

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA–UFJF  
PROGRAMA DE PÓS–GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Dissertação de Mestrado

**Sistemas de mundo brana com gravitação modificada  
 $f(R)$  generalizada e branas curvas**

**Aluno: Rafael Leite Fernandes**

**Orientador: Prof. Dr. Everton M. C. de Abreu**

**Co-Orientador: Prof. Dr. Wilson Oliveira**

5 DE MARÇO DE 2013

JUIZ DE FORA–MG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA–UFJF

PROGRAMA DE PÓS–GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Dissertação de Mestrado

**Sistemas de mundo brana com gravitação modificada  
 $f(R)$  generalizada e branas curvas**

**Aluno: Rafael Leite Fernandes**

**Orientador: Prof. Dr. Everton M. C. de Abreu**

**Co-Orientador: Prof. Dr. Wilson Oliveira**

Dissertação de mestrado submetida ao Programa de Pós–Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de mestre em Física.

5 DE MARÇO DE 2013

JUIZ DE FORA–MG

# Dedicatória

*Dedico esta dissertação aos meus pais, à minha namorada Vanessa, aos professores do Departamento de Física da UFJF e aos meus amigos.*

# Agradecimentos

Aos meus pais, Valdemiro e Eliane, pelo apoio de uma vida inteira.

À minha namorada, Vanessa, por me compreender nas ausências e me apoiar nos momentos difíceis.

A todos os meus amigos, que de alguma forma contribuíram para este trabalho.

Ao professor Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu (Orientador) e pela atenção e confiança em meu trabalho.

Ao professor Dr. Wilson Oliveira (Co-orientador), pelo apoio e confiança.

À coordenação da pós-graduação, ao secretário da pós-graduação Domingos e aos professores do Departamento de Física da UFJF.

À CAPES pelo apoio financeiro.

# Resumo

Neste trabalho vamos mostrar que o sistema chamado de “mundo brana” para representar o nosso Universo, introduzido por Randall-Sundrum (RS) no fim dos anos noventa, pode ser na verdade representado por branas curvas no espaço de de Sitter e Anti-de Sitter. Originalmente o sistema RS representaria um Universo com cinco dimensões onde o modelo padrão ficaria confinado em uma brana e os grávitons ficariam confinados na outra brana. Este sistema foi construído com uma métrica de Minkowski “torcida” com cinco dimensões onde os grávitons, responsáveis pelo campo gravitacional no modelo padrão, se deslocariam através da quinta dimensão, que por sua vez é infinita. E a ação padrão da relatividade geral, a ação de Einstein-Hilbert, foi a utilizada por RS. Neste trabalho de dissertação de mestrado vamos adotar uma ação modificada usada atualmente para explicar efeitos cosmológicos como a energia escura e a expansão do Universo por exemplo, ou seja, a ação com uma gravitação modificada chamada de  $f(R)$ . Aqui vamos usar uma  $f(R)$  totalmente generalizada e suas consequências cosmológicas e viabilidade serão analisadas. Finalmente, vamos demonstrar que as partículas do modelo padrão estão confinadas nesta brana curva. Os resultados obtidos aqui generalizam totalmente outros resultados obtidos na literatura atual sobre mundo brana com branas grossas e são por isso, originais e serão submetidos à publicação.

**Palavras chave:** Universo de mundo brana; espaço de de Sitter e Anti-de Sitter; gravitação modificada  $f(R)$  generalizada; confinamento.

# Abstract

In this work we will show that the so-called “brane world” framework introduced by Randall-Sundrum (RS), to represent our Universe, at the late nineties can be represented in fact by bent branes in de Sitter and Anti-de Sitter space with a generalized model for gravity. At the beginning, the RS scenario represent a Universe in five dimensions where the Standard Model is confined in one brane and the gravitons were confined in the another one. This model was build with a warped Minkowski metric with five dimensions where the gravitons, which are responsible by the gravitational field, are able to move through the fifth dimension, which is infinity. The standard general relativity action, namely, the Einstein-Hilbert action, was the one used by RS. In this Master dissertation we will adopt a modified action used at present to explain some cosmological effects like dark energy and Universe expansion, for example, i.e., we will use an action with a modified gravitation called  $f(R)$ . However, here we will use a generalized  $f(R)$  and their cosmological consequences and viability will be analyzed. Finally, we will show that the particles of the Standard Model are confined at this bent brane. The results obtained here generalize altogether the others results obtained in the current literature concerning braneworlds with thick branes and are, consequently, new ones, which will be published elsewhere.

**Keywords:** Brane world universe; de Sitter and Anti-de Sitter space; generalized modified gravitation  $f(R)$ ; confinement.

# Lista de Figuras

3.1 Modelo de Randall-Sundrum RS2.....	p17
--	-----

# Conteúdo

<b>Resumo</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Conteúdo</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>vi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Gravitação modificada <math>f(R)</math></b>	<b>5</b>
2.1 Cosmologia . . . . .	5
2.2 Gravitação modificada $f(R)$ . . . . .	10
<b>3 Modelo de branas grossas:</b>	<b>13</b>
3.1 Escala de Planck e escala fundamental da Gravidade . . . . .	13
3.2 Modelo de Kaluza e Klein . . . . .	16
3.3 O modelo de Randall-Sundrum . . . . .	17
3.4 Branas grossas e o limite de espessura zero . . . . .	21
<b>4 Branas curvas com teoria <math>f(R)</math> generalizada</b>	<b>27</b>
4.1 Modelo de branas planas com teoria $f(R)$ . . . . .	28
4.2 Modelos de branas curvas com teoria $f(R)$ . . . . .	33
4.2.1 Uma equação mestra para $y$ para uma $f(R)$ generalizada . . . . .	36
4.2.2 Viabilidade cosmológica da $f(R)$ generalizada . . . . .	38
4.2.3 Solução assintótica . . . . .	40
4.3 Confinamento . . . . .	42
<b>5 Conclusões e Perspectivas</b>	<b>45</b>



<b>A</b>	<b>Essência da RG</b>	<b>47</b>
A.1	Geometria diferencial . . . . .	47
A.2	Relatividade Geral com campo escalar . . . . .	60
<b>B</b>	<b>Ação na mecânica clássica e a álgebra de Poincaré</b>	<b>61</b>
B.1	A lagrangiana na mecânica clássica . . . . .	61
B.2	Espaço de Minkowski e o grupo de Poincaré . . . . .	66
<b>C</b>	<b>Cálculos do capítulo 3</b>	<b>71</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>74</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Atualmente, a presença de dimensões extras desempenha um papel fundamental em qualquer teoria que tente explicar interações físicas baseadas em princípios universais. Assim como qualquer teoria que tente unificar as forças fundamentais, como *Supercordas-Teoria M*, deve possuir dimensões extras. A visão tradicional das dimensões extras é a de que essas dimensões estão compactificadas, assim o tamanho característico dessas dimensões extras se torna muito menor do que a do espaço em 4 dimensões e assim não podemos percebê-las.

O primeiro modelo publicado a apresentar dimensões extras foi o modelo conhecido como modelo de Kaluza-Klein (KK), proposto por Theodor Kaluza e Oskar Klein em meados de 1920 [1]. Este modelo surgiu com a intenção de unificar o eletromagnetismo com a relatividade geral (RG) de Einstein. A ideia básica era acrescentar uma dimensão e sendo assim a gravidade estaria restrita a quatro dimensões e o eletromagnetismo entraria na teoria como uma dimensão extra.

Com o questionamento sobre a dimensionalidade do universo, é natural perguntarmos porque as dimensões físicas observadas do nosso universo são 4. Se existem outras dimensões, porque não as observamos? Parece óbvio que se as dimensões extras estão escondidas dos observadores, o universo se apresenta em 4 dimensões. Mas ainda não há uma resposta definitiva para estas questões.

Nas últimas décadas, a ideia de dimensões extras vem se tornando cada vez mais popular. Acredita-se que muitos problemas da física de partículas elementares podem ser resolvidos introduzindo-se cordas, supersimetria, e aumentando o número de dimensões do espaço-tempo.

Recentemente surgiu uma nova descrição para o universo chamada de *mundo brana*, que trata o universo em 4 dimensões (brana) mergulhado em algum espaço multidimensional, o volume (bulk).

A ideia básica do modelo de branas do universo, é que as partículas do modelo padrão, eletromagnetismo, interações fraca e forte, estão confinadas em alguma hipersuperfície (brana), que por sua vez está embutida em um espaço multidimensional (volume). Apenas

a gravidade (o gráviton), e algumas matérias exóticas, podem se propagar pelo volume.

Os trabalhos pioneiros na direção de branas foram feitos em [2, 9]. Estes modelos foram construídos fenomenologicamente e considerados como defeitos topológicos, isto é, branas grossas na linguagem atual. Em [2], a ideia de que as dimensões extras poderiam não estar compactificadas foi sugerida. Foi proposto que viveríamos em um vórtice envolvendo o espaço multidimensional. A ideia principal foi considerar a Lagrangiana de Higgs em um espaço plano em 6 dimensões

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{MN}F^{MN} + D_M\phi^\dagger D^M\phi + a|\phi|^2 - b|\phi|^4 + c, \quad (1.1)$$

onde  $F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M$  e  $D_M\phi = \partial_M + ieA_M$  e temos um acoplamento mínimo com o campo eletromagnético,  $M, N = 0, \dots, 5$ . É possível obter a gravidade de Einstein induzida no vórtice. As equações de campo correspondendo a solução do vórtice são

$$\begin{aligned} A_M &= \epsilon_{0123MN}A(r)\frac{X^N}{r}, \\ \phi &= \varphi(r)e^{in\theta}, \\ r^2 &= (x^5)^2 + (x^6)^2, \end{aligned} \quad (1.2)$$

onde  $A(r)$  e  $\varphi(r)$  são soluções das equações diferenciais de Nielsen-Olsen descrevendo o vórtice e  $M, N = 4, 5$ . Introduzindo coordenadas curvilineas

$$X_M = Y^M(x^\mu) + n_m^M x^m,$$

onde

$$\begin{aligned} M &= 0, 1, 2, 3, 5, 6, \\ \mu &= 0, 1, 2, 3, \quad m = 5, 6, \end{aligned} \quad (1.3)$$

onde  $X^M$  são coordenadas Cartesianas e  $n_m^M$  são vetores normais ao vórtice, pode-se mostrar que a ação de Einstein-Hilbert é induzida através de polarizações do vácuo.

A ideia de que vivemos em uma *parede de domínio* (ou mundo brana na linguagem atual) e que partículas comuns estão confinadas dentro de uma parede de potencial foi sugerida em [2]. A Lagrangiana do modelo considerado foi

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_A\varphi\partial^A\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{1}{4}\varphi^4, \quad (1.4)$$

com  $A = 0, 1, \dots, 4$ . Esta Lagrangiana descreve um campo escalar em um espaço-tempo em  $(4+1)$  dimensões  $M^{(4,1)}$ , com métrica  $g_{AB} = \text{diag}(1, -1, -1, -1, -1)$ . As equações de campo clássicas para o campo escalar  $\varphi$  admitem uma solução do tipo

$$\varphi^{cl}(x) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{tgh} \left( \frac{mx^4}{\sqrt{2}} \right), \quad (1.5)$$

esta solução pode ser considerada uma solução do tipo parede de domínio. Em [2] também foi discutido a possibilidade de confinamento de partículas de spin 0 e  $\frac{1}{2}$  na parede de domínio. Para partículas de spin 0, mostrou-se que existem três tipos de perturbação: na primeira, a partícula está confinada na parede de domínio com energia  $E = \vec{k}^2$ , na segunda a partícula está confinada na parede de domínio com energia  $E = \vec{k}^2 + \frac{3}{2}m^2$  e por último, a partícula não está confinada na parede de domínio e para  $x^4$  grande, a energia é  $E = \vec{k}^2 + (k^4) + 2m^2$ .

Em 1999, Randall e Sundrum (RS) [4], lançaram um modelo muito interessante de branas com uma nova aproximação para reconciliar dimensões extras com a observação. Este modelo não pertencia à teoria de cordas ou à teoria M, mas considerava o universo como uma brana possuindo  $(3 + 1)$  dimensões, embutido em um volume com  $(4 + 1)$  dimensões com uma constante cosmológica negativa. A solução do volume obtida é localmente um espaço anti-de Sitter (AdS) e a direção transversal à brana é não compacta. Este modelo foi apontado como uma possível resposta para o problema da hierarquia entre a escala fraca (TeV) no modelo padrão e a escala da gravitação em 4 dimensões ( $10^{19} GeV$ ).

Não obstante, em energia baixa o suficiente, a gravidade Newtoniana perturbativa é recuperada na brana para grandes distâncias. Por isso, houve interesse considerável em examinar se a conformidade com a gravidade em 4 dimensões se estende além da teoria perturbativa. De uma maneira natural, a questão se o modelo RS está hábil para reproduzir as previsões da RG em  $(3 + 1)$  dimensões relativas aos buracos negros tem estimulado a produção de vários artigos. Para responder a esta questão, é necessário construir uma solução exata do modelo RS que descreve buracos negros na brana. Infelizmente, nenhuma solução analítica satisfatória foi obtida neste contexto. Soluções numéricas foram obtidas mas apenas para pequenos buracos negros.

Trabalhar com uma formulação de mundo brana, tem sido um caminho interessante para entender algumas das questões mais relevantes da física teórica atual. A evolução do universo tem sido a questão principal e algumas teorias têm sido propostas neste sentido. Estas propostas são concisas sobre este tipo de pesquisa e nos levam a um cenário multidimensional. A ideia de que tais dimensões extras podem não estar compactadas está permitindo novas considerações sobre o problema da hierarquia e conseqüentemente da constante cosmológica [4].

A existência de dimensões extras ( $d$ ) além das 4 habituais, parece ser uma maneira bem atrativa de entender a realidade da física teórica. Para perceber tais sinais, deve-se saber primeiramente, como uma física em 4 dimensões surge de um cenário com dimensões extras. Nossa primeira motivação deve ser que a gravidade é a construção da geometria do espaço com o conceito de que em dimensões extras, a gravitação de Einstein deve governar. Neste sentido a constante de acoplamento não deve coincidir com a constante

de Newton. Alguns autores [5, 28] nos dão uma revisão introdutória para aproximações alternativas que consideram os aspectos das dimensões extras como possíveis teorias para tais fenômenos descritos pela ação

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int d^{4+d}x \sqrt{|g_{(4+d)}|} R_{(4+d)}. \quad (1.6)$$

Devemos entender que as dimensões extras serão obtidas pela integração de um volume extra e que estas novas dimensões devem ser bem definidas na constante de acoplamento da gravidade.

Existe uma classificação muito específica para branas: em poucas palavras elas podem ser finas ou possuir uma espessura [11]. Branas finas possuem uma função delta de Dirac introduzida em sua ação [4]. Esta função delta de Dirac nos ajuda a localizar campos e gravidade em tais branas. Na construção dinâmica de branas grossas, um ou mais campos escalares estão acoplados com a gravidade [14]. A investigação de branas grossas possui a vantagem de que a localização de campos e gravidade pode ser realizada com a introdução de funções suaves, diretamente da função delta de Dirac. Naturalmente, soluções de branas finas podem ser recuperadas em limites precisos [16].

Tem sido bem aceito considerar a teoria  $f(R)$  como um modelo teórico para descrever o universo em expansão sem a necessidade de introduzir uma *energia escura*. Embora a gravitação  $f(R)$  nos formalismos de Palatini e métrico sejam equivalentes à representação de Brans-Dicke, a representação  $f(R)$  pode ser mais conveniente devido à sua natureza geométrica natural. A representação de Brans-Dicke parece mais apropriada para a física de partículas. Neste trabalho iremos estudar uma solução de branas grossas para o caso geral em que  $f(R) = aR + bR^2 - \alpha R^n$ . Pretendemos analisar os resultados com alguns valores particulares dos parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $n$ , e estabelecer algumas relações entre os resultados e as análises fenomenológicas. Parece natural realizar algumas especulações neste trabalho, uma vez que alguns resultados sobre a expansão do Universo foram apresentados para faixas específicas de  $n$  e isto parece estar de acordo com os dados experimentais [8]. Além disso, foi mostrado recentemente que algumas soluções assintoticamente anti-de Sitter são viáveis para algumas faixas de valores de  $n$  [19]. Vamos mostrar especificamente que os resultados obtidos em [19], formulados no espaço chato, podem ser considerados casos especiais dos resultados obtidos aqui. Vale a pena falar que o leitor interessado pode encontrar bons trabalhos de revisão sobre  $f(R)$  em [18].

# Capítulo 2

## Gravitação modificada $f(R)$

Quando Albert Einstein introduziu a Teoria da Relatividade Geral em 1915, esta se consolidou como a teoria mais aceita para descrever a gravitação. Porém, no final do século passado, as questões relacionadas às suas limitações se tornaram mais pertinentes. Quando se observou que o universo estava em expansão acelerada, houve tentativas para descobrir o mecanismo que causa este fenômeno. Falaremos aqui de um modelo alternativo para descrever o universo em expansão, chamado gravitação modificada  $f(R)$ .

### 2.1 Cosmologia

Vamos agora falar um pouco de cosmologia e a necessidade de uma teoria da gravitação modificada. Começaremos tratando de um universo que possua simetria máxima, para que isso ocorra o universo deve ser isotrópico e homogêneo. Por isotropia se entende que o espaço é o mesmo, não importando para qual direção se olhe. Por ser homogêneo, significa que a métrica é a mesma em toda a variedade  $\mathbf{M}$ . Matematicamente significa dizer que para dois pontos quaisquer  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  na variedade  $\mathbf{M}$ , existe uma isometria que leve  $\mathbf{p}$  em  $\mathbf{q}$  e vice-versa.

Para a descrição matemática de um universo *homogêneo* e *isotrópico* [20], utiliza-se a métrica de Robertson-Walker, onde o elemento de linha desta geometria é dado por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (2.1)$$

onde  $a(t) = \frac{R(t)}{R_0}$ , é o **fator de escala**, que nos diz a distância entre dois objetos, galáxias por exemplo, em determinado instante,  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$  e  $k$  é uma constante que pode possuir os valores  $-1, 0$  e  $1$ , para os espaços de de Sitter, chato e anti-de Sitter respectivamente.

Para encontrar as equações de Einstein correspondentes a essa métrica, utilizou-se o tensor de momento-energia do fluido perfeito.

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

onde  $u_\mu$  é a quadrivelocidade,  $\rho$  é a densidade de matéria e  $p$  é a pressão exercida pela matéria e  $g_{\mu\nu}$  é o tensor métrico do espaço curvo. Sendo que  $\rho$  e  $p$  obedecem à seguinte equação de estado

$$p = \omega\rho, \quad (2.3)$$

onde  $\omega$  é uma constante independente do tempo.

Dois exemplos de fluidos são a matéria e a radiação. Sendo a matéria, formada por partículas não relativísticas onde a colisão entre essas partículas é desprezível, e não exercem pressão, ou seja

$$p_M = 0, \quad (2.4)$$

e a densidade de energia cai com

$$\rho_M \propto a^{-3}. \quad (2.5)$$

Para a radiação, a densidade de radiação cai com

$$\rho_R \propto a^{-4}, \quad (2.6)$$

assim, a densidade de radiação cai mais rapidamente do que a densidade de matéria,  $\frac{\rho_M}{\rho_R} \sim 10^3$ .

A energia do vácuo, Apêndice A, possui equação  $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ . A densidade de energia neste caso é constante

$$\rho_\Lambda \propto a^0. \quad (2.7)$$

Um universo onde predomina a densidade de matéria é chamado **dominado por matéria**. Quando a radiação predomina é chamado **dominado por radiação** e um universo onde a energia do vácuo predomina **dominado pelo vácuo**.

Resolvendo as equações de Einstein para o tensor de momento-energia (2.2), temos as equações de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (2.8)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (2.9)$$

onde, na primeira equação, se conhecemos a dependência de  $\rho$  em  $a$ , podemos determinar

$a(t)$ .

Uma quantidade importante é o chamado **parâmetro de Hubble** que caracteriza a taxa de expansão do universo.

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.10)$$

Define-se também o **parâmetro de desaceleração**

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}, \quad (2.11)$$

e o **parâmetro de densidade**

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{crit}}, \quad (2.12)$$

onde a densidade crítica é definida como sendo

$$\rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (2.13)$$

que é chamada de densidade crítica porque podemos escrever a equação de Friedmann como

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2}, \quad (2.14)$$

assim,  $k$  é determinado por  $\Omega$

$$\begin{aligned} \rho < \rho_{crit} &\leftrightarrow \Omega < 1 \leftrightarrow k < 0 \leftrightarrow \text{universo aberto} \\ \rho = \rho_{crit} &\leftrightarrow \Omega = 1 \leftrightarrow k = 0 \leftrightarrow \text{universo plano} \\ \rho > \rho_{crit} &\leftrightarrow \Omega > 1 \leftrightarrow k > 0 \leftrightarrow \text{universo fechado.} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Ou seja, o parâmetro de densidade nos diz, qual das geometrias de Roberston-Walker descreve nosso universo.

Lembrando que  $\rho_M = 0$ , enquanto a energia do vácuo é associada à pressão negativa  $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ , vamos escrever as equações de Friedmann com matéria e a constante cosmológica  $\Lambda$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_M - 2\rho_\Lambda), \quad (2.16)$$

assim, se  $\rho_\Lambda$  é muito maior do que  $\rho_M$ , como as observações de supernovas indicam, podemos ter  $\ddot{a} > 0$ , ou seja, um universo em expansão acelerada.

O valor da medida do parâmetro de densidade da matéria, realizada através de vários métodos experimentais, frequentemente envolvendo medida da densidade  $\rho_M$  e observando os efeitos gravitacionais de agrupamentos de matéria e extrapolando para largas escalas, é



$$\Omega_{M0} = 0,3 \pm 0,1. \quad (2.17)$$

Antes de existir uma boa evidência sobre a constante cosmológica  $\Lambda$ , esta baixa densidade de matéria foi considerada um indicador de que o espaço possuía curvatura negativa,  $k < 1$ .

Além da matéria e da constante cosmológica, temos também a radiação do universo. Uma fonte de radiação são os fótons, no qual a maior parte da energia reside na *radiação cósmica de fundo* (RCF), a radiação que sobrou do *big bang*. Espera-se que a densidade de fundo de neutrinos seja comparável com a dos fótons. É provável que a densidade dos fótons seja muito grande, pois fótons podem ter sido criados depois do número de neutrinos permanecer fixo. Entretanto, se a massa dos neutrinos for suficientemente grande, eles teriam se tornado não relativistas atualmente e contribuiriam mais para a matéria do que para a radiação. Ideias atuais sobre a massa dos neutrinos sugerem que este é provavelmente o caso, mas isto não está perfeitamente claro. De modo geral, parece provável que a densidade total de radiação seja da mesma ordem de magnitude da densidade dos fótons, neste caso

$$\Omega_{R0} \sim 10^{-4}. \quad (2.18)$$

Uma observação crucial para os parâmetros cosmológicos vem da anisotropia na temperatura da radiação de fundo [20]. A temperatura média da RCF é  $T_{RCF} = 2.74K$ , porém em 1992 o satélite COBE descobriu flutuações no nível de  $\frac{\Delta T}{T} \sim 10^{-5}$  de um lugar para outro. Um mapeamento da temperatura da RCF em todo o céu, claramente possui muitas informações, porém, nenhuma teoria previa o que a temperatura em cada ponto significava. Em vez disso, teorias modernas geralmente preveem valores esperados da quantidade de anisotropia em qualquer dada escala angular.

Uma variedade de experimentos vêm medindo o chamado espectro de potência da RCF, e com o aperfeiçoamento das medidas, um grande número de informações vêm surgindo. Para tornar estas medidas úteis, precisamos de uma teoria que preveja o espectro de potência da RCF como uma função dos parâmetros cosmológicos. Para tanto, ou as densidades de perturbações estão impressas em todas as escalas nos tempos extremamente primitivos, até mesmo os modos para o qual o comprimento de onda físico  $\lambda$  era muito maior do que o raio de Hubble  $H^{-1}$ , ou mecanismos dinâmicos locais atuam como fontes para a anisotropia em todas as épocas. A última hipótese foi descartada pois, se as anisotropias são produzidas continuamente, espera-se um espectro relativamente suave, enquanto o que se observa é uma quantidade significativa de estrutura. É mais plausível imaginar uma fonte primordial de perturbações, tal como inflação, que não será tratada neste trabalho. Perturbações inflacionárias são adiabáticas - perturbações na matéria estão relacionadas com aquelas na densidade de radiação - e aproximadamente iguais em magnitude em todas as escalas. Com isto podemos fazer previsões para os parâmetros

cosmológicos. Talvez, o resultado mais significativo encontrado, tenha sido o de que o universo é espacialmente plano, quase plano;  $|\Omega_{c0}| < 0.1$ . Combinando com a densidade de matéria,  $\Omega_M \approx 0.3$ , conclui-se que

$$\Omega_{\Lambda 0} = 0,7 \pm 0,1. \quad (2.19)$$

Assim, 30% da energia do universo é constituída de matéria, que pode ser qualquer coleção de partículas não relativísticas, que é chamada de **matéria bariônica** ou **matéria comum**. O que ocorre é que essa matéria não corresponde ao que é observado no universo, que é de apenas

$$\Omega_b = 0,04 \pm 0,02. \quad (2.20)$$

Então a maior parte da densidade de matéria deve ser da forma de matéria escura não bariônica, que é abreviadamente chamada **matéria escura**. Todas as partículas do modelo padrão foram descartadas para desempenhar esse papel.

Para o cenário em que  $\Omega_M = 0.3$  e  $\Omega_\Lambda = 0.7$ , parece caber um número impressionante de dados observacionais. Daí surgem as questões: Por que a constante cosmológica é muito menor do que o valor esperado? Qual a origem da pequena energia diferente de zero que compreende 70% do universo? E, por que o valor atual da energia do vácuo é da mesma ordem de magnitude da densidade de energia?

A última questão nos diz que, se  $\Omega_M$  e  $\Omega_\Lambda$  são comparáveis atualmente, no passado a energia do vácuo deve ter sido muito pequena, indetectável, enquanto no futuro a densidade de matéria será desprezível. Existem algumas sugestões para resolver este problema, uma delas é baseada no princípio antrópico. Se existem várias partes distintas no universo no qual a constante cosmológica assume valores distintos, vida inteligente iria surgir naquele lugar onde o valor absoluto não for muito grande, porque se  $\Lambda$  for muito grande e positiva, partículas distantes seriam destruídas impedindo a formação de galáxias, e se  $\Lambda$  fosse muito grande e com um valor negativo, o universo iria colapsar antes do surgimento da vida. Outra ideia, é a de que não detectamos uma constante cosmológica diferente de zero, mas sim um componente dinâmico que possui as propriedades da energia do vácuo. Isto levou os cosmólogos a utilizar o termo **energia escura** para descrever essa fonte desconhecida de energia.

Porém uma outra maneira de descrever o universo acelerado com estas características seria modificar a RG. Uma forma de RG modificada é a teoria  $f(R)$ , que discutiremos agora.

## 2.2 Gravitação modificada $f(R)$

A ação da RG é definida pelo escalar de Ricci, Apêndice A. A teoria  $f(R)$  surgiu com o intuito de obter invariantes de ordens mais altas do que a ação gravitacional, então vamos escrever a Lagrangiana como

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}f(R) \quad (2.21)$$

onde  $f(R)$  é uma função do escalar de Ricci  $R$ .

Neste trabalho, utilizaremos apenas a chamada **gravidade  $f(R)$  métrica**, na qual a variação da ação se dá em relação ao tensor métrico.

Escrevendo então a ação neste formalismo, temos

$$S = \frac{1}{2k} \int \sqrt{-g}f(R)d^4x + S_M, \quad (2.22)$$

onde  $S_M$  é a ação relativa à matéria e  $k = 8\pi G$  é a constante gravitacional.

Realizando a variação com respeito ao tensor métrico, podemos escrever a variação do primeiro termo do lado direito de (2.22) como

$$\delta S = \delta S_1 + \delta S_2, \quad (2.23)$$

onde

$$\begin{aligned} \delta S_1 &= \frac{1}{2k} \int (\delta\sqrt{-g})f(R)d^4x, \\ \delta S_2 &= \frac{1}{2k} \int \sqrt{-g}(\delta f(R))d^4x, \end{aligned} \quad (2.24)$$

e

$$\delta f(R) = \frac{\partial f(R)}{\partial R} \delta R = f_R \delta R, \quad (2.25)$$

onde  $f_R$  significa  $\frac{\partial f(R)}{\partial R}$ .

Utilizando a expressão  $\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}\delta g^{\rho\sigma}$ , mais detalhes no Apêndice A, a variação  $\delta\sqrt{-g}$  fica

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.$$

No caso da RG, o termo  $\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$  não contribuiu para a integral, mas agora não podemos escrevê-lo como uma derivada total e utilizar o teorema de Stokes. Então,

$$\delta R = (\delta R_{\mu\nu})g^{\mu\nu} + R_{\mu\nu}(\delta g^{\mu\nu}), \quad (2.26)$$

onde podemos também utilizar a equação de Palatini e escrever,

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho \delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\rho\mu}^\rho. \quad (2.27)$$

Para a conexão teremos que

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma = -\frac{1}{2} [g_{\lambda\mu} \nabla_\nu (\delta g^{\lambda\sigma}) + g_{\lambda\nu} \nabla_\mu (\delta g^{\lambda\sigma}) - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \nabla^\sigma (\delta g^{\alpha\beta})]. \quad (2.28)$$

Após alguma álgebra, encontramos a variação do escalar de Ricci

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \nabla^\alpha \nabla_\alpha \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.29)$$

Então, pela equação (2.23), utilizando o princípio de Hamilton,  $\delta S = 0$ , e integrando por partes, finalmente encontramos

$$f_R R_{\alpha\beta} - \frac{f(R)}{2} g_{\alpha\beta} - \nabla_\alpha \nabla_\beta f_R + g_{\alpha\beta} \square f_R = k T_{\alpha\beta}, \quad (2.30)$$

que são as equações de movimento da teoria  $f(R)$  modificada.

O traço da equação (2.30) é dado por

$$f_R R - 2f(R) + 3\square f_R = kT, \quad (2.31)$$

onde  $T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$ , que relaciona  $R$  com  $T$  diferencialmente e não algebricamente como na RG, sendo  $R = -kT$ . Portanto, temos indícios de que a teoria  $f(R)$  deve admitir mais soluções do que a RG. Se fizermos  $T = 0$  não implica que  $R = 0$  ou constante.

Como nossa motivação para buscar uma teoria de gravitação modificada [15], era descrever um universo em expansão sem a necessidade de lançar mão de argumentos como energia escura, vamos agora mostrar que a teoria  $f(R)$  satisfaz este requisito.

Inserindo a métrica plana de Robertson-Walker (2.1) nas equações de campo (2.30) e utilizando o tensor-momento energia (2.2), encontramos

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{k}{3f_R} \left[ \rho + \frac{Rf_R - f}{2} - 3H\dot{R}f_{RR} \right] \\ 2\dot{H} + 3H^2 &= -\frac{k}{f_R} \left[ p + (\dot{R}^2)f_{RRR} + 2H\dot{R}f_{RR} + \ddot{R}f_{RR} + \frac{1}{2}(f - Rf_R) \right]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Se identificarmos a densidade de energia efetiva como

$$\rho_{eff} = \frac{Rf_R - f}{2f_R} - \frac{3H\dot{R}f_{RR}}{f_R}, \quad (2.33)$$

e a pressão efetiva como

$$P_{eff} = \frac{\dot{R}^2 f_{RRR} + 2H\dot{R}f_{RR} + \ddot{R}f_{RR} + \frac{1}{2}(f - Rf_R)}{f_R}, \quad (2.34)$$

podemos obter, no vácuo, a forma padrão das equações de Friedmann

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{k}{3}\rho_{eff} \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{k}{6}[\rho_{eff} + 3P_{eff}]. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Assim, a teoria  $f(R)$  realmente descreve um universo em expansão sem a necessidade de introduzir a energia escura.

# Capítulo 3

## Modelo de branas grossas:

Aqui faremos uma breve discussão sobre os principais modelos possuindo dimensões extras. Em particular o modelo de Kaluza-Klein, no qual a quinta dimensão é periódica e muito pequena, por isso não podemos percebê-la e o modelo de Randall-Sundrum, que trata o universo como uma brana mergulhada em uma quinta dimensão. Em seguida ampliaremos o conceito de branas para branas grossas.

### 3.1 Escala de Planck e escala fundamental da Gravidade

Na gravitação de Newton, a força gravitacional entre dois corpos de massa  $m_1$  e  $m_2$  separados pela distância  $\vec{r} = r\hat{e}$ , é dada por

$$\vec{F}_{(4)} = \frac{G_{(4)}m_1m_2}{r^2}\hat{e}, \quad (3.1)$$

onde  $G_{(4)}$  denota a constante de Newton em 4 dimensões.

Realizando uma análise dimensional em  $G_{(4)}$ , temos

$$\begin{aligned} [G_{(4)}] &= \frac{(m)(kg)}{s^2} \frac{m^2}{kg^2} \\ &= \frac{m^3}{(kg)(s^2)}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Uma escala muito útil é a chamada escala de Planck [26], que relaciona as três constantes fundamentais,  $\mathbf{c}$  que é velocidade da luz no vácuo,  $\hbar$  que é a constante de Planck dividida por  $2\pi$  e a constante  $G_{(4)}$ . Essas constantes possuem o valor unitário nesse sistema de unidades, ou seja

$$\begin{aligned}
G_{(4)} &= 1 \frac{l_p^3}{(m_p)(t_p^2)} \\
c &= 1 \frac{l_p}{t_p} \\
\hbar &= 1 \frac{l_p^2}{m_p} t_p,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

onde  $l_p$ ,  $m_p$  e  $t_p$ , são o comprimento, a massa e o tempo de Planck respectivamente, sendo dados por

$$\begin{aligned}
l_p &= \sqrt{\frac{G_{(4)}\hbar}{c^3}} = 1,616 \times 10^{-33} \text{ cm} \\
t_p &= \frac{l_p}{c} = 5,391 \times 10^{-44} \text{ s} \\
m_p &= \sqrt{\frac{\hbar c}{G_{(4)}}} = 2,176 \times 10^{-5} \text{ g}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Porém, quando se trata de dimensões extras, a escala de Planck, que denotaremos por  $M_4$ , não é mais a escala fundamental, mas sim a escala de cordas que denotaremos por  $M_{(4+d)}$ , onde  $d$  é o número de dimensões extras. Assim como a constante de Newton  $G_{(4)}$  não é mais a constante fundamental da gravidade e sim  $G_{(4+d)}$ . A relação entre as duas escalas pode ser obtida pela ação de Einstein-Hilbert com dimensões extras

$$S_{\text{gravidade}} = -\frac{1}{16\pi G_{(4+d)}} \int d^{4+d}x \sqrt{g_{(4+d)}} R_{(4+d)}, \tag{3.5}$$

onde  $G_{(4+d)}$  é a constante fundamental,  $R_{(4+d)}$  o escalar de Ricci e  $g_{(4+d)}$  o determinante da métrica em  $(4+d)$  dimensões. Vamos considerar uma métrica, como fizeram os autores de [28], na qual as dimensões extras são planas, ou seja,

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu - \delta_{ab} dx^a dx^b, \tag{3.6}$$

onde  $g_{\mu\nu}(x)$  é a métrica em 4 dimensões e  $a, b = 1, \dots, d$ , assim  $R_{4+d} = R_4$  e  $g_{4+d} = g_4$ . Integrando as dimensões extras na equação (3.5) obtemos

$$S_{\text{gravidade}} = -\frac{V_d}{16\pi G_{4+d}} \int d^4x \sqrt{g_{(4)}} R_{(4)}, \tag{3.7}$$

onde  $V_d$  é o volume das dimensões extras.

Pelas equações (3.5) e (3.7) encontramos a relação entre a constante de Newton  $G_{(4)}$  e a constante fundamental  $G_{(4+d)}$ ,

$$G_{(4)} = \frac{G_{(4+d)}}{V_d}. \quad (3.8)$$

A escala de Planck  $M_{(4)}$ , em termos da constante  $G_{(4)}$ , é dada por

$$M_4 = \left[ \frac{\hbar c^5}{8\pi G_{(4)}} \right]^{\frac{1}{2}} \sim 2.4 \times 10^{18} GeV. \quad (3.9)$$

agora usando  $G_{(4+d)}$  no lugar de  $G_{(4)}$ , definimos a escala de cordas como sendo

$$M_{(4+d)} = \left[ \frac{\hbar^{1+d} c^{5+d}}{8\pi G_{(4+d)}} \right]^{\frac{1}{2+d}}. \quad (3.10)$$

Assim, a relação entre a escala de Planck e a escala fundamental da gravidade, em unidades naturais ( $c = \hbar = 1$ ), é dada por

$$M_4^2 = M^{d+2} V_d, \quad (3.11)$$

ou seja, a escala de Planck está relacionada com a escala de cordas pelo volume das dimensões extras.



## 3.2 Modelo de Kaluza e Klein

No modelo de KK a quinta dimensão é periódica, ou seja

$$z \sim z + 2\pi r, \quad (3.12)$$

sendo que o espaço obtido é o produto  $\mathcal{M}^4 \otimes S^1$ , onde  $\mathcal{M}^4$  é o espaço de Minkowski em 4 dimensões e  $S^1$  é um círculo, podendo ser imaginado como um cilindro em 5 dimensões e raio  $r$ .

Seja a ação do campo escalar  $\phi(x, z)$ , dada por

$$S_{[\phi]} = \frac{1}{2} \int d^4x dz (\partial^A \phi \partial_A \phi - m^2 \phi^2), \quad (3.13)$$

com  $A = 1, \dots, 5$  e  $z$  é a dimensão extra. Como o campo escalar é periódico,  $\phi(z) = \phi(z + 2\pi r)$ , podemos expandi-lo em uma série de Fourier [28] do tipo

$$\phi(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \phi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi r}} \left[ \phi_n(x) \cos\left(\frac{nz}{r}\right) + \hat{\phi}_n(x) \sin\left(\frac{nz}{r}\right) \right], \quad (3.14)$$

onde  $\phi_0$  não depende da quinta dimensão, sendo chamado de *modo zero*, e os outros modos de Fourier,  $\phi_n$  e  $\hat{\phi}_n$ , são os modos excitados de Kaluza-Klein.

Substituindo a equação (3.14) na ação (3.13), obtemos

$$S_{[\phi]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \int d^4x (\partial^\mu \phi_n \partial_\mu \phi_n - m_n^2 \phi_n^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \int d^4x (\partial^\mu \hat{\phi}_n \partial_\mu \hat{\phi}_n - m_n^2 \hat{\phi}_n^2), \quad (3.15)$$

onde a massa de KK é dada por  $m_n^2 = m^2 + \frac{n^2}{r^2}$ . Assim, o campo da quinta dimensão aparece como uma torre infinita de campos com massa  $m_n$ .

Os modos excitados são campos que diferem pelos valores de  $n$  de KK, que está associada à quinta componente do momento por

$$p^5 = \frac{n}{r}, \quad (3.16)$$

assim, os modos de KK são apenas uma manifestação da discretização do momento extra da partícula. As partículas com diferentes momentos  $p^5$  possuem massas diferentes.

Isso pode ser compreendido pelo invariante em 5 dimensões  $p^A p_A = m^2$ , que pode ser reescrito como um momento invariante ao quadrado em 4 dimensões  $p^\mu p_\mu = m^2 + \tilde{p}_\perp^2$ , sendo que  $\tilde{p}_\perp^2$  representa as componentes do momento extra.

Para  $m = 0$ , para energias abaixo de  $\frac{1}{r}$  apenas o modo zero sem massa será cineticamente acessível, fazendo a teoria parecer 4 dimensional. Assim, os modos excitados de KK só seriam percebidos em experimentos realizados com energias altas o suficiente.

### 3.3 O modelo de Randall-Sundrum

Em 1999, Lisa Randall e Raman Sundrum propuseram um modelo de universo para resolver o problema da hierarquia, o porque da gravidade ser tão mais fraca do que as outras forças fundamentais, baseado no modelo de branas em 5 dimensões. Branas surgiram da teoria de cordas como uma condição de contorno, condição de Dirichlet, na qual os pontos extremos de uma corda estão fixos a um objeto. Esses objetos são caracterizados pelo número de dimensões espaciais que possuem, sendo assim chamados D-branas, onde  $D$  é em referência a Dirichlet.

No modelo de Randall-Sundrum,  $RS1$ , se imagina duas 3-branas imersas em um espaço de  $d = 5$  chamado *volume*, Figura 3.1. As partículas do modelo padrão estão presas na subvariedade e a gravidade pode se propagar através da quinta dimensão.

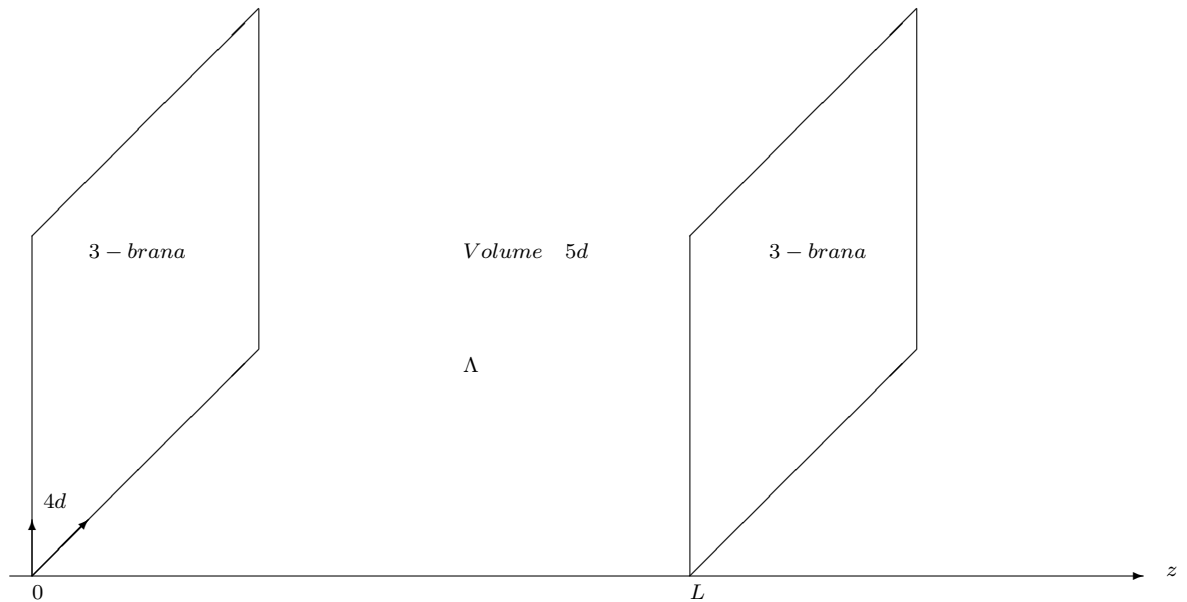


Figura 3.1: Modelo de Randall – Sundrum  $RS1$ .

Esse modelo trabalha em uma órbita-variedade (orbifold)  $S^1/\mathbb{Z}_2$ , Apêndice A, sendo  $S^1$  uma esfera em 1 dimensão e  $\mathbb{Z}_2$  o grupo multiplicativo  $\{-1, 1\}$ . Além disso, há duas 3-branas, uma em  $z = 0$  chamada de *escondida* e outra em  $z = \pi r$  chamada *visível*, ou seja, em cada ponto desta órbita-variedade existe um universo como o que vivemos, em 4 dimensões.

O elemento de linha deste modelo deve ser coerente com o mundo real, ou seja, preservar a invariância de Poincaré, Apêndice B, assim como o universo em 4 dimensões deve ser chato e estático. Como no trabalho [27], a métrica do modelo *RS1* é definida por

$$ds^2 = e^{-2y(z)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dz^2, \quad (3.17)$$

onde  $\eta_{\mu\nu}$  é a métrica de Minkowski,  $e^{-2y(z)}$  é o chamado fator de deflexão (warp factor). O fator de deflexão só depende da quinta dimensão, o que faz da métrica não fatorizável.

A ação adotada para descrever este modelo foi

$$S = S_H + S_M = \int d^4x \int_{-L}^{+L} dz \sqrt{-g_{(5)}}(M^3 R - \Lambda_5), \quad (3.18)$$

onde  $S_H$  é a ação de Einstein-Hilbert,  $S_M$  a ação referente à matéria,  $M^3$  é a escala de massa fundamental em 5 dimensões e  $\Lambda_5$  a constante cosmológica em 5 dimensões.

A constante de Newton em 5 dimensões é definida como

$$k^2 \equiv \frac{1}{2M^3}. \quad (3.19)$$

Vamos agora resolver as equações de Einstein para o modelo *RS1*.

As equações de Einstein em 5 dimensões são

$$G_{AB} = R_{AB} - \frac{1}{2}g_{AB}R = -k^2 T_{AB}, \quad (3.20)$$

onde os índices  $A, B = 0, 1, 2, 3$  e  $5$ , e o tensor de momento-energia é dado por

$$T_{AB} = -\frac{2}{\sqrt{-g_{(5)}}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{AB}}. \quad (3.21)$$

As componentes do tensor de Ricci são

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= (y'' - 4y'^2)g_{\mu\nu} \\ R_{55} &= 4(y'' - y'^2), \end{aligned} \quad (3.22)$$

assim escalar de Ricci  $R_{(5)}$ , fica

$$R_{(5)} = 8y'' - 20y'^2. \quad (3.23)$$

Então as componentes do tensor de Einstein ficam

$$G_{\mu\nu} = (6y'^2 - 3y'')g_{\mu\nu}, \quad (3.24)$$

e

$$G_{55} = 6y'^2. \quad (3.25)$$

Pela equação (3.25) e pelo tensor de momento-energia, encontramos a relação

$$G_{55} = 6y'^2 = \frac{-\Lambda_5}{2M^3}, \quad (3.26)$$

assim, podemos definir

$$\kappa^2 \equiv \frac{-\Lambda}{12M^3}. \quad (3.27)$$

Pela equação (3.26), podemos perceber que  $y$  será real apenas se a constante  $\Lambda_5$  for negativa, ou seja, o espaço entre as branas é necessariamente anti-de Sitter,  $AdS_5$ .

Assim, integrando a equação (3.26) e levando em consideração a equação (3.19), temos

$$y(z) = \kappa|z|, \quad (3.28)$$

onde  $|z|$  é para garantir que a solução seja invariante perante a transformação  $y \rightarrow -y$ .

Podemos derivar esta solução para encontrar  $y'$  e  $y''$ . Assim, derivando a equação (3.28) em relação a  $z$ , temos

$$y' = \text{sgn}(z)\kappa, \quad (3.29)$$

onde  $\text{sgn}(z)$  é uma combinação das funções de Heaviside e é escrita como

$$\text{sgn}(z) = \theta(z) - \theta(-z), \quad (3.30)$$

assim, a segunda derivada  $y''$  é dado por

$$y'' = 2\kappa(\delta(z) - \delta(z - L)). \quad (3.31)$$

Então, as componentes  $(\mu, \nu)$  do tensor de Einstein, ficam

$$G_{\mu\nu} = 6\kappa^2 g_{\mu\nu} - 6\kappa((\delta(y) - \delta(y - L))g_{\mu\nu}. \quad (3.32)$$

Aqui, o primeiro termo é simplesmente o tensor de momento-energia multiplicado pela constante de Newton em 5 dimensões. Porém, o segundo termo não possui nada para ser adicionado. Assim, para satisfazer as equações de Einstein (3.20), somos levados a introduzir um termo na ação das branas chamado *tensão nas branas*. Isso é feito levando

em consideração a densidade de energia das branas em si. Assim, escrevemos a ação das branas como

$$\begin{aligned} S_{vis} &= \sigma \int d^4x \sqrt{-g_{vis}} \\ S_{esc} &= -\sigma \int d^4x \sqrt{-g_{esc}}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde  $g_{vis}$  é referente à métrica visível e  $g_{esc}$  é referente à métrica escondida e  $\sigma$  é a chamada *tensão* das branas. Para que as equações de Einstein sejam satisfeitas, impomos a seguinte relação

$$\sigma = 12\kappa M^3, \quad (3.34)$$

agora, levando em consideração o tensor de momento-energia encontramos a expressão

$$k^2 T_{\mu\nu} = \frac{-\Lambda_5}{2M^3} g_{\mu\nu} = 6\kappa^2 g_{\mu\nu}, \quad (3.35)$$

ou

$$\Lambda_5 = \frac{-\sigma^2}{12M^3}, \quad (3.36)$$

que é o chamado *ajuste fino* entre a brana e o volume, que é equivalente a um cancelamento da constante cosmológica em 4 dimensões.

A métrica para o modelo *RS1* é portanto

$$ds^2 = e^{-2\kappa|z|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2. \quad (3.37)$$

Há também o modelo *RS2*, que pode ser obtido fazendo  $L \rightarrow \infty$ , no qual a dimensão extra seria infinita e existiria apenas uma brana localizada em  $z = 0$ , onde as partículas do modelo padrão estariam confinadas.

### 3.4 Branas grossas e o limite de espessura zero

Até aqui, foi considerado que a brana é infinitesimalmente fina. Porém, deve existir uma escala mínima, ou seja, não se pode considerar 0-brana. Assim, não podemos desprezar a espessura da brana na escala de cordas. Torna-se então necessário trabalhar com branas grossas.

Para se tratar um modelo de branas grossas é importante que o limite de espessura zero seja bem definido, ou seja, se reduza ao modelo RS2. No trabalho [16], isso foi muito bem discutido. Para que isso seja possível, o modelo de branas grossas possuindo simetria  $\mathbb{Z}_2$  com um potencial arbitrário  $V(\phi)$  na RG em 5 dimensões, deve possuir as seguintes características:

1. ser assintoticamente  $AdS_5$ ;
2. o potencial  $V(\phi)$  possui um sinal alternado;
3.  $V(\phi)$  satisfazendo a um certo ajuste fino.

Como em [16], vamos escolher uma métrica que possua simetria  $\mathbb{Z}_2$  com relação a  $z = 0$ , na qual  $\phi = \phi(z)$ , assim

$$dS_5^2 = e^{2F(z)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - e^{8F(z)} dz^2, \quad (3.38)$$

onde  $F(z)$  é o fator de deflexão que depende somente da quinta dimensão  $z$ . Sendo que  $\eta_{\mu\nu}$  é a métrica de Minkowski em 4 dimensões, e se escolhe  $z$  de modo que  $\sqrt{g_{(5)}} g^{zz} = -1$ .

Calculando as componentes do tensor de Ricci, encontramos

$$\begin{aligned} R_0^0 &= R_1^1 = R_2^2 = R_3^3 = -e^{-8F} F'', \\ R_z^z &= -4e^{-8F} (F'' - 3F'^2). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Assim, podemos calcular o escalar de Kretschmann  $\mathcal{K} = R_{ABCD} R^{ABCD}$ , que é dado por

$$\mathcal{K} = 4[e^{-5F} (e^{-3F} F')']^2 + 6(e^{4F} F')^4, \quad (3.40)$$

que é a soma dos quadrados de todas as componentes não nulas do tensor de Ricci  $R_{AB}{}^{CD}$ , ou seja, seu significado físico é que seu valor deve necessariamente ser finito para que todas as quantidades algébricas invariantes da curvatura sejam finitas.

As equações de Einstein em 5 dimensões, com as equações para o campo escalar, ficam

$$F'' = -\frac{2k^2}{3} e^{8F} V, \quad (3.41)$$

$$3(-F'' + 4F'^2) = k^2\phi'^2, \quad (3.42)$$

$$\phi'' = e^{8F}\frac{dV}{d\phi}, \quad (3.43)$$

onde a equação (3.41) é a componente  $(z, z)$ , a equação (3.42) as componentes  $(\mu, \nu)$ , e a equação (3.43) é a equação para o campo escalar. Podemos ainda combinar as equações de (3.41) e (3.42) e escrever

$$F'^2 = \frac{k^2}{6} \left( \frac{1}{2}\phi'^2 - e^{8F}V \right). \quad (3.44)$$

Como estamos assumindo que este modelo possui simetria  $\mathbb{Z}_2$

$$F(z) = F(-z), \quad (3.45)$$

e

$$\phi(z) = -\phi(-z), \quad (3.46)$$

ou seja,  $F(z)$  é uma função par e  $\phi(z)$  é uma função ímpar.

Vamos assumir essa simetria em torno de  $z = 0$ , assim supõe-se que  $F'(0) = 0$ , então para  $F(0) = 0$ , e pela equação (3.43), ficamos com  $\phi'^2(0) = 2V(0)$ .

Então as condições de contorno são

$$\begin{aligned} F(0) &= 0, \\ F'(0) &= 0, \\ \phi(0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Não há parâmetros livres para qualquer função fixa de  $V(\phi)$  nas equações e nas soluções de contorno, assim elas são unicamente determinadas.

Para que a métrica seja regular quando  $z \rightarrow \infty$ , pela equação (3.40), devemos ter  $F'e^{-4F} < \infty$ , ou para simplificar a notação,  $|b'(z)| < \infty$ , onde  $b(z) \equiv e^{-4F}$ . Para o campo escalar, pelas equações de Einstein, as condições de regularidade são  $V(\phi) < \infty$  e  $b(z)|\phi'(z)| < \infty$ . Assim devemos ter ao todo as condições

$$\begin{aligned} |b'(z)| &< \infty, \\ |V(\phi)| &< \infty, \\ b(z)|\phi'(z)| &< \infty. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Como  $b'(0) = 0$ , seu valor aumenta para  $z > 0$  e vai para o infinito pelo menos linearmente em  $z$  grande, para qualquer solução não trivial. O crescimento é assintoticamente linear pelas condições acima,  $b' \rightarrow cte > 0$ , assim  $F' \approx -\frac{1}{4z}$  em  $z$  grande.

Integrando a equação (3.41), obtemos

$$F'(z) = \bar{V}(z) := -\frac{2}{3}k^2 \int_0^z e^{8F} V dz. \quad (3.49)$$

Sendo que para que a solução seja regular

$$\bar{V}(\infty) = 0, \quad (3.50)$$

que é o ajuste fino em termos de potencial.

A integral  $\bar{V}(z)$  é a energia total invariante por unidade de 3-volume na faixa de zero a infinito. Uma vez que  $e^{8F} > 0$ , um potencial não trivial  $V(\phi)$  deve trocar o sinal pelo menos uma vez para produzir  $\bar{V}(\infty) = 0$ .

Para que a solução seja regular,  $\phi = \varrho(1/z)$ . Portanto,  $e^{-4F} \phi' \rightarrow 0$  para  $z$  grande e pela equação (3.44),  $V$  tende a um valor finito e negativo. Se

$$b(z) = e^{-4F} \approx \xi z,$$

com  $\xi = cte > 0$  e  $z \rightarrow \infty$ , então

$$k^2 V \Big|_{z=\infty} = \Lambda_5 = -\frac{3k^2}{8}. \quad (3.51)$$

Assim,  $V(\phi)$  inverte seu sinal pelo menos uma vez, tendendo a um valor negativo quando  $z \rightarrow \infty$  e a integral  $\bar{V}(\infty)$  é nula. Se  $\phi$  tende a um valor finito  $\phi_\infty$ ,  $V(\phi)$  possui um mínimo em  $\phi = \phi_\infty$ .

Em qualquer caso, por  $\phi(z)$  ser uma função ímpar, os valores  $\phi(+\infty) = -\phi(-\infty) \neq 0$  faz com que a brana seja topologicamente estável. A simetria  $\mathbb{Z}_2$  implica que  $V(\phi)$  seja uma função par. Seu valor assintótico,  $V(z = \pm\infty) = \frac{\Lambda_5}{k^2} < 0$ , desempenha o papel de uma constante cosmológica no volume assintótico, e a métrica é assintoticamente anti-de Sitter. Assim, os valores  $z = \pm\infty$  correspondem a um horizonte AdS.

Queremos mostrar que num determinado limite, um modelo de branas grossas deve se reduzir ao modelo  $RS2$ . Para analisar este limite, vamos escrever a ação da seguinte maneira

$$S = S_{volume} + S_{brana}, \quad (3.52)$$

$$S_{volume} = - \int \frac{R - 2\Lambda_5}{2k^2} \sqrt{g_5} d^5x, \quad \frac{\Lambda_5}{k^2} = V(\phi_\infty), \quad (3.53)$$



$$S_{brana} = \int \left[ \frac{1}{2} \partial_A \phi \partial^A \phi + V(\phi_\infty) - V(\phi) \right] \sqrt{g_5} d^5 x. \quad (3.54)$$

Podemos escrever a ação na brana como

$$\begin{aligned} S_{brana} &= - \int \sigma d^4 x, \\ \sigma &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -\frac{1}{2} \partial_A \phi \partial^A \phi - V(\phi_\infty) + V(\phi) \right] e^{8F} dz, \end{aligned} \quad (3.55)$$

onde  $\sigma$  é a tensão da brana.

Mostramos na seção anterior que para que as equações de Einstein fossem satisfeitas, deveria haver uma condição de ajuste-fino

$$\Lambda_5 = -\frac{k^2 \sigma^2}{6}. \quad (3.56)$$

Assim, devemos esperar que, independente da forma do potencial

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{|\Lambda_5|}{k^2 \sigma^2} = \frac{1}{6}, \quad (3.57)$$

onde o parâmetro  $a$  caracteriza a espessura da brana.

Realizando uma mudança de variáveis

$$f(z) := \frac{2k}{\sqrt{3}} \phi(z), \quad v(f) := \frac{8}{3} k^2 V(\phi), \quad (3.58)$$

as equações (3.41)-(3.43), se tornam

$$\begin{aligned} v &= bb'' - b'^2 = b^2 f'^2 - b'^2, \\ f'^2 &= \frac{b''}{b}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

E as condições de contorno em  $z = 0$  são

$$b(0) = 1, \quad b'(0) = 0, \quad f(0) = 0. \quad (3.60)$$

Então,  $b(z)$  tem que satisfazer as equações (3.59), as condições de contorno (3.60) em  $z = 0$ , onde está localizada a brana, e o limite  $z \rightarrow \infty$  (horizonte AdS) deve ser bem definido, ou seja

$$\begin{aligned} b(0) &= 1, \quad b'(0) = 0, \\ b(z) &\approx \xi z + cte \quad (z \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (3.61)$$

A tensão da brana pode ser escrita como

$$\sigma = \frac{3}{8k^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \left( \frac{b''}{b} + \frac{k}{b^2} \right). \quad (3.62)$$

Vamos definir agora uma família de soluções  $B(a, z)$ , como em [16], onde  $a$  é um parâmetro de espessura, tal que  $B(1, z) = b(z)$ , sendo que essa solução de brana grossa deve estar incluída nestas soluções. Para cada valor fixo de  $a > 0$ , a função  $B(a, z)$  deve satisfazer as equações (3.60) com a mesma constante  $\kappa$ , ou seja, deve ser uma solução de brana grossa com a mesma constante cosmológica  $\Lambda_5 = -\frac{3}{8}\xi^2$  e em cada ponto fixo  $z \neq 0$ , a função  $B(a, z) \rightarrow 1 + \xi|z|$  quando  $a \rightarrow 0$ , ou seja, a métrica deve ser AdS.

No limite em que a espessura vai a zero, a solução é bem definida e se reduz para o modelo RS2, e a relação entre a tensão da brana  $\sigma$  e  $\Lambda_5$  deve ser como na equação (3.56), ou

$$\sigma = \frac{3\xi}{(2k^2)}. \quad (3.63)$$

Como em [16], vamos escolher  $B(a, z)$  como

$$B(a, z) = 1 - a - ab \left( \frac{z}{a} \right). \quad (3.64)$$

Substituindo na equação (3.62) e considerando o limite de espessura fina, ou seja  $a \rightarrow 0$ , obtemos

$$\sigma = \frac{3\xi}{(4k^2)}, \quad (3.65)$$

que é a equação (3.63) multiplicada por um fator  $\frac{1}{2}$ . Este fator se deve ao primeiro termo, uma vez que, no limite  $a \rightarrow 0$ , temos  $B'' \rightarrow 2k\delta(z)$ .

Assim, o limite de espessura fina está bem definido, pelo parâmetro  $a$ . Então, podemos seguramente tratar de um modelo de branas grossas.

Uma análise importante é o problema do confinamento. Para que um modelo de branas grossas do universo seja coerente com o universo que observamos, as partículas do modelo padrão devem estar confinadas na brana, pois não percebemos a quinta dimensão. Isso também é analisado em [16] onde considera-se a Lagrangiana

$$L_\chi = \frac{1}{2} \partial_A \chi \partial^A \chi - \frac{1}{2} m_0 \chi^* \chi + \frac{1}{2} \lambda \phi^2 \chi^* \chi, \quad (3.66)$$

onde  $\chi^*$  é o campo complexo conjugado,  $m_0$  é a massa do campo de teste, e o último termo descreve uma possível interação entre o campo  $\chi$  e o campo escalar  $\phi$ , sendo  $\lambda$  a constante de acoplamento. O campo  $\chi(x^A)$  deve satisfazer a equação de Klein-Gordon

$$\frac{1}{\sqrt{g^{(5)}}} \partial_A (\sqrt{g^{(5)}} g^{AB} \partial_B \chi) = (\lambda \phi^2 - m_0^2) \chi, \quad (3.67)$$

onde supõe-se uma solução da forma

$$\chi(x^A) = X(z)exp(-ip_\mu x^\mu), \quad (3.68)$$

onde a função  $X(z)$  determina a distribuição do campo  $\chi$  através da brana e satisfaz a equação linear homogênea

$$X'' + \sqrt{g_{(5)}}(p_\mu p^\mu + \lambda\phi^2 - m_0^2)X = 0. \quad (3.69)$$

Como  $X(z)$  determina a distribuição do campo  $\chi$  através da brana, no limite  $z \rightarrow \infty$ ,  $X(z)$  deve decair rapidamente, além disso, uma  $\chi$ -partícula estará localizada na brana se tensor de momento-energia  $T_\mu^\nu[\chi]$  for finito em todo o espaço em 5 dimensões, e decai rápido o suficiente para  $z$  grande.

Como uma condição necessária de localização, pode-se exigir convergindo o campo  $\chi$  de energia por unidade de volume 3 da brana, isto é,

$$E_{tot}[\chi] = \int_{-\infty}^{\infty} T_t^t \sqrt{g_{(5)}} dz = \int_0^{\infty} e^{8F} \left[ e^{-2F}(E^2 + \vec{p}^2)X^2 + (m_0^2 - \lambda\phi^2)X^2 + e^{-8F}X'^2 \right] dz < \infty. \quad (3.70)$$

onde usamos  $p_\mu = (E, \vec{p})$ . A equação anterior implica na finitude da norma do campo  $\chi$ , ou seja,

$$\|\chi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{g_{(5)}} \chi^* \chi dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-8F} X^2 dz. \quad (3.71)$$

A equação (3.69) pode ser escrita como

$$X'' + [e^{6F}(E^2 - \vec{p}^2) + e^{8F}(\lambda\phi^2 - m_0^2)]X = 0, \quad (3.72)$$

assim, o termo  $e^{8F}(\lambda\phi^2 - m_0^2)$  descreve a interação de uma  $\chi$ -partícula com a brana. Se  $\lambda = 0$ , este é puramente gravitacional, enquanto que se  $\lambda \neq 0$  descreve uma interação adicional, não gravitacional, entre  $\phi$  e  $\chi$ .

# Capítulo 4

## Branas curvas com teoria $f(R)$ generalizada

Nos modelos anteriores, empregou-se um campo escalar juntamente com a teoria da gravitação de Einstein. No entanto foi discutido no trabalho [19], um modelo de branas grossas planas utilizando a gravitação  $f(R)$ . Mostrou-se que uma solução regular assintoticamente AdS existe em uma faixa de valores de um parâmetro  $n$ . Uma peculiaridade deste modelo é a existência de um ponto fixo no plano de fase onde todas as soluções começam e a brana pode ser colocada neste ponto. Este fato é importante, pois a presença do ponto fixo permite evitar um ajuste fino dos parâmetros do modelo para obter soluções de branas grossas. Nesta seção vamos obter uma equação mestra para o fator de deflexão para uma  $f(R)$  generalizada, isto é, uma  $f(R)$  que incorpora algumas  $f(R)$ 's viáveis existentes na literatura atual.

## 4.1 Modelo de branas planas com teoria $f(R)$

Nesta seção, em nome de uma auto-suficiência, vamos descrever o trabalho de Dzhunushaliev [19]. No futuro vamos demonstrar que este trabalho é na verdade um caso especial do resultado mais abrangente obtido aqui.

A ação para o espaço-tempo com 5 dimensões é dada por,

$$S = \int d^5x \sqrt{-g^{(5)}} \left[ \frac{-R}{2} + f(R) \right], \quad (4.1)$$

onde a escolha para uma função  $f(R)$  simples foi

$$f(R) = -\alpha R^n, \quad (4.2)$$

onde  $\alpha > 0$  e  $n$  são constantes. Realizando uma variação na equação (4.1), com respeito ao tensor métrico em 5 dimensões, obtém-se as equações gravitacionais (equações de Einstein)

$$R_A^B - \frac{1}{2} \delta_A^B R = \hat{T}_A^B, \quad (4.3)$$

onde as letras do alfabeto latino podem ser 0, 1, 2, 3 ou 5 e

$$\hat{T}_A^B = - \left[ f_R R_A^B - \frac{1}{2} \delta_A^B f + (\delta_A^B g^{LM} - \delta_{LA}^B g^{BM}) (f_R)_{;L;M} \right], \quad (4.4)$$

onde  $f_R = \frac{\partial f}{\partial R}$  e  $(f_R)_{;L}$  é a derivada covariante de  $f_R$  com respeito a  $L$ .

Assim, as equações acima possuem a estrutura padrão das equações da relatividade geral quando a fonte do campo gravitacional é efetivamente de momento-energia.

Para o modelo de branas planas, a métrica adotada é

$$ds^2 = e^{2y(z)} \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta - dz^2, \quad (4.5)$$

onde o fator de deflexão depende apenas da quinta dimensão  $z$  e,  $\eta_{\alpha\beta} = \{1, -1, -1, -1\}$  é a métrica de Minkowski. Após algum trabalho algébrico, levando em consideração as equações (4.1), (4.2) e (4.4) das componentes  $(z)$  das equações de Einstein obtemos

$$y''' - \frac{1}{n} \frac{y''^2}{y'} + \left[ 5 - \frac{\frac{7n}{2} - 5}{n(n-1)} \right] y' y'' - \frac{5}{2} \frac{n - \frac{5}{2}}{n(n-1)} y'^3 = \frac{12y'}{\alpha 8^n n(n-1)} \left( y'' + \frac{5}{2} y'^2 \right)^{2-n}, \quad (4.6)$$

onde  $y' = \frac{dy}{dz}$ .

Como dissemos antes, vamos ver mais adiante que uma generalização da  $f(R)$  dada em (4.2) torna (4.6) apenas um caso especial de uma equação bem mais geral. Para evitar que percamos contato com a física do problema, nosso objetivo agora será encontrar a forma para o fator  $y(z)$ . Assim sendo, teremos estabelecido a forma da métrica (4.5) que por sua vez estabelece a geometria do mundo brana com esta  $f(R)$ .

Para começar vamos encontrar os pontos fixos, ou seja, aqueles pontos no plano de fase no qual  $y'$  e  $y''$  são iguais a zero. A presença de um ponto fixo nos permite colocar a brana neste ponto diretamente. Mostraremos que só existe um ponto com estas características.

A solução analítica desta equação é muito complicada, assim é mais conveniente uma aproximação numérica. Para tanto, reescreve-se a equação (4.6) como um sistema de três equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{aligned} y' &= p, \\ p' &= v, \\ v' &= \frac{1}{n} \frac{v^2}{p} - \left[ 5 - \frac{\frac{7n}{2} - 5}{n(n-1)} \right] pv + \frac{5}{2} \frac{n - \frac{5}{2}}{n(n-1)} p^3 + \frac{12p}{\alpha 8^n n(n-1)} \left( v + \frac{5}{2} p^2 \right)^{2-n}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

O ponto fixo deste sistema é

$$\mathcal{A} = (p \rightarrow 0, v \rightarrow 0). \quad (4.8)$$

Para analisarmos o comportamento das soluções no ponto fixo, podemos procurar uma solução na vizinhança do ponto fixo na forma

$$y = y_{pf} + \gamma(z - z_{pf})^\beta, \quad (4.9)$$

onde  $\beta$ ,  $\gamma$  são constantes e  $z = z_{pf}$  é a posição do ponto fixo na quinta dimensão. Temos então

$$\begin{aligned} p &= y' = \gamma\beta(z - z_{pf})^{\beta-1}, \\ v &= y'' = \gamma\beta(\beta - 1)(z - z_{pf})^{\beta-2}, \\ w &= y''' = \gamma\beta(\beta - 1)(\beta - 2)(z - z_{pf})^{\beta-3}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

sendo que  $\beta > 3$ , para que as expressões sejam finitas. Substituindo (4.10) na equação (4.7), encontramos

$$\begin{aligned} \gamma\beta(\beta - 1)(\beta - 2) &= \frac{1}{n} \gamma\beta(\beta - 1)^2 - \left[ 5 - \frac{\frac{7n}{2} - 5}{n(n-1)} \right] \alpha^2 \beta^2 (\beta - 1) (z - z_{pf})^\beta \\ &+ \frac{5}{2} \left( \frac{n - \frac{5}{2}}{n(n-1)} \right) \alpha^3 \beta^3 (z - z_{pf})^{2\beta} + \frac{12}{\alpha 8^n n(n-1)} (\alpha\beta)^{3-n} (\beta - 1)^{2-n} (z - z_{pf})^{\beta(2-n)+2(n-1)}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Como  $\beta$  é positivo, o segundo e o terceiro termos na direita da equação (4.11) tendem a zero quando  $z \rightarrow z_{pf}$ , e o quarto termo tende a zero se

$$\beta(2 - n) + 2(n - 1) > 0. \quad (4.12)$$

Assim, na equação (4.11), se a condição (4.12) for satisfeita, só sobra o primeiro termo do lado direito, ou seja

$$\beta - 2 = \frac{1}{n}(\beta - 1), \quad (4.13)$$

de onde encontramos o valor de  $\beta$

$$\beta = \frac{2n - 1}{n - 1}. \quad (4.14)$$

Pela condição (4.12), como  $\beta > 3$ , assumindo que  $n$  seja positivo, encontramos a seguinte faixa de valores possíveis para  $n$

$$1 < n < 2. \quad (4.15)$$

Assim, apenas se a condição acima for satisfeita, a solução (4.7) permite a existência do ponto fixo  $\mathcal{A}$  do tipo  $\frac{0}{0}$ . Neste caso, todas as integrais (4.6) devem passar pelo ponto  $\mathcal{A}$ .

No infinito, o valor de  $y$  deve ser

$$y_\infty = kz + C, \quad (4.16)$$

se substituirmos este valor de  $y$  na equação (4.6), levando em consideração que  $y_\infty''' = y_\infty'' = 0$ , e que  $y_\infty' = k$ , encontramos o seguinte valor de  $k$ .

$$k = \left[ \frac{12}{\alpha \left(1 - \frac{2}{5}n\right) 20^n} \right]^{\frac{1}{2(n-1)}}, \quad (4.17)$$

que nos leva, analisando os denominadores desta expressão, para a condição  $1 < n < \frac{5}{2}$ .

A presença do ponto fixo nos permite colocar a brana neste ponto. De fato, em modelos de branas grossas, escolhe-se  $y' = 0$  na brana. Tal escolha permite encontrar soluções possuindo simetria  $\mathbb{Z}_2$ . No caso analisado aqui, a derivada de  $y$  é nula apenas no ponto fixo para os valores  $1 < n < 2$ . Contudo, neste caso, as soluções não possuirão necessariamente simetria  $\mathbb{Z}_2$ .

Quando analisamos as soluções para um ponto fixo e impomos a variação  $(\delta \ll y)\Delta^k = \frac{d}{dy^k}\delta^k$ , podemos obtemos o resultado

$$\delta''' - \frac{2 y''}{n y'}\delta'' + \frac{1 y'''^3}{n y'^2}\delta' = 0, \quad (4.18)$$

onde a expansão ocorre na vizinhança do ponto fixo  $z = z_{pf}$  onde a primeira e a segunda derivadas são consideradas zero. A expansão,

$$y = y_{pf} + \frac{1}{6}(z - z_{pf})y_{pf}'''^3, \quad (4.19)$$

nos leva a escrever a solução abaixo

$$\delta = \delta_0(z - z_{pf})^{2+\frac{4}{n}}, \quad (4.20)$$

onde a condição  $0 < n < 4$  é necessária para garantir o decaimento rápido de  $\delta$ . Esta condição é menos restrita do que  $0 < n < \frac{5}{2}$ .

Na referência [19], também foi feita a análise do confinamento das partículas do modelo padrão na brana. Como na seção anterior, foi considerado um campo de teste escalar complexo  $\Phi$  com Lagrangiana

$$L_\Phi = \frac{1}{2}\partial_A\Phi^*\partial^A\Phi - \frac{1}{2}m_0^2\Phi^*\Phi, \quad (4.21)$$

onde  $m_0$  é a massa do campo de teste. Realizando uma variação na Lagrangiana acima se obtém a equação

$$\frac{1}{\sqrt{-g^{(5)}}}\frac{\partial}{\partial x^A}(\sqrt{-g^{(5)}}g^{AB}\frac{\partial\Phi}{\partial x^B}) = -m_0^2\Phi, \quad (4.22)$$

onde  $\Phi$  é uma função de todas as coordenadas,  $\Phi = \Phi(x^A)$ .

Procura-se por uma solução da forma

$$\Phi(x^A) = X(z)\exp(-ip_\mu x^\mu), \quad (4.23)$$

introduzindo esta solução particular (ansatz) na equação (4.22), encontra-se a seguinte equação para  $X(z)$

$$X'' + 4y'X' + (p^\mu p_\mu - m_0^2)X = 0, \quad (4.24)$$

mas sabemos que  $p_\mu = (E, \vec{p})$  e portanto  $p^\mu p_\mu = g^{\mu\nu}p_\nu p_\mu = e^{-2y}(E^2 - \vec{p}^2)$ . Substituindo na equação acima, teremos que

$$X'' + 4y'X' + [e^{-2y}(E^2 - \vec{p}^2) - m_0^2]X = 0, \quad (4.25)$$

onde  $X' = \frac{dX}{dz}$ .

Para que a matéria fique confinada na brana, a solução anterior deve decrescer rapidamente no limite  $y_\infty$ . Assim, como assintoticamente  $y_\infty = k_n|z|$ , com  $k_n > 0$ , e consequentemente  $y'_\infty = k$ , podemos reescrever a equação acima como

$$X'' + 4k_n X' - m_0^2 X = 0, \quad (4.26)$$

onde desprezamos o termo  $e^{-2y}$  em comparação com  $m_0^2$ . A solução é portanto



$$X_\infty \approx C \exp \left[ -2 \left( k_n + \sqrt{k_n^2 + \frac{m_0^2}{4}} \right) |z| \right], \quad (4.27)$$

sendo C a constante de integração.

Podemos observar, que a solução anterior decresce rapidamente no limite  $y_\infty$ .

Outra condição para que a matéria fique confinada na brana, é que a energia do campo por unidade de 3-volume deve ser finita, ou seja

$$\begin{aligned} E_{tot}[\chi] &= \int_{-\infty}^{\infty} T_0^0 \sqrt{-g_{(5)}} dz, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{4k_n|z|} [e^{2k_n|z|} (E^2 + \vec{p}^2) X^2 + m_0^2 X^2 + X'^2] dz < \infty, \end{aligned} \quad (4.28)$$

assim como a norma do campo  $\chi$  deve ser finita

$$\|\chi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{-g_{(5)}} \chi^* \chi dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{4k_n|z|} X^2 dz. \quad (4.29)$$

De onde concluímos que ambos  $E_{tot}$  e  $\|\chi\|$  convergem assintoticamente.

## 4.2 Modelos de branas curvas com teoria $f(R)$

Agora vamos analisar o cenário de um mundo brana com branas curvas. Vamos desenvolver uma equação de Einstein generalizada para o espaço de de Sitter e outra para o espaço anti-de Sitter para o fator de deflexão. Usaremos uma forma generalizada para uma  $f(R)$  viável cosmologicamente. Após isso investigaremos o confinamento de partículas massivas nesta brana curva. Para isso, iremos usar a seguinte assinatura

$$\begin{aligned} ds_5^2 &= g_{AB} dx^A dx^B \\ &= e^{2y} ds_4^2 - dz^2, \end{aligned} \quad (4.30)$$

onde  $z$  é a quinta dimensão (volume), e  $A, B = 0, 1, 2, 3, 5$ . Para um espaço-tempo de de Sitter(dS) temos que

$$ds_4^2 = dt^2 - e^{2\sqrt{\Lambda}t} (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2), \quad (4.31)$$

onde  $\Lambda$  é a constante cosmológica.

E para um espaço-tempo Anti-de Sitter(AdS)

$$ds_4^2 = e^{-2\sqrt{\Lambda}x_3} (dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2) - dx_3^2. \quad (4.32)$$

Assim o tensor métrico pode ser escrito como

$$dS : g_{AB} = \begin{bmatrix} e^{2y} & & & & \\ & -e^{2y+2\sqrt{\Lambda}t} & & & \\ & & -e^{2y+2\sqrt{\Lambda}t} & & \\ & & & -e^{2y+2\sqrt{\Lambda}t} & \\ & & & & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$g_{dS} = \det(g_{AB}) = e^{8y+6\sqrt{\Lambda}t}. \quad (4.33)$$

$$AdS : g_{AB} = \begin{bmatrix} e^{2y-2\sqrt{\Lambda}x_3} & & & & \\ & -e^{2y-2\sqrt{\Lambda}x_3} & & & \\ & & -e^{2y-2\sqrt{\Lambda}x_3} & & \\ & & & -e^{2y} & \\ & & & & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$g_{AdS} = \det(g_{AB}) = e^{8y-6\sqrt{\Lambda}t}, \quad (4.34)$$

consequentemente, para o tensor métrico contravariante temos que,

$$dS : g^{AB} = \begin{bmatrix} e^{-2y} & & & & \\ & -e^{-2y-2\sqrt{\Lambda}t} & & & \\ & & -e^{-2y-2\sqrt{\Lambda}t} & & \\ & & & -e^{-2y-2\sqrt{\Lambda}t} & \\ & & & & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$AdS : g^{AB} = \begin{bmatrix} e^{-2y+2\sqrt{\Lambda}x_3} & & & & \\ & -e^{-2y+2\sqrt{\Lambda}x_3} & & & \\ & & -e^{-2y+2\sqrt{\Lambda}x_3} & & \\ & & & -e^{-2y+2\sqrt{\Lambda}x_3} & \\ & & & & -e^{-2y} \\ & & & & & -1 \end{bmatrix}$$

para o espaço plano temos que fazer  $\Lambda \rightarrow 0$ .

Como fizemos na última seção, iremos trabalhar com uma gravitação modificada tal que a ação de Einstein-Hilbert possua a seguinte forma,

$$S = \int d^5x \sqrt{g_{(5)}} \left[ \frac{-R}{2} + f(R) \right], \quad (4.35)$$

onde  $f(R)$  é uma função arbitrária de  $R$ .

A variação da ação (4.35) dá origem às equações de Einstein que podem ser escritas como

$$R_A^B - \frac{1}{2} \delta_A^B R = -k^2 T_A^B. \quad (4.36)$$

Vamos usar uma  $f(R)$  generalizada com a forma,

$$f(R) = aR + bR^2 - \alpha R^n, \quad (4.37)$$

onde  $a, b, \alpha$  e  $n$  são constantes. Para  $a = b = 0$  temos o caso explorado na seção anterior.

O cálculo dos elementos dos tensores de Ricci, assim como o escalar de Ricci, para os casos dS e AdS estão no Apêndice C, o resultado é dado abaixo:

$$\begin{aligned} R_{00}^{dS} &= -(3\Lambda e^{-2y} - y'' - 4y'^2), \\ R_{11}^{dS} &= R_{22}^{dS} = R_{33}^{dS} = (3\Lambda e^{-2y} + y'' + 4y'') e^{2y+2y\sqrt{\Lambda}t}, \\ R_{55}^{dS} &= -4(y' + y''), \end{aligned} \quad (4.38)$$

e o escalar de Ricci é dado por

$$R_{dS} = -12\Lambda e^{-2y} + 8y'' + 20y'^2. \quad (4.39)$$

Para o caso do espaço chato,  $\Lambda = 0$ , o resultado (4.39) retorna para o caso da seção anterior. Para o caso AdS, temos

$$\begin{aligned}
R_{00}^{dS} &= (3\Lambda e^{-2y} + y'' + 4y'^2)e^{2y-2\sqrt{\Lambda}x_3}, \\
R_{11}^{dS} &= R_{22}^{dS} = (3\Lambda e^{-2y} - y'' - 4y'^2)e^{2y-2\sqrt{\Lambda}x_3}, \\
R_{33}^{dS} &= -(3\Lambda e^{-2y} + y'' + 4y'^2)e^{2y}, \\
R_{55}^{dS} &= -4(y' + y''),
\end{aligned} \tag{4.40}$$

e o escalar de Ricci é dado por

$$R_{AdS} = 12\Lambda e^{-2y} + 8y'' + 20y'^2, \tag{4.41}$$

que assim como no caso dS, retorna para o caso [19], quando  $\Lambda = 0$ .

Vamos escrever o escalar de Ricci na forma compacta abaixo

$$R = 12k\Lambda e^{-2y} + 8y'' + 20y'^2, \tag{4.42}$$

que corresponde aos casos dS, AdS e Minkowski, se  $k = -1, 1$  e  $0$  respectivamente.

### 4.2.1 Uma equação mestra para $y$ para uma $f(R)$ generalizada

Na primeira seção deste capítulo usamos a  $f(R)$  dada em (4.2) e a métrica (4.5), e as incluímos em (4.3) onde  $\hat{T}_A^B$  é dado em (4.4).

Nesta seção, usaremos as métricas dadas em (4.31) e (4.32) com a teoria  $f(R)$  generalizada dada em (4.37). Introduzindo-se estes elementos em (4.3)-(4.4) queremos, da mesma forma, obter uma equação geral, ou seja, uma equação mestra para o fator de deflexão  $y = y(z)$ .

Portanto, partindo de

$$f(R) = aR + bR^2 - \alpha R^n, \quad (4.43)$$

temos que

$$f_R = a + 2bR - \alpha n R^{n-1}, \quad (4.44)$$

onde

$$R = 12k\Lambda e^{2y} + 8y'' + 20y'^2. \quad (4.45)$$

Logo, continuando, o próximo passo é a derivada. Vamos fazer  $a = b = 0$ . Então teremos branas curvas com  $f(R) = -\alpha R^n$

$$\partial_5(f_R) = -\alpha n(n-1)[12k\Lambda e^{2y} + 8y'' + 20y'^2]^n - 2\partial_5 R, \quad (4.46)$$

onde

$$\partial_5 R = 24k\Lambda y' e^{2y} + 8y'' + 40y'y''. \quad (4.47)$$

Substituindo estes valores, a componente ( $\hat{z}$ ) do tensor de momento-energia é dada por,

$$T_5^5 = 4\alpha n(y'' + y'^2)R^{n-1} - \frac{1}{2}\alpha R^n - 4y'\alpha n(n-1)(24k\Lambda y' e^{2y} + 8y''' + 40y'y'')R^{n-2}. \quad (4.48)$$

Logo, após um trabalho algébrico, a equação de Einstein fica

$$\begin{aligned} & y''' + \left[ 5 - \frac{\left(\frac{7}{2}n - 5\right)}{n(n-1)} \right] y'y'' - \frac{1}{n} \frac{y''^2}{y'} - \frac{5}{2} \frac{\left(n - \frac{5}{2}\right)}{n(n-1)} y'^3 \\ & = 3k\Lambda y' e^{2y} - \frac{3k\Lambda e^{2y}}{16y'n(n-1)} \left[ \frac{3k}{2} \Lambda e^{2y} + y''(n-1) + y' \left( n - \frac{5}{2} \right) \right] - \frac{[6k\Lambda e^{2y} - 6y'^2]R^{2-n}}{32y'\alpha n(n-1)}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde é fácil ver que para  $k = 0$  temos a equação (4.6) obtida em [19].

Fazendo agora  $b = 0$ , temos que

$$f(R) = aR - \alpha R^n, \quad (4.50)$$

e após todo o procedimento anterior teremos uma equação para  $y$  dada por

$$\begin{aligned} y''' + 5y'y'' + 3k\Lambda y'e^{2y} = & \\ \frac{3k\Lambda e^{2y} + 3y'^2 - 2a(y'' + y'^2)R^{2-n}}{16y'\alpha n(n-1)} + \frac{aR^{1-n}}{64y'\alpha n(n-1)} & \\ + \frac{[-12k\Lambda e^{2y} + 8y''(n-1) + 8y'^2(n - \frac{5}{2})]R}{64y'n(n-1)}, & \end{aligned} \quad (4.51)$$

onde, se fizermos  $a = 0$ , obtemos a equação anterior e  $R = 12k\Lambda e^{2y} + 8y'' + 20y'^2$ .

E finalmente, agora vamos analisar o caso principal, isto é, o caso mais abrangente onde

$$f(R) = aR + bR^2 - \alpha R^n, \quad (4.52)$$

e após todos os cálculos temos uma equação mestra para o fator de deflexão  $y = y(z)$  para uma  $f(R)$  generalizada para um modelo de branas curvas, ou seja,

$$\begin{aligned} y''' + 5y'y'' + 3k\Lambda y'e^{2y} = & \\ \left\{ -6y'^2 - 6\Lambda e^{2y} + a \left[ 4(y'' + y'^2) - \frac{1}{2}R \right] + b \left[ 8R(y'' + y'^2) - \frac{1}{2}R^2 \right] \right\} \frac{1}{32y'[2b - \alpha n(n-1)R^{n-2}]} & \\ + \frac{-4\alpha n(y'' + y'^2)R^{n-1} + \frac{1}{2}\alpha R^n}{32y'[2b - \alpha n(n-1)R^{n-2}]}, & \end{aligned} \quad (4.53)$$

onde  $R$  foi dado em (4.45). Deixamos para o leitor interessado verificar que para  $a = b = \Lambda = 0$  teremos a equação (4.6). Portanto, a conclusão imediata é que a equação (4.6) é simplesmente um caso especial de (4.53).

Podemos ver facilmente que, pela complexidade das equações (4.49), (4.51) e (4.53), deixaremos como uma perspectiva futura, a análise feita em [19] e reproduzida aqui a partir de (4.7) até (4.15).

## 4.2.2 Viabilidade cosmológica da $f(R)$ generalizada

Como já dissemos anteriormente, este não é propriamente um trabalho sobre gravitação modificada, ou seja, sobre  $f(R)$ , mas como é óbvio, este é um ingrediente primordial neste trabalho. Então vamos discutir algumas questões existentes na literatura sobre  $f(R)$  e que sejam pertinentes a esta dissertação. Ou seja, vamos falar sobre as condições que as  $f(R)$  têm que obedecer para termos uma coerência com o que é observado no nosso Universo. Em outras palavras, só podemos construir  $f(R)$ 's que obedecem a uma realidade cosmológica. As outras que não tem esse vínculo não fazem sentido.

Sabemos que duas das principais condições de estabilidade para as  $f(R)$  são (i)  $f_{RR} = \frac{d^2 f}{dR^2} > 0$ , para evitar a existência de táquions e (ii)  $f_R > 0$ , para a não-existência de fantasmas na teoria. A violação da primeira condição acarretará a presença de uma massa negativa para o chamado campo escalar “scalaron,” que existe além do gráviton. Este campo escalar foi analisado por Starobinsky [30] para uma  $f(R) = R + \alpha R^2$ , que leva a uma expansão acelerada do Universo por causa da presença do termo  $\alpha R^2$ . Por causar esta expansão, este modelo de  $f(R)$  substituiria teoricamente o modelo de energia escura para o Universo. Esta seria uma das principais motivações para estudarmos teorias  $f(R)$ .

Portanto, dissemos acima que as condições (i) e (ii) são duas das principais porque formam os requisitos necessários para a construção de  $f(R)$  viáveis para os modelos de energia escura [31], ou seja,

$$f_R > 0 \quad , \quad f_{RR} > 0 \quad \text{para} \quad R \geq R_0 \quad (4.54)$$

onde  $R_0$  é o escalar de Ricci hoje.

Com o objetivo de analisarmos um maior número de modelos  $f(R)$  manipulando apenas os parâmetros da mesma, a  $f(R)$  usada neste trabalho é dada por

$$f(R) = aR + bR^2 - \alpha R^n \quad (4.55)$$

onde, se  $n < 0$  teremos algo do tipo

$$f(R) = aR - \frac{\alpha}{R^{-n}} + bR^2 \quad , \quad n < 0 \quad (4.56)$$

Para curvaturas grandes, isto é, para o Universo primordial, o último termo em (4.56) prepondera. E para pequenas curvaturas, ou seja, para o Universo atual, o segundo termo comanda o comportamento desta  $f(R)$ . Pode-se demonstrar que (4.56) é compatível com a aceleração cósmica e com os testes observacionais feitos no sistema solar.

Voltando à  $f(R)$  dada em (4.55) a ação modificada da relatividade geral é dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [f(R) + L_m] \quad (4.57)$$

cuja equação de movimento é dada por,

$$\square R + \frac{f_{RRR}}{f_{RR}} \nabla_\lambda R \nabla^\lambda R + \frac{R f_R}{3 f_{RR}} - \frac{2f}{3 f_{RR}} = \frac{k^2}{6 f_{RR}} T \quad (4.58)$$

mas, se  $L_m = 0 \Rightarrow T = 0$  e se  $R_{\mu\nu}$  for constante em (4.58), teremos que

$$2f(R) - R f_R(R) = 0 \quad (4.59)$$

Substituindo (4.55) em (4.59), ficamos com

$$aR + 2(n-1)\alpha R^n = 0 \quad (4.60)$$

então para  $n = 1 \Rightarrow R = 0$  e teremos um espaço-tempo de Minkowski. E para  $n = 2$

$$\Rightarrow aR + 2\alpha R^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R(2\alpha R + a) = 0 \quad (4.61)$$

logo

$$R = 0 \quad \text{ou} \quad R = \frac{-a}{2\alpha} \quad (4.62)$$

então se  $a, \alpha > 0$  ou  $a, \alpha < 0$  temos um espaço AdS; e se  $a < 0$  e  $\alpha > 0$  ou  $a > 0$  e  $\alpha < 0$ , teremos um espaço dS. Note que estamos falando apenas de  $f(R)$  e não dos modelos mundo brana, tema desta dissertação.

Pelas condições de estabilidade em (4.54) temos que,

$$f_{RR} = 2b - n(n-1)\alpha R^{n-2} > 0 \quad (4.63)$$

mas  $R = \frac{-a}{2\alpha}$  para  $n = 2$ , logo, substituindo em (4.63) teremos a condição

$$b > \alpha \quad (4.64)$$

que é a condição não-taquiônica. Analogamente, para  $f_R > 0$  teremos  $2\alpha > b$  que é a condição não-fantasma. Se  $b = \alpha$ , quando teremos que  $f_{RR} = 0$ , então aparecerá uma singularidade. Entretanto, algumas  $f(R)$  viáveis contém uma singularidade, o que nos leva a uma curvatura infinita.

Para  $a = 1$  e  $b = 0$  teremos que

$$f(R) = R - \alpha R^n, \quad \alpha > 0, \quad 0 < n < 1 \quad (4.65)$$

satisfaz os chamados vínculos observacionais: CMB, SNIa e os vínculos gravitacionais locais. Mas o estudo destes não faz parte deste trabalho.

E finalmente, para  $a = b = 0$  e  $\alpha < 0$ , teremos uma  $f(R) = \alpha R^n$  que representa uma  $f(R)$  viável do ponto de vista astrofísico.



### 4.2.3 Solução assintótica

Como foi dito anteriormente, a forma assintótica da solução para um  $n$  arbitrário é dado por

$$y_\infty = k_n |z|, \quad (4.66)$$

onde  $y'_\infty = k_n$  e  $y''_\infty = y'''_\infty = 0$ .

Logo, o escalar de Ricci para  $y_\infty$  fica

$$R_\infty = R(y_\infty) = 12k_n \Lambda e^{2k_n |z|} + 20k_n^2, \quad (4.67)$$

e substituindo em (4.53) ficamos com

$$\begin{aligned} & 3k_n \Lambda e^{k_n |z|} = \\ & \frac{\left( -6k_n \Lambda e^{2k_n |z|} - 6k_n^2 + a \left[ 4k_n^2 - \frac{1}{2} R_\infty \right] + b \left[ 8k_n^2 - \frac{1}{2} R_\infty \right] R_\infty - 4\alpha n k_n^2 R_\infty^{n-1} + \frac{1}{2} \alpha R_\infty^n \right)}{32k_n [2b - \alpha n(n-1) R_\infty^{n-2}]}, \end{aligned} \quad (4.68)$$

onde para  $\Lambda = a = b = 0$  obtemos os resultados da seção 4.1.

No caso de uma geometria chata,  $\Lambda = 0$ , temos

$$\frac{\alpha}{2} \left( \frac{2n}{5} - 1 \right) 20^n k_n^{2n-2} + 40b k_n^2 + 6(1+a) = 0, \quad (4.69)$$

e fazendo  $b = 0$ , isto é, para  $f(R) = aR - \alpha R^n$ , podemos escrever que

$$k_n = \left[ \frac{12(1+a)}{\alpha \left( 1 - \frac{2n}{5} \right) 20^n} \right]^{\frac{1}{2(n-1)}}. \quad (4.70)$$

que nos indica, pelos dois denominadores, que  $1 < n < \frac{5}{2}$ , que é o mesmo resultado de [19].

Fazendo  $a = -1$  e  $b \neq 0$  em (4.69), isto é,

$$f(R) = -R + bR^2 - \alpha R^n, \quad (4.71)$$

teremos

$$k_n = \left[ \frac{80b}{\alpha \left( 1 - \frac{2n}{5} \right) 20^n} \right]^{\frac{1}{2(n-1)}}. \quad (4.72)$$

com o mesmo resultado para  $n$ .

Consequentemente, mostramos mais uma vez que o resultado assintótico obtido em [19] é um caso especial do que obtivemos em (4.69).

Na próxima seção analisaremos o confinamento para o caso de branas curvas.

### 4.3 Confinamento

Agora vamos demonstrar que as branas confinam o modelo padrão para os casos dS e AdS. Como anteriormente, utilizaremos a Lagrangiana do campo escalar complexo

$$L_\Phi = \frac{1}{2} \partial_A \Phi^* \partial^A \Phi - \frac{1}{2} m_0^2 \Phi^* \Phi. \quad (4.73)$$

Mas, para a equação do campo escalar usaremos a equação (4.22), onde  $g_{(5)}$  será,  $g_{(dS)}$  ou  $g_{(AdS)}$ .

Para o caso dS temos

$$\frac{1}{\sqrt{-g_{(dS)}}} \frac{\partial}{\partial x^A} \left( \sqrt{-g_{(dS)}} g^{AB} \frac{\partial \Phi}{\partial x^B} \right) = -m_0^2 \Phi. \quad (4.74)$$

Vamos supor que a solução seja da forma

$$\Phi(x^A) = X(z) e^{-ip_\mu x^\mu}. \quad (4.75)$$

Sabemos que, com os resultados anteriores,

$$\sqrt{g_{dS}} = e^{4y+3\sqrt{\Lambda}t}, \quad (4.76)$$

Substituindo a solução (4.75) na equação (4.74) e utilizando o resultado (4.76), obtemos

$$X'' + 4y'X' + [p_o^2 e^{-2y} - \vec{p}^2 e^{-2y-2\sqrt{\Lambda}t} + 3ip_0 \sqrt{\Lambda} - m_0^2] X = 0, \quad (4.77)$$

como no caso do espaço plano, utilizaremos

$$p_\mu = (E, \vec{p}), \quad (4.78)$$

assim

$$\begin{aligned} p^\mu p_\mu &= e^{-2y} p_0^2 - e^{-2y-2\sqrt{\Lambda}t} \vec{p}^2 \\ \rightarrow p^\mu p_\mu &= e^{-2y} \left[ E^2 - e^{-2\sqrt{\Lambda}t} \vec{p}^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Para o caso plano

$$\rightarrow \Lambda = 0 \rightarrow p^\mu p_\mu = e^{-2y} (E^2 - \vec{p}^2). \quad (4.80)$$

Assim, podemos escrever a equação (4.77) como

$$X'' + 4y'X' + \left[ e^{-2y} \left( E^2 - e^{-2\sqrt{\Lambda}t} \vec{p}^2 \right) + 3iE\sqrt{\Lambda} - m_0^2 \right] X = 0. \quad (4.81)$$

Assintoticamente  $y_\infty = k_n |z|$  com  $k_n > 0$  e  $y'_\infty = k_n$ . Portanto, no limite  $y \rightarrow \infty$  temos

$$X'' + 4k_n X' + \left[ 3iE\sqrt{\Lambda} - m_0^2 \right] X = 0. \quad (4.82)$$

Para o caso AdS temos

$$\frac{1}{\sqrt{-g_{(AdS)}}} \frac{\partial}{\partial x^A} \left( \sqrt{-g_{(AdS)}} g^{AB} \frac{\partial \Phi}{\partial x^B} \right) = -m_0^2 \Phi, \quad (4.83)$$

e a raiz quadrada do determinante é dada por

$$\sqrt{g_{AdS}} = e^{4y-3\sqrt{\Lambda}t}. \quad (4.84)$$

Sustituindo a solução (4.75) na equação (4.83) e utilizando o resultado (4.84), obtemos

$$X'' + 4y' X' + [p_0^2 e^{-2y} - \vec{p}^2 e^{-2y-2\sqrt{\Lambda}x_3} + 3ip_3\sqrt{\Lambda} - m_0^2] X = 0, \quad (4.85)$$

mas temos que  $p_\mu = (E, \vec{p})$ , assim

$$\begin{aligned} p_\mu p^\mu &= e^{-2y} p_0^2 - e^{-2y-2\sqrt{\Lambda}x_3} \vec{p}^2, \\ \rightarrow p_\mu p^\mu &= e^{-2y+2\sqrt{\Lambda}x_3} [E^2 - \vec{p}^2 + p_3^2] - e^{-2y} p_3^2, \end{aligned} \quad (4.86)$$

onde para o espaço plano se reduz para

$$\rightarrow \Lambda = 0 \rightarrow p^\mu p_\mu = e^{-2y} (E^2 - \vec{p}^2). \quad (4.87)$$

Assintoticamente  $y_\infty = k_n |z|$  com  $k_n > 0$  e  $y' = k_n$ . Assim, quando  $y \rightarrow \infty$  temos que

$$X'' + 4k_n X' - \left[ 3ip_3\sqrt{\Lambda} + m_0^2 \right] X = 0. \quad (4.88)$$

Para o caso AdS

$$X'' + 4k_n X' - M_{AdS}^2 X = 0, \quad (4.89)$$

onde  $M_{dS}^2 = m_0^2 - 3iE\sqrt{\Lambda}$  e  $M_{AdS}^2 = m_0^2 - 3ip_3\sqrt{\Lambda}$ . O efeito de curvatura em cada caso foi o de alterar a massa das partículas.

Como critério de confinamento, temos para o caso de de Sitter

$$\begin{aligned} E_{tot}^{dS}[\Phi] &= \int_{-\infty}^{\infty} T_0^0 \sqrt{g_{dS}} dz \\ &= \frac{1}{2} e^{3\sqrt{\Lambda}t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{4k_n |z|} [e^{-2k_n |z|} (E^2 + e^{-2\sqrt{\Lambda}t} \vec{p}^2) X^2 + m_0^2 X^2 + X'^2] dz < \infty. \end{aligned} \quad (4.90)$$

e para o caso anti-de Sitter

$$\begin{aligned}
E_{tot}^{AdS}[\Phi] &= \int_{-\infty}^{\infty} T_0^0 \sqrt{g_{AdS}} dz \\
&= \frac{1}{2} e^{-3\sqrt{\Lambda}x_3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{4k_n|z|} [e^{-2y+2\sqrt{\Lambda}x_3} (E^2 + p_1^2 + p_2^2 + e^{-2\sqrt{\Lambda}x_3} p_3^2) X^2 + m_0^2 X^2 + X'^2] dz < \infty.
\end{aligned} \tag{4.91}$$

Assim como a norma do campo  $\Phi$  deve ser finita. Para o espaço de de Sitter temos

$$\begin{aligned}
\|\Phi\|_{dS}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{g_{dS}} \Phi^* \Phi dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{4y+3y\sqrt{\Lambda}t} X^2 dz \\
&= e^{3\sqrt{\Lambda}t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{4k_n|z|} X^2 < \infty.
\end{aligned} \tag{4.92}$$

E para o caso anti-de Sitter

$$\begin{aligned}
\|\Phi\|_{AdS}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{g_{AdS}} \Phi^* \Phi dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{4y-3y\sqrt{\Lambda}x_3} X^2 dz \\
&= e^{-3\sqrt{\Lambda}x_3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{4k_n|z|} X^2 < \infty.
\end{aligned} \tag{4.93}$$

ou seja, tanto a energia  $E_{tot}$  como o campo  $\|\Phi\|$  convergem assintoticamente.

# Capítulo 5

## Conclusões e Perspectivas

Existem algumas evidências teóricas que indicam que o Universo em que vivemos pode ter mais do que as quatro dimensões do espaço-tempo padrão. Um exemplo é a teoria de supercordas em um espaço-tempo com dez dimensões e as teorias  $M$  ou supergravidade com 11 dimensões..

Com este conceito em mente, Lisa Randall e Raman Sundrum construíram um modelo para o nosso universo com cinco dimensões onde o modelo padrão (o mundo que conhecemos) ocuparia uma 3-brana e as interações gravitacionais ocupariam outra 3-brana. O responsável pela interação gravitacional, o gráviton, viajaria da segunda 3-brana para a outra através da quinta dimensão, que seria infinita. Pode-se demonstrar que esta quinta dimensão é curva o que ocasiona o aparecimento de um fator de deflexão no tensor métrico deste modelo chamado de mundo brana (braneworld). O objetivo primário de Randall e Sundrum era resolver o problema da hierarquia.

Temos portanto um modelo que pode ser formado por branas finas ou grossas, sendo que a segunda é mais apropriada para representar o modelo padrão. As brans finas teriam uma função delta de Dirac para representar as interações com campos escalares e nas branas grossas a interação com a gravitação seria direta.

Neste trabalho, analisamos um modelo de mundo brana com branas grossas. Entretanto, queremos obter uma generalização, introduzindo uma forma geral para uma  $f(R)$  e as branas analisadas são curvas com duas geometrias: de Sitter e anti-de Sitter. Mostramos com precisão, que alguns casos analisados na literatura são na verdade casos especiais do que foi investigado aqui. Além disso, mostramos que este caso generalizado também confina as partículas massivas do modelo padrão, o que autentica o nosso modelo. Os resultados obtidos aqui são originais e serão submetidos para publicação brevemente.

Como uma perspectiva imediata seria analisar este modelo de branas curvas com uma gravitação modificada  $f(R)$  ou a recentemente desenvolvida gravitação de Horava-Lifshitz. Uma questão que merece atenção é se podemos supor que num mundo brana, a quinta dimensão que liga as duas, e é atravessada pelo gráviton, pode estar dentro de um buraco de minhoca. Uma das constituições deste último, na literatura, conjectura que o mesmo

pode ser formado por um buraco branco (BB) e um buraco negro (BN) em cada uma de suas extremidades unidos por uma garganta em comum. Portanto, perguntamos se seria absurdo pensar que um BN estaria ligado à brana onde vivem os grávitons e o BB estaria ligado à brana que compreende o modelo padrão. Assim o BN absorveria o gráviton e o BB o emitiria para dentro da brana do modelo padrão.

Para finalizar, queremos dizer que nesta dissertação tentamos ser auto-suficientes para evitar que o leitor tivesse que procurar outras referências para poder acompanhar a leitura. Entretanto, devido à complexidade e principalmente à multidisciplinaridade do tema, confessamos que abordar profundamente todos os assuntos tratados aqui seria impossível. Esperamos então que o que foi explicado aqui tenha sido compreensível e que tenha ao menos despertado no leitor algum interesse pelo assunto que nós particularmente consideramos fascinante.

# Apêndice A

## Essência da RG

### A.1 Geometria diferencial

Começaremos definindo um conceito fundamental em geometria diferencial que é a noção de mapa[20]. Dados dois conjuntos,  $M$  e  $N$ , um mapa  $\phi : M \rightarrow N$  é uma relação que atribui para cada elemento de  $M$ , exatamente um elemento de  $N$ , ou seja, um mapa é uma generalização da noção de função. Um mapa, assim como acontece com funções, será injetivo se associarmos a cada elemento de  $M$  no máximo um elemento de  $N$ , e será subjetivo se associarmos a cada elemento de  $M$  pelo menos um elemento de  $N$ . A função inversa do mapa é definida como  $\phi^{-1} : N \rightarrow M$ . Podemos também definir como seria a composta, assim como existe função composta. Dados dois mapas  $\phi : P \rightarrow Q$  e  $\psi : Q \rightarrow R$  a composta é  $\psi \circ \phi : P \rightarrow R$  que é dada pela operação  $(\psi \circ \phi)(a) \in R$ .

Um mapa de  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  associa um conjunto com  $m$  valores  $(x^1, x^2, \dots, x^m)$  a um conjunto com  $n$  valores  $(y^1, y^2, \dots, y^n)$ , e podem ser pensadas como uma coleção de  $n$  funções  $\phi^i$  de  $m$  variáveis

$$\begin{aligned} y^1 &= \phi^1(x^1, x^2, \dots, x^m) \\ y^2 &= \phi^2(x^1, x^2, \dots, x^m) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ y^n &= \phi^n(x^1, x^2, \dots, x^m). \end{aligned} \tag{A.1}$$

Essas funções serão  $C^p$  se sua  $p$ -ésima derivada existir e for contínua, e nos referimos a todo mapa  $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  como sendo  $C^p$ , se cada um de seus elementos são pelo menos  $C^p$ . Caso seja contínua mas não necessariamente diferenciável será dito  $C^0$  e caso seja contínua e diferenciável infinitas vezes será dito  $C^\infty$ .

Agora podemos definir difeomorfismo, dizemos que dois conjuntos são ditos difeomórficos



se existe um mapa  $C^\infty$ ,  $\phi : M \rightarrow N$  com uma inversa  $\phi^{-1} : N \rightarrow M$  também  $C^\infty$ , onde  $\phi$  é chamado de difeomorfismo. Outra noção importante é de *bola aberta*, que é o conjunto de todo  $x$  em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $|x-y| < r$  para algum  $y \in \mathbb{R}^n$  e  $r \in \mathbb{R}$ , onde  $|x-y| = [\sum_i (x^i - y^i)^2]^{\frac{1}{2}}$ . Assim, um *conjunto aberto* em  $\mathbb{R}^n$  é um conjunto de uma união arbitrária de *bolas abertas*.

Assim uma **carta** ou um **sistema de coordenadas** consiste de um subconjunto  $U$  de um conjunto  $M$ , juntamente com um mapa um-para-um  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tal que a imagem  $\phi(U)$  é um aberto em  $M$ .

Outra definição importante é a definição de *órbita-variedade* (*orbifold*). Geometricamente, uma órbita-variedade *n-dimensional* é um espaço quociente obtido identificando pontos em uma variedade sob algum grupo discreto de simetria. Isto é, seja  $M$  uma variedade e  $G$  um grupo discreto com uma ação  $G \times M \rightarrow M$ . A órbita-variedade,  $M/G$  é definida como um espaço de classes equivalentes pela a relação

$$x \equiv gx \quad \text{para todo } g \in G. \quad (\text{A.2})$$

Dizemos que  $G$  atua livremente se para todo  $x \in M$ ,  $gx = x$  implica que  $g = 1$ . Ações livres não possuem pontos fixos, pontos para o qual  $gx = x$  para qualquer  $g \in G$  onde  $g \neq 1$ . Se  $G$  atua livremente em  $M$ , então a órbita-variedade  $M/G$  será uma variedade. Se  $G$  não atua livremente, então  $M$  deixará de ser uma variedade precisamente no ponto fixo de  $G$ . Tais ponto são chamados *singularidades da órbita-variedade*.

Como um exemplo simples, considere uma linha real  $\mathbb{R}$  sob a ação do grupo  $\mathbb{Z}_2$  gerado por

$$g : x \mapsto -x, \quad (\text{A.3})$$

o único ponto fixo de  $g$ , é  $x = 0$ . A órbita-variedade  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  é topologicamente a meia linha  $[0, \infty)$ . Este espaço é localmente homeomorfo a  $\mathbb{R}$  em todos os ponto, exceto na origem.

Agora vamos partir para a definição de tensores no espaço-tempo, onde o índice 0 é para coordenadas temporais e 1, 2 e 3 para coordendas espaciais. Dado um referencial  $S$ , um ponto neste espaço pode ser representado por  $x^\mu$ , em um outro referencial  $S'$ , o mesmo ponto do espaço-tempo pode ser representado por  $x'^\mu$ . Assim podemos relacionar  $x^\mu$  com  $x'^\mu$  através de

$$\begin{aligned} x'^0 &= x'^0(x^0, x^1, x^2, x^3) \\ x'^1 &= x'^1(x^0, x^1, x^2, x^3) \\ x'^2 &= x'^2(x^0, x^1, x^2, x^3) \\ x'^3 &= x'^3(x^0, x^1, x^2, x^3), \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

ou de maneira abreviada,

$$x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^{\nu}), \quad (\text{A.5})$$

diferenciando fica

$$dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^0} dx^0 + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^3} dx^3, \quad (\text{A.6})$$

usando a convenção de Einstein de que índices repetidos significam soma, fica

$$dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}, \quad (\text{A.7})$$

qualquer conjunto de quatro quantidades que se transformam dessa maneira é chamado *vetor contravariante*. Assim, podemos generalizar este conceito para a noção de tensor.

$$\begin{aligned} T'^{\mu\nu} &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha}} T^{\lambda\alpha} \\ T'^{\mu\nu\lambda} &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} T^{\alpha\rho\sigma} \\ &\text{etc.} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

qualquer objeto que se transforme desta maneira é um *tensor contravariante*, sendo o primeiro na equação anterior de *ordem 2*, o segundo de *ordem 3* e assim por diante. Assim um vetor é um tensor de *ordem 1* e um escalar um tensor de *ordem zero*. Vemos que um escalar  $\phi$  é um invariante por transformação de coordenadas de maneira que

$$\phi(x^{\mu}) = \phi(x'^{\mu}), \quad (\text{A.9})$$

usando a regra de diferenciação parcial, temos

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}}, \quad (\text{A.10})$$

o que nos leva a definição de *vetores covariantes*

$$A'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} A_{\nu}. \quad (\text{A.11})$$

Generalizando para tensores

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}} T_{\lambda\alpha}, \quad (\text{A.12})$$

podemos também definir *tensores mistos* como

$$T'^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}} T^{\lambda}_{\alpha}. \quad (\text{A.13})$$

Agora vamos definir uma quantidade importantíssima para a geometrização de um

espaço vetorial que é o chamado *elemento de linha*, dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu, \quad (\text{A.14})$$

o *elemento de linha* é invariante perante certas transformações características do espaço vetorial e  $g_{\mu\nu}(x)$  é o chamado *tensor métrico* ou simplesmente *métrica*. Como o elemento de linha é uma quantidade escalar, ela pode ser escrita simplesmente como

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu, \quad (\text{A.15})$$

comparando as duas equações anteriores, temos

$$dx_\mu = g_{\mu\nu}(x)dx^\nu, \quad (\text{A.16})$$

ou seja, o tensor métrico relaciona as representações covariantes e contravariantes. Assim temos também,

$$dx^\mu = g^{\mu\nu}(x)dx_\nu, \quad (\text{A.17})$$

onde  $g^{\mu\nu}(x)$  é o inverso do tensor métrico e satisfaz a equação

$$g^{\mu\nu}(x)g_{\nu\lambda}(x) = \delta_\lambda^\mu, \quad (\text{A.18})$$

onde  $\delta_\lambda^\mu$  é o *delta de Kroenecker*. Um caso particular é quando a métrica é independente dos pontos do espaço-tempo e são chamados de *espaços planos*, e é escrita como

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \quad (\text{A.19})$$

Agora, como vamos trabalhar no espaço curvo, precisamos definir o conceito de derivada neste espaço, pois no espaço curvo a derivada comum de um tensor não é necessariamente um tensor. Diferenciando um tensor obtemos

$$\begin{aligned} \partial'_\lambda X'^\mu &= \frac{\partial}{\partial X'^\lambda} \frac{\partial X'^\mu}{\partial X^\nu} X^\nu \\ &= \frac{\partial X^\alpha}{\partial X'^\lambda} \frac{\partial}{\partial X^\alpha} \frac{\partial X'^\mu}{\partial X^\nu} X^\nu \\ &= \frac{\partial X'^\mu}{\partial X^\nu} \frac{\partial X^\alpha}{\partial X'^\lambda} \partial_\alpha X^\nu + \frac{\partial^2 X'^\mu}{\partial X^\nu \partial X^\alpha} \frac{\partial X^\alpha}{\partial X'^\lambda} X^\nu \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

de onde podemos observar que a primeira parte é um tensor, porém a segunda não é um tensor. Se considerarmos um vetor covariante  $A_\mu(x)$  definido em  $x$  e  $A_\mu(x + dx)$  em  $x + dx$ , no espaço curvo não podemos comparar diretamente essas duas quantidades, o deslocamento do vetor  $A_\mu(x)$  para o ponto  $A_\mu(x + dx)$  depende de  $dx$  e também da

curvatura do espaço. Assim definiremos o chamado *deslocamento paralelo* como

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) A^\nu dx^\nu, \quad (\text{A.21})$$

onde  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x)$  é a chamada conexão e incorpora a curvatura. Assim define-se a chamada *derivada covariante*,

$$\nabla_\nu A_\mu = \partial_\nu A_\mu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda, \quad (\text{A.22})$$

para o caso contravariante

$$\nabla_\nu A^\mu = \partial_\nu A^\mu + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu A^\lambda. \quad (\text{A.23})$$

É importante perceber, que quando a conexão é nula a derivada retorna para a derivada ordinária. A conexão  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  não é um tensor, porém a diferença entre duas conexões é um tensor  $(2, 1)$ , assim a parte antissimétrica de  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  é

$$T_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda, \quad (\text{A.24})$$

um caso particular é quando essa diferença é nula, aí dizemos que a conexão é livre de torção, ou seja

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda. \quad (\text{A.25})$$

A conexão é usualmente escrita em função da métrica e de suas derivadas como

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} (g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\nu\alpha,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}), \quad (\text{A.26})$$

onde a vírgula significa derivada ordinária.

Agora vamos definir alguns tensores importante na RG. O primeiro deles é o chamado *tensor de curvatura*, que é dado por

$$R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} = \partial_\lambda \Gamma_{\nu\rho}^\mu - \partial_\rho \Gamma_{\nu\lambda}^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu - \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha \Gamma_{\alpha\rho}^\mu, \quad (\text{A.27})$$

que é antissimétrico com relação à troca de índices

$$R^\nu{}_{\nu\rho\lambda} = -R^\nu{}_{\nu\lambda\rho}, \quad (\text{A.28})$$

que leva para a identidade

$$R^\mu{}_{\nu\rho\lambda} + R^\mu{}_{\lambda\rho\nu} + R^\mu{}_{\rho\nu\lambda} = 0. \quad (\text{A.29})$$

Abaixando o primeiro índice com a métrica, temos

$$g_{\sigma\mu}R^{\sigma}{}_{\nu\rho\lambda} = R_{\mu\nu\rho\lambda}, \quad (\text{A.30})$$

que é simétrica em relação a troca dos primeiros pares de índices com o segundo

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = R_{\lambda\rho\mu\nu}, \quad (\text{A.31})$$

e antisimétrica em relação a troca dos primeiros índices

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = -R_{\rho\lambda\mu\nu}, \quad (\text{A.32})$$

assim o tensor de curvatura com o primeiro índice covariante satisfaz

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\lambda\rho} &= -R_{\mu\nu\rho\lambda} = -R_{\nu\mu\lambda\rho} = R_{\lambda\rho\mu\nu} \\ R_{\mu\nu\lambda\rho} + R_{\mu\rho\nu\lambda} + R_{\mu\lambda\rho\nu} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

o que facilita muito os cálculos, pois essas simetrias reduzem o número de componentes independentes, em  $n$  dimensões, de  $n^4$  para  $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$ . Outra identidade importante é a *identidade de Bianchi contraída*

$$\nabla_{\mu}R_{\rho\alpha\nu\lambda} + \nabla_{\lambda}R_{\rho\alpha\mu\nu} + \nabla_{\nu}R_{\rho\alpha\lambda\mu} = 0. \quad (\text{A.34})$$

Contraíndo o tensor de Riemann, obtemos o tensor de Ricci

$$g^{\lambda\rho}R_{\rho\mu\lambda\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} = R_{\mu\nu}, \quad (\text{A.35})$$

define-se também o escalar de Ricci, contraíndo o tensor de Ricci

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \quad (\text{A.36})$$

combinando esses objetos definimos o *tensor de Einstein*

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (\text{A.37})$$

Vamos agora tratar de algumas simetrias. As transformações de coordenadas que deixam a métrica invariante são de grande importância pois contêm informações sobre as simetrias da variedade Riemanniana. No caso contínuo podem ser translação e rotação.

Dada uma métrica  $g_{\mu\nu}$ , dizemos que ela é invariante se, perante uma transformação do tipo

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu, \quad (\text{A.38})$$

a métrica fica

$$g'^{\mu\nu}(y) = g^{\mu\nu}(y), \quad (\text{A.39})$$

ou seja, a métrica  $g'^{\mu\nu}(x')$  permanece a mesma função de seu argumento  $x'^\mu$ , assim como a métrica original  $g^{\mu\nu}(x)$  é função de seu argumento  $x^\mu$ . Sabemos que a métrica se transforma como

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} g'_{\sigma\rho}. \quad (\text{A.40})$$

Realizando a transformação,  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} g_{\sigma\rho}. \quad (\text{A.41})$$

Pela definição de derivada de Lie

$$L_x g_{\mu\nu} = \nabla_\nu x_\mu + \nabla_\mu x_\nu, \quad (\text{A.42})$$

que é conhecida como *equação de Killing* e qualquer solução é dita um *campo vetorial de Killing*  $X^\mu$ . Assim, se a métrica é independente de alguma coordenada  $x^\mu$ , um vetor  $\partial_\mu$  irá satisfazer a equação de Killing. De fato, se um vetor  $K^\mu$  satisfaz a equação de Killing, é sempre possível encontrar um sistema de coordenadas no qual  $k = \partial_\mu$ , mas em geral não podemos encontrar coordenadas na qual todos os vetores de Killing são simultaneamente desta forma, nem esta forma é necessária para que o vetor satisfaça a equação de Killing.

Então, uma isometria infinitesimal é gerada pelo vetor de Killing  $X^\mu(X)$  e satisfaz a equação de Killing  $L_x g_{\mu\nu} = 0$

Considerando agora o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , as isometrias deste espaço podem ser rotações e translações em  $n$  dimensões. Da perspectiva de um ponto  $p$  na vizinhança, para as translações, existem  $n$  eixos independentes no qual pode-se mover, então podemos ter  $n$  translações. Já as rotações, que deixam  $p$  invariante e são centradas em  $p$ , podem ser pensadas como que movendo um dos eixos através de  $p$  em um dos outros eixos. Como existem  $n$  eixos, e para cada eixo existem  $(n - 1)$  outros eixos no qual pode ser girado, temos então  $\frac{1}{2}n(n - 1)$  rotações. O fator meio entrou para não contar duas vezes dois eixos quaisquer repetidos. Assim, temos um total de

$$\frac{1}{2}n(n+1), \quad (\text{A.43})$$

simetrias independentes no  $\mathbb{R}^n$ .

O número de isometrias será o número de campos vetoriais de Killing linearmente independentes, assim definimos *espaço com simetria máxima* aquela variedade *n-dimensional* que possua  $\frac{1}{2}n(n-1)$  vetores de Killing. Uma consequência importante é que, dado um espaço com simetria máxima, podemos escrever o tensor de Riemann como

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{R}{n(n-1)}(g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}). \quad (\text{A.44})$$

Podendo assim classificar a curvatura como positiva, negativa ou zero.

Utilizaremos agora para o formalismo Lagrangiano, Apêndice C, para determinar a ação para o espaço curvo. No caso da RG, como  $R_{\rho\sigma\mu\nu} \neq 0$ , temos que associar a Lagrangiana ao espaço vazio, ou seja, espaço que possua apenas campo gravitacional. O espaço-tempo é caracterizado pelo tensor métrico  $g^{\alpha\beta}$ , portanto a Lagrangiana deve depender somente do tensor métrico e de suas derivadas. Como a Lagrangiana é uma quantidade escalar é natural pensarmos no escalar de Ricci para a Lagrangiana.

Porém, o escalar de Ricci depende da derivada de segunda ordem do tensor métrico, e então não poderemos escrever a Lagrangiana na forma  $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$ . Como vamos integrar a Lagrangiana, devemos manter em mente qual quantidade deve ser invariante por uma transformação geral de coordenadas. Introduzindo a definição do determinante da métrica  $g = \det g_{\mu\nu}$ , sabendo que esta quantidade é invariante por uma transformação geral de coordenadas, podemos escrever a Lagrangiana da seguinte forma,

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}R, \quad (\text{A.45})$$

e podemos definir a ação na Relatividade Geral, conhecida como ação de Einstein-Hilbert

$$S = \frac{1}{2k} \int \sqrt{-g}R d^4x, \quad (\text{A.46})$$

onde  $k = 8\pi G$  é a constante de Newton.

Acrescentando um termo de matéria à ação, podemos realizar a variação da ação com relação ao tensor métrico e encontrar as equações de Einstein na presença de matéria. A ação, conhecida como ação de Einstein-Hilbert, fica

$$S = \frac{1}{2k} \int \mathcal{L} d^4x + S_M, \quad (\text{A.47})$$

onde o termo de matéria é dado por

$$S_M = \int \sqrt{-g}\mathcal{L}_M d^4x, \quad (\text{A.48})$$

e podemos definir o tensor de momento-energia como

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (\text{A.49})$$

Na RG o tensor de momento-energia é o responsável pela curvatura do espaço-tempo, o que é bem interessante pois, matéria e energia curvarão o espaço-tempo.

Um exemplo de tensor de momento-energia é o do **fluido perfeito**, sendo caracterizado pelas quantidades: **4-velocidade**  $u^a = \frac{dx^a}{d\tau}$ , por um campo **densidade própria**  $\rho_0 = \rho_0(x)$  e por um campo **pressão escalar**  $p = p(x)$ . Assim esse tensor é escrito como

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + p S^{\mu\nu}, \quad (\text{A.50})$$

onde  $S^{\mu\nu}$  é um tensor simétrico dado por

$$S^{\mu\nu} = \lambda u^\mu u^\nu + \mu g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.51})$$

com  $\lambda$  e  $\mu$  constantes. Atribuindo a essas constantes os valores,  $\lambda = 1$  e  $\mu = 1$  ficamos com

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.52})$$

onde  $g^{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$  é o tensor métrico no espaço de Minkowski.

Em um referencial no qual o fluido esteja em repouso a 4-velocidade é

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad (\text{A.53})$$

e o tensor de momento-energia se torna

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix} \quad (\text{A.54})$$

subindo um índice

$$T_\nu^\mu = \text{diag}(-\rho, p, p, p), \quad (\text{A.55})$$

sendo seu traço dado por

$$T_\mu^\mu = -\rho + 3p. \quad (\text{A.56})$$

Queremos encontrar as equações de Einstein pelo método variacional, para tanto, vamos realizar uma variação na equação (A.47) com relação a métrica  $g_{\mu\nu}$ . Para o escalar de Ricci temos



$$\delta R = \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + (\delta R_{\mu\nu}) g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.57})$$

assim, escrevendo a ação em (A.46) como  $S = S_1 + S_2 + S_3$ , e a variação na ação fica

$$\delta S = (\delta S_1) + (\delta S_2) + (\delta S_3), \quad (\text{A.58})$$

onde para  $\delta S = 0$  teremos as equações de Einstein. Temos então que

$$\begin{aligned} (\delta S_1) &= \int (\delta\sqrt{-g}) g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} d^4x \\ (\delta S_2) &= \int \sqrt{-g} (\delta g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} d^4x \\ (\delta S_3) &= \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}) d^4x. \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

Para realizar a variação em  $\sqrt{-g}$ , vamos analisar como se faz a variação no determinante de uma quantidade  $B$  qualquer. Seja

$$U = e^B. \quad (\text{A.60})$$

Expandindo  $e^B$  em série de potências e aplicando o operador unitário em ambos os lados, de modo a diagonalizar  $B$ , temos

$$SUS^{-1} = Ae^B S^{-1} = 1 + SBS^{-1} + \frac{1}{2}SB^2S^{-1} + \frac{1}{3!}SB^3S^{-1} + \dots \quad (\text{A.61})$$

Considerando as matrizes bidimensionais, por conveniência, a sendo  $b_1$  e  $b_2$  seus autovalores, temos

$$\begin{aligned} SUS^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} b_1^2 & 0 \\ 0 & b_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_3^2 & 0 \\ 0 & b_3^2 \end{bmatrix} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} e^{b_1} & 0 \\ 0 & e^{b_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

Assim,

$$\det U = \det SUS^{-1} = e^{b_1} e^{b_2} = e^{b_1+b_2} = e^{\text{tr}(b)}. \quad (\text{A.63})$$

Então, podemos escrever, para uma matriz  $B$  qualquer

$$\det B = \exp(\text{tr} \ln B). \quad (\text{A.64})$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\delta \det B &= (\delta \operatorname{tr} \ln B) \exp(\operatorname{tr} \ln B) \\
&= \operatorname{tr}(\delta \ln B) \det B \\
&= \operatorname{tr}(B^{-1} \delta B) \det B.
\end{aligned} \tag{A.65}$$

Então para  $\sqrt{-g}$

$$\begin{aligned}
\delta \sqrt{-g} &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g \\
&= \frac{1}{2} \frac{g}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{A.66}$$

Para a variação em  $\delta R_{\mu\nu}$  temos

$$\begin{aligned}
\delta R_{\mu\nu} &= \delta \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^{\lambda} - \delta \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \delta \Gamma_{\lambda\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\sigma} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \delta \Gamma_{\lambda\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\lambda\sigma}^{\sigma} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \\
&= (\delta \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \delta \Gamma_{\lambda\sigma}^{\sigma}) - (\delta \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} \delta \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma})
\end{aligned} \tag{A.67}$$

assim  $\delta R_{\mu\nu}$ , fica

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{;\nu} - (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{;\lambda}, \tag{A.68}$$

que é **equação de Palatini**. Assim, o termo  $\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$  fica

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \sqrt{-g} g^{\mu\nu} [(\delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{;\nu} - (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{;\lambda}] \\
&= \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{;\nu} - \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{;\lambda} \\
&= (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{;\nu} - (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{;\lambda},
\end{aligned} \tag{A.69}$$

onde foi usada a identidade

$$\sqrt{-g} A_{;\mu}^{\mu} = (\sqrt{-g} A^{\mu})_{,\mu}. \tag{A.70}$$

Fica claro pela equação (A.69), que o termo não contribui para a integral, o que dá

$$\int \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0, \tag{A.71}$$

portanto as equações de Einstein da RG são

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 2kT_{\mu\nu}, \quad (\text{A.72})$$

ou

$$G_{\mu\nu} = 2kT_{\mu\nu}, \quad (\text{A.73})$$

onde  $G_{\mu\nu}$  é o tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (\text{A.74})$$

Vamos analisar os dois lados da equação (A.72). O lado esquerdo é a parte geométrica, caracterizado pelo tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , que contém todas as informações necessárias para a geometria do espaço-tempo. O lado direito é a parte do tensor de momento-energia, que pode ser bem complicada. As equações de Einstein nos dizem como a curvatura do espaço-tempo reage na presença de matéria (tensor de momento-energia). Aqui a fonte do campo gravitacional é o tensor de momento-energia, na gravitação de Newton a fonte era massa. Isto está bem de acordo com a relatividade restrita com relação à equivalência entre matéria e energia.

No vácuo, as equações de Einstein se tornam

$$G_{\nu}^{\mu} = 0. \quad (\text{A.75})$$

Porém, Einstein considerava sua teoria deficiente, uma vez que ela violava o princípio de Mach, se não há matéria, então não há geometria, ou seja, admite espaço de Minkowski como solução. Isso quer dizer que um corpo em um universo vazio poderia possuir propriedades inerciais. Isso não agradava Einstein pois, ele baseou sua teoria da RG nos princípios de Mach.

Além disso, Einstein procurava por uma teoria que produzisse um universo homogêneo e estático, podendo ser aberto (infinito) ou fechado (finito). O que Einstein fez foi modificar as equações de campo introduzindo um termo extra,  $\Lambda g_{\mu\nu}$ , sendo  $\Lambda$  a chamada constante cosmológica. Assim, a ação se torna

$$S = \int d^4x [\sqrt{-g}(R - 2\Lambda)] + S_M. \quad (\text{A.76})$$

Agora as equações de Einstein são Machianas no sentido de que não admitem soluções planas. No entanto, logo após Einstein obter uma solução cosmológicamente estática, foi descoberto que o universo está em expansão.

Na RG, a fonte de campo gravitacional é o tensor de momento-energia, porém em uma física sem gravitação apenas mudanças na energia de um estado para outro são medidas. É assim por exemplo no movimento de uma partícula com energia potencial  $V_0$ , sendo esta a mesma para um estado  $V_0 + V(x)$  para qualquer  $V_0$  constante. Em gravitação, no

entanto, o valor atual da energia da matéria não é apenas a diferença entre estados.

Isso serviu de motivação para se pensar em uma energia do vácuo, ou seja, uma energia característica do espaço vazio. Seu tensor de momento-energia deve ser proporcional a métrica, portanto

$$T_{\mu\nu}^{(vac)} = -\rho_{vac}\eta_{\mu\nu}. \quad (\text{A.77})$$

Podemos generalizar para o espaço curvo e escrever

$$T_{\mu\nu}^{(vac)} = -\rho_{vac}g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.78})$$

Se olharmos para o tensor de momento-energia de um fluido perfeito, vemos que o vácuo se apresenta como um fluido perfeito com uma pressão isotrópica com o sinal oposto ao da densidade de energia, ou seja

$$p_{vac} = -\rho_{vac}, \quad (\text{A.79})$$

assim, podemos escrever a densidade de energia do vácuo em função da constante cosmológica.

$$\rho_{vac} = \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (\text{A.80})$$

podemos perceber que, o termo *constante cosmológica* e *energia do vácuo* são permutáveis.

## A.2 Relatividade Geral com campo escalar

A Relatividade Geral vem passando por vários testes experimentais, assim é natural encontrarmos alguns desvios da teoria original de Einstein. Por isso houve a necessidade de criar alguns modelos alternativos da RG, um deles é incluir um campo escalar na Lagrangiana da ação, assim a lagrangiana é escrita como

$$L = \frac{R}{2k^2} + \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - V(\phi), \quad (\text{A.81})$$

e a ação

$$S = \int \sqrt{-g} \left( \frac{R}{2k^2} + \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - V(\phi) \right) d^4x, \quad (\text{A.82})$$

realizando uma variação na ação acima com respeito à métrica e outra com respeito ao campo escalar, temos

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R &= -k^2T_{\mu\nu} \\ \partial_\mu(\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\partial_\nu\phi) &= -\sqrt{-g}\frac{dV}{d\phi}, \end{aligned} \quad (\text{A.83})$$

onde o tensor momento energia é agora dado por

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(M)} + T_{\mu\nu}^{(\phi)}, \quad (\text{A.84})$$

onde

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{(M)} &= \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \\ T_{\mu\nu}^{(\phi)} &= \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}V(\phi). \end{aligned} \quad (\text{A.85})$$

# Apêndice B

## Ação na mecânica clássica e a álgebra de Poincaré

### B.1 A lagrangiana na mecânica clássica

Seja um sistema mecânico possuindo  $n$  graus de liberdade descrito pelas coordenadas generalizadas  $q_i$ , onde  $i = (0, 1, 2, \dots, n)$ , e por suas derivadas temporais  $\dot{q}_i$ . A energia cinética será então dada por  $T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \dot{q}_i \dot{q}_j$ , e sua energia potencial  $V(q)$ . A Lagrangiana é definida como

$$L = T - V \tag{B.1}$$

Se nos instantes  $t_1$  e  $t_2$  o sistema é caracterizado pelas coordenadas  $q_i(t_1)$  e  $q_i(t_2)$  e pelas velocidades  $\dot{q}_i(t_1)$  e  $\dot{q}_i(t_2)$ , o princípio de Hamilton nos diz que a evolução do sistema entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$  é

$$S = \int L(q_i, \dot{q}_i) dt, \tag{B.2}$$

conhecida como ação integral, sendo que a ação é um funcional de  $q_i$  e  $\dot{q}_i$ . Existe uma infinidade de possíveis caminhos que o corpo pode seguir entre  $t_1$  e  $t_2$ , mas o princípio da mínima ação diz que a trajetória de um corpo deve ser aquela em que a ação possua um mínimo, portanto

$$\delta S = 0, \tag{B.3}$$

como resultado, considerando que a variação se anule nos extremos, ou seja,  $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ , obtemos

$$\delta S = \int \delta L(q_i, \dot{q}_i) dt = 0, \tag{B.4}$$

o que nos leva às conhecidas equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \quad (\text{B.5})$$

então na formulação Lagrangiana um sistema mecânico com  $n$  graus de liberdade, é regido por  $n$  equações diferenciais ordinárias de segunda ordem no tempo.

Outro formalismo importante é o formalismo hamiltoniano, que substitui as  $n$  equações de Lagrange por um conjunto de  $2n$  equações diferenciais de primeira ordem. Agora o movimento pode ser representado por uma curva traçada no *espaço de fases*, no qual um ponto determina o estado do sistema, ou seja, suas configurações, as posições das partículas, e a taxa de variação desta configuração, velocidade das partículas.

Partindo da Lagrangiana e tomando sua diferencial

$$dL = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (\text{B.6})$$

onde podemos definir a quantidade

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (\text{B.7})$$

que é o conhecido momento canônico conjugado. Sem mais detalhes, encontra-se uma função de  $q_i, p_i, t$ ,

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t), \quad (\text{B.8})$$

que é chamada de Hamiltoniana. Sendo as equações de Hamilton do movimento dadas por

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Aqui se faz necessário a passagem para o contínuo, onde iremos substituir as coordenadas simples  $q_i(t)$  por um conjunto de *campos* dependentes do contínuo espaço-tempo  $\phi_i(x^\mu)$ , e agora a ação se torna um funcional destes campos.

Em teoria de campos, a Lagrangiana pode ser definida como a integral sobre espaços da chamada *densidade de Lagrangiana*  $\mathcal{L}$ , sendo esta um funcional de  $\phi_i$  e de suas derivadas espaço-temporais  $\partial_\mu \phi_i$

$$L = \int d^3\vec{r} \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i), \quad (\text{B.10})$$

sendo a ação dada por

$$S = \int dt L = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i). \quad (\text{B.11})$$

Assim como foi feito anteriormente, o movimento da partícula deve obedecer ao princípio de Hamilton, ou seja,

$$\delta S = 0. \quad (\text{B.12})$$

Realizando a variação na ação (B.11) e considerando

$$\delta\phi_i(t_1) = \delta\phi_i(t_2), \quad (\text{B.13})$$

resulta na equação de Euler-Lagrange para o caso contínuo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} = 0. \quad (\text{B.14})$$

Uma consequência do uso do princípio variacional é o teorema de Noether, que relaciona simetrias com leis de conservação, ele estabelece que cada simetria contínua da Lagrangiana, corresponde a uma lei de conservação. Realizando uma variação na Equação de Euler-Lagrange, equação (B.14) temos

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \\ &= \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right), \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

quando  $\delta \mathcal{L} = 0$  ou quando  $\delta \mathcal{L}$  é uma derivada total, teremos uma quantidade conservada.

Reescrevendo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi, \quad (\text{B.16})$$

como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (\text{B.17})$$

podemos escrever

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \right) = 0, \quad (\text{B.18})$$

onde  $\eta^{\mu\nu}$  é o tensor métrico no espaço-tempo de Minkowski. Obtemos então uma expressão do tipo

$$\partial_\mu \tau^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{B.19})$$

que é uma equação de continuidade.



Para analisar o que está sendo conservado [29], vamos analisar primeiramente a componente  $\nu = 0$  do tensor de momento-energia,

$$\partial_\mu \tau^{\mu 0} = 0, \quad (\text{B.20})$$

sendo

$$\tau^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}, \quad (\text{B.21})$$

que é a densidade hamiltoniana, ou seja,  $\tau^{00}$  corresponde à densidade de energia do campo  $\phi$ .

Para  $\nu = i$ , a equação (B.19) fica

$$\partial_\mu \tau^{\mu i} = 0, \quad (\text{B.22})$$

abrindo o somatório

$$\partial_0 \tau^{0i} + \partial_j \tau^{ji}, \quad (\text{B.23})$$

o que nos leva para

$$\partial_0 \int \tau^{0i} d^3 \vec{r} = 0, \quad (\text{B.24})$$

que expressa a conservação do momento do campo,

$$P^i = \int \pi \partial^i \phi d^3 \vec{r}, \quad (\text{B.25})$$

ou seja, as partes espaciais do tensor de momento-energia

$$\tau^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \phi)} \partial^i \phi - \eta^{ij} \mathcal{L}, \quad (\text{B.26})$$

é uma corrente de momento. E o quadrimomento energia-momento é dado por

$$P^\mu = \int d^3 \vec{r} \tau^{\mu 0}. \quad (\text{B.27})$$

ou seja, o que está sendo conservado é o momento e a energia do campo  $\phi$ .

Assim,  $P^\mu$  é o gerador das translações. O significado de uma teoria ser invariante por translações significa que a teoria não muda se for realizada num outro ponto do espaço-tempo, num mesmo referencial.

Outra simetria importante é a rotação. Realizando uma transformação infinitesimal na Lagrangiana, que é um escalar, temos

$$\delta \mathcal{L} = \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} (x_\nu \partial_\mu \mathcal{L} - x_\mu \partial_\nu \mathcal{L}), \quad (\text{B.28})$$

que pode ser escrita como uma derivada total

$$\begin{aligned}\omega^{\mu\nu}x_\nu\partial_\mu\mathcal{L} &= \omega^{\mu\nu}\partial_\mu(x_\nu\mathcal{L}) - \omega^{\mu\nu}\partial_\mu(x_\nu)\mathcal{L} \\ &= \omega^{\mu\nu}\partial_\mu(x_\nu\mathcal{L}) - \omega^{\mu\nu}\eta_{\nu\mu}\mathcal{L},\end{aligned}\tag{B.29}$$

como o segundo termo é zero

$$\omega^{\mu\nu}x_\nu\partial_\mu\mathcal{L} = \omega^{\mu\nu}\partial_\mu(x_\nu\mathcal{L}).\tag{B.30}$$

Assim,

$$\delta\mathcal{L} = \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\partial_\rho(\delta_\mu^\rho x_\nu\mathcal{L} - \delta_\nu^\rho x_\mu\mathcal{L}).\tag{B.31}$$

Além disso, uma variação infinitesimal para o campo escalar temos é dada por

$$\begin{aligned}\delta\phi &= \phi(x + \delta x) - \phi(x) \\ &= \delta x^\mu\partial_\mu\phi \\ &= \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}(x_\nu\partial_\mu\phi - x_\mu\partial_\nu\phi).\end{aligned}\tag{B.32}$$

Substituindo as equações (B.31) e (B.32) na equação (B.14), temos

$$\partial_\mu(\delta_\nu^\mu x_\nu\mathcal{L} - \delta_\nu^\mu x_\rho\mathcal{L}) = \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(x_\nu\partial_\rho\phi - x_\rho\partial_\nu\phi)\right],\tag{B.33}$$

assim

$$\partial_\mu\left\{x_\nu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\rho\phi - \delta_\rho^\mu\mathcal{L}\right] - x_\rho\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi - \delta_\nu^\mu\mathcal{L}\right]\right\} = 0,\tag{B.34}$$

de onde podemos escrever

$$\partial^\mu(x_\nu\tau_{\mu\rho} - x_\rho\tau_{\mu\nu}) = 0,\tag{B.35}$$

identificando

$$M_{\mu\nu\rho} = x_\nu\tau_{\mu\rho} - x_\rho\tau_{\mu\nu},\tag{B.36}$$

escrevemos

$$\partial^\mu M_{\mu\nu\rho} = 0,\tag{B.37}$$

onde  $M_{\mu\nu\rho}$ , é a *densidade de momento angular*.

## B.2 Espaço de Minkowski e o grupo de Poincaré

Como foi obtido no Apêndice A, o elemento de linha que descreve o espaço plano é

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (\text{B.38})$$

ou seja, o tensor métrico não depende dos pontos do espaço-tempo. A métrica neste espaço é denotada por  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  e possui as seguintes características

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} +1 & \text{se } \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{se } \mu = \nu = i \\ 0 & \text{se } \mu \neq \nu \end{cases} \quad (\text{B.39})$$

onde  $i = 1, 2, 3$ .

Assim, o elemento de linha para esta métrica é

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2. \quad (\text{B.40})$$

O espaço caracterizado por esta métrica é conhecido como *espaço de Minkowski* que descreve a relatividade especial.

Vamos escrever  $ds^2$  em dois sistemas de referência,  $S$  e  $S'$ . Queremos analisar [29] aquelas transformações que deixam  $ds^2$  invariante, portanto

$$\eta'_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (\text{B.41})$$

mas

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu, \quad (\text{B.42})$$

detalhes no Apêndice A, então temos

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\lambda} dx^\rho dx^\lambda &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= \eta_{\rho\lambda} dx^\rho dx^\lambda. \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

Se

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\lambda} = \eta_{\rho\lambda}, \quad (\text{B.44})$$

o elemento de linha é invariante perante esta transformação.

Diferenciando a equação anterior com respeito a  $x^\xi$ , temos

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\xi} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\lambda} + \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\lambda \partial x^\xi} = 0. \quad (\text{B.45})$$

Que pode ser escrita como

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\xi} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\lambda} + \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\xi} = 0, \quad (\text{B.46})$$

permutando agora os índices  $\rho$  e  $\lambda$ , temos

$$2\eta_{\mu\nu} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\xi} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\lambda} = 0, \quad (\text{B.47})$$

que só é possível se

$$\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\xi} = 0, \quad (\text{B.48})$$

cujas soluções são do tipo

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu + a^\mu, \quad (\text{B.49})$$

em que  $\Lambda_\nu^\mu$  e  $a^\mu$  são constantes. Sendo que  $\Lambda_\nu^\mu$  satisfaz

$$\Lambda_\nu^\mu \Lambda_\rho^\nu \eta_{\mu\rho} = \eta_{\rho\lambda}. \quad (\text{B.50})$$

As transformações (B.49) são as chamadas *transformações de Poincaré*, no caso particular onde  $a^\mu = 0$ , são chamadas de *transformações de Lorentz homogêneas*

Pela equação (B.50), podemos escrever

$$\begin{aligned} \eta_{\rho\lambda} &= \Lambda_\rho^\mu \Lambda_\lambda^\nu \eta_{\mu\nu} \\ &= \Lambda_\rho^\mu \eta_{\mu\nu} \Lambda_\lambda^\nu, \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

que pode ser escrita na forma matricial

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda, \quad (\text{B.52})$$

cujos determinantes são

$$\begin{aligned} \det \eta &= \det(\Lambda^T \eta \Lambda) \\ &= \det(\Lambda^T \Lambda) \det \eta \\ &= \det(\Lambda)^2 \det \eta \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

Assim, ou  $\det \Lambda = 1$  ou  $\det \Lambda = -1$ , além disso, pela métrica do espaço de Minkowski, temos

$$\Lambda_0^0 \geq 1 \quad \text{ou} \quad \Lambda_0^0 \leq -1, \quad (\text{B.54})$$

Pelas condições anteriores, podemos dividir as transformações de Lorentz em 4 conjuntos.

$$\begin{aligned} L_+^\uparrow &\rightarrow \det \Lambda = +1 \rightarrow \Lambda_0^0 \geq +1 \\ L_-^\uparrow &\rightarrow \det \Lambda = -1 \rightarrow \Lambda_0^0 \geq +1 \\ L_+^\downarrow &\rightarrow \det \Lambda = +1 \rightarrow \Lambda_0^0 \leq -1 \\ L_-^\downarrow &\rightarrow \det \Lambda = -1 \rightarrow \Lambda_0^0 \leq -1, \end{aligned} \quad (\text{B.55})$$

sendo que apenas  $L_+^\uparrow$  possui significado físico, e recebe o nome de *transformações de Lorentz próprias*.

As propriedades de simetria desempenham um papel importante tanto nas teorias clássicas como nas teorias quânticas, sua importância vem crescendo com o tempo, e tem aplicações desde os estudos das propriedades do espaço-tempo, como homogeneidade e isotropia, até a unificação de bósons e férmions nas teorias de supersimetria. Para tratar de simetrias, vamos falar um pouco sobre a teoria dos grupos, pois associamos a cada simetria um grupo.

Vamos começar com a definição de grupo [23]. Grupo é um sistema  $\{G, \cdot\}$ , constituindo de um conjunto  $G$  e uma operação “ $\cdot$ ”, satisfazendo as seguintes propriedades:

- Se  $a \in G$  e  $b \in G$ , então  $a \cdot b \in G$
- Para todo  $a, b, c \in G$ , temos  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ , então  $a \cdot b \in G$
- Existe um elemento identidade  $e \in G$  tal que para todo  $a \in G$  temos  $e \cdot a = a$
- Para todo  $a \in G$ , existe um elemento inverso,  $a^{-1}$ , também pertencente a  $G$ , tal que  $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

Se além destas propriedades houver comutatividade, o grupo é dito *abeliano*.

O número de elementos de um grupo é chamado ordem do grupo. Uma classe de grupos importante é a dos grupos de Lie.

Se  $G$  é um grupo e  $g_1, g_2, \dots \in G$ , uma representação  $D$  deste grupo é uma aplicação que associa um operador a cada elemento do grupo  $G$ , ou seja,

$$\begin{aligned} g_1 &\longrightarrow D(g_1) \\ g_2 &\longrightarrow D(g_2) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

e  $D(g_1), D(g_2), \dots$  também representam um grupo.

Podemos agora calcular os geradores do grupo de Lorentz, que é um grupo com 6 parâmetros independentes, que representaremos por quantidades antissimétricas  $\omega^{\mu\nu}$ . Assim, escrevendo

$$\Lambda = 1 - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}, \quad (\text{B.57})$$

em que  $\omega^{\mu\nu}$  são parâmetros infinitesimais e as matrizes  $\Sigma_{\mu\nu}$  são antissimétricas. Podemos escrever a relação anterior como

$$\Lambda_\lambda^\rho = \delta_\lambda^\rho - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}(\Sigma_{\mu\nu})_\lambda^\rho. \quad (\text{B.58})$$

Além disso podemos escrever

$$(\Sigma_{\mu\nu})_\lambda^\rho = i(\delta_\mu^\rho\eta_{\nu\lambda} - \delta_\nu^\rho\eta_{\mu\lambda}). \quad (\text{B.59})$$

Assim, os geradores ficam

$$\Sigma_{01} = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Sigma_{02} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.60})$$

$$\Sigma_{03} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Sigma_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.61})$$

$$\Sigma_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Sigma_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.62})$$

Assim, obtemos a álgebra de Lie para o grupo de Lorentz

$$[\Sigma_{\mu\nu}, \Sigma_{\xi\sigma}] = i(\eta_{\mu\sigma}\Sigma_{\nu\xi} + \eta_{\nu\xi}\Sigma_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\xi}\Sigma_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}\Sigma_{\mu\xi}). \quad (\text{B.63})$$

Se fizermos

$$\begin{aligned}
K_i &= (\Sigma_{01}, \Sigma_{02}, \Sigma_{03}), \\
S_i &= (\Sigma_{23}, \Sigma_{31}, \Sigma_{12}).
\end{aligned}
\tag{B.64}$$

Finalmente, podemos escrever

$$\begin{aligned}
[S_i, S_j] &= i\epsilon_{ijk}S_k, \\
[S_i, K_j] &= i\epsilon_{ijk}K_k, \\
[K_i, K_j] &= -i\epsilon_{ijk}S_k.
\end{aligned}
\tag{B.65}$$

Podemos ainda definir

$$\begin{aligned}
J_i &= \frac{1}{2}(S_i + iK_i), \\
I_i &= \frac{1}{2}(S_i - iK_i),
\end{aligned}
\tag{B.66}$$

assim, obtemos

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk}J_k, \\
[I_i, I_j] &= i\epsilon_{ijk}I_k, \\
[J_i, I_j] &= 0.
\end{aligned}
\tag{B.67}$$

Ou seja,  $J_i$  e  $I_i$  satisfazem a álgebra Lie.

# Apêndice C

## Cálculos do capítulo 3

Cálculo dos tensores de Ricci para o caso de de Sitter:  
Tensores métricos covariantes

$$\begin{aligned}g_{00} &= e^{2y}\eta_{00} \\g_{ab} &= e^{(2y+2\sqrt{\Lambda}t)}\eta_{ab} \\g_{55} &= -1\end{aligned}\tag{C.1}$$

Tensores métricos contravariantes

$$\begin{aligned}g^{00} &= e^{-2y}\eta^{00} \\g^{ab} &= e^{-(2y+2\sqrt{\Lambda}t)}\eta^{ab} \\g^{55} &= -1\end{aligned}\tag{C.2}$$

Conexões não nulas

$$\begin{aligned}\Gamma_{ab}^0 &= \sqrt{\Lambda}e^{2\sqrt{\Lambda}t}\eta_{ab} \\ \Gamma_{0b}^a &= \sqrt{\Lambda}\delta_b^a \\ \Gamma_{00}^5 &= y'e^{2y} \\ \Gamma_{ab}^5 &= y'e^{2y+2\sqrt{\Lambda}t}\eta_{ab} \\ \Gamma_{b5}^a &= y'\delta_b^a \\ \Gamma_{05}^0 &= y'\end{aligned}\tag{C.3}$$

Derivadas das conexões não nulas



$$\partial_5 \Gamma_{00}^5 = y'' e^{2y} + 2y'^2 e^{2y} \quad (\text{C.4})$$

### Cálculo dos tensores de Ricci

Para os valores  $(0, 0)$

$$\begin{aligned} R_{00} &= \partial_P \Gamma_{00}^P - \partial_P \Gamma_{0P}^P + \Gamma_{PQ}^P \Gamma_{00}^Q - \Gamma_{0Q}^P \Gamma_{0P}^Q \\ &= y'' e^{2y} + 2y'^2 e^{2y} + y' \delta_a^a y' e^{2y} \\ &= -(3\Lambda e^{-2y} - y'' - 4y'^2) e^{2y} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Para os valores  $(a, b)$

$$\begin{aligned} R_{ab} &= \partial_P \Gamma_{ab}^P - \partial_a \Gamma_{bP}^P + \Gamma_{PQ}^P \Gamma_{ab}^Q - \Gamma_{aQ}^P \Gamma_{bP}^Q \\ &= \partial_0 \Gamma_{ab}^0 + \partial_5 \Gamma_{ab}^5 + \Gamma_{c0}^c \Gamma_{ab}^0 + \\ &\Gamma_{c5}^c \Gamma_{ab}^5 + \Gamma_{05}^0 \Gamma_{ab}^5 - \Gamma_{ac}^0 \Gamma_{b0}^c \\ &- \Gamma_{a0}^c \Gamma_{bc}^0 - \Gamma_{ac}^0 \Gamma_{b0}^c - \Gamma_{a0}^c \Gamma_{bc}^0 \\ &- \Gamma_{ac}^5 \Gamma_{b5}^c - \Gamma_{a5}^c \Gamma_{bc}^5 \\ &= (3\Lambda e^{-2y} + y'' + 4y'^2) e^{2y+2\sqrt{\Lambda}t} \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Para os valores  $(5, 5)$

$$\begin{aligned} R_{55} &= \partial_P \Gamma_{55}^P - \partial_5 \Gamma_{5P}^P + \Gamma_{PQ}^P \Gamma_{55}^Q - \Gamma_{5Q}^P \Gamma_{5P}^Q \\ &= -\partial_5 \Gamma_{50}^0 - \partial_5 \Gamma_{5a}^a - \Gamma_{50}^0 \Gamma_{50}^0 - \Gamma_{5b}^a \Gamma_{5a}^b \\ &= -y'' - y'' \delta_a^a - y'^2 - (y'^2 \delta_a^a) \\ R_{55} &= -4(y'' + y'^2) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

assim, o escalar de Ricci fica

$$\begin{aligned} R &= g^{00} R_{00} + g^{ab} R_{ab} + g^{55} R_{55} \\ &= -3\Lambda e^{-2y} - 9\Lambda e^{-2y} + e^{-2y} y'' e^{-2y} + 3y'' + 4y'' + 4y''^2 + 9y'^2 + 4y'^2 \\ &= -12\Lambda e^{-2y} + 8y'' + 20y'^2 \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

### Cálculo dos tensores de Ricci para o caso anti-de Sitter:

Tensores métricos covariantes

$$\begin{aligned}
g_{00} &= e^{2y-2\sqrt{\Lambda}x_3}\eta_{00} \\
g_{11} &= g_{22} = -e^{2y-2\sqrt{\Lambda}x_3} \\
g_{33} &= -e^{2y} \\
g_{55} &= -1
\end{aligned} \tag{C.9}$$

### Tensores métricos contravariantes

$$\begin{aligned}
g_{00} &= e^{-2y-2\sqrt{\Lambda}x_3}\eta_{00} \\
g_{11} &= g_{22} = -e^{-2y+2\sqrt{\Lambda}x_3} \\
g_{33} &= -e^{-2y} \\
g_{55} &= -1
\end{aligned} \tag{C.10}$$

### Conexões não nulas

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^5 &= y'e^{2y+2\sqrt{\Lambda}x_3} \\
\Gamma_{ab}^5 &= -y'e^{2y+2\sqrt{\Lambda}x_3}\eta_{ab} \\
\Gamma_{33}^5 &= y'e^{2y} \\
\Gamma_{ab}^5 &= y'e^{2y} \\
\Gamma_{05}^0 &= y' \\
\Gamma_{03}^0 &= -\sqrt{\Lambda} \\
\Gamma_{00}^3 &= -\sqrt{\Lambda}e^{-2\sqrt{\Lambda}x_3} \\
\Gamma_{ab}^3 &= -\sqrt{\Lambda}e^{-2\sqrt{\Lambda}x_3}\eta_{ab} \\
\Gamma_{35}^3 &= y' \\
\Gamma_{ab}^5 &= -\sqrt{\Lambda}\delta_b^a \\
\Gamma_{b5}^a &= y'\delta_b^a \\
\Gamma_{b3}^a &= -\sqrt{\Lambda}\delta_b^a
\end{aligned} \tag{C.11}$$

### Cálculo dos tensores de Ricci

Para os valores  $(0, 0)$

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \partial_P \Gamma_{00}^P - \partial_p \Gamma_{0P}^P + \Gamma_{PQ}^P \Gamma_{00}^Q - \Gamma_{0Q}^P \Gamma_{0P}^Q \\
&= 2\Lambda e^{-2\sqrt{\Lambda}x_3} + y'' e^{2y-2\sqrt{\Lambda}x_3} + 2y'^2 e^{2y-2\sqrt{\Lambda}x_3} \\
&\quad + \Lambda e^{-2\sqrt{\Lambda}x_3} + y'^2 e^{2y-2\sqrt{\Lambda}x_3} + y'^2 \delta_c^c e^{2y-2\sqrt{\Lambda}x_3} \\
&\quad + y'^2 e^{2y-2\sqrt{\Lambda}x_3} - \Lambda e^{-2\sqrt{\Lambda}x_3} - y'^2 e^{2y-2\sqrt{\Lambda}x_3} \\
&\quad - \Lambda e^{-2\sqrt{\Lambda}x_3} - y'^2 e^{2y-2\sqrt{\Lambda}x_3} + 2\Lambda e^{-2\sqrt{\Lambda}x_3} \\
&= (3\Lambda e^{-2y} + y'' + 4y'^2) e^{2y-2\sqrt{\Lambda}x_3}
\end{aligned} \tag{C.12}$$

Para os valores  $(a, b)$

$$\begin{aligned}
R_{ab} &= \partial_P \Gamma_{ab}^P - \partial_a \Gamma_{bP}^P + \Gamma_{PQ}^P \Gamma_{ab}^Q - \Gamma_{aQ}^P \Gamma_{bP}^Q \\
&= \partial_3 \Gamma_{ab}^3 + \partial_5 \Gamma_{ab}^5 + \Gamma_{03}^0 \Gamma_{ab}^3 + \Gamma_{c3}^c \Gamma_{ab}^3 + \Gamma_{c3}^c \Gamma_{ab}^3 \\
&\quad + \Gamma_{05}^0 \Gamma_{ab}^5 \\
&\quad + \Gamma_{35}^3 \Gamma_{ab}^5 + \Gamma_{c5}^c \Gamma_{ab}^5 - \Gamma_{a3}^c \Gamma_{bc}^3 - \Gamma_{a5}^c \Gamma_{bc}^5 \\
&\quad - \Gamma_{ac}^3 \Gamma_{b3}^c - \Gamma_{ac}^5 \Gamma_{b5}^c \\
R_{11} = R_{22} &= (3\Lambda e^{-2y} - y'' - 4y'^2) e^{2y-2\sqrt{\Lambda}x_3}
\end{aligned} \tag{C.13}$$

Para os valores  $(3, 3)$

$$\begin{aligned}
R_{33} &= \partial_P \Gamma_{33}^P - \partial_3 \Gamma_{3P}^P + \Gamma_{PQ}^P \Gamma_{33}^Q - \Gamma_{3Q}^P \Gamma_{3P}^Q \\
&= \partial_5 \Gamma_{33}^5 + \partial_3 \Gamma_{30}^0 - \partial_3 \Gamma_{3c}^c + \Gamma_{05}^0 \Gamma_{33}^5 \\
&\quad + \Gamma_{05}^0 \Gamma_{33}^5 + \Gamma_{35}^3 \Gamma_{33}^5 + \Gamma_{c5}^c \Gamma_{33}^5 - \Gamma_{30}^0 \Gamma_{30}^0 \\
&\quad - \Gamma_{3d}^c \Gamma_{3c}^d - \Gamma_{33}^5 \Gamma_{53}^3 - \Gamma_{35}^3 \Gamma_{33}^5 \\
R_{33} &= -(3\Lambda + y'' e^{2y} + 4y'^2 e^{2y})
\end{aligned} \tag{C.14}$$

O escalar de Ricci fica então

$$\begin{aligned}
R_{(AdS)} &= g^{00} R_{00} + g^{ab} R_{ab} + g^{55} R_{55} \\
&= 3\Lambda e^{-2y} + y'' + 4y'^2 + 6\Lambda e^{-2y} + 2y'' + 8y'^2 + 3\Lambda e^{-2y} + y'' + 4y'^2 + 4y'' + 4y'^2 \\
&= 12\Lambda e^{-2y} + 8y'' + 20y'^2
\end{aligned} \tag{C.15}$$

# Bibliografia

- [1] T. Kaluza, Sitz. Press. Akad. Wiss. Phys. Math. K **1**, 966-9 (1921).
- [2] K. Akama, *Pregeometry ed K Kikkawa et al (Lecture Notes in Physics)(Berlin: Springer)* pp 267-71 (1983).  
(arXiv:hep-th/0001113)
- [3] V. A. Rubakov, M. E. Shaposhnikov Phys. Lett. B **287** 136-8(1983).
- [4] L. Randall, R. Sundrum Phys. Lett. **83** 3370 (1999).
- [5] I.ArkaniHamed, S. Dimopoulos e G. Dvali, Phys. Lett. B **429**:263-272 (1998)
- [6] C.A.S Almeida, M.M. Ferreira Jr., A.R. Gomes, R. Casana, arXiv:0901.3543v1 [hep-th]
- [7] E. M. C. Abreu textit Phys. Lett. B **322** 722 (2011).
- [8] S. Capozziello, Int. Journal Mod. Phys. D **11**, 483 (2002).
- [9] V.A. Rubakov, Phys. Usp. **44** (2011) 871.
- [10] W.T.Cruz, M.O.Tahim e C.A.S. Almeida, *Scalar and tensor gauge field localization on deformed thick branes*, arXiv:0906.1850.
- [11] C.A.S. Almeida, M.M.Ferreira Jr., A.R. Gomes, R. Casana, arXiv:0901.3543v1[hep-th].
- [12] J.Liang e Y. Duan, Phys. Lett. B **678**, 491(2009)
- [13] P.D. Mannheim, *Brane-Localized Gravity*, World Scientific, Singapore, (2005).
- [14] V.Dzhunushaliev, V.Folomeev e M.Minamitsuji, phys. Rev. D **79** 024001 (2009).
- [15] T. P. Sotiriou, V. Faraoni. *f(R) theories of gravity* JHEP (2010)  
arXiv:0805.1726.
- [16] S. T. Abdyrakhmanov, K. A. Bronnikov, e B. E. Meierovich, *Uniqueness of RS2 type thick branes supported by a scalar field*, Grav. Cosmol. **11**, 82 (2005).  
gr-qc/0503055.

- [17] S. Kobayashi, K. Koyama e J. Soda, *Thick Brane worlds and their Stability*, *Phys. Rev. D* **65**, 0604014 (2002)
- [18] T. Clifton, *Alternative theories of gravity*, Ph.D. Thesis, King's College, arXiv: gr-qc/0610071; T. P. Sotiriou and V. Faraoni, *f(R) theories of Gravity*, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 451 (2010), arXiv:0805.1726v2 [gr-qc].
- [19] V. Dzhunushaliev, V. Folomeev, B. Kleihaus e J. Kunz *Some tick brane solutions in f(R)-gravity*, *JHEP* 1004 (2010).
- [20] S. M. Carroll, *An introduction to General Relativity Spacetime and Geometry*, Pearson Education, Inc. (2004)
- [21] R. D'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*, Oxford University Press. (1992)
- [22] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press. 2<sup>a</sup> ed.(1996)
- [23] J. B. Neto, *Matemática para Físicos com Aplicações, vol 1*, Editora Livraria da Física. São Paulo. (2011)
- [24] J. B. Neto, *Matemática para Físicos com Aplicações, vol 2*, Editora Livraria da Física. São Paulo. (2011)
- [25] N. A. Lemos, *Mecânica Analítica*, Editora Livraria da Física. 2<sup>a</sup> ed. São Paulo. (2007)
- [26] B. Zwiebach, *A first Course in String Theory*, Cambridge University Press. 2<sup>a</sup> ed. (2009)
- [27] M. Gabella, *The Randall-Sundrum Model*, June (2006), <http://www-thphys.physics.ox.ac.uk/people/MaximeGabella/rs.pdf>.
- [28] A. Pérez-Lorenzana, *An introduction to the Brane World*, JHEP (2004) arXiv:0406279.
- [29] W. Oliveira, *Notas de Aula de Introdução à Teoria Quântica de Campos 1*
- [30] A. A. Starobinsky, *Phys. Lett. B* 91 (1988) 99.
- [31] A. A. Starobinsky, *J. Exp. Theor. Phys. Lett.* 86 (2007) 157.