

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA – UFJF
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICE
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – DF



Dissertação de mestrado

**Divergências de 1-loop no modelo
dos Galileons**

Tibério de Paula Netto

28 DE FEVEREIRO DE 2013
JUIZ DE FORA–MG, BRASIL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA – UFJF
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICE
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – DF

Dissertação de mestrado

**Divergências de 1-loop no modelo
dos Galileons**

Autor: Tibério de Paula Netto

Orientador: Ilya L. Shapiro

Dissertação de mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora–UFJF como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Física sob a orientação do Prof. Dr Ilya L. Shapiro.

28 DE FEVEREIRO DE 2013
JUIZ DE FORA–MG, BRASIL

Dedico esse trabalho a minha família.

Agradecimentos

- Ao meu orientador Prof. Dr. Ilya L. Shapiro pela sugestão do problema desenvolvido nessa dissertação e pelo auxílio durante minha formação através da iniciação científica e do mestrado;
- Ao professor Iosef L. Buchbinder pelos ensinamentos transmitidos através do ótimo curso de teoria de campos ministrado na UFJF no ano de 2011;
- Aos meus pais pelo apoio incondicional;
- À FAPEMIG pelo suporte financeiro.

“If the doors of perception were cleansed everything would appear as it is, infinite.”

William Blake

Resumo

A investigação das divergências ultravioletas é um passo relevante para o melhor entendimento de uma nova teoria. Neste trabalho as divergências de *1-loop* no setor do campo livre são obtidas para o popular modelo dos Galileons. Os cálculos são realizados através da técnica generalizada de Schwinger-DeWitt e também por meio dos diagramas de Feynman. O primeiro método pode ser diretamente generalizado para o espaço-curvo, mas aqui vamos lidar apenas com o limite do espaço plano. Mostramos que a realização ultravioleta da teoria inclui o termo $\pi\Box^4\pi$. De acordo a análise prévia para o caso da gravitação quântica, isso significa que a teoria pode ser modificada para se tornar super-renormalizável, mas então seu espectro físico inclui dois fantasmas massivos e um escalar massivo com energia cinética positiva. A abordagem efetiva nessa teoria pode ser perfeitamente sucedida, exatamente como na gravitação quântica com derivadas superiores, e nesse caso o teorema de não renormalização dos Galileons continua válido na região de baixas energias.

Abstract

The investigation of ultraviolet divergences is a relevant step in better understanding of a new theory. In this work the one-loop divergences in the free field sector are obtained for the popular Galileons model. The calculations are performed by the generalized Schwinger-DeWitt technique and also by means of Feynman diagrams. The first method can be directly generalized to curved space, but here we deal only with the flat-space limit. We show that the ultraviolet completion of the theory includes the $\pi\Box^4\pi$ term. According to previous analysis in the case of quantum gravity, this means that the theory can be modified to become superrenormalizable, but then its physical spectrum includes two massive ghosts and one massive scalar with positive kinetic energy. The effective approach in this theory can be perfectly successful, exactly as in the higher derivative quantum gravity, and in this case the non-renormalization theorem for Galileons remains valid in the low-energy region.

Conteúdo

Resumo	iv
Abstract	v
Conteúdo	vi
1 Introdução	1
2 Campos relativísticos	4
2.1 Notação relativística	4
2.2 A equação de Klein-Gordon	5
2.3 Quantização Canônica do campo escalar livre	6
2.4 Propagador de Feynman e Funções de Green	10
3 Métodos funcionais da teoria quântica de campos	11
3.1 Integral funcional	11
3.2 Funcional gerador das Funções de Green e Ação Efetiva	15
3.3 Expansão em loops da Ação Efetiva	17
3.4 Método de Schwinger-DeWitt	19
4 Divergências de 1-loop no modelo dos Galileons	23
4.1 O modelo dos Galileons	24
4.2 Cálculo das divergências de 1-loop	26
4.3 Discussão dos resultados	30
4.4 Cálculo das divergências de 1-loop através dos Diagramas de Feynman	31
5 Conclusão e Perspectivas	36
A Integrais da regularização dimensional	40

Bibliografia

Capítulo 1

Introdução

Os Galileons são um novo modelo de campo escalar real. Originalmente foram introduzidos no contexto do modelo da gravitação de Dvali-Gabadadze-Porrati [21] e tem atualmente atraído um grande interesse na literatura, sendo responsáveis por inúmeras aplicações (veja, por exemplo, [37, 15, 16] e as referências contidas nesses trabalhos). Uma motivação padrão para se considerar os Galileons é que se assume propriedades não convencionais de renormalização para a teoria [32, 36], especialmente quando tratada na abordagem efetiva da teoria quântica de campos [27, 47, 9].

Resumidamente, os Galileons são teorias contendo na ação o termo cinético padrão com duas derivadas e termos de interação com muito mais derivadas. Como resultado, o propagador no nível de árvore é livre de fantasmas de derivadas superiores enquanto que as possíveis divergências têm mais derivadas do que os termos presentes na ação clássica resultando assim em uma teoria que não será renormalizável [32, 36]. Essas propriedades fazem ser interessante uma comparação entre o modelo dos Galileons e a gravitação quântica com derivadas superiores (GQDS) [44, 3] (veja também a referência [7] para uma introdução mais detalhada). O ponto comum entre as duas teorias é a presença de termos de derivadas superiores. No caso da GQDS a teoria pode ser renormalizável [44] ou super-renormalizável [3]. Entretanto, existe um preço a se pagar: o espectro de partículas da teoria inclui fantasmas [3, 44]. Já o modelo dos Galileons é muito mais não renormalizável, no sentido de que existem muito mais possíveis tipos de divergências. Porém, todas as divergências logarítmicas têm muito mais derivadas do que a ação clássica inicial, resultando assim que o setor de baixas energias da teoria possa ser livre de correções quânticas ultravioletas fortes.

O esquema de construção de uma teoria que não é afetada, no limite ultravioleta,

por correções quânticas, parece muito atrativo, mas existe um ponto importante para se verificar. Se existem divergências de derivadas superiores no setor do propagador, então a teoria efetivamente tem um fantasma massivo. Eliminar esse fantasma do espectro leva a uma possível quebra da unitariedade, assim como acontece na GQDS. E exatamente como na GQDS, podemos tentar formular uma teoria de maneira que os fantasmas não sejam gerados em energias suficientemente baixas. Assim, para se explorar a nível quântico o modelo dos Galileons de maneira completa deve ser também realizado o cálculo direto das contribuições quânticas para o propagador do campo escalar. Esse cálculo, no nível de *1-loop*, é o objetivo da presente dissertação.

No geral, o estado da teoria quântica depende essencialmente da estrutura das divergências ultravioletas no setor do campo livre. Pode acontecer que a teoria quântica seja não renormalizável, ou possa ser completada para se tornar renormalizável ou até mesmo super-renormalizável. No último caso a contribuição de *1-loop* pode ser a única que é realmente significativa. Neste trabalho vamos descobrir qual é a situação para o modelo dos Galileons, e concluir se a teoria não é renormalizável, renormalizável ou super-renormalizável. Vamos aqui nos restringir apenas no limite do espaço-tempo plano, pois esse é suficiente para responder todas as questões formuladas acima.

A dissertação se organiza da seguinte maneira: Os Capítulos 2 e 3 são referentes a revisão bibliográfica. São apresentados resultados importantes da teoria quântica de campos usual e de seu formalismo funcional, com o intuito de ir fixando as notações e nomenclaturas que serão utilizadas no decorrer do texto. Em especial será apresentada no final do Capítulo 3 a técnica generalizada de Schwinger-DeWitt [4]. Esse será o formalismo padrão para o cálculo das divergências de *1-loop* para o modelo dos Galileons. A vantagem principal dessa técnica é que os cálculos podem em princípio ser facilmente generalizados para o caso do espaço-tempo curvo. É importante enfatizar que o objetivo desses capítulos não é o de deduzir nem demonstrar os resultados (muito desses de demonstração complicada) pois isso ocuparia um espaço desnecessário no texto. Várias referências são deixadas a cargo do leitor.

No Capítulo 4 é apresentada a parte original do trabalho, recentemente publicada em [35], em que as divergências no nível de um *loop* são obtidas. Na seção 4.1 apresentamos uma breve descrição da ação clássica dos Galileons. Já na seção 4.2 a derivação das divergências é realizada por meio da técnica generalizada de Schwinger-DeWitt e as consequências do resultado são discutidas na seção 4.3. Na seção 4.4 mostramos como

o mesmo resultado pode ser obtido através da técnica mais convencional dos diagramas de Feynman. O objetivo principal dessa seção é de caráter ilustrativo e também com a intenção de termos um maior controle sobre os resultados obtidos.

Por fim, no Capítulo 5 tiramos nossas conclusões fazendo discussões adicionais do resultado e apresentaremos perspectivas futuras de trabalhos relacionados à dissertação.

Capítulo 2

Campos relativísticos

Este capítulo tem como objetivo fazer uma breve revisão, fixar notações e nomenclaturas relacionadas aos campos relativísticos usados na teoria quântica de campos. Para uma exposição mais detalhada sobre o assunto são recomendados ao leitor as referências [28, 38, 40]. Como os Galileons podem ser vistos como um modelo de campo escalar real sem massa contendo termos de interação com derivadas dos campos, vamos considerar neste trabalho apenas o caso particular do campo escalar real.

2.1 Notação relativística

Vamos começar o texto fixando as notações e convenções que serão utilizadas neste trabalho. Também vamos começar a definir grandezas físicas que serão úteis.

Os índices gregos $\alpha, \beta, \mu, \nu \dots$ tomam valores 0, 1, 2, 3 enquanto que os índices latinos $i, j, k \dots$ percorrem os valores 1, 2, 3. Denotamos as coordenadas do espaço-tempo quadridimensional de Minkowsky por

$$x^\mu = (ct, \mathbf{x}), \quad (2.1)$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo e \mathbf{x} é o tradicional raio-vetor em três dimensões. Para as funções definidas sobre o espaço de Minkowsky convencionamos

$$\varphi(x) = \varphi(x^\mu) = \varphi(\mathbf{x}, t) = \varphi_{\mathbf{x}}(t). \quad (2.2)$$

Durante a dissertação usaremos a assinatura da métrica $(+, -, -, -)$, isso significa que o intervalo entre dois eventos infinitesimalmente próximos no espaço-tempo pode ser escrito como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.3)$$

sendo

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad (2.4)$$

a métrica de Minkowski.

Já para os operadores diferenciais, definimos a derivada parcial em relação a x^μ

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad (2.5)$$

e o operador de D'Alembert

$$\square \equiv \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (2.6)$$

A integração sobre o espaço quadridimensional é

$$\int dx = \int d^4x = \int dx^0 dx^1 dx^2 dx^3. \quad (2.7)$$

O quadrivetor de energia-momento de uma partícula única é escrito como

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right), \quad (2.8)$$

onde \mathbf{p} é o momento relativístico tridimensional da partícula. A relação de dispersão entre a energia e o momento tem a forma

$$p^\mu p_\mu = m^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2. \quad (2.9)$$

Para os próximos capítulos vamos adotar unidades em que $c = \hbar = 1$, entretanto vamos escrever essas constantes explicitamente quando for necessário.

2.2 A equação de Klein-Gordon

Entendemos como campo uma função dependente do tempo t e das coordenadas espaciais \mathbf{x} , isto é $\varphi(\mathbf{x}, t)$. Do ponto de vista físico o campo $\varphi(\mathbf{x}, t)$ pode ser tratado como um sistema mecânico com um número infinito de graus de liberdade, numerados pelo vetor \mathbf{x} , ou seja, $\varphi(\mathbf{x}, t) = \varphi_{\mathbf{x}}(t)$.

Se é de nosso interesse que o campo $\varphi(x)$ descreva quanticamente o estado de uma partícula relativística, esse deve ser coerente com a relação de dispersão (2.9). Para encontrar qual é a relação entre o campo e a equação (2.9) vamos substituir na mesma no lugar de E e \mathbf{p} , os operadores diferenciais como se faz na mecânica quântica

$$E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow -i \nabla, \quad (2.10)$$

ou resumidamente

$$p^\mu \rightarrow i\partial^\mu. \quad (2.11)$$

O resultado da substituição leva a

$$(\square + m^2)\varphi = 0. \quad (2.12)$$

A equação (2.12) é conhecida como equação de Klein-Gordon e é a equação básica que qualquer campo relativístico que descreva partículas livres deve satisfazer.

A interpretação da equação de Klein-Gordon como a equação de uma partícula única, com função de onda $\varphi(x)$ em analogia com a mecânica quântica de Schrodinger, apresenta problemas conceituais como estados livres com energias negativas e probabilidade não definida de maneira positiva [28, 38]. Entretanto essas inconsistências são solucionadas através do processo de quantização canônica, que será alvo de discussão na próxima seção.

2.3 Quantização Canônica do campo escalar livre

Como foi salientado na seção anterior, a equação de Klein-Gordon interpretada como a equação de onda de uma única partícula quântica apresenta problemas conceituais relacionados à ocorrência de soluções com energias negativas e probabilidade não definida positivamente. Para resolver esses problemas devemos considerar o processo de quantização canônica que consiste em reinterpretar as variáveis dinâmicas do sistema, o campo $\varphi(x)$ e seu momento conjugado $\pi(x)$, como operadores que atuam no espaço dos vetores de estado e satisfazem relações canônicas de comutação.

De maneira mais detalhada, o processo de quantização canônica consiste nos seguintes postulados:

1. O estado do sistema é descrito por um vetor normalizado $|\psi\rangle$ no espaço de Hilbert.
2. O campo $\varphi(\mathbf{x})$ e o momento $\pi(\mathbf{x})$ no momento inicial são representados por operadores Hermitianos $\hat{\varphi}(\mathbf{x})$, $\hat{\pi}(\mathbf{x})$, que satisfazem as relações canônicas de comutação

$$[\hat{\varphi}(\mathbf{x}), \hat{\varphi}(\mathbf{y})] = 0, \quad (2.13)$$

$$[\hat{\pi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{y})] = 0, \quad (2.14)$$

$$[\hat{\varphi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.15)$$

A cada observável clássico $A[\varphi, \pi]$ corresponde um operador hermitiano ¹

$$\hat{A} = A[\varphi, \pi] \Big|_{\varphi=\hat{\varphi}, \pi=\hat{\pi}}, \quad (2.16)$$

atuando no espaço dos vetores de estado $|\psi\rangle$.

3. O valor esperado do observável A no estado $|\psi\rangle$ é dado por $\langle\psi | \hat{A} | \psi\rangle$.
4. A dinâmica do sistema é descrita pelo operador de evolução temporal $\hat{U}(t, t_0)$ que satisfaz a equação de Schrodinger

$$i\frac{d}{dt}\hat{U}(t, t_0) = \hat{H}(t)\hat{U}(t, t_0), \quad (2.17)$$

onde $\hat{H}(t)$ é o operador de Hamilton. O operador de evolução temporal possui as seguintes propriedades

$$\hat{U}(t_0, t_0) = \hat{1}, \quad (2.18)$$

$$\hat{U}^\dagger(t, t_0)\hat{U}(t, t_0) = \hat{1}, \quad (2.19)$$

$$\hat{U}(t_2, t_0) = \hat{U}(t_2, t_1)\hat{U}(t_1, t_0). \quad (2.20)$$

A evolução temporal do operador $\hat{\varphi}(\mathbf{x})$ na interpretação de Heisenberg é, por exemplo, dada por $\hat{\varphi}(x) = \hat{U}^\dagger(t)\hat{\varphi}(\mathbf{x})\hat{U}(t)$.

Juntos, os postulados 1, 2, 3 e 4 constituem o conteúdo do processo de quantização canônica.

Para ilustrar o procedimento, vamos aplicá-lo ao campo escalar real descrito pela equação de Klein-Gordon (2.12). Introduzindo os operadores na interpretação de Heisenberg

$$\hat{\varphi}(x) = \hat{U}^\dagger(t)\hat{\varphi}(\mathbf{x})\hat{U}(t), \quad \hat{\pi}(x) = \hat{U}^\dagger(t)\hat{\pi}(\mathbf{x})\hat{U}(t), \quad (2.21)$$

¹Em certos casos na construção do operador \hat{A} deve se considerar uma prescrição adicional sobre o ordenamento dos operadores $\hat{\varphi}(\mathbf{x})$, $\hat{\pi}(\mathbf{x})$. Esse procedimento deve ser realizado de tal maneira que o operador \hat{A} seja hermitiano e de maneira que os observáveis físicos calculados sejam correspondentes as experiências de laboratório.

as equações de Heisenberg correspondentes são

$$i\dot{\hat{\varphi}}(x) = [\hat{\varphi}(x), \hat{H}], \quad i\dot{\hat{\pi}}(x) = [\hat{\pi}(x), \hat{H}]. \quad (2.22)$$

Utilizando o operador de Hamilton correspondente desse modelo

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3x [\hat{\pi}^2(x) + \partial_i \hat{\varphi}(x) \partial^i \hat{\varphi}(x) + m^2 \hat{\varphi}^2(x)] \quad (2.23)$$

e os comutadores (2.13), (2.14) e (2.15) chegamos a

$$\dot{\hat{\varphi}}(x) = \hat{\pi}(x), \quad \dot{\hat{\pi}}(x) = \Delta \hat{\varphi}(x) - m^2 \hat{\varphi}(x). \quad (2.24)$$

Substituindo a primeira equação na segunda, obtemos

$$\square \hat{\varphi}(x) + m^2 \hat{\varphi}(x) = 0. \quad (2.25)$$

A solução da equação (2.25) pode ser expressa por meios da série de Fourier

$$\hat{\varphi}(x) = \int \frac{d^3p}{\sqrt{2(2\pi)^3 E(\mathbf{p})}} [e^{-ipx} \hat{a}(\mathbf{p}) + e^{ipx} \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})] \quad (2.26)$$

e como $\hat{\pi} = \dot{\hat{\varphi}}$

$$\hat{\pi}(x) = -i \int \frac{d^3p E(\mathbf{p})}{\sqrt{2(2\pi)^3 E(\mathbf{p})}} [e^{-ipx} \hat{a}(\mathbf{p}) - e^{ipx} \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})], \quad (2.27)$$

onde nas fórmulas acima $p^0 \equiv E(\mathbf{p})$ e $px \equiv p_\mu x^\mu = p^0 t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$. Os operadores $\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})$ e $\hat{a}(\mathbf{p})$ são conhecidos respectivamente como operadores de criação e aniquilação.

Para construir os correspondentes vetores de estado, vamos utilizar as soluções (2.26) e (2.27) para expressar \hat{H} em termos dos operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger ²

$$\hat{H} = \int d^3p E(\mathbf{p}) \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) \hat{a}(\mathbf{p}). \quad (2.28)$$

Podemos também considerar o operador do momento contido no campo $\hat{\varphi}$

$$\hat{P}^j = \int d^3p p^j \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) \hat{a}(\mathbf{p}). \quad (2.29)$$

O operador

$$\hat{N} \equiv \int d^3p \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) \hat{a}(\mathbf{p}), \quad (2.30)$$

²As fórmulas dessa seção devem ser entendidas através da prescrição adicional de ordenamento dos operadores conhecida como ordenamento normal. Essa consiste em colocar todos os operadores \hat{a}^\dagger a esquerda dos operadores \hat{a} (para uma discussão detalhada do assunto veja [28, 38, 40]).

comuta (por construção) com os operadores \hat{H} e \hat{P}^j , sendo assim seus autovetores também são autovetores de \hat{H} e \hat{P}^j . Os autovetores de \hat{N} correspondem à solução do oscilador harmônico quântico e tem a forma [28, 38, 40, 41]

$$| \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}_1) \cdots \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}_n) | 0 \rangle, \quad (2.31)$$

onde n é um número inteiro e o vetor $| 0 \rangle$ é definido como a solução da equação

$$\hat{a}(\mathbf{p}) | 0 \rangle = 0. \quad (2.32)$$

A equação de autovalores para \hat{N} tem a solução

$$\hat{N} | \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \rangle = n | \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \rangle. \quad (2.33)$$

O operador \hat{N} é conhecido como o operador do número de partículas e o estado (2.31) é conhecido como o estado de n partículas. Através da fórmula (2.33) podemos escrever as seguintes equações de autovalores para os operadores \hat{P}^j e \hat{H}

$$\hat{\mathbf{P}} | \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \rangle = n(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{p}_n) | \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \rangle, \quad (2.34)$$

$$\hat{H} | \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \rangle = n(E(\mathbf{p}_1) + E(\mathbf{p}_2) + \cdots + E(\mathbf{p}_n)) | \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \rangle. \quad (2.35)$$

As equações (2.33), (2.34) e (2.35) formam a base para a interpretação dos estados do campo quântico em termos de partículas. Se interpretarmos número discreto n como o número de partículas, podemos ver que o momento tridimensional total do sistema é a soma individual dos momentos das partículas e que a energia total é a soma da energia das partículas individuais, assim como é de se esperar de um sistema de n partículas livres.

A equação (2.32) nos mostra que

$$\hat{N} | 0 \rangle = 0, \quad \hat{H} | 0 \rangle = 0, \quad \hat{\mathbf{P}} | 0 \rangle = 0. \quad (2.36)$$

Isso significa que o número de partículas, a energia, e o momento do estado $| 0 \rangle$ são zero. Esse estado é chamado de vácuo.

Como o conjunto de vetores $| \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \rangle$ são autovetores da Hamiltoniana, esses podem ser utilizados para formar uma base no espaço dos estados quânticos do campo escalar livre. Qualquer estado $| \psi \rangle$ pode ser expandido nessa base através de

$$| \psi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int dp_1^3 \cdots dp_n^3 \Phi_n(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) | \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \rangle. \quad (2.37)$$

O conjunto de estados (2.37) é conhecido como o espaço de Fock.

2.4 Propagador de Feynman e Funções de Green

Para a teoria de Klein-Gordon a função de Green $D(x, x')$ definida pela equação

$$(\square + m^2 - i\varepsilon)D(x, x') = -i\delta(x - x'), \quad (2.38)$$

onde $i\varepsilon$ é uma constante pequena, é conhecida como Propagador de Feynman. Utilizando a transformada de Fourier

$$D(x, x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-x')} D(p) \quad (2.39)$$

e a identidade

$$\delta(x - x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-x')} \quad (2.40)$$

na equação (2.38) podemos encontrar o propagador na representação dos momentos

$$D(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (2.41)$$

A constante infinitesimal $i\varepsilon$ nos mostra como devemos tratar os pólos $p^2 = m^2$ na equação (2.41). Nas próximas fórmulas, por questão de simplicidade, vamos omitir essa constante. Entretanto, o propagador de Feynman deve ser sempre entendido como em (2.41).

Pela fórmula (2.26) é possível mostrar que D_F pode ser representado como [28, 38, 40]

$$D(x, x') = \langle 0 | T\{\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x')\} | 0 \rangle, \quad (2.42)$$

onde a operação T significa o ordenamento cronológico dos operadores

$$T\{\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x')\} = \theta(t - t')\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x') + \theta(t' - t)\hat{\varphi}(x')\hat{\varphi}(x). \quad (2.43)$$

A generalização da fórmula (2.42) para um modelo de campo escalar qualquer, descrito pela Lagrangiana $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi)$, é conhecida como função de Green de n pontos ou simplesmente função de n pontos

$$G_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle 0 | T\{\hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(x_2)\cdots\hat{\varphi}(x_n)\} | 0 \rangle. \quad (2.44)$$

A função de Green de n pontos representa um dos objetos centrais para o estudo da teoria quântica de campos. Através dessa quantidade podemos calcular observáveis físicos importantes como, por exemplo, as seções de choque de um processo de espalhamento e as taxas de decaimento de partículas [38, 40]. Em especial as divergências de 1-loop podem ser calculadas através das funções de Green por meio da técnica dos diagramas de Feynman. Esse assunto será abordado dentro da teoria dos Galileons na seção 4.4.

Capítulo 3

Métodos funcionais da teoria quântica de campos

Vamos terminar aqui os capítulos relacionados à revisão bibliográfica considerando os métodos funcionais da teoria quântica de campos. Na seção 3.1 vamos mostrar como a matriz do operador de evolução temporal pode ser escrita pela integral funcional, usando como referência [28, 38, 40, 41]. Nas seções 3.2 e 3.3 vamos seguir [7] e construir o funcional gerador das funções de Green, a ação efetiva e sua expansão em termos dos *loops*. O resultado central do capítulo é a fórmula (3.50) para a ação efetiva de 1-*loop*. Por fim, vamos expor de maneira resumida o método do tempo próprio de Schwinger-DeWitt. Essa técnica é uma poderosa ferramenta para calcular as divergências da ação efetiva tanto no espaço-tempo plano como no espaço curvo.

3.1 Integral funcional

A dinâmica de um sistema quântico é definida pelo operador de evolução temporal $\hat{U}(t'', t')$. O elemento de matriz $\langle \varphi'' | \hat{U}(t'', t') | \varphi' \rangle \equiv \langle \varphi'', t'' | \varphi', t' \rangle$ representa a amplitude de transição entre a configuração de campo $\varphi'(\mathbf{x})$ no instante de tempo t' para a configuração $\varphi''(\mathbf{x})$ no momento t'' . O objetivo dessa seção é expressar esse objeto por meio de uma representação útil, conhecida como integral de caminho de Feynman ou simplesmente integral funcional.

Primeiramente vamos considerar, por questão de simplicidade, um sistema quântico com apenas um grau de liberdade descrito por um único operador de coordenada \hat{q} e um único operador de momento \hat{p} . Seja $|q\rangle$ o autoestado de posição e seja $|p\rangle$ um autoestado

do momento, nesse caso são válidas as relações padrões [41]

$$\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle, \quad (3.1)$$

$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle, \quad (3.2)$$

$$\langle p | q \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}pq}, \quad (3.3)$$

$$\hat{1} = \int dq |q\rangle\langle q| = \int dp |p\rangle\langle p|. \quad (3.4)$$

A Hamiltoniana do sistema é $\hat{H} = H(p, q)|_{q=\hat{q}, p=\hat{p}}$, onde $H(p, q)$ é a correspondente função de Hamilton clássica. Considere agora a amplitude de transição

$$\langle q'', t'' | q', t' \rangle = \langle q'' | \hat{U}(t'', t') | q' \rangle. \quad (3.5)$$

Através da relação de completeza (3.4), podemos escrever

$$\langle q'' | \hat{U}(t'', t') | q' \rangle = \int dp \langle q'' | p \rangle \langle p | \hat{U}(t'', t') | q' \rangle. \quad (3.6)$$

Se o intervalo de tempo $t'' - t'$ for suficientemente pequeno, é válida a aproximação [41]

$$\hat{U}(t'', t') \approx \hat{1} - \frac{i}{\hbar}(t'' - t')\hat{H}. \quad (3.7)$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \langle p | \hat{U}(t'', t') | q' \rangle &\approx \langle p | q' \rangle - \frac{i}{\hbar}(t'' - t')\langle p | \hat{H} | q' \rangle \\ &= \langle p | q' \rangle \left[1 - \frac{i}{\hbar}(t'' - t')H(q', p) \right] \\ &\approx \langle p | q' \rangle e^{-\frac{i}{\hbar}(t'' - t')H(q', p)}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Portanto, utilizando as fórmulas (3.8) e (3.3) encontramos

$$\langle q'' | \hat{U}(t'', t') | q' \rangle \approx \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[p \frac{q'' - q'}{t'' - t'} - (t'' - t')H(q', p) \right] \right\}. \quad (3.9)$$

Seja agora o intervalo de tempo $t'' - t'$ arbitrário. Nesse caso podemos subdividi-lo em N partes iguais de tamanho $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ onde $i = 1, \dots, N - 1$ e $t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1}$. Através da propriedade de composição do operador de evolução temporal

$$\hat{U}(t'', t') = \hat{U}(t'', t_{N-1}) \hat{U}(t_{N-1}, t_{N-2}) \cdots \hat{U}(t_2, t_1) \hat{U}(t_1, t') \quad (3.10)$$

e da fórmula (3.4) podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle q'' | \hat{U}(t'', t') | q' \rangle &= \int dq_{N-1} \cdots dq_1 \langle q'' | \hat{U}(t'', t_{N-1}) | q_{N-1} \rangle \times \\ &\times \cdots \langle q_2 | \hat{U}(t_2, t_1) | q_1 \rangle \langle q_1 | \hat{U}(t_1, t') | q' \rangle. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Desde que Δt possa ser suficientemente pequeno podemos aplicar em cada elemento de matriz da equação (3.10) a relação (3.9) obtendo assim

$$\begin{aligned} \langle q'' | \hat{U}(t'', t') | q' \rangle &\approx \int \frac{dq_1 dp_1}{2\pi\hbar} \cdots \frac{dq_{N-1} dp_{N-1}}{2\pi\hbar} \frac{dp_N}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \Delta t \times \right. \\ &\times \left[p_N \frac{q'' - q_{N-1}}{\Delta t} + p_{N-1} \frac{q_{N-1} - q_{N-2}}{\Delta t} + \cdots + p_2 \frac{q_2 - q_1}{\Delta t} + p_1 \frac{q_1 - q_2}{\Delta t} \right. \\ &\left. \left. - H(q_{N-1}, p_N) - H(q_{N-2}, p_{N-1}) - \cdots - H(q_1, p_2) - H(q', p_1) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Para que a equação acima seja exata devemos considerar o limite em que $\Delta t \rightarrow 0$ e correspondentemente $N \rightarrow \infty$. Nesse caso a expressão no expoente de (3.12) é uma soma de Riemann para a integral

$$\int_{t'}^{t''} dt [p(t)\dot{q}(t) - H(q(t), p(t))] = S_H(t'', t'), \quad (3.13)$$

onde $S_H(t'', t')$ é a ação clássica escrita no formalismo de Hamilton. Quando $N \rightarrow \infty$ o número de integrais em (3.12) formalmente tende ao infinito, sendo realizada uma integração sobre todas as possíveis trajetórias entre q' e q'' no espaço de fase. Introduzindo a notação condensada

$$\int DqDp \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{i=1}^{N-1} \prod_{j=1}^N \frac{dq_i dp_j}{(2\pi\hbar)^N}, \quad (3.14)$$

a equação (3.12) pode ser escrita resumidamente como

$$\langle q'', t'' | q', t' \rangle = \int DqDp e^{\frac{i}{\hbar} S_H(t'', t')}. \quad (3.15)$$

A equação (3.15) é conhecida como integral de caminho sobre o espaço de fase.

Agora vamos considerar o caso especial em que a função de Hamilton é

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q). \quad (3.16)$$

Substituindo a equação (3.16) em (3.15) encontramos

$$\langle q'', t'' | q', t' \rangle = \int DqDp \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[p(t)\dot{q}(t) - \frac{p(t)^2}{2m} - V(q(t)) \right] \right\}. \quad (3.17)$$

Realizando o deslocamento $p(t) \rightarrow p(t) + m\dot{q}(t)$ sobre a integral é possível mostrar que

$$\langle q'', t'' | q', t' \rangle = N^- \int Dq e^{\frac{i}{\hbar} S(q'', t'', q', t')}, \quad (3.18)$$

onde $S(q'', t'', q', t') = \int_{t'}^{t''} dt L(q(t), \dot{q}(t))$ é a ação no formalismo de Lagrange e

$$N^- \equiv \int Dp e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \frac{p(t)^2}{2m}}, \quad (3.19)$$

é nesse caso um fator de normalização, pois não depende de q e nem de p . Por questão de simplicidade vamos omiti-lo durante o texto.

A equação (3.18) é conhecida como representação do elemento de matriz do operador de evolução temporal pela integral de trajetória de Feynman. Essa integral é realizada sobre todos os possíveis caminhos do espaço das configurações em que todas as trajetórias tem início no instante t' no ponto q' e terminam no momento t'' na posição q'' .

Agora considere um modelo de campo escalar descrito pela Lagrangiana $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$. Como explicado no capítulo anterior, o campo $\varphi_{\mathbf{x}}(t)$ pode ser visto como uma coordenada generalizada enumerada pelo vetor posição \mathbf{x} . Logo, através do processo de discretização dos campos é possível repetir todas as considerações acima, obtendo o resultado [28, 38, 40]

$$\langle \varphi'', t'' | \varphi', t' \rangle = \int D\varphi e^{\frac{i}{\hbar} S(\varphi'', t'', \varphi', t')}, \quad (3.20)$$

onde $S(\varphi'', t'', \varphi', t') = \int_{t'}^{t''} dt \int d^3x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$.

Os experimentos típicos de teoria de quântica de campos realizados nos aceleradores de partículas são processos de espalhamento. Nesses experimentos, inicialmente as partículas se encontram livres, são jogadas umas contra as outras, colidem e interagem por um intervalo de tempo típico e tornando-se depois livres novamente. Definindo o instante inicial e final assintoticamente por $t \rightarrow \mp\infty$ e sendo o estado inicial e final o vácuo a amplitude de probabilidade de transição desse processo pode ser escrita como

$$\langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle = \int D\varphi e^{\frac{i}{\hbar} S[\varphi]}, \quad (3.21)$$

onde $S[\varphi] = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$ é a ação total no formalismo de Lagrange. A expressão (3.21) é conhecida como probabilidade de transição vácuo a vácuo e será a relação básica para futuras considerações.

3.2 Funcional gerador das Funções de Green e Ação Efetiva

Um dos objetos mais fundamentais da teoria quântica de campos são as funções de Green

$$G_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle T \hat{\varphi}(x_1) \hat{\varphi}(x_2) \cdots \hat{\varphi}(x_n) \rangle, \quad (3.22)$$

onde o símbolo T define o ordenamento cronológico dos operadores e usamos a notação condensada para o valor esperado do vácuo $\langle \cdots \rangle \equiv \langle 0 | \cdots | 0 \rangle$. O conjunto das funções de Green $G_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ contém toda a informação de interesse na teoria quântica de campos. Através do mesmo tipo de considerações utilizada na seção anterior é possível expressar o produto de operadores (3.22) por meio da integral funcional

$$G_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\int D\varphi \varphi(x_1) \varphi(x_2) \cdots \varphi(x_n) e^{iS[\varphi]}}{\int D\varphi e^{iS[\varphi]}}. \quad (3.23)$$

Podemos, ao invés de considerar individualmente cada uma das funções G_n , introduzir um objeto que inclui todas as funções de Green conhecido como funcional gerador das funções Green $Z[J]$. Esse é definido por

$$Z[J] = \int D\varphi e^{i(S[\varphi] + \varphi J)}, \quad (3.24)$$

onde $J(x)$ é um campo escalar clássico arbitrário conhecido como fonte e na equação acima usamos a notação condensada de Bryce DeWitt para o produto de dois campos

$$\varphi J = \int dx \varphi(x) J(x). \quad (3.25)$$

Através da equação (3.23) é possível ver que qualquer função de Green pode ser obtida a partir de $Z[J]$ pela diferenciação

$$G_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta iJ(x_1) \delta iJ(x_2) \cdots \delta iJ(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (3.26)$$

Um outro objeto fundamental para a teoria quântica de campos é a ação efetiva $\Gamma[\phi]$. Para introduzi-lo, considere o funcional $W[J]$ definido pela regra

$$Z[J] = e^{iW[J]}, \quad (3.27)$$

ou de maneira equivalente

$$W[J] = -i \ln Z[J]. \quad (3.28)$$

Agora considere a quantidade

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta iJ(x)} = \frac{\int D\varphi \varphi(x) e^{i(S[\varphi] + \varphi J)}}{\int D\varphi e^{i(S[\varphi] + \varphi J)}} \equiv \langle \hat{\varphi}(x|J) \rangle. \quad (3.29)$$

O escalar definido pela fórmula (3.29) é conhecido como campo médio ou campo de fundo.

Por questões de simplicidade vamos denotá-lo por $\langle \hat{\varphi}(x|J) \rangle \equiv \phi(x|J)$.

Assumindo que a relação

$$\phi(x|J) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \quad (3.30)$$

possa ser resolvida de maneira que a fonte seja expressa como uma função do campo de fundo,

$$J = J(x|\phi), \quad (3.31)$$

definimos a ação efetiva $\Gamma[\phi]$ pela transformação de Legendre

$$\Gamma[\phi] = (W[J] - \phi J)|_{J=J(x|\phi)}. \quad (3.32)$$

Uma das consequências diretas da definição (3.32) e da fórmula (3.29) é a equação de movimento

$$\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi} = \frac{\delta W[J]}{\delta J} \frac{\delta J}{\delta \phi} - \phi \frac{\delta J}{\delta \phi} - J = -J, \quad (3.33)$$

isto é,

$$\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x)} = -J(x). \quad (3.34)$$

A equação (3.34) é análoga à equação de campo para a ação clássica na presença do termo fonte,

$$\frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi(x)} = -J(x). \quad (3.35)$$

Sendo assim, comparando as equações (3.34) e (3.35), podemos ver que a ação efetiva desempenha na teoria quântica o mesmo papel do que a ação $S[\varphi]$ para a teoria clássica. Na próxima seção vamos reforçar essa interpretação mostrando que na teoria de perturbações a ação efetiva pode ser escrita como a ação clássica mais correções quânticas em potências da constante \hbar .

3.3 Expansão em loops da Ação Efetiva

A ação efetiva $\Gamma[\phi]$ é um objeto extremamente complicado, sendo assim, na prática ela é usualmente calculada em termos da teoria de perturbação baseada na expansão em *loops*. O objetivo dessa seção é revisar esse formalismo.

Considere o funcional gerador das funções de Green escrito na forma

$$Z[J] = e^{\frac{i}{\hbar}W[J]} = \int D\varphi e^{\frac{i}{\hbar}(S[\varphi]+\varphi J)}. \quad (3.36)$$

Introduzindo a ação efetiva por meio da fórmula (3.32), obtemos

$$e^{\frac{i}{\hbar}(\Gamma[\phi]+\phi J)} = \int D\varphi e^{\frac{i}{\hbar}(S[\varphi]+\varphi J)}. \quad (3.37)$$

Utilizando a equação de movimento (3.34) e realizando a troca de variável na integral $\varphi \rightarrow \varphi + \phi$, conhecida como deslocamento de fundo, encontramos

$$e^{\frac{i}{\hbar}\Gamma[\phi]} = \int D\varphi e^{\frac{i}{\hbar}(S[\phi+\varphi]-\varphi \frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi})}. \quad (3.38)$$

O funcional $S[\phi + \varphi]$ pode ser expandido em uma série de Taylor funcional no campo quântico $\varphi(x)$

$$S[\phi + \varphi] = S[\phi] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \cdots dx_n \frac{\delta^n S[\phi]}{\delta\phi(x_1) \cdots \delta\phi(x_n)} \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n), \quad (3.39)$$

ou resumidamente usando as notações de DeWitt

$$S[\phi + \varphi] = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)} = S[\phi] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} S_n[\phi] \varphi^n, \quad (3.40)$$

onde

$$S_n[\phi] \equiv \frac{\delta^n S[\phi]}{\delta\phi(x_1) \cdots \delta\phi(x_n)}. \quad (3.41)$$

Usando a fórmula (3.40) em (3.38) encontramos

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\Gamma[\phi]\right) &= \int D\varphi \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[S[\phi] + \frac{1}{2}\varphi S_2[\phi]\varphi + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} S_n[\phi]\varphi^n\right.\right. \\ &\quad \left.\left. - \varphi \frac{\delta}{\delta\phi}(\Gamma[\phi] - S[\phi])\right]\right\}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Agora, fazendo a substituição na integral funcional $\varphi \rightarrow \hbar^{\frac{1}{2}}\varphi$, temos

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\Gamma[\phi]\right) &= \int D\varphi \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[S[\phi] + \frac{\hbar}{2}\varphi S_2[\phi]\varphi + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\hbar^{\frac{n}{2}}}{n!} S_n[\phi]\varphi^n\right.\right. \\ &\quad \left.\left. - \hbar^{\frac{1}{2}}\varphi \frac{\delta}{\delta\phi}(\Gamma[\phi] - S[\phi])\right]\right\}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Para resolver a equação (3.43) para a ação efetiva vamos utilizar a teoria das perturbações. Assumimos que a ação efetiva possa ser expandida no parâmetro pequeno \hbar :

$$\Gamma[\phi] = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \bar{\Gamma}^{(n)}[\phi]. \quad (3.44)$$

A expansão (3.44) é conhecida como expansão em *loops* e o parâmetro n define o número de *loops*. A substituição direta de (3.44) na equação (3.43) nos mostra que na ordem zero em \hbar a ação efetiva coincide com a ação clássica, isto é,

$$\Gamma[\phi] = S[\phi] + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n \bar{\Gamma}^{(n)}[\phi]. \quad (3.45)$$

Assim podemos ver que a ação efetiva pode ser escrita perturbativamente como a ação clássica, mais correções quânticas no parâmetro de *loop* \hbar . Substituindo a fórmula (3.45) na equação (3.43), encontramos

$$\begin{aligned} \exp\left(i \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\Gamma}^{(n)}[\phi]\right) &= \int D\varphi \exp\left[i\left(\frac{1}{2}\varphi S_2[\phi]\varphi + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\hbar^{\frac{n}{2}-1}}{n!} S_n[\phi]\varphi^n \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \hbar^{\frac{1}{2}+n}\varphi \frac{\delta \bar{\Gamma}^{(1)}[\phi]}{\delta \phi}\right)\right]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

A equação (3.46) define a teoria de perturbações para a ação efetiva. Ela pode ser resolvida para cada ordem no parâmetro \hbar , em particular, na primeira ordem temos

$$e^{i\bar{\Gamma}^{(1)}[\phi]} = \int D\varphi e^{i\frac{1}{2}\varphi S_2[\phi]\varphi} = (\text{Det } S_2[\phi])^{-1/2}, \quad (3.47)$$

onde utilizamos a integração gaussiana. Introduzindo a notação para a forma bilinear da ação

$$\hat{H} = \hat{H}(x, y) = S_2[\phi] = \frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)}, \quad (3.48)$$

a relação (3.47) pode ser reduzida à equação

$$\bar{\Gamma}^{(1)}[\phi] = \frac{i}{2} \ln \text{Det } \hat{H}. \quad (3.49)$$

Agora, extrapolando a relação da álgebra linear $\text{tr } \ln A = \det \ln A$ para os operadores, encontramos

$$\bar{\Gamma}^{(1)}[\phi] = \frac{i}{2} \text{Tr } \ln \hat{H}. \quad (3.50)$$

A equação (3.50) é conhecida como ação efetiva de 1-*loop*, sendo a principal fórmula para os cálculos de 1-*loop* na teoria quântica de campos. O símbolo Tr denota o traço funcional

$$\text{Tr } \hat{A} = \int dx A(x, x), \quad (3.51)$$

onde $A(x, x) = A(x, y)|_{y=x}$ e $A(x, y)$ é o núcleo do operador \hat{A} definido por

$$\hat{A} = A(x, y)\delta(x - y). \quad (3.52)$$

A relação (3.50) reduz o cálculo da ação efetiva de 1-loop ao cálculo dos traços funcionais do operador \hat{H} . O traços funcionais podem ser calculados, por exemplo, através do método de Schwinger-DeWitt que será o nosso próximo assunto.

3.4 Método de Schwinger-DeWitt

A técnica de Schwinger-DeWitt é um formalismo para o cálculo ação efetiva e em particular, de sua parte divergente. O método foi originalmente proposto por Schwinger [42], sendo estendida por DeWitt [20] para o espaço-tempo curvo e generalizada para operadores não mínimos por A. O. Barvinsky e G. A. Vilkovisky [4]. Em especial, o formalismo que aqui será desenvolvido permite realizar cálculos no espaço-tempo curvo com cálculos explicitamente covariantes.

A ação efetiva de 1-loop (3.50) depende de parâmetros externos através da forma bilinear da ação \hat{H} . Considere sua variação com respeito a esses parâmetros

$$\delta\bar{\Gamma}^{(1)} = \frac{i}{2} \text{Tr} \hat{H}^{-1} \delta\hat{H}. \quad (3.53)$$

O operador \hat{H}^{-1} pode ser representado como

$$\hat{H}^{-1} = i \int_0^\infty ds e^{-is\hat{H}}. \quad (3.54)$$

A equação (3.54) é conhecida como representação do operador \hat{H}^{-1} pela integral sobre o tempo próprio s . Como resultado,

$$\delta\bar{\Gamma}^{(1)} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \int_0^\infty ds e^{-is\hat{H}} \delta\hat{H} = \delta \left(-\frac{i}{2} \text{Tr} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-is\hat{H}} \right). \quad (3.55)$$

Logo, além de uma constante aditiva não essencial, o funcional $\delta\bar{\Gamma}^{(1)}$ é dado por

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = -\frac{i}{2} \text{Tr} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-is\hat{H}}. \quad (3.56)$$

A quantidade

$$K(x, x'|s) = e^{-is\hat{H}}, \quad (3.57)$$

é conhecida como núcleo de calor de Schwinger. Esse operador satisfaz a equação de Schrodinger,

$$i \frac{\partial}{\partial s} K(x, x'|s) = -\hat{H}K(x, x'|s), \quad (3.58)$$

com a condição inicial

$$K(x, x'|0) = \hat{1}. \quad (3.59)$$

O cálculo da ação efetiva é então nesse caso, reduzido ao cálculo da quantidade $K(x, x'|s)$ através da equação diferencial (3.58). Se o operador \hat{H} pode ser escrito na sua forma mínima

$$\hat{H} = \square + m^2 + \hat{P}, \quad (3.60)$$

essa equação pode ser resolvida por uma expansão em séries através do seguinte *ansatz*

$$K(x, x'|s) = K_0(x, x'|s) \Omega(x, x'|s). \quad (3.61)$$

onde

$$K_0(x, x'|s) = \frac{1}{(4\pi i s)^\omega} e^{-\frac{i(x-x')^2}{4s} - im^2 s}, \quad (3.62)$$

2ω é a dimensão do espaço-tempo e

$$\Omega(x, x'|s) = \sum_{k=0}^{\infty} (is)^k \hat{a}_k(x, x'). \quad (3.63)$$

Os termos $\hat{a}_k(x, x')$ são conhecidos como coeficientes de DeWitt. Substituindo (3.61) na equação (3.58) podemos encontrar a seguinte relação de recorrência para $\hat{a}_k(x, x')$

$$(k+1)\hat{a}_{k+1} + \frac{1}{2}(x-x')^\mu \partial_\mu \hat{a}_{k+1} = \square \hat{a}_k + \hat{P} \hat{a}_k. \quad (3.64)$$

Em particular os primeiros coeficientes, no limite de coincidência $x = x'$, obtidos a partir dessa fórmula são, por exemplo,

$$\hat{a}_0(x, x) = \hat{1}, \quad (3.65)$$

$$\hat{a}_1(x, x) = \hat{P}, \quad (3.66)$$

$$\hat{a}_2(x, x) = \frac{1}{2} \hat{P}^2 + \frac{1}{6} \square \hat{P}. \quad (3.67)$$

Através da fórmula (3.61) podemos encontrar a fórmula final para a ação efetiva de 1-loop

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = \frac{i}{2} \text{Tr} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \frac{1}{(4\pi s)^\omega} e^{-\frac{i(x-x')^2}{4s} - im^2 s} \sum_{k=0}^\infty (is)^k \hat{a}_k(x, x'). \quad (3.68)$$

Um resultado importante (para sua demonstração, veja [4]) é que a parte divergente da ação efetiva corresponde aos três primeiros termos da série em (3.68). Em especial, as divergências logarítmicas correspondem a $k = 2$, tal que a expressão para a parte divergente da ação efetiva de 1-loop, na regularização dimensional [31], é

$$\bar{\Gamma}_{div}^{(1)} = -\frac{1}{\epsilon} \int d^4x \hat{a}_2(x, x), \quad (3.69)$$

onde $\epsilon = (4\pi)^2(2\omega - 4)$. Através da aplicação direta da fórmula (3.69) podemos calcular as divergências logarítmicas para teorias em que a parte bilinear da ação pode ser escrita na forma mínima (3.60). No entanto, quando o operador \hat{H} não é mínimo é necessário utilizar a generalização do método de Schwinger-DeWitt proposta por A. O. Barvinsky e G. A. Vilkovisky [4].

Para calcular as divergências nesse formalismo é necessário reduzir a ação efetiva (3.50), por meio de manipulações algébricas, a quantidades fundamentais conhecidas como traços universais funcionais

$$\text{Tr} \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \cdots \partial_{\alpha_k} \frac{1}{\square^n} \delta(x - x'). \quad (3.70)$$

Aqui $1/\square$ é o inverso do operador de D'Alembert e pode ser definido pela transformada de Fourier

$$\frac{1}{\square} f(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ikx} \left(-\frac{1}{k^2} \right) f(k). \quad (3.71)$$

Na referência [4] os traços universais (3.70) foram expressados através de uma expansão nos coeficientes de Schwinger bastante similar a equação (3.68), a saber

$$\text{Tr} \partial_{\alpha_1} \partial \cdots \partial_{\alpha_k} \frac{1}{\square^n} \delta(x - x') = -\frac{(-i)^{n+1}}{(n-1)!} \text{Tr} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \frac{s^n}{(4\pi s)^\omega} \left[\partial_{\alpha_1} + \frac{i}{4s} (x - x')_{\alpha_1} \right] \cdots \left[\partial_{\alpha_k} + \frac{i}{4s} (x - x')_{\alpha_k} \right] \sum_{j=0}^\infty (is)^j \hat{a}_j(x, x'). \quad (3.72)$$

Também foi mostrado que as divergências contidas nesses traços podem ser expressadas, no espaço-tempo plano, pela fórmula

$$\text{Tr } \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_{2n-4}} \frac{1}{\square^n} \delta(x-x') \Big|_{div} = -\frac{2i}{\epsilon} \int d^4x \frac{g_{\mu_1 \cdots \mu_{2n-4}}^{(n-2)}}{2^{n-2} (n-1)!}, \quad (3.73)$$

onde $n \geq 2$ e

$$g_{\mu_1 \cdots \mu_{2n-4}}^{(n-2)} = g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} \cdots g_{\mu_{2n-3} \mu_{2n-4}} + \text{todas as permutações dos índices}. \quad (3.74)$$

As manipulações algébricas que são necessárias para a aplicação da fórmula (3.73) não são complicadas e estão bastante detalhadas em [4] (veja também [7]). As transformações que iremos utilizar para o cálculo das divergências do modelo dos Galileons serão mostradas na prática no decorrer da seção 4.2.

Capítulo 4

Divergências de 1-loop no modelo dos Galileons

A ação efetiva $\Gamma[\phi]$ é um dos principais objetos de interesse na teoria quântica de campos. Usualmente é calculada em termos da teoria de perturbações baseada na expansão em *loops*. Nessa expansão são encontrados tipicamente termos dependentes de integrais de Feynman que são divergentes no limite dos momentos grandes. Isso significa que a teoria quântica de campos contém divergências ultravioletas.

O procedimento especial de reconstrução de uma teoria de maneira que as divergências não sejam mais presentes na ação efetiva é conhecido como renormalização (maiores detalhes sobre a teoria da renormalização podem ser encontrados em vários livros textos como [5, 11, 28, 38, 40], em especial para o espaço-tempo curvo veja [7]). Teorias não renormalizáveis são no geral a nível quântico desprovidas de sentido físico. Sendo assim é de grande importância para um novo modelo de campo considerar o problema de sua renormalização. Em especial a aproximação de 1-*loop* é de grande interesse na teoria quântica de campos, pois na maioria das vezes é suficiente para encontrar propriedades físicas de um modelo, como a renormalização.

O objetivo desse capítulo é desenvolver o cálculo das divergências de 1-*loop* para o recente modelo dos Galileons [37, 16, 15]. Na seção 4.1 iremos apresentar uma revisão bibliográfica desse modelo. Na seção 4.2 as divergências são calculadas pela técnica de Schwinger-DeWitt generalizada por Barvinsky e Vilkovisky [4]. A elegância desse método é a possibilidade de extensão direta para o espaço-tempo curvo mantendo a covariância geral em todos os passos das considerações. Essa propriedade é vantajosa em relação a técnica dos diagramas de Feynman, que necessita para sua aplicação no espaço-tempo

curvo a expansão da métrica no fundo plano $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. Essa expansão não mantém explicitamente a covariância, dificultando os cálculos práticos e interpretação dos resultados. Vale enfatizar que uma extensão dos cálculos que serão aqui apresentados para o espaço-tempo curvo é altamente recomendada, pois as principais aplicações dos Galileons estão na Cosmologia.

Para o cálculo das divergências, é necessário também dar um sentido matemático às quantidades infinitas. Isso pode ser realizado por um procedimento conhecido como regularização. Qualquer processo de regularização consiste na introdução de novos parâmetros de maneira que, quando esses parâmetros tendem a algum valor definido, as quantidades calculadas formalmente divergem. Durante todo este trabalho será usado a regularização dimensional (para uma revisão sobre o assunto veja [31]) sendo as divergências expressas pelo parâmetro $\epsilon = (4\pi)^2(2\omega - 4)$ onde 2ω é a dimensão do espaço-tempo.

Na seção 4.3 discutimos as propriedades quânticas da teoria dos Galileons baseados nos resultados obtidos previamente. Veremos que a teoria é não renormalizável podendo ser completada para se tornar super-renormalizável. Entretanto, neste caso o modelo perde suas propriedades iniciais como a simetria Galileana, as equações de movimento de segunda ordem e ausência de fantasmas. Por fim, como estamos lidando aqui apenas com o espaço-tempo plano, vamos na seção 4.4 repetir os cálculos da seção 4.2 por meio dos diagramas de Feynman, com o objetivo ilustrativo e pedagógico. Uma revisão sobre o método dos diagramas de Feynman é altamente recomendável para um melhor entendimento dessa seção. Veja, por exemplo, [38, 40]. A parte original que será aqui desenvolvida foi publicada no artigo [35].

4.1 O modelo dos Galileons

O modelo de Dvali-Gabadadze-Porrati (DGP) é um modelo da gravitação sobre uma brana com dimensão $3 + 1$ imersa em um volume $5D$ com a ação [21]

$$S = M_5^3 \int d^5 X \sqrt{-G} R_5[G] + M_p^2 \int d^4 x \sqrt{-g} R[g], \quad (4.1)$$

onde $X = (y, x^\mu)$ é a coordenada, $G_{AB}(X)$ é a métrica em cinco dimensões e $R_5[G]$ o escalar de Ricci $5D$. A brana é localizada em $y = 0$ sendo $g_{\mu\nu}(x) \equiv G_{AB}(y = 0, x)$ a métrica induzida $4D$ e $R[g]$ o escalar de Ricci quadridimensional. É possível obter a ação efetiva $4D$ integrando pela superfície. Foi mostrado em [32] que o limite de desacoplamento

do modelo de DGP existe e que a ação efetiva quadridimensional se reduz a uma teoria de um único campo escalar π com ação

$$\Delta S = -\frac{M_5^3}{2} \int d^4x \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi \square \pi. \quad (4.2)$$

Esse termo apesar de conter derivadas superiores possui a propriedade de que suas equações de campo são segunda ordem. Outra importante propriedade é a invariância sob a transformação

$$\pi \rightarrow \pi + b_\mu x^\mu + c, \quad (4.3)$$

onde c e b_μ são constantes. O parâmetro vetorial b_μ corresponde a um deslocamento constante no gradiente $\partial_\mu \pi \rightarrow \partial_\mu \pi + b_\mu$, o que nada mais é do que uma generalização espaço-temporal da simetria de Galileu $\dot{x} \rightarrow \dot{x} + v$, da mecânica não relativística. Por esse motivo a equação (4.3) é conhecida como transformação Galileana.

É possível generalizar a estrutura (4.2) associando a ela todos os outros termos que têm a mesma simetria e que continuam com equações de campo de segunda ordem. Na referência [37] foi mostrado que no espaço-tempo quadridimensional plano existem apenas cinco Lagrangianas contendo essas propriedades

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \pi, \\ \mathcal{L}_2 &= \frac{1}{2} \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi, \\ \mathcal{L}_3 &= \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi \square \pi, \\ \mathcal{L}_4 &= \frac{1}{2} \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi (\square \pi)^2 - \partial_\mu \pi \partial^\mu \partial^\nu \pi \partial_\nu \pi \square \pi - \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu \pi \partial^\mu \partial^\nu \pi \partial_\rho \pi \partial^\rho \pi \\ &\quad + \partial_\mu \pi \partial^\mu \partial^\nu \pi \partial_\nu \partial_\rho \pi \partial^\rho \pi, \\ \mathcal{L}_5 &= \frac{1}{6} \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi (\square \pi)^3 - \frac{1}{2} \partial_\mu \pi \partial^\mu \partial^\nu \pi \partial_\nu \pi \square \pi - \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu \pi \partial^\mu \partial^\nu \pi \partial_\rho \pi \partial^\rho \pi \square \pi \\ &\quad + \partial_\mu \pi \partial^\mu \partial^\nu \pi \partial_\nu \partial_\rho \pi \partial^\rho \pi \square \pi + \frac{1}{3} \partial_\mu \partial^\nu \pi \partial_\nu \partial^\rho \pi \partial_\rho \partial^\mu \pi \partial_\lambda \pi \partial^\lambda \pi \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu \pi \partial^\mu \partial^\nu \pi \partial_\rho \pi \partial^\rho \partial^\lambda \pi \partial_\lambda \pi - \partial_\mu \pi \partial^\mu \partial^\nu \pi \partial_\nu \partial_\rho \pi \partial^\rho \partial^\lambda \pi. \end{aligned} \quad (4.4)$$

O modelo descrito pela Lagrangina

$$\mathcal{L}_\pi = \sum_{i=1}^5 c_i \mathcal{L}_i, \quad (4.5)$$

onde c_i 's são coeficientes genéricos, é conhecido como modelo dos Galileons e o campo π é conhecido como Galileon.

Os Galileons tem várias aplicações, sendo a maior parte relacionada a Cosmologia [23, 9, 1, 13, 12, 14, 18, 30, 34]. No entanto, nesse trabalho não vamos entrar nos detalhes de suas aplicações, vamos assumir a Lagrangiana (4.5) e através de cálculos de *1-loop* estudar as propriedades quânticas da teoria.

4.2 Cálculo das divergências de 1-loop

Nessa seção vamos mostrar em detalhes o cálculo dos contratermos que contribuem para o propagador da teoria (4.5). Para calcular as divergências vamos utilizar o método de Schwinger-DeWitt generalizado por Barvinsky e Vilkovisky [4]. Em resumo, a técnica consiste em realizar manipulações algébricas para reduzir a ação efetiva de *1-loop* (3.50) em partes menores conhecidas como traços funcionais universais. A obtenção dos traços universais pode ser encontrado em detalhes no artigo original [4], sendo assim, não é nosso objetivo aqui descrever o método complicado de obtenção desses traços. Ao invés disso, vamos apresentar suas expressões finais e demonstrar sua aplicação no cálculo das divergências de *1-loop*. Os únicos tipos de traços universais não nulos no espaço-tempo plano podem ser resumidos na fórmula [4]

$$\text{Tr} \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_{2n-4}} \frac{1}{\square^n} \Big|_{div} = -\frac{2i}{\epsilon} \int d^4x \frac{g_{\mu_1 \cdots \mu_{2n-4}}^{(n-2)}}{2^{n-2} (n-1)!}, \quad n \geq 2, \quad (4.6)$$

onde

$$g_{\mu_1 \cdots \mu_{2n-4}}^{(n-2)} = g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} \cdots g_{\mu_{2n-3} \mu_{2n-4}} + \text{todas as permutações dos índices} \quad (4.7)$$

e $\epsilon = (4\pi)^2(2\omega - 4)$ é o parâmetro da regularização dimensional [31].

Para que possamos aplicar a fórmula (4.6) vamos realizar cálculos similares aos previamente usados em [6] (descritos também passo a passo no Capítulo 8 do livro [7]). Primeiramente, considere a ação efetiva de *1-loop*

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = \frac{i}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}, \quad (4.8)$$

aqui \hat{H} é a forma bilinear da ação (4.5). Para encontrar o operador \hat{H} vamos utilizar o método do campo de fundo, que consiste na divisão dos campos em campo de fundo e parte quântica

$$\pi \rightarrow \pi' = \pi + \sigma. \quad (4.9)$$

Substituindo (4.9) em (4.5) e colecionando os termos de segunda ordem no campo quântico σ , encontramos a forma bilinear da ação

$$S^{(2)} = -\frac{1}{2} \int d^4x \sigma \hat{H} \sigma, \quad (4.10)$$

em que devido a estrutura geral da Lagrangiana (4.5), \hat{H} pode ser representado como

$$\hat{H} = \square + \hat{P}_1 + \hat{P}_2 + \dots, \quad (4.11)$$

com $\hat{P}_1 \sim \mathcal{O}(\pi)$, $\hat{P}_2 \sim \mathcal{O}(\pi^2)$ e assim por diante. Antes de escrevermos a forma explícita dos operadores $\hat{P}_{1,2,\dots}$ podemos considerar alguns aspectos qualitativos que nos permitirão reduzir a quantidade dos cálculos necessários. De início, notemos que como estamos apenas interessados em calcular os termos que contribuem para a função de dois pontos do campo escalar, todos os nossos cálculos deverão ser realizados até a ordem $\mathcal{O}(\pi^2)$, ou seja, não precisamos levar em conta termos além de \hat{P}_2 e do quadrado de \hat{P}_1 .

Agora, substituindo (4.11) em (4.8) encontramos

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln \hat{H} &= \text{Tr} \ln (\square + \hat{P}_1 + \hat{P}_2 + \dots) \\ &= \text{Tr} \ln \square + \text{Tr} \ln \left(1 + \hat{P}_1 \frac{1}{\square} + \hat{P}_2 \frac{1}{\square} + \dots \right) \\ &= \text{Tr} \ln \square + \text{Tr} \left(\hat{P}_1 \frac{1}{\square} + \hat{P}_2 \frac{1}{\square} - \frac{1}{2} \hat{P}_1 \frac{1}{\square} \hat{P}_1 \frac{1}{\square} \right) + \dots \end{aligned} \quad (4.12)$$

Na equação acima foi utilizado a propriedade $\ln(\hat{A} \cdot \hat{B}) = \ln(\hat{A}) + \ln(\hat{B})$ e a definição do logarítmico de um operador por meio de sua série de potências. Os termos omitidos em (4.12) são da ordem $\mathcal{O}(\pi^3)$ e como mencionamos acima eles são irrelevantes para a nossa finalidade.

Pode-se notar que as divergências aparecem em (4.6) somente para $n = 2, 3, \dots$, logo todos os termos proporcionais a $(1/\square)$ na equação (4.12) não contribuem para nossos cálculos. Além disso, a parte divergente de $\text{Tr} \ln \square$ é nula, pois esse termo não pertence ao conjunto dos traços universais (4.6). Então, podemos escrever

$$\text{Tr} \ln \hat{H} \Big|_{div} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \hat{P}_1 \frac{1}{\square} \hat{P}_1 \frac{1}{\square} \Big|_{div}. \quad (4.13)$$

Para calcular a equação (4.13) precisamos da forma explícita de \hat{P}_1 , a saber

$$\hat{P}_1 = \hat{U}^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu, \quad \text{onde} \quad \hat{U}^{\mu\nu} = 4c_3 \left[(\square\pi)g^{\mu\nu} - (\partial^\mu \partial^\nu \pi) \right]. \quad (4.14)$$

Para reduzir o problema ao traço universal (4.6) precisamos realizar a comutação a

seguir:

$$\begin{aligned} \text{Tr } \hat{P}_1 \frac{1}{\square} \hat{P}_1 \frac{1}{\square} \Big|_{div} &= \text{Tr } \hat{U}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \frac{1}{\square} \hat{U}^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square} \Big|_{div} \\ &= \text{Tr } \hat{U}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \left\{ \hat{U}^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^2} + \left[\frac{1}{\square}, \hat{U}^{\mu\nu} \right] \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square} \right\} \Big|_{div}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Com a ajuda da identidade

$$\left[\frac{1}{\square}, \hat{A} \right] = -\frac{1}{\square} \left[\square, \hat{A} \right] \frac{1}{\square}, \quad (4.16)$$

podemos calcular o comutador que aparece na equação (4.15)

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\square}, \hat{U}^{\mu\nu} \right] \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square} &= -(\square \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^3} + (\square^2 \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^4} \\ &+ 4(\partial^\lambda \square \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\lambda \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^4} - 12(\partial^\lambda \partial^\tau \square \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\lambda \partial_\tau \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^5} - 2(\partial^\lambda \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\lambda \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^3} \\ &+ 4(\partial^\lambda \partial^\tau \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\lambda \partial_\tau \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^4} - 8(\partial^\rho \partial^\lambda \partial^\tau \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\rho \partial_\lambda \partial_\tau \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^5} \\ &+ 16(\partial^\omega \partial^\rho \partial^\lambda \partial^\tau \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\omega \partial_\rho \partial_\lambda \partial_\tau \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^6} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{l^5}\right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Os termos omitidos possuem dimensão de fundo (para maiores detalhes sobre essa terminologia veja [4]) maior do que $1/l^4$ e podem ser omitidos, pois são finitos [4]. Substituindo a equação (4.17) na equação (4.15) encontramos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \text{Tr } \hat{P}_1 \frac{1}{\square} \hat{P}_1 \frac{1}{\square} \Big|_{div} &= \text{Tr} \left\{ -\hat{U}^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial_\beta \square \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^3} + \hat{U}^{\alpha\beta} (\square^2 \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^4} \right. \\ &+ 8\hat{U}^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial^\lambda \square \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\beta \partial_\lambda \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^4} - 12\hat{U}^{\alpha\beta} (\partial^\lambda \partial^\tau \square \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\lambda \partial_\tau \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^5} \\ &+ 4\hat{U}^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial_\beta \partial^\lambda \partial^\tau \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\lambda \partial_\tau \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^4} - 16\hat{U}^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial^\rho \partial^\lambda \partial^\tau \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\beta \partial_\rho \partial_\lambda \partial_\tau \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^5} \\ &\left. + 16\hat{U}^{\alpha\beta} (\partial^\omega \partial^\rho \partial^\lambda \partial^\tau \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\omega \partial_\rho \partial_\lambda \partial_\tau \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^6} \right\} \Big|_{div}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Usando os traços universais podemos encontrar o valor de cada termo da equação acima. Como exemplo, vamos mostrar em detalhes como utilizar a fórmula (4.6) no primeiro termo da equação (4.18). Para $n = 3$ a fórmula do traço universal (4.6) fica

$$\begin{aligned} -\text{Tr } \hat{U}^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial_\beta \square \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^3} \Big|_{div} &= \frac{i}{2\epsilon} \int d^4x \hat{U}^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial_\beta \square \hat{U}^{\mu\nu}) g_{\mu\nu} \\ &= \frac{i}{2\epsilon} \int d^4x \hat{U}^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial_\beta \square \hat{U}^\mu_\mu). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Por considerações análogas podemos calcular todos os outros termos da equação (4.18), encontrando o seguinte resultado

$$\text{Tr } \hat{U}^{\alpha\beta} (\square^2 \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^4} \Big|_{div} = -\frac{i}{12\epsilon} \int d^4x \left\{ 2\hat{U}_{\mu\nu} (\square^2 \hat{U}^{\mu\nu}) + \hat{U}^\alpha_\alpha (\square^2 \hat{U}^\mu_\mu) \right\},$$

$$\begin{aligned}
& 8 \operatorname{Tr} \hat{U}^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial^\lambda \square \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\beta \partial_\lambda \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^4} \Big|_{div} \\
&= -\frac{2i}{3\epsilon} \int d^4x \left\{ 2\hat{U}_\nu^\alpha (\partial_\alpha \partial_\mu \square \hat{U}^{\mu\nu}) + \hat{U}^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial_\beta \square \hat{U}_\mu^\mu) \right\}, \\
& 4 \operatorname{Tr} \hat{U}^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial_\beta \partial^\lambda \partial^\tau \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\lambda \partial_\tau \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^4} \Big|_{div} \\
&= -\frac{i}{3\epsilon} \int d^4x \left\{ 2\hat{U}^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial_\beta \partial_\mu \partial_\nu \hat{U}^{\mu\nu}) + \hat{U}^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial_\beta \square \hat{U}_\mu^\mu) \right\}, \\
& -12 \operatorname{Tr} \hat{U}^{\alpha\beta} (\partial^\lambda \partial^\tau \square \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\lambda \partial_\tau \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^5} \Big|_{div} \\
&= \frac{i}{4\epsilon} \int d^4x \left\{ \hat{U}^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial_\beta \square \hat{U}_\mu^\mu) + \frac{1}{2} \hat{U}_\alpha^\alpha (\square^2 \hat{U}_\mu^\mu) + 4\hat{U}_\nu^\alpha (\partial_\alpha \partial_\mu \square \hat{U}^{\mu\nu}) \right. \\
& \quad \left. + \hat{U}_{\mu\nu} (\square^2 \hat{U}^{\mu\nu}) + \hat{U}_\alpha^\alpha (\partial_\mu \partial_\nu \square \hat{U}^{\mu\nu}) \right\}, \\
& -16 \operatorname{Tr} \hat{U}^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial^\rho \partial^\lambda \partial^\tau \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\beta \partial_\rho \partial_\lambda \partial_\tau \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^5} \Big|_{div} \\
&= \frac{i}{2\epsilon} \int d^4x \left\{ \hat{U}^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial_\beta \square \hat{U}_\mu^\mu) + 2\hat{U}^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial_\beta \partial_\mu \partial_\nu \hat{U}^{\mu\nu}) + 2\hat{U}_\nu^\alpha (\partial_\alpha \partial_\mu \square \hat{U}^{\mu\nu}) \right\},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& 16 \operatorname{Tr} \hat{U}^{\alpha\beta} (\partial^\omega \partial^\rho \partial^\lambda \partial^\tau \hat{U}^{\mu\nu}) \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\omega \partial_\rho \partial_\lambda \partial_\tau \partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{\square^6} \Big|_{div} \\
&= -\frac{i}{5\epsilon} \int d^4x \left\{ \frac{1}{4} \hat{U}_\alpha^\alpha (\square^2 \hat{U}_\mu^\mu) + \hat{U}_\alpha^\alpha (\partial_\mu \partial_\nu \square \hat{U}^{\mu\nu}) + \hat{U}^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial_\beta \square \hat{U}_\mu^\mu) \right. \\
& \quad \left. + 2\hat{U}^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial_\beta \partial_\mu \partial_\nu \hat{U}^{\mu\nu}) + 4\hat{U}_\nu^\alpha (\partial_\alpha \partial_\mu \square \hat{U}^{\mu\nu}) + \frac{1}{2} \hat{U}_{\mu\nu} (\square^2 \hat{U}^{\mu\nu}) \right\}. \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Deste modo, a equação (4.18) pode ser reduzida a

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Tr} \hat{P}_1 \frac{1}{\square} \hat{P}_1 \frac{1}{\square} \Big|_{div} = \frac{2i}{\epsilon} \int d^4x \left\{ \frac{1}{40} \hat{U}^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial_\beta \square \hat{U}_\mu^\mu) - \frac{1}{120} \hat{U}_{\mu\nu} (\square^2 \hat{U}^{\mu\nu}) \right. \\
& \quad - \frac{1}{240} \hat{U}_\alpha^\alpha (\square^2 \hat{U}_\mu^\mu) - \frac{1}{30} \hat{U}^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial_\beta \partial_\mu \partial_\nu \hat{U}^{\mu\nu}) - \frac{1}{15} \hat{U}_\nu^\alpha (\partial_\alpha \partial_\mu \square \hat{U}^{\mu\nu}) \\
& \quad \left. + \frac{1}{40} \hat{U}_\alpha^\alpha (\partial_\mu \partial_\nu \square \hat{U}^{\mu\nu}) \right\}. \tag{4.21}
\end{aligned}$$

Substituindo a forma explícita do operador $\hat{U}^{\mu\nu}$ definida por (4.14) na equação (4.21) chegamos a

$$\operatorname{Tr} \hat{P}_1 \frac{1}{\square} \hat{P}_1 \frac{1}{\square} \Big|_{div} = -\frac{2i}{\epsilon} c_3^2 \int d^4x \pi \square^4 \pi. \tag{4.22}$$

Finalmente, a partir dessa expressão e das fórmulas (4.8), (4.13) obtemos o resultado para as divergências de 1-loop da ação efetiva no setor do campo livre,

$$\bar{\Gamma}_{div}^{(1)} = -\frac{c_3^2}{2\epsilon} \int d^4x \pi \square^4 \pi. \tag{4.23}$$

4.3 Discussão dos resultados

Resumiremos de uma forma sistemática as informações relevantes sobre as propriedades quânticas da teoria dos Galileons que podem ser obtidas através do resultado (4.23):

- As divergências logarítmicas ultravioletas do modelo exigem contratermos com a forma $\pi\Box^4\pi$. Como a ação clássica (4.5) não contém esse tipo de termo não é possível ter um controle sobre esse tipo de divergências através de um processo de renormalização. Para que a teoria dos Galileons seja consistente no nível quântico devemos incluir o mesmo tipo de termo na sua ação clássica.
- De acordo com a análise da teoria gravitacional similar em [3], a teoria dos Galileons com o termo clássico extra $\pi\Box^4\pi$ tem, tipicamente, dois fantasmas massivos (excitações com energia cinética negativamente definida), um grau de liberdade do tipo escalar massivo e o modo escalar original sem massa. Sendo assim, o propagador do campo π pode ser representado pela estrutura geral [3]

$$G(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{A_1}{p^2 + m_1^2} + \frac{A_2}{p^2 + m_2^2} - \frac{A_3}{p^2 + m_3^2}, \quad (4.24)$$

$$A_{1,2,3} > 0, \quad m_3 > m_2 > m_1 > 0.$$

Na fórmula acima, usamos a assinatura Euclidiana da métrica e assumimos que não existem táquions no espectro de partículas. Isso pode ser sempre providenciado adicionando-se à ação clássica termos do tipo $\pi\Box^2\pi$ e $\pi\Box^3\pi$ seguido de um ajuste de seus coeficientes. Entretanto, as considerações que serão apresentadas a seguir também são válidas na presença de táquions.

- A análise da referência [3] nos mostra que o modelo com o termo adicional $\pi\Box^4\pi$ é super-renormalizável para qualquer escolha dos coeficientes c_k no setor de interação de (4.5). Teorias super-renormalizáveis são aquelas em que o grau superficial de divergência diminui quando avançamos na ordem da teoria de perturbações, isto é, a partir de um certo número de *loops* apenas subdiagramas de ordem inferior podem ser divergentes. No nosso caso, as divergências aparecem apenas a nível de *1-loop*, já no segundo *loop* somente os subdiagramas de *1-loop* contém divergências. Essa propriedade não depende se o espaço-tempo é plano e também é válida para o espaço-tempo curvo (veja a referência [7] para uma introdução na teoria geral da renormalização no espaço-tempo curvo).

- A abordagem efetiva na teoria quântica dos Galileons é perfeitamente possível se colocarmos um parâmetro suficientemente pequeno na frente do termo clássico $\int \pi \square^4 \pi$. Esse parâmetro deve ter a dimensão M^{-6} e, portanto, a escolha de um coeficiente pequeno significa que escolhemos um parâmetro de massa M grande. As massas de ambos os fantasmas m_1, m_3 e do escalar com energia cinética positiva, m_2 , vão ser da mesma ordem de magnitude de M (veja [3] para detalhes). Se considerarmos fenômenos físicos clássicos ou quânticos com energias típicas muito menores do que M , os modos massivos serão inativos e as conclusões encontradas em [32, 36] e [27, 47] permanecem corretas, inclusive o teorema de não renormalização.
- As divergências de 1-loop (4.23) não são invariantes perante a transformação (4.3). Isso significa que a simetria Galileana é de fato uma simetria de baixas energias, sendo violada pelas correções ultravioletas.

4.4 Cálculo das divergências de 1-loop através dos Diagramas de Feynman

Na seção anterior calculamos as divergências logarítmicas de 1-loop por meio do método generalizado de Schwinger-DeWitt. Esse formalismo é vantajoso, pois é relativamente simples generalizá-lo para o espaço-tempo curvo. Entretanto, como aqui estamos lidando apenas com o espaço-tempo plano, podemos realizar também o cálculo equivalente pelos tradicionais diagramas de Feynman. O objetivo dessa seção é ter um controle adicional sobre o resultado (4.23) e como a teoria dos Galileons não é usual, as considerações apresentadas aqui podem ser instrutivas. Vamos também fazer uma breve comparação entre os diagramas de Feynman e os traços universais considerados na seção anterior.

Os diagramas que podem contribuir para o propagador do modelo dos Galileons no nível de 1-loop são provenientes dos termos de interação $\mathcal{L}_{3,4,5}$ da Lagrangiana (4.5). Consideraremos cada um desses termos de maneira separada. Como a Lagrangiana \mathcal{L}_3 contém apenas três campos, seus diagramas são análogos aos diagramas de uma teoria do tipo $\lambda\phi^3$. A única diferença está em todas as possíveis maneiras distintas de contrair as derivadas presentes em \mathcal{L}_3 . Denotando a derivada do propagador por

$$\text{---}\diagup\text{---} \equiv \partial_\mu D(x-y) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{ip_\mu}{p^2 - m^2}, \quad (4.25)$$

podemos representar os diagramas conectados vindos do vértice \mathcal{L}_3 pelas Figuras 1 e 2.

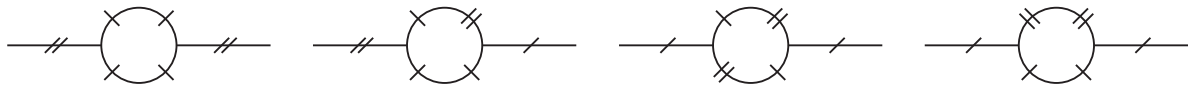


Figura 1. O primeiro conjunto de diagramas fornecidos pelo termo \mathcal{L}_3 .

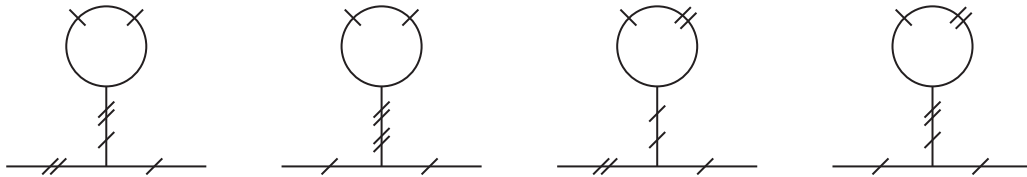


Figura 2. O segundo conjunto de diagramas gerados por \mathcal{L}_3 .

Os próximos diagramas são fornecidos pela Lagrangiana \mathcal{L}_4 . Devido ao fato desse termo ter somente quatro campos, seus diagramas têm a forma parecida com os diagramas da teoria $\lambda\phi^4$



Figura 3. Os diagramas gerados pela Lagrangiana \mathcal{L}_4 que podem contribuir para o propagador do campo dos Galileons.

Já a Lagrangiana \mathcal{L}_5 não pode gerar nenhum diagrama de 1-loop para a função de dois pontos. Para a demonstração dessa afirmação, considere a definição do número de *loops* L de um diagrama de Feynman em termo do número de suas linhas internas I e número vértices V [40]

$$L = I - V + 1. \quad (4.26)$$

Como \mathcal{L}_5 tem um número ímpar de campos, de acordo com teorema de Wick [28, 38, 40], somente a partir da segunda ordem na constante de acoplamento c_5 os diagramas deixam de ser nulos. Na segunda ordem temos que realizar a contração entre dez campos quânticos, sendo dois desses responsáveis por linhas externas do diagrama. Os oito campos restantes são contraídos em pares formando as linhas internas do diagrama. Sendo assim, temos um número mínimo de linhas internas $I = 4$. Como estamos na segunda ordem em c_5 temos $V = 2$, logo pela equação (4.26) $L = 3$. Isto é, já no primeiro diagrama de Feynman não nulo gerado por \mathcal{L}_5 temos três *loops*, o que termina nossa demonstração.

Antes de realizarmos os cálculos necessários, podemos fazer uma análise qualitativa dos diagramas de Feynman no regime de grandes momentos. Como estamos interessados nas divergências ultravioletas, essa análise é suficiente para nos mostrar qual desses diagramas realmente contribuem para as divergências logarítmicas. Considere a integral associada ao primeiro diagrama da Figura 1

$$\Pi_1(p) = c_3^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{p^4 q_\mu q_\nu (q^\mu - p^\mu)(q^\nu - p^\nu)}{q^2 (q - p)^2}. \quad (4.27)$$

Para grandes momentos podemos expandir o denominador da equação (4.27) no parâmetro pequeno (p/q)

$$\frac{1}{q^2 (q - p)^2} = \frac{1}{q^4 \left(1 - \frac{p}{q}\right)^2} = \frac{1}{q^4} \left(1 + 2 \frac{p}{q} + 3 \frac{p^2}{q^2} + \dots\right) \quad (4.28)$$

e usando também a relação

$$\int d^4 q \sim \int_0^\infty dq q^3, \quad (4.29)$$

chegamos à (na próxima equação vamos omitir os índices tensoriais e coeficientes, pois estamos apenas interessados na análise qualitativa que pode ser conseguida através da contagem do número de momentos p)

$$\Pi_1(p) \stackrel{q \rightarrow \infty}{\sim} c_3^2 \int_0^\infty dq \left(\dots + p^6 q + p^7 + \frac{p^8}{q} + \dots\right). \quad (4.30)$$

Podemos ver que o terceiro termo da equação acima diverge logaritmicamente e a potência de p que o acompanha tem grau oito. Esse número de momentos é justamente, na representação de coordenadas, o termo \square^4 obtido na seção anterior. Por considerações análogas é possível mostrar que os outros diagramas da Figura 1 também possuem o comportamento (4.30) nos grandes momentos.

Já os diagramas das Figuras 2 e 3, de fato, não contribuem para as divergências da teoria dos Galileons. O motivo é que esses diagramas têm derivadas espaço-temporais do propagador

$$D(0) = D(x - y)|_{y=x} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2}, \quad (4.31)$$

que é definido sobre um único ponto do espaço tempo, ou seja, nesse caso temos $\partial_\mu D(0) = 0$.

Através da análise simples feita acima, podemos explicar de maneira qualitativa, por meio dos diagramas de Feynman, as contribuições de cada termo para as divergências na

expansão da ação efetiva (4.12). Considere o primeiro termo $\text{Tr } \hat{P}_1 \frac{1}{\square}$. Como \hat{P}_1 é proporcional à c_3 o mesmo acontece com o termo $\text{Tr } \hat{P}_1 \frac{1}{\square}$, logo esse contém apenas contribuições provenientes da Lagrangiana \mathcal{L}_3 . Então, podemos ver que esse termo não contribui porque corresponde aos diagramas proporcionais a c_3 que são todos nulos pois, \mathcal{L}_3 tem um número ímpar de campos.

O próximo termo é $\text{Tr } \hat{P}_2 \frac{1}{\square}$. Lembre-se que \hat{P}_2 é da ordem $\mathcal{O}(\pi^2)$ sendo assim, esse é proporcional a c_4 . Conseqüentemente esse termo é nulo, pois ele corresponde aos diagramas da Figura 3, que como mencionado previamente não contribuem para as divergências. Finalmente, o último traço é $\text{Tr } \hat{P}_1 \frac{1}{\square} \hat{P}_1 \frac{1}{\square}$. Esse termo é proporcional a c_3^2 , e sua contribuição é dada pelos diagramas da Figura 1.

Todas as considerações apresentadas acima nos permitem escrever a expressão para a parte divergente da função de dois pontos como

$$G_{div}^{(1-loop)}(x, y) = \frac{1}{2} \left(\alpha_1 \times \text{diagrama}_1 + \alpha_2 \times \text{diagrama}_2 + \alpha_3 \times \text{diagrama}_3 + \alpha_4 \times \text{diagrama}_4 \right) \Big|_{div} = \text{diagrama}_5 \Big|_{div}, \quad (4.32)$$

onde $\alpha_{1,2,3}$ são coeficientes combinatorias e o operador de polarização é dado por

$$\text{diagrama}_5 = \Pi(p) = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{2} \alpha_i \Pi_i(p), \quad (4.33)$$

sendo

$$\Pi_1(p) = c_3^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{p^4 q_\mu q_\nu (q^\mu - p^\mu)(q^\nu - p^\nu)}{q^2 (q-p)^2}, \quad (4.34)$$

$$\Pi_2(p) = c_3^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{p^2 q^2 q_\mu p_\nu (q^\mu - p^\mu)(q^\nu - p^\nu)}{q^2 (q-p)^2}, \quad (4.35)$$

$$\Pi_3(p) = c_3^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{p_\mu p_\nu q^2 q^\mu (p^\nu - q^\nu)(p_\alpha - q_\alpha)(p^\alpha - q^\alpha)}{q^2 (q-p)^2} \quad (4.36)$$

e

$$\Pi_4(p) = c_3^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{p_\mu p_\nu q^4 (p^\mu - q^\mu)(p^\nu - q^\nu)}{q^2 (q-p)^2}. \quad (4.37)$$

Para separar a parte divergente das integrais acima vamos usar a regularização dimensional [31]. Essa consiste em reformular a teoria para um espaço-tempo de dimensão arbitrária 2ω . Calculando as integrais iremos encontrar resultados que dependem do

parâmetro ω . As divergências ultravioletas se manifestam na forma de pólos simples do tipo $1/(2 - \omega)$.

Usando as fórmulas do apêndice A podemos calcular as integrais (4.34)–(4.37), encontrando como resultado

$$\begin{aligned}\Pi_1(p, \omega) &= \frac{i c_3^2}{4} p^8 I_1, \\ \Pi_i(p, \omega) &= 0, \quad i = 2, 3, 4.\end{aligned}\tag{4.38}$$

A definição da integral I_1 pode ser encontrada no Apêndice A. Para calcularmos a parte divergente do operador de polarização vamos tomar o limite em que $\omega \rightarrow 2$. As divergências são encontradas no pólo da função gamma $\Gamma(2 - \omega)$ existente em I_1 . Então, encontramos

$$I_1|_{div} = -\frac{2}{\epsilon},\tag{4.39}$$

onde $\epsilon = (4\pi)^2(2\omega - 4)$. Levando em consideração o coeficiente combinatorial $\alpha_1 = 4$, chegamos a

$$\Pi_{div}(p, \omega) = \frac{i c_3^2}{2} p^8 I_1|_{div} = -\frac{i c_3^2}{\epsilon} p^8.\tag{4.40}$$

Por fim, devemos calcular através do operador de polarização (4.40) a ação efetiva divergente na representação de coordenadas. Com essa finalidade podemos usar a fórmula de Dyson (para maiores detalhes, veja a seção 7.3 de [40])

$$G^{-1}(p) = D^{-1}(p) - \Pi(p).\tag{4.41}$$

Como o propagador de Feynman $D(p)$ não possui termos divergentes, a equação (4.41) pode ser reescrita em função da parte divergente da ação efetiva como

$$\frac{\delta^2 \bar{\Gamma}_{div}^{(1)}}{\delta \pi \delta \pi} = -i \Pi_{div}(\square) = -\frac{c_3^2}{\epsilon} \square^4.\tag{4.42}$$

A equação (4.42) pode ser facilmente resolvida, e sua solução é

$$\bar{\Gamma}_{div}^{(1)} = -\frac{c_3^2}{2\epsilon} \int d^4x \pi \square^4 \pi,\tag{4.43}$$

que é exatamente o mesmo resultado obtido na seção anterior por meio da técnica de Schwinger-DeWitt.

Capítulo 5

Conclusão e Perspectivas

Nesse trabalho foi desenvolvido o método do campo de fundo junto com a técnica generalizada de Schwinger-DeWitt para o cálculo das divergências de *1-loop* que contribuem para o propagador do modelo dos Galileons. O cálculo também foi realizado através dos diagramas de Feynman. A conclusão é que o limite ultravioleta da teoria inclui termos de derivadas superiores, tal como foi antecipado em [32, 36]. Esse termo faz com que a teoria dos Galileons seja não renormalizável. Entretanto, um novo aspecto interessante é que se adicionarmos o mesmo tipo de termo a ação clássica do modelo

$$S = \sum_{i=1}^5 \int d^4x \mathcal{L}_i + M^{-6} \int \pi \square^4 \pi, \quad (5.1)$$

somos levados a uma teoria quântica super-renormalizável, onde apenas a contribuição de *1-loop* para a ação efetiva é divergente e tudo além dessa ordem é finito. O novo termo não possui a simetria Galileana $\pi \rightarrow \pi + b_\mu x^\mu + c$ e consequentemente não possui equações de movimento de segunda ordem. Isso significa que esse tipo de teoria tem fantasmas massivos, excitações do campo com energia cinética negativa.

Essas conclusões nos mostram que existe uma grande similaridade entre o modelo quântico dos Galileons e a gravitação quântica. A teoria gravitacional com ação clássica

$$S_{EH} = -M_p^2 \int d^4x \sqrt{-g} (R + 2\Lambda), \quad (5.2)$$

onde R é o escalar de Ricci e Λ é um termo constante, também possui divergências de *1-loop* com derivadas superiores e também não é renormalizável no caso geral [45, 19, 29].

Do mesmo modo, é possível considerar aqui a adição dos termos de derivada superior a ação clássica

$$S = S_{EH} + S_{DS}, \quad (5.3)$$

onde

$$S_{DS} = \int d^4x \sqrt{-g} \{a_1 C^2 + a_2 E + a_3 \square R + a_4 R^2\}, \quad (5.4)$$

sendo C^2 o quadrado do tensor de Weyl e E o termo topológico de Gauss-Bonnet. A teoria (5.3) é conhecida como gravitação quântica com derivadas superiores (GQDS).

A GQDS é uma teoria renormalizável [44], podendo até mesmo ser generalizado para se tornar super-renormalizável [3]. E assim como o modelo dos Galileons com o termo extra $\int \pi \square^4 \pi$, a GQDS possui em seu espectro de partículas fantasmas. O estado dos fantasmas nessas duas teorias são muito próximos, no caso da GQDS é a massa de Planck M_P que desempenha o papel do parâmetro massivo M da equação (5.1). Em ambos os casos podemos providenciar, no nível de árvore, a ausência de fantasmas para energias suficientemente pequenas.

Um teste simples da última afirmação foi recentemente considerado na Cosmologia [22]. Foi mostrado que as soluções cosmológicas fisicamente relevantes na teoria da gravitação com derivadas superiores (mesmo com correções semiclássicas complicadas) são estáveis com respeito a perturbações gravitacionais (ondas gravitacionais). Definitivamente, este resultado é esperado valer até quando não começamos a lidar com perturbações com a amplitude inicial da ordem da magnitude de Planck. No entanto, depois que o universo passou através de sua época inicial na escala de Planck, tais perturbações violentas não são mais geradas e, portanto, a teoria é segura no nível clássico. Provavelmente, isso deve significar que a teoria quântica também é livre do problema dos fantasmas no nível de árvore. Certamente isto não é uma afirmação óbvia, porque não é claro como as soluções clássicas mais importantes da teoria gravitacional (como, por exemplo, as cosmológicas) podem ser reproduzidas através da aproximação linear da gravitação. Ao mesmo tempo, a estabilidade das soluções cosmológicas [22] é definitivamente uma questão muito mais fundamental do que a abordagem linearizada da gravitação, assim podemos definitivamente dizer que temos argumentos fortemente positivos a favor das teorias com derivadas

superiores ¹.

Vamos agora, finalmente, discutir as lições práticas que podemos aprender da analogia entre o modelo quântico dos Galileons (5.1) e a GQDS. Como as principais aplicações dos Galileons são relacionadas a Cosmologia (veja, como exemplo [23, 9, 1, 13, 12, 14, 18, 30, 34]), seria interessante em trabalhos futuros considerar, em analogia com a referência [22], a estabilidade das soluções cosmológicas clássicas na teoria com derivadas superiores (5.1). Entretanto, para esse fim devemos completar o termo calculado aqui, $\int \pi \square^4 \pi$, por termos dependentes também da curvatura do espaço-tempo. Para se realizar esse tipo de cálculo, a técnica adequada é o método de Schwinger-DeWitt, pois este, permite realizar cálculos no espaço-tempo curvo sem a quebra da covariância das equações. O formalismo desenvolvido na seção 4.2 pode ser diretamente generalizado para o espaço-tempo curvo. Vamos aqui, discutir qualitativamente as possíveis mudanças nos cálculos e as fontes de novos termos dependentes da curvatura. A primeira delas está no próprio modelo dos Galileons. Qual é a Lagrangiana dos Galileons no espaço-tempo curvo? Este assunto foi extensivamente discutido nas referências [15, 16, 17, 25, 24, 8], sendo mostrado que é possível realizar generalizações não mínimas das Lagrangianas (4.3). Isto é, podemos adicionar a ação clássica do modelo novos termos que dependem da curvatura do espaço-tempo. As outras diferenças são encontradas durante as manipulações algébricas. Como a derivada covariante ∇_μ não comuta, durante os cálculos de, por exemplo, \hat{H} ou até mesmo de comutadores como o da equação (4.17) são gerados novos termos dependentes da curvatura. Como ilustração, na teoria dos Galileons com generalização mínima, o operador \hat{P}_1 (equação (4.14)) deve ser substituído no espaço-tempo curvo por

$$\hat{P}_1 = \hat{V}^\mu \nabla_\mu + \hat{U}^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu, \quad (5.5)$$

$$\text{onde } \hat{V}^\mu = 4c_3 R^{\mu\nu} (\nabla_\nu \pi) \quad \text{e} \quad \hat{U}^{\mu\nu} = 4c_3 [-(\square \pi) g^{\mu\nu} + (\nabla^\mu \nabla^\nu \pi)].$$

Por fim, a última diferença está nos próprios traços universais. No espaço-tempo curvo existem vários outros tipos de traços diferentes de (4.6) que não são nulos [4]. Em especial os traços proporcionais a $(1/\square)$, o que faz com que, por exemplo, o termo \hat{P}_2 possa contribuir para as divergências na expansão (4.12).

¹Existem várias outras propostas interessantes para a solução do problema dos fantasmas na GQDS [46, 2, 26, 33, 39] que podem também ser produtivas. Em qualquer caso é importante se preocupar com os termos de derivadas superiores na gravitação, uma vez que esses são necessários para a consistência da teoria quântica dos campos de matéria com a gravitação clássica de fundo [7, 43].

Independentemente da maioria das informações relevantes para as aplicações Cosmológicas poderem ser perfeitamente obtidas a partir de argumentos de contagem de potência, é importante de qualquer maneira generalizar nosso cálculo das divergências de *1-loop* para espaço-tempo curvo em um trabalho futuro.

Apêndice A

Integrais da regularização dimensional

Para calcular as integrais de Feynman dos diagramas da seção 4.3, precisamos das fórmulas a seguir. As equações básicas (A.1)-(A.5) podem ser encontradas na referência [31] e as outras integrais podem ser obtidas pelo método explicado em [10]. Todas as integrais são definidas sobre o espaço Euclidiano e devem ser entendidas através da prescrição adicional para o caso sem massa como explicado em [31].

$$\int \frac{d^{2\omega} q}{(2\pi)^{2\omega} q^2 (q-p)^2} = I_1, \quad (\text{A.1})$$

$$\int \frac{d^{2\omega} q q_\mu}{(2\pi)^{2\omega} q^2 (q-p)^2} = p_\mu I_1, \quad (\text{A.2})$$

$$\int \frac{d^{2\omega} q q_\mu q_\nu}{(2\pi)^{2\omega} q^2 (q-p)^2} = \delta_{\mu\nu} I_3 + p_\mu p_\nu I_4, \quad (\text{A.3})$$

$$\int \frac{d^{2\omega} q q_\mu q_\nu q_\alpha}{(2\pi)^{2\omega} q^2 (q-p)^2} = p_\mu p_\nu p_\alpha I_5 + E_{\mu\nu\alpha} I_6, \quad (\text{A.4})$$

$$\int \frac{d^{2\omega} q q_\mu q_\nu q_\alpha q_\beta}{(2\pi)^{2\omega} q^2 (q-p)^2} = p_\mu p_\nu p_\alpha p_\beta I_7 + G_{\mu\nu\alpha\beta} I_8 + H_{\mu\nu\alpha\beta} I_9, \quad (\text{A.5})$$

$$\int \frac{d^{2\omega} q q_\mu q_\nu q_\alpha q_\beta q_\rho}{(2\pi)^{2\omega} q^2 (q-p)^2} = p_\mu p_\nu p_\alpha p_\beta p_\rho I_{10} + K_{\mu\nu\alpha\beta\rho} I_{11} + L_{\mu\nu\alpha\beta\rho} I_{12}, \quad (\text{A.6})$$

$$\int \frac{d^{2\omega} q q_\mu q_\nu q_\alpha q_\beta q_\rho q_\omega}{(2\pi)^{2\omega} q^2 (q-p)^2} = p_\mu p_\nu p_\alpha p_\beta p_\rho p_\omega I_{13} + R_{\mu\nu\alpha\beta\rho\omega} I_{14} + S_{\mu\nu\alpha\beta\rho\omega} I_{15} \quad (\text{A.7})$$

$$+ T_{\mu\nu\alpha\beta\rho\omega} I_{16},$$

onde

$$E_{\mu\nu\alpha} = \delta_{\mu\nu} p_\alpha + \text{todas as permutações dos índices}, \quad (\text{A.8})$$

$$G_{\mu\nu\alpha\beta} = \delta_{\mu\nu} p_\alpha p_\beta + \text{todas as permutações dos índices}, \quad (\text{A.9})$$

$$H_{\mu\nu\alpha\beta} = \delta_{\mu\nu} \delta_{\alpha\beta} + \text{todas as permutações dos índices}, \quad (\text{A.10})$$

$$K_{\mu\nu\alpha\beta\rho} = \delta_{\mu\nu} p_\alpha p_\beta p_\rho + \text{todas as permutações dos índices}, \quad (\text{A.11})$$

$$L_{\mu\nu\alpha\beta\rho} = \delta_{\mu\nu} \delta_{\alpha\beta} p_\rho + \text{todas as permutações dos índices}, \quad (\text{A.12})$$

$$R_{\mu\nu\alpha\beta\rho\omega} = \delta_{\mu\nu} p_\alpha p_\beta p_\rho p_\omega + \text{todas as permutações dos índices}, \quad (\text{A.13})$$

$$S_{\mu\nu\alpha\beta\rho\omega} = \delta_{\mu\nu} \delta_{\alpha\beta} p_\rho p_\omega + \text{todas as permutações dos índices}, \quad (\text{A.14})$$

$$T_{\mu\nu\alpha\beta\rho\omega} = \delta_{\mu\nu} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\rho\omega} + \text{todas as permutações dos índices}. \quad (\text{A.15})$$

As integrais I_2, \dots, I_{16} podem ser expressadas em termos da integral básica I_1 ,

$$I_1 \equiv \frac{1}{(4\pi)^\omega \Gamma(2\omega - 2)} \Gamma(2 - \omega) \Gamma(\omega - 1) \Gamma(\omega - 1) p^{2(\omega-2)} \quad (\text{A.16})$$

e são dadas pelas expressões

$$I_2 = \frac{1}{2} I_1, \quad (\text{A.17})$$

$$I_3 = \frac{-p^2}{4(2\omega - 1)} I_1, \quad (\text{A.18})$$

$$I_4 = \frac{\omega}{2(2\omega - 1)} I_1, \quad (\text{A.19})$$

$$I_5 = \frac{(\omega + 1)}{4(2\omega - 1)} I_1, \quad (\text{A.20})$$

$$I_6 = \frac{-p^2}{8(2\omega - 1)} I_1, \quad (\text{A.21})$$

$$I_7 = \frac{(\omega + 1)(\omega + 2)}{4(4\omega^2 - 1)} I_1, \quad (\text{A.22})$$

$$I_8 = \frac{-(\omega + 1)p^2}{8(4\omega^2 - 1)} I_1, \quad (\text{A.23})$$

$$I_9 = \frac{p^4}{16(4\omega^2 - 1)} I_1, \quad (\text{A.24})$$

$$I_{10} = \frac{(\omega + 3)(\omega + 2)}{8(4\omega^2 - 1)} I_1, \quad (\text{A.25})$$

$$I_{11} = \frac{-(\omega + 2)p^2}{16(4\omega^2 - 1)} I_1, \quad (\text{A.26})$$

$$I_{12} = \frac{p^4}{32(4\omega^2 - 1)} I_1, \quad (\text{A.27})$$

$$I_{13} = \frac{(\omega + 4)(\omega + 3)(\omega + 2)}{8(2\omega + 3)(4\omega^2 - 1)} I_1, \quad (\text{A.28})$$

$$I_{14} = \frac{-(\omega + 3)(\omega + 2)p^2}{16(2\omega + 3)(4\omega^2 - 1)} I_1, \quad (\text{A.29})$$

$$I_{15} = \frac{(\omega + 2)p^4}{32(2\omega + 3)(4\omega^2 - 1)} I_1, \quad (\text{A.30})$$

$$I_{16} = \frac{-p^6}{64(2\omega + 3)(4\omega^2 - 1)} I_1. \quad (\text{A.31})$$

Bibliografia

- [1] N. Agarwal, R. Bean, J. Khoury and M. Trodden, *Screening bulk curvature in the presence of large brane tension*, arXiv:1102.5091 [hep-th].
- [2] I. Antoniadis and E.T. Tomboulis, *Gauge invariance and unitarity in higher-derivative quantum gravity*, Phys. Rev. D**33**, 2756 (1986); D.A. Johnston, *Sedentary Ghost Poles In Higher Derivative Gravity*, Nucl. Phys. B**297**, 721 (1988).
- [3] M. Asorey, J.L. López and I.L. Shapiro, *Some remarks on high derivative quantum gravity*, Int. Journ. Mod. Phys. A**12**, 5711 (1997).
- [4] A.O. Barvinsky, G.A. Vilkovisky, *The Generalized Schwinger-Dewitt Technique in Gauge Theories and Quantum Gravity*, Phys. Repts. **119**, 1 (1985).
- [5] N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantum Fields*, (Wiley-Interscience, New York, 1980).
- [6] I.L. Buchbinder and I.L. Shapiro, *On the influence of the gravitational interaction on the behavior of the effective constants of Yukawa and scalar coupling*, Sov. J. Nucl. Phys. **44**, 1033 (1986);
I.L. Buchbinder, O.K. Kalashnikov, I.L. Shapiro, V.B. Vologodsky and Yu.Yu. Wolfengaut, *The stability of asymptotic freedom in grand unified models coupled to R^2 - gravity*, Phys. Lett. B **216**, 127 (1989); *Asymptotical freedom in the conformal quantum gravity with matter*, Fortschr. Phys.**37**, 207 (1989).
- [7] I.L. Buchbinder, S.D. Odintsov and I.L. Shapiro, *Effective Action in Quantum Gravity*, (IOP Publishing – Bristol, 1992).
- [8] C. Burrage, C. de Rham and L. Heisenberg, *de Sitter Galileon*, [rXiv:1104.0155 [hep-th]].

- [9] C. Burrage, C. de Rham, D. Seery and A. J. Tolley, *Galileon inflation*, JCAP **1101**, 014 (2011), [arXiv:1009.2497].
- [10] D.M. Capper, G. Leibbrandt, and M.Ramón Medrano, *Calculation of the Graviton Self-Energy Using Dimensional Regularization*, Rhys. Rev. D**8**, 4320 (1973).
- [11] J.C Collins, *Renormalization*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1984).
- [12] P. Creminelli, G. D’Amico, M. Musso, J. Norena and E. Trincherini, *Galilean symmetry in the effective theory of inflation: new shapes of non-Gaussianity*, JCAP **1102**, 006 (2011) [arXiv:1011.3004 [hep-th]].
- [13] P. Creminelli, A. Nicolis and E. Trincherini, *Galilean Genesis: an alternative to inflation*, JCAP **1011**, 021 (2010) [arXiv:1007.0027 [hep-th]].
- [14] A. De Felice, R. Kase and S. Tsujikawa, *Matter perturbations in Galileon cosmology*, Phys. Rev. D **83**, 043515 (2011) [arXiv:1011.6132 [astroph.CO]].
- [15] C. Deffayet, S. Deser, G. Esposito-Farese, *Generalized Galileons: All scalar models whose curved background extensions maintain second-order field equations and stress-tensors*. Phys. Rev. D**80**, 064015 (2009) [arXiv:0906.1967].
- [16] C. Deffayet, G. Esposito-Farese and A. Vikman, *Covariant Galileon*. Phys. Rev. D**79**, 084003 (2009) [arXiv:0901.1314].
- [17] C. Deffayet, X. Gao, D. A. Steer and G. Zahariade, *From k-essence to generalised Galileons*, arXiv:1103.3260 [hep-th].
- [18] C. Deffayet, O. Pujolas, I. Sawicki and A. Vikman, *Imperfect Dark Energy from Kinetic Gravity Braiding*, JCAP **1010**, 026 (2010) [arXiv:1008.0048 [hep-th]].
- [19] S. Deser, P. van Nieuwenhuizen, *Nonrenormalizability of the Quantized Einstein-Maxwell System*, Phys.Rev.Lett. **32** 245-247 (1974)
- [20] B.S. DeWitt, *Dynamical Theory of Groups and Fields*, (Gordon and Breach, 1965).
- [21] G.R. Dvali, G. Gabadadze and M. Porrati, *4D Gravity on a Brane in 5D Minkowski Space*, Phys. Lett. B**485**, 208 (2000) [arXiv:hep-th/0005016].

- [22] J.C. Fabris, A.M. Pelinson, F. de O. Salles and I.L. Shapiro, *Gravitational waves and stability of cosmological solutions in the theory with anomaly-induced corrections*. JCAP 02 (2012) 019 [arXiv:1112.5202].
- [23] Genly Leon, Emmanuel N. Saridakis, *Dynamical analysis of generalized Galileon cosmology*, [arXiv:1211.3088 [astro-ph.CO]].
- [24] G. Goon, K. Hinterbichler and M. Trodden, *General Embedded Brane Effective Field Theories*, [arXiv:1103.6029 [hep-th]].
- [25] G. Goon, K. Hinterbichler and M. Trodden, *Symmetries for Galileons and DBI scalars on curved space*, arXiv:1103.5745 [hep-th].
- [26] S.W. Hawking, *Who's Afraid Of (higher Derivative) Ghosts?* Published in Quantum Field Theory and Quantum Statistics, Vol. 2, 129-139 (1985) (Ed. I.A. Batalin); S.W. Hawking and T. Hertog, *Living with ghosts*. Phys. Rev. **D65**, 103515 (2002) [hep-th/0107088].
- [27] K. Hinterbichler, M. Trodden and D. Wesley, *Multi-field galileons and higher co-dimension branes*, [arXiv:1008.1305].
- [28] C. Itzykson, J-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, (Mc Graw-Hill, New York, 1980).
- [29] R.E. Kallosh, O.V. Tarasov, I.V. Tyutin, *One Loop Finiteness Of Quantum Gravity Off Mass Shell*, Nucl.Phys. **B137** 145-163 (1978)
- [30] T. Kobayashi, M. Yamaguchi and J. Yokoyama, *Primordial non-Gaussianity from G-inflation*, [arXiv:1103.1740 [hep-th]].
- [31] G. Leibbrandt, *Introduction to the technique of dimensional regularization*, Rev. Mod. Phys. **47**, 849-876 (1975).
- [32] M. A. Luty, M. Porrati and R. Rattazzi, *Strong Interactions and Stability in the DGP Model*, JHEP **0309**, 029 (2003), [arXiv:hep-th/0303116].
- [33] L. Modesto, *Super-renormalizable Higher-Derivative Quantum Gravity*. [arXiv:1202.0008].
- [34] D. F. Mota, M. Sandstad and T. Zlosnik, JHEP **1012**, 051 (2010) *Cosmology of the selfaccelerating third order Galileon*, [arXiv:1009.6151 [astro-ph.CO]].

- [35] T. d. P. Netto, I.L. Shapiro, *One-loop divergences in the Galileon model*, Physics Letters B**716** 454460 (2012)
- [36] A. Nicolis and R. Rattazzi, *Classical and Quantum Consistency of the DGP Model*, JHEP **0406**, 059 (2004) [arXiv:hep-th/0404159].
- [37] A. Nicolis, R. Rattazzi and E. Trincherini, *The Galileon as a local modification of gravity*. Phys. Rev. D **79**, 064036 (2009) [arXiv:0811.2197].
- [38] M.E. Peskin, D.V. Schroeder, *Introduction to Quantum Field Theory*, (Addison-Wesley, Massachusetts, 1995).
- [39] V.O. Rivelles, *Triviality of Higher Derivative Theories*. Phys. Lett. B **577**, 137 (2003) [arXiv:hep-th/0304073].
- [40] L.H. Ryder, *Quantum Field Theory*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).
- [41] J.J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, (Addison-Wesley, New York, 1994).
- [42] J. S. Schwinger, *On Gauge Invariance and Vacuum Polarization* Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
- [43] I.L. Shapiro, *Effective Action of Vacuum: Semiclassical Approach*, Class. Quant. Grav.**25** (2008) 103001 [arXiv:0801.0216].
- [44] K.S. Stelle, *Renormalization of higher derivative quantum gravity*. Phys. Rev. D**16**, 953 (1977).
- [45] G. t'Hooft and M. Veltman, *One-loop divergences in the theory of gravitation*, Ann. Inst. H. Poincare A**20** 69-94 (1974).
- [46] E. Tomboulis, *1/N Expansion and Renormalization in Quantum Gravity*, Phys. Lett. B**70**, 361 (1977); *Unitarity In Higher Derivative Quantum Gravity*, Phys. Rev. Lett.**52**, 1173 (1984); *Renormalizability And Asymptotic Freedom In Quantum Gravity*, Phys. Lett. B**97**, 77 (1980).
- [47] M. Trodden and K. Hinterbichler, *Generalizing Galileons*, [arXiv:1104.2088].
- [48] M. Wyman, *Galilean-invariant scalar fields can strengthen gravitational lensing*, [arXiv:1101.1295 [astro-ph.CO]].