Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF
Instituto de Ciências Exatas – ICE
Departamento de Física – DF

Tese de Doutorado

Método Perturbativo Aplicado a Gravidade de Quarta Ordem e a Relatividade Geral Corrigida pelo Grupo de Renormalização

Sebastião Mauro Filho

Juiz de Fora–MG
2017

Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF
Instituto de Ciências Exatas – ICE
Departamento de Física – DF

Tese de Doutorado

Método Perturbativo Aplicado a Gravidade de Quarta Ordem e a Relatividade Geral Corrigida pelo Grupo de Renormalização

Autor: Sebastião Mauro Filho
Orientador: Prof. Dr. Ilya Shapiro
Co-orientador: Prof. Dr. Davi Rodrigues

Tese de doutorado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Física.

Juiz de Fora–MG
2017

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha família que sempre me apoiou.

Em especial, a meu pai, que muito me ensinou.

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos,

- aos meus pais, irmãos, sobrinhos, minha noiva e sua família por estarem sempre ao meu lado, dando sentido a tudo que faço, para vocês não há palavras para descrever minha gratidão;

- ao meu orientador Professor Ilya Shapiro, por sugerir alguns dos problemas abordados nessa tese, além da orientação em questões técnicas nas quais trabalhei durante o doutorado, e valiosas correções do texto da tese;

- ao meu co-orientador Professor Davi Rodrigues, pelas discussões e colaboração que tivemos durante a preparação do trabalho que trata sobre RGGR, além das valiosas correções do texto da tese;

- aos meus antigos e novos amigos, que sempre me apoiaram e motivaram, que por ser vários, e a cabeça neste momento está processando muitos cálculos relativos à tese, não citarei nomes para não cometer nenhuma injustiça;

- aos pesquisadores Carlos Farina e Wilton Kort Kamp, pela colaboração no desenvolvimento de parte do trabalho que trata de RGGR;

- aos pesquisadores Alessandro Fabbri e Roberto Balbinot, pela colaboração no desenvolvimento de parte do trabalho que trata do uso de campo auxiliar na Gravidade de Quarta Ordem;

- aos pesquisadores Davi Rodrigues e Álefe de Almeida, pela colaboração no desenvolvimento do trabalho que trata da dinâmica de RGGR com efeitos de potencial externo;

- ao Quarteto Fantástico, que no cair da noite, tem sempre questões insolúveis para serem discutidas, e as ditas solúveis, sempre mostradas serem apenas em aparência;

- aos professores do departamento de física da UFJF pelas boas discussões no café; ao Sr. Domingos Lopes, secretário da PPG-Física da UFJF, por toda ajuda, gentileza e competência;

- à CAPES e FAPEMIG pelo apoio financeiro durante o doutorado.

Sebastião Mauro Filho,

Dezembro de 2016.

Resumo

Nesta tese aplicamos o método perturbativo, em nível clássico, à Gravidade de Quarta Ordem e à Relatividade Geral estendida pelo Grupo de Renormalização (RGGR). Para explorar as perturbações métricas, na teoria da Gravidade de Quarta Ordem, nós usamos a formulação de campos auxiliares para uma métrica de fundo curva e arbitrária. O caso em que a métrica de fundo é Ricci-plano foi elaborada em detalhes. Notamos que o uso de campos auxiliares tornará a análise perturbativa mais simples e os resultados mais claros. Como uma aplicação, nós reconsideramos os resultados para a estabilidade do buraco negro de Schwarzschild e discutimos alguns avanços para o buraco negro de Kerr na Gravidade de Quarta Ordem.

Nós também usamos o método perturbativo para explorar os limites newtoniano e pós-newtoniano de RGGR. No Sistema Solar, RGGR depende de um único parâmetro adimensional $\bar{\nu}$, e ele é tal que para $\bar{\nu} = 0$ a Relatividade Geral é obtida. Para estudar o limite newtoniano fizemos uso da técnica de transformação conforme e da dinâmica do vetor de Laplace-Runge-Lenz (LRL). Isso nos permitiu estimar o limite superior de $\bar{\nu}$ dentro do Sistema Solar em dois casos: um quando é levado em conta o efeito de potencial externo e outro quando ele não é considerado. Anteriormente, foi encontrado que este parâmetro satisfaz o seguinte limite $\bar{\nu} \lesssim 10^{-21}$, quando o efeito de potencial externo é ignorado. Entretanto, como nós mostramos esse limite cresce cinco ordens de magnitude $\bar{\nu} \lesssim 10^{-16}$ quando tal efeito é considerado. Além disso, mostramos que para um certo limite, RGGR pode ser facilmente testada usando o formalismo parametrizado pós-newtoniano (PPN).

Palavras-chave : Extensões da Relatividade Geral; Métodos perturbativos; Correções quânticas à gravitação; Estabilidade gravitacional; Testes no Sistema Solar.

Abstract

In this thesis we applied the perturbative method, on a classical level, to the fourth-order gravity and the Renormalization Group extended General Relativity (RGGR). We will consider auxiliary fields formulation for the general fourth-order gravity on an arbitrary curved background to analyze the metric perturbations in this theory. The case of a Ricci-flat background was elaborated in detail. We noticed that the use of auxiliary fields helps to make the perturbative analysis easier and the results more clear. As an application we reconsider the stability problem of the Schwarzschild and Kerr black holes in the fourth-order gravity.

We also used the perturbative method to develop the Newtonian and post-Newtonian limits of RGGR. In the Solar System, RGGR depends on a single dimensionless parameter $\bar{\nu}$, and this parameter is such that for $\bar{\nu} = 0$ one fully recovers General Relativity in the Solar System. In order to study the Newtonian limit we used the conformal transformation technique and the dynamics of the Laplace-Runge-Lenz vector (LRL). In this way, we could estimate the upper bound for $\bar{\nu}$ within the Solar System in two case: the case where the external potential effect is considered and the another when it is not considered. Previously this parameter was constrained to be $\bar{\nu} \lesssim 10^{-21}$, without considering the external potential effect. However, as we showed, when such an effect is considered this bound increases by five orders of magnitude, $\bar{\nu} \lesssim 10^{-16}$. Moreover, we showed that under a certain approximation RGGR can be easily tested using the parametrized post-Newtonian (PPN) formalism.

Keywords : General Relativity extensions; Perturbative methods; Quantum-corrected to gravity; Gravitational stability; Tests in the Solar System.

Lista de Publicações

- C. Farina, W.J.M. Kort-Kamp, S. Mauro Filho and I.L. Shapiro, *Dynamics of the Laplace-Runge-Lenz vector in the quantum-corrected Newton gravity*, Phys. Rev. D **83** (2011) 124037.
- S. Mauro Filho, R. Balbinot, A. Fabbri and I.L. Shapiro, *Fourth derivative gravity in the auxiliary fields representation and application to the black-hole stability*, Eur. Phys. J. Plus **130** (2015) 135.
- S. Mauro Filho and I.L. Shapiro, *Anomaly-induced effective action and Chern-Simons modification of general relativity*, Phys. Lett. B **746** (2015) 372.
- D.C. Rodrigues, S. Mauro Filho and A.O.F. de Almeida, *Solar System constraints on Renormalization Group extended General Relativity: The PPN and Laplace-Runge-Lenz analyses with the external potential effect*, Phys. Rev. D **94** (2016) 084036.

Conteúdo

Introdução

A teoria da Relatividade Geral, desenvolvida por Albert Einstein em 1915, completou 100 anos recentemente [1, 2]. Apesar de já não pertencer mais ao cenário de teorias recentes, ela é ainda uma fonte de intensa pesquisa, tanto teórica quanto observacional. Isso se deve em parte a comprovação de suas previsões. Podemos citar alguns dos triunfos da Relatividade Geral: a previsão da existência de buracos negros, comprovada através da observação do sistema binário Cygnus X-1 [3, 4, 5], entre outras; o fenômeno das lentes gravitacionais, observada pelo telescópio espacial Hubble [6]; a existência das ondas gravitacionais, que recentemente foi detectada [7, 8]; entre outras.

Apesar dela ser uma teoria bem-sucedida na descrição de vários fenômenos gravitacionais, há ainda um questionamento sobre a sua validade universal. Isso se deve ao fato de que os atuais dados observacionais indicam que ela não pode descrever com boa precisão alguns dos fenômenos que ocorrem em grandes escalas, como por exemplo, as curvas de rotação de galáxias espirais [9, 10] e a expansão acelerada do universo [11, 12]. Além desses fatos há também questões teóricas que ainda levantam dúvidas sobre a sua validade. Por exemplo, as suas soluções mais relevantes de buracos negros (Schwarzschild e Kerr) no contexto astrofísico e a solução homogênea e isotrópica (cosmológica), apresentam comportamento singular. No primeiro caso, a singularidade do espaço-tempo está no interior do buraco negro, e no segundo caso está no instante inicial do universo (Big Bang). Essas singularidades não ocorrem na natureza, e portanto, é esperado haver uma outra teoria na qual elas não estejam presentes.

Além disso, ao contrário das demais teorias fundamentais da Física, a Relatividade Geral não é compatível com a teoria quântica de campos. Assim como a união entre a Mecânica Quântica e o Eletromagnetismo originou uma teoria mais abrangente e completa, a Eletrodinâmica Quântica, também foi esperado que uma formulação quântica dos fenômenos gravitacionais seria possível a partir da junção entre a Relatividade Geral e a Mecânica Quântica. O objetivo é tal que essa formulação possa explicar todos os fenômenos gravitacionais, desde aqueles que ocorrem em pequenas regiões do espaço, como por exemplo no interior de buracos negros ou no universo primordial, como aqueles que ocorrem em grandes escalas. Essa questão teórica, sobre a quantização do campo gravitacional, está ainda em aberto.

Os fatos citados acima já justificam a necessidade de uma outra teoria para descrever o campo gravitacional. As alternativas à Relatividade Geral são muitas, por exemplo, só para citar algumas [13]: teorias $f(R)$, teorias com derivadas superiores, teoria tensor-escalar, teoria bi-métrica, gravidade massiva, teorias em dimensões superiores, entre outras. Essas teorias tem em comum com a Relatividade Geral o fato de serem teorias clássicas do campo gravitacional, ou seja, não descrevem fenômenos que são de natureza quântica, como por exemplo, criação e aniquilação de partículas. Entretanto há um grupo de teorias que descrevem fenômenos gravitacionais levando em conta a natureza quântica da matéria. Essas teorias não quantizam o campo gravitacional, mas consideram o campo gravitacional como um "fundo"clássico para os campos de matéria quantizados. Essas teorias, também conhecidas como teorias semiclássicas da gravitação, são abordadas em Teoria Quântica de Campos no Espaço-Tempo Curvo [14, 15].

Como acima exposto, há razões para acreditarmos que a Relatividade Geral não é a teoria definitiva da gravitação, e por isso, é importante que estudemos propriedades particulares de extensões da Relatividade Geral. Assim, podemos agora delinear alguns argumentos que justificam o nosso trabalho nesta tese.

Como dissemos, as soluções mais importantes da Relatividade Geral possuem uma singularidade física, ou seja, não removível. É bem conhecido que as soluções de vácuo da Relatividade Geral são também soluções da Gravidade de Quarta Ordem. Em particular, os buracos negros de Schwarzschild e Kerr são tais exemplos. Entretanto, diferentemente da Relatividade Geral, essas soluções não são as únicas com simetria esférica e axial dentro da Gravidade de Quarta Ordem. Além disso é possível que os termos de derivada superior na ação gravitacional possam mudar a geometria em um tal modo que algumas das suas soluções não contenha singularidades físicas [16, 17]. Também é conhecido que termos de derivada superior podem sumir com as singularidades para o universo homogêneo e isotrópico [18, 19]. Desse ponto de vista, a Gravidade de Quarta Ordem é uma boa candidata a teoria do campo gravitacional, pois além de conter algumas das mais importantes soluções da Relatividade Geral, há também a possibilidade de não conter singularidades.

Por isso é importante verificarmos se as soluções de Schwarzschild e Kerr são realmente possíveis candidatas à descrever o campo gravitacional na Gravidade de Quarta Ordem. A maneira de fazer isso é através do teste de estabilidade. Por exemplo, se um buraco negro é perturbado de algum modo, irá essa perturbação oscilar e amortecer? Ou ela irá crescer exponencialmente até que ela não possa mais ser considerada uma perturbação e assim demonstrar a instabilidade do buraco negro? Essa questão é importante em astrofísica, já que nenhuma solução fisicamente aceitável pode ser instável. Os buracos negros de Schwarzschild e Kerr foram demonstrados serem estáveis dentro da Relatividade Geral [20, 21, 22, 23]. Em contrapartida há resultados divergentes na literatura endereçada ao mesmo problema para o buraco negro de Schwarzschild na Gravidade de Quarta Ordem [24, 25], enquanto não há ainda nenhum trabalhado abordando o problema para a métrica de Kerr. Desse modo vamos no capítulo 2 desenvolver uma representação de campo auxiliar para a Gravidade de Quarta Ordem e aplicar o método perturbativo para estudar o problema de estabilidade. Será possível concluirmos sobre a instabilidade do buraco negro de Schwarzschild, enquanto que para Kerr iremos discutir alguns avanços.

As curvas de rotação de galáxias espirais foi outro problema citado por nós no qual a Relatividade Geral não descreve com boa precisão, sendo para isso necessário a introdução do halo de matéria escura. Recentemente [26, 27, 28], foi mostrado que o modelo de gravitação com correções quânticas oriundas do grupo de renormalização, conhecido como RGGR, explica de forma satisfatória as curvas de rotação de galáxias espirais sem a introdução do halo de matéria escura. Além disso, foi encontrado que o valor do parâmetro adimensional $\bar{\nu}$ da teoria é da ordem de 10^{-7} e cresce com a massa das galáxias. Esse mesmo parâmetro define se há correções quânticas à gravitação ou não, pois para a Relatividade Geral $\bar{\nu} = 0$. Assim é esperado que em sistemas nos quais a massa é pequena os resultados de RGGR sejam comparáveis aos da Relatividade Geral.

Em [29, 30], foi estimado o valor de $\bar{\nu}$ dentro do Sistema Solar a partir do valor da precessão do periélio de Mercúrio. Foi encontrado que o limite superior de $\bar{\nu}$ é da ordem de 10^{-21}. Entretanto há duas razões para revisarmos esse limite; (i) os dados observacionais da precessão do periélio dos planetas foram recentemente compilados e atualizados; (ii) não foi levado em conta o efeito de potencial gravitacional externo, característico de RGGR. O conhecimento da dinâmica de RGGR no Sistema Solar pode contribuir para um melhor entendimento de seus princípios. Desse modo vamos verificar o limite de $\bar{\nu}$ no Sistema Solar usando a técnica do vetor de Laplace-Runge-Lenz e a abordagem PPN.

A organização da tese é a seguinte:

- **Capítulo 1:** Nesse capítulo vamos brevemente apresentar a obtenção das equações da Relatividade Geral usando o método variacional. Além disso, vamos introduzir o método perturbativo e aplicá-lo para obter a dinâmica das perturbações lineares.

- **Capítulo 2:** Vamos explorar as perturbações métricas, na teoria da Gravidade de Quarta

Ordem, usando a formulação de campos auxiliares para uma métrica de fundo curva e arbitrária. O caso em que a métrica de fundo é Ricci-plano será elaborada em detalhes. Notaremos que o uso de campos auxiliares tornará a análise perturbativa mais simples e os resultados mais claros. Como uma aplicação, nós revisaremos os resultados de estabilidade do buraco negro de Schwarzschild e indicaremos alguns avanços para o buraco negro de Kerr na Gravidade de Quarta Ordem.

- **Capítulo 3:** Nesse capítulo usaremos o método perturbativo para explorar os limites newtoniano e pós-newtoniano de RGGR. Para estudar o limite newtoniano faremos uso da técnica de transformação conforme e da dinâmica do vetor de Laplace-Runge-Lenz (LRL). Isso nos permitirá estimar o limite superior do parâmetro adimensional $\bar{\nu}$ dentro do Sistema Solar em dois casos: quando é levado em conta o efeito de potencial externo e quando ele não é considerado. Anteriormente, foi encontrado que este parâmetro satisfaz o seguinte limite $\bar{\nu} \lesssim 10^{-21}$, quando o efeito de potencial externo é ignorado. Entretanto, como nós iremos mostrar esse limite cresce cinco ordens de magnitude $\bar{\nu} \lesssim 10^{-16}$ quando tal efeito é considerado. Além disso, vamos mostrar que para uma certa aproximação RGGR pode ser facilmente testada usando o formalismo parametrizado pós-newtoniano (PPN). Essa técnica também nos permitirá colocar um limite superior sobre $\bar{\nu}$ e assim compararmos com aquele obtido a partir da técnica do vetor LRL.

Capítulo 1

Campo gravitacional relativístico

1.1 Relatividade Geral

A lei da gravitação universal de Newton não é compatível com os princípios da Relatividade Especial, a interação gravitacional propaga com velocidade instantânea nessa teoria. A Relatividade Geral foi desenvolvida com esse objetivo, de construir uma teoria para a gravitação que seja compatível com os princípios da cinemática relativística. O objetivo foi alcançado quando Einstein chegou à forma final da teoria [1, 2].

O campo gravitacional relativístico é descrito por um tensor de rank 2 chamado de métrica $g_{\mu\nu}$ na teoria da Relatividade Geral. O tensor métrico descreve a geometria do espaço-tempo na presença de um determinado campo gravitacional,

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \ , \tag{1.1}$$

da mesma forma que a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$ descreve a geometria do espaço-tempo na Relatividade Especial, ou seja, na ausência de campo gravitacional.

As equações de Einstein da Relatividade Geral são um conjunto de equações diferenciais não lineares para a métrica. Vamos aqui obtê-las a partir do princípio da mínima ação, e recomendarmos os seguintes livros-texto padrão [31, 32, 33] para o leitor encontrar outras formas de obtê-las. Também recomendamos o livro texto escrito por Einstein [2] para uma discussão sobre os princípios e conceitos das teorias da relatividade.

A ação de Einstein-Hilbert da teoria da Relatividade Geral é dada por (para revisões, ver [31, 32, 33])

$$S_{EH}\left[g_{\mu\nu}\right] = -\frac{c^3}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\, R \ , \tag{1.2}$$

onde g é o determinante métrico $\det(g_{\mu\nu})$ e R é o escalar de Ricci $(R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu})$. O tensor de Ricci é dado por

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\alpha} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\beta} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} \ . \tag{1.3}$$

A ação total para o campo gravitacional deve incluir além da ação do próprio campo gravitacional (1.2), uma para os campos de matéria. Assim, a ação total fica

$$S = \int d^4x \, (L_c + L_m) = S_{EH} + S_m \ , \tag{1.4}$$

onde S_m é a ação dos campos de matéria. O princípio de mínima ação requer

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \ . \tag{1.5}$$

Acima $\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}$ significa derivada variacional com respeito à métrica. A fonte para o campo gravitacional é expressa pelo tensor momento-energia

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2c}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} \ . \tag{1.6}$$

O tensor momento-energia desempenha na teoria relativística o mesmo papel que a distribuição de massa na gravitação newtoniana. Da lei da Gravitação Universal temos que uma distribuição de massa ρ gera um campo gravitacional, dado pela seguinte equação

$$\Delta\phi(\mathbf{r}, t) = 4\pi G \rho(\mathbf{r}, t) \ , \tag{1.7}$$

onde Δ é o operador Laplaciano. Diferentemente do caso newtoniano, a fonte do campo gravitacional, na teoria relativística, é proveniente de qualquer conteúdo de energia, como por exemplo campos eletromagnéticos. Isto implica que uma onda eletromagnética viajando pelo espaço vazio cria um campo gravitacional, que pode ser medido pela deformação do espaço-tempo. Ou mesmo o campo eletrostático de uma carga em repouso pode criar um campo gravitacional. Este é um aspecto da Relatividade Geral que a diferencia conceitualmente da Newtoniana, entre outros.

Para obtermos as equações de campo na sua forma completa devemos expandir a ação (1.2) até primeira ordem nas perturbações métricas. A expansão da métrica até primeira ordem é dada por

$$g_{\mu\nu} \to \tilde{g}_{\mu\nu} \ = \ g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \, , \tag{1.8}$$

$$g^{\mu\nu} \to \tilde{g}^{\mu\nu} \ = \ g^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \, . \tag{1.9}$$

No que segue nós iremos usar a seguinte notação para o traço $h = h^\mu_\mu = h_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$. Então a ação (1.2) em termos de $\tilde{g}_{\mu\nu}$ é dada por

$$S_{EH}\left[\tilde{g}_{\mu\nu}\right] = -\frac{c^3}{16\pi G}\int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \, \tilde{R} \ . \tag{1.10}$$

As quantidades $\tilde{g}$ e $\tilde{R}$ são, o determinante métrico e o escalar de Ricci para a métrica perturbada $\tilde{g}_{\mu\nu}$, respectivamente. É também preciso da expansão até primeira ordem das seguintes quantidades,

$$\sqrt{-\tilde{g}} \approx \sqrt{-g}\Big(1+\frac{1}{2}h\Big), \tag{1.11}$$

$$\tilde{R}_{\mu\nu} \approx R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\nabla_\mu\nabla_\nu h + \frac{1}{2}\nabla_\lambda\nabla_\mu h^\lambda_\nu + \frac{1}{2}\nabla_\lambda\nabla_\nu h^\lambda_\mu . \tag{1.12}$$

Substituindo estas quantidades na equação (1.10), nós obtemos

$$S_{EH}\left[\tilde{g}_{\mu\nu}\right] = S_{EH}\left[g_{\mu\nu}\right] - \frac{c^3}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\,h^{\mu\nu} - R_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - \Box h + \nabla_\mu\nabla_\nu h^{\mu\nu}\right). \tag{1.13}$$

Utilizando o teorema de Gauss nos útimos dois termos, nós obtemos que eles não contribuem para as equações de campo pois são identicamente zero. Da equação acima podemos identificar a derivada variacional da ação do campo gravitacional em relação a métrica

$$\frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{c^3\sqrt{-g}}{16\pi G}\Big(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + R_{\mu\nu}\Big). \tag{1.14}$$

Substituindo o resultado acima e a (1.6) na equação (1.5), obtemos as requeridas equações de campo da Relatividade Geral

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}\,T_{\mu\nu}\ . \tag{1.15}$$

A teoria para o campo gravitacional relativístico cuja dinâmica é descrita pelo conjunto de equações acima é denominada de Teoria da Relatividade Geral. Elas descrevem como o campo gravitacional depende da distribuição de matéria e energia $T_{\mu\nu}$ do sistema sob consideração. São também conhecidas como equações de Einstein.

Vamos definir o denominado tensor de Einstein, que nada mais é do que a parte esquerda da equação (1.15),

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\ . \tag{1.16}$$

Um outro modo de escrever as equações (1.15) é obtida contraindo-se os índices do tensor de Einstein, ou seja,

$$g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = R - 2R = \frac{8\pi G}{c^4}\,T \quad\Longrightarrow\quad R = -\frac{8\pi G}{c^4}\,T\ , \tag{1.17}$$

onde T é o traço do tensor momento-energia, logo

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)\ . \tag{1.18}$$

A segunda lei de Newton contém as leis de conservação da energia e do momento do sistema, de forma analoga as equações de Einstein também. Para provar, partiremos de uma da seguinte identidades de Bianchi,

$$R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta;\tau} + R^{\mu}{}_{\nu\tau\alpha;\beta} + R^{\mu}{}_{\nu\beta\tau;\alpha} = 0 \ , \tag{1.19}$$

contraindo primeiro os índices μ e α, depois ν e τ, obteremos a segunda identidade de Bianchi

$$\nabla_{\mu}(R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu}R) = 0 \ . \tag{1.20}$$

Mas o termo entre os parentêses é exatamente o tensor de Einstein com índices levantados, portanto devemos ter

$$\nabla_{\mu}T^{\mu}{}_{\nu} = 0 \ . \tag{1.21}$$

Essa relação expressa a lei de conservação do tensor momento-energia do sistema físico. É um fato notório que esta lei de conservação foi obtida de uma identidade puramente matemática, relacionada as propriedades geométricas do espaço-tempo, e não de alguma peculiaridade da matéria em si.

1.2 Teoria de perturbação gravitacional

1.2.1 Introdução

A dinâmica de uma partícula submetida a uma força resultante **F** é na mecânica newtoniana dada por

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \ . \tag{1.22}$$

Dada a lei de força e as condições iniciais para um determinado sistema físico, a solução da equação acima nos fornece toda a informação a cerca do movimento da partícula; podemos prever e saber sua posição e velocidade para qualquer tempo futuro e passado.

A lei da Gravitação Universal foi deduzida por Isaac Newton em sua famosa obra, "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica", publicada em 1686. Ela descreve como dois corpos de massas M e m interagem. Quando esses corpos estão distantes um do outro por uma distância r, essa lei diz que a força entre eles cai com o quadrado da distância,

$$\mathbf{F_g} = -\frac{GMm}{r^2}\,\hat{r} \ , \tag{1.23}$$

onde G é uma constante de proporcionalidade, denominada de constante gravitacional. No Apêndice D será mostrado que a partir das equações (1.22) e (1.23) a órbita de um planeta submetido ao campo gravitacional do Sol é uma elipse, comprovando assim a primeira lei de Kepler para o movimento planetário. Entretanto essa dedução considera que o planeta está se movendo apenas sob a influência gravitacional do Sol. Mas note que (1.23) implica que o movimento de um planeta (ou um corpo qualquer) também é afetado pelas forças de atração devido à outros planetas, satélites naturais, cometas, etc. Sendo assim, esses outros corpos celestes perturbam as órbitas elípticas dos planetas.

O Sol é o corpo mais massivo dentro do Sistema Solar, sua massa representa 99% de toda a massa [34]. Portanto os efeitos gravitacionais sobre um determinado planeta, oriundos de outros corpos pertencentes ao Sistema Solar, é pequeno comparado ao do Sol. Apesar dessas perturbações serem pequenas foi possível observar irregularidades no movimento de Júpiter e Saturno em meados do século XVIII.

Não há solução exata para o problema de interação gravitacional entre mais que dois corpos, mesmo para o caso de três corpos [35, 36]. Todavia há soluções exatas para algumas situações particulares e restritivas [35]. Dado as dificuldades inerentes ao problema, soluções aproximadas podem ser obtidas levando em conta que as perturbações gravitacionais de outros corpos são muito menores que a atração gravitacional do Sol, de modo que a dinâmica seja descrita de forma aproximada pela equação

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F_g} + \mathbf{F_p} \quad ; \quad \|\mathbf{F_p}\| << \|\mathbf{F_g}\| \; , \tag{1.24}$$

onde $\mathbf{F_p}$ é a interação gravitacional devido à outros planetas, satélites naturais, entre outros.

Em 1781, William Herschel descobriu o planeta Urano, e logo foi constatado que sua órbita apresentava desvios em relação a previsão newtoniana, mesmo considerando as perturbações gravitacionais devido aos até então conhecidos planetas. Foi sugerido que deveria haver um planeta ainda não observado, caso a teoria da gravitação de Newton estivesse correta. Com a abordagem perturbativa foi possível prever a localização desse novo planeta, e em 1846, ele foi descoberto, sendo chamado de Netuno [31]. Essa predição foi um dos grandes triunfos da lei da Gravitação Universal, e mesmo para a mecânica newtoniana.

1.2.2 Método Perturbativo

Técnica de perturbação gravitacional também é necessária em teorias métricas da gravitação. Conforme vimos a métrica $g_{\mu\nu}$ descreve a geometria do espaço-tempo na teoria da Relatividade Geral, assim como nas denominadas teorias métricas da gravidade. A primeira solução exata das equações de Einstein foi obtida por Karl Schwarzschild. Ela descreve um sistema físico com simetria esférica no vácuo [31, 32, 33],

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta\ d\phi^2)\ . \tag{1.25}$$

Aqui $r_g = 2GM/c^2$ é o denominado raio gravitacional ou raio de Schwarzschild, região que define o horizonte de eventos do buraco de negro. As constantes G, M e c são a constante gravitacional, a massa da fonte e a velocidade da luz, respectivamente.

Há outras soluções exatas, como por exemplo, a encontrada por Roy Kerr [37]. Essa solução descreve a geometria do espaço-tempo para um corpo esférico em rotação. Sendo assim, ela é de extrema importância para as pesquisas em astrofísica, pois praticamente todos corpos celestes observados possuem alguma rotação. A métrica de Kerr em coordenadas de Boyer-Lindquist [31, 32, 33] é

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{r_g r}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{r_g r a^2}{\rho^2}\right) \mathrm{sen}^2\theta d\phi^2 \\ &+ \frac{2 r_g r a^2}{\rho^2} \mathrm{sen}^2\theta d\phi dt\ . \end{aligned} \tag{1.26}$$

A constante r_g é igual na métrica de Schwarzschild $r_g = 2GM/c^2$, também temos utilizado as notações $\rho^2 = r^2 + a^2 cos^2\theta$ e $\Delta = r^2 - r_g r + a^2$. Observamos também que essa solução depende de dois parâmetros, a massa da fonte M e o parâmetro a caracterizando a rotação do corpo. Esse parâmetro está relacionado ao momento angular J através da relação $a = J/M$. Como pode ser verificado facilmente, quando tomamos $a = 0$ a métrica de Kerr reduz-se à de Schwarzschild.

Essas soluções exatas têm em comum o fato de representarem situações físicas pouco comuns e até mesmo pouco representativas da realidade, ou seja, situações em que apenas um corpo com uma simetria particular gera o campo gravitacional. Mesmo nessas situações mais simples, encontrar uma solução exata não é fácil. Portanto, pode-se esperar que para sistemas mais realísticos, em que dois ou mais corpos interagem, encontrar um solução exata das equações de Einstein será complicado e exigirá, assim, que apliquemos o método perturbativo para encontramos uma solução aproximada.

Assim como na teoria newtoniana nós esperamos que o campo gravitacional, por exemplo, gerado pelo Sol e um planeta, seja aquele gerado pelo Sol e mais uma pequena correção devido ao planeta. Assim, na teoria perturbativa do campo gravitacional relativístico, nós esperamos que a relação a seguir seja válida,

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g^{(0)}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\ , \tag{1.27}$$

onde $g^{(0)}_{\mu\nu}$ é a solução exata das equações de campo para o Sol, geralmente chamada de métrica de fundo, também poderia ser qualquer outra solução exata, como por exemplo, (1.25) e (1.26).

Já $h_{\mu\nu}$ é uma pequena correção devido ao planeta, satisfazendo a condição $|h_{\mu\nu}| << |g^{(0)}_{\mu\nu}|$, e é chamada de perturbação métrica.

A teoria de perturbação métrica é o estudo referente a dinâmica de $h_{\mu\nu}$. Para tratarmos de forma sistemática esse assunto precisamos do corpo teórico de uma teoria métrica. Então, para exemplificarmos o método perturbativo, consideremos a Relatividade Geral com o termo de constante cosmológica,

$$S = -\frac{c^3}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\,\big(R - 2\Lambda\big) + S_m \ . \tag{1.28}$$

A ação acima contém a ação de Einstein-Hilbert, mais termo com constante cosmológica Λ e a ação da matéria S_m. As equações de campo podem ser obtidas como na seção anterior,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}\ T_{\mu\nu} \ . \tag{1.29}$$

Essas equações generalizam aquelas de (1.15) devido a presença do termo de constante cosmológica. Note que quando tomamos $\Lambda = 0$, nós obtemos as equações de Einstein, como esperado. A presença de Λ desempenha um papel fundamental em cosmologia, sendo possível estudar a expansão do universo e mesmo o período inflacionário do universo primordial. Tomando o traço de (1.29) encontramos a relação

$$R = 4\Lambda - \frac{8\pi G}{c^4}T \ , \tag{1.30}$$

em que T é o traço do tensor momento-energia. Substituindo (1.30) em (1.29) obtemos

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\big(\,T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\,\big) + g_{\mu\nu}\Lambda \ . \tag{1.31}$$

Essa forma das equações de campo é mais apropriada para o estudo das perturbações gravitacionais já que nelas não aparecem outras quantidades geométricas além do tensor de Ricci e a métrica.

A solução exata de (1.31) nos dá o campo gravitacional de um determinado sistema físico. Entretanto, como já discutido, encontrar tais soluções é complicado, e temos que empregar o método perturbativo.

Antes disso vamos fazer uma observação a respeito da obtenção das equações de campo. Para chegarmos à elas, expandirmos a ação até primeira ordem em $h_{\mu\nu}$ e tomamos a derivada variacional da mesma, igualando-a à zero (princípio da mínima ação). Porém nós poderíamos ter ido além e expandido-a até ordem n em $h_{\mu\nu}$, do seguinte modo

$$S = S^{(0)} + S^{(1)} + S^{(2)} + S^{(3)} + ... + S^{(n)} \ . \tag{1.32}$$

Acima $S^{(n)}$ representa a expansão de S de ordem n em $h_{\mu\nu}$. As equações de campo são oriundas da derivada variacional $\delta S^{(1)}/\delta g^{\mu\nu}$. Mas, e os demais termos, por exemplo, $\delta S^{(2)}/\delta g^{\mu\nu}$? Esses termos vão nos dar as equações dinâmicas para $h_{\mu\nu}$. Por exemplo, note que

$$\frac{\delta S^{(2)}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \ , \tag{1.33}$$

resultará em um conjunto de equações de ordem linear em $h_{\mu\nu}$. Da mesma forma $\delta S^{(3)}/\delta g^{\mu\nu}$ dará equações de segunda ordem em $h_{\mu\nu}$, e assim por diante. Logo, se queremos estudar a dinâmica das perturbações, temos que expandir a ação até à ordem desejada, esse é o procedimento padrão do método perturbativo [38, 39].

No regime de baixas energias é suficiente avaliar as perturbações métricas até primeira ordem em $h_{\mu\nu}$, ou seja, basta analisarmos as equações resultantes de (1.33) [40, 41]. Esse processo pode também ser feito a partir das equações de campo, através de sua linearização.

Reescrevendo o tensor de Ricci (1.12) até primeira ordem,

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = R^{(0)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\Delta_L h_{\mu\nu} \ , \tag{1.34}$$

onde $R^{(0)}_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci para a métrica de fundo $g^{(0)}_{\mu\nu}$, e Δ_L é o operador de Lichnerowicz,

$$\Delta_L h_{\mu\nu} = \Box h_{\mu\nu} + 2R_{\mu\alpha\nu\beta}h^{\alpha\beta} - 2R_{\alpha(\mu}h^{\alpha}{}_{\nu)} - 2\nabla_{(\mu}\nabla_{\lambda}h^{\lambda}{}_{\nu)} + \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}h \ . \tag{1.35}$$

A contribuição da fonte das perturbações também deve ser levada em conta no tensor momento-energia,

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = T^{(0)}_{\mu\nu} + T^{(p)}_{\mu\nu} \ , \tag{1.36}$$

onde $T^{(p)}_{\mu\nu}$ é a contribuição ao tensor momento-energia da fonte perturbativa. Assim, substituindo as equações (1.27), (1.34) e (1.36) na equação de campo (1.31), obtemos

$$\Delta_L h_{\mu\nu} = -16\pi G\left(T^{(p)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{(0)}_{\mu\nu}T^{(p)}_{\mu\nu}\right) + \left(8\pi G\, T^{(0)} - 2\Lambda\right)h_{\mu\nu} \ . \tag{1.37}$$

Essas equações regem a dinâmica da perturbação no regime linear, elas são chamadas de equação das ondas gravitacionais. O estudo de tais equações é de extrema importância, não só pelo fato delas descreverem como as perturbações propagam-se na métrica de fundo, mas também pelo fato delas serem responsáveis pela estabilidade ou instabilidade dessa métrica. Para entendermos o que isso quer dizer, consideremos que a solução de (1.37) é uma função que cresce rapidamente com o tempo. Isso implica que após um intervalo finito de tempo $h_{\mu\nu}$ não satisfará mais a condição $|h_{\mu\nu}| << |g^{(0)}_{\mu\nu}|$, de modo que o regime linear já não é mais válido. Fisicamente, é como se jogássemos uma pequena pedra no mar e após algum tempo as pequenas ondas criadas na água se tornassem um tsunami. Logo, essa solução mostra que a métrica de fundo é instável perante as pequenas perturbações, e portanto, não pode representar um campo gravitacional realístico. Assim, o estudo dessas perturbações também é um teste de validação para a métrica de fundo.

Capítulo 2

Problema de estabilidade na Gravidade de Quarta Ordem

As equações (1.25) e (1.26) descrevem geometrias do espaço-tempo sem levar em conta as perturbações gravitacionais de outros corpos; por exemplo, um cometa ou planeta em órbita do Sol perturba o campo gravitacional gerado por ele. Essa perturbação é pequena, mas afeta de algum modo a geometria do espaço-tempo. Logo, o espaço-tempo não é exatamente como o descrito pelas soluções exatas, mas sim algo aproximadamente àquele. Conforme já dissemos, o procedimento técnico para estudá-las no regime de baixas energias é através da linearização das equações de campo. Esse procedimento fornece a dinâmica das perturbações lineares e permite estudar a estabilidade das soluções exatas. Para o caso da Relatividade Geral muito já foi feito desde o trabalho pioneiro de Wheeler e Regge [20]. Por exemplo, as soluções de buracos negros clássicos, Schwarzschild, Kerr e Reissner-Nördstrom, foram demonstradas serem estáveis dentro da Relatividade Geral [20, 21, 22, 23]. Em contrapartida poucos trabalhos abordaram o mesmo problema dentro do domínio teórico da Gravidade de Quarta Ordem (2.7). Além disso, há resultados divergentes na literatura endereçada a este problema para o buraco negro de Schwarzschild na Gravidade de Quarta Ordem [24, 25], enquanto não há nenhum abordando o problema para a métrica de Kerr. Desse modo, objetivaremos nesse capítulo chegar a conclusões definitivas a respeito da estabilidade da métrica de Schwarzschild e discutir alguns aspectos relativos a métrica de Kerr. Para isso vamos desenvolver uma representação de campo auxiliar para a Gravidade de Quarta Ordem e aplicar o método perturbativa para estudar o problema de estabilidade para o caso geral. Ao restringirmos ao caso particular $\beta = -3\alpha$, poderemos concluir a instabilidade do buraco negro de Schwarzschild.

2.1 Introdução

O estudo da estabilidade do campo gravitacional teve início com o trabalho de Regge e Wheeler [20]. Eles estudaram a estabilidade do buraco negro de Schwarzschild no contexto da Relatividade Geral, no vácuo $T_{\mu\nu} = 0$ e sem termo de constante cosmológica $\Lambda = 0$. Nessa situação particular as equações (1.37) assumem a seguinte forma

$$\Box h_{\mu\nu} + 2R_{\mu\alpha\nu\beta}h^{\alpha\beta} = 0 \ , \tag{2.1}$$

onde fizemos uso do gauge transverso e sem-traço (gauge TT), em que $h = 0$ e $\nabla_\mu h^\mu_\nu = 0$ [32]. Observe que (2.1) é um conjunto de equações difíceis de serem resolvidas, pois depende da métrica de fundo através do operador $\Box$ e do tensor de Riemann $R_{\mu\alpha\nu\beta}$. Assim, é de esperar que quando substituirmos, por exemplo, a métrica (1.25) ou (1.26) com seu correspondente tensor de Riemann em (2.1), as equações resultantes não sejam fáceis de serem resolvidas. Entretanto, em [20], Regge e Wheeler desenvolveram uma técnica para decompor as perturbações métricas em harmônicos esféricos tensoriais, tal que as equações resultantes de (1.37) assumem uma forma mais simples. Quando o sistema possui simetria esférica as perturbações podem ser descritas pelo seguinte tensor simétrico

$$h_{\mu\nu}(t,r,\theta,\varphi) = \sum_{l,m}\left[h^{(-),lm}_{\mu\nu}(t,r,\theta,\varphi) + h^{(+),lm}_{\mu\nu}(t,r,\theta,\varphi)\right] \ , \tag{2.2}$$

onde os símbolos $(-)$ e $(+)$ representam a paridade ímpar e par das funções harmônicas, respectivamente. Os índices l e m são números inteiros que satisfazem $|m| \leq l$, l é o grau da função harmônica e m é o número azimutal. Para os harmônicos esféricos tensoriais de paridade ímpar nós temos [20, 42],

$$h^{(-),lm}_{\mu\nu} = e^{\Omega\,t}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -h_0\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}Y_l^m & h_0\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}Y_l^m \\ 0 & 0 & -h_1\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}Y_l^m & h_1\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}Y_l^m \\ g_{20} & g_{21} & h_2\,\hat{F}_1^{(-)}Y_l^m & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & \frac{1}{2}h_2\,\hat{F}_2^{(-)}Y_l^m & -h_2(\sin\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta\varphi} - \cos\theta\frac{\partial^2}{\partial\varphi})Y_l^m \end{bmatrix} \ , \tag{2.3}$$

onde Y_l^m são os harmônicos esféricos, Ω é a frequência e o símbolo *sym* designa as componentes simétricas. Os operadores $\hat{F}_1^{(-)}$ e $\hat{F}_2^{(-)}$ são dados pelas expressões

$$\hat{F}_1^{(-)} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \ \ , \ \ \hat{F}_2^{(-)} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\theta\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ . \tag{2.4}$$

Tabela 2.1: Status do problema de estabilidade gravitacional na Relatividade Geral.

Buraco Negro	**Status**	**Referência**
Schwarzschild	Estável	Regge-Wheeler [20], Vishveshwara [21, 43], Wald [44]
Kerr	Estável	Teukolsky [22], Whiting [23]
Reissner-Nördstrom	Estável	Zerilli [45], Moncrief [46, 47]
Schwarzschild-dS/AdS	Estável	Cardoso-Lemos [48], Kodama-Ishibashi [49]
Reissner-Nördstrom-dS/AdS	Estável	Kodama-Ishibashi [50]
Kerr-AdS	Instável	Giammatteo-Moss [51], Cardoso-Dias-Ioshida [52]

Já os harmônicos tensoriais de paridade par são dados por

$$h_{\mu\nu}^{(+),lm} = e^{\Omega\, t} \begin{bmatrix} g_{00}^{(0)} H_0 Y_l^m & H_1 Y_l^m & h_0 \frac{\partial}{\partial\theta} Y_l^m & h_0 \frac{\partial}{\partial\varphi} Y_l^m \\ g_{10} & g_{11}^{(0)} H_2 Y_l^m & h_1 \frac{\partial}{\partial\theta} Y_l^m & h_1 \frac{\partial}{\partial\varphi} Y_l^m \\ g_{20} & g_{21} & r^2[K + G\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}] Y_l^m & r^2 G\, \hat{F}_1^{(+)} Y_l^m \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & r^2\, \hat{F}_2^{(+)} Y_l^m \end{bmatrix} \quad , \tag{2.5}$$

onde temos definidos os operadores $\hat{F}_1^{(+)}$ e $\hat{F}_2^{(+)}$ pelas seguintes equações

$$\hat{F}_1^{(+)} = \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\varphi} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \quad , \quad \hat{F}_2^{(+)} = K\sin^2\theta + G\Big(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big) \, . \tag{2.6}$$

As funções h_0, h_1, h_2, H_0, H_1, H_2, K e G são funções apenas da coordenada radial r. Essa técnica de decomposição em harmônicos esféricos tensoriais trouxe simplificações às equações dinâmicas para $h_{\mu\nu}$, e é aplicada atualmente como um método padrão para avaliar a estabilidade das métricas de fundo [42, 53]. Iremos discutir a estabilidade da métrica de Schwarzschild na Gravidade de Quarta Ordem, e quando nos referirmos aos modos esféricos (s-mode) das perturbações, deve ser entendido o caso em que $l = 0$ nas equações acima.

Após o trabalho de Regge e Wheeler outros surgiram complementando o estudo do problema da estabilidade de soluções da Relatividade Geral. Em 1970, o trabalho iniciado por eles foi finalizado por outros autores [21, 43, 54], sendo possível concluir a estabilidade do buraco negro de Schwarzschild na teoria da Relatividade Geral. As soluções clássicas de buracos negros da Relatividade Geral foram todas demonstradas serem estáveis perante perturbações lineares, exceto a solução de Kerr-AdS (buraco negro com simetria axial e constante cosmológica negativa). Exibimos na Tabela 2.1 os principais resultados conhecidos para o problema de estabilidade métrica na Relatividade Geral.

Conforme já dissemos, as soluções mais importantes da Relatividade Geral possuem uma singularidade física que não é esperada ocorrer na natureza. É bem conhecido que as soluções de vácuo da Relatividade Geral são também soluções da Gravidade de Quarta Ordem. Em particular, os buracos negros de Schwarzschild e Kerr são tais exemplos. Uma particularidade desse modelo é a não unicidade das soluções de vácuo com simetria axial e esférica, logo seu conjunto solução é mais amplo. Também sabemos que os termos de derivada superior na ação gravitacional podem alterar a geometria em um tal modo que algumas das suas soluções não contenham singularidades físicas [18, 19, 16, 17]. Desse ponto de vista, a Gravidade de Quarta Ordem é uma boa candidata à teoria do campo gravitacional, pois além de conter algumas das mais importantes soluções da Relatividade Geral, há também a possibilidade de não possuir singularidades físicas.

Por isso é importante verificarmos se as soluções de Schwarzschild e Kerr são realmente possíveis candidatas à descrever o campo gravitacional na Gravidade de Quarta Ordem. O procedimento padrão para abordar esse problema é é através do teste de estabilidade. Essa questão é importante em astrofísica, já que nenhuma solução fisicamente aceitável pode ser instável. Os buracos negros de Schwarzschild e Kerr foram demonstrados serem estáveis dentro da Relatividade Geral. Enquanto na Gravidade de Quarta Ordem há resultados divergentes na literatura endereçada ao mesmo problema para o buraco negro de Schwarzschild [24, 25]. Essa é uma das razões que nos levam a estudar o problema de estabilidade gravitacional nesse capítulo.

O capítulo é dividido como segue: na próxima seção estudaremos uma nova representação para a Gravidade de Quarta Ordem, a abordagem de campos auxiliares. Essa Técnica permitirá estudarmos a dinâmica das perturbações através de um conjunto de equações diferencias de segunda ordem. Por fim, na última seção iremos aplicar os resultados obtidos para inferirmos a instabilidade do buraco negro de Schwarzschild e discutirmos alguns recentes avanços obtidos para o buraco negro de Kerr.

.

2.2 Teoria de perturbação na Gravidade de Quarta Ordem

A ação gravitacional na teoria da Gravidade de Quarta Ordem é dado por

$$S = \frac{c^3}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\,\big(-R+\alpha R^2+\beta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}\big)\,, \tag{2.7}$$

onde temos negligenciado o termo de constante cosmológica. As constantes α e β são adimensionais, e G é a constante gravitacional de Newton. Uma revisão contendo aspectos históricos e aplicações de (2.7) pode ser encontrada em [55], enquanto em [56] nós podemos encontrar um estudo detalhado de suas principais propriedades. A partir do princípio variacional podemos obter, para a ação (2.7), as seguintes equações de campo

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}R - 2\alpha\big(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\, g_{\mu\nu}R\big)R - 2\beta\big(R_{\mu\alpha\nu\beta} - \frac{1}{4}\, g_{\mu\nu}R_{\alpha\beta}\big)R^{\alpha\beta} \\ -\beta\Box R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\big(2\alpha + \frac{\beta}{2}\big)\Box R + (2\alpha+\beta)\nabla_\mu\nabla_\nu R \;=\; \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}\ . \end{aligned} \tag{2.8}$$

No apêndice A pode ser encontrada a demonstração. Note que temos introduzido o tensor momento-energia por motivo de completeza das equações. Essas equações são não-lineares e de quarta ordem nas derivadas da métrica, daí o nome de Gravidade de Quarta Ordem. Tomando o traço de (2.8), no vácuo ($T_{\mu\nu} = 0$), nós chegamos em

$$\Box R + \frac{1}{2(\beta + 3\alpha)}\, R = \, 0\, . \tag{2.9}$$

De acordo com essa equação a curvatura escalar obedece a equação covariante de Klein-Gordon. Além disso, no caso em que $\beta = -3\alpha$, a última fórmula restringe a teoria ao caso não-dinâmico da curvatura escalar, $R = 0$. Esse caso particular ($\beta = -3\alpha$) corresponde àquele em que a ação contém uma parte pura de Weyl ao quadrado, mais uma de Einstein-Hilbert. O termo de Weyl na ação possui invariância conforme local; tal simetria é violada apenas pelo termo de Einstein-Hilbert. Esse modelo é conhecido como Gravidade de Einstein-Weyl, e voltaremos à ela mais adiante.

É fácil notar que todas as soluções da Relatividade Geral que satisfazem $R_{\mu\nu} = 0$, ou seja, soluções Ricci-plano, também são soluções de (2.8) no vácuo ($T_{\mu\nu} = 0$). Já o inverso não é verdade, o conjunto de soluções de vácuo para (2.8) é maior que para as equações de Einstein no vácuo. Disso temos que os buracos negros de Schwarzschild (1.25) e Kerr (1.26) são também soluções exatas da Gravidade de Quarta Ordem. Apesar disso, a estabilidade dessas métricas no domínio da Relatividade Geral não estende-se diretamente à Gravidade de Quarta Ordem. Assim, um estudo da estabilidade desses buracos negros é necessário.

Vimos no capítulo anterior que é preciso linearizar as equações de campo para estudarmos as perturbações gravitacionais no regime de baixas energias. Isso significa que ao aplicarmos esse procedimento, nas equações (2.8), a dinâmica das perturbações serão regidas por equações lineares de quarta ordem em $h_{\mu\nu}$ [57]. Desse modo o problema de estabilidade gravitacional torna-se difícil, e a introdução de uma nova abordagem pode ser um caminho mais simples.

2.2.1 Abordagem perturbativa padrão

Nesta seção vamos resumidamente explicar a abordagem usada por Whitt [24] para estudar o problema de estabilidade gravitacional na Gravidade de Quarta Ordem. De acordo com Whitt, é possível explorar a estabilidade por meio de equações de segunda ordem na perturbação do tensor de Ricci $\delta R_{\mu\nu}$, em vez de equações de quarta ordem nas perturbações métricas $h_{\mu\nu}$. Essa abordagem como veremos ajuda a simplificar o problema de estabilidade.

Para exemplificar essa abordagem, considere uma métrica perturbada, $\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, que satisfaz as equações de campo de quarta ordem (2.8) no vácuo. Além disso, a métrica de fundo $g_{\mu\nu}$ satisfaz as equações de Einstein no vácuo, ou seja, $R_{\mu\nu}(g_{\alpha\beta}) = 0$ (por motivo de estética das equações não vamos mais usar o índice (0) sobre a métrica de fundo $g^{(0)}_{\mu\nu}$, salvo quando gerar dúvidas). Nessa situação nós podemos classificar as perturbações em dois tipos:

- As perturbações as quais satisfazem as equações de Einstein no vácuo, $\tilde{R}_{\mu\nu}(g_{\alpha\beta}+h_{\alpha\beta}) = 0$.
- E aquelas que não satisfazem, ou seja, $\tilde{R}_{\mu\nu}(g_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) \neq 0$.

No primeiro caso nós temos exatamente o mesmo problema que na teoria da Relatividade Geral,

$$\tilde{R}_{\mu\nu}(g_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) = R_{\mu\nu}(g_{\alpha\beta}) + R^{(1)}_{\mu\nu}(h_{\alpha\beta}) = R^{(1)}_{\mu\nu}(h_{\alpha\beta}) = 0\,, \tag{2.10}$$

onde $R^{(1)}_{\mu\nu}$ é a expansão do tensor de Ricci de primeira ordem. Portanto essa situação assegura que todos resultados obtidos dentro da Relatividade Geral estende-se diretamente a Gravidade de Quarta Ordem. Por exemplo, a estabilidade da métrica de Schwarzschild, como discutida em [20, 21, 54, 44], é também garantida nessa teoria, o mesmo podemos dizer da métrica de Kerr [22, 23].

No segundo caso, a abordagem de Whitt considera o tensor de Ricci como um campo independente, e assim aplica a técnica perturbativa para esse campo nas equações (2.8). Considere então a expansão do tensor de Ricci até primeira ordem,

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + R^{(1)}_{\mu\nu}\,. \tag{2.11}$$

Como as equações de campo são de segunda ordem em $R_{\mu\nu}$, a técnica perturbativa irá resultar em equações de segunda ordem para $R^{(1)}_{\mu\nu}$, situação mais simples quando comparada as equações de quarta ordem em $h_{\mu\nu}$ [57]. Substituindo (2.11) em (2.8), e relembrando que $R_{\mu\nu}(g_{\alpha\beta}) = 0$, nós obtemos as equações para as perturbações lineares do tensor de Ricci,

$$\begin{aligned} &\Box R^{(1)}_{\mu\nu} + 2R_{\mu\alpha\nu\beta}R^{(1)\alpha\beta} - \frac{1}{\beta}R^{(1)}_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Big(\frac{1}{2} + \frac{2\alpha}{\beta}\Big)\Box R^{(1)} \\ &-\Big(1 + \frac{2\alpha}{\beta}\Big)\nabla_\mu\nabla_\nu R^{(1)} + \frac{1}{2\beta}g_{\mu\nu}R^{(1)} = 0\,. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Nós usamos a notação $R^{(1)} = g^{\mu\nu}R^{(1)}_{\mu\nu}$, a qual corresponde ao caso $R_{\mu\nu} = 0$. Tomando o traço de (2.12) nós obtemos

$$\Box R^{(1)} + \frac{1}{2(\beta + 3\alpha)}\,R^{(1)} = 0\,, \tag{2.13}$$

a qual é a forma linearizada da equação (2.9). Para $\beta = -3\alpha$ essa equação dá o vínculo $R^{(1)} = 0$, de modo que a equação (2.12) torna-se

$$\Box R^{(1)}_{\mu\nu} + 2R_{\mu\alpha\nu\beta}R^{(1)\alpha\beta} - \frac{1}{\beta}R^{(1)}_{\mu\nu} \;=\; 0\,. \tag{2.14}$$

Whitt conseguiu simplificar o problema inicial usando esse procedimento. Agora a dinâmica das perturbações gravitacionais são regidas pelo conjunto de equações (2.14). Para encontrar a solução para essas equações ele utilizou a técnica dos harmônicos esféricos tensoriais de Regge e Wheeler (2.2), concluindo que a métrica de Schwarzschild é estável na Gravidade de Quarta Ordem [24].

Acontece que o problema de estabilidade para a métrica de Schwarzschild na teoria de Quarta Ordem, em d = 4, é governado pelas mesmas equações encontradas para cordas negras em 10-dimensões do espaço-tempo [58], e também na teoria bi-métrica da gravidade [59]. Então, como foi observado por Myung [25], nesse caso há uma instabilidade do tipo Gregory-Laflamme [58], ou seja, o modo esférico $l = 0$ (s-mode) da perturbação em (2.5) é instável. Entretanto, a diferença encontrada nos resultados de [24] e [25] não está na abordagem técnica do problema, mas sim na análise das soluções. Desse modo vamos na próxima seção estudar em mais detalhes o método perturbativo na Gravidade de Quarta Ordem usando a abordagem de campos auxiliares.

2.2.2 Abordagem perturbativa a partir de campos auxiliares

Nesta seção discutiremos uma nova técnica para estudar as perturbações gravitacionais na Gravidade de Quarta Ordem. Essa técnica é o método de campos auxiliares, que foi descrita no recente artigo [60] (veja também [61, 62] para algumas revisões padrões e outras referências). A possibilidade de apresentar a Gravidade de Quarta Ordem na forma de uma teoria de segunda ordem, por meio de campos auxiliares, tem uma certa importância pela simplicidade que traz. Deste modo vamos considerar a seguinte ação com campo auxiliar $\phi_{\mu\nu}$,

$$S_2 \;=\; \int d^4x\sqrt{-g}\Big\{ -\frac{1}{\kappa^2}R + \phi_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \frac{\xi}{2}\,\phi_{\mu\nu}(A^{-1})^{\mu\nu,\alpha\beta}\phi_{\alpha\beta}\Big\}\,, \tag{2.15}$$

onde $A^{\mu\nu,\alpha\beta}$ é um operador invertível que depende apenas da métrica e $\kappa^2 = 16\pi G$. A variação dessa ação com respeito ao campo auxiliar $\phi_{\mu\nu}$ dá,

$$\phi_{\alpha\beta} \;=\; -\frac{1}{\xi}\,A_{\alpha\beta,\mu\nu}R^{\mu\nu}\,. \tag{2.16}$$

Substituindo a última relação na ação S_2, nós obtemos

$$S_2 \;=\; \int d^4x\sqrt{-g}\Big(-\frac{1}{\kappa^2}R - \frac{1}{2\xi}\,R^{\mu\nu}A_{\mu\nu,\alpha\beta}R^{\alpha\beta}\Big)\,. \tag{2.17}$$

Comparando (2.7) com (2.17) nós extrairmos as relações

$$\xi \;=\; -\frac{\kappa^2}{2\beta}\,, \qquad A_{\mu\nu,\alpha\beta} \;=\; \delta_{\mu\nu,\alpha\beta} - \gamma g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}\,, \tag{2.18}$$

onde $\gamma = -\alpha/\beta$. Aqui nós usamos a notação padrão de DeWitt

$$\delta_{\mu\nu,\alpha\beta} \;=\; \frac{1}{2}(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha})\,. \tag{2.19}$$

O operador inverso pode ser obtido com a ajuda da relação

$$A^{-1}_{\mu\nu,\alpha\beta}\, A^{\alpha\beta,\tau\lambda} \;=\; \delta_{\mu\nu,}{}^{\tau\lambda}\;. \tag{2.20}$$

Assumindo que a forma funcional para o operador inverso é a mesma que aquela de A, ou seja,

$$A^{-1}_{\mu\nu,\alpha\beta} \;=\; \delta_{\mu\nu,\alpha\beta} - \theta g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}\,, \tag{2.21}$$

e assim substituindo a segunda relação de (2.18) e (2.21) em (2.20), obtemos que as constantes de proporcionalidade γ e θ satisfazem

$$\theta = \frac{\gamma}{4\gamma - 1}\;. \tag{2.22}$$

Então o operador definido por (2.18) não tem um inverso se $\gamma = 1/4$, ou seja, para $\beta = -4\alpha$. Vamos a partir de agora assumir que $\beta \neq -4\alpha$.

A fim de conhecer as propriedades básicas de $\phi_{\mu\nu}$ vamos verificar se esse campo satisfaz algum vínculo. Primeiro vamos notar que $\phi_{\mu\nu}$ é um tensor simétrico. Além disso, pode-se usar as equações (2.16) e (2.18) para obter o seu traço

$$\phi = -\frac{1}{\xi}(1 - 4\gamma)R\;, \tag{2.23}$$

onde fizemos uso da notação $\phi = g^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu}$. A derivada covariante dessa expressão dá

$$\nabla_\mu \phi = -\frac{1}{\xi}(1 - 4\gamma)\nabla_\mu R\;. \tag{2.24}$$

Enquanto que a derivada covariante de (2.16), com o uso de (2.18), dá

$$\nabla_\mu \phi^\mu_\nu = -\frac{1}{\xi}\Big(\frac{1}{2} - \gamma\Big)\nabla_\nu R\;. \tag{2.25}$$

Substituindo (2.24) na expressão anterior, obtemos a identidade de Bianchi para o campo auxiliar,

$$\nabla_\mu \phi^\mu{}_\nu = \frac{1 - 2\gamma}{2(1 - 4\gamma)}\,\nabla_\nu \phi\,. \tag{2.26}$$

Agora estamos prontos para concluir nossa representação da ação (2.7) em termos do campo auxiliar $\phi_{\mu\nu}$. Ela é dada em sua forma explicita pela ação [63],

$$S_2 \;=\; \int d^4x\sqrt{-g}\,\Big\{ -\frac{1}{\kappa^2}R + \phi_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \frac{\xi}{2}\,\phi_{\mu\nu}(\delta^{\mu\nu,\alpha\beta} - \theta g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta})\phi_{\alpha\beta}\Big\}\,. \tag{2.27}$$

Essa ação descreve uma teoria dinâmica de dois campos tensoriais simétricos, $g_{\mu\nu}$ and $\phi_{\mu\nu}$. É importante notar que o campo auxiliar é dinâmico, pois a variação de (2.27) com respeito da métrica produzirá derivadas de segunda ordem de $\phi_{\mu\nu}$ nas equações de movimento. Essa ação é de segunda ordem nas derivadas, mas é dinamicamente equivalente a ação de quarta ordem nas derivadas (2.7). Essa equivalência significa que pode-se mapear qualquer solução de uma teoria em alguma solução da outra, e vice-versa. De fato, isso é verdade para as soluções de fundo como também para as soluções perturbativas, de modo que essa ação será útil para explorar as perturbações na Gravidade de Quarta Ordem.

Para ilustrar como isso funciona, vamos expandir a ação (2.27) até segunda ordem nas perturbações dos campos métrico $g_{\mu\nu}$ e auxiliar $\phi_{\mu\nu}$, seguindo o que foi discutido no capítulo anterior,

$$S_2 = S_2^{(0)} + S_2^{(1)} + S_2^{(2)} \,. \tag{2.28}$$

As expansões dos campos $g_{\mu\nu}$ e $\phi_{\mu\nu}$ são definidas como

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \to \tilde{g}_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \,, && (2.29)\\ \phi_{\mu\nu} \to \tilde{\phi}_{\mu\nu} &= \phi_{\mu\nu} + \psi_{\mu\nu} \,. && (2.30) \end{aligned}$$

Nós iremos usar para os traços a seguinte notação, $h = h^\mu_\mu = h_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$ e $\psi = \psi^\mu_\mu$. Pode-se verificar que o termo de primeira ordem na expansão $\psi_{\mu\nu}$ satisfaz a mesma identidade de Bianchi que o fundo,

$$\nabla_\mu \psi^\mu_\nu = \frac{1-2\gamma}{2(1-4\gamma)}\,\nabla_\nu\psi = \frac{\beta+2\alpha}{2(\beta+4\alpha)}\,\nabla_\nu\psi \,. \tag{2.31}$$

Outras quantidades que iremos precisar estão expandidas até segunda ordem abaixo,

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + h^{\mu\lambda}h^\nu_\lambda \,,\\ \sqrt{-\tilde{g}} &= \sqrt{-g}\big(1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}h_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta} + \frac{1}{8}h^2\big) \,. \end{aligned}$$

Além disso, a expansão do tensor de Ricci até primeira ordem é dado pela equação (1.34), e o termo de segunda ordem por

$$\begin{aligned} R^{(2)}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}h^{\tau\lambda}(\nabla_\tau\nabla_\lambda h_{\mu\nu} + \nabla_\mu\nabla_\nu h_{\tau\lambda} - \nabla_\lambda\nabla_\nu h_{\tau\mu} - \nabla_\lambda\nabla_\mu h_{\tau\nu})\\ &+ \frac{1}{2}\big(\nabla_\tau h^{\tau\lambda} - \frac{1}{2}\nabla^\lambda h\big)\big(\nabla_\lambda h_{\mu\nu} - \nabla_\mu h_{\lambda\nu} - \nabla_\nu h_{\lambda\mu}\big)\\ &+ \frac{1}{4}\nabla_\nu h^{\tau\lambda}\nabla_\mu h_{\tau\lambda} + \frac{1}{2}\nabla_\tau h_{\lambda\mu}\nabla^\tau h^\lambda_\nu - \frac{1}{2}\nabla_\tau h^\lambda_\mu \nabla_\lambda h^\tau_\nu \,. \end{aligned} \tag{2.32}$$

O termo de primeira ordem para o escalar de Ricci é

$$R^{(1)} = \nabla_\mu\nabla_\nu h^{\mu\nu} - \Box h - R_{\mu\nu}h^{\mu\nu} \,, \tag{2.33}$$

e para a segunda ordem temos

$$\begin{aligned} R^{(2)} &= h^{\mu\nu}\big(\Box h_{\mu\nu} + \nabla_\mu\nabla_\nu h - \nabla_\mu\nabla_\lambda h^\lambda_\nu - \nabla_\lambda\nabla_\mu h^\lambda_\nu\big) + \nabla_\mu h\nabla_\nu h^{\mu\nu} - \nabla_\mu h^{\mu\nu}\nabla_\lambda h^\lambda_\nu \\ &- \frac{1}{4}\nabla_\lambda h\nabla^\lambda h + \frac{3}{4}\nabla_\lambda h_{\mu\nu}\nabla^\lambda h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\nabla_\lambda h_{\mu\nu}\nabla^\mu h^{\lambda\nu} + R_{\mu\nu}h^{\mu\lambda}h^\nu_\lambda \,. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Substituindo estas fórmulas na ação S_2 (2.27), nós obtemos a sua expansão de primeira ordem [63]

$$\begin{aligned} S_2^{(1)} &= \int d^4x\sqrt{-g}\Big\{R^{\mu\nu}\psi_{\mu\nu} \;+\; \frac{h}{2}\big[-\frac{1}{\kappa^2}R + \phi_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \frac{\xi}{2}(\phi_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu} - \theta\phi^2)\big] \\ &- 2\phi_{\mu\alpha}R^\alpha_\nu h^{\mu\nu} - \xi\,\phi_{\mu\alpha}\phi^\alpha_\nu h^{\mu\nu} + \xi\,\theta\phi\phi_{\mu\nu}h^{\mu\nu} + \xi(\phi^{\mu\nu}\psi_{\mu\nu} - \theta\phi\psi) \\ &- \frac{1}{\kappa^2}\big(\nabla_\mu\nabla_\nu h^{\mu\nu} - \Box h - R_{\mu\nu}h^{\mu\nu}\big) + \phi^{\mu\nu}\big(\nabla_\lambda\nabla_\mu h^\lambda_\nu - \frac{1}{2}\nabla_\mu\nabla_\nu h - \frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu}\big)\Big\}. \end{aligned} \tag{2.35}$$

E também o termo de segunda ordem [63]

$$\begin{aligned} S_2^{(2)} &= \int d^4x\sqrt{-g}\,\Big\{\frac{\xi}{2}\,(\psi_{\mu\nu}\psi^{\mu\nu} - \theta\psi^2) - 2\psi^\mu_\beta R_{\mu\nu}h^{\beta\nu} - 2\xi\phi_{\mu\nu}\psi^\mu_\beta h^{\beta\nu} + \phi^{\mu\nu}R^{(2)}_{\mu\nu} \\ &+ \xi\theta\,\big(\phi\psi_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta} + \psi\phi_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta}\big) + \frac{h}{2}\big[\psi^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \xi(\phi^{\mu\nu}\psi_{\mu\nu} - \theta\phi\psi) + \phi^{\mu\nu}R^{(1)}_{\mu\nu}\big] \\ &+ \big(\psi^{\mu\nu} - 2\phi^\mu_\beta\, h^{\nu\beta}\big)R^{(1)}_{\mu\nu} + \big(\phi_{\alpha\beta}h^{\mu\alpha}h^{\nu\beta} + 2\phi^\mu_\beta h^{\beta\lambda}h^\nu_\lambda - \phi^\mu_\beta h^{\nu\beta}h\big)R_{\mu\nu} \\ &- \frac{\xi}{2}\,h\big(\phi_{\mu\nu}\phi^\mu_\beta h^{\nu\beta} - \theta\phi\phi_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta}\big) - \frac{1}{\kappa^2}\,\big[R^{(2)} + \frac{1}{2}\,hR^{(1)}\big] \\ &+ \phi_{\mu\nu}\phi_{\alpha\beta}\big[\frac{\xi}{2}h^{\mu\alpha}h^{\nu\beta} + \xi g^{\mu\alpha}h^{\nu\lambda}h^\beta_\lambda - \frac{\xi\theta}{2}h^{\mu\nu}h^{\alpha\beta} - \xi\theta g^{\mu\nu}h^{\alpha\lambda}h^\beta_\lambda\big] \\ &+ \big(\frac{1}{8}h^2 - \frac{1}{4}h_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta}\big)\big[\phi^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \frac{\xi}{2}\,(\phi_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu} - \theta\phi^2) - \frac{1}{\kappa^2}\,R\,\big]\Big\}\,. \end{aligned} \tag{2.36}$$

A expressão (2.36) contém as equações completas para a dinâmica perturbativa na Gravidade de Quarta Ordem. Porém, já que nossa intenção é avaliar a estabilidade das métricas de Schwarzschild e Kerr, nós impomos a condição que a métrica de fundo satisfaz as equações de Einstein no vácuo, de modo que $R_{\mu\nu} = 0$ e $\phi_{\mu\nu} = 0$. Assim, depois de descartarmos termos de superfície, nós obtemos a expressão simplificada

$$\begin{aligned} S_2^{(2)} &= \int d^4x\sqrt{-g}\Big\{\frac{\xi}{2}\,\psi_{\mu\nu}\psi_{\alpha\beta}(\delta^{\mu\nu,\alpha\beta} - \theta g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}) \\ &+ \psi^{\mu\nu}\Big[-\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\nabla_\mu\nabla_\nu h + \nabla_\mu\nabla_\lambda h^\lambda_\nu - R_{\mu\alpha\nu\beta}h^{\alpha\beta}\Big] \\ &+ \frac{1}{2\kappa^2}\,h^{\mu\nu}\,\Big[\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Box h + \nabla_\mu\nabla_\lambda h^\lambda_\nu - \frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\beta h^{\alpha\beta} - R_{\mu\alpha\nu\beta}h^{\alpha\beta}\Big]\Big\}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

As equações que determinam as perturbações num fundo Ricci-plano ($R_{\mu\nu}(g_{\alpha\beta}) = 0$) podem ser obtidas tomando a variação da ação (2.37) com respeito das perturbações métrica e do campo auxiliar. Assim a variação com respeito à $\psi_{\mu\nu}$ dá

$$(\delta_{\mu\nu,\alpha\beta} - \theta g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta})\psi^{\alpha\beta} \;= -\frac{1}{\xi}\,R^{(1)}_{\mu\nu}\;, \tag{2.38}$$

note que essa equação é nada mais que a inversa para a equação (2.16). E com respeito à $h_{\mu\nu}$ dá

$$\frac{1}{\kappa^2}\left(g_{\mu\nu}\Box h - g_{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\beta h^{\alpha\beta} + \nabla_\mu\nabla_\lambda h^\lambda_\nu + \nabla_\nu\nabla_\lambda h^\lambda_\mu - \nabla_\mu\nabla_\nu h - \Box h_{\mu\nu} - 2R_{\mu\alpha\nu\beta}h^{\alpha\beta}\right)$$
$$+\nabla_\mu\nabla_\lambda\psi^\lambda_\nu + \nabla_\nu\nabla_\lambda\psi^\lambda_\mu - \Box\psi_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\beta\psi^{\alpha\beta} - 2R_{\mu\alpha\nu\beta}\psi^{\alpha\beta} = 0\,. \tag{2.39}$$

Essas equações podem ser reescritas apenas em termos das perturbações do campo auxiliar. Usando as equações (1.34) e (2.33), e também notando de (2.38) que no caso Ricci-plano as perturbações métricas e do campo auxiliar satisfazem as relações

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = -\xi(\psi_{\mu\nu} - \theta g_{\mu\nu}\psi) \;\; ; \;\; R^{(1)} = -\xi(1-4\theta)\psi\;, \tag{2.40}$$

nós podemos reescrever a equação (2.39) da seguinte forma

$$\Box\psi_{\mu\nu} + 2R_{\mu\alpha\nu\beta}\psi^{\alpha\beta} + \frac{2\xi}{\kappa^2}\psi_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\beta\psi^{\alpha\beta} - 2\nabla_{(\mu}\nabla_\alpha\psi^\alpha{}_{\nu)} + g_{\mu\nu}(2\theta-1)\frac{\xi}{\kappa^2}\psi = 0\;. \tag{2.41}$$

Isso significa que as perturbações $\psi_{\mu\nu}$ desacoplam das perturbações métricas $h_{\mu\nu}$, e então, podem ser estudadas separadamente. Além disso, as perturbações do campo auxiliar satisfazem a identidade de Bianchi (2.31), e assim, a equação anterior fica

$$\Box\psi_{\mu\nu} + 2R_{\mu\alpha\nu\beta}\psi^{\alpha\beta} - \frac{1}{\beta}\psi_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\frac{(\beta+2\alpha)}{(\beta+4\alpha)}\Box\psi - \frac{(\beta+2\alpha)}{(\beta+4\alpha)}\nabla_{(\mu}\nabla_{\nu)}\psi \tag{2.42}$$
$$+g_{\mu\nu}\frac{(\beta+2\alpha)}{2\beta(\beta+4\alpha)}\psi = 0\;,$$

onde fizemos uso dos valores das constantes ξ e θ. Tomando o traço dessa equação obtemos

$$\Box\psi + \frac{1}{2(\beta+3\alpha)}\psi = 0\;. \tag{2.43}$$

Logo a dinâmica completa das perturbações lineares na Gravidade de Quarta Ordem é descrita pelo conjunto de equações (2.38), (2.42) e (2.43). Note que são equações de segunda ordem nas derivadas, diferentemente da abordagem padrão, na qual elas seriam de quarta ordem [63]. Também vale a pena lembrar que (2.42) é exatamente aquela obtida por Whitt, ou seja, a equação (2.12). Assim temos provado formalmente a abordagem heurística adotada por Whitt em [24]. Entretanto é preciso ressaltar o seu argumento. Ele disse que é suficiente determinar se há modos instáveis ou não nas equações (2.42), e o resultado assim obtido se estende automaticamente as perturbações métricas. Contudo isso não é verdade, e nós iremos provar na próxima seção que tal conclusão só é válida na teoria da Relatividade Geral com termo de Weyl ($\beta = -3\alpha$), na qual é possível desacoplar os campos de spin-2 massivo e sem massa.

2.3 Instabilidade dos buracos negros de Schwarzschild e Kerr

Estamos agora prontos para tomar algumas conclusões a respeito do problema de estabilidade gravitacional na Gravidade de Quarta Ordem. Por motivo de clareza, reescrevemos o conjunto de equações, obtidas na seção anterior, que determinam a dinâmica das perturbações

$$(\delta_{\mu\nu,\alpha\beta} - \theta g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta})\psi^{\alpha\beta} = -\frac{1}{\xi} R^{(1)}_{\mu\nu} \ , \tag{2.44}$$

$$\Box\psi_{\mu\nu} + 2R_{\mu\alpha\nu\beta}\psi^{\alpha\beta} - \frac{1}{\beta}\psi_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\frac{(\beta+2\alpha)}{(\beta+4\alpha)}\Box\psi - \frac{(\beta+2\alpha)}{(\beta+4\alpha)}\nabla_{(\mu}\nabla_{\nu)}\psi \tag{2.45}$$

$$+ g_{\mu\nu}\frac{(\beta+2\alpha)}{2\beta(\beta+4\alpha)}\psi = 0 \ ,$$

$$\Box\,\psi + \frac{1}{2(\beta+3\alpha)}\psi = 0 \ . \tag{2.46}$$

Esse conjunto de equações é válido para todos os valores dos parâmetros α e β, desde que $\beta \neq -4\alpha$ (caso em que o formalismo de campo auxiliar não se aplica). É importante perceber que a última dessas equações é a equação de Klein-Gordon massiva no espaço-tempo curvo descrevendo a dinâmica das perturbações para o traço do campo auxiliar. É bem conhecido que ela não apresenta modos instáveis na geometria de Schwarzschild [44, 64]. Em contrapartida, no espaço-tempo de um buraco negro rotacionando (Kerr), há regime de instabilidade quando a massa da perturbação $\mu^2 = 1/2(\beta+3\alpha)$ satisfaz o limite $\mu < \sqrt{2}m\Omega$, onde m é o número azimutal e Ω é a velocidade angular do buraco negro [65, 66, 67].

Esses resultados não são suficientes para inferirmos a estabilidade ou instabilidade desses buracos negros negros na Gravidade de Quarta Ordem. Por exemplo, no caso da métrica de Kerr, a solução da equação (2.46) possui modos instáveis no limite $\mu < \sqrt{2}m\Omega$. Para sabermos se $h_{\mu\nu}$ é instável, temos que resolver (2.45) e substituir o resultado em (2.44), para então verificarmos se a instabilidade de ψ afeta as perturbações métricas. Essa tarefa não é simples e está em aberto, logo, será algo que temos de pensar como trabalho futuro. No que segue vamos restringir à análise ao caso $\beta = -3\alpha$ (Gravidade de Einstein-Weyl).

Caso: $\beta = -3\alpha$

Neste caso particular a ação gravitacional para a teoria de quarta ordem se restringe ao termo de Einstein-Hilbert mais o termo de Weyl,

$$S = \frac{c^3}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\,\big(-R + \frac{\beta}{2}C^2_{\mu\nu\alpha\beta}\big) \ , \tag{2.47}$$

onde $C^2_{\mu\nu\alpha\beta} = E + 2(R^2_{\mu\nu} - 1/3\,R^2)$ é o quadrado do tensor de Weyl. Nós temos descartado o termo de Gauss-Bonnet no integrando, já que ele não é relevante no nível clássico. Quando substituindo $\beta = -3\alpha$ na equação (2.46), nós obtemos que o traço da perturbação do campo auxiliar é nulo (ψ=0), e consequentemente, não há propagação do campo de spin-0 massivo. Além disso, pela identidade de Bianchi (2.31), a derivada covariante de $\psi_{\mu\nu}$ é também nula ($\nabla_\mu \psi^\mu_\nu = 0$). Substituindo esses vínculos nas equações (2.44) e (2.45), temos

$$\Box h_{\mu\nu} + 2R_{\mu\alpha\nu\beta}h^{\alpha\beta} = -\frac{\kappa^2}{\beta}\psi_{\mu\nu} \ , \tag{2.48}$$

$$\Box \psi_{\mu\nu} + 2R_{\mu\alpha\nu\beta}\psi^{\alpha\beta} - \frac{1}{\beta}\psi_{\mu\nu} = 0 \ . \tag{2.49}$$

Note que temos imposto o gauge-TT sobre as flutuações métricas, ou seja,

$$h = 0 \, , \quad \nabla_\mu h^{\mu\nu} = 0 \, , \tag{2.50}$$

a qual é sempre possível no vácuo [32]. Assim, definindo um novo campo

$$\sigma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \kappa^2 \psi_{\mu\nu} \ , \tag{2.51}$$

as equações (2.48) e (2.49) mostram que $\sigma_{\mu\nu}$ satisfaz a equação para o spin-2 sem massa sobre o espaço-tempo curvo, e com um fundo Ricci-plano,

$$\Box\, \sigma_{\mu\nu} + 2R_{\mu\alpha\nu\beta}\, \sigma^{\alpha\beta} = 0 \ , \tag{2.52}$$

$$\nabla_\mu \sigma^\mu_\nu = 0 \ , \tag{2.53}$$

$$\sigma^\mu_\mu = 0 \ . \tag{2.54}$$

Essa equação é exatamente a mesma que (2.1) para as pertubações métricas na teoria de Einstein. Como nós já dissemos, ela foi bastante explorada no contexto da Relatividade Geral, na qual foi demonstrado não haver qualquer modo instável para os buracos negros de Schwarzschild [20, 43, 44] e Kerr [22, 23]. Portanto, se há alguma instabilidade na teoria, ela aparece devido ao graviton massivo (2.56). Para checarmos tal possibilidade vamos expandir $\sigma_{\mu\nu}$ em modos crescentes, ou seja, dados pela seguinte expansão

$$\sigma_{\mu\nu} = a_0\, e^{\Omega t} \big(\, \sigma^{(+)}_{\mu\nu} + \sigma^{(-)}_{\mu\nu} \,\big) \ , \tag{2.55}$$

onde $\Omega > 0$, $\sigma^{(-)}_{\mu\nu}$ e $\sigma^{(+)}_{\mu\nu}$ são os modos de paridade ímpar (2.3) e par (2.5), respectivamente. Mas como $\sigma_{\mu\nu}$ não contém modos instáveis, então $a_0 = 0$. Logo, quando somente modos instáveis são levados em conta, obtemos de (2.51) que $h_{\mu\nu} = -\kappa^2\psi_{\mu\nu}$. Assim, a equação (2.48) assumi a mesma forma que (2.49), correspondendo a dinâmica perturbativa para o graviton massivo num fundo Ricci-plano,

$$\Box h_{\mu\nu} + 2R_{\mu\alpha\nu\beta}h^{\alpha\beta} - \frac{1}{\beta}h_{\mu\nu} = 0 \ . \tag{2.56}$$

Essa equação tem sido estudada desde sua aparição no contexto de cordas negras em 10-dimensões do espaço-tempo. Gregory e Laflamme [58], ao estudarem as perturbações métricas no subespaço 4-d, sobre o fundo de Schwarzschild, encontraram que o modo esférico (modo $l = 0$), dado por

$$h_{\mu\nu}^{(+)} = e^{\Omega t} \begin{bmatrix} (1-\frac{r_s}{r})H_0 & H_1 & 0 & 0 \\ sym & (1-\frac{r_s}{r})^{-1}H_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 K \sin^2\theta \end{bmatrix} . \tag{2.57}$$

exibe uma instabilidade quando a massa do graviton m está compreendida no intervalo

$$0 < m < \frac{O(1)}{r_g} . \tag{2.58}$$

Note que r_g é o raio de Schwarzschild (1.25) e que (2.57) é obtido de (2.5) substituindo o harmônico esférico $Y_0^0 = 1$. A famosa instabilidade das cordas negras em 10-dimensões é conhecida como Instabilidade Gregory-Laflamme. Entretanto ela não é exclusividade daquela teoria. Recentemente, Babichev e Fabbri [59], mostraram que as equações dinâmicas para as perturbações métricas na Gravidade Massiva e Bi-métrica (teoria dRGT), são também dadas pela equação (2.56). Assim, foi possível estabelecerem que quando $m = m'\sqrt{1+1/\kappa}$ (m' e κ são aqui parâmetros da Teoria dRGT) satisfaz o limite (2.58), a solução bi-Schwarzschild é instável. Deste modo nós concluímos que o buraco negro de Schwarzschild é instável no caso particular em que $\beta = -3\alpha$, desde que a desigualdade abaixo seja satisfeita

$$0 < \frac{1}{\sqrt{\beta}} < \frac{O(1)}{r_g} . \tag{2.59}$$

A questão da estabilidade para o buraco negro de Kerr contra perturbações de spin-2 massivos (2.56) ainda é uma questão em aberto. Porém importantes resultados e métodos tem sido obtidos na literatura direcionados ao problema perturbativo para buracos negros no regime de baixa rotação [68]. A técnica consiste em decompor as equações perturbativas em harmônicos esféricos tensoriais e expandi-las até primeira ordem no momento angular J. O fato de usarem uma base harmônica esférica em uma métrica de fundo sem simetria esférica, poderia complicar ainda mais o problema, pois iria acoplar os termos de paridade ímpar e par. Entretanto, foi mostrado em [69], que até primeira ordem em J as perturbações ímpares e pares são desacopladas e os índices harmônicos l não se misturam.

A partir da técnica desenvolvido em [68, 69], as perturbações de spin-2 (2.56) foram exploradas em [70], no regime de baixa rotação $J << 1$. Resolvendo as equações até primeira ordem em J, foi mostrado que além do modo esférico ($l = 0$), o buraco negro de Kerr também é instável para os modos não esféricos (o buraco negro de Schwarzschild possui apenas instabilidade para o modo esférico). Esses avanços no estudo da estabilidade do buraco negro de Kerr indicam a sua instabilidade. Assim, além do buraco negro de Schwarzschild não ser fisicamente possível na Gravidade de Quarta Ordem, há indícios para acreditarmos que o de Kerr também não seja.

Capítulo 3

Modelo gravitacional RGGR

Nesse capítulo vamos explorar os limites newtoniano e pós-newtoniano da Relatividade Geral estendida pelo Grupo de Renormalização (RGGR). Para estudar o limite newtoniano faremos uso da técnica de transformação conforme e da dinâmica do vetor de Laplace-Runge-Lenz (LRL). Isso nos permitirá estimar o limite superior do parâmetro adimensional $\bar{\nu}$ dentro do Sistema Solar em dois casos: quando é levado em conta o efeito de potencial externo e quando ele não é considerado. Anteriormente, foi encontrado que este parâmetro satisfaz o seguinte limite $\bar{\nu} \lesssim 10^{-21}$, quando o efeito de potencial externo é ignorado. Entretanto, como nós iremos mostrar esse limite cresce cinco ordens de magnitude $\bar{\nu} \lesssim 10^{-16}$ quando tal efeito é considerado. Além disso, vamos mostrar que para uma certa aproximação, RGGR pode ser facilmente testada usando o formalismo parametrizado pós-newtoniano (PPN). Essa técnica também nos permitirá colocar um limite superior sobre $\bar{\nu}$ e assim compararmos com aquele obtido a partir da técnica do vetor LRL.

3.1 Fundamentos teóricos do modelo RGGR

Nesta seção vamos aplicar os princípios do grupo de renormalização à Relatividade Geral, e nas próximas vamos considerar os efeitos na gravitação no regime de baixas energias.

No Apêndice B fizemos uma introdução à Ação Efetiva, a qual desempenha o mesmo papel em Teoria Quântica de Campos que a ação no nível clássico. Nele mostramos como podemos quantizar uma teoria clássica pelo formalismo funcional. Como estamos interessados em efeitos quânticos da gravitação, bastaria seguir os procedimentos daquele apêndice e aplicarmos à Relatividade Geral. Entretanto sabemos que ela não é uma teoria renormalizável. Ainda assim, tais efeitos podem ser introduzidos à ela através dos resultados oriundos do grupo de renormalização. Assim, no Apêndice C demonstramos que no nível quântico as constantes de acoplamento e as massas dos campos dependem da escala do grupo de renormalização. Lembramos que na Relatividade Geral as constantes fundamentais relacionadas ao campo gravitacional são, a constante gravitacional G e a cosmológica Λ. Para as escalas de galáxias e do Sistema Solar, a constante cosmológica é negligenciável, de modo que apenas a gravitacional tem relevância. A dependência de G com a escala do grupo de renormalização μ é governada pela correspondente equação,

$$\mu \frac{dG^{-1}}{d\mu} = \beta_{G^{-1}} \ . \tag{3.1}$$

Usando argumentos de dimensionalidade podemos estabelecer uma forma natural e simples para a equação do grupo de renormalização para $G(\mu)$ [26, 71, 29],

$$\mu \frac{dG^{-1}}{d\mu} = 2\nu M_p^2 \ , \tag{3.2}$$

onde $M_P^2 = G^{-1}(\mu_0) = G_0^{-1}$ é a massa de Planck. Foi introduzido um parâmetro fenomenológico adimensional para ser determinado pelas observações, tal que, no limite $\nu \to 0$ nenhum efeito quântico é introduzido na dinâmica do campo gravitacional. Podemos reescrever a equação (3.2),

$$\mu \frac{d(G/G_0)}{d\mu} \ = \ -2\nu \, (G/G_0)^2 \, . \tag{3.3}$$

Então obtemos,

$$G(\mu) = \frac{G_0}{1 + \nu \ln{(\mu^2/\mu_0^2)}} \ . \tag{3.4}$$

O valor da constante gravitacional G_0 é determinado na escala μ_0. A equação (3.2) pode ser encontrada em diferentes abordagens, tal como a Gravidade Quântica de Derivada Superior [72, 73, 74, 75] e na teoria quântica de campos da matéria no fundo curvo [76, 14].

A expressão (3.4) nos dá a forma funcional como G depende de μ. O modo de como introduzi-la numa teoria gravitacional é em certo sentido ambígua, pois podemos introduzi-la de diferentes maneiras, como por exemplo, no nível da ação ou das equações de campo. No trabalho [77] foi introduzido efeitos do grupo de renormalização no nível da ação, conforme a ação a seguir

$$S_{RGGR} = \frac{c^3}{16\pi} \int \sqrt{-g} \, d^4x \, \left[\frac{R - 2\Lambda\{\mu\}}{G(\mu)} + \lambda \left(\mu - f(g, \gamma, \Psi) \right) \right] + S_m, \tag{3.5}$$

onde $S_{RGGR} = S_{RGGR}[g, \gamma, \mu, \lambda, \Psi]$, $S_m = S_m[g, \Psi]$, Ψ é qualquer campo de matéria e μ é a escala do grupo renormalização, cuja relação com os outros campos é estabelecida na ação pelo vínculo $\mu = f$; λ é o multiplicador de Lagrange. O campo $\gamma_{\alpha\beta}$, o qual aparece apenas dentro de f e sem derivadas, é um tensor que funciona como uma métrica de referência. Como mostrado em [77], Λ e $\gamma_{\alpha\beta}$ são importantes para garantir a conservação do tensor momento-energia. Este modelo é em geral denominado de RGGR (Relatividade Geral estendida pelo Grupo de Renormalização).

Note que os escalares G e Λ dependem da escala do grupo de renormalização μ. Porém G é uma função padrão (3.4) de μ, a qual é fixada no nível da ação. Isto significa que a forma desta dependência é independente dos outros campos e de suas condições de contorno (ou seja, se, por exemplo, $G = \mu^2$ para cosmologia, então $G = \mu^2$ para o Sistema Solar, para todas as galáxias, para o vácuo e para qualquer outro sistema). Em contrapartida, a relação entre Λ e μ não é universal, é dependente do sistema. Ela não é fixada no nível da ação, mas ela pode e deve ser obtida das equações de campo. Isto é porque [77] introduziu duas notações diferentes para a dependência de $G(\mu)$ e $\Lambda\{\mu\}$.

De uma perspectiva do grupo de renormalização, a diferença entre $G(\mu)$ e $\Lambda\{\mu\}$ é que para a primeira nós assumimos a existência de uma função beta universal, ou seja, uma função-β que é independente de qualquer propriedade do sistema; enquanto para $\Lambda\{\mu\}$ a correspondente função-β é dependente do sistema.

Do mesmo modo que obtivermos as equações de Einstein podemos a partir do princípio variacional obter as equações de campo para RGGR. Por simplicidade de notação vamos adotar $S_{RGGR} = S$. Fazendo uso das perturbações métricas, a expansão da ação RGGR até primeira ordem fica,

$$\tilde{S}\left[\tilde{g}_{\mu\nu}\right] = S\left[g_{\mu\nu}\right] + \frac{c^3}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}\,\frac{1}{G(\mu)}\left(\frac{1}{2}R\,h - \Lambda h - R_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - \Box h + \nabla_\mu\nabla_\nu h^{\mu\nu}\right). \tag{3.6}$$

Note que a constante gravitacional não pode ser colocada para "fora" da integral, como ocorre na Relatividade Geral e Gravidade de Quarta Ordem, pois ela é uma função das coordenadas espaço-temporais, e portanto, ela irá contribuir com suas derivadas às equações de campo. Fazendo integrações por partes nos útimos dois termos, obtemos

$$\tilde{S}\left[\tilde{g}_{\mu\nu}\right] = S\left[g_{\mu\nu}\right] + \frac{c^3}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2G}g_{\mu\nu}R - g_{\mu\nu}\frac{\Lambda}{G} - \frac{1}{G}R_{\mu\nu} - \Box G^{-1} + \nabla_\mu\nabla_\nu G^{-1}\right)h^{\mu\nu}. \tag{3.7}$$

Logo, tomando a variação da ação acima com respeito da métrica, obtemos as equações de campo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda + g_{\mu\nu}G\,\Box\,G^{-1} - G\,\nabla_\mu\nabla_\nu G^{-1} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}\ , \tag{3.8}$$

onde, por motivo de generalidade, temos introduzido o tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$; $G(\mu)$ é dado por (3.4). Essas equações, juntamente com a conservação do tensor momento-energia ($\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$), que é garantido devido a ação da parte de matéria depender apenas da métrica e dos campos de matéria, descrevem toda a dinâmica do campo gravitacional em RGGR. Tomando o traço das equações acima, obtemos

$$-R + 4\Lambda + 3G\,\Box\,G^{-1} = \frac{8\pi G}{c^4}T\ , \tag{3.9}$$

que pode ser resolvido para R e ser substituído em (3.8), resultando em

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\big(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\big) + g_{\mu\nu}\Lambda + G\,\nabla_\mu\nabla_\nu G^{-1} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}G\,\Box G^{-1}\ . \tag{3.10}$$

Essa forma das equações de campo nos será mais útil para obtermos os parâmetros PPN para RGGR, que será desenvolvida na seção 3.4.

3.2 Identificação de escala e potencial externo

Na seção anterior foi desenvolvido os fundamentos teóricos do modelo RGGR, de modo que, dado uma distribuição de matéria $T_{\mu\nu}$, nós podemos encontrar o correspondente campo gravitacional a partir das equações (3.8). Entretanto, podemos notar que ainda resta identificar a escala de renormalização μ. Além disso, vamos aqui descrever como as contribuições do potencial externo afeta a dinâmica de RGGR, efeito que não foi considerado em [29] para vinculá-la dentro do Sistema Solar.

3.2.1 Potencial newtoniano como escala de renormalização

Nosso objetivo é identificar μ com alguma grandeza física que caracteriza uma escala de energia para um sistema particular. Normalmente esta identificação depende do problema físico sob consideração e não existe uma solução universal. No caso do campo gravitacional de uma massa pontual, uma escolha natural é $\mu \sim 1/r$, em que r é a distância a partir da posição da massa. Essa identificação de escala tem sido utilizada em algumas publicações [26, 78, 79, 80]. Em particular, ela permite que se explique as curvas de rotação das galáxias espirais para um modelo muito simplista de galáxia, galáxias pontuais [26, 78, 79].

A identificação $\mu \sim 1/r$ é razoável para um modelo em que as massas são aproximadas por partículas pontuais. Entretanto, devemos esperar que para um modelo mais realístico a escala de renormalização dependa de outras características do sistema. Infelizmente não há um processo formal do qual extraímos o "verdadeiro" μ, e assim esse processo é heurístico.

Foi proposto, em [27], um novo Ansatz, tal que ele leva em conta a distribuição espacial de matéria. Esse Ansatz relaciona a escala com o potencial newtoniano através da função,

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{\phi_N}{\phi_0}\right)^\alpha\ . \tag{3.11}$$

Acima ϕ_N é o potencial gravitacional newtoniano e é calculado com a condição de contorno de ser zero na infinitude espacial; ϕ_0 é uma escala de referência. Na equação (3.11), α é um parâmetro fenomenológico que varia de um sistema à outro, diferentemente de ν que é uma constante universal, e portanto ele deve ser definido a partir do ajuste com os dados observacionais.

Essa escala é mais sofisticada pois o potencial newtoniano leva em conta a distribuição de matéria do meio galáctico. Foi possível explicar de maneira precisa as curvas de rotação de nove galáxias espirais sem a introdução do halo de Matéria Escura [27]. É fácil ver a partir das equações (3.4) e (3.11) que α sempre aparece como um fator no produto $\alpha\nu$. Com o ajuste das curvas de rotação foi mostrado que $\alpha\nu$ é cerca de 10^{-7} e, além disso, este produto cresce com o aumento da massa da galáxia [27, 28]. Os resultados obtidos por RGGR foram tão precisos quanto aqueles obtidos a partir do modelo de matéria escura isotérmica com simetria esférica e melhor do que aqueles obtidos a partir dos modelos MOND e STVG. O Ansatz (3.11) foi, posteriormente, demonstrado ser consistente para sistemas na escala astrofísica [81].

A mesma identificação de escala foi usada em [29] para encontrar um limite superior para $\nu\alpha$ no Sistema Solar, mas sem levar em conta o efeito do potencial externo (que será discutido adiante). Estimou-se $\nu\alpha < 10^{-17}$, valor que está em acordo com aquele encontrado para galáxias, uma vez que, ele cresce com a massa do sistema e portanto espera-se um efeito muito fraco na escala do Sistema Solar.

Em [77], foi proposto uma outra escala de renormalização, que para uma certa aproximação, é uma extensão covariante de (3.11). Ela é dada pela expressão

$$\mu = A + BU^\alpha U^\beta h_{\alpha\beta} \ , \tag{3.12}$$

onde $h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \gamma_{\alpha\beta}$ e A e B são constantes. O vetor U^α denota a quadri-velocidade de uma partícula ou fluido e $\gamma_{\alpha\beta}$ é um tensor de rank-2 que deve ser identificado com a métrica de Minkowski a fim de que, num limite de baixas velocidades e campo fraco, e após algumas aproximações, (3.12) é dado por (3.11).

Outra identificação de escala covariante foi proposta nos seguintes trabalhos [82, 83, 84]. Basicamente, a ideia se baseia no fato de que no regime de altas energias a curvatura do espaço-tempo é grande enquanto que em baixas é pequena, e assim, o escalar de Ricci R é um bom candidato para a escala de renormalização. Nessa abordagem a teoria gravitacional se torna uma teoria $f(R)$ tradicional. Nesses trabalhos, os estudos se concentraram na dinâmica cosmológica. Aqui nós estamos interessados no regime de baixas energias, e além disso, em um modelo com aspectos novos que não esteja no domínio teórico da tradicional abordagem $f(R)$, e assim, nas próximas seções será explorado as consequências de (3.11) como escala de renormalização no Sistema Solar.

3.2.2 Potencial gravitacional externo

Em trabalhos recentes [29, 30] foi estimado o limite superior para $\alpha\nu$ dentro do Sistema Solar. Em [29], foi realizado o correspondente cálculo a partir da dinâmica do vetor de Laplace-Runge-Lenz (que será discutido no Apêndice D) e dos dados de precessão do periélio de Mercúrio. Foi obtido um limite superior de 10^{-17}, sugerindo assim uma forte dependência linear de α com a massa do sistema. Entretanto, um vínculo ainda mais forte foi obtido por [30]. Nele outros efeitos, não considerados em [29], foram levados em conta, por exemplo, o efeito Lense-Thirring devido ao momento angular do Sol, rendendo assim uma estimativa de $\alpha\nu$ da ordem de 10^{-21}. A diferença técnica entre esses trabalhos está no fato de que [30] usou o método perturbativo padrão da mecânica celeste, enquanto [29], a técnica do vetor de Laplace-Runge-Lenz.

Porém esses trabalhos não tem levado em conta os possíveis efeitos do potencial externo.[1] Para entendermos o que isso significa, notamos primeiro que a escala de renormalização (3.11) depende do potencial gravitacional e não de suas derivadas, isso implica que um potencial constante pode influenciar a dinâmica em RGGR, uma peculiaridade da mesma. Isso não ocorre na gravitação newtoniana já que ela depende exclusivamente das derivadas do potencial, o que acarreta, por exemplo, a inexistência de forças gravitacionais dentro de uma superfície oca.

Para exemplificarmos o efeito do potencial externo em RGGR, vamos considerar a constante gravitacional efetiva em um ponto $\mathbf{r}$ devido a um sistema S. A partir de (3.4) temos

$$G_s(\phi_s(\mathbf{r})) = \frac{G_0}{1 + 2\bar{\nu}_s \ln\left(\frac{\phi_s(\mathbf{r})}{\phi_0}\right)} \ , \tag{3.13}$$

note que estamos usando a notação $\bar{\nu}_s$ para $\nu\alpha_s$. Quando S é muito grande ele é composto por vários subsistemas menores que ele, de modo que o potencial gravitacional newtoniano devido ao sistema como um todo praticamente não muda dentro da região de cada subsistema. Vamos denotar um subsistema desse tipo por S'. Então em S' o potencial newtoniano ($\bar{\Phi}_{s|s'}$) devido a S é constante. Deste modo, se $\mathbf{r}$ é um ponto dentro da região de S', o potencial newtoniano neste ponto é dado por

$$\phi'_{s'}(\mathbf{r}) = \phi_{s'}(\mathbf{r}) + \bar{\Phi}_{s|s'} \ , \tag{3.14}$$

onde $\phi_{s'}(\mathbf{r})$ é o potencial gerado por S' no ponto $\mathbf{r}$, e $\bar{\Phi}_{s|s'}$ é a contribuição externa devido à S em S'. Logo a constante gravitacional efetiva correspondente ao subsistema S' é expressa da

[1] O trabalho [29] foi defendido em minha dissertação de mestrado. O Prof. Dr. Davi Rodrigues fez parte da banca avaliadora, fez algumas sugestões, sendo que uma delas foi a possibilidade de o potencial externo ao Sistema Solar influenciar a dinâmica interna do mesmo. Recentemente iniciamos um trabalho e novamente ele sugeriu agregarmos ao trabalho um estudo das implicações do efeito do potencial galáctico na dinâmica do Sistema Solar, resultando no trabalho [85].

seguinte forma,

$$G_{s'}(\phi'_{s'}(\mathbf{r})) = \frac{G_0}{1 + 2\bar{\nu}_{s'} \ln\left(\frac{\phi_{s'}(\mathbf{r}) + \bar{\Phi}_{s|s'}}{\phi_0}\right)} \ . \tag{3.15}$$

Em nosso caso particular nosso objetivo é estimar o limite superior de $\bar{\nu}_{s'}$ dentro do Sistema Solar. Então $\bar{\Phi}_{s|s'}$ é a contribuição ao potencial newtoniano de todas as massas presentes no universo na posição do Sistema Solar. Entretanto nós não conhecemos toda a distribuição de matéria do universo, e mesmo se conhecêssemos não saberíamos calculá-la pois o universo não é estático e nem estacionário, logo essa constante é desconhecida. Porém é possível fazermos uma razoável estimativa de seu valor devido à Via Láctea ϕ_g, e assumirmos que a contribuição ao potencial na posição de S' devido as demais massas do universo ϕ_U é desprezível frente à ϕ_g (ou seja, $|\phi_U| << |\phi_g|$), assim nós obtemos

$$G_{s'}(\phi'_{s'}(\mathbf{r})) \approx \frac{G_0}{1 + 2\bar{\nu}_{s'} \ln\left(\frac{\phi_{s'}(\mathbf{r}) + \phi_g}{\phi_0}\right)} \ . \tag{3.16}$$

Em [86, 87], foi estimado o valor de ϕ_g, ou seja, o valor do potencial newtoniano gerado pela Via Láctea na posição do Sistema Solar: -5×10^{-7}, se apenas a matéria bariônica é considerado; ou $-2,1 \times 10^{-6}$ considerando tanto o conteúdo de matéria bariônica quanto o halo de Matéria Escura (ambos em unidade de $c = 1$).

Para os planetas do Sistema Solar encontra-se que o potencial newtoniano gerado pelo Sol em suas órbitas satisfaz a relação $\phi_{s'}/\phi_g \lesssim 10^{-2}$, conforme mostrado em [85]. Para ser mais especifico, o maior valor $\phi_{s'}/\phi_g$ vem da órbita de mercúrio em seu periélio, e lê-se: 6.4×10^{-2} para o caso sem matéria escura, e 1.5×10^{-2} para o caso com matéria escura. Assim uma boa escolha do potencial de referência ϕ_0 é ϕ_g, que nos permite reescrever (3.16) como

$$G(\mathbf{r}) \approx \frac{G_g}{1 + 2\bar{\nu} \ln\left(1 + \frac{\phi_N}{\phi_g}\right)} \ . \tag{3.17}$$

De agora em diante sempre que aparecer $G(\mathbf{r})$ e $\bar{\nu}$ sem o subscrito s', deve ser entendido, respectivamente, como a constante gravitacional e o parâmetro quântico efetivo no Sistema Solar, de outro modo vamos sempre nos utilizar do subscrito para fazer referência ao sistema tratado. Note também que fizemos uma mudança de notação do potencial gravitacional $\phi_{s'}$ devido ao sistema S' para ϕ_N. Então ϕ_N é para ser entendido como o potencial gravitacional em um ponto $\mathbf{r}$ do Sistema Solar devido apenas ao Sol. A expressão para a constante gravitacional efetiva no Sistema Solar (3.17) desempenhará papel fundamental nas próximas seções.

3.3 Testando RGGR no Sistema Solar

Nos trabalhos [27, 28] nós podemos encontrar um estudo detalhado de RGGR na escala de galáxias. Foi mostrado que o único parâmetro $\alpha\nu$ fenomenológico da teoria cresce com a massa do sistema, e que não é preciso a introdução do halo de matéria escura para ajustar as curvas de rotação. A fim de melhor investigar a dependência de $\alpha\nu$ com a massa do sistema é preciso estimar o seu limite para sistemas de menor massa. Assim vamos dedicar essa e a próxima seção ao estudo de RGGR no Sistema Solar.

3.3.1 Limite de campo fraco: regime newtoniano

Nesta subseção nosso objetivo é encontrar uma solução aproximada para RGGR no limite de campo gravitacional fraco e na seguinte aplicarmos essa solução ao Sistema Solar. Para isso faremos uso da técnica de transformação conforme. Para aplicações dentro do Sistema Solar a constante cosmológica pode ser negligenciável, além disso, o vínculo $\mu = f$ se mantém mesmo no nível da ação, logo podemos considerar aproximadamente a ação RGGR dada por,

$$S = \frac{c^3}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \frac{R}{G(\mu)} \ , \tag{3.18}$$

onde $G(\mu)$ é dado por (3.17). Conforme vimos, as estimativas de $\bar{\nu}_{s'}$ indicam um valor extremamente pequeno: em galáxias $\bar{\nu}_g \sim 10^{-7}$ [27, 28], enquanto que no Sistema Solar $\bar{\nu} < 10^{-21}$ [29, 30]. Portanto, para sistemas de pequena massa é uma boa aproximação considerarmos a expansão de (3.17) em primeira ordem em $\bar{\nu}$, ou seja,

$$G \approx G_g \ (1 - \epsilon) \ , \tag{3.19}$$

onde temos explicitamente denotado $\epsilon = 2\bar{\nu} \ln \left(1 + \frac{\phi_N}{\phi_g}\right)$, e também a hipótese $|\epsilon| << 1$ foi usada. Agora buscaremos uma transformação conforme que transforme a ação (3.18), com $G(\mu)$ dado por (3.19), em uma que contenha um termo representando a ação de Einstein-Hilbert e outros termos de ordem superior em ϵ,

$$S = \frac{c^3}{16\pi G_0} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \ \bar{R} + O^2(\epsilon) \ . \tag{3.20}$$

Lembramos que as transformações conformes não são transformações de coordenadas, mas sim uma regra para parametrizar a métrica em termos de uma nova métrica (métrica conforme) e uma função escalar $\sigma(x)$ (fator conforme). Em [88] podemos encontrar uma discussão de como aplicar as transformações conformes às quantidades geométricas do espaço de Riemann em n-dimensões e usá-las para buscar soluções da Relatividade Geral. Sob transformação conforme a métrica se transforma da seguinte maneira

$$g_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\nu}(x) e^{2\sigma(x)} \ , \tag{3.21}$$

onde $\bar{g}_{\mu\nu}$ é a métrica conforme e $\sigma(x)$ é o fator conforme. As leis de transformação para o determinante métrico e para o escalar de Ricci são dadas por [88],

$$g \ = \ \bar{g} e^{2D\sigma} \ , \tag{3.22}$$

$$R \ = \ e^{-2\sigma}[\bar{R} - 2(D-1)(\bar{\nabla}^2\sigma) - (D-1)(D-2)(\bar{\nabla}\sigma)^2] \ . \tag{3.23}$$

Aqui D é a dimensão do espaço e $\bar{\nabla}$ é a derivada covariante na métrica conforme $\bar{g}_{\mu\nu}$. Para o caso em que $D = 4$, temos

$$g = \bar{g} e^{8\sigma} \quad , \quad R = e^{-2\sigma}[\bar{R} - 6(\bar{\nabla}^2\sigma) - 6(\bar{\nabla}\sigma)^2] \ . \tag{3.24}$$

Substituindo estes termos na ação (3.18) teremos

$$\begin{aligned} S \ &= \ \frac{c^3}{16\pi G_g} \int d^4x\sqrt{-\bar{g}} \ \frac{e^{2\sigma}\bar{R}}{1-\epsilon} \ - \ \frac{6c^3}{16\pi G_g} \int d^4x\sqrt{-\bar{g}} \ \frac{e^{2\sigma}\bar{\nabla}^2\sigma}{1-\epsilon} \\ &- \ \frac{6c^3}{16\pi G_g} \int d^4x\sqrt{-\bar{g}} \ \frac{e^{2\sigma}(\bar{\nabla}\sigma)^2}{1-\epsilon} \ . \end{aligned} \tag{3.25}$$

Usando a seguinte identidade

$$\frac{e^{2\sigma}}{1-\epsilon} \ \bar{\nabla}^2\sigma = \bar{\nabla}\left(\frac{e^{2\sigma}\bar{\nabla}\sigma}{1-\epsilon}\right) - \frac{2e^{2\sigma}}{1-\epsilon}(\bar{\nabla}\sigma)^2 - \frac{e^{2\sigma}}{(1-\epsilon)^2}\bar{\nabla}\sigma\bar{\nabla}\epsilon \ , \tag{3.26}$$

obtemos a equação,

$$S = \frac{c^3}{16\pi G_g} \int d^4x\sqrt{-\bar{g}} \left[\frac{e^{2\sigma}}{1-\epsilon}\left(\bar{R} + 6(\bar{\nabla}\sigma)^2 + \frac{\bar{\nabla}\sigma\bar{\nabla}\epsilon}{1-\epsilon}\right) \ - \ \bar{\nabla}\left(\frac{e^{2\sigma}\bar{\nabla}\sigma}{1-\epsilon}\right)\right] \ . \tag{3.27}$$

Assim podemos fazer a seguinte identificação para o fator conforme,

$$1 - \epsilon = e^{2\sigma} \ . \tag{3.28}$$

Consequentemente a relação entre σ e ϵ é dada por

$$\sigma = \frac{1}{2}\ln(1-\epsilon) \quad ; \quad \bar{\nabla}\sigma = -\frac{1}{2}\bar{\nabla}\epsilon \ . \tag{3.29}$$

Essa relação nos mostra que todos os termos na ação (3.27) são de segunda ordem em ϵ, exceto aquele que é dado pelo tensor de Ricci na métrica conforme. Portanto a ação assume a seguinte forma em primeira ordem em ϵ,

$$S = \frac{c^3}{16\pi G_g} \int d^4x\sqrt{-\bar{g}}\,\bar{R} \ . \tag{3.30}$$

Essa ação possui exatamente a mesma forma que a ação de Einstein-Hilbert da Relatividade Geral, e assim, nós sabemos que a solução com simétrica esférica no vácuo para a métrica conforme é a solução de Schwarzschild. Como resultado a componente-00 da métrica conforme é

$$\bar{g}_{00} = 1 + \frac{2\phi_N}{c^2} \ , \tag{3.31}$$

onde ϕ_N é o potencial newtoniano clássico. Lembrando que a transformação conforme, após a escolha (3.28), é dada por

$$g_{\mu\nu} = (1 - \epsilon)\bar{g}_{\mu\nu} \ . \tag{3.32}$$

Usando a equação acima nós podemos facilmente obter a solução aproximada de RGGR no regime de campo fraco com simetria esférica no vácuo. Para nosso objetivo é suficiente analisar apenas a componente-00, dado por

$$g_{00} = (1 - \epsilon)\bar{g}_{00} \quad \Rightarrow \quad g_{00} \approx 1 + \frac{2\phi_N}{c^2} - 2\bar{\nu}\ln\left(1 + \frac{\phi_N}{\phi_g}\right) \ . \tag{3.33}$$

Acima temos substituído $\epsilon = 2\bar{\nu}\ln\left(1 + \frac{\phi_N}{\phi_g}\right)$ e negligenciado termos de ordem superior $(\epsilon\phi/c^2)$. Pode ser encontrado no Apêndice E a demonstração de que no limite de baixas energias (limite newtoniano) toda teoria relativística do campo gravitacional deve resultar na seguinte componente-00 da métrica, em primeira ordem

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2} \ . \tag{3.34}$$

Logo, fazendo uso dessa relação na equação (3.33), obtemos [29, 85]

$$\phi_{RGGR}(\mathbf{r}) = \phi_N(\mathbf{r}) - c^2\bar{\nu}\ln\left(1 + \frac{\phi_N}{\phi_g}\right) \ . \tag{3.35}$$

Portanto o potencial gravitacional no regime de campo fraco em RGGR não é exatamente o potencial Newtoniano, mas é dado pela soma do mesmo com um termo logarítmico de origem quântica. Podemos agora aplicar este novo potencial a dinâmica do Sistema Solar e estudar os limites de RGGR em sistemas de menor massa.

3.3.2 Dinâmica do vetor LRL na gravidade RGGR

Durante algum tempo foi um mistério o desacordo entre a previsão newtoniana e os dados observacionais da precessão do periélio de Mercúrio. Do ponto de vista da gravitação newtoniana, um corpo orbitando um outro, senti uma força central que cai com a distância ao quadrado, e deve retornar ao mesmo ponto de partida após uma revolução. Logo, para que haja precessão da órbita é necessário a introdução de termos perturbativos devido a outros corpos. Isto levou alguns a conjecturar um novo planeta próximo da órbita de Mercúrio. Assim era esperado explicar a anomalia a partir dos efeitos gravitacionais desse hipotético planeta. Contudo, ele nunca foi observado.

Um dos triunfos da teoria da Relatividade Geral foi prever um acréscimo ao movimento angular dos planetas após eles completarem uma revolução completa em torno do Sol [31, 33, 39], dado por

$$\delta\phi = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1-\epsilon^2)} \ , \tag{3.36}$$

onde G é a constante gravitacional no Sistema Solar, M é a massa do Sol, a é o semieixo maior da órbita e ϵ é a ecentricidade. Esse resultado explicou a diferença entre o valor observado e a previsão newtoniana para a precessão do periélio de Mercúrio. Podemos dizer que esse foi o primeiro teste pelo qual a Relatividade Geral passou.

Até o momento os dados observacionais e a descrição da Relatividade Geral estão em acordo dentro do Sistema Solar. Assim nós esperamos que as teorias alternativas no limite de campo fraco deem resultados equivalentes àqueles da Relatividade Geral dentro do Sistema Solar. Desse modo os dados observacionais podem ser usados para colocar vínculos sobre essas teorias.

O potencial gravitacional RGGR introduz novos efeitos na dinâmica celeste, e assim, podemos aplicá-lo ao Sistema Solar para colocar vínculos sobre RGGR. Para esse fim, começamos considerando a força atuando sobre uma partícula pontual de massa m submetida ao potencial (3.35) do Sol,

$$\mathbf{F}_{RGGR} = \mathbf{F}_N + mc^2\bar{\nu}\,\nabla \ln\left(1+\frac{\phi_N}{\phi_g}\right) \ , \tag{3.37}$$

onde $\mathbf{F}_N$ é a força gravitacional newtoniano. Então obtemos

$$\mathbf{F}_{RGGR} = -\frac{G_g M_\odot m}{r^2}\hat{r} \ - \ \frac{m\bar{\nu}c^2\, r_0}{r(r+r_0)}\hat{r} \ . \tag{3.38}$$

Acima $M_\odot$ é a massa do Sol, $\hat{r}$ é o vetor unitário com origem no Sol e $r_0 = -G_g M_\odot/\phi_g$. No Apêndice D fizemos uma introdução à dinâmica do vetor LRL, que é um importante complemento para essa seção (uma discussão teórica mais detalhada e aplicações pode ser encontrado em [89, 90, 91]). Lá mostramos que a órbita de uma partícula submetida à força

$$\mathbf{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{r} + \mathbf{f}_{pert} \quad ; \quad |\frac{k}{r^2}| >> |\mathbf{f}_{pert}| \ , \tag{3.39}$$

precessa com a seguinte velocidade angular,

$$\mathbf{\Omega} = -\frac{\langle f_{pert}(r)\cos\varphi\rangle}{mk\epsilon}\mathbf{l} \ . \tag{3.40}$$

A média é tomada sobre um período de revolução. Usamos a notação $f_{pert}(r)$ para o módulo da força perturbativa $\mathbf{f}_{pert}$ e φ para o ângulo entre o vetor de posição da partícula e o eixo polar. Também usamos a notação m para a massa dos planetas, e $\mathbf{l}$ para o momento angular (3.39); enquanto ϵ é a excentricidade da órbita não perturbada e k é uma constante de proporcionalidade (no caso específico que estamos tratando $k = G_g M_\odot\, m$). Comparando (3.38) com (3.39) podemos identificar [85]

$$\mathbf{f}_{pert} = -\frac{m\bar{\nu}c^2\, r_0}{r(r+r_0)}\hat{r}\ . \tag{3.41}$$

Esse termo é o desvio da Lei Gravitacional de Newton oriundo de correções quânticas à gravitação. Assim, tal correção, irá acrescentar um efeito extra à precessão das órbitas. Substituindo (3.41) em (3.40), obtemos a seguinte expressão [29]

$$\mathbf{\Omega} = \frac{\bar{\nu}c^2 r_0}{k\epsilon}\left\langle\frac{\cos\varphi}{r(r+r_0)}\right\rangle \mathbf{l}\ \ . \tag{3.42}$$

Então temos que calcular o valor esperado acima para encontrarmos a velocidade de precessão devido a (3.41). Explicitamente, o valor esperado é dado pela equação

$$\left\langle\frac{\cos\varphi}{r(r+r_0)}\right\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{\cos\varphi(t)}{r(t)[r(t)+r_0]}dt\ , \tag{3.43}$$

onde τ e o período da órbita do problema não-perturbado. Lembrando que o momento angular de uma partícula movendo-se sobre um plano, em que o vetor unitário normal é $\hat{k}$, é dado por

$$\mathbf{l} = mr^2\dot{\varphi}\hat{k}\ , \tag{3.44}$$

podemos extrair a relação entre a taxa de variação temporal de φ com a distância ao centro do campo,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{l}{mr^2}\ . \tag{3.45}$$

Com essa relação fazemos a mudança de variável $t \to \varphi$ na integração, resultando em

$$\left\langle\frac{\cos\varphi}{r(r+r_0)}\right\rangle = \frac{m}{l\tau}\int_0^{2\pi} \frac{r(\varphi)\cos\varphi}{r_0 + r(\varphi)}\ d\varphi\ . \tag{3.46}$$

Na teoria de perturbação os valores médios são calculado a partir dos valores do problema não-perturbado. Em nosso caso específico as órbitas não-perturbadas são elipses

$$r(\varphi) = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos\varphi}\ , \tag{3.47}$$

onde a é o semi-eixo maior e ϵ é a excentricidade da elipse. Substituindo (3.47) em (3.46), obtemos

$$\left\langle\frac{\cos\varphi}{r(r+r_0)}\right\rangle = \frac{ma(1-\epsilon^2)}{l\tau[r_0 + a(1-\epsilon^2)]}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{1+R\cos\varphi}\ d\varphi\ . \tag{3.48}$$

Nós temos definido uma nova notação, $R = r_0\,\epsilon/[r_0 + a(1-\epsilon^2)]$. A integral acima pode ser resolvida fazendo a mudança de variável $\varphi \to 2\tan^{-1}(t) + \pi$, encontrando o seguinte resultado

$$\left\langle \frac{\cos\varphi}{r(r+r_0)} \right\rangle = \frac{2\pi m a(1-\epsilon^2)}{l\tau\epsilon\, r_0}\left[\frac{1}{\sqrt{1-R^2}} - 1\right] . \tag{3.49}$$

Finalmente, substituindo o resultado acima em (3.42), podemos escrever abaixo a velocidade de precessão devido a força gravitacional RGGR [85],

$$\mathbf{\Omega} = \frac{2\pi a\bar{\nu}c^2(1-\epsilon^2)}{G_g M_\odot \tau\epsilon^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{r_0\epsilon}{r_0+a(1-\epsilon^2)}\right)^2}} - 1\right]\hat{k} , \tag{3.50}$$

onde usamos $\mathbf{l} = l\hat{k}$. Essa expressão nos permite calcular a velocidade de precessão para a órbita de qualquer planeta submetido a força (3.38). Ela generaliza a expressão obtida em [29], ao levar em conta o efeito do potencial externo r_0. No limite em que o potencial externo vai à zero ($r_0 \to \infty$) a expressão acima coincide com aquela obtida em [29].

Recentemente os dados de efemérides planetárias foram analisados e compilados, resultando em dados mais precisos para a velocidade de precessão do periélio dos planetas [92, 93, 94]. Na Tabela 3.1 nós apresentamos esses dados.

Tabela 3.1: Correções estimadas, em miliarcosegundos por século, para a velocidade de precessão padrão newtoniano-einsteniana do periélio, determinada com as efemérides INPOP10a e EPM2011 [93, 94]. Os dados relevantes para a proposta desse trabalho são as incertezas na tabela.

Planeta	EPM2011	INPOP10a
Mercúrio	-2.0±3.0	0.4± 0.6
Vênus	2.6± 1.6	0.2 ± 1.5
Terra	0.19± 0.19	-0.20 ± 0.90
Marte	-0.020± 0.037	-0.040 ± 0.150
Júpiter	58.7± 28.3	-41.0 ± 42.0
Saturno	-0.32± 0.47	0.15± 0.65

A partir da equação (3.50), juntamente com os valores apresentados na Tabela 3.1 e Tabela 3.2, podemos estimar o limite superior de $\bar{\nu}$ para cada uma das órbitas planetárias. Os limites obtidos são apresentados na Tabela 3.3 levando em conta o efeito de potencial externo e sem considerá-lo.

Os nossos resultados mostram que o limite superior de $\bar{\nu}$ é 10^{-20} sem considerar o efeito do potencial gravitacional da Via Láctea dentro do Sistema Solar. Esse resultado é compatível com

Tabela 3.2: Parâmetros das órbitas planetárias. Onde τ é o período orbital, ϵ é a ecentricidade e a é o semieixo maior da órbita [95].

Planeta	τ(anos)	ε	a (10^{10} m)
Mercúrio	0.241	0.2056	5.791
Vênus	0.615	0.0067	10.82
Terra	1	0.0167	14.96
Marte	1.881	0.0935	22.792
Júpiter	11.862	0.0489	77.857
Saturno	29.457	0.0565	143.353

Tabela 3.3: Limite superior de $|\bar{\nu}|$, com e sem efeito de potencial externo (PE), onde $\phi_g \sim 10^{-6}$ [86, 87]. Os dados para Ω vem das incertezas na Tabela 3.1. Entre os dados de INPOP10a e EPM2011 foi selecionado aquele que apresenta a menor incerteza.

Planeta	$|\bar{\nu}|$ (com PE)	$|\bar{\nu}|$ (sem PE)
Mercúrio	$\lesssim 10^{-16}$	$\lesssim 10^{-19}$
Vênus	$\lesssim 10^{-15}$	$\lesssim 10^{-19}$
Terra	$\lesssim 10^{-16}$	$\lesssim 10^{-20}$
Marte	$\lesssim 10^{-16}$	$\lesssim 10^{-20}$
Júpiter	$\lesssim 10^{-12}$	$\lesssim 10^{-17}$
Saturno	$\lesssim 10^{-13}$	$\lesssim 10^{-19}$

aquele obtido em [30]. Entretanto mostramos que a dinâmica de um subsistema é dependente do potencial gravitacional do sistema, efeito não considerado em trabalhos anteriores. Conforme a Tabela 3.3, ao levarmos em conta o potencial da Via Láctea no Sistema Solar, o limite de $\bar{\nu}$ aumenta quatro ordens de grandeza, ou seja, $\bar{\nu} \leq 10^{-16}$. Lembrando que $\bar{\nu} \sim 10^{-7}$ para galáxias, e que a massa de galáxias típicas é da ordem de $10^{10} M_\odot$, o nosso resultado é consistente com uma dependência linear de $\bar{\nu}$ com a massa do sistema se considerarmos o efeito do potencial externo. De qualquer modo ele reforça a hipótese de que $\bar{\nu}$ cresce com a massa do sistema, conforme notado em [27, 28] ao analisar a dinâmica de RGGR para galáxias. É importante ressaltarmos aqui a importância da equação (3.50) para futuros trabalhos. Ela servirá para testarmos RGGR no Sistema Solar caso novos dados observacionais não estejam em acordo com aqueles obtidos através da Relatividade Geral para a precessão do periélio dos planetas.

3.4 Análise PPN

Nesta seção vamos aplicar o formalismo PPN para estudar o comportamento de soluções em RGGR no limite de campo fraco. A principal diferença entre esta seção e a anterior, onde também fizemos um estudo do regime de campo fraco, é que aqui iremos além da expansão newtoniana, exploraremos o limite pós-newtoniano. Nosso principal objetivo, portanto, é obter os parâmetros pós-newtonianos para RGGR e consequentemente utilizá-los para estimar o limite superior de $\bar{\nu}$ e compará-lo com aquele obtido através da dinâmica do vetor LRL.

3.4.1 Parâmetros Pós-Newtonianos

Vamos fazer uma breve revisão do formalismo parametrizado pós-newtoniano (PPN). Essa abordagem, como o nome sugere, trata das expansões métricas além da aproximação newtoniana, ou seja, expansões pós-newtonianas. Podemos encontrar um série de revisões do formalismo PPN, entre eles destacamos [96, 97, 98]; e textos clássicos do assunto [90, 91].

Como iremos trabalhar nas expansões perturbativas da métrica, começamos definindo a métrica de fundo. O formalismo PPN é tomado no fundo de Minkowski, então a métrica perturbada é dada por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \ , \tag{3.51}$$

onde $|h_{\mu\nu}| << 1$. Vamos aqui assumir assinatura $(-1, 1, 1, 1)$ para a métrica de fundo. O limite newtoniano requer o conhecimento de g_{00} até ordem $O(2)$. Porém se nós queremos analisar o limite pós-newtoniano, precisamos expandir a métrica até ordem $O(4)$, como segue

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + h_{00}^{(2)} + h_{00}^{(4)} + O(6) \ , \\ g_{ij} &= \delta_{ij} + h_{ij}^{(2)} + O(4) \ , \\ g_{0i} &= h_{0i}^{(3)} + O(5) \ , \end{aligned} \tag{3.52}$$

onde os índices latinos indicam componentes espaciais. O símbolo $h_{\mu\nu}^{(N)}$ indica o termo em $g_{\mu\nu}$ de ordem v^N. Vamos reservar a notação v para os valores típicos das velocidades das partículas, onde "típico"significa não-relativística. Por motivo de generalidade vamos considerar um sistema que seja descrito pelo tensor momento-energia de um fluido perfeito [31, 32, 33], ou seja,

$$T^{\mu\nu} = (\rho + \rho\Pi + p)u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} \ , \tag{3.53}$$

onde ρ representa a densidade da massa de repouso, p é a pressão do fluido, Π é a taxa da densidade de energia pela densidade da massa de repouso e u^μ é o campo de velocidades do fluido. Vamos considerar um sistema de unidades em que $c = 1$. No limite de campo fraco a energia cinética de partículas ligadas é da mesma ordem de grandeza que a energia potencial [31], então nós temos

$$v^2 \sim \frac{GM}{r} \ . \tag{3.54}$$

Assim as seguintes relações se mantém [31],

$$v^2 \sim \phi \sim \frac{p}{\rho} \sim \Pi \sim O(2) \ , \tag{3.55}$$

onde ϕ é o potencial newtoniano. Logo podemos escrever abaixo as componentes do tensor de momento-energia até $O(4)$,

$$\begin{aligned} T^{00} &= \rho(1 + \Pi + v^2 + 2\phi) + O(6) \ , \\ T^{ij} &= \rho v^i v^j + p\delta^{ij} + O(6) \ , \\ T^{0i} &= \rho v^i + O(5) \ . \end{aligned} \tag{3.56}$$

Então o traço de $T_{\mu\nu}$, ou seja, $T = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$ até ordem $O(4)$ é dado por

$$T = -\rho + \rho\,(h_{00}^{(2)} - 2\phi - \Pi) + 3p + O(6) \ . \tag{3.57}$$

A abordagem pós-newtoniano tem sua aplicabilidade facilitada quando usamos um sistema de coordenadas específico, chamado de gauge padrão PPN. Nesse sistema de coordenadas as componentes do tensor de Ricci até $O(4)$ são dadas por [31, 96]

$$\begin{aligned} R_{00} = & - \frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}^{(2)} - \frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}^{(4)} - \frac{1}{2}(\nabla h_{00}^{2})^2 \\ & + \frac{1}{2}h_{ij}^{(2)}\frac{\partial^2 h_{00}^{(2)}}{\partial x^i \partial x^j} + O(6) \ . \end{aligned} \tag{3.58}$$

$$R_{ij} = - \frac{1}{2}\nabla^2 h_{ij}^{(2)} + O(4) \ . \tag{3.59}$$

$$R_{0i} = - \frac{1}{2}\nabla^2 h_{0i}^{(3)} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 h_{00}^{(2)}}{\partial t \partial x^i} + O(5) \ . \tag{3.60}$$

Esquematicamente a abordagem PPN é da seguinte forma: a partir de (3.52) nós calculamos o tensor de Ricci em um sistema de coordenadas específico, no sistema de coordenadas padrão PPN é obtido as equações (3.58), (3.59) e (3.60); na sequência substituímos o tensor de Ricci e o tensor momento-energia (3.56) nas equações de campo; terceiro passo é resolver as equações de campo, ordem por ordem, para as quantidades $h_{00}^{(2)}$, $h_{00}^{(4)}$, $h_{ij}^{(2)}$ e $h_{0i}^{(3)}$; o último passo é comparar a solução com a seguinte expansão métrica [98, 96],

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + 2\phi_N - 2\beta\,\phi_N^2 - 2\xi\phi_w - (\zeta_1 - 2\xi)A + (2\gamma + 2 + \alpha_3 + \zeta_1 - 2\xi)\phi_1 \\ &+ 2(3\gamma - 2\beta + 1 + \zeta_2 + \xi)\phi_2 + 2(1+\zeta_3)\phi_3 + 2(3\gamma + 3\zeta_4 - 2\xi)\phi_4 \ , \end{aligned} \tag{3.61}$$

$$g_{0i} = -\frac{1}{2}(4\gamma + 3 + \alpha_1 - \alpha_2 + \zeta_1 - 2\xi)V_i - \frac{1}{2}(1 + \alpha_2 - \zeta_1 + 2\xi)W_i \ , \tag{3.62}$$

$$g_{ij} = (1 + 2\gamma\,\phi_N)\delta_{ij} \ . \tag{3.63}$$

As 10 constantes (β, γ, ξ, ζ_1, ζ_2, ζ_3, ζ_4, α_1, α_2, α_3) que aparecem na expansão métrica acima são os denominados Parâmetros Pós-Newtonianos ou parâmetros PPN. Enquanto as funções (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4, ϕ_w, A, V_i, W_i) são os denominadas potenciais métricos.

O significado físico dos parâmetros PPN é como segue: γ mede a curvatura do espaço-tempo por unidade de massa de repouso, portanto, pode ser determinado a partir da deflexão da luz ao passar por um corpo massivo. Já β é uma medida da precessão das órbitas dos planetas [31]. O parâmetro ξ é diferente de zero em teorias que predizem efeitos de localização privilegiada [98, 96].

Os parâmetros α_3, ζ_1, ζ_2, ζ_3 e ζ_4 dizem quando uma dada teoria da gravidade viola a conservação da energia, momento linear e momento angular total do sistema; se todos são nulos então essas grandezas se conservam, entretanto se um é diferente de zero há violação de pelo menos uma das leis de conservação. O significado de α_1, α_2, α_3 está ligado ao fato da teoria possuir sistema de referência privilegiado [98, 96, 97]. Se uma teoria não possui invariância de Lorentz, então ao menos um desses parâmetros deve ser diferente de zero. Novamente, (3.17) não é um verdadeiro escalar, ou seja, invariante sob transformações de Lorentz, e assim ele viola a invariância de Lorentz para as equações de campo. Logo esperamos que um dos parâmetros α_1, α_2, α_3 seja diferente de zero em RGGR.

As definições dos potenciais métricos segue a nomenclatura de [98, 96] e são dados por

$$\nabla^2\phi_1 = -4\pi\rho\, v^2 \quad , \quad \nabla^2\phi_2 = -4\pi\rho\,\phi_N \; , \tag{3.64}$$

$$\nabla^2\phi_3 = -4\pi\rho\,\Pi \quad , \quad \nabla^2\phi_4 = -4\pi p \; , \tag{3.65}$$

$$\nabla^2 V_i = -4\pi\rho\, v_i \quad , \tag{3.66}$$

$$W_i = \int d^3\mathbf{x}'\, \frac{\rho(\mathbf{x}',t)\mathbf{v}'(\mathbf{x}-\mathbf{x}')(x-x')_i}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} \; . \tag{3.67}$$

$$A = \int d^3\mathbf{x}'\, \frac{\rho'[\mathbf{v}'.(\mathbf{x}-\mathbf{x}')]^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} \; , \tag{3.68}$$

$$\phi_w = \int d^3\mathbf{x}' d^3\mathbf{x}''\, \frac{\rho'\rho''(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\left(\frac{\mathbf{x}'-\mathbf{x}''}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}''|} - \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}''}{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|}\right) \; . \tag{3.69}$$

3.4.2 Expansão pós-newtoniana para RGGR

As equações de campo já foram obtidas anteriormente nesse capítulo (3.10). Podemos agora reescrevê-las na aproximação em que Λ é aproximadamente zero,

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G\big(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\big) + G\,\nabla_\mu\nabla_\nu G^{-1} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}G\,\Box G^{-1} \; . \tag{3.70}$$

Nessa subseção vamos aplicar o formalismo PPN ao modelo RGGR, ou seja, ao conjunto de equações acima. Como foi discutido e demonstrado nas seções anteriores é natural considerar que a constante gravitacional dentro do Sistema Solar varie muito lentamente; também a desigualdade $|2\nu\ln\mu| << 1$ foi demonstrada ser válida. Desse modo nós podemos expandir e reescrevê-la da seguinte forma,

$$G(\mu) \approx 1 - 2\bar{\nu}\ln\mu + O(|2\nu\ln\mu|^2) \; , \tag{3.71}$$

onde $\mu = 1 + \frac{\phi_N}{\phi_g}$. É de costume na abordagem PPN usar unidades em que tanto a velocidade da luz quanto a constante gravitacional são respectivamente $c = 1$ and $G_g = 1$, e assim também iremos adotar essas unidades aqui.

Para pôr em prática a expansão pós-newtoniano temos que substituir a quantidade (3.71) nas equações de campo (3.70), obtendo assim um conjunto de equações aproximadas,

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} \approx\; & 8\pi(1-2\bar{\nu}\ln\mu)(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}T) \\ +\; & g_{\mu\nu}(1-2\bar{\nu}\ln\mu)\, g^{\alpha\beta}[\partial_\alpha\partial_\beta(\bar{\nu}\ln\mu) - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\partial_\lambda(\bar{\nu}\ln\mu)] \\ +\; & 2(1-2\bar{\nu}\ln\mu)\,[\partial_\mu\partial_\nu(\bar{\nu}\ln\mu) - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\partial_\lambda(\bar{\nu}\ln\mu)] \; , \end{aligned} \tag{3.72}$$

onde $g_{\mu\nu}$, $T^{\mu\nu}$ e T são dados pelas equações (3.52), (3.56) e (3.57), respectivamente. Para as expansões fazerem sentido nós devemos atribuir uma ordem apropriada para $2\bar{\nu}\ln\mu$, a fim de compararmos cada termo da expansão.

Agora podemos analisar o formalismo PPN para RGGR. Mostraremos que somente em uma certa aproximação RGGR possui expansão PPN, e assim utilizaremos os parâmetros PPN, nesse caso particular, para estimar o limite superior de $\bar{\nu}$ dentro do Sistema Solar e compararmos com os resultados obtidos na seção anterior.

Caso 1: $|2\bar{\nu}\ln\mu| \sim v^2$

Conforme dissemos, a primeira vista parece natural considerar $|2\bar{\nu}\ln\mu| \sim O(2)$, isso nos auxilia na comparação dos termos perturbativos, ordem por ordem. Entretanto se recorremos a seção anterior, em que foi deduzido o potencial gravitacional RGGR, essa escolha não seria aceitável. Isso se deve ao fato de que $2\bar{\nu}\ln\mu$ não pode ser da mesmo ordem que o potencial newtoniano, pois isso traria efeitos dinâmicos perceptíveis, mesmo a olho nu, bastaria um simples olhar para o movimento da Lua.

A fim de confirmamos essa nossa previsão vamos escrever as componentes-00 das equações de campo (3.72) até ordem O(2). Facilmente obtemos,

$$-\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}^{(2)} = 4\pi\rho - \nabla^2(\nu\ln\mu) \ . \tag{3.73}$$

Cuja solução é

$$h_{00}^{(2)} = 2\phi_N + 2\nu\ln\mu \ , \tag{3.74}$$

onde ϕ_N é o potencial gravitacional newtoniano, ou seja,

$$\phi_N(\mathbf{x},t) = \int d^3\mathbf{x}' \, \frac{\rho(\mathbf{x}',t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \ . \tag{3.75}$$

Como $h_{00}^{(2)} = 2\phi$, obtemos

$$\phi = \phi_N + \nu\ln\mu \ , \tag{3.76}$$

ou seja, conforme havíamos previsto é exatamente a solução encontrada via transformação conforme. Entretanto o novo termo acima é da mesma ordem de grandeza que o potencial newtoniano. Isso teria um efeito catastrófico na dinâmica do Sistema Solar, assim a hipótese que $|2\bar{\nu}\ln\mu| \sim O(2)$ deve ser descartada.

Caso 2: $|2\nu \ln \mu| \sim v^3$

Vamos agora ir uma ordem além e considerar que $|2\nu \ln \mu|$ seja de ordem O(3). As equações de campo (3.72) até a ordem O(3), são dadas por

$$
\begin{aligned}
R_{00} &= 4\pi\rho\left(1+\Pi+\frac{3p}{\rho}+2v^2-2\phi_N\right)+O(6)\ , &(3.77)\\
R_{ij} &= 4\pi\rho\,\delta_{ij}+O(4)\ , &(3.78)\\
R_{oi} &= -8\pi\rho v_i+O(5)\ . &(3.79)
\end{aligned}
$$

Como nós podemos observar essas equações, até a ordem considerada, são exatamente as mesmas que aquelas obtidas para a Relatividade Geral. Isso é notado observando que nenhum termo oriundo de RGGR modifica as equações de campo, e assim para que algum efeito de RGGR apareça é necessário ir à ordens além dessa considerada aqui. Portanto, como a nossa proposta aqui é analisar os parâmetros PPN, é suficiente para nós a expansão acima. Então, imediatamente, obtemos os parâmetros PPN nessa ordem,

$$\gamma = 1\ \ ,\ \ \beta = 1\ . \tag{3.80}$$

Que são exatamente aqueles da Relatividade Geral.

Caso 3: $|2\nu \ln \mu| \sim v^4$

A próxima ordem que devemos considerar é $O(4)$, ou seja, $|2\nu \ln \mu| \sim O(4)$. Vimos que o $Caso\,1$ e $Caso\,2$ não introduziram aspectos novos em nossa abordagem, sendo que no primeiro caso a situação seria catastrófica e no segundo nada novo. Desse modo esperamos que a presente situação traga algo novo, de modo que possamos estudar formalmente os parâmetros PPN. As equações de campo agora são dadas por

$$
\begin{aligned}
R_{00} &= 4\pi\rho\left(1+\Pi+\frac{3p}{\rho}+2v^2-2\phi\right) &(3.81)\\
&- \nabla^2(\bar{\nu}\ln\mu)+O(6)\ , &\\
R_{ij} &= 4\pi\rho\,\delta_{ij}+O(4)\ , &(3.82)\\
R_{oi} &= -8\pi\rho v_i+O(5)\ . &(3.83)
\end{aligned}
$$

Essas equações, juntamente com (3.58), (3.59) e (3.60), dão a descrição completa do formalismo PPN. Assim a componente-00 das equações de campo até O(2) fica

$$\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}^{(2)} = -4\pi\rho\ . \tag{3.84}$$

Essa equação define o limite newtoniano da teoria. Logo, como esperado, obtemos

$$h_{00}^{(2)} = 2\phi_N \ , \tag{3.85}$$

onde ϕ_N é o potencial gravitacional newtoniano. Para as componentes-ij até ordem O(2), encontramos o seguinte conjunto de equações,

$$\frac{1}{2}\nabla^2 h_{ij}^{(2)} = -4\pi\rho\,\delta_{ij} \ , \tag{3.86}$$

onde δ_{ij} é o símbolo de Kronecker. A solução é,

$$h_{ij}^{(2)} = 2\phi_N \delta_{ij} \ . \tag{3.87}$$

Esse termo é para ser visto como uma correção a métrica de fundo espacial. Compare com a equação (E.9), obtida a partir da ação relativística, onde foi encontrado que o espaço tridimensional era plano.

Substituindo (3.85) e (3.87) em (3.58), nós podemos reescrever a equação (3.58) do seguinte modo

$$R_{00}^{(4)} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}^{(4)} - \nabla^2\phi_N^2 + 4\phi_N\nabla^2\phi_N \ . \tag{3.88}$$

A partir de (3.81) e (3.88) encontramos a equação para h_{00} de ordem $O(4)$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}^{(4)} &= \nabla^2(\bar{\nu}\ln\mu - \phi_N^2) + 4\phi_N\nabla^2\phi_N \\ &- 4\pi\rho\left(\Pi + \frac{3p}{\rho} + 2v^2 - 2\phi_N\right) \ . \end{aligned} \tag{3.89}$$

Para resolvermos a equação acima precisamos da relação que conecta as quantidades ρ, v, Π e p aos potenciais PPN. Isso é dado pelas relações [31, 98, 96],

$$\begin{aligned} \nabla^2\phi_1 &= -4\pi\rho\, v^2 \quad , \quad \nabla^2\phi_2 = -4\pi\rho\,\phi_N \ , \\ \nabla^2\phi_3 &= -4\pi\rho\,\Pi \quad , \quad \nabla^2\phi_4 = -4\pi p \ , \end{aligned} \tag{3.90}$$

onde ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 e ϕ_4 são os potenciais PPN. Substituindo essas relações na equação (3.89) é fácil encontrar a solução,

$$h_{00}^{(4)} = 2\bar{\nu}\ln\mu - 2\phi_N^2 + 4\phi_1 + 4\phi_2 + 2\phi_3 + 6\phi_4 \ . \tag{3.91}$$

Resta agora determinar a solução da componente métrica g_{0i}. De (3.60) e (3.83) nós encontramos a seguinte equação

$$\frac{1}{2}\nabla^2 h_{0i}^{(3)} = 8\pi\rho v_i - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi_N}{\partial t\partial x^i} \ . \tag{3.92}$$

Usando a relação que define o super potencial χ [98, 96]

$$\nabla^2\chi = -2\phi_N \quad , \quad \frac{\partial^2\chi}{\partial t \partial x^i} = V_i - W_i \ , \tag{3.93}$$

nós podemos facilmente obter a solução de h_{0i} até $O(3)$

$$h_{0i}^{(3)} = -\frac{7}{2}V_i - \frac{1}{2}W_i \ . \tag{3.94}$$

Logo a solução pós-newtoniana para RGGR é dada por

$$g_{00} \approx -1 + 2\phi_N + 2\bar{\nu}\ln\mu - 2\phi_N^2 + 4\phi_1 + 4\phi_2 + 2\phi_3 + 6\phi_4 \ , \tag{3.95}$$

$$g_{ij} \approx (1 + 2\phi_N)\,\delta_{ij} \ , \tag{3.96}$$

$$g_{0i} \approx -\frac{7}{2}V_i - \frac{1}{2}W_i \ . \tag{3.97}$$

3.4.3 PPN para RGGR

Infelizmente a equação (3.95) nos mostra que no caso geral RGGR não possui expansão PPN, ou seja, os parâmetros pós-newtonianos não são bem definidos. Isso pode ser visto ao compararmos a equação (3.61) com (3.95), notando que o termo logarítmico ($\ln\mu$) que aparece em (3.95) não nos permite definir os parâmetros PPN. Porém no caso em que estamos trabalhando, a constante gravitacional efetiva no Sistema Solar é dada por (3.17), e assim a escala de renormalização efetiva é

$$\mu \approx 1 + \frac{\phi_N}{\phi_g} \ . \tag{3.98}$$

Como ϕ_N/ϕ_g é no máximo 10^{-2} no Sistema Solar, a expansão do termo logarítmico em potências de ϕ_N/ϕ_g é legítima, ou seja,

$$\ln\mu = \ln\left(1 + \frac{\phi_N}{\phi_g}\right) \approx \frac{\phi_N}{\phi_g} - \frac{1}{2}\frac{\phi_N^2}{\phi_g^2} \ . \tag{3.99}$$

Substituindo a equação acima em (3.95), nós obtemos a solução aproximada de RGGR no formalismo PPN,

$$g_{00} \approx -1 + 2\Big(1 + \frac{\bar{\nu}}{\phi_g}\Big)\phi_N - 2\left(1 + \frac{\bar{\nu}}{2\phi_g^2}\right)\phi_N^2 + 4\phi_1 + 4\phi_2 + 2\phi_3 + 6\phi_4 \ , \tag{3.100}$$

$$g_{ij} \approx (1 + 2\phi_N)\,\delta_{ij} \ , \tag{3.101}$$

$$g_{0i} \approx -\frac{7}{2}V_i - \frac{1}{2}W_i \ . \tag{3.102}$$

Agora o conjunto de solução pode ser analisado do ponto de vista do formalismo PPN. Comparando as equações (3.100) e (3.61) vemos que há necessidade de normalizar o coeficiente que está multiplicando o potencial newtoniano, ou seja,

$$\Phi_N = \Big(1 + \frac{\bar{\nu}}{\phi_g}\Big)\phi_N \ . \tag{3.103}$$

Esse processo é equivalente a normalizar a massa da fonte do campo. Consequentemente temos que fazer o mesmo processo para os potenciais métricos, já que eles são proporcionais à massa da fonte. Lembrando que os potenciais $\phi_i = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ são de ordem O(4), isso quer dizer que $\phi_i \sim M^2$, logo temos

$$\phi_i = \Phi_i\Big(1 + \frac{\bar{\nu}}{\phi_g}\Big)^{-2} \approx \Phi_i\Big(1 - \frac{2\bar{\nu}}{\phi_g}\Big) \ . \tag{3.104}$$

Já os potenciais V_i e W_i são de ordem O(3), ou seja, $(V_i, W_i) \sim M^{3/2}$. Assim temos que

$$V_i = \bar{V}_i\Big(1 + \frac{\bar{\nu}}{\phi_g}\Big)^{-3/2} \approx \bar{V}_i\Big(1 - \frac{3\bar{\nu}}{2\phi_g}\Big) \ , \tag{3.105}$$

onde a mesma relação se mantém para W_i. Substituindo (3.103), (3.104) e (3.105) nas equações (3.100), (3.101) e (3.102) obtemos a solução pós-newtoniana na forma padrão do formalismo PPN

$$\begin{aligned} g_{00} &\approx -1 + 2\Phi_N - 2\left(1 + \frac{\bar{\nu}}{2\phi_g^2}\right)\Phi_N^2 + 4\Big(1 - \frac{2\bar{\nu}}{\phi_g}\Big)\Phi_1 + 4\Big(1 - \frac{2\bar{\nu}}{\phi_g}\Big)\Phi_2 \\ &+ 2\Big(1 - \frac{2\bar{\nu}}{\phi_g}\Big)\Phi_3 + 6\Big(1 - \frac{2\bar{\nu}}{\phi_g}\Big)\Phi_4 \ , \end{aligned} \tag{3.106}$$

$$g_{ij} \approx \left[1 + 2\Big(1 - \frac{\bar{\nu}}{\phi_g}\Big)\Phi_N\right]\delta_{ij} \ , \tag{3.107}$$

$$g_{0i} \approx \Big(-\frac{7}{2} + \frac{21\bar{\nu}}{4\phi_g}\Big)\bar{V}_i + \Big(-\frac{1}{2} + \frac{3\bar{\nu}}{4\phi_g}\Big)\bar{W}_i \ . \tag{3.108}$$

Essa é a forma final que nos permite encontrar os parâmetros pós-newtonianos. Agora precisamos apenas comparar as equações acima com aquelas dadas em (3.61), (3.62) e (3.63). Fazendo isso obtemos

$$\gamma = 1 - \frac{\bar{\nu}}{\phi_g} \quad , \quad \beta = 1 + \frac{\bar{\nu}}{2\phi_g^2} \quad , \quad \zeta_3 = -\frac{2\bar{\nu}}{\phi_g}. \tag{3.109}$$

E para os demais parâmetros encontraremos o seguinte sistema de equações,

$$\alpha_3 + \zeta_1 - 2\xi = -\frac{6\bar{\nu}}{\phi_g} \ , \tag{3.110}$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \zeta_1 - 2\xi = -\frac{13\bar{\nu}}{2\phi_g} \ , \tag{3.111}$$

$$\alpha_2 - \zeta_1 + 2\xi = -\frac{3\bar{\nu}}{2\phi_g} \ , \tag{3.112}$$

$$\zeta_2 + \xi = \frac{\bar{\nu}}{\phi_g^2} - \frac{\bar{\nu}}{\phi_g} \approx \frac{\bar{\nu}}{\phi_g^2} \ , \tag{3.113}$$

$$3\zeta_4 - 2\xi = -\frac{3\bar{\nu}}{\phi_g} \ . \tag{3.114}$$

A partir das equações (3.111) e (3.112), facilmente encontramos

$$\alpha_1 = -\frac{8\bar{\nu}}{\phi_g} \ . \tag{3.115}$$

Notamos que a solução (3.106) não contém os potenciais métricos ϕ_w e A, logo seus coeficientes devem ser zero. Isso implica que $\xi = 0$ e $\zeta_1 = 0$, substituindo esses valores no sistema de equações acima podemos obter a solução para os demais parâmetros PPN. Então os parâmetros pós-newtonianos diferentes de zero para a gravidade RGGR são

$$\gamma = 1 - \frac{\bar{\nu}}{\phi_g} \quad , \quad \beta = 1 + \frac{\bar{\nu}}{2\phi_g^2} \quad , \quad \alpha_1 = -\frac{8\bar{\nu}}{\phi_g} \quad , \quad \alpha_2 = -\frac{3\bar{\nu}}{2\phi_g} \tag{3.116}$$

$$\alpha_3 = -\frac{6\bar{\nu}}{\phi_g} \quad , \quad \zeta_2 = \frac{\bar{\nu}}{\phi_g^2} \quad , \quad \zeta_3 = -\frac{2\bar{\nu}}{\phi_g} \quad , \quad \zeta_4 = -\frac{\bar{\nu}}{\phi_g} \; . \tag{3.117}$$

Podemos agora fazer um discussão dos resultados acima. Primeiramente, devemos nos atentar que em RGGR há violação de alguma lei de conservação até a ordem considerada. Esse fato é uma consequência dos parâmetros (α_3, ζ_2, ζ_3, ζ_4,) serem diferentes de zero. Isso era esperado já que a ação gravitacional RGGR (3.5), com a constante gravitacional dada por (3.17), não é covariante.

Uma outra peculiaridade de RGGR é a dependência com um sistema de referência privilegiado, note que os parâmetros α_1, α_2 e α_3 são diferentes de zero. Isso deriva da não covariância da teoria (3.17) e da particularidade de μ depender do potencial médio da galáxia na posição do Sistema Solar. Por exemplo, se o Sistema Solar estivesse mais próximo do centro da Via Láctea, então ϕ_g seria diferente, logo isso traria efeitos dinâmicos mensuráveis para o Sistema Solar. Deve-se aqui ressaltar que esses resultados são uma consequência apenas da não covariância da teoria. Contudo, quando fizermos uma escolha da escala de renormalização covariante, como aquela sugerida por [77], nós esperamos restaurar os princípios de conservação.

Retornemos agora a questão do limite superior de $\bar{\nu}$ dentro do Sistema Solar. Observações e medidas da deflexão da luz pelo Sol e desvio do periélio dos planetas colocam vínculos sobre os valores de γ e β. De acordo com [98], os dados mais precisos disponíveis atualmente geram um vínculo sobre γ da ordem de $|\gamma - 1| \leq 10^{-5}$. Já que $\phi_g \sim 10^{-6}$, nós obtemos do valor de γ em (3.116) que $\bar{\nu} \leq 10^{-11}$. Também de [98] encontramos que $|\beta - 1| \leq 10^{-4}$, então a partir de (3.116), temos que

$$\bar{\nu} \leq 10^{-16} \; . \tag{3.118}$$

Esse resultado confirma o resultado obtido na seção anterior através da dinâmica do vetor de Laplace-Runge-Lenz. Enfatizamos que foi de fundamental importância o efeito do potencial externo a fim de aplicarmos o formalismo PPN em sua forma padrão. Devemos ressaltar que o formalismo desenvolvido aqui nos permitiu fazer uma análise mais completa da dinâmica de RGGR no Sistema Solar através do parâmetros pós-newtonianos.

3.5 Anomalia das Pioneers

A presente seção tem como objetivo descrever a contribuição dinâmica do potencial gravitacional RGGR para o famoso problema da anomalia das Pioneers. Essa anomalia é uma aceleração extra em direção ao Sol das espaçonaves Pioneers 10 e 11, não explicada pela Relatividade Geral. Esse efeito foi revelado pelos dados de monitoramento de rádio das pioneers. Em distâncias entre 20 UA e 70 UA (onde UA $\equiv$ Unidade astronômica) do Sol, as espaçonaves pioneers apresentam uma aceleração anômala aproximadamente constante [99, 100],

$$a_P = (8.74 \pm 1.33) \times 10^{-10}\, m/s^2 \ . \tag{3.119}$$

Esse é um problema que tem sido muito estudado pela comunidade científica envolvendo fenômenos dentro do Sistema Solar. Algumas tentativas foram feitas para explicar esse fenômeno a partir de teorias de gravitação modificada [101, 102, 103]. Recentemente foi anunciado que o mistério havia sido solucionado, apenas com física tradicional [104, 105, 106]. A explicação dada foi que os geradores termonucleares das espaçonaves emitem radiação de forma anisotrópica, resultando assim em forças de recuo sobre elas. Modelando o problema eles explicaram o fenômeno dentro dos erros estatísticos.

Todavia, explicações utilizando teorias de gravitação modificada não podem ser descartadas se suas contribuições estão dentro dos limites estatísticos. Baseado no limite superior de $\bar{\nu}$ obtido na seção anterior para o Sistema Solar, é possível estimarmos, a partir do modelo RGGR, a ordem de magnitude da aceleração das pioneers.

Como a massa do Sol representa 99% da massa do Sistema Solar, pode-se negligenciar os efeitos gravitacionais sobre as pioneers devido à outros corpos celestes. Lembramos que a aceleração de uma partícula submetida à um potencial ϕ é

$$\mathbf{g} = -\nabla\phi \ . \tag{3.120}$$

Então de (3.35), a aceleração gravitacional sobre as pioneers será

$$\mathbf{a}_{RGGR} = -\frac{G_g M_\odot}{r^2}\hat{r} \ - \ \frac{\bar{\nu} c^2\, r_0}{r(r+r_0)}\hat{r} \ , \tag{3.121}$$

onde o primeiro termo representa a bem conhecida aceleração gravitacional newtoniana, enquanto o segundo representa a contribuição de RGGR à aceleração. Notamos que nesse limite de campo fraco a contribuição de RGGR é mais relevante em grandes distâncias do que a aceleração newtoniana. Baseado sobre os valores da Tabela 3.3 nós podemos estimar a aceleração anômala oriundo de RGGR sobre as Pioneers 10 e 11, levando em conta tanto o efeito do potencial externo quanto sem ele. Como o efeito é observado entre as distâncias de 20 UA e 70 UA, vamos calculá-la em uma distância intermediária entre as duas, ou seja, na distância de 45 UA. Logo, a partir de (3.121) e Tabela 3.3 obtemos os resultados descritos na Tabela 3.4.

Tabela 3.4: Valores estimados para a aceleração anômala, em metros por segundo ao quadrado, das pioneers usando os limites superiores de $\bar{\nu}$ exibidos na Tabela 3.3.

$\bar{\nu}_P$	$\|\mathbf{g}_{pert}\|$ (com PE)	$\|\mathbf{g}_{pert}\|$ (sem PE)
Mercúrio	$\leq 10^{-16}$	$\leq 10^{-15}$
Vênus	$\leq 10^{-15}$	$\leq 10^{-15}$
Terra	$\leq 10^{-16}$	$\leq 10^{-16}$
Marte	$\leq 10^{-16}$	$\leq 10^{-16}$
Júpiter	$\leq 10^{-12}$	$\leq 10^{-13}$
Saturno	$\leq 10^{-13}$	$\leq 10^{-15}$

Primeiramente notamos que o efeito de potencial externo praticamente não altera a aceleração RGGR quando ele é negligenciado. Isso é facilmente explicado se observarmos que nos cálculos acima foi utilizado o limite superior de $\bar{\nu}$ e que ele muda para esses dois casos.

O resultado da Tabela 3.4 mostra que o efeito de RGGR é muito pequeno para dar conta da aceleração anômala das pioneers. Desse modo nós descartamos a possibilidade da anomalia pioneers ser oriunda da dinâmica RGGR.

Considerações finais

Vamos agora resumidamente descrever os resultados e as perspectivas futuras dos trabalhos apresentados nesta tese.

No capítulo 2 estudamos o problema de estabilidade gravitacional na Gravidade de Quarta Ordem. Fomos motivados pelo fato de que há na literatura resultados que divergem quanto à estabilidade do buraco negro de Schwarzschild. Em [24] foi concluído que ele é estável perante perturbações lineares, enquanto [25] obteve o resultado oposto. A diferença entre [24] e [25] não está nas equações dinâmicas para as perturbações, mas nas soluções encontradas. Desse modo foi proposto nesse capítulo uma nova abordagem, o método de campos auxiliares, o qual trouxe significativa simplicidade ao problema.

Usando a representação de campos auxiliares foi possível apresentar a Gravidade de Quarta Ordem na forma de uma teoria de segunda ordem. Aplicando o método perturbativo à essa nova representação da teoria, encontramos a dinâmica das perturbações gravitacionais, ou seja, as equações que determinam o problema de estabilidade. Argumentamos que no caso geral ($\forall\ \alpha$ e β; $\beta \neq -4\alpha$) nenhuma conclusão definitiva é possível, mesmo conhecendo a solução de (2.46) a respeito da estabilidade ou não dos buracos negros de Schwarzschild e Kerr. Isso é devido ao fato de que a estabilidade métrica é definida pela dinâmica de $h_{\mu\nu}$, ou seja, a equação (2.44), que depende das perturbações do campo auxiliar. Esse problema será abordado por nós em mais detalhes em trabalhos futuros.

Então nos restringimos ao caso particular $\beta = -3\alpha$, conhecida como Gravidade de Einstein-Weyl. Mostramos que é possível desacoplar as perturbações métricas das do campo auxiliar, e que ambos tipos de perturbação satisfazem a mesma equação para o campo de spin-2 massivo em espaço-tempo curvo. Esse tipo de equação é bem conhecida, e também sabido que apresenta instabilidade do tipo Gregory-Laflamme (s-mode) para o buraco negro de Schwarzschild no intervalo $0 < 1/\sqrt{\beta} < O(1)/r_g$. Com isso foi possível concluirmos sobre a instabilidade do buraco negro de Schwarzschild. Também discutimos recentes resultados que indicam para a instabilidade do buraco negro de Kerr no regime de baixa rotação $J << 1$. Logo é possível que ele também seja instável, o que implicaria que tais soluções de vácuo da Relatividade Geral também são instáveis na Gravidade de Quarta Ordem. Devido à sua importância nós pretendemos estudar em mais detalhes o problema de estabilidade do buraco negro de Kerr em trabalhos futuros.

No último capítulo da tese fizemos um estudo da dinâmica de RGGR no Sistema Solar. Nos trabalhos [27, 28, 26] foi mostrado que é possível fitar os dados observacionais das curvas de rotação de algumas galáxias espirais a partir do modelo RGGR sem a introdução do halo de matéria escura. Eles mostraram que para isso é necessário que o parâmetro adimensional $\bar{\nu}$ da teoria seja da ordem de 10^{-7} e cresça linearmente com a massa bariônica das galáxias.

Entendemos que para melhor compreender os princípios de RGGR é necessário conhecermos a dependência de $\bar{\nu}$ com sistemas de menor massa. Assim aplicamos o método perturbativo para estudar seu limite newtoniano e pós-newtoniano. Em [29, 30] foi encontrado que o limite superior de $\bar{\nu}$ é da ordem de 10^{-21}, no Sistema Solar. Entretanto argumentamos que há duas razões para rever esse limite: (i) os dados observacionais foram recentemente atualizados; (ii) não foi levado em conta o efeito de potencial gravitacional externo.

Desse modo, na seção 3.2 discutimos a identificação de escala e a dependência que $G(\mu)$ tem do potencial externo. Nessa seção mostramos como o potencial gravitacional da Via Láctea influencia a dinâmica do Sistema Solar através de $G(\mu)$, equação (3.17). Esse resultado foi importante para estudarmos o limite newtoniano da teoria na seção seguinte. Nela usamos a técnica de transformação conforme para encontrar a correção quântica ao potencial gravitacional newtoniano (3.35). A partir desse novo potencial e da dinâmica do vetor LRL, pudemos encontrar a correção à velocidade de precessão (3.50) para a órbita dos planetas oriunda de RGGR. Usando os dados da Tabela 3.1 e a equação (3.50), encontramos que o limite superior de $\bar{\nu}$ dentro do Sistema Solar, levando em conta o efeito do potencial externo da nossa galáxia, é da ordem de 10^{-16}, e sem tal efeito é 10^{-21}. Esses resultados são apresentados na Tabela 3.3.

Além disso mostramos que como $\phi_N/\phi_g < 10^{-2}$ dentro do Sistema Solar, é possível colocar RGGR numa forma compatível com o formalismo PPN. As equações (3.116) e (3.117) exibem os parâmetros diferentes de zero e nos permitem concluir que RGGR é dependente de um sistema privilegiado de referência, fato esse condizente com a forma não covariante de RGGR que trabalhamos. A partir da incerteza do parâmetro β estimamos que o limite superior de $\bar{\nu}$ é da ordem 10^{-16}, reafirmando o resultado encontrado por nós usando a técnica LRL. Além disso, estimamos na Tabela 3.4 o efeito dinâmico introduzido por RGGR sobre as espaçonaves Pioneers 10 e 11. O resultado encontrado nos permitiu descartar a possibilidade da aceleração anômalo sobre as espaçonaves ser oriunda da dinâmica RGGR.

Apêndice A

Equações de campo para a Gravidade de Quarta Ordem

Esse apêndice tem como objetivo servir de apoio ao capítulo 2 desta tese. Vamos aqui obter as equações de campo para a Gravidade de Quarta Ordem. Segundo a equação (2.7), temos

$$S = \frac{c^3}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\,\big(- R + \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}\big)\ . \tag{A.1}$$

Para obtermos as equações de campo vamos expandir a equação (A.1) até primeira ordem na métrica,

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\ , \tag{A.2}$$

tal que $|h_{\mu\nu}| << |g_{\mu\nu}|$. Para isso é conveniente reescrevermos (A.1) da seguinte forma

$$S = \frac{c^3}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\,\big(- R + \alpha\, g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + \beta R_{\mu\nu}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}R_{\alpha\beta}\big)\ . \tag{A.3}$$

Lembrando que as demais quantidades geométricas que precisamos expandidas até segunda ordem são

$$\begin{aligned}
\tilde{g}^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + h^{\mu\lambda}h_{\lambda}^{\nu}\,, &\text{(A.4)}\\
\sqrt{-\tilde{g}} &= \sqrt{-g}\big(1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}h_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta} + \frac{1}{8}h^2\big)\,, &\text{(A.5)}\\
\tilde{R}_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu} - R_{\mu\alpha\nu\beta}h^{\alpha\beta} + R_{\alpha(\mu}h^{\alpha}{}_{\nu)} + \nabla_{(\mu}\nabla_{\lambda}h^{\lambda}{}_{\nu)} - \frac{1}{2}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}h\ , &\text{(A.6)}
\end{aligned}$$

onde adotamos a notação para o traço $h = g_{\mu\nu}h^{\mu\nu}$. Substituindo essas expansões em (A.3) e após alguns simples rearranjamento dos termos chegamos a

$$\begin{aligned}
\tilde{S}[\tilde{g}_{\mu\nu}] &= S^{(0)}[g_{\mu\nu}] + \frac{c^3}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\,\Big\{\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\big(- R + \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}\big)h^{\mu\nu} &\text{(A.7)}\\
&+ \big(R_{\mu\nu} - 2\alpha R R_{\mu\nu} - 2\beta R_{\mu\alpha}R^{\alpha}{}_{\nu}\big)h^{\mu\nu} + \big(- g^{\mu\nu} + 2\alpha g^{\mu\nu}R + 2\beta R^{\mu\nu}\big)R^{(1)}_{\mu\nu}\Big\}\ ,
\end{aligned}$$

onde $R^{(1)}_{\mu\nu}$ é o termo de primeira ordem da equação (A.6). Vamos considerar separadamente o último termo da equação anterior, ou seja,

$$\begin{aligned} S^{(1)}_x &= \frac{c^3}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\Big\{\big(-g^{\mu\nu}+2\alpha g^{\mu\nu}R+2\beta R^{\mu\nu}\big)R^{(1)}_{\mu\nu}\Big\} \\ &= \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\,\frac{1}{2}\big(-g^{\mu\nu}+2\alpha g^{\mu\nu}R+2\beta R^{\mu\nu}\big)\big(-\Box h_{\mu\nu}-2R_{\mu\alpha\nu\beta}h^{\alpha\beta} \\ &+ 2R_{\mu\alpha}\,h^{\alpha}{}_{\nu}+2\nabla_\mu\nabla_\alpha h^{\alpha}{}_{\nu}-\nabla_\mu\nabla_\nu h\big)\ . \end{aligned} \tag{A.8}$$

Após fazermos as necessárias integrações por partes, simplificarmos alguns termos e renomear alguns índices, nós obtemos

$$\begin{aligned} S^{(1)}_x &= \frac{c^3}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\Big\{2\alpha\nabla_\mu\nabla_\nu R-2\alpha\, g_{\mu\nu}\,\Box R+2\beta\nabla_\mu\nabla_\alpha R^{\alpha}{}_{\nu}-\beta\,\Box R_{\mu\nu} \\ &- \beta\, g_{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\beta R^{\beta\alpha}+2\beta R_{\mu\alpha}R^{\alpha}{}_{\nu}-2\beta R_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\alpha\beta}\Big\}h^{\mu\nu}\ . \end{aligned} \tag{A.9}$$

Usando a identidade de Bianchi

$$\nabla_\mu R^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\,\nabla_\mu R\ , \tag{A.10}$$

e substituindo (A.9) em (A.7) nós obteremos a ação (A.1) até primeira ordem na expansão métrica

$$\begin{aligned} \tilde{S}[\tilde{g}_{\mu\nu}] &= S^{(0)}[g_{\mu\nu}]+\frac{c^3}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\Big\{\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\big(-R+\alpha R^2+\beta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}\big) \\ &+ R_{\mu\nu}-2\alpha RR_{\mu\nu}+2\alpha\nabla_\mu\nabla_\nu R-2\alpha\, g_{\mu\nu}\,\Box R+\beta\alpha\nabla_\mu\nabla_\nu R \\ &- \beta\, g_{\mu\nu}\,\Box R-\frac{1}{2}\beta\, g_{\mu\nu}\,\Box R-2\beta R_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\alpha\beta}\Big\}h^{\mu\nu}\ . \end{aligned} \tag{A.11}$$

As equações de campo derivam do princípio variacional

$$\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\tilde{g}^{\mu\nu}}+\frac{\delta\tilde{S}_m}{\delta\tilde{g}^{\mu\nu}}=0\ , \tag{A.12}$$

onde $\tilde{S}_m$ é a ação da matéria. Portanto, as equações de campo da Gravidade de Quarta Ordem são dadas por

$$\begin{aligned} & R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}R-2\alpha\big(R_{\mu\nu}-\frac{1}{4}\,g_{\mu\nu}R\big)R-2\beta\big(R_{\mu\alpha\nu\beta}-\frac{1}{4}\,g_{\mu\nu}R_{\alpha\beta}\big)R^{\alpha\beta} \\ & -\beta\Box R_{\mu\nu}-g_{\mu\nu}\big(2\alpha+\frac{\beta}{2}\big)\Box R+(2\alpha+\beta)\nabla_\mu\nabla_\nu R \;=\; \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}\ , \end{aligned} \tag{A.13}$$

onde temos introduzido o tensor momento-energia

$$T_{\mu\nu}=-\frac{2\,c}{\sqrt{g}}\frac{\delta\tilde{S}_m}{\delta\tilde{g}^{\mu\nu}}\ . \tag{A.14}$$

Note que elas são um conjunto de equações diferenciais não-lineares e de quarta ordem nas derivadas da métrica. Uma propriedade interessante dessas equações é aquela relativa à soluções de vácuo ($T_{\mu\nu}=0$), em que qualquer solução de vácuo para a Relatividade Geral ($R_{\mu\nu}=0$) é também uma solução de (A.13) no vácuo.

Apêndice B

Ação Efetiva

A compreensão da natureza ganhou um novo capítulo na história quando Planck, em 1900, postulou que a energia das ondas eletromagnéticas emitidas por corpos negros fossem quantizadas em pacotes discretos. Esta hipótese foi estendida por Einstein. Em 1905, ele considerou que não apenas a energia fosse quantizada mas também a própria onda, ou seja, as ondas eletromagnéticas fundamentalmente passaram a ser tratadas como partículas.

Estes foram os primeiros passos dados na busca pela compreensão quântica da natureza. Entretanto, tanto Planck quanto Einstein não poderiam imaginar que suas ideias trariam consequências diretas para a Física. Do ponto de vista físico, as ideias introduzidas por eles, no cerne da ciência, mudou a forma como os cientistas olham para a natureza. Hoje temos pleno conhecimento de que os avanços tecnológicos ocorridos na segunda metade do século passado, aos dias de hoje, está fundamentado no conhecimento quântico da natureza.

Apesar dos avanços teóricos, até o presente momento, não há uma formulação quântica da gravidade, ou seja, uma em que o campo gravitacional é literalmente quantizado. Desse modo novas abordagens são introduzidas, por exemplo, a teoria quântica de campo num fundo gravitacional clássico, denominado de teoria quântica de campos no espaço-tempo curvo.

Nesta seção pretendemos, de forma sucinta, introduzir a denominada ação efetiva. A ação efetiva é um funcional que contém toda a informação quântica necessária de um sistema, permitindo obter de forma sistemática as correções quânticas oriundas dos fenômenos gravitacionais de um sistema.

Começamos por introduzindo a relação funcional que nos permite obter, a partir da integral de trajetória, a amplitude de propagação

$$U(x_a, x_b, T) = \int Dx(t)\ e^{iS[x(t)]/\hbar} \quad . \tag{B.1}$$

Essa relação nos diz qual é a amplitude de probabilidade de uma partícula na posição x_a ser encontrada em x_b no instante de tempo T. A medida de integração, $Dx(t)$, é uma funcional, isso quer dizer que a integração é tomada ao longo de todas as trajetórias possíveis, que conectam os pontos x_a e x_b no intervalo de tempo T. A quantização funcional é um método que nos permite a partir do conhecimento clássico do sistema, ou seja, da ação clássica S, chegar à quantização do mesmo.

Em teoria quântica de campos a amplitude de propagação é dada pela função de correlação de dois-pontos, ou função de Green de dois-pontos:

$$\langle\Omega|T\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \frac{\int D\phi\ \phi(x)\phi(y)e^{iS[x(t)]/\hbar}}{\int D\phi\ e^{iS[x(t)]/\hbar}}\ . \tag{B.2}$$

O símbolo T é o operador de ordenamento temporal, ϕ é um campo qualquer e $|\Omega\rangle$ denota o estado fundamental da teoria. A equação acima pode ser interpretada fisicamente como a amplitude de propagação de uma partícula entre os pontos x e y.

É possível obter as funções de correlação de qualquer ordem a partir da seguinte definição da integral funcional sobre o campo ϕ,

$$Z[J] = \int D\phi\ e^{i(S+J\phi)}\,, \tag{B.3}$$

onde temos utilizado a notação condensada $J\phi = \int d^4xJ(x)\phi(x)$ e consideramos $\hbar = 1$. Ele é denominado de gerador das funções de correlação. Note que na definição acima é introduzido um campo externo J, ou também chamado de fonte externa, que poderia ser, por exemplo, um campo magnético externo atuando sobre um sistema de spins, como no experimento de Stern-Gerlach.

É possível mostrar que a relação abaixo nos permite obter qualquer função de correlação a partir do gerador das funções de correlação Z,

$$\langle\Omega|T\phi(x_1)\phi(x_2)...\phi(x_n)|\Omega\rangle = \frac{(-i)^n}{Z_0}\frac{\delta^n}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)...\delta J(x_n)}Z[J]\Big|_{J=0}\,, \tag{B.4}$$

onde $Z_0 = Z[J=0]$, e o símbolo $\delta/\delta J$ denota derivada funcional com relação a fonte. Para mostrar o procedimento de maneira mais clara vamos calcular a função de correlação de dois pontos,

$$\langle\Omega|T\phi(x_1)\phi(x_2)|\Omega\rangle = \frac{(-i)^2}{Z_0}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}Z[J]\Big|_{J=0}. \tag{B.5}$$

Lembrando que a derivada funcional possui regra para derivada composta igual às derivadas ordinárias, obtemos

$$\langle\Omega|T\phi(x_1)\phi(x_2)|\Omega\rangle = \frac{-i}{Z_0}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\int D\phi\ \phi(x_2)e^{i(S+J\phi)}\Big|_{J=0}. \tag{B.6}$$

Tomando a próxima derivada funcional chegamos em

$$\langle\Omega|T\phi(x_1)\phi(x_2)|\Omega\rangle = \frac{1}{Z_0}\int D\phi\ \phi(x_1)\phi(x_2)e^{i(S+J\phi)}\Big|_{J=0}. \tag{B.7}$$

Agora vemos que tomando $J = 0$ obtemos a desejada equação B.2, para a função de correlação de dois-pontos.

Para chegarmos ao objetivo dessa seção vamos definir mais um funcional W, também conhecido por funcional energia, em analogia à termodinâmica estatística, ou funcional gerador das funções de Green

$$Z[J] = e^{-iW[J]}. \tag{B.8}$$

O funcional W gera as funções de Green conectadas e por isso desempenha um papel importante em teoria quântica de campos. Nosso objetivo agora é, a partir de W, encontrar um funcional que possui o mesmo papel em teoria quântica de campos que aquele desempenhado pela ação na teoria clássica. Para uma discussão mais detalhada que motive a definição acima e discuta as propriedades de W recomendamos os seguintes livros texto sobre o assunto [112, 14, 15]. Considere então a derivada funcional de W com relação a fonte,

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = i\frac{\delta \log Z}{\delta J(x)} = -\frac{\int D\phi\ \phi(x) e^{i(S+J\phi)}}{\int D\phi\ e^{i(S+J\phi)}} \,. \tag{B.9}$$

Esta relação é nada mais que o valor esperado do campo ϕ no estado fundamental da teoria, na presença de uma fonte J não nula. Deste modo vamos abreviar essa expressão por

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = -\left\langle \Omega|\phi(x)|\Omega \right\rangle_J = \phi_m(x)\,, \tag{B.10}$$

onde temos definido a quantidade $\phi_m(x)$, chamada de campo médio. Note que podemos tratá-lo como a variável canonicamente conjugada à J, e assim construirmos a transformada de Legendre de W da seguinte forma

$$\Gamma[\phi_m] = -W[J] - \int d^4y J(y)\phi_m(y)\ . \tag{B.11}$$

Essa quantidade é conhecida como ação efetiva. Esse nome é derivado do papel que ela desempenha dinamicamente na teoria quântica de campos. Para demonstrar isso vamos tomar sua derivada funcional com respeito ao campo médio,

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_m]}{\delta\phi_m(x)} = -\int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta\phi_m(x)}\frac{\delta W}{\delta J(y)}\ -\ \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta\phi_m(x)}\phi_m(y)\ -\ J(x)\ . \tag{B.12}$$

Substituindo a eq.(B.10) na equação acima, encontraremos a seguinte equação

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_m]}{\delta\phi_m(x)} = -J(x)\ . \tag{B.13}$$

Essa é a equação de movimento na teoria quântica de campos, ela descreve a dinâmica do campo médio levando em conta a natureza quântica do sistema. Note a similaridade com a equação de movimento de uma teoria clássica na presença de uma fonte externa, por isso denominamos o funcional Γ de ação efetiva. Além disso, é possível mostrar que a ação efetiva é um funcional gerador de funções de correlação conectadas, e portanto desempenha papel central em TQC [14].

Apêndice C

Equações do Grupo de Renormalização

Neste Apêndice vamos mostrar, seguindo [113, 14], como obter as Equações do Grupo de Renormalização. Antes disso, precisamos lembrar algumas definições e conceitos da teoria quântica de campos, como renormalização e regularização.

Em teoria quântica de campos é importante obter as funções de correlação conectadas (qualquer outra função de correlação é determinada a partir das conectadas), pois através delas nós somos capazes de descrever os fenômenos físicos de uma determinada teoria quântica; como por exemplo, a seção de choque, as amplitudes de probabilidade de criação e aniquilação de uma partícula em determinado ponto do espaço, a taxa de decaimento em um processo radiativo, entre outros. É possível mostrar que a ação efetiva é um funcional gerador das funções de correlação conectadas [14, 112].

Geralmente as funções de correlação são determinadas por integrais que divergem para determinados valores do momento, e assim não somos capazes de obter informação física do sistema a partir delas. Entretanto um método foi desenvolvido a fim de solucionar em parte o problema, ele é denominado de renormalização.

Considere a teoria para os campos ϕ_0^i dada pela ação $S_0[\phi_0, p_0]$, onde o índice i representa o campo ϕ_0^i entre os n campos e p_0 é o conjunto de todos os parâmetros da teoria, como massas e constantes de acoplamentos. Como normalmente ocorre em TQC, essa teoria possui divergências.

Antes mesmo de aplicarmos à ela a técnica de renormalização precisamos dar sentido as integrais de trajetória divergentes, esse processo é chamado de regularização. Ele consiste em mudar a integral original, divergente, em outra finita, essa dependendo de um parâmetro de regularização Λ. Quando o parâmetro Λ tende à um determinado valor, a integral reduz àquela original. Um importante processo de regularização é a regularização dimensional. Ela consiste em definir toda a teoria em uma dimensão n do espaço-tempo, cujo parâmetro de regularização é justamente n. Nesse processo as integrais divergentes em 4-dimensões passam à ser bem definidas.

Podemos agora descrever de forma sucinta o que vem a ser o processo denominado renormalização. Já tendo feito a regularização da teoria, criamos uma nova ação $S[\phi, p, n]$ (supondo regularização dimensional) com campos ϕ^i e parâmetros p^i, da seguinte forma,

$$S[\phi, p, n] = S_0[\phi, p] + \Delta S[\phi, p, n] \ . \tag{C.1}$$

Aqui $S_0[\phi, p]$ é a ação original definida em n-dimensões do espaço-tempo através do parâmetro de regularização n, com ϕ_0 e p_0 substituídos por ϕ e p. Já $\Delta S[\phi, p, n]$ é chamado de contratermos. Sua função é cancelar os termos da ação original que divergem. Assim quando o parâmetro de regularização $n \to 4$, ou seja, volta ao valor que caracteriza a teoria original, obtemos uma teoria finita dada pela ação $S[\phi, p]$.

Existe uma classe especial de teorias que possuem uma propriedade interessante no processo de renormalização. Considere uma teoria com a ação $S_0[\phi_0, p_0]$, e tal que os contratermos têm justamente a mesma forma funcional que ela. Isso implica que podemos obter a ação renormalizada $S[\phi, p, n]$ a partir da ação original, pela seguinte transformação [14]

$$\phi_0 = \mu^{(n-4)/2} Z_1^{1/2} \phi \quad ; \quad p_0 = \mu^{(n-4)/2} Z_p \, p \ . \tag{C.2}$$

Acima temos que μ é um parâmetro arbitrário com dimensão de massa, que é introduzido para o campo ϕ, em n-dimensões, tenha a mesma dimensão que em 4-dimensões; Z_1 e Z_p são chamadas de constantes de renormalização. Logo, tal classe de teorias possui a característica que $S_0[\phi_0, p_0] = S[\phi, p]$. Teorias que satisfazem essa propriedade são comumente chamadas de teorias multiplicativamente renormalizadas.

Uma consequência direta da renormazibilidade multiplicativa é o conjunto de equações do grupo de renormalização para a teoria no nível quântico. Vamos derivá-las no que segue.

Considere $S_0[\phi_0, p_0]$ e $S[\phi, p]$ serem as ações da teoria original e renormalizada, respectivamente. Em teoria quântica de campos nosso objetivo é encontrar as funções de correlação, e portanto, precisamos do funcional gerador das mesmas. Usando a equação B.3 podemos escrever abaixo os funcionais gerador das funções de correlação para a teoria original Z_0 e renormalizada Z,

$$Z_0 = e^{iW_0[J_0]} = \int D\phi_0 \ e^{i(S_0[\phi_0, p_0] + \phi_0 J_0)} \, , \tag{C.3}$$

$$Z = e^{iW[J]} = \int D\phi \ e^{i(S[\phi, p] + \phi J)} \, . \tag{C.4}$$

Fizemos uso da relação B.8 que define o gerador das funções de correlação conectadas. Lembramos que ϕ_0 e p_0 são conectados com ϕ e p pelas transformações de renormalização e que uma teoria multiplicativamente renormalizada satisfaz $S_0[\phi_0, p_0] = S[\phi, p]$. Logo, fazendo as transformações de renormalização $\phi_0 \rightarrow \mu^{(n-4)/2} Z_1^{1/2} \phi$ e $J_0 \rightarrow \mu^{(4-n)/2} Z_1^{-1/2} J$, obtemos que $W_0[J_0] = W[J]$.

Seguindo o Apêndice B, podemos agora realizar uma transformação de Legendre para determinar a ação efetiva para a teoria renormalizada. O campo médio é dado por

$$\bar{\phi_0} = \frac{\delta W_0}{\delta J_0} = \frac{\delta W}{\delta J} \mu^{(n-4)/2} Z_1^{1/2} = \mu^{(n-4)/2} Z_1^{1/2} \bar{\phi}, \tag{C.5}$$

onde temos utilizado barra em cima dos correspondentes campos médios $\bar{\phi_0}$ e $\bar{\phi}$. Então substituindo as transformações de renormalização na transformada de Legendre,

$$\Gamma[\bar{\phi_0}] = W_0[J_0] - \int d^4y J_0(y) \bar{\phi_0}(y) = W[J] - \int d^4y \mu^{(4-n)/2} Z_1^{-1/2} J(y) \mu^{(n-4)/2} Z_1^{1/2} \bar{\phi}(y), \tag{C.6}$$

obtemos que

$$\Gamma_0[g_{\alpha\beta}, \bar{\phi_0}, p_0, n] = \Gamma[g_{\alpha\beta}, \bar{\phi}, p, \mu, n] \ . \tag{C.7}$$

Nós temos escrito explicitamente os argumentos das ações efetivas original e renormalizada, para ficar claro que a ação renormalizada possui um parâmetro extra μ que não está presente do lado esquerdo da equação acima. Portanto temos

$$\mu \frac{d}{d\mu} \Gamma[g_{\alpha\beta}, \bar{\phi}, p, \mu, n] = 0 \ . \tag{C.8}$$

Por conveniência, temos multiplicado acima por μ, para que a equação não dependa da dimensão do correspondente parâmetro. Imediatamente segue que

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{dp}{d\mu} \frac{\partial}{\partial p} + \mu \int d^n x \sqrt{-g} \ \frac{d\phi(x)}{d\mu} \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \right] \Gamma[g_{\alpha\beta}, \phi, p, \mu, n] = 0 \ . \tag{C.9}$$

É preciso ressaltar que $\mu \, dp/d\mu$ e $\mu \, d\phi/d\mu$ são calculados em valores fixos p_0 e ϕ_0. Essas quantidades também recebem uma notação particular,

$$\mu \frac{dp}{d\mu} = \beta_p(n) \ , \tag{C.10}$$

$$\mu \frac{d\phi(x)}{d\mu} = \gamma(n) \, \phi(x) \ . \tag{C.11}$$

A quantidade $\beta_p(n)$ é denominada de função-beta e $\gamma(n)$ de função-gama. A partir dessa nova notação podemos reescrever a equação C.9,

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_p(n) \frac{\partial}{\partial p} + \gamma(n) \int d^n x \sqrt{-g} \ \phi(x) \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \right] \Gamma[g_{\alpha\beta}, \phi, p, \mu, n] = 0 \ . \tag{C.12}$$

Essa é a chamada equação do grupo de renormalização. Como vimos ela deriva da condição de que a teoria é multiplicativamente renormalizável.

Pode parecer que os processos de regularização e renormalização são apenas técnicas para extrair as divergências de uma teoria e torná-la finita. Entretanto, é possível notar, a partir da equação C.10, que esses processos introduzem novidades na teoria, as constantes de acoplamentos e massas dos campos evoluem dinamicamente. Esses parâmetros da teoria passam a depender do parâmetro de renormalização μ. Isso significa, por exemplo, que a carga do elétron em eletrodinâmica quântica não é sempre a mesma, a constante gravitacional em TQC em espaço-tempo curvo também não; assim temos que a descrição dos fenômenos em TQC dependem do parâmetro μ. Normalmente, sua interpretação física é a escala de energia, por isso ele é chamado de escala de renormalização.

Apêndice D

Vetor de Laplace-Runge-Lenz

Vamos aqui fazer um breve estudo a respeito do vetor de Laplace-Runge-Lenz (LRL) e mostrar como a partir de suas propriedades podemos calcular a velocidade de precessão para o problema de Kepler perturbado. O vetor LRL é definido por [89].

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{l} \ - \ mk\hat{r} \quad , \tag{D.1}$$

aqui $\mathbf{p}$ e $\mathbf{l}$ são os momentos linear e angular, respectivamente, de uma partícula de massa m. $\hat{r}$ é o vetor unitário radial e k é uma constante que depende de cada tipo de força a qual a partícula está submetida.

No que segue vamos obter algumas de suas propriedades para o caso em que a força é do tipo gravitacional ou elétrica, ou seja,

$$\mathbf{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{r} \ . \tag{D.2}$$

Para o caso gravitacional identificamos $k = GMm$. A primeira propriedade que vamos demonstrar é aquela que afirma que o vetor LRL é uma constante de movimento. Para isso vamos tomar a derivada temporal de $\mathbf{A}$,

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{l} \ - \ mk\frac{d\hat{r}}{dt} \ . \tag{D.3}$$

Acima fizemos uso do fato que forças centrais conservam o momento angular. No primeiro termo temos, força produto vetorial com o momento angular da partícula, enquanto no segundo não identificamos de imediato uma relação clara. Assim calculemos a derivada temporal de $\hat{r}$,

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \frac{\mathbf{v}}{r} \ - \ \frac{(\mathbf{v}.\hat{r})\hat{r}}{r} = \frac{1}{r}\hat{r} \times (\mathbf{v} \times \hat{r}) \quad , \tag{D.4}$$

onde temos usamos a relação $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{c}$. Substituindo o resultado anterior na equação (D.3), obtemos então

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0 \ . \tag{D.5}$$

Podemos agora provar uma segunda propriedade, o vetor LRL pertence ao plano da órbita. Para isso vamos lembrar que o momento angular é um vetor normal ao plano da órbita, então

$$\mathbf{l}.\mathbf{A} = \mathbf{l}.(\mathbf{p}\times\mathbf{l}) - mk\mathbf{l}.\hat{r} = 0 \ . \tag{D.6}$$

Ou seja, $\mathbf{A}$ é um vetor fixo no plano do movimento. Outra propriedade é aquela relativa a trajetória da órbita. Tomando-se o produto escalar entre $\mathbf{A}$ e $\mathbf{r}$ (vetor de posição da partícula), podemos obter a trajetória de forma simples e econômica,

$$r|\mathbf{A}|\cos(\varphi-\varphi_0) = \mathbf{r}.(\mathbf{p}\times\mathbf{l}) - mk\mathbf{r}.\hat{r} = l^2 - mkr \ , \tag{D.7}$$

onde φ_0 é o ângulo entre $\mathbf{A}$ e o eixo polar. Então,

$$r = \frac{l^2}{mk[1+\frac{|\mathbf{A}|}{mk}\cos(\varphi-\varphi_0)]} \ . \tag{D.8}$$

Essa é a equação polar de uma elipse. A relação acima implica que partículas submetidas a uma força atrativa que caí com o quadrado da distância ao centro de forças, tem trajetórias elípticas, como já era de conhecimento de Johannes Kepler no caso do campo gravitacional.

Podemos extrair dessa relação a interpretação de que o vetor LRL define o eixo de simetria da elipse, ou seja, está sobre o semi-eixo maior. Isso se deve a duas observações da equação acima: $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$ é o ângulo entre $\mathbf{A}$ e $\mathbf{r}$, então devido a paridade da função cosseno, $\mathbf{A}$ é um eixo de simetria; o maior valor de r é para $\varphi = \varphi_0$, logo está sobre o semi-eixo maior.

Vamos assim, por simplicidade, considerar que o eixo polar e a direção de $\mathbf{A}$ coincidem, ou seja, $\varphi_0 = 0$. Além disso, sabemos que seu módulo determina a excentricidade da elipse [29, 89]

$$|\mathbf{A}| = mk\epsilon \ . \tag{D.9}$$

Devido a essas propriedades, ou seja, está sobre o eixo de simetria e é uma constante de movimento, ele desempenha um papel muito importante para o problema de Kepler perturbado. Vamos agora analisar o problema de Kepler perturbado. Esperamos que para uma força perturbativa muito pequena tenhamos

$$\mathbf{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{r} - \mathbf{f}_{pert} \quad ; \quad |\frac{k}{r^2}| >> |\mathbf{f}_{pert}| \ , \tag{D.10}$$

e assim, a trajetória da partícula não seja exatamente uma elipse, mas sim uma órbita parecida com ela. O que vamos mostrar é que a elipse precessa depois de uma revolução, ou seja, a partícula não volta a posição da qual ela partiu. Além disso, o vetor LRL não é mais uma constante de movimento neste caso, porém ele ainda pertence ao plano da órbita, no caso de uma força perturbativa central, já que o momento angular é ainda uma constante de movimento, de modo que a relação $\mathbf{l}.\mathbf{A} = 0$ continua válida.

Então depois de um período o vetor LRL não estará mais na sua direção inicial e seu módulo também não será o mesmo, terá sofrido uma pequena mudança. Vamos aqui desprezar, em primeira ordem, que seu módulo varie. Consequentemente podemos caracterizar o movimento de precessão pela seguinte relação,

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{A} \ . \tag{D.11}$$

temos que $\mathbf{\Omega}$ é a velocidade média de precessão, a média acima é tomada sobre o período do movimento não perturbado. Calculando-se explicitamente a derivada temporal e fazendo-se uso da equação (D.10), obtemos que

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = \langle \mathbf{f}_{pert} \times \mathbf{l} \rangle + \langle \mathbf{p} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{f}_{pert}) \rangle \ . \tag{D.12}$$

Note que na dedução acima não fizemos menção a natureza do termo perturbativo, portanto essa relação é válida para uma força perturbativa não central, como por exemplo, perturbações devido a outros planetas. No caso em particular, que pretendemos abordar, o termo perturbativo é central, ou seja, $\mathbf{f}_{pert} = f_{pert}(r)\hat{r}$, e assim, o segundo termo na equação acima é nulo,

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = \langle \mathbf{f}_{pert} \rangle \times \mathbf{l} \ \ . \tag{D.13}$$

Lembramos que em uma base cartesiana o vetor $\hat{r}$ é dado por $\hat{r} = \cos\varphi\hat{i} + \sin\varphi\hat{j}$. Então nós podemos decompor a equação anterior na base cartesiana, resultando em

$$\left\langle \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right\rangle = \langle f_{pert}(r)\cos\varphi \rangle \hat{i} \times \mathbf{l} \ . \tag{D.14}$$

Fizemos uso da seguinte propriedade: $\langle f_{pert}(r)\sin\varphi \rangle = 0$. Isso é porque f_{pert} depende somente da distância r, e a órbita não perturbada é simétrica com respeito ao semi-eixo maior. Logo lembrando que $\mathbf{A} = mk\epsilon \ \hat{i}$, podemos imediatamente escrever abaixo a velocidade média de precessão,

$$\mathbf{\Omega} = -\frac{\langle f_{pert}(r)\cos\varphi \rangle}{mk\epsilon} \ \mathbf{l} \ . \tag{D.15}$$

Esta relação nos permite, a partir da caracterização da força perturbativa central, quantificar a velocidade média de precessão da órbita de uma partícula que está submetida à força (D.10), e tal que o termo perturbativo é central. No capítulo 3 iremos aplicar essa equação para avaliar o limite de correções quânticas ao potencial gravitacional newtoniano.

Apêndice E

Limite newtoniano para o campo gravitacional relativístico

Iremos neste apêndice obter o limite gravitacional de baixa energia para uma teoria relativística do campo gravitacional. Nesse limite as partículas submetidas à ação de um potencial gravitacional ϕ apresentam baixas velocidades comparados à velocidade da luz, ou seja, $\frac{v^2}{c^2} << 1$. Podemos obter a lagrangiana relativística para uma partícula livre a partir da seguinte ação,

$$S = -\alpha \int ds \; . \tag{E.1}$$

acima α é uma constante que precisa ser determinada. Para uma partícula teste livre o elemento de intervalo assume a forma plana, desse modo a ação torna-se

$$S = -\alpha \int \sqrt{c^2(dt)^2 - (d\mathbf{r})^2} = -\alpha \int \sqrt{1 - \frac{(\mathbf{v})^2}{c^2}} \; cdt \; . \tag{E.2}$$

Logo a lagrangiana relativística é

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{(\mathbf{v})^2}{c^2}} \; . \tag{E.3}$$

No limite de baixas velocidades $\frac{v^2}{c^2} << 1$ obtemos,

$$L \approx -\alpha c \left[1 - \frac{v^2}{2c^2}\right] \; . \tag{E.4}$$

Agora podemos compará-la com a lagrangiana clássica para uma partícula livre. Desprezando a constante aditiva, que não altera as equações de movimento, temos que a constante α deve ser $\alpha = mc$. Logo a ação relativística é dada por

$$S = -mc \int ds \; . \tag{E.5}$$

Assim a lagrangiana clássica de uma partícula submetida à um potencial ϕ, no limite de baixas energias, é

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\phi \ . \tag{E.6}$$

A ação para essa lagrangiana, e consequentemente o elemento de intervalo, é

$$S = \int L \ dt = -mc \int (c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c})dt \quad \Rightarrow \quad ds = (c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c})dt \ . \tag{E.7}$$

Podemos agora elevar ao quadrado o elemento de intervalo para identificar as componentes da métrica nesse limite. Depois de desprezarmos termos de segunda ordem em $\frac{v^2}{c^2}$, obtemos

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - (d\mathbf{r})^2 \ . \tag{E.8}$$

Portanto no regime newtoniano a métrica é dada por

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2} \ \ ; \ \ g_{ii} = -1 \ \ , \tag{E.9}$$

onde ϕ é o potencial ao qual a partícula está submetida. Essa dedução seguiu [33], e pode também ser encontrada a partir de outra óptica em [31, 38, 39]. A equação (E.9) será importante quando deduzirmos o limite de baixas energias do modelo gravitacional RGGR.

Referências Bibliográficas

[1] A. Einstein, *Erklarung der perihelionbewegung der merkur aus der allgemeinen relativitatstheorie*, Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss. **47** (1915) 831. Tradução para o inglês feita por B. Doyle em The Collected Papers of Albert Einstein : The Berlin Years: Writings, 1914-1917.

[2] A. Einstein, *A Teoria da Relatividade Especial e Geral*, Editora Contraponto (1999).

[3] S. Bowyer, E.T. Byram, T.A. Chubb and H. Friedman, *Cosmic X-ray Sources*, Science **147** (1965) 394.

[4] C.T. BOLTON, *Identification of Cygnus X-1 with HDE 226868*, Nature **235** (1972) 271.

[5] H.L. Shipman, *The Implausible History of Triple Star Models for Cygnus X-1: Evidence for a Black Hole*, Astrophys. Lett. **16** (1975) 09.

[6] National Aeronautics and Space Administration, www.nasa.gov/mission-pages/hubble/main/index.html, http://apod.nasa.gov/apod/ap011007.html, (site visitado em 19/11/2016).

[7] B.P. Abbott et al., *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, Phys. Rev. Lett. **116** (2016) 061102.

[8] B.P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), *GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence*, Phys. Rev. Lett. **116** (2016) 241103.

[9] K.G. Begeman, A.H. Broeils and R.H. Sanders, *Extended rotation curves of spiral galaxies: dark haloes and modified dymanics*, Mon. Not. R. astr. Soc. **249** (1991) 523.

[10] R.H. Sanders, *The Published Extended Rotation Curves of Spiral Galaxies: Confrontation with Modified Dynamics*, The Astrophys. J. **473** (1996) 117.

[11] S. Perlmutter et al., *Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae*, The Astrophys. J. **517** (1999) 565.

[12] B.P. Schmidt, *Nobel Lecture: Accelerating expansion of the Universe through observations of distant supernovae*, Rev. Mod. Phys. **84** (2012) 1151.

[13] T. Clifton, P.G. Ferreira, A. Padilla and C. Skordis, *Modified gravity and cosmology*, Phys. Reports **513** (2012) 01.

[14] I.L. Buchbinder, S.D. Odintsov and I.L. Shapiro, *Effective Action in Quantum Gravity*, IOP Publishing, Bristol (1992).

[15] N.D. Birrell and P.C.W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* , Cambridge University Press, (1982).

[16] V.P. Frolov and G.A. Vilkovisky, *Spherically Symmetric Collapse In Quantum Gravity*, Phys. Lett. B **106** (1981) 307.

[17] V.P. Frolov and I.L. Shapiro, *Black holes in higher dimensional gravity theory with corrections quadratic in curvature* Phys. Rev. D **80** (2009) 044034.

[18] A.A. Starobinsky, *A new type of isotropic cosmological models without singularity*, Phys. Lett. B **91** (1980) 99.

[19] P.R. Anderson, *Effects of quantum fields on singularities and particle horizons in the early universe*, Phys. Rev. D **28** (1983) 271.

[20] T. Regge and J.A. Wheeler, *Stability of a Schwarzschild Singularity*, Phys. Rev. **108** (1957) 1063.

[21] C.V. Vishveshwara, *Stability of the Schwarzschild Metric*, Phys. Rev. D **01** (1970) 2870.

[22] S.A. Teukolsky, *Rotating Black Holes: Separable Wave Equations for Gravitational and Electromagnetic Perturbationse*, Phys. Rev. Lett. **29** (1972) 1114.

[23] B.F. Whiting, *Mode stability of the Kerr black hole*, J. Math. Phys. **30** (1989) 1301.

[24] B. Whitt, *Stability of Schwarzschild black holes in fourth-order gravity*, Phys.Rev. D **32** (1985) 379.

[25] Y.S. Myung, *Stability of Schwarzschild black holes in fourth-order gravity revisited*, Phys.Rev. D **88** (2013) 024039.

[26] I.L. Shapiro, J. Solà and H. Stefancic, *Running G and Λ at low energies from physics at M_X: possible cosmological and astrophysical implications*, JCAP **01** (2005) 012.

[27] D.C. Rodrigues, P.S. Letelier and I.L. Shapiro, *Galaxy rotation curves from General Relativity with Renormalization Group corrections*, JCAP **04** (2010) 020.

[28] D.C. Rodrigues, *Elliptical galaxies kinematics within general relativity with renormalization group effects*, JCAP **9** (2012) 031.

[29] C. Farina, W.J.M. Kort-Kamp, S. Mauro Filho and I.L. Shapiro, *Dynamics of the Laplace-Runge-Lenz vector in the quantum-corrected Newton gravity*, Phys. Rev. D **83** (2011) 124037.

[30] S.S. Zhao and Y. Xie, *Solar System and stellar tests of a quantum-corrected gravity*, Phys. Rev. D **92** (2015) 064033.

[31] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons (1972).

[32] B.F. Schutz, *A First Course in General Relativity*, Cambridge University Press (2009).

[33] Landau and Lifshitz, *The Classical Theory of Field*, Elsevier (2009).

[34] National Space Science Data Center, http://nssdc.gsfc.nasa.gov.

[35] S.B. Volchan, *Uma Introdução à Mecânica Celeste*, IMPA (2007).

[36] G.W. Collins, *The Foundations of Celestial Mechanics*, Pachart Foundation (2004).

[37] R.P. Kerr, *Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics*, Phys. Rev. Lett. **11** (1963) 237.

[38] P. Frolov and D. Novikov, *Black Holes Physics: basic concepts and new developments*, (1997).

[39] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of black Holes*, Oxford (1983).

[40] H. Bondi, M.G.J. van der Burg and W.K. Metzner, *Gravitational Waves in General Relativity. VII Waves from Axi-Symmetric Isolated Systems*, Proc. R. Soc. Lond. **269** (1962) 21.

[41] R.A. Isaacson, *Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency I. The Linear Approximation and Geometrical Optics*, Phys. Rev. **166** (1967) 1263.

[42] P. Pani, *Advanced Methods in Black-Hole Perturbation Theory*, Int.J.Mod.Phys. **A28** (2013) 1340018.

[43] L.A. Edelstein and C.V. Vishveshwara, *Differential Equations for Perturbations on the Schwarzschild Metric*, Phys. Rev. D **01** (1970) 3514.

[44] R.M. Wald, *Note on the stability of the Schwarzschild metric*, J. Math. Phys. **20** (1979) 1056.

[45] F.J. Zerilli, *Perturbation analysis for gravitational and electromagnetic radiation in a Reissner-Nordstriim geometry*, Phys. Rev. D **9** (1973) 860.

[46] V. Moncrief, *Odd-parity stability of a Reissner-Nordstrom black hole*, Phys. Rev. D **9** (1974) 2707.

[47] V. Moncrief, *Stability of Reissner-Nordstrom black holes*, Phys. Rev. D **10** (1974) 1057.

[48] V. Cardoso and J.P.S. Lemos, *Quasinormal modes of Schwarzschild?anti-de Sitter black holes: Electromagnetic and gravitational perturbations*, Phys. Rev. D **64** (2001) 084017-1.

[49] H. Kodama and A. Ishibashi, *A Master Equation for Gravitational Perturbations of Maximally Symmetric Black Holes in Higher Dimensions*, Prog. Theor. Phys. **110** (2003) 701.

[50] H. Kodama and A. Ishibashi, *Master Equations for Perturbations of Generalised Static Black Holes with Charge in Higher Dimensions*, Prog. Theor. Phys. **111** (2004) 29.

[51] M. Giammatteo and I.G. Moss, *Gravitational quasinormal modes for Kerr-anti-de Sitter black holes*, Class. Quantum Grav. **22** (2005) 1803.

[52] V. Cardoso, O.J.C. Dias and S. Ioshida, *Classical instability of Kerr-AdS black holes and the issue of final state*, Phys. Rev. D **74** (2006) 044008-1.

[53] R.A. Konoplya,*Quasinormal modes of black holes: From astrophysics to string theory*, Rev. Mod. Phys. **83** (2011) 793.

[54] F.J. Zerilli, *Effective potential for even-parity Regge-Wheeler gravitational perturbation equations*, Phys. Rev. Lett. **24** (1970) 737.

[55] H.J. Schmidt, *Fourth order gravity: Equations, history, and applications to cosmology*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **4** (2007) 209.

[56] K.S. Stelle, *Classical Gravity with Higher Derivatives*, General Relativity and Gravitation **9** (1978) 353.

[57] I. Gullu and B. Tekin, *Massive Higher Derivative Gravity in D-dimensional Anti-de Sitter Spacetimes*, Phys.Rev. D **80** (2009) 064033.

[58] R. Gregory and R. Laflamme, *Black strings and p-branes are unstable*, Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 2837.

[59] E. Babichev and A. Fabbri, *Instability of black holes in massive gravity*, Class. Quant. Grav. **30** (2013) 152001.

[60] D.C. Rodrigues, F.O. Salles, I.L. Shapiro and A.A. Starobinsky, *Auxiliary fields representation for modified gravity models*, Phys. Rev. D **83** (2011) 084028.

[61] T.P. Sotiriou and V. Faraoni, *$f(R)$ theories of gravity* Rev. Mod. Phys. **82** (2010) 451.

[62] A. De Felice and S. Tsujikawa, *$f(R)$ theories*, Living Rev. Relativ. **13** (2010) 3.

[63] S. Mauro Filho, R. Balbinot, A. Fabbri and I.L. Shapiro, *Fourth derivative gravity in the auxiliary fields representation and application to the black-hole stability*, Eur. Phys. J. Plus **130** (2015) 135.

[64] B.S. Kay and R.M. Wald, *Linear stability of Schwarzschild under perturbations which are non-vanishing on the bifurcation 2-sphere*, Class. Quant. Grav. **4** (1987) 893.

[65] T.J.M. Zouros and D.M. Eardley, *Instabilities of Massive Scalar Perturbations of a Rotating Black Hole*, Annals of Physics **118** (1979) 139.

[66] S. Detweiler, *Klein-Gordon equation and rotating black holes*, Phys. Rev. D **22** (1980) 2323.

[67] S. Hod, *On The instability regime of the rotating Kerr spacetime to massive scalar perturbations*, Phys. Lett. B **708** (2012) 320.

[68] P. Pani, V. Cardoso, L. Gualtieri, E. Berti and A. Ishibashi, *Perturbations of slowly rotating black holes: Massive vector fields in the Kerr metric*, Phys. Rev. D **86** (2012) 104017.

[69] P. Pani, V. Cardoso, L. Gualtieri, E. Berti and A. Ishibashi, *Black-Hole Bombs and Photon-Mass Bounds*, Phys. Rev. Lett. **109** (2012) 131102.

[70] R. Brito, V. Cardoso and P. Pani, *Massive spin-2 fields on black hole spacetimes: Instability of the Schwarzschild and Kerr solutions and bounds on the graviton mass*, Phys. Rev. D **88** (2013) 023514.

[71] J.C. Fabris, P.L. de Oliveira, D.C. Rodrigues, A.M. Velasquez-Toribio and I.L. Shapiro, *Quantum corrections to gravity and their implications for cosmology and astrophysics*, Int. J. Mod. Phys. **A27** (2012) 1260006.

[72] A. Salam and J. Strathdee, *Remarks on high-energy stability and renormalizability of gravity theory*, Phys. Rev. D **18** (1978) 4480.

[73] E.S. Fradkin and A.A. Tseytlin, *Renormalizable asymptotically free quantum theory of gravity*, Nucl. Phys. B **201** (1982) 469.

[74] I.G. Avramidi and A.O. Barvinsky, *Asymptotic freedom in higher-derivative quantum gravity*, Phys. Lett. B **159** (1985) 269.

[75] G.B. Peixoto and I.L. Shapiro, *Higher Derivative Quantum Gravity with Gauss-Bonnet Term*, Phys. Rev. D **71** (2005) 064005.

[76] B.L. Nelson and P. Panangaden, *Scaling Behavior Of Interacting Quantum Fields In Curved Space-Time*, Phys. Rev. D **25** (1982) 1019.

[77] D.C. Rodrigues, B. Chauvineau and O.F. Piattella, *Scalar-Tensor gravity with system-dependent potential and its relation with Renormalization Group extended General Relativity*, JCAP **09** (2015) 009.

[78] J.T. Goldman, J. Perez-Mercader, F. Cooper and M.M. Nieto, *The dark matter problem and quantum gravity*, Phys. Lett. B **281** (1992) 219.

[79] E. Elizalde, S.D. Odintsov and I.L. Shapiro, *Asymptotic regimes in quantum gravity at large distances and running Newtonian and cosmological constants*, Class. Quant. Grav. **11** (1994) 1607.

[80] M. Reuter and H. Weyer, *On the Possibility of Quantum Gravity Effects at Astrophysical Scales*, Int. J. Mod. Phys. **D15** (2006) 2011.

[81] S. Domazet and H. Stefancic, *Renormalization group scale-setting in astrophysical systems*, Phys. Lett. B **703** (2011) 01.

[82] A.V. Frolov and J.-Q. Guo, *Small Cosmological Constant from Running Gravitational Coupling*, arXiv:1101.4995.

[83] M. Hindmarsh and I.D. Saltas, *f(R) gravity from the renormalization group*, Phys. Rev. D **86** (2012) 064029.

[84] J.-Q. Guo and A. V. Frolov, *Cosmological dynamics in f(R) gravity*, Phys. Rev. D **88** (2013) 124036.

[85] D.C. Rodrigues, S. Mauro Filho and A.O.F. de Almeida, *Solar System constraints on Renormalization Group extended General Relativity: The PPN and Laplace-Runge-Lenz analyses with the external potential effect*, Phys. Rev. D **94** (2016) 084036.

[86] F. Iocco, M. Pato and G. Bertone, *Evidence for dark matter in the inner Milky Way*, Nature Phys. **11** (2015) 245.

[87] M. Pato and F. Iocco, *The dark matter profile of the Milky Way: a non-parametric reconstruction*, Astrophys. J. **803** (2015) L3.

[88] D.F. Carneiro, E.A. Freitas, B. Gonçalves, A.G. Lima and I.L. Shapiro, *On Useful Conformal Transformation in General relativity* , Gravitation and Cosmology **10** (2004) 01.

[89] H. Goldstein, C.P. Poole and J.L. Safko, *Classical Mechanics*, Addison Wesley (2000).

[90] T. Damour, M. Soffel and C. Xu, *General-relativistic celestial mechanics. I. Method and definition of reference systems*, Phys. Rev. D **43** (1991) 10.

[91] S.A. Klioner and M.H. Soffel, *Relativistic celestial mechanics with PPN parameters*, Phys. Rev. D **62** (2000) 024019.

[92] L. Iorio, *Gravitational anomalies in the solar system?*, Int. J. Mod. Phys. D **24** (2015) 1530015.

[93] A. Fienga, J. Laskar, P. Kuchynka, H. Manche, G. Desvignes, M. Gastineau, I. Cognard, and G. Theureau, *The INPOP10a planetary ephemeris and its applications in fundamental physics*, Celest. Mech. Dyn. Astron. **111** (2011) 363.

[94] E. V. Pitjeva and N. P. Pitjev, *Relativistic effects and dark matter in the solar system from observations of planets and spacecrafts*, MNRAS **432** (2013) 3431.

[95] Nasa space science data coordinated archive. "http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/", (2016).

[96] C. M. Will, *Theory and experiment in gravitational physics*, Cambridge University Press (1993).

[97] Y. Fujii and K. Maeda, *The scalar-tensor theory of gravitation*, Cambridge University Press (2003).

[98] C.M. Will, *The Confrontation between General Relativity and Experiment*, Living Rev. Rel. **17** (2014) 04.

[99] J.D. Anderson, P.A. Laing, E.L. Lau, A.S. Liu, M.M. Nieto and S.G. Turyshev, *Indication, from Pioneer 10/11, Galileo, and Ulysses data, of an apparent anomalous, weak, long-range acceleration*, Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 2858.

[100] J.D. Anderson, P.A. Laing, E.L. Lau, A.S. Liu, M.M. Nieto and S.G. Turyshev, *Study of the anomalous acceleration of Pioneer 10 and 11*, Phys. Rev. D **65** (2002) 082004.

[101] J. R. Brownstein and J. W. Moffat, *Gravitational solution to the Pioneer 10/11 anomaly*, Class. Quant. Grav. **23** (2006) 3427.

[102] J.D. Anderson and J.R. Morris, *Chameleon effect and the Pioneer anomaly*, Phys. Rev. D **85** (2012) 084017.

[103] D. Grumiller and F. Preis, *Rindler Force at Large Distances*, Int. J. Mod. Phys. D **20** (2011) 2761.

[104] S.G. Turyshev, V.T. Toth, G. Kinsella, Siu-Chun Lee, S.M. Lok and J. Ellis, *Support for the thermal origin of the Pioneer anomaly*, Phys. Rev. Lett. **108** (2012) 241101.

[105] B. Rievers and C. Lammerzahl, *High precision thermal modeling of complex systems with application to the flyby and Pioneer anomaly*, Annalen Phys. **523** (2011) 439.

[106] D. Modenini and P. Tortora, *Pioneer 10 and 11 orbit determination analysis shows no discrepancy with Newton-Einstein laws of gravity*, Phys. Rev. D **90** (2014) 022004.

[107] M. Reuter and H. Weyer, *Renormalization group improved gravitational actions: A Brans-Dicke approach*, Phys. Rev. D **69** (2004) 104022.

[108] I.L. Shapiro and J. Solà, *The scaling evolution of cosmological constant*, JHEP **0202** (2002) 006.

[109] I.L. Shapiro and J. Solà, *Can the cosmological 'constant' run? - It may run*, arXiv:0808.0315.

[110] O. Bertolami and J. Garcia-Bellido, *Astrophysical and cosmological constraints on a scale dependent gravitational coupling* , Int. J. Mod. Phys. **D5** (1996) 363-374.

[111] M. Reuter and H. Weyer, *Quantum gravity at astrophysical distances?*, JCAP **12** (2004) 001.

[112] E.M. Peskin and D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press (1995).

[113] I. L. Shapiro, *Effective Action of Vacuum: Semiclassical Approach*, Class. Quant. Grav. **25** (2008) 103001.

[114] K.S. Stelle, *Renormalization of higher-derivative quantum gravity*, Phys. Rev. D **16** (1977) 953.