrations Relating to Two New Sciences.*

[54] G.W. Gibbons, *General Relativity. An Einstein Centenary Survey*, edited by S.W. Hawking and W. Israel, (Cambridge University, Cambridge, 1979), p. 639.

[55] P.B. Gilkey, *The spectral geometry of riemannian manifold*, J. Differential Geom. **10** (1975), no. 4, 601.

[56] J.D. Gonçalves, T. de P. Netto e I.L. Shapiro, *Gauge and parametrization ambiguity in quantum gravity*, Phys. Rev. D **97**, 026015 (2018); arXiv: hep-th/1712.03338v2 (2018).

[57] M.H. Goroff and A. Sagnotti, *The ultraviolet behavior of Einstein gravity*, Nucl. Phys. **B266**, 709 (1986).

[58] B. P. Abbott *el al*, (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration) *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, *Phys. Rev. Lett.* **116**, (6): 061102 (2016), arXiv: gr-qc/1602.03837.

[59] B. P. Abbott *el al*, (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration) *GW170104: Observation of a 50-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence at Redshift 0.2*, *Phys. Rev. Lett. 118*, 221101 (2017); B. P. Abbott *el al*, (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), *GW170608: Observation of a 19-solar-mass Binary Black Hole Coalescence*, The Astrophysical Journal Letters *851*, 2 (2017); B. P. Abbott *el al*, (LIGO Scientific Collaboration & Virgo Collaboration) *GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral*, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 16 (2017).

[60] G. 't Hooft, *Renormalization of Massless Yang-Mills Fields*, *Nucl. Phys. B* **33**, 173 (1971); *Renormalizable Lagrangians for Massive Yang-Mills Fields*, *Nucl. Phys. B* **35**, 167 (1971).

[61] G.'t Hooft, *Gauge theories of the forces between elementary particles*, SCIAM, **242**, Nr. 6, 104–138 (1980).

[62] G. t'Hooft and M. Veltman, *One-loop divergencies in the theory of gravitation*, *Ann. Inst. H. Poincare.* **A20**, 69 (1974).

[63] R. Oppenheimer, *Note on the Theory of the Interaction of Field and Matter*, Physical Review **35** (5): 461-77 (1930); F. Bloch and A. Nordsieck *Note on the Radiation*

Field of the Electron, Physical Review. **52** (2): 54-59 (1937); V. F. Weisskopf, *On the Self-Energy and the Electromagnetic Field of the Electron*, Physical Review. **56**: 72-85 (1939).

[64] C. Itzykson and J.B. Zuber 2005 *Quantum Field Theory*, (Ed. Dover, New York, USA).

[65] P.M. Lavrov and A.A. Reshetnyak, *One-loop effective action for Einstein gravity in special background gauge*, *Phys.Lett.* **351B** (1995) 105.

[66] M.Yu. Kalmykov, *Gauge and parametrization dependencies of the one-loop counterterms in Einstein gravity*, Class. Quant. Grav. **12** (1995) 1401.

[67] M.Yu. Kalmykov, K.A. Kazakov, P.I. Pronin, and K.V. Stepanyantz, *Detailed analysis of the dependence of the one loop counterterms on the gauge and parametrization in the Einstein gravity with the cosmological constant*, Class. Quant. Grav. **15** (1998) 3777, arXiv: hep-th/9809169.

[68] A.Yu. Kamenshchik, and C.F. Steinwachs, *Question of quantum equivalence between Jordan frame and Einstein frame,* Phys. Rev. **D91** (2015) 084033, arXiv: gr-qc/1408.5769.

[69] R.E. Kallosh, O.V. Tarasov, I.V. Tyutin, *One Loop Finiteness Of Quantum Gravity Off Mass Shell*, Nucl. Phys. **B137**, 145 (1978).

[70] G. Leibbrandt, *Introduction to the technique of dimensional regularization*, Rev. Mod. Phys. **47**, 849 (1975).

[71] Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 9.0, Champaign, IL (2012).

[72] J.C. Maxwell, *Treatise on Eletricity and Magnetism*, Vol I. and II first pulication 1873, (Dover, 1954).

[73] J.R. Magnus and H. Neudecker 1999 *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*, ed. Wiley.

[74] D. Griffiths 2004 *Introduction to Elementary Particles*, (Ed. John Wiley & Sons. Inc., New York, USA); F. Halzen e A.D. Martin 1984 *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*, (Ed. John Wiley & Sons. Inc.,

Canada); C. Quigg 1983 *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions*, (Ed. Addison-Wesley Pub. Co., Menlo Park); S.F. Novaes 2000 *Standard Model: An Introduction*, arXiv: hep-ph/0001283v1, (IFT-P 010/2000).

[75] S. Minakshisundaram and A. Pleijel, *Some properties of the eigenfunctions of the Laplace -operators on Riemannian manifolds*, Canad. J. Math. **1**, 242 (1949).

[76] L. Modesto, L. Rachwal, and I.L. Shapiro, *Renormalization group in super-renormalizable quantum gravity*, arXiv: hep-th/1704.03988.

[77] F. Mandl and G. Shaw 1984 *Quantum Field Theory*, (ed. John Wiley and Sons).

[78] V. Mukhanov 2005 *Physical Foundations of Cosmology* (Cambridge University Press).

[79] V. Mukhanov and S. Winitzki 2007 *Introduction to Quantum Effects in Gravity*, (Cambridge University Press).

[80] T. de P. Netto, *Correções de origem quântica para a ação do vácuo e suas aplicações*, Tese de Doutorado, UFJF (2017).

[81] I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, (London, 1687), Tradução para o inglês: *The principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy*, (University of California Press, 1999).

[82] M. Niedermaier, *Gravitational fixed points and asymptotic safety from perturbation theory*, Nucl. Phys. **B833**, 226 (2010).

[83] J.A. Helayel-Neto, A. Penna-Firme, I.L. Shapiro, *Scalar QED $\hbar$-Planck corrections to the Coulomb potential*, JHEP **0001** (2000) 009, arXiv: hep-th/9910080.

[84] M. Niedermaier, and M. Reuter, *The Asymptotic Safety Scenario in Quantum Gravity*, Living Rev. Rel. **9** (2006) 5-173.

[85] M. Ornigotti and A. Aiello, *The Faddeev-Popov Method Demystified*, arXiv: hep-th/1407.7256.

[86] N. Ohta, R. Percacci and A. D. Pereira, *Gauges and functional measures in quantum gravity I: Einstein theory*, JHEP **1606** (2016) 115, arXiv: hep-th/1605.00454.

[87] C. Patrignani, et al. *Review of Particle Physics*, Particle Data Group (Bologna U. & INFN, Bologna), Chin.Phys. C40 (2016) n^0 10, 100001.

[88] G. de B. Peixoto, *Aspectos de Gravitação Quântica e Teorias Quânticas com Torção Dinâmica*, Tese de Doutorado, UFJF (2001).

[89] D.D. Pereira, *Abordagem efetiva em teorias de campos: aspectos clássicos e quânticos*, Tese de Doutorado, UFJF (2013).

[90] G. de Berredo-Peixoto, A. Penna-Firme, I.L. Shapiro, *One loop divergences of quantum gravity using conformal parametrization*, Mod. Phys. Lett. **A15** (2000) 2335, arXiv: hep-th/0103043.

[91] Planck Collaboration: P. A. R. Ade et al., *Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters*, arXiv: astro-ph/1502.01589 (2015).

[92] R.V. Pound and G.A. Jr. Rebka *Gravitational Red-Shift in Nuclear Resonance*, Physical Review Letters **3** (9), 439 (1959).

[93] M.E. Peskin and D.V. Schoeder 1995 *An Introduction to Quantum Field Theory*, (Ed. Perseus Book Publishing, Massachusetts, USA).

[94] G. de Berredo-Peixoto and I.L. Shapiro, *Conformal Quantum Gravity with the Gauss-Bonnet term*, Phys. Rev. **D70** (2004) 044024.

[95] G. de Berredo-Peixoto and I.L. Shapiro, *Higher derivative quantum gravity with Gauss-Bonnet term,* Phys. Rev. **D71** (2005) 064005.

[96] S. Perlmutter, B.P. Schmidt and Adam G. Riess, *The Nobel Prize in Physics 2011*;

A.G. Riess, *My Path to the Accelerating Universe*, Nobel Lecture 2011: `https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2011/riess_lecture.pdf`

S. Perlmutter, *Measuring the Acceleration of the Cosmic Expansion Using Supernovae*, Nobel Lecture 2011: `https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2011/perlmutter-lecture.pdf`

[97] L.E. Parker and D.J. Toms, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime: Quantized Fields and Gravity*, Cambridge University Press, New York (2009).

[98] M. Reuter, and F. Saueressig, *Quantum Einstein Gravity*, New J. Phys. **14** (2012) 055022, arXiv: hep-th/1202.2274.

[99] V. Rubin, N. Thonnard and W.K.Jr. Ford, *Rotational Properties of 21 Sc Galaxies With a Large Range of Luminosities and Radii from NGC 4605 (R=4kpc) to UGC 2885 (R=122kpc)*, The Astrophysical Journal **238**: 471-487 (1980).

[100] J.J. Sakurai 1995 *Modern Quantum Mechanics*, Revised Edition (Addison Wesley, New York, USA).

[101] R.H. Sanders, *The Published Extended Rotation Curves of Spiral Galaxies: Confrontation with Modified Dynamics*, The Astrophys. J. **473** (1996) 117.

[102] J. Schwinger, *On Gauge Invariance and Vacuum Polarization*, Phys. Rev. **82** (1951) 664.

[103] J. Schwinger, *A Theory of the Fundamental Interactions*, *Ann. Phys.* 2, 407 (1957).

[104] J. Schwinger 1958 *Selected Papers on Quantum Electrodynamics*, (Dover Publications).

[105] S. Schweber 1994 *QED and the Men Who Did it: Dyson, Feynman, Schwinger, and Tomonaga*, (Princeton University Press).

[106] I.L. Shapiro, *Effective Action of Vaccum: Semi-Classical Approach*, Class. Quant. Grav. 25 (2008) 103001, arXiv: gr-qc/0801.0216.

[107] I.L. Shapiro, *Teoria Quântica de Campos*, notas não publicadas, UFJF, versão de 2014.

[108] I.L. Shapiro, *Lectures on Quantum Gravity from the QFT Perspective*, Friedrich-Schiller-Universitat, Jena, (2015).

[109] S. W. Hawking, *The occurrence of singularities in cosmology - III. Causality and singularities*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **300** (1967) 187; S. W. Hawking e R. Penrose,

The Singularities of gravitational collapse and cosmology, Proc. Roy. Soc. Lond. A **314** (1970) 529; R. Penrose, *Gravitational collapse and space-time singularities*, Phys. Rev. Lett. **14** (1965) 57.

[110] I.L. Shapiro and A.G. Jacksenaev, *Gauge dependence in higher derivative quantum gravity and the conformal anomaly problem*, Phys. Lett. **B324** (1994) 284.

[111] I.L. Shapiro and H. Takata, *One loop renormalization of the four-dimensional theory for quantum dilaton gravity*, Phys. Rev. **D52** (1995) 2162.

[112] I.L. Shapiro and H. Takata, *Conformal transformation in gravity*, Phys. Lett. **B361** (1995) 31.

[113] I.L. Shapiro, P.M. Teixeira, *Quantum Einstein-Cartan theory with the Holst term,* Class. Quant. Grav. **31** (2014) 185002, arXiv: hep-th/1402.4854.

[114] K.S. Stelle, *Renormalization of higher derivative quantum gravity*, Phys. Rev. D **16** (1977) 953.

[115] H. L. Shipman, Z. Yu and Y.W. Du *The implausible history of triple star models for Cygnus X-1 Evidence for a black hole*, Astrophysical Letters, 16 (1): 9, (1975).

[116] J.L. Synge, *Relativity: The General Theory*, ed. North-Holland Publishing Company (1960).

[117] Urbain Le Verrier, *Détermination nouvelle de l'orbite de Mercure et de ses perturbations*, (1859). Tradução para o inglês: *A New Determination of the Orbit of Mercury and its Perturbations)*, Tisserand, M.F. (1880). "Les Travaux de LeVerrier". Annales de l'Observatoire de Paris, Mémoires (in French). 15.

[118] D.V. Vassilevich, *Heat kernel expansion: user's manual*, Physics Reports 388 (2003) 279-360.

[119] G.A. Vilkovisky, *The Unique Effective Action in Quantum Field Theory,* Nucl. Phys. **B234** (1984) 125.

[120] G.A. Vilkovisky, *Heat Kernel: Rencontre entre Physiciens et Mathematiciens*, CERN-TH.6392/92.

[121] B.L. Voronov, P.M. Lavrov and I.V. Tyutin, *Canonical Transformations And The Gauge Dependence In General Gauge Theories*, Sov. J. Nucl. Phys. **36** (1982) 498 [Yad. Fiz. 36 (1982) 498].

[122] A.E.M. van de Ven, *Two-loop quantum gravity*, Nucl. Phys. **B378**, 309 (1992).

[123] van der Wel, A.; *et al.*, *Discovery of a Quadruple Lens in CANDELS with a Record Lens Redshift*, Astrophysical Journal Letters. 777: L17 (2013), arXiv: astro-ph/1309.2826.

[124] R. Wald 1984 *General Relavity*, (The University of Chicago Press, Chicago and London).

[125] R.M. Wald 1994 *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*, (University of Chicago Press).

[126] S. Weinberg, *A Model of Leptons*, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1264 (1967).

[127] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, vol. I (Cambridge University Press, 1995).

[128] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, vol. II (Cambridge University Press, 1996).

[129] S. Weinberg (2008) *Cosmology*, (Oxford University).

[130] D. Walsh, R.F. Carswell and R.J. Weymann, *0957 + 561 A, B: twin quasistellar objects or gravitational lens?*, Nature **279** (5712): 381-384 (1979).

[131] C.M. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics*, (Cambridge University Press, Cambridge; New York, 1993), 2nd edition; *The Confrontation between General Relativity and Experiment*, arXiv: gr-qc/1403.7377v1.