Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas

A Dualidade Maxwell-Proca-Chern-Simons via Formalismo Simplético de Imersão

Luciana Miranda Vieira Xavier

Orientador: Dr. Wilson Oliveira
Co-orientador: Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, Instituto de Ciências Exatas, da Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Física.

Juiz de Fora
Fevereiro 2009

A Dualidade Maxwell-Proca-Chern-Simons via Formalismo Simplético

Luciana Miranda Vieira Xavier

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Cências Exatas, da Universidade Federal de Juiz de Fora-UFJF, como requisito necessário a obtenção do título de Mestre em Física

Aprovada por:

Dr. Wilson Oliveira (UFJF)

Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes (UFV)

Dr. Sérgio Martins de Souza (UFLA)

Juiz de Fora

Fevereiro de 2009

Resumo

A Dualidade Maxwell-Proca-Chern-Simons via Formalismo Simplético de Imersão

Luciana Miranda Vieira Xavier

Resumo da dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas, da Universidade Federal de Juiz de Fora-UFJF, como requisito necessário a obtenção do título de Mestre em Física.

Nesta tese, revisa-se os principais métodos de quantização de sistemas vinculados a partir das técnicas Hamiltoniana de Dirac e Lagrangeana de Faddev-Jackiw (sem vínculos) e sua extenção a de Barcelos Neto-Wotzasek (com vínculos), estes denominados simplesmente por Formalismo Simplético (FS). Em vista da correspondência entre os formalismos, eles serão aplicados ao Modelo de Skyrme SU(2) e ao Eletromagnetimo de Maxwell. Apresenta-se uma técnica contemporânea, que mergulha uma teoria de segunda classe em uma dual com invariância de calibre, a saber, o Formalismo Simplético de Imersão (FSI). Esse método baseia-se no FS e estende-se o espaço de configuração por meio das variáveis de Wess-Zumino. Para ilustrar esse FSI, constroi-se a eletrodinâmica de Maxwell como uma teoria de calibre, na qual as divergências clássicas não estejam presentes. Uma generalização relativística é a eletrodinâmica de Proca e de Chern-Simons, que consideram a possibilidade de existência de um fóton massivo e de um campo com alcance finito. A descrição dual reproduz o mesmo resultado encontrado na literatura através de outros métodos. Apesar da arbitrariedade dos geradores da simetria de calibre, os modos-zeros, mostram uma família de representações dinâmicas duais para o sistema em questão.

Palavras-chaves: Quantização, Sistemas Vinculados, Formalismos Simpléticos, Dualização, Eletromagnetismo.

Abstract

A Dualidade Maxwell-Proca-Chern-Simons via Formalismo Simplético de Imersão

Abstract da dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas, da Universidade Federal de Juiz de Fora-UFJF, como requisito necessário a obtenção do título de Mestre em Física.

In this thesis, it will be revised the main quantization methods of constrained systems using the Dirac Hamiltonian method and Faddev-Jackiw Lagrangian techniques (without constrained), and its extension to the Barcelos Neto-Wotzasek Lagrangian method (with constrained), these known as Symplectic Formalism. Because of the correspondence among the formalisms, they will be applied of the Skyrme SU(2) model and Electromagnetism of Maxwell. It will be presented a contemporary technique that it embed a second class theory in a dual with gauge invariance, the Embedding Symplectic Formalism . This method is based on the Symplectic Formalism, it is extended the configuration space through Wess-Zumino variables. In order to illustrate this Embedding Symplectic Formalism, the Maxwell electrodynamics is built as a gauge theory, without the classic differences. A relativistic generalization is the Proca and Chern-Simons electrodynamics that consider the possibility of existence of a massive photon and a field with finite reach. The dual description reproduce the identic result reported in the literature using other methods. Although, the arbitrariness of the gauge symmetry generator, zero-mode, it reveals a family of dynamic dual representations to this system.

Keywords: Quantization, Constrained systems, Symplectic Formalism, Dualization, Electromagnetism.

Agradecimentos

A Deus e ao meu anjo-pai, Antônio Carlos Xavier, por me darem força nos momentos mais difícieis de toda minha vida e me permitirem habilidades para finalização deste trabalho.

Em especial, ao professor Wilson Oliveira por sua contagiante paixão pela física, sua amizade e por todos seus ensinamentos desde o início de minha graduação. Sua orientação foi crucial para a realização dessa tese e para minha formação como um todo.

Ao professor Albert Carlo Rodrigues Mendes, meu co-orientador, pela fundamental colaboração sobre a teoria Maxwell- Proca-Chern-Simons, pela grande paciência em aturar minhas incisivas perguntas e pelas referências e comentários.

Aos doutores Everton Murilo de Carvalho Abreu e Clifford Neves Pinto, por acreditarem no meu potencial e me incentivar por meio de discussões sobre a física, em geral.

Vários outros professores dos Departamentos de Física e Matemática em muito me ajudaram durante a graduação e pós-graduação, sou grata a todos. Ao professor José Luiz Matheus Valle pela compreensão e apoio para com a minha formação. Ao professor José Roberto Tagliati pela metodologia e pela civilidade.

À todos os meus amigos, principalmente do instituto, Gilberto, Wesley, Elton, Filipe, Alisson, Rita, José Amâncio, Mateus, Alexandre, e, também, Luciene.

À FAPEMIG pela ajuda financeira recebida desde a graduação e durante meu mestrado.

Às pessoas mais importantes de minha vida, minha mãe, Ione Miranda Vieira Xavier, meus irmãos, Fernando Miranda Vieira Xavier e Pedro Luís Miranda Vieira Xavier, e meu namorado, Vítor José Melo Soares, aos quais dedico esse trabalho.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O estudo de sistemas com vínculos é de fundamental importância em física, pois todas as teorias de interação das partículas elementares são sistemas vinculados. Importantes resultados na área de física de partículas têm sido obtidos nas últimas décadas pelas, então, chamadas teorias de calibre, teorias com vínculos de primeira classe.

A quantização de teorias de calibre requer um cuidado todo especial, pois os graus de liberdade supérfluos, decorrentes de simetria de calibre, devem ser tratados de maneira conveniente e consistente. Importantes desenvolvimentos teóricos têm ocorrido nestes últimos anos na quantização de tais teorias, iniciando com os trabalhos de Dirac [1], na década de 50, cujo o ponto fundamental é a construção dos chamados parênteses de Dirac [2], os quais constituem a ponte para os comutadores (após problemas com ordenamento de operadores terem sido resolvidos).

Em 1988, Faddeev e Jackiw [4, 5] mostraram que os parênteses de Dirac podem ser obtidos seguindo um tratamento geométrico, baseado em estruturas simpléticas. Este formalismo é conhecido na literatura como Formalismo Simplético ou Quantização Símpletica, ou ainda, de Formalismo de Faddeev-Jackiw. Um ponto interessante desse formalismo é que alguns sistemas que são vinculados no método de Dirac não o são no caso simplético. No caso de haver vínculos no formalismo simplético, a proposta seria eliminá-los ou, caso isso não fosse possível, que se voltasse ao método de Dirac. Em 1992, foi proposta uma extensão, para o método de Faddeev-Jackiw, devido a Barcelos Neto e Wotzasek [6, 7], em que os vínculos pudessem ser incorporados (Formalismo Simplético com Vínculos). Essa técnica consiste, basicamente, em usar os vínculos para deformar a geometria simplética da teoria, de tal maneira que os tensores simpléticos possam ser consistentemente definidos.

Em 2001, C. Neves e W. Oliveira propuseram um formalismo [12] que mergulha uma teoria de segunda classe em uma dual com invariância de calibre. Este Formalismo de Imersão baseia-se no Formalismo Simplético e na extensão do espaço de configuração por meio das chamadas variáveis de Wess-Zumino (WZ) [10]. Segundo o Formalismo Simplético, o modo-zero é o gerador das transformações de calibre. A arbitrariedade do modo-zero revelará uma família de descrições lagrangeanas invariantes de calibre [13]. Porém, uma escolha adequada das componentes do modo-zero fornecerão a simetria (de calibre) escondida no modelo não-invariante, aqui proposto pelo modelo de Maxwell-Proca-Chern-Simons [13]; a fim de reproduzir uma versão invariante de calibre bem conhecida e obtida pelo Método de Dualização Iterativa de Calibre Noether. Desse trabalho, resultou uma publicação em uma revista científica internacional [14].

Essa técnica eficaz, o Formalismo Simplético de Imersão, motivou a construção de uma teoria que preserve as qualidades da eletrodinâmica de Mawxell, entretanto evitando as divergências clássicas. Nesse contexto, estende-se o eletromagnetismo com a adição de novos termos: de massa explícita (termo de Proca) e de massa topológica (termo de Chern-Simons), para conferir uma massa ao fóton e um alcance finito para o campo de uma carga puntiforme. As consequências tanto teóricas, quanto experimentais podem ser encontradas em [15]. Assim, tal modelo pode ser descrito pela densidade lagrangeana sob a forma:

$$L[A_\mu] = -\frac{\beta}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu + L_{CS}[A_\mu] \tag{1.1}$$

onde L_{CS} é uma versão em quatro dimensões da ação de Chern-Simons (CS) que acopla o tensor eletromagnético dual ao quadri-vetor externo p_α,

$$L_{CS}[A_\mu] = -\frac{1}{4} p_\alpha A_\beta \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu}. \tag{1.2}$$

Essa eletrodinâmica de Maxwell-Proca-Chern-Simons possibilita também uma discussão a respeito das simetrias, que são consideradas chaves fundamentais para diversas teorias físicas modernas, como a física de altas energias. A razão é a quebra da simetria de calibre, devido ao termo de massa. A violação da simetria de Lorentz, e consequentemente da Conjugação de Carga, Paridade e Inversão Temporal (CPT), por causa do acoplamento do campo elétromagnético a um quadri-vetor externo constante p_α.

Esse trabalho está organizada da seguinte forma: no capítulo 2, há a revisão de classificação dos vínculos, em primários e secundários, os quais estão ligados a maneira de como são obtidos, embora a obtenção não seja importante para a quantização canônica, mas apenas a existência dos vínculos. Por isso, foi proposta uma classificação mais útil, em vínculos de primeira classe e segunda classe, a fim de apresentarmos e discutirmos o método de Dirac na seção seguinte. No próximo capítulo, este método será aplicado ao modelo de Skyrme SU(2) e ao Eletromagnestismo de Maxwell.

No capítulo 4, apresenta-se o formalismo de Faddew-Jackiw, que parte da Lagrangeana escrita como uma função linear das velocidades, através da introdução de variáveis auxiliares. Utiliza-se das equações de Euler-Lagrange para obter o tensor simplético. Se a representação matricial for não-singular, significa que não há vinculos verdadeiros - aqueles que só aparecem nesse formalismo. Os elementos da matriz inversa correspondem aos parênteses de Poisson da teoria.

Caso a matriz (pré-)simplética seja singular, trata-se de sistemas com vínculos e recorre-se ao formalismo de Barcelos Neto-Wotzasek. Os vínculos são obtidos da contração do modo-zero com o gradiente do potencial, desde que não forneça equações nulas. Se essa contração não levar a um vínculo verdadeiro, a teoria em questão possuirá simetria de calibre. Então, aplica-se o Formalismo Simplético ao modelo de Skyrme SU(2) e ao Eletromagnestismo de Maxwell e compara-se os resultados encontrados àqueles obtidos pelo método de Dirac.

No capítulo 6, faz-se uma descrição a respeito dos principais passos do Formalismo de Imersão, que se baseia no Formalismo Simplético. Acrescentam-se a variável WZ e duas funções arbitrárias, as quais são inseridas na parte cinética da lagrangeana e outra na potencial. Para determiná-las, primeiramente, impõe-se que a matriz simplética seja degenerada e, segundo, que seus modos-zero não produzam novos vínculos. Para ilustrar o Formalismo Simplético de Imersão, considera-se a eletrodinâmica de Maxwell-Proca-Chern-Simons em quatro dimensão.

Finalmente, no capítulo 8, a conclusão do trabalho é apresentada, mostrando os principais resultados obtidos e apontando um possível caminho a seguir em um trabalho futuro.

Capítulo 2

Considerações Gerais

2.1 Classificações de Vínculos

Vínculos são limitações as possíveis posições e velocidades das partículas de um sistema mecânico, restringindo a priori o seu movimento. É importante sublinhar que vínculos são limitações de ordem cinemática impostas ao sistema mecânico. Tais restrições, portanto, antencedem a dinâmica e precisam ser levadas em conta na formulação das equações de movimento do sistema. Restrições de natureza dinâmica - decorrentes, portanto, das equações de movimento - não são vínculos. Por exemplo, a segunda lei de Newton obriga uma partícula sujeita a uma força central a se mover num plano fixo, mas isto não caracteriza um vínculo. Assim, sistemas mecânicos com vínculos obedecem a seguinte forma:

$$\phi_i(q_i, ..., q_{3N}) = 0, \qquad (i = 1, 2, ..., m) \tag{2.1}$$

O número de graus de liberdade é então: $n = 3N - m$. Uma classificação de vínculos cinemáticos, ou vínculos:

- Vínculos Holônomos e Não-Holônomos

Se $(q_i, ..., q_n)$ são coordenadas arbitrárias usadas para descrever a configuração[1] de um sistema mecânico, um vínculo é chamado holônomo quando pode ser expresso por uma equação da forma

$$\Gamma(q_i, ..., q_n, t) = 0 \tag{2.2}$$

isto é, por uma relação funcional exclusivamente entre as coordenadas, podendo envolver o tempo de modo explícito.

Vínculos que não podem ser assim representados são ditos não-holônomos, cujas as equações envolvem velocidades, isto é, equações diferenciais da forma

$$\Gamma(q_i, ..., q_n, \dot{q}_i, ..., \dot{q}_n, t) = 0. \tag{2.3}$$

Em geral, vínculos desse tipo, não podem ser reduzidos por uma integração à forma (2.2), que restringem os deslocamentos possíveis, de modo que a priori todas as configurações são acessíveis.

- Vínculos Primários e Secundários

Suponha que [3], numa determinada teoria, existe um vínculo dado por:

$$\Gamma(q, p) = 0 \tag{2.4}$$

onde p é o momento linear.

O parêntese de Poisson desta quantidade com outra qualquer da teoria pode ser não nulo. Por isso, em lugar de (2.4), é comum escrever

$$\Gamma(q, p) \approx 0 \tag{2.5}$$

[1]A posição de cada uma das partículas de um sistema mecânico num dado instante define a configuração do sistema no referido instante.

onde se diz francamente igual a zero, significando que a relação acima não vale, necessariamente, dentro dos parenteses de Poisson.
Consideremos uma certa quantidade $A(q,p)$, cujo parêntese de Poisson com $\Gamma(q,p)$ seja diferente de zero.

$$\{A, \Gamma\} \neq 0. \tag{2.6}$$

Na passagem para a Mecânica Quântica, Γ e A transformam-se em operadores, que chamaremos de $\hat{\Gamma}$ e Â. Em virtude de (2.5), $\hat{\Gamma}$ é um operador nulo. Assim, qualquer comutador envolvendo $\hat{\Gamma}$ deve ser nulo. Particulamente,

$$[\hat{A}, \hat{\Gamma}] = 0. \tag{2.7}$$

Mas, pela relação

$$\{A, \Gamma\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{\Gamma}] \tag{2.8}$$

deveriamos obter um resultado diferente de zero para o comutador entre Â e $\hat{\Gamma}$. A regra geral da quantização canônica, dada por (2.8), leva a inconsistências quando na presença de vínculos. Foi Dirac quem descobriu a maneira correta de proceder quanto a quantização canônica de vínculos.
A passagem para o formalismo Hamiltoniano é feita, primeiramente, pela introdução dos momentos canônicos

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, 2, ..., N) \tag{2.9}$$

onde as relação dada por (2.9) podem levar a existência de vínculos. Denotamos estes vínculos, genericamente, por

$$\Omega_m = \Omega_m(q^i, p_i) \qquad (m = 1, 2 ... M \leq N). \tag{2.10}$$

Os vínculos decorrentes diretamente de relação de definição dos momenta são chamados de vínculos primários. Conforme veremos, outros vínculos podem e-xistir (agora não mais em decorrência de (2.9). Estes tomam o nome de vínculos secundários.

Um dos passos para o formalismo Hamiltoniano é escrever a função Hamiltoniana. Parte da função Lagrangeana e, fazendo transformações tipo:

$$(q, \dot{q}) \longrightarrow (q, p). \tag{2.11}$$

O Jacobiano para esta transformação é determinado pela matriz

$$\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}, \tag{2.12}$$

chamada matriz Hessiana. Quando o determinante desta matriz é diferente de zero, as transformações (2.11) são sempre possíveis e a hamiltoniana canônica $H_c(q,p)$ é unicamente determinada. Isto ocorre para o caso onde não existem vínculos. Na presença de vínculos, a matriz Hessiana é singular e, consequentemente, nem todos os $\dot{q}_i$ podem ser unicamente escritos em termos de q_j, p_j. Considerando que haja M vínculos, haverá M velocidades nestas condições. Portanto, neste caso, a hamiltoniana não pode ser unicamente determinada em termos de q_j e p_j.

Neste ponto, há dois caminhos que podem ser seguidos. Um deles, muito simples a primeira vista, consiste na utilização direta dos vínculos para eliminação da variáveis dependentes. Embora seja uma solução lógica para o problema, ela não é, as vezes, tão simples e conveniente de ser utilizada. A outra maneira, consequentemente, consiste em desenvolver o formalismo trabalhando com as variáveis dependentes e com as relações de vínculo. O método de Dirac baseia-se neste segundo.

Visto que, na presença de vínculos, a hamiltoniana não é unicamente determinada em termos de momento e coordernada. A fim de escolher apropriadamente uma hamiltoniana, no formalismo, devemos calcular as equações de movimento no espaço de fases. Seja, então, o princípio de Hamilton;

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - H_c) dt, \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (p_i \delta \dot{q}_i + \delta p_i \dot{q}_i - \delta H_c) dt. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Isto sugere que δH_c pode ser escrito, de uma maneira geral, como:

$$\delta H_c = \frac{\partial H_c}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial H_c}{\partial p_i} \delta p_i \tag{2.14}$$

Assim, levando este resultado em (2.13), temos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H_c}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i} \right) \delta p_i \right] dt = 0. \tag{2.15}$$

Como δq_i e δp_i são funções arbitrárias de tempo, concluímos que a integração em (2.15) só é nula se o integrando o for. Portanto,

$$\left(\dot{p}_i + \frac{\partial H_c}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \left(-\dot{q}_i + \frac{\partial H_c}{\partial p_i} \right) \delta p_i = 0 \tag{2.16}$$

Em virtude de M relações de vínculos envolvendo q_i e p_i (vamos admitir, por enquanto, que só existem vínculos) nada podemos concluir de (2.16). Por outro lado, da (2.10), vem que

$$\frac{\partial \Omega_m}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial \Omega_m}{\partial p_i}\delta p_i \approx 0 \tag{2.17}$$

São, ao todo, M equações. Multiplicando cada uma por $\lambda_m = \lambda(q_i, p_i)$ e somando o resultado com a (2.16), obtemos:

$$\left(-\dot{q}_i + \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda_m \frac{\partial \Omega_m}{\delta p_i}\right)\delta p_i + \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H_c}{\partial q_i} + \lambda_m \frac{\partial \Omega_m}{\partial q_i}\right)\delta q_i \approx 0 \tag{2.18}$$

Temos, agora, M funções arbitrárias $\lambda(q_i, p_i)$ (multiplicadores de Lagrange). Assim, é possível obter as seguintes equações de Hamilton:

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda^m \frac{\partial \Omega_m}{\partial p_i} + \Omega^m \frac{\partial \lambda^m}{\partial p_i} \approx \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda^m \frac{\partial \Omega_m}{\partial p_i}, \tag{2.19}$$

$$-\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q^i} = \frac{\partial H_c}{\partial q^i} + \lambda^m \frac{\partial \Omega_m}{\partial q^i} + \Omega_m \frac{\partial \lambda^m}{\partial q^i} \approx \frac{\partial H_c}{\partial q^i} + \lambda^m \frac{\partial \Omega_m}{\partial q^i}. \tag{2.20}$$

Efetivamente, é como se tivemos definindo uma nova hamiltoniana dada por:

$$H \equiv H_c + \lambda^m \Omega_m. \tag{2.21}$$

No espaço de fase, as coordenadas e os momentos de um sistema físico devem satisfazer $\Omega_m = 0$. Estas equações determinam um subespaço de dimensão $2N - M$, chamado de superfície de vínculos. Nesta superfície, a hamiltoniana coincide com a hamiltoniana canônica. Nos demais pontos do espaço (onde as equações de vínculos não são satisfeitas), a hamiltoniana difere da canônica e perde qualquer sentido físico.

Se duas funções, definidas no espaço de fase, são iguais na superfície de vínculos, denotada por Γ, diremos que elas são fracamente iguais e usaremos o símbolo " $\approx$ " para denotar esta igualdade:

$$F|_\Gamma = G|_\Gamma \Longleftrightarrow F \approx G. \tag{2.22}$$

Em particular, temos

$$H \approx H_c. \tag{2.23}$$

Utilizando a distinção entre igualdade fraca " $\approx$ " e igualdade forte " $=$ " (igualdade válida em todo o espaço de fase), a evolução temporal das coordenadas e dos momentos deve ser escrita, em termos dos parênteses de Poisson, como:

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \{q^i, H\} \approx \{q^i, H_c\} + \lambda^m \{q^i, \Omega_m\}, && (2.24) \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H\} \approx \{p_i, H_c\} + \lambda^m \{p_i, \Omega_m\}. && (2.25) \end{aligned}$$

Conforme dissemos, podem, haver mais vínculos (vínculos secundários, terceários, etc). Neste caso, é fácil perceber, eles são incorporados à teoria de maneira semelhante ao que fizemos anteriormente. Por exemplo, suponhamos que existam apenas K vínculos secundários ($K + M \leq N$). Temos, então,

$$H = H_c + \lambda_a \Omega_a, \qquad a = (1, 2, ..., K + M). \tag{2.26}$$

H é chamada hamiltoniana total.

Vejamos, agora, como os vínculos secundários são determinados. Seja Ω_m um dos vínculos primários. É uma questão de consistência os vínculos não evoluerem com o tempo. Podemos, assim, escrever

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_m &= \{\Omega_m, H\}, \\ &= \{\Omega_m, H_c\} + \lambda^n \{\Omega_m, \Omega_n\} + \Omega_n \{\Omega_m, \lambda^n\}, \\ &\approx \{\Omega_m, H_c\} + \lambda^n \{\Omega_m, \Omega_n\} \approx 0. && (2.27) \end{aligned}$$

Podemos destacar da relação (2.27) duas possibilidades, que estão relacionadas ao parêntese de Poisson entre Ω_m e Ω_n se ou não zero (fracamente):

i) $\{\Omega_m, \Omega_n\} \approx 0$. Neste caso, obtemos $\{\Omega_m, H_c\} \approx 0$, que é uma relação de vínculo. Pode acontecer de este vínculo ser, simplesmente, um dos vínculos primários já conhecidos. Por isto (2.27) é uma mera relação de inconsitência. Mas, pode acontecer, também de ser um novo vínculo. Como dissemos, um vínculo secundário, em virtude de não estar vindo, diretamente, de expressão do momento.

ii) $\{\Omega_m, \Omega_n\} \neq 0$. Agora, não obtemos novo vínculo, mais uma relação envolvendo multiplicadores de Langrange λ_n.

Este processo deve ser repetido para todos os vínculos, inclusive para vínculos secundários que vão sendo obtidos. Os novos vínculos obtidos neste estágio do processo são chamados terceários e assim por diante. Este procedimento é conhecido como algoritmo de Dirac- Bergmann. Procedemos assim até esgotarem todas as possibilidades, isto é, até nenhum vínculo novo ser mais obtido (apenas repetição dos já existentes) e até serem determinados todos multiplicadores de Lagrange. No que segue, os vínculos terceários e os obtidos nas etapas do processo serão chamados, simplesmente, de secundários.

Voltemos, agora, à questão levantada sobre o fato de termos usado H para obter $\dot{\Omega}_m$ na expressão (2.27). O correto seria usar, como Dirac denominou, a hamiltoniana total. Mas isto, obviamente não seria possível pois não conhecíamos os vínculos secundários. Agora já conhecemos. Não é difícil perceber que se montarmos equações semelhantes à (2.27), usando H (hamiltoniana total, com todos vínculos da teoria) em lugar de H, obteremos os mesmos vínculos e os mesmos multiplicadores de Lagrange.

É oportuno comentar aqui, que os vínculos primários, obtidos da definição de momento, dada em (2.9), e os vínculos secundários, obtidos de relações da consistência, tiradas do fato de os vínculos não evoluirem com o tempo, podem não serem os únicos vínculos da teoria. Nas chamadas teorias de calibre,[2] como

[2]Uma teoria de calibre é aquela na qual as variáveis dinâmicas são especificadas com respeito a um

o eletromagnetismo, há o aparecimento de novos vínculos quando fixamos o calibre. Veremos mais detalhes a seguir.

- Vínculos de Primeira e Segunda Classe

  Vimos a classificação dos vínculos prímarios e secundários que está ligada a maneira de como os vínculos são obtidos. Ela é, apenas, uma questão, digamos, de organização. Em termos de quantização canônica, não importa como foram obtidos. O que importa é que eles existam. Neste sentido, uma classificação mais útil é a seguinte: Dentre os vínculos, podem existir alguns que possuem parêntese de Poisson zero (fracamente) com todos os vínculos da teoria. Estes vínculos são denominados de primeira classe. Já aqueles que possuírem pelo menos um parêntese de Poisson diferente de zero são chamados de segunda classe.

  O que importa a destacar é que a existência de vínculos de primeira classe significa que a teoria possui invariância por transformação de calibre. Há dois caminhos que podemos seguir. Um deles é fixar o calibre. Os novos vínculos decorrentes da fixação de calibre implicarão que aqueles vínculos de primeira classe passem a ser de segunda classe. Um outro caminho a ser seguido é não proceder a fixação de calibre e trabalhar covariantemente.

2.2 Método de Dirac

Seja H a verdadeira hamiltoniana (hamiltoniana total), a derivada temporal de uma função qualquer definida no espaço de fase é:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial A}{\partial t}. \tag{2.28}$$

---

sistema de referência, cuja a escolha é arbitrária no tempo. As variáveis fisicamente importantes são independentes da escolha do sistema de referência. Uma transformação de variáveis induzidas por uma mudança no sistema de referência arbitrário é chamada de transformação de calibre. Variáveis físicas, observáveis, são então ditas invariantes de calibre.

Usando as equações de Hamilton dadas por (2.24) e (2.25), obtemos:

$$\dot{A} \approx \{A, H_c\} + \lambda_m \{A, \Omega_m\} + \frac{\partial A}{\partial t}, \tag{2.29}$$

onde $m = 1, 2...M + K$. Todos os vínculos estão incluídos. Inclusive os decorrentes da fixação de calibre, caso existam.

No caso particular de A ser qualquer um dos vínculos da teoria, vem que:

$$0 = \frac{d\Omega_n}{dt} \approx \{\Omega_n, H_c\} + \lambda_m \{\Omega_n, \Omega_m\}. \tag{2.30}$$

sendo $n = 1, 2...M + K$.

Seja (C_{mn}) a matriz cujo os elementos são os parênteses de Poisson dos vínculos, isto é,

$$C_{mn} \equiv \{\Omega_m, \Omega_n\}. \tag{2.31}$$

Logo, da equação (2.30) vem que

$$\lambda_m C_{nm} + \{\Omega_n, H_c\} \approx 0, \tag{2.32}$$

ou ainda,

$$\lambda_m C_{mn} \approx \{\Omega_n, H_c\}, \tag{2.33}$$

em que usamos o fato da matriz C ser antisimétrica (caso de vínculos bossônicos). Além disso, essa matriz possui inversa, pois todos os vínculos são de segunda classe. Assim,

$$C_{mn} C^{nl} = \delta^l_m. \tag{2.34}$$

Aplicando esta relação na equação (2.33) e substituindo, em seguida, k por m:

$$\lambda^m \approx -C^{-1}_{mn} \{\Omega_n, H_c\}. \tag{2.35}$$

Levemos este resultado para a equação (2.29):

$$\dot{A} \approx \{A, H_c\} - \{A, \Omega_m\} C^{-1}_{mn} \{\Omega_n, H_c\} + \frac{\partial A}{\partial t} \approx \{A, H_c\}_D + \frac{\partial A}{\partial t}. \tag{2.36}$$

em que

$$\{A, H_c\}_D \equiv \{A, H_c\} - \{A, \Omega_m\}C^{-1}_{mn}\{\Omega_n, H_c\}. \tag{2.37}$$

é o parêntese de Dirac entre as funções A e H_c. Consequentemente, uma expressão clássica análoga à equação (2.8) é dada pela (2.37). Assim, este fato parece sugerir que, no caso de sistemas vinculados, temos a seguinte regra de quantização canônica:

$$\{A, B\}_D \rightarrow \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{B}]. \tag{2.38}$$

em que o parêntese de Dirac entre A e B [1, 26] é definido de forma análoga àquela em (2.38), ou seja,

$$\{A, B\}_D \equiv \{A, B\} - \{A, \Omega_m\}C^{-1}_{mn}\{\Omega_n, B\}. \tag{2.39}$$

Aqui, também, há fortes evidências que sustentam a hipótese dada por (2.37). A mais importante é que as relações de vínculo, que só valiam fracamente em termos dos parênteses de Poisson, valem fortemente nos parênteses de Dirac. Isto significa que se tomarmos o parênteses de Dirac entre um vínculo e qualquer outra função do espaço de fase, obteremos zero. Vejamos isto:

$$\begin{aligned}
\{A, \Omega_k\}_D &= \{A, \Omega_k\} - \{A, \Omega_m\}C^{-1}_{mn}\{\Omega_n, \Omega_k\}, \\
&= \{A, \Omega_k\} - \{A, \Omega_m\}C^{-1}_{mn}C_{nk}, \\
&= \{A, \Omega_k\} - \{A, \Omega_m\}\delta^{mk}, \\
&= 0. \qquad (2.40)
\end{aligned}$$

Assim, a incosistência mencionada no capítulo 1 não existem mais.

Uma outra evidência que sustenta a hipótese (2.37) é que as relações envolvendo os parênteses de Poisson são também válidas para os parênteses de Dirac.

É importante mencionar que os parênteses fundamentais de Poisson não necessariamente obtidos em termos do parênteses de Dirac. Isto não é nada inconsistente, pelo contrário. Os exemplos que veremos, capítulo 3, confirmarão o que estamos afirmando. Um outro ponto, quanto a regra de quantização (2.37), que só é aplicada diretamente caso não haja problemas de ordenamento de operadores.

2.3 Notação Simplética

É possível introduzir uma notação compacta que resume equações de Hamilton numa única equação matricial, ξ_α, tal que suas entradas são dadas por:

$$\xi^i = q_i, \qquad \xi^{i+N} = pi, \qquad (i \leq N), \tag{2.41}$$

então,

$$(\xi_\alpha) = \begin{array}{|c|} \hline q_1 \\ \hline \vdots \\ \hline q_N \\ \hline p_1 \\ \hline \vdots \\ \hline p_N \\ \hline \end{array} \tag{2.42}$$

com $i, j = 1, 2, ..., N$ e $\alpha, \beta = 1, 2, ..., 2N$.

De modo análogo, a $(\frac{\partial H}{\partial \xi})_\alpha$:

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_i} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \frac{\partial H}{\partial \xi_{i+N}} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad (i \leq N) \tag{2.43}$$

logo,

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \xi}\right)_\alpha = \begin{array}{|c|} \hline \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \hline \vdots \\ \hline \frac{\partial H}{\partial q_N} \\ \hline \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \hline \vdots \\ \hline \frac{\partial H}{\partial p_N} \\ \hline \end{array}. \tag{2.44}$$

Seja a matriz $\sigma^{\alpha\beta}$ definida por:

$$(\sigma^{\alpha\beta}) = \begin{array}{|c|c|} \hline \mathtt{0} & \mathtt{1} \\ \hline \mathtt{-1} & \mathtt{0} \\ \hline \end{array} \tag{2.45}$$

em que $\mathtt{0}$ indica a matriz nula de ordem n e $\mathtt{1}$, a matriz identidade de ordem n. Esta matriz $(\sigma^{\alpha\beta})$ é chamada forma normal simplética. Ela tem as seguintes propriedades:

$$(\sigma^{\alpha\beta})^2 = -\mathtt{1}_{2n}, \tag{2.46}$$

$$(\sigma^{\alpha\beta}) = -(\sigma^{\alpha\beta})^T, \tag{2.47}$$

$$(\sigma^{\alpha\beta})^T = -(\sigma^{\alpha\beta}) = (\sigma^{\alpha\beta})^{-1}, \tag{2.48}$$

$$(\sigma^{\alpha\beta})^T(\sigma^{\alpha\beta}) = (\sigma^{\alpha\beta})(\sigma^{\alpha\beta})^T = \mathtt{1}_{2n}, \tag{2.49}$$

$$\det(\sigma^{\alpha\beta}) = 1 \tag{2.50}$$

A propriedade (2.49) indica que $(\sigma^{\alpha\beta})$ é diagonálizavel.

Então, as equações canônicas de Hamilton podem ser escritas na forma:

$$\begin{aligned} \{\xi^\alpha, \xi^\beta\} &= \sigma^{\alpha\beta}, \\ \dot{\xi}^\alpha &= \sigma^{\alpha\beta}\frac{\partial H}{\partial \xi}, \end{aligned} \tag{2.51}$$

ou

$$\dot{\xi}_k = \sum_l \epsilon_{kl}\frac{\partial H}{\partial \xi}_l \tag{2.52}$$

conhecida como forma simplética[3] das equações de Hamilton.

Com esta notação, os parênteses de Poisson[4]entre as funções $A(\xi)$ e $B(\xi)$ assumem a forma:

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial \xi^\alpha}\sigma^{\alpha\beta}\frac{\partial B}{\partial \xi^\beta} \tag{2.53}$$

[3]Esta palavra foi introduzida pelo matemático Hermann Weyl em 1939 e deriva de uma raiz grega que significa entremeado ou entrelaçado.

[4]Os parentênteses de Poisson entre as funções do espaço de fase $A(q,p)$ e $B(q,p)$ são definidas por: $\{A, B\} \equiv \frac{\partial A}{\partial q^i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q^i}\frac{\partial A}{\partial p_i}$, onde os q^is são as coordenadas generalizadas e os p_is são seus momentos conjugados.

Esses resultados, vistos em curso de graduação em física [22, 23], possuem grande semelhança com a forma dos resultados de uma teoria mais geral, envolvendo vínculos. Veremos que as expressões (2.51) e (2.52) são válidas também para sistemas vinculados, a menos do aspecto da matriz ($\sigma^{\alpha\beta}$).

2.4 Aspectos Gerais da Teoria Eletromagnética

A teoria eletromagnética no vácuo em (3+1)D, definada pelas equações de Maxwell (c=1):

$$\nabla \cdot \overrightarrow{E} = 0, \tag{2.54}$$

$$\nabla \times \overrightarrow{E} = -\partial_t \overrightarrow{B}, \tag{2.55}$$

$$\nabla \cdot \overrightarrow{B} = 0, \tag{2.56}$$

$$\nabla \times \overrightarrow{B} = \partial_t \overrightarrow{E}, \tag{2.57}$$

é uma teoria altamente simétrica. Em particular, as equações (2.54) a (2.57) são invariantes por:

$$(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B}) \longrightarrow (\overrightarrow{B}, -\overrightarrow{E}) \tag{2.58}$$

que são chamadas transformações de dualidade (o sinal negativo é consequência da asimetria entre tempo e espaço no espaço de Minkowski). Isso significa simplesmente que, no vácuo, campos elétricos e magnéticos são fisicamente indistinguíveis.

Outro importante aspecto da teoria eletromagnética é, conhecida, a invariância de calibre. Da equação (2.56), podemos imeditamente concluir que $\overrightarrow{B}$ é um campo rotacional. Escrevemos,

$$\overrightarrow{B} = \nabla \times \overrightarrow{A}. \tag{2.59}$$

Logo,

$$\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} - \nabla\phi. \tag{2.60}$$

As equações (2.59) e (2.60) mostram que o campo eletromagnético pode ser expresso em termos de um potencial vetor $\overrightarrow{A}$ e de um potencial escalar ϕ. Estas funções não são definidas de um modo único. É fácil notar que o campo eletromagnético permanece invariante (e, consequentemente, a teoria eletromagnética) para as seguintes transformações dos potenciais:

$$\overrightarrow{A} \longrightarrow \overrightarrow{A} - \nabla\Lambda, \tag{2.61}$$

$$\phi \longrightarrow \phi + \frac{\partial\Lambda}{\partial t}, \tag{2.62}$$

que são chamadas transformações de calibre. Λ é uma função escalar arbitrária do espaço-tempo.

Além de, seu caráter covariante, descrita pelas equações de Maxwell, (o que deixa explícito a invariância de Lorentz da teoria) através do tensor de campos $F^{\mu\nu}$, [24, 25], definido por:

$$F^{0i} = F^{i0} = -E^i, \qquad F_{ij} = -\epsilon_{ijk}\partial_j B^k \tag{2.63}$$

ou

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2.64}$$

onde $A^\mu = (A^0, A^i)$ são os potenciais, tais que $E^i = \partial_0 A^i + \partial^i A_0$ e $B^i = -\epsilon_{ijk} A^k$. As equações (2.54) a (2.57) ficam:

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = 0, \tag{2.65}$$

$$\partial_\mu {}^*F_{\mu\nu} = 0, \tag{2.66}$$

onde ${}^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ é conhecido como dual Hodge do campo $F_{\mu\nu}$. Observe que a equação (2.66) é uma consequência da definição de ${}^*F_{\mu\nu}$ e, portanto, é uma identidade (identidade de Bianch).

A partir da relação (2.64), imeditamente vemos que $F_{\mu\nu}$ permanece invariante, se redefirnimos o campo A^μ como (transformação de calibre):

$$A^\mu \longrightarrow A^\mu - \partial^\mu\Lambda, \tag{2.67}$$

que corresponde às transformações dadas por (2.61) e (2.62).

Por outro lado, as equações de movimento (2.65) podem ser obtidas minimizando em relação à A_μ a ação:

$$S_M = -\frac{1}{4}\int d^4x F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \tag{2.68}$$

A transformação (2.58) fica:

$$F^{\mu\nu} \longrightarrow {}^*F^{\mu\nu}, \qquad {}^*F^{\mu\nu} \longrightarrow -F^{\mu\nu}, \tag{2.69}$$

o sinal negativo vem da propriedade ${}^{**}F_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}$, no espaço de Minkowski. Essa transformação nos sugere uma forma equivalente de descrever a teoria eletromagnética no vácuo em (3+1)D, considere a ação:

$$\bar{S}_M = -\frac{1}{4}\int d^4x^* F^{\mu\nu}\ {}^*F_{\mu\nu}. \tag{2.70}$$

onde ${}^*F_{\mu\nu} = \partial_\mu \widetilde{A}_\nu - \partial_\nu \widetilde{A}_\mu$ e $\widetilde{A}^\nu = (\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_i)$ são os potenciais, tais que $B^i = -\partial_0 \widetilde{A}_i + \partial_i \widetilde{A}_0$ e $E^i = \varepsilon^{ijk}\partial_j \widetilde{A}^k$. Nesse caso (2.51) é a identidade de Bianchi (consequência de $F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\ {}^*F_{\rho\sigma}$.

Capítulo 3

Aplicações do Método de Dirac

3.1 Modelo de Skyrme SU(2)

Seja a lagrangeana do Modelo de Skyrme, [27], dada por:

$$L = -M + 2\lambda \dot{A}_i \dot{A}_i \tag{3.1}$$

onde M é a energia clássica, λ pode ser interpretado como o momento de inércia do sóliton e $i = 0, 1, 2, 3$. Em seguida, obtemos a hamiltoniana

$$H_c = M + \frac{1}{8\lambda}(\Pi_i \Pi_i). \tag{3.2}$$

O vínculo primário do modelo é obtido usando a condição de unitariedade de $A(t)$, isto é,

$$A^\dagger(t)A(t) = 1$$

$$A_0^2 + A_i^2 = 1,$$

ou seja,

$$\phi_1 \equiv A_i A_i - 1 \approx 0. \tag{3.3}$$

Pela prescrição do método de Dirac devemos incluir o vínculo (3.3) na expressão da hamiltoniana do sistema, (3.2), obtendo

$$H = M + \frac{1}{8\lambda}(\Pi_i \Pi_i) + \mu(A_i A_i - 1), \tag{3.4}$$

que é a hamiltoniana primária do sistema e onde μ é um multiplicador de Lagrange. A condição de consistência exige que o vínculo ϕ_1 seja conservado no tempo, isto é,

$$\dot{\phi}_1 = \{\phi_1, H_p\} \approx 0$$

$$\dot{\phi}_1 = \left\{A_i A_i - 1, M + \frac{1}{8\lambda}(\Pi_j \Pi_j) + \mu(A_j A_j - 1)\right\},$$

de onde obtemos

$$\dot{\phi}_1 = \phi_2 \equiv A_i \Pi_i \approx 0. \tag{3.5}$$

A equação (3.5) é um vínculo secundário, uma vez que ela foi obtida a partir da condição de consistência do vínculo primário ϕ_1. Para ϕ_2 teremos

$$\dot{\phi}_2 = \{\phi_2, H\} \approx 0$$

$$\dot{\phi}_2 = \left\{A_i \Pi_i, M + \frac{1}{8\lambda}(\Pi_j \Pi_j) + \mu(A_j A_j - 1)\right\},$$

que nos leva a

$$\dot{\phi}_2 = \frac{1}{8\lambda}(\Pi_i \Pi_i) + \mu(A_i A_i) \approx 0. \tag{3.6}$$

A equação (3.6) não representa um novo vínculo do sistema, mas permite determinar o multiplicador de Lagrange.

Assim, o modelo de Skyrme possui dois vínculos: um primário dado por (3.3) e um secundário dado por (3.5). A obtenção das relações de comutação entre os operadores canônicos via os parênteses de Dirac somente será possível se os vínculos forem de segunda classe. Assim, teremos:

$$\{\phi_1, \phi_2\} = \{A_i A_i - 1, A_j \Pi_j\} = 2A_i A_i = 2, \tag{3.7}$$

onde usamos o vínculo $\phi_1 = A_i A_i - 1 \approx 0$. Como a equação (3.7) é não nula, os vínculos obtidos são de segunda classe, o que permite utilizarmos os parênteses de Dirac para determinação dos comutadores da teoria quântica. Tendo em vista a definição dos parênteses de Dirac,

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \phi_r\} C_{rs}^{-1} \{\phi_s, B\}, \tag{3.8}$$

procuramos obter a matriz C_{rs}, que é dada por:

$$C_{rs} = \{\phi_r, \phi_s\}, \tag{3.9}$$

com $r, s = 1, 2$. Por (3.7) temos:

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

cuja matriz inversa será

$$\mathbb{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Então, para as variáveis canônicas (A_i, Π_i), temos:

$$\begin{aligned} \{A_i, A_j\}_D &= \{A_i, A_j\} - \{A_i, \phi_1\}C_{12}^{-1}\{\phi_2, A_j\} - \{A_i, \phi_2\}C_{21}^{-1}\{\phi_1, A_j\} \\ &= -\{A_i, A_kA_k - 1\}C_{12}^{-1}\{A_m\Pi_m, A_j\} - \{A_i, A_k\Pi_k\}C_{21}^{-1}\{A_mA_m - 1, A_j\}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

É fácil notar que o primeiro e o último parênteses de Poisson na equação acima são nulos. Logo,

$$\{A_i, A_j\}_D = 0. \tag{3.13}$$

Para as variáveis A_i e Π_i, temos que:

$$\begin{aligned} \{A_i, \Pi_j\}_D &= \{A_i, \Pi_j\} - \{A_i, \phi_1\}C_{12}^{-1}\{\phi_2, \Pi_j\} - \{A_i, \phi_2\}C_{21}^{-1}\{\phi_1, \Pi_j\} \\ &= \delta_{ij} - \{A_i, A_k\Pi_k\}C_{21}^{-1}\{A_mA_m - 1, \Pi_j\} \\ &= \delta_{ij} - A_k\{A_i, \Pi_k\}C_{21}^{-1}\left(2A_m\{A_m, \Pi_j\}\right) \\ &= \delta_{ij} - A_i\left(\frac{1}{2}\right)2A_j = \delta_{ij} - A_iA_j, \end{aligned} \tag{3.14}$$

onde usamos a matriz (3.11).

Finalmente, para os momentos Π_i e Π_j, obtemos:

$$\{\Pi_i, \Pi_j\}_D = \{\Pi_i, \Pi_j\} - \{\Pi_i, \phi_1\}C_{12}^{-1}\{\phi_2, \Pi_j\} - \{\Pi_i, \phi_2\}C_{21}^{-1}\{\phi_1, \Pi_j\}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\{\Pi_i, A_kA_k - 1\}C_{12}^{-1}\{A_m\Pi_m, \Pi_j\} - \{\Pi_i, a_k\Pi_k\}C_{21}^{-1}\{A_mA_m - 1, \Pi_j\} \\
&= -(-2A_i)C_{12}^{-1}(\{A_m, \Pi_j\}\Pi_m) - (\{\Pi_i, A_k\}\Pi_k)C_{21}^{-1}(2A_j) \\
&= 2A_i\left(-\frac{1}{2}\right)\Pi_j + \Pi_i\left(\frac{1}{2}\right)2A_j \\
&= a_j\pi_i - a_i\pi_j, \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

onde novamente usamos a matriz (3.11). Então, os parênteses de Dirac das variáveis canônicas são dados por:

$$\{A_i, A_j\}_D = 0, \qquad (3.16)$$

$$\{A_i, \Pi_j\}_D = \delta_{ij} - A_iA_j, \qquad (3.17)$$

$$\{\Pi_i, \Pi_j\}_D = A_j\Pi_i - A_i\Pi_j. \qquad (3.18)$$

Podemos verificar que os parênteses de Dirac são coerentes com os vínculos, isto é,

$$\{\chi_a, A\}_D = 0, \qquad (3.19)$$

onde χ_a é um vínculo de segunda classe e $A(q,p)$ é uma função arbitrária. Temos,

$$
\begin{aligned}
\{A_iA_i - 1, \Pi_j\}_D &= A_i\{A_i, \Pi_j\}_D + \{A_i, \Pi_j\}A_i, \\
&= A_i(\delta_{ij} - A_iA_j) + (\delta_{ij} - A_iA_j)A_i \\
&= 0. \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\{A_i\Pi_i, \Pi_j\}_D &= A_i\{\Pi_i, \Pi_j\}_D + \{A_i, \Pi_j\}_D\Pi_i, \\
&= A_i(A_j\Pi_i - A_i\Pi_j) + (\delta_{ij} - A_iA_j)\Pi_i, \\
&= 0. \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

onde usamos os vínculos ϕ_1 e ϕ_2 fortemente.

As relações de comutação entre os operadores canônicos da teoria quântica:

$$
\begin{aligned}
[A_i, A_j] &= 0 && (3.22)\\
[A_i, \Pi_j] &= i(\delta_{ij} - A_i A_j) && (3.23)\\
[\Pi_i, \Pi_j] &= i(A_j \Pi_i - A_i \Pi_j) && (3.24)
\end{aligned}
$$

onde tomamos $\hbar \equiv 1$. Nota-se, de imediato, que parte dos comutadores entre os operadores canônicos não são mais aqueles obtidos para o caso de sistemas sem vínculos, ou seja, as relações

$$
\begin{aligned}
[\Pi_i, \Pi_j] &= 0 && (3.25)\\
[A_i, \Pi_j] &= i\delta_{ij} && (3.26)
\end{aligned}
$$

não são válidas no caso do modelo de Skyrme. Em particular, deve-se destacar o fato de que o comutador entre os operadores momento é não nulo. Isto mostra que a existência de vínculos no modelo de Skyrme afeta de forma relevante as relações de comutação. A principal consequência das relações de comutação serem diferentes das usuais é que a forma do operador momento, escrito na representação de coordenadas, é também diferente da usual, tornando mais claro o efeito dos vínculos na quantização do modelo.

3.2 Eletromagnetismo de Maxwell

Seja a densidade de Lagrangeana do campo eletromagnético dado por:

$$
\begin{aligned}
L &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, && (3.27)\\
&= \frac{1}{2}\dot{A}^2 + \dot{\overrightarrow{A}}.\nabla A_0 + \frac{1}{2}(\nabla A_0)^2 - \frac{1}{2}(\nabla \times \overrightarrow{A})^2, && (3.28)
\end{aligned}
$$

onde $\dot{A}^2 \equiv \dot{A}^\mu \dot{A}_\mu$.

O momento conjugado ao quadripotencial é:

$$\Pi_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}^\mu}, \tag{3.29}$$

donde

$$\Pi^0 = 0, \tag{3.30}$$

$$\overrightarrow{\Pi} = \dot{\overrightarrow{A}} + \nabla A_0, \tag{3.31}$$

logo, temos o vínculo primário $\Omega_1 = \Pi^0$.

A hamiltoniana canônica é:

$$\begin{aligned} H_c &= \int d\overrightarrow{x}(\Pi^\mu \dot{A}_\mu - L), \\ &= \int d\overrightarrow{x}\left[\frac{1}{2}\overrightarrow{\Pi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla \times \overrightarrow{A})^2 - \overrightarrow{\Pi}.\nabla A_0 + \Pi_0 \dot{A}_0\right] \\ &= \int d\overrightarrow{x}\left[\frac{1}{2}\overrightarrow{\Pi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla \times \overrightarrow{A})^2 - \overrightarrow{\pi}.\nabla A_0 + \Pi_0 \dot{A}_0 + \lambda_1 \Pi_0\right] \end{aligned} \tag{3.32}$$

Agora, aplicando a condição de consistência sobre o vínculo Π^0, vem

$$\begin{aligned} \{\Pi^0(x'), H'\} &\approx -\int d\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{\Pi}.\{\Pi^0, \nabla A^0\}, \\ &\approx -\nabla \cdot \overrightarrow{\Pi}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Encontramos, assim, o vínculo secundário: $\Omega_2 = \nabla \cdot \overrightarrow{\Pi}$, que é a lei de Gauss.

Os dois vínculos obtidos são de primeira classe. A presença de vínculos já era esperada, pois a teoria é invariante perante a transformação de calibre $A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{\partial}{\partial_\mu}\Lambda$, onde Λ é qualquer função escalar de x^μ. Com o intuito de aplicarmos o método de Dirac, consideremos a seguinte fixação de calibre:

$$A^0 \approx 0 \tag{3.34}$$

$$\nabla \cdot \overrightarrow{A} \approx 0. \tag{3.35}$$

o quadro de vínculos da teoria são agora de segunda classe:

$$\Omega_1 = A^0, \tag{3.36}$$

$$\Omega_2 = \Pi^0, \tag{3.37}$$

$$\Omega_3 = \nabla \cdot \overrightarrow{A}, \tag{3.38}$$

$$\Omega_4 = \nabla \cdot \overrightarrow{\Pi}, \tag{3.39}$$

Segundo o formalismo proposto, temos de calcular a matriz C e sua inversa. Como C é uma matriz 4x4 o trabalho será pequeno para calcular sua inversa, porém, a fim de lidar com casos mais gerais, utilizarei um método em que os parênteses de Dirac são obtidos iterativamente.

Inicialmente calculemos C como se existissem somente dois vínculos (Ω_1 e Ω_2):

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \tag{3.40}$$

logo,

$$C_1{}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \tag{3.41}$$

Calculemos os parênteses de Dirac entre A^μ e Π_ν considerando unicamente a existência de dois vínculos (parênteses preliminares):

$$\{A^\mu, \Pi_\nu\}^* = (\delta^\mu_\nu - \delta^\mu_0)\delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \tag{3.42}$$

Falta agora analisarmos os vínculos Ω_3 e Ω_4. Devemos usar $C_2 = (\{\Omega_m, \Omega_n\}^*)$, com $m, n = 3, 4$, logo:

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla^2 \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \tag{3.43}$$

$$C_2{}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\nabla^2} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \tag{3.44}$$

Os parênteses de Dirac são obtidos usando os parênteses preliminares no lugar dos Poisson:

$$\{A^\mu, \Pi_\nu\}_D = \left(\delta^\mu_\nu - \frac{\partial^\mu \partial_\nu}{\nabla^2} \right) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \tag{3.45}$$

Capítulo 4

Método Simplético

4.1 Introdução

Em um trabalho relativamente recente, Faddev-Jackiw [4, 5] mostraram que os parênteses de Dirac podem ser obtidos seguindo um tratamento geométrico, baseado em estruturas simpléticas. Este formalismo é conhecido como Formalismo Simplético, ou Quantização Simplética, ou ainda, Quantização de Faddev-Jackiw. A proposta de Faddev e Jackiw para tratar sistemas vinculados é que se fizesse, primeiramente, a eliminação dos graus de liberdade supérfluos. Entretanto, conforme eles mesmos reconheceram, isto nem sempre pode ser feito, não haveria sequer necessidade de Dirac ter desenvolvido um formalismo para tratar de sistemas vinculados, pois bastaria que se eliminassem os graus de liberdade não físicos e se usasse o formalismo hamiltoniano usual.

E mais recentemente, num par de trabalhos [2, 6, 7], J. Barcelos Neto e C. Wotzasek mostraram que o método simplético pode ser convenientemente estendido de tal maneira que os vínculos possam ser incorporados. Note que segue, apresentaremos o formalismo sem e com vínculos.

4.2 Formalismo de Faddeev-Jackiw (sem vínculo)

Este método lida com Lagrangeanas de primeira ordem. É oportuno comentar que isto não é uma restrição séria porque todos os sistemas que conhecemos, descritos por Lagrangeana quadráticas, podem ser escritos na formulação de primeira ordem. Isto é conseguido estendendo-se o espaço de configurações com a introdução de variáveis auxiliares. Estas geralmente os momentos, mas isto não é necessariamente obrigatório.

Consideremos um caso mais geral de Lagrangeana de primeira ordem do tipo:

$$L = a_\alpha \dot{\xi}^\alpha - V, \tag{4.1}$$

onde $V \equiv V(\xi^\alpha)$ é a energia potencial.

As equações de Euler-Lagrange para a Lagrangeana (4.1) são[1]:

$$\frac{\partial a_\beta}{\partial \xi^\alpha}\dot{\xi}^\beta - \frac{\partial V}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial a^\alpha}{\partial \xi^\beta}\dot{\xi}^\beta, \tag{4.2}$$

logo

$$\begin{aligned} \partial_\alpha V &= (\partial_\alpha a_\beta - \partial_\beta a_\alpha)\dot{\xi}^\beta, \\ &= f_{\alpha\beta}\dot{\xi}^\beta, \end{aligned} \tag{4.3}$$

onde foi usado $\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}$ e

$$f_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha a_\beta - \partial_\beta a_\alpha. \tag{4.4}$$

A equação de movimento (4.4) e a equação (2.51) sugerem uma relação entre o potencial V e a hamiltoniana. A hamiltoniana de L é[2]

[1]As coordenadas simpléticas são, a princípio, tratadas como independentes, o que justifica o emprego das equações de Euler-Lagrange.

[2]Utilizando a nomenclatura de Dirac, a referida hamiltoniana é a canônica. Veremos que não será necessário definir novas hamiltonianas análogas à total ou à estendida: todo o procedimento simplético não se importa com o comportamento das funções fora da superfície de vínculo - Variedade imersa no espaço configuracional ou de fase definida pelas equações $\Omega_m = 0$, onde os Ω_m's são as equações de vínculo da teoria considerada. Em uma teoria sem vínculos, a superfície de vínculo é todo o espaço configuracional ou de fase.

$$H(\Pi, \xi) = \Pi_\alpha \dot{\xi}^\alpha - L(\xi, \dot{\xi}), \tag{4.5}$$

em que $\Pi_\alpha \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^\alpha}$. Como $\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^\alpha} = a_\alpha(\xi)$, essa teoria possui, segundo o método de Dirac, N vínculos primários: $\Omega_\alpha(\Pi, \xi) = \Pi_\alpha - a_\alpha(\xi)$. Nosso objetivo não é proceder com o formalismo de Dirac, não vamos considerar tais relações de vínculos. Façamos simplesmente a substituição dos momentos Π_α pelas funções $a_\alpha(\xi)$ (o que parece ser, ao menos intuitivamente, mais sensato). Ao fazê-lo, $H(\Pi, \xi)$ passa a ser $H(\xi)$ e temos

$$H(\xi) = a_\alpha(\xi)\dot{\xi}^\alpha - L(\xi, \dot{\xi}) = V(\xi). \tag{4.6}$$

Se a matriz $(f_{\alpha\beta})$ possuir inversa, os elementos desta serão denotados por $f^{\alpha\beta}$, onde

$$f_{\gamma\alpha} f^{\alpha\beta} = \delta_\gamma^\beta \quad (\gamma = 1, 2...2N), \tag{4.7}$$

logo

$$\dot{\xi}^\beta = f^{\alpha\beta} \partial_\alpha V. \tag{4.8}$$

A equação (4.8) mostra que as velocidades simpléticas podem ser univocamente determinadas se, e somente se, a matriz simplética possuir inversa.

Como $V(\xi^\alpha) = H(\xi^\alpha)$, os parênteses que satisfazem a relação de quantização (parênteses de Dirac)

$$\{A, B\}_D \to \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{B}]. \tag{4.9}$$

devem também satisfazer:

$$\dot{\xi}^\beta = \{\xi^\beta, V\}_* = \partial_\alpha V \{\xi^\beta, \xi^\alpha\}_*. \tag{4.10}$$

Ao igualar as equações (4.8) e (4.10), conclui-se que os parênteses generalizados devem ser definidos como:

$$\{\xi^\beta, \xi^\alpha\}_* \equiv f^{\alpha\beta}. \tag{4.11}$$

Em momento algum foi necessário falar sobre vínculos, apesar de o método de Dirac precisar da introdução destes. No entanto, a matriz $(f_{\alpha\beta})$ é inversível se, e somente se, os vínculos da teoria forem de segunda classe.

Portanto, os parênteses de Poisson entre os vínculos, no espaço das coodernadas e dos momentos simpléticos, são:

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta} \equiv \{\Omega_\alpha, \Omega_\beta\} &= -\{a_\alpha, \Pi_\beta\} - \{\Pi_\alpha, a_\beta\} \\ &= -\frac{\partial a_\alpha}{\partial \xi^\gamma}\frac{\partial \Pi_\beta}{\partial \Pi_\gamma} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial \Pi_\gamma}\frac{\partial a_\beta}{\partial \xi^\gamma}, \\ &= -\partial_\beta a_\alpha + \partial_\alpha a_\beta, \\ &= f_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Como a matriz $(C_{\alpha\beta})$ possui inversa, não é degenerada, se, e somente se, os vínculos forem de segunda classe, o mesmo pode ser concluído quanto à matriz $(f_{\alpha\beta})$.

Se a matriz $(f_{\alpha\beta})$ possuir inversa, ela é denominada matriz simplética, caso contrário, existirão vínculos verdadeiros [3]na teoria. De forma geral, $(f_{\alpha\beta})$ será denominada matriz pré-simplética.

4.3 Formalismo de Barcelos Neto-Wotzasek (com vínculo)

O objetivo deste método é partir de uma Lagrangeana $L^{(0)}$ com vínculos verdadeiros, caso de $(f_{\alpha\beta})$ ser uma matriz degenerada, e, após n iterações, obter uma Lagrangeana $L^{(n)}$ sem vínculos verdadeiros e com a mesma dinâmica[4].Talvez a solução

[3]Chama-se de vínculo verdadeiro o termo $\nu_m^\alpha \partial_\alpha V$, ainda a ser definido, que não é nulo a priori.

[4]As equações de movimento de $L^{(0)}$ só poderiam ser deduzidas se todos os vínculos verdadeiros já fossem conhecidos, assim seria possível proceder com a variação da ação levando tais dependências em consideração, mas os vínculos não são conhecidos previamente. Na afirmativa acima (assim como no restante da dissertação), suponho a existência de um único grupo de relações entre as coordenadas que, associado a $L^{(0)}$, leve as equações de movimento consistentes.

mais natural seja adicionar os vínculos encontrados à Lagrangeana $L^{(0)}$ por meio de multiplicadores de Lagrange, pois assim os vínculos se tornam explícitos mediante o emprego das equações de Euler-Lagrange (desde que esses multiplicadores sejam tratados como novas variáveis simpléticas independentes [1]).

Utilizando esta técnica de adição de vínculos, em especial, Faddeev e Jackiw [6, 7] propuseram um método para lidar com os vínculos verdadeiros. Este, que parece não seguir tão diretamente os princípios do método simplético, não será aqui apresentado. Esta forma de adicionar vínculos incorpora-os à parte potencial de $L^{(0)}$ e não promove a inversibilidade de $(h_{\alpha\beta})$.

Por outro lado, esse método consiste, basicamente, em adicionar os vínculos verdadeiros à parte cinética da Lagrangeana, por meio de multiplicadores de Lagrange, e expandir o espaço de fase, considerando estes últimos como novas coordenadas. Se a nova matriz pré-simplética for inversível, esta será a matriz simplética, caso contrário, ainda há vínculos verdadeiros na teoria e o processo deve ser repetido. Analogamente ao método de Dirac, é possível que a nova matriz pré-simplética seja degenerada e novos vínculos não sejam encontrados (teoria com simetria de calibre), neste caso, o calibre deve ser fixado para dar continuidade ao método.

Se o tensor obtido na seção anterior $f_{\alpha\beta}$ descrever uma matriz degenerada, ele aqui será identificado por[5] $f^{(0)}_{\alpha\beta}$. Sendo R o posto da matriz $(f^{(0)}_{\alpha\beta})$, deverão existir $M = 2N - R$ autovetores associados a autovalores nulos (modos zeros), denotados por $(\nu^{(0)\alpha})_m$, com $m = 1, 2...M$, portanto[6]:

$$\nu^{(0)\alpha}_m f^{(0)}_{\alpha\beta} = 0, \quad \text{para todo } \beta \text{ e m.} \tag{4.13}$$

Multiplicando $\nu^{(0)\alpha}_m$ nos dois lados da equação (4.3):

$$\nu^{(0)\alpha}_m \partial_\alpha V^{(0)} = 0. \tag{4.14}$$

[5]Supeíndices do tipo (n) indicam a n-ésima iteração.

[6]Os modos-zeros serão sempre vistos como vetores de linha. Tratando-se de campos, essa consideração é importante, pois os modos-zeros podem ser operadores.

Se a contração dos modos zeros com o gradiente do potencial (4.14) fornecer equações não identicamente nulas, vínculos verdadeiros são obtidos:

$$\Omega_m^{(0)} \equiv v_m^{(0)\alpha} \partial_\alpha V^{(0)}. \tag{4.15}$$

Caso o desenvolvimento de (4.15), para dado m, não leve a um vínculo verdadeiro, a teoria em questão possuirá simetria de calibre e o modo-zero será o gerador dessa simetria. A fim de continuar com o processo iterativo de obtenção do tensor simplético, o calibre deve ser fixado, fazendo:

$$V \longrightarrow V + V_{fc}, \tag{4.16}$$

onde V_{fc} é o termo responsável pela fixação de calibre, que torna (4.15) não identicamente nula e leva a um novo vínculo.

Conforme já dito, os vínculos verdadeiros são adicionados à parte cinética da Lagrangeana, isto é, sendo $\lambda^{(0)m}$ um multiplicador de Lagrange, adicionaremos o termo $\lambda^{(0)m}\dot{\Omega}_m^{(0)}$ ou[7] $\dot{\lambda}^{(0)m}\Omega_m^{(0)}$, a fim de obter uma deformação do tensor $f_{\alpha\beta}^{(0)}$. Pela equação (2.27) vemos que o vínculo não deve evoluir no tempo (a equação é válida para todo t), logo, se não houver nenhuma inconsistência na teoria, isto é, não hajam vínculos desconhecidos, as equações de movimento obtidas pela nova Lagrangeana devem ser equivalentes às da anterior.

Tomando-se a derivada total do vínculo e introduzindo o resultado na Lagrangeana por meio dos multiplicadores de Lagrange,[8]que alargam o espaço de configuração da teoria passam a ser $(\xi^\alpha, \lambda_m^{(0)})$ e a nova Lagrangeana é obtida:

$$\begin{aligned} L^{(1)} &\equiv L^{(0)} + \lambda^{(0)m}\dot{\Omega}_m^{(0)} \\ &= a^{(0)}(\xi)\dot{\xi}^\alpha + \lambda^{(0)m}\dot{\Omega}_m^{(0)} - V^{(0)}(\xi) \end{aligned}$$

[7]As duas formas de adição de vínculos são equivalentes, pois diferem por uma derivada total temporal.

[8]Pode-se, também, tomar a derivada temporal do multiplicador de Lagrange.

$$
\begin{aligned}
&= a^{(0)}(\xi)\dot{\xi}^{\alpha} + \lambda^{(0)m}\partial_{\alpha}\Omega^{(0)}_{m}\dot{\xi}^{\alpha} - V^{(0)}(\xi) \\
&= \left(a^{(0)}(\xi) + \lambda^{(0)}_{m}\partial_{\alpha}\Omega^{(0)m}\right)\dot{\xi}^{\alpha} - V^{(0)}(\xi) \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

A forma $L^{(1)}$ pode ser a mesma de $L^{(0)}$ se usarmos $\alpha = 1, 2...2N+M$, $\rho = 1, 2...2N$ e definirmos:

$$
\begin{aligned}
\xi^{(1)\alpha} &\equiv (\xi^{(0)\rho}, \lambda^{(0)m}), \qquad (4.18) \\
a^{(1)}_{\alpha} &\equiv (a^{(0)}_{\rho}, \Omega^{(0)}_{m}). \qquad (4.19)
\end{aligned}
$$

Então, da equação (4.17) podemos identificar novos vetores $a^{(1)}_{\alpha}$ e $a^{(1)}_{m}$:

$$
a^{(1)}_{\alpha} = a^{(0)}_{\alpha} + \lambda^{(0)}_{m}\partial_{\alpha}\Omega^{(0)}_{m}, \qquad (4.20)
$$

$$
a^{(1)}_{m} = 0. \qquad (4.21)
$$

Como os vínculos já foram inseridos na parte cinética, esses podem ser eliminados da parte potencial:

$$
V^{(1)} \equiv V^{(0)}|_{\Omega^{(0)}=0}. \qquad (4.22)
$$

A Lagrangeana $L^{(1)}$ pode ser escrita como

$$
L^{(1)} = a^{(1)}_{\alpha}\dot{\xi}^{(1)\alpha} - V^{(1)}, \qquad (4.23)
$$

logo as equações de Euler-Lagrange são facilmente obtidas ao comparar a equação anterior com (4.4) e (4.5):

$$
f^{(1)}_{\alpha\beta}\dot{\xi}^{(1)\beta} = \partial_{\alpha}V^{(1)}, \qquad (4.24)
$$

com

$$
f^{(1)}_{\alpha\beta} \equiv \partial_{\alpha}a^{(1)}_{\beta} - \partial_{\beta}a^{(1)}_{\alpha}. \qquad (4.25)
$$

Em consequência, a modificação do tensor pré-simplético é dada por:

$$
\begin{aligned}
f^{(1)}_{\alpha\beta} &= \partial_{\alpha}a^{(1)}_{\beta} - \partial_{\beta}a^{(1)}_{\alpha}, \qquad (4.26) \\
f^{(1)}_{\alpha m} &= \partial_{\alpha}a^{(1)}_{m} - \partial_{m}a^{(1)}_{\alpha} = -\partial_{m}a^{(1)}_{\alpha}, \qquad (4.27) \\
f^{(1)}_{mn} &= \partial_{m}a^{(1)}_{n} - \partial_{n}a^{(1)}_{m} = 0, \qquad (4.28)
\end{aligned}
$$

sendo $\partial_m = \frac{\partial}{\partial \lambda^m}$. Matricialmente,

$$(f^{(1)}_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} (f^{(0)}_{\rho\kappa}) & (\partial_\rho \Omega^{(0)}_m) \\ -(\partial_\rho \Omega^{(0)}_m)^T & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.29}$$

onde $\alpha, \beta = 1, 2...2N + M$, $\rho, \kappa = 1, 2...2N$, $m = 1, 2...M$, $\partial_\rho \equiv \frac{\partial}{\partial \xi^{(0)\rho}}$ e o superíndice T indica transposta da matriz.

Se a matriz $(f^{(1)}_{\alpha\beta})$ for não-degenerada, conseguimos eliminar os vínculos e tem o tensor simplético da teoria. Caso contrário, devemos repetir o procedimento anterior tantas vezes quantas forem necessárias.

Pode ocorrer, também, de se chegar a um ponto onde se obtém uma matriz singular e os modos-zeros correspondentes não conduzem a novos vínculos. Este é o caso, por exemplo, de teorias de calibre. Neste ponto, se queremos definir o tensor simplético, devemos introduzir as condições de calibre[9] (ou a fixação de calibre).

Como exemplo das idéias aqui tratadas, consideremos o Modelo de Skyrme e o campo eletromagnético. O Modelo de Skyrme é uma teoria efetiva que descreve os bárions e suas iterações, através de soluções estáticas com energia finita (sólitons) em um modelo de sigma não-linear.

[9]Vínculos provenientes da quebra da simetria de calibre.

Capítulo 5

Aplicações do Método Simplético

5.1 Modelo de Skyrme SU(2)

Passaremos agora a discutir a quantização deste modelo do ponto de vista do método de Faddeev-Jackiw para sistemas vinculados.

Vamos usar um procedimento semelhante ao utilizado por J.Barcelos Neto e C. Wotzasek [6]. Primeiramente, como vimos no capítulo 4, devemos escrever a Lagrangeana do modelo como uma função linear das velocidades. Teremos:

$$L = \Pi_i \dot{A}_i - H$$

$$L^{(0)} = \Pi_i \dot{A}_i - M - \frac{1}{8\lambda}(\Pi_j \Pi_j) - \eta(A_i A_i - 1) \tag{5.1}$$

ou então

$$L^{(0)} = \Pi_i \dot{A}_i - V^{(0)}(\xi_i^{(0)}), \tag{5.2}$$

onde

$$V^{(0)}(\xi_i^{(0)}) = M + \frac{1}{8\lambda}(\Pi_j \Pi_j) + \eta(A_i A_i - 1) \tag{5.3}$$

e as variáveis simpléticas são $\xi_i^{(0)} = (A_i, \Pi_i, \eta)$. Temos que:

$$a_i^{(0)A_i} = \Pi_i \tag{5.4}$$

$$a_i^{(0)\Pi_i} = a_i^{(0)\eta} = 0. \tag{5.5}$$

Da definição da matriz $f_{ij}^{(n)}$,

$$f_{ij}^{(n)} = \frac{\partial a_j^{(n)}}{\partial \xi_i^{(n)}} - \frac{\partial a_i^{(n)}}{\partial \xi_j^{(n)}} \tag{5.6}$$

obtemos

$$f^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij} & 0 \\ \delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

que é singular. O modo-zero correspondente ao autovalor nulo é $\nu^{(0)} = (0, 0, 1)$. Contraindo o modo-zero com o gradiente do potencial,

$$\Omega^{(0)} = \nu^{(0)} \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \xi_i^{(0)}} = 0 \tag{5.8}$$

o vínculo será dado por:

$$\Omega^{(0)} = \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \eta}$$

$$\Omega^{(0)} = A_i A_i - 1 = 0. \tag{5.9}$$

O vínculo dado em (5.9) deve ser introduzido na Lagrangeana de primeira iteração via um multiplicador de Lagrange. Isto é,

$$L^{(1)} = \Pi_i \dot{A}_i - V^{(1)}(\xi_i^{(1)}) + \rho \frac{\partial \Omega^{(0)}}{\partial t}, \tag{5.10}$$

onde $\frac{d\Omega^{(0)}}{dt}$ é a condição de consistência do vínculo. De (5.9), obtemos

$$\frac{d\Omega^{(0)}}{dt} = A_i \dot{A}_i. \tag{5.11}$$

Logo, substituindo (5.11)em (5.9), temos:

$$L^{(1)} = (\Pi_i + \rho A_i)\dot{A}_i - V^{(1)}(\xi_i^{(1)}), \tag{5.12}$$

onde,

$$\begin{aligned} V^{(1)}(\xi_i^{(1)}) &= V^{(0)}(\xi_i^{(0)})\Big|_{\Omega^{(0)}=0} \\ V^{(1)}(\xi_i^{(1)}) &= V^{(0)}(\xi_i^{(0)})\Big|_{a_i a_i = 1} = M + \frac{1}{8\lambda}(\Pi_i \Pi_i) \end{aligned} \tag{5.13}$$

e as variáveis simpléticas são $\xi_\alpha^{(1)} = (A_i, \Pi_i, \rho)$, onde ignoramos a variável η porque ela não aparece na Lagrangeana de primeira iteração. Temos que:

$$\begin{aligned} a_i^{(1)A_i} &= \Pi_i + \rho A_i \\ a_i^{(1)\Pi_i} &= A_i^{(1)\rho} = 0. \end{aligned} \tag{5.14}$$

A matriz simplética será:

$$f^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij} & -A_i \\ \delta_{ij} & 0 & 0 \\ A_i & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

que é singular e o modo-zero associado ao autovalor nulo é $\nu^{(1)} = (0, A_j, -1)$. O vínculo secundário será:

$$\begin{aligned} \Omega^{(1)} &= \nu^{(1)} \frac{\partial V^{(1)}}{\partial \xi_i^{(1)}} = 0 \\ &= A_j \frac{\partial V^{(1)}}{\partial \Pi_i} + (-1) \frac{\partial V^{(1)}}{\partial \rho} = 0 \\ &= A_i \Pi_i = 0. \end{aligned} \tag{5.16}$$

A Lagrangeana de segunda iteração será dada, então, por:

$$L^{(2)} = (\Pi_i + \rho A_i)\dot{A}_i - V^{(2)}(\xi_i^{(2)}) + \mu \frac{\partial \Omega^{(1)}}{dt}. \tag{5.17}$$

De (5.16), temos que

$$\frac{d\Omega^{(1)}}{dt} = \Pi_i \dot{A}_i + A_i \dot{\Pi}_i. \tag{5.18}$$

Substituindo (5.18) em (5.17), obtemos:

$$L^{(2)} = (\Pi_i + \rho A_i + \mu \Pi_i)\dot{A}_i + \mu A_i \dot{\Pi}_i - V^{(2)}(\xi_i^{(2)}), \tag{5.19}$$

onde $V^{(2)}(\xi_i^{(2)})$ é obtido a partir de $V^{(1)}(\xi_i^{(1)})$, de modo que $V^{(2)}(\xi_i^{(2)}) = V^{(1)}(\xi_i^{(1)})$.

As variáveis simpléticas são $\xi_i^{(2)} = (A_i, \Pi_i, \rho, \mu)$. Então, temos que

$$\begin{aligned} a_i^{(2)A_i} &= \Pi_i + \mu \Pi_i + \rho a_i, \\ a_i^{(2)\pi_i} &= \mu A_i, \\ a_i^{(2)\rho} &= a^{(2)i\mu} = 0. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Daí, obtemos a seguinte matriz:

$$f^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij} & -A_i & -\Pi_i \\ \delta_{ij} & 0 & 0 & -A_i \\ A_i & 0 & 0 & 0 \\ \Pi_i & A_i & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.21}$$

que é não singular e sua inversa será:

$$\left[f^{(2)}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} - A_iA_j & A_i & 0 \\ -\delta_{ij} + A_iA_j & A_j\Pi_i - A_i\Pi_j & \Pi_i & A_i \\ -A_i & -\Pi_i & 0 & -\delta_{ij} \\ 0 & -A_i & \delta_{ij} & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.22}$$

Os parênteses generalizados, que são equivalentes aos parênteses de Dirac, são dados pelos elementos da matriz duas-formas inversa. Então, da matriz acima, obtemos

$$\{A_i, A_j\}_* = \left[f_{11}^{(2)}\right]^{-1} = 0 \tag{5.23}$$

$$\{A_i, \Pi_j\}_* = \left[f_{12}^{(2)}\right]^{-1} = \delta_{ij} - A_iA_j \tag{5.24}$$

$$\{\Pi_i, \Pi_j\}_* = \left[f_{22}^{(2)}\right]^{-1} = A_j\Pi_i - A_i\Pi_j. \tag{5.25}$$

A quantização é obtida:

$$\{\xi_i, \xi_j\} \rightarrow \frac{1}{i}\left[\xi_1, \xi_j\right]. \tag{5.26}$$

Podemos notar que os parênteses generalizados em (5.23) a (5.25) são iguais aos parênteses de Dirac obtidos em (3.16) a (3.18), respectivamente.

5.2 Eletromagnetismo de Maxwell

Agora, passaremos a discutir a quantização desse caso do ponto de vista simplético. Visto que, a densidade Lagrangeana do campo eletromagnético é dado por:

$$L = \frac{1}{2}\dot{A}^2 + \dot{\overrightarrow{A}}.\nabla A_0 + \frac{1}{2}(\nabla A_0)^2 - \frac{1}{2}(\nabla \times \overrightarrow{A})^2, \tag{5.27}$$

pode ser linearizada ao utilizar o momento como um campo auxiliar.

$$\Pi_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}^\mu}, \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3), \tag{5.28}$$

donde

$$\Pi_0 = 0, \tag{5.29}$$

$$\vec{\Pi} = \dot{\vec{A}} + \nabla A_0, \tag{5.30}$$

logo, linearizando a Lagrangeana e acrescentando o índice de iteração:

$$L^{(0)} = \vec{\Pi} \cdot \dot{\vec{A}} - V^{(0)}, \tag{5.31}$$

onde

$$V^{(0)} = \frac{1}{2}\Pi^2 - \vec{\Pi} \cdot \nabla A_0 + \frac{1}{2}(\nabla \times \overrightarrow{A})^2, \tag{5.32}$$

As variáveis simpléticas são:

$$\xi_\alpha^{(0)} = (A_0, A_i, \Pi_i), \qquad (\alpha = 1, 2...7; i = 1, 2, 3), \tag{5.33}$$

e as quantidades $a_\alpha^{(0)}$ podem ser obtidas:

$$a_i^{(0)A_0} = 0; \qquad a_i^{(0)\vec{A}} = \Pi_i; \qquad a_i^{(0)\vec{\Pi}} = 0. \tag{5.34}$$

Portanto,

$$a_\alpha^{(0)} = (0, \Pi_i, 0), \tag{5.35}$$

o que nos leva a determinação de $(f_{\alpha\beta}^{(0)})$, com $\beta = 1, 2, ...7$:

$$f^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_{ij} \\ 0 & \delta_{ij} & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \tag{5.36}$$

A matriz $f^{(0)}$ é singular e o modo-zero correspondente é:

$$\nu^{(0)} = (1 \qquad 0 \qquad 0). \tag{5.37}$$

Usando a seguinte condição:

$$\int d^3x \nu^{(0)\alpha}(\vec{x}, t) \frac{\delta}{\delta \xi^{(0)\alpha}(\vec{x}, t)} \int d^3y V^{(0)}(\vec{y}, t) = 0 \tag{5.38}$$

que é uma generalização para campos da expressão (4.14). Aqui, $\xi^{(0)}_\alpha(\vec{x}, t)$ está representando qualquer um dos campos de A_0, A_i, Π_i. Obtemos,

$$\int d^3x \nu^{(0)}(\vec{x}, t) \nabla \cdot \vec{\Pi}(\vec{x}, t) = 0 \tag{5.39}$$

que leva ao vínculo:

$$\nabla \cdot \vec{\Pi} = 0, \tag{5.40}$$

que é a lei de Gauss.

Exigindo que o vínculo obtido seja fortemente igual a zero em $V^{(1)}$:

$$V^{(1)} = \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla \times \overrightarrow{A})^2, \tag{5.41}$$

onde o termo $\vec{\Pi} \cdot \nabla A_0$ de $V^{(0)}$ foi incorporado ao termo introduzido de $L^{(1)}$, isto é feito redefinindo-se o multiplicador de Lagrange e introduzindo uma derivada total. Então construída a primeira iteração da densidade de Lagrangeana:

$$L^{(1)} = \vec{\Pi} \cdot \dot{\vec{A}} + \dot{\vec{\Pi}} \cdot \nabla \lambda - V^{(1)}, \tag{5.42}$$

Aqui a derivada temporal do vínculo foi adicionada por meio de um multiplicador de lagrange. Ao definir,

$$a_i^{(1)\vec{A}} = \Pi_i; \qquad a_i^{(1)\vec{\Pi}} = \partial_i \lambda; \qquad a^{(0)\lambda} = 0. \tag{5.43}$$

Portanto,

$$\xi_\alpha^{(1)} = (A_i, \Pi_i, \lambda), \tag{5.44}$$

$$\alpha_\alpha^{(1)} = (\Pi_i, \nabla\lambda, 0), \tag{5.45}$$

é obtida a matriz $f_{\alpha\beta}^{(1)}$:

$$f^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij} & 0 \\ \delta_{ij} & 0 & -\nabla \\ 0 & \nabla & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \tag{5.46}$$

O modo-zero possui a forma:

$$\nu^{(1)} = (\nu_j^{\vec{A}} \qquad 0 \qquad \nu^\lambda), \tag{5.47}$$

que devem sastifazer a relação

$$-\nu_i^{\vec{A}} + \partial_i \nu^\lambda = 0. \tag{5.48}$$

Considerando novamente a expressão (5.38),temos

$$\begin{aligned} \int d^3x \nu_i^{\vec{A}} \frac{\delta}{\delta A_i(\vec{x},t)} \int d^3x (\nabla \times \overrightarrow{A})^2 &= 0 \\ \int d^3x \nu_i^{\vec{A}} (\partial_j\partial_j A_i - \partial_i\partial_j A_j) &= 0 \end{aligned} \tag{5.49}$$

Combinando (5.48) e (5.49) obtemos

$$\begin{aligned} \int d^3x \partial_i \nu^\lambda (\partial_j\partial_j A_i - \partial_i\partial_j A_j) &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \tag{5.50}$$

Então, o modo-zero não dá nenhum novo vínculo. Conforme explicado anteriormente, devemos fixar o calibre. Vamos escolher o calibre de Coulomb, $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, que também terá sua derivada temporal adicionada a densidade de Lagrangeana:

$$
\begin{aligned}
L^{(2)} &= (\vec{\Pi} + \nabla\eta) \cdot \vec{A} + \dot{\vec{\Pi}} \cdot \nabla\lambda - V^{(2)}, && (5.51)\\
V^{(2)} &= \frac{1}{2}\Pi^2 - \frac{1}{2}\vec{A} \cdot \nabla^2 \vec{A}. && (5.52)
\end{aligned}
$$

onde parte do termo em $(\nabla \times \overrightarrow{A})^2$ que contém $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ foi absorvido no termo cinético. Considerando que

$$
a_i^{(2)\vec{A}} = \Pi_i + \partial_i \eta; \qquad a_i^{(1)\vec{\Pi}} = \partial_i \lambda; \qquad a^{(0)\lambda} = a^{(0)\eta} = 0. \tag{5.53}
$$

e as novas coordenadas simpléticas:

$$
\xi_\alpha^{(2)} = (A_i, \Pi_i, \lambda, \eta), \tag{5.54}
$$

chegamos a matriz simplética,

$$
(f_{\alpha\beta}^{(2)}) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij} & 0 & -\nabla \\ \delta_{ij} & 0 & -\nabla & 0 \\ 0 & \nabla & 0 & 0 \\ \nabla & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \tag{5.55}
$$

que não é mais singular. Ela pode, então, ser identificada como a matriz simplética da teoria. A sua inversa será denotada utilizando tensores em cada um de seus blocos:

$$
(f_{\alpha\beta}^{(2)})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2} & 0 & \frac{\partial_i}{\nabla^2} \\ -\delta_{ij} + \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2} & 0 & -\frac{\partial_i}{\nabla^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial_j}{\nabla^2} & 0 & \frac{1}{\nabla^2} \\ \frac{\partial_j}{\nabla^2} & 0 & -\frac{1}{\nabla^2} & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \tag{5.56}
$$

Por fim, podemos escrever o parêntes generalizado entre A_i e Π_j como:

$$
\{A_i, \Pi_j\}_* = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2}\right) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \tag{5.57}
$$

Vemos que o resultado obtido é o mesmo da equação (3.45),que o método de Dirac.

Capítulo 6

Formalismo Simplético de Imersão

6.1 Introdução

Há hoje em dia um intenso estudo a respeito das idéias relacionadas com dualidade [31], que, em poucas palavras, pode ser descrita como duas versões equivalentes de um modelo usando diferentes campos. Podemos listar diferentes contextos em física teórica nos quais a dualidade é um ingrediente essencial [18].

A partir da equivalência entre os modelos auto-dual [19] e topologicamente massivo [4], mostrado por Deser e Jackiw [5], se estabelece uma correspondência entre a função partição para o modelo massivo de Thirring e a teorias de Maxwell-Chern-Simons (MCS) [5]. Entretanto, como observado em [20, 21], o uso de ações originais nessa situação não é eficiente para se estabelecer uma equivalência dual. O chamado método iterativo de dualização de Noether [16] tem se mostrado eficiente para se estabelecer a dualidade entre alguns modelos, como a paradigmática dualidade entre o modelo auto-dual [19] e a teoria Maxwell-Chern-Simons em três dimensões (correspondência estabelecida por Deser e Jackiw [5]).

Nesse contexto, um método recente, é o chamado Formalismo Simplético de Imersão, esse usa "filosofia" do método simplético anteriormente apresentado, para inserir variáveis auxiliares (variáveis de Wess-Zumino) de forma consistente com a dinâmica da teoria original e com os desejados geradores da nova simetria de calibre. Além de acrescentar duas novas funções, $\Psi(\xi)$ e $G(\xi, \eta)$, a primeira na parte cinética da Lagrangeana e a segunda na parte potencial; de forma a possibilitar o retorno à Lagrangeana original se a variável auxiliar η for substituída pela função nula.

Após a introdução de η, Ψ e G, o primeiro passo é impor que a nova matriz pré-simplética $(\tilde{f}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}})$ seja degenerada, assim Ψ será determinado. O segundo passo consiste em impor que seus modos-zeros não produzam novos vínculos, o que vem a determinar G. Com isto, obter-se-á uma Lagrangeana com simetria de calibre, cuja fixação com a condição $\eta = 0$ promoverá as mesmas equações de movimento da Lagrangeana original.

Geralmente, o tensor simplético envolve as coordenadas e os momentos originais da teoria. Apesar do método simplético de calibre conservar a correspondência existente entre cada coordenada e seu momento conjugado, a inserção da variável de Wes-Zumino pode alterar o valor do último. Por isto, um terceiro e último passo é necessário escrever a Lagrangeana na forma padrão, isto é, sem os momentos.

Este é diferente da técnica existente que procuramos adaptar, prever ou reorganizar, os vínculos existentes de segunda classe em um sistema de primeira classe[1]. Além de, tratar somente estruturas simpléticas da teoria para que a de Imersão não dependa de alguma restrição da pré-existente.

Todavia, o FSI não é afetado por problemas de ambiguidade e mantém o conteúdo físico, originalmente, presente no espectro de energia. Este método segue a sugestão de Faddev [10] que se encarrega de modelos não-invariantes - o formalismo simplético.

Primeiramente, apresentaremos de forma geral, o Formalimo Simplético de Imersão [13, 14, 26], a fim de analisar a teoria de MPCS desse ponto de vista e obter a ação equivalente dual da teoria a fim de compará-la com a recém-técnica de Dualização de

[1]Trata-se de uma sistema que possui pelo menos um vínculo primário. Considerando como verdadeira a conjectura de Dirac, isto é, que todos os vínculos de primeira classe são geradores de transformações de calibre, sistema de primeira classe é o mesmo que simetria de calibre.

Noether[2].

6.2 O Método Simplético de Imersão

A idéia principal deste Formalismo Simplético de Imersão (FSI) [13, 14] é o mergulho em uma teoria de segunda classe em uma dual com invariância de calibre. Baseia-se no Formalismo Simplético e estenderemos o espaço de configuração por meio das variáveis de Wess-Zumino (WZ). Acrescentaremos duas funções arbitrárias que são dependentes do espaço de fase original e das variáveis WZ, $\Psi(a_i, p_i)$ e $G(a_i, p_i, \eta)$ na densidade Lagrangeana de primeira-ordem:

$$\widetilde{L}^{(0)} dt = a_{\theta}^{(0)} d\xi^{(0)\theta} + \Psi d\eta - \widetilde{V}^{(0)} dt, \tag{6.1}$$

com

$$\widetilde{V}^{(0)} = V^{(0)} + G(a_i, p_i, \eta) \tag{6.2}$$

onde a função arbitrária $G(a_i, p_i, \eta)$ é expressa como uma expanção em termos das variáveis de WZ, dado por:

$$G(a_i, p_i, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} G(a_i, p_i, \eta),\; G^{(n)}(a_i, p_i, \eta) \propto \eta^{(n)} \tag{6.3}$$

e satisfaz a seguinte condição de contorno:

$$G(a_i, p_i, \eta = 0) = 0 \tag{6.4}$$

As variáveis simpléticas foram estendidas e também as variáveis WZ, $\widetilde{\xi}^{(0),\widetilde{\theta}} = (\xi^{(0),\theta}, \eta)$ (com $\widetilde{\theta} = 1, 2, ..., 2N + 1$) e o potencial simplético de primeira-iteração torna-se:

[2] Veja o apêndice.

$$\widetilde{V}^{(0)}(a_i, p_i, \eta) = V^{(0)}(a_i, p_i) + \sum_{n=1}^{\infty} G^{(n)}(a_i, p_i, \eta) \tag{6.5}$$

Neste contexto, os novos momentos canônicos são:

$$\widetilde{a}_{\widetilde{\theta}}^{(0)} = \begin{cases} a_\theta^{(0)}, & \widetilde{\theta} = 1, 2, ..., 2N; \\ \Psi, & \widetilde{\theta} = 1, 2, ..., 2N+1 \end{cases} \tag{6.6}$$

e o novo tensor simplético, dado por:

$$\widetilde{f}_{\widetilde{\theta}\widetilde{\beta}}^{(0)} = \frac{\partial \widetilde{a}_{\widetilde{\beta}}^{(0)}}{\partial \widetilde{\xi}^{(0)\widetilde{\theta}}} - \frac{\partial \widetilde{a}_{\widetilde{\theta}}^{(0)}}{\partial \widetilde{\xi}^{(0)\widetilde{\beta}}}, \tag{6.7}$$

que matricialmente é,

$$(\widetilde{f}_{\widetilde{\theta}\widetilde{\beta}}^{(0)}) = \begin{pmatrix} (f_{\theta\beta}^{(0)}) & (f_{\theta\eta}^{(0)}) \\ f_{\eta\beta}^{(0)} & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.8}$$

Após a introdução de η, $\Psi(a_i, p_i)$ e $G(a_i, p_i, \eta)$, o primeiro passo é impor que a nova matriz, $\widetilde{f}_{\widetilde{\theta}\widetilde{\beta}}^{(0)}$, seja degenerada, assim Ψ será determinado. Enquanto, o segundo consiste em atribuir que seus modos-zeros não produzam mais vínculos, o que vem a determinar G.

Com isto, este novo tensor simplético, $\widetilde{f}^{(0)}$, tem um modo-zero $\widetilde{\nu}$,consequentemente, chegamos a seguinte condição:

$$\widetilde{\nu}_{\widetilde{\theta}}^{(0)} \widetilde{f}_{\widetilde{\theta}\widetilde{\beta}}^{(0)} = 0. \tag{6.9}$$

Imporemos, agora, que a matriz acima possua o um modo-zero do tipo:

$$\widetilde{\nu}^{(0)} = \begin{pmatrix} \mu^\theta & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.10}$$

e usando a relação dada em (6.9) junto com a (6.8), encontramos um grupo de equações,

$$\mu^{\theta} f_{\theta\beta}^{(0)} + f_{\eta\beta}^{(0)} = 0 \tag{6.11}$$

onde

$$f_{\eta\beta}^{(0)} = \frac{\partial a_{\beta}^{(0)}}{\partial \eta} - \frac{\partial \Psi}{\partial \xi^{(0)\beta}} \tag{6.12}$$

Os elementos da matriz μ^{θ} são escolhidos em ordem de revelar o desejo pela simetria de calibre. Note que nesse formalismo de modo-zero $\widetilde{\nu}_{\widetilde{\theta}}^{(0)}$ é o gerador da simetria de calibre. Esta característica nos permite encontrar a simetria escondida do modelo não-invariante. O fato da última componente de ($\widetilde{\nu}^{(0)}$ ser unidade assegura a existência de uma transformação de calibre envolvendo η. Estando os modos-zero escolhidos e a função Ψ determinada, a equação (6.11) dá-se início ao passo seguinte do método, o cálculo de G.

Para termos uma teoria de calibre, impomos que não mais vínculos surgem da contração do modo-zero ($\widetilde{\nu}_{\widetilde{\theta}}^{(0)}$) com o gradiente do potencial $\widetilde{V}^{(0)}(a_i, p_i, \eta)$, ou seja, o modo-zero é ortogonal ao gradiente do potencial. Esta condição gera uma equação diferencial geral,

$$\widetilde{\nu}^{(o)\widetilde{\theta}} \frac{\partial \widetilde{V}^{(0)}(a_i, p_i, \eta)}{\partial \widetilde{\xi}^{(0)\widetilde{\theta}}} = 0 \tag{6.13}$$

$$\begin{aligned} \mu^{\theta} \frac{\partial V^{(0)}(a_i, p_i)}{\partial \xi^{(0)\theta}} + \mu^{\theta} \frac{\partial G^{(1)}(a_i, p_i, \eta)}{\partial \xi^{(0)\theta}} + \mu^{\theta} \frac{\partial G^{(2)}(a_i, p_i, \eta)}{\partial \xi^{(0)\theta}} + \ldots + \\ + \frac{\partial G^{(1)}(a_i, p_i, \eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial G^{(2)}(a_i, p_i, \eta)}{\partial \eta} + \ldots = 0, \end{aligned} \tag{6.14}$$

que nos permite calcular todos os termos de correção $G(a_i, p_i, \eta)$ em ordem de η. Note que esta expansão de polinômios em termos de η é igual a zero, consequentemente, todos os coeficientes para cada ordem de η devem ser identicamente nulos. Em vista disso, cada termo corrigido em ordem de η é determinado. Para um termo linear corrigido, temos:

$$\mu^{\theta}\frac{\partial V^{(0)}(a_i,p_i)}{\partial \xi^{(0)\theta}} + \frac{\partial G^{(1)}(a_i,p_i,\eta)}{\partial \eta} = 0 \tag{6.15}$$

e um termo quatrático,

$$\mu^{\theta}\frac{\partial G^{(1)}(a_i,p_i,\eta)}{\partial \xi^{(0)\theta}} + \frac{\partial G^{(2)}(a_i,p_i,\eta)}{\partial \eta} = 0. \tag{6.16}$$

Destas equações, uma relação de recorrência para $n \geq 2$ é proposto como:

$$\mu^{\theta}\frac{\partial G^{(n-1)}(a_i,p_i,\eta)}{\partial \xi^{(0)\theta}} + \frac{\partial G^{(n)}(a_i,p_i,\eta)}{\partial \eta} = 0 \tag{6.17}$$

que nos possibilita calcular os restantes dos termos de correção em ordem de η. Este processo iterativo é sucessivamente repetido até (6.13) tornar identicamente nulo, consequentemente, o termo extra $G(a_i,p_i,\eta)$ é obtido explicitamente. Então, a hamiltoniana de calibre invariante, identificada como potencial simplético, é obtido como:

$$\widetilde{H}(a_i,p_i,\eta) = V^{(0)}((a_i,p_i) + G(a_i,p_i,\eta), \tag{6.18}$$

e o modo-zero $\widetilde{\nu}^{(o)\widetilde{\theta}}$ é identificado como gerador de transformação infinitesimal de calibre, dado por:

$$\delta\widetilde{\xi}^{\widetilde{\theta}} = \epsilon\widetilde{\nu}^{(o)\widetilde{\theta}} \tag{6.19}$$

onde $\epsilon \equiv \epsilon(t)$ (ou $\epsilon \equiv \epsilon(\vec{x},t)$ para campos) possui a finalidade de tornar as componentes do modo-zero suficientemente pequenas. Vemos, da equação (6.19), que os modos-zero são geradores das simetrias de calibre do método simplético.

Capítulo 7

A versão invariante de Calibre do Eletromagnetismo de Maxwell-Proca-Chern-Simons via Formalismo Simplético de Imersão

7.1 A Análise Simplética de MPCS

Nessa seção, baseou-se no nosso artigo [14], a teoria de Maxwell-Proca-Chern-Simons (MPCS) em quatro dimensões será analisada no ponto de vista simplético [22]. Consideraremos a Lagrangeana massiva MPCS [15, 16]:

$$L^{(0)} = -\frac{\beta}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu - \frac{1}{4}p_\alpha A_\beta \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad \mu,\nu = 0,1,2,3 \tag{7.1}$$

onde m é a massa do campo $A_\mu \equiv A_\mu(\vec{x})$, $\vec{x}$ o vetor do espaço-tempo, tensor métrico $g_{\mu\nu} = diag(+1,-1,-1,-1)$ e, p um quadri-vetor externo constante, que seleciona uma direção preferencial no espaço-tempo para cada estrutura de Lorentz. Este termo associa ao campo eletromagnético a um quadri-vetor p_α [15]. Este modelo designa a massa ao fóton e, consequentemente, não existe transformação de calibre da teoria de Maxwell. Porém, este fato é mais facilmente constatado observando-se que $A^\mu A_\mu$ não é invariante perante $A^\mu \longrightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$, que corresponde justamente à transformação de calibre da teoria da Maxwell ($L = -\frac{\beta}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$).

Agora, segue o método simplético, em que a Lagrangeana de iteração-zero e primeira-ordem, equação (7.1), deve ser escrita como:

$$
\begin{aligned}
L^{(0)} &= -\frac{\beta}{2} F_{0i} F^{0i} - \frac{\beta}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu - \frac{1}{2} p^i A^j \varepsilon_{ij0k} F^{0k} - \\
&- \frac{1}{4} p^0 A^i \varepsilon_{0ijk} F^{jk} - \frac{1}{4} p^i A^0 \varepsilon_{i0jk} F^{jk}. \qquad (7.2)
\end{aligned}
$$

Os momentos conjugados ao campo A^μ é:

$$
\Pi_l(x) = \frac{\delta L}{\delta \dot{A}^l} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 A^l)}, \quad l = 1, 2, 3. \qquad (7.3)
$$

Usando a equação (A.7) para calcular a variação do primeiro termo da densidade Lagrangeana (7.2) e (7.3) e levando em consideração os demais termos com dependência de $(\partial_0 A^l)$, temos:

$$
\begin{aligned}
\Pi_l(x) &= -\frac{\beta}{2} [F_{0l} - (-F_{0l})] - \frac{1}{2} p^i A^j \varepsilon_{ij0k} \delta_l^k \\
&= -\beta F_{0l} - \frac{1}{2} p^i A^j \varepsilon_{ij0l} \\
&= -\beta F_{0l} - \frac{1}{2} p^i A^j \varepsilon_{lij}; \qquad (7.4)
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
F_{0l} = \frac{1}{\beta} \Pi_l - \frac{1}{2\beta} p^i A^j \varepsilon_{lij}. \qquad (7.5)
$$

Logo,

$$
L^{(0)} = -\beta F_{0i} F^{0i} + \frac{\beta}{2} F_{0i} F^{0i} - \frac{\beta}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{m^2}{2} A_i A^i + \frac{m^2}{2} A_0 A^0 +
$$

$$- \quad \frac{1}{2}p^i A^j \varepsilon_{kij} F^{0k} - \frac{1}{4}p^0 A^i \varepsilon_{ijk} F^{jk} + \frac{1}{4}p^i A^0 \varepsilon_{ijk} F^{jk}. \tag{7.6}$$

Usando a (7.4), temos:

$$\begin{aligned}
L^{(0)} &= -\frac{1}{\beta}\Pi_l \Pi^l - \frac{1}{2\beta}p_n A_s \Pi_l \varepsilon^{lns} - \frac{1}{2\beta}p^i A^j \Pi^l \varepsilon_{lij} - \frac{1}{4\beta}p^i p_n A^j A_s \varepsilon_{lij}\varepsilon^{lns} + \\
&+ \frac{1}{2\beta}\Pi_l \Pi^l + \frac{1}{4\beta}p_n A^s \varepsilon_{lns} + \frac{1}{8\beta}p^i p_n A^j A_s \varepsilon_{lij}\varepsilon^{lns} + \frac{1}{4\beta}p^i A^j \Pi^l \varepsilon_{lij} - \frac{\beta}{4}F_{ij}F^{ij} + \\
&+ \frac{m^2}{2}A_0 A^0 + \frac{m^2}{2}A_i A^i + \frac{1}{2\beta}p^i A^j \Pi^k \varepsilon_{kij} + \frac{1}{4\beta}p^i p_n A^j A_s \varepsilon_{kij}\varepsilon^{kns} + \\
&- \frac{1}{4}p^0 A^i \varepsilon_{ijk} F^{jk} + \frac{1}{4}p^i A^0 \varepsilon_{ijk} F^{jk}.
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Sabendo que,

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{nlk} = \delta_j^n \delta_i^l - \delta_i^n \delta_j^l \tag{7.8}$$

temos,

$$\begin{aligned}
L^{(0)} &= -\frac{1}{\beta}\Pi_l \Pi^l - \frac{1}{2\beta}p_n A_s \Pi_l \varepsilon^{lns} - \frac{1}{2\beta}p^i A^j \Pi^l \varepsilon_{lij} - \frac{1}{4\beta}p^i p_j A^j A_i + \frac{1}{4\beta}p^i p_i A^j A_j + \\
&+ \frac{1}{2\beta}\Pi_l \Pi^l + \frac{1}{4\beta}p_n A^s \varepsilon_{lns} + \frac{1}{8\beta}p^i p_j A^j A_i - \frac{1}{8\beta}p^i p_i A^j A_j + \frac{1}{4\beta}p^i A^j \Pi^l \varepsilon_{lij} - \\
&- \frac{\beta}{4}F_{ij}F^{ij} + \frac{m^2}{2}A_0 A^0 + \frac{m^2}{2}A_i A^i + \frac{1}{2\beta}p^i A^j \Pi^k \varepsilon_{kij} + \\
&+ \frac{1}{4\beta}p^i p_j A^j A_i - \frac{1}{4\beta}p^i p_i A^j A_j - \frac{1}{4}p^0 A^i \varepsilon_{ijk} F^{jk} + \frac{1}{4}p^i A^0 \varepsilon_{ijk} F^{jk}.
\end{aligned} \tag{7.9}$$

Ou,

$$\begin{aligned}
L^{(0)} &= -\frac{1}{\beta}\Pi^l(-\beta\partial_0 A_l + \beta\partial_l A_0 - \frac{1}{2}p^i A^j \varepsilon_{lij}) + \frac{1}{8\beta}p^i p_j A^j A_i - \\
&- \frac{1}{8\beta}p^i p_i A^j A_j + \frac{1}{2\beta}\Pi_l \Pi^l - \frac{\beta}{4}F_{ij}F^{ij} + \frac{m^2}{2}A_0 A^0 + \\
&+ \frac{m^2}{2}A_i A^i - \frac{1}{4}p^0 A^i \varepsilon_{ijk} F^{jk} + \frac{1}{4}p^i A^0 \varepsilon_{ijk} F^{jk}.
\end{aligned} \tag{7.10}$$

ou ainda,

$$
\begin{aligned}
L^{(0)} &= \Pi^l \dot{A}_l + \Pi^l \partial_l A_0 + \frac{1}{2\beta} p^i A^j \varepsilon_{lij} + \frac{1}{8\beta} p^i p_j A^j A_i - \frac{1}{8\beta} p^i p_i A^j A_j + \frac{1}{2\beta} \Pi_l \Pi^l - \\
&- \frac{\beta}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{m^2}{2} A_0 A^0 + \frac{m^2}{2} A_i A^i - \frac{1}{4} p^0 A^i \varepsilon_{ijk} F^{jk} + \frac{1}{4} p^i A^0 \varepsilon_{ijk} F^{jk}. \qquad (7.11)
\end{aligned}
$$

Finalmente, obtemos a lagrangeana linearizada;

$$
L^{(0)} = \Pi_i \dot{A}^i - V^{(0)}, \qquad (7.12)
$$

com

$$
\begin{aligned}
V^{(0)} &= -A_0(\partial^i \Pi_i + m^2 A_0 + \frac{1}{4} p^i \varepsilon_{jki} F^{jk}) - \frac{1}{2\beta} p_i A_j \Pi_k \varepsilon_{ijk} - \frac{1}{2\beta} \Pi_l \Pi^l + \\
&+ \frac{\beta}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{m^2}{2} A_0 A^0 - \frac{m^2}{2} A_i A^i - \frac{1}{8\beta} p^i A^j (p_j A^i - p_i A_j) + \frac{1}{4} p^0 A^i \varepsilon_{ijk} F^{jk}.
\end{aligned}
\qquad (7.13)
$$

Os campos simpléticos são $\xi^{(0)\alpha} = (A^i, \Pi^i, A^0)$ e os momentos são:

$$
\begin{aligned}
a^{(0)}_{A^i} &= \Pi_i; \\
a^{(0)}_{\Pi^i} &= a^{(0)}_{A^0} = 0
\end{aligned}
\qquad (7.14)
$$

e a matriz simplética de iteração-zero é:

$$
f^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -g_{ij} & 0 \\ g_{ji} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \qquad (7.15)
$$

que é uma matriz singular e tem um modo-zero dado por:

$$
\nu^{(0)} = (0_{1X3} \qquad 0_{1X3} \qquad 1), \qquad (7.16)
$$

Se contrairmos esse modo-zero com o gradiente do potencial simplético, gera o vínculo:

$$\int d^3y\nu^{(0)}(\vec{x})\frac{\delta V^{(0)}(\vec{y})}{\delta\xi^{(0)}(\vec{x})} \equiv \Omega^{(0)}(\vec{x}) \tag{7.17}$$

que é

$$\begin{aligned}\Omega^{(0)}(\vec{x}) &\equiv -\int d^3y(\partial_x^i\Pi_i(\vec{x}) + m^2A_0(\vec{x}) + \frac{1}{4}p^iF^{jk}\varepsilon_{jki})\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \\ &\equiv \partial_x^i\Pi_i(\vec{x}) + m^2A_0(\vec{x}) + \frac{1}{4}p^iF^{jk}\varepsilon_{jki} \end{aligned}\tag{7.18}$$

identificado como a lei de Gauss. Retornando este vínculo na parte canônica da densidade Lagrangeana de primeira ordem $L^{(0)}$, usando um multiplicador de Lagrange (γ), a densidade Lagrangeana de primeira-iteração é obtida como:

$$L^{(1)} = \Pi^i\dot{A}_i + \Omega_i\dot{\gamma} - V^{(1)}, \tag{7.19}$$

com $V^{(1)} = V^{(0)} \mid_{\Omega_1=0}$

$$\begin{aligned}V^{(1)} &= -\frac{1}{2\beta}\Pi_i\Pi^i + \frac{\beta}{4}F_{ij}F^{ij} - \frac{1}{2\beta}p_iA_j\Pi_k\varepsilon^{ijk} + \frac{m^2}{2}A_0A^0 - \\ &- \frac{m^2}{2}A_iA^i - \frac{1}{8\beta}p^iA_j(p_jA^i - p_iA^j) + \frac{1}{4}p^0A^iF^{jk\varepsilon_{ijk}}. \end{aligned}\tag{7.20}$$

As novos campos simpléticas são $\xi^{(1)} = (A^i, \Pi^i, A^0, \gamma)$ e os momentos são:

$$\begin{aligned} a_{A^i}^{(1)} &= \Pi_i; \\ a_{\Pi^i}^{(1)} &= a_{A^0}^{(1)} = 0; \\ a_{\gamma}^{(1)} &= \Omega^{(0)}. \end{aligned}\tag{7.21}$$

Já, a correspondente matriz simplética é:

$$
f^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & f_{A^i(\vec{x})\Pi^j(\vec{y})} & 0 & f_{A^i(\vec{x})\gamma(\vec{y})} \\ f_{\Pi^i(\vec{x})A^j(\vec{y})} & 0 & 0 & f_{\Pi^i(\vec{x})\gamma(\vec{y})} \\ 0 & 0 & 0 & f_{A^0(\vec{x})\gamma(\vec{y})} \\ f_{\gamma(\vec{x})A^j(\vec{y})} & f_{\gamma(\vec{x})\Pi^j(\vec{y})} & f_{\gamma(\vec{x})A^0(\vec{y})} & 0 \end{pmatrix} \tag{7.22}
$$

onde

$$
f^{(1)}_{A^i(\vec{x})\Pi^j(\vec{y})} = -g_{ij}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \tag{7.23}
$$

$$
f^{(1)}_{\Pi^i(\vec{x})A^j(\vec{y})} = -\left[f_{A^i(\vec{x})\Pi^j(\vec{y})}\right]^T = g_{ji}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}); \tag{7.24}
$$

$$
\begin{aligned}
f^{(1)}_{A^i(\vec{x})\gamma(\vec{y})} &= \frac{\delta}{\delta A^i(\vec{x})}(\partial^l_y \Pi_l(\vec{y}) + m^2 A_0(\vec{y}) + \frac{1}{4}p^n F^{ms}(\vec{y})\varepsilon_{nms}) \\
&= \frac{1}{4}p^n(\delta^s_i \partial^m_y \delta(x-y) - \delta^m_i \partial^s_y \delta(x-y))\varepsilon_{nms} \\
&= \frac{1}{4}p^n \partial^m_y \delta^3(\vec{x}-\vec{y})\varepsilon_{nmi} - \frac{1}{4}p^n \partial^s_y \delta^3(\vec{x}-\vec{y})\varepsilon_{nis} \\
&= -\frac{1}{4}p^n \partial^m_y \delta^3(\vec{x}-\vec{y})\varepsilon_{nim} - \frac{1}{4}p^n \partial^s_y \delta^3(\vec{x}-\vec{y})\varepsilon_{nis} \\
&= -\frac{1}{2}p^n \partial^m_y \delta^3(\vec{x}-\vec{y})\varepsilon_{nim} \\
f^{(1)}_{\gamma(\vec{x})A^i(\vec{y})} &= -\left[f_{A^i(\vec{x})\gamma(\vec{y})}\right]^T = \frac{1}{2}p^n \partial^m_x \delta^3(\vec{x}-\vec{y})\varepsilon_{njm};
\end{aligned} \tag{7.25}
$$

$$
\begin{aligned}
f^{(1)}_{\Pi^i(\vec{x})\gamma(\vec{y})} &= \frac{\delta}{\delta \Pi^i(\vec{x})}(\partial^y_l \Pi^l(\vec{y})) \\
&= \partial^y_l \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \\
f^{(1)}_{\gamma(\vec{x})\Pi^i(\vec{y})} &= -\left[f_{\Pi^i(\vec{x})\gamma(\vec{y})}\right]^T = -\partial^x_l \delta^3(\vec{x}-\vec{y});
\end{aligned} \tag{7.26}
$$

$$
\begin{aligned}
f^{(1)}_{A^0(\vec{x})\gamma(\vec{y})} &= m^2\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \\
f^{(1)}_{\gamma(\vec{y})A^0(\vec{x})} &= -\left[f_{A^0(\vec{x})\gamma(\vec{y})}\right]^T = -m^2\delta^3(\vec{x}-\vec{y}).
\end{aligned} \tag{7.27}
$$

Portanto,

$$
f^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -g_{ij}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) & 0 & f_{A^i(\vec{x})\gamma(\vec{y})} \\ g_{ji}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) & 0 & 0 & \partial_i^y\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \\ 0 & 0 & 0 & m^2\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \\ f_{\gamma(\vec{x})A^j(\vec{y})} & -\partial_j^x\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) & -m^2\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) & 0 \end{pmatrix} \tag{7.28}
$$

Esta matriz é não-singular, como resolvido pelo formalismo simplético, os parênteses generalizados entre os campos de espaço de fase são adquiridos pela matriz inversa[1], os quais são identificados como:

$$
\{A^i(\vec{x}), A^j(\vec{y})\}_* = 0; \tag{7.29}
$$

$$
\{A_i(\vec{x}), \Pi^j(\vec{y})\}_* = g^{ij}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}); \tag{7.30}
$$

$$
\{A^0(\vec{x}), A^j(\vec{y})\}_* = \frac{1}{m^2}\partial_y^j\delta^3(\vec{x}-\vec{y}); \tag{7.31}
$$

$$
\{A^0(\vec{x}), \Pi^j(\vec{y})\}_* = \frac{1}{2m^2}\varepsilon^{jnm}p_n\partial_m^y\delta^3(\vec{x}-\vec{y}). \tag{7.32}
$$

Como dito acima, a análise simplética foi o primeiro passo do Formalismo de Imersão (FI). O próximo é a introdução do campo WZ em ordem de prosseguir com a dualização. Este será feito na próxima seção.

7.2 O Modelo dual equivalente de MPCS

Agora o espaço de fase será estendido com a inserção dos campos WZ. Primeiramente, mudaremos a Lagrangeana, equação (7.19), introduzindo duas funções arbitrárias, $\Psi \equiv \Psi(A^i, \Pi^i, A^0)$ e $G \equiv G(A^i, \Pi^i, A^0, \eta)$, com campo WZ,

[1] Veja o apêndice.

$$\widetilde{L} = \Pi_i \dot{A}^i + \Psi \dot{\eta} - \widetilde{V}^{(0)}, \tag{7.33}$$

onde

$$\begin{aligned}
\widetilde{V}^{(0)} &= V^{(0)} + G \\
&= -A_0 \left(\partial^i \Pi_i + m^2 A_0 + \frac{1}{4} p^i \varepsilon_{jki} F^{jk} \right) - \frac{1}{2\beta} p_i A_j \Pi_k \varepsilon_{ijk} - \frac{1}{2\beta} \Pi_l \Pi^l + \frac{\beta}{4} F_{ij} F^{ij} + \\
&+ \frac{m^2}{2} A_0 A^0 - \frac{m^2}{2} A_i A^i - \frac{1}{8\beta} p^i A^j \left(p_j A^i - p_i A_j \right) + \frac{1}{4} p^0 A^i \varepsilon_{ijk} F^{jk} + G.
\end{aligned} \tag{7.34}$$

e G é uma função expressa como:

$$G(A^i, \Pi^i, A^0, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{(n)}, \quad G^{(n)} \propto \eta^n. \tag{7.35}$$

A função arbitrária satisfaz a seguinte condição de contorno:

$$G(A^i, \Pi^i, A^0, \eta = 0) = 0 \tag{7.36}$$

Os campos simpléticas foram estentidas , $\widetilde{\xi}^{(0)} = (A^i, \Pi^i, A^0, \eta)$, e a matriz simplética torna-se:

$$\widetilde{f}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -g_{ij}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) & 0 & \frac{\delta\Psi(\vec{y})}{\delta A^i(\vec{x})} \\ g_{ji}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) & 0 & 0 & \frac{\delta\Psi(\vec{y})}{\delta \Pi^i(\vec{x})} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\delta\Psi(\vec{y})}{\delta A^0(\vec{x})} \\ -\frac{\delta\Psi(\vec{x})}{\delta A^j(\vec{y})} & -\frac{\delta\Psi(\vec{x})}{\delta \Pi^j(\vec{y})} & -\frac{\delta\Psi(\vec{x})}{\delta A^0(\vec{y})} & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.37}$$

Esta matriz singular tem modo-zero, que pode ser resolvido convenientemente como:

$$\nu^{(0)} = (\partial^i \qquad 0 \qquad \partial^0 \qquad 1). \tag{7.38}$$

Contraindo este modo-zero com a matriz simplética acima, um conjunto de equações diferenciais são obtidas:

$$\int d^3x \left[\frac{\delta\Psi(\vec{x})}{\delta A^j(\vec{y})}\right] = 0, \tag{7.39}$$

$$\int d^3x \left[g_{ij}\partial^i\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) + \frac{\delta\Psi(\vec{x})}{\delta\Pi^j(\vec{y})}\right] = 0, \tag{7.40}$$

$$\int d^3x \left[\frac{\delta\Psi(\vec{x})}{\delta A^0(\vec{y})}\right] = 0, \tag{7.41}$$

$$\int d^3x \left[\partial^i\frac{\delta\Psi(\vec{y})}{\delta A^i(\vec{x})} + \partial^0\frac{\delta\Psi(\vec{y})}{\delta A^0(\vec{x})}\right] = 0. \tag{7.42}$$

Portanto, encontramos que,

$$\Psi(\vec{x}) = -\partial^i\Pi_i(\vec{x}) \tag{7.43}$$

com matriz simplética correspondente a:

$$\widetilde{f}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -g_{ij} & 0 & 0 \\ g_{ji} & 0 & 0 & -\partial_i^y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_j^x & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x}-\vec{y}). \tag{7.44}$$

Então, a densidade Lagrangeana torna:

$$\widetilde{L}^{(0)} = \Pi_i\dot{A}^i - \partial^i\Pi_i\dot{\eta} - \widetilde{V}^{(0)}, \tag{7.45}$$

sendo o $\widetilde{V}^{(0)}$ dado por (7.34).

Começaremos, passo final de Formalismo Simplético de Imersão, impondo que a contração do modo-zero,equação (7.38), como o gradiente do potencial simplético gera um resultado identicamente nulo, ou seja,

$$\int d^3y\widetilde{\nu}^{(0)}(\vec{x})\frac{\delta\widetilde{V}^{(0)}(\vec{y})}{\delta\widetilde{\xi}^{(0)}(\vec{x})} = 0. \tag{7.46}$$

Desta condição, a seguinte equação diferencial é obtida:

$$\int d^3y \left\{ \partial_x^l \left[\frac{\delta \widetilde{V}^{(0)}(\vec{y})}{\delta A^l(\vec{x})} \right] + \partial_x^0 \left[\frac{\delta \widetilde{V}^{(0)}(\vec{y})}{\delta A^0(\vec{x})} \right] + 1 \cdot \left[\frac{\delta \widetilde{V}^{(0)}(\vec{y})}{\delta \eta(\vec{x})} \right] \right\} = 0. \tag{7.47}$$

onde

$$\begin{aligned} \left[\frac{\delta \widetilde{V}^{(0)}(\vec{y})}{\delta A^l(\vec{x})} \right] &= -\frac{1}{4} p^i \varepsilon_{jki} A_0 \frac{\delta F^{jk}(\vec{y})}{\delta A^l(\vec{x})} - \frac{1}{2\beta} p^i \Pi^k \varepsilon_{ilk} \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) + \frac{\beta}{2} F_{ij}(\vec{y}) \frac{\delta F^{ij}(\vec{y})}{\delta A^l(\vec{x})} - \\ &- m^2 A_l(\vec{y}) \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) - \frac{1}{8\beta} p_i \left[p_l A^i(\vec{y}) - p_i A^l(\vec{y}) \right] \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) - \\ &- \frac{1}{8\beta} p^l A_j(\vec{y}) p_j \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) + \frac{1}{8\beta} p^i A_l(\vec{y}) p_i \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) + \\ &+ \frac{1}{4} p^0 F^{jk}(\vec{y}) \varepsilon_{ljk} + \frac{1}{4} p^0 \varepsilon_{ijk} \frac{\delta F^{jk}(\vec{y})}{\delta A^l(\vec{x})} A^i \end{aligned} \tag{7.48}$$

$$\left[\frac{\delta \widetilde{V}^{(0)}(\vec{y})}{\delta A^0(\vec{x})} \right] = -\partial_y^i \Pi_i(\vec{y}) \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) - m^2 A_0(\vec{y}) \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) - \frac{1}{4} p^i \varepsilon_{jki} F^{jk}(\vec{y}) \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \tag{7.49}$$

$$\left[\frac{\delta \widetilde{V}^{(0)}(\vec{y})}{\delta \eta(\vec{x})} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta G^n(\vec{y})}{\delta \eta(\vec{x})} \tag{7.50}$$

Reescrevendo, os termos, separadamente, da equação (7.48) como:

$$\frac{\delta F^{jk}(\vec{y})}{\delta A^l(\vec{x})} = \delta_l^k \partial_y^j \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) - \delta_l^j \partial_y^k \delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \tag{7.51}$$

$$F_{ij}(\vec{y}) \frac{\delta F^{ij}(\vec{y})}{\delta A^l(\vec{x})} = F_{il}(\vec{y}) \partial_y^i \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) - F_{lj}(\vec{y}) \partial_y^j \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) = 2F_{il}(\vec{y}) \partial_y^i \delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \tag{7.52}$$

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\delta F^{jk}(\vec{y})}{\delta A^l(\vec{x})} = \varepsilon_{ijl} \partial_y^j \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) - \varepsilon_{ilk} \partial_y^k \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) = 2\varepsilon_{ijl} \partial_y^j \delta^3(\vec{x}-\vec{y}). \tag{7.53}$$

Assim, a equação (7.48) assume a seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{\delta\widetilde{V}^{(0)}(\vec{y})}{\delta A^l(\vec{x})}\right] = \\
+ &\ \frac{1}{2}p^i\partial_y^j A_0(\vec{y})\varepsilon_{ijl}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) - \frac{1}{2\beta}p^i\Pi^k\varepsilon_{ilk}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})_\beta\partial_y^i F_{ij}(\vec{y})\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) - \\
- &\ m^2 A_l(\vec{y})\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) - \frac{1}{4\beta}p_l A^i(\vec{y})p_i\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) + \frac{1}{4\beta}p_i A^l(\vec{y})p^i\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) + \\
+ &\ \frac{1}{2}p^0 A^i(\vec{y})\varepsilon_{ijl}\partial_y^j\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) + \frac{1}{4}p^0 F^{jk}\varepsilon_{ljk}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}).
\end{aligned} \tag{7.54}
$$

Retornando a relação (7.47), calcularemos todos os termos corrigidos em ordem de η. Primeiramente, o termo de correção linear em η,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta G^1(\vec{y})}{\delta\eta(\vec{x})} + \partial_x^l\left[\frac{1}{2}p^i\partial_y^j A_0(\vec{y})\varepsilon_{ijl} - \frac{1}{2\beta}p^i\Pi^k\varepsilon_{ilk} - \beta\partial_y^i F_{ij}(\vec{y}) - m^2 A_l(\vec{y})\right. \\
&\left.-\frac{1}{4\beta}p_l A^i(\vec{y})p_i + \frac{1}{4\beta}p_i A^l(\vec{y})p^i + \frac{1}{4}p^0 F^{jk}(\vec{y})\varepsilon_{ljk} - \frac{1}{2}p^0\partial_y^j A^i(\vec{y})\varepsilon_{ijl}\right]\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) + \\
&-\partial_x^0\left[\partial_y^i\Pi_i(\vec{y}) + m^2 A_0(\vec{y}) + \frac{1}{4}p^i\varepsilon_{jki}F^{jk}(\vec{y})\right]\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) = 0
\end{aligned} \tag{7.55}
$$

Analogamente, a equação (7.43),o termo de correção linear em η,é dado por:

$$
\begin{aligned}
G^{(1)} \;=\; & -\partial^l\left[\frac{1}{2}p^i\partial^j A^0(\vec{x})\varepsilon_{ijl} - \frac{1}{2\beta}p^i\Pi^k\varepsilon_{ilk} - \beta\partial^i F_{il}(\vec{x}) - m^2 A_l(\vec{x})\right. \\
& \left.-\frac{1}{4\beta}(p_l A^i(\vec{x})p_i - p_i A^l(\vec{x})p^i) + \frac{1}{4}p^0 F^{jk}(\vec{x})\varepsilon_{jkl} - \frac{1}{2}p^0\partial^i A^i(\vec{x})\varepsilon_{ijl}\right]\eta(\vec{x}) + \\
& +\partial^0[\partial^i\Pi_i(\vec{x}) + m^2 A_0(\vec{x}) + \frac{1}{4}p^i F^{jk}(\vec{x})\varepsilon_{ijk}]\eta(\vec{x})
\end{aligned} \tag{7.56}
$$

e por uma integração por partes, nos permite reescrever a equação acima sob a forma:

$$
\begin{aligned}
G^{(1)} \;=\; & \left[\frac{1}{2}p^i\partial^j A^0(\vec{x})\varepsilon_{ijl} - \frac{1}{2\beta}p^i\Pi^k\varepsilon_{ilk} - \beta\partial^i F_{il}(\vec{x}) - m^2 A_l(\vec{x}) +\right. \\
& \left.-\frac{1}{4\beta}(p_l A^i(\vec{x})p_i - p_i A^l(\vec{x})p^i) + \frac{1}{4}p^0 F^{jk}(\vec{x})\varepsilon_{jkl} - \frac{1}{2}p^0\partial^i A^i(\vec{x})\varepsilon_{ijl}\right]\partial^l\eta(\vec{x}) + \\
& -\left[\partial^i\Pi_i(\vec{x}) + m^2 A_0(\vec{x}) + \frac{1}{4}p^i F^{jk}(\vec{x})\varepsilon_{ijk}\right]\partial^0\eta(\vec{x})
\end{aligned} \tag{7.57}
$$

Substituindo o primeiro termo da equação acima pela (7.4), temos:

$$\begin{aligned}
G^{(1)} &= \left[\frac{1}{2}p^i\partial^j A^0(\vec{x})\varepsilon_{ijl} + \frac{1}{2}p^i F^{0k}(\vec{x})\varepsilon_{ilk} - \beta\partial^i F_{il}(\vec{x}) - \right. \\
&\left. -m^2 A_l(\vec{x}) + \frac{1}{4}p^0 F^{jk}(\vec{x})\varepsilon_{jkl} - \frac{1}{2}p^0\partial^j A^i(\vec{x})\varepsilon_{ijl}\right]\partial^l\eta - \\
&-[\partial^i\Pi_i(\vec{x}) + m^2 A_0(\vec{x}) + \frac{1}{4}p^i F^{jk}(\vec{x})\varepsilon_{ijk}]\partial^0\eta. \qquad (7.58)
\end{aligned}$$

Levando este resultado no potencial simplético, equação (7.34), obtemos:

$$\widetilde{V}^{(1)} = V^{(0)} + G^{(1)} + \sum_{n=2}^{\infty} G^{(n)}. \qquad (7.59)$$

Contraindo o novo potencial simplético $\widetilde{V}^{(1)}$ com o modo-zero, equação (7.38), a fim de encontrarmos o termo de correção quadrático, temos:

$$\begin{aligned}
&\int d^3y \left\{\partial_x^m\left[\frac{\delta V^{(0)}(\vec{y})}{\delta A^m(\vec{x})}\right] + \partial_x^m\left[\frac{\delta G^{(1)}(\vec{y})}{\delta A^m(\vec{x})}\right] + \partial_x^0\left[\frac{\delta V^{(0)}(\vec{y})}{\delta A^0(\vec{x})} + \right]\right. \\
&\left. +\partial_x^0\left[\frac{\delta G^{(1)}(\vec{y})}{\delta A^0(\vec{x})}\right] + 1\cdot\left[\frac{\delta G^{(1)}(\vec{y})}{\delta\eta(\vec{x})}\right] + 1\cdot\left[\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\delta G^{(n)}(\vec{y})}{\delta\eta(\vec{x})}\right]\right\} = 0 \qquad (7.60)
\end{aligned}$$

Notamos que o primeiro, terceiro e quinto termo se cancelam. Após, a substituição de cada termo correspondente na equação acima e o uso da (7.58), chegamos a:

$$\begin{aligned}
\left[\partial_x^m\frac{\delta G^{(1)}(\vec{y})}{\delta A^m(\vec{x})}\right] &= \left[-\beta\partial_i^y(\delta_m^l\partial_y^i\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) - \delta_m^i\partial_y^l\delta^3(\vec{x}-\vec{y}))\partial_l^y\eta(\vec{y}) + \right] \\
&+ \frac{1}{2}p^i\partial_y^0\delta_m^k\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\varepsilon_{ilk}\partial_y^l\eta(\vec{y}) - m^2\partial_m^y\eta(\vec{y})\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) + \\
&+ \frac{1}{2}p^0\partial_y^l\eta(\vec{y})\varepsilon_{ljm}\partial_y^j\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) + \frac{1}{2}p^0\partial_y^l\eta(\vec{y})\varepsilon_{mjl}\partial_y^j\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) - \\
&- \frac{1}{2}p^i\partial_y^0\eta(\vec{y})\varepsilon_{ijm}\partial_y^i\delta^3(\vec{x}-\vec{y}); \qquad (7.61)
\end{aligned}$$

$$\left[\frac{\delta G^{(1)}(\vec{y})}{\delta A^0(\vec{x})}\right] = \left[\frac{1}{2}p^i\partial_y^j\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\varepsilon_{ijl}\partial_y^l\eta(\vec{y}) - \frac{1}{2}p^i\partial_y^k\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\varepsilon_{ilk}\partial_y^l\eta(\vec{y})\right.$$

$$- m^2\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\partial_y^0\eta(\vec{y})\Bigg]; \tag{7.62}$$

$$\left[\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\delta G^{(n)}(\vec{y})}{\delta\eta(\vec{x})}\right] = \left[\frac{\delta G^{(2)}(\vec{y})}{\delta\eta(\vec{x})}\right]. \tag{7.63}$$

Retornando as equações (7.60), temos

$$\int d^3y\left\{-m^2\partial_m^y\eta(\vec{y})\partial_x^m\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) - m^2\partial_y^0\eta(\vec{y})\partial_0^x\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) + \frac{\delta G^{(2)}(\vec{y})}{\delta\eta(\vec{x})}\right\}, \tag{7.64}$$

e finalmente, o termo de correção de segunda-ordem é:

$$G^{(2)} = -\frac{m^2}{2}\partial_m\eta\partial^m\eta - \frac{m^2}{2}\partial_0\eta\partial^0\eta. \tag{7.65}$$

Percebemos que esse termo de correção de segunda-ordem tem dependência somente nos campos WZ, portanto os demais termos de correção $G^{(n)}$ para $n \geq 3$ são nulos. Consequentemente, o potencial simplético, equação (7.57),torna-se:

$$\begin{aligned}\widetilde{V}^{(1)} = V^{(0)} &+ \left[\frac{1}{2}p^i\partial^jA^0(\vec{x})\varepsilon_{ijl} + \frac{1}{2}p^iF^{0k}(\vec{x})\varepsilon_{lki} - \beta\partial^iF_{il}(\vec{x}) - \right.\\ &\left. -m^2A_l(\vec{x}) + \frac{1}{4}p^0F^{jk}(\vec{x})\varepsilon_{jkl} - \frac{1}{2}p^0\partial^jA^i(\vec{x})\varepsilon_{ijl}\right]\partial^l\eta + \\ &+ \left[-\beta\partial^iF_{0i} - \frac{1}{2}p^n\partial^iA^m\varepsilon_{inm} + m^2A_0 + \frac{1}{4}p^s\partial^jA^k\varepsilon_{sjk} - \right.\\ &\left. -\frac{1}{4}p^s\partial^kA^j\varepsilon_{sjk}\right]\partial^0\eta - \frac{m^2}{2}(\partial_m\eta\partial^m\eta + \partial_0\eta\partial^0\eta).\end{aligned} \tag{7.66}$$

Reecrevendo o quinto e o sexto termo entre colchetes de $\partial^l\eta$ como:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}p^0F^{jk}(\vec{x})\varepsilon_{jkl} - \frac{1}{2}p^0\partial^jA^i(\vec{x})\varepsilon_{ijl} &= \frac{1}{2}p^0\partial^jA^k(\vec{x})\varepsilon_{jkl} - \frac{1}{2}p^0\partial^iA^j(\vec{x})\varepsilon_{ijl}\\ &= p^0\partial^jA^k(\vec{x})\varepsilon_{jkl}.\end{aligned} \tag{7.67}$$

Portanto, a densidade Lagrangeana de calibre de primeira-ordem, equação (7.33), pode ser escrita sob a forma:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{L} &= L - \partial^n \left[-\beta F_{0n} - \frac{1}{2} p^f A^h \varepsilon_{fhm} \right] \partial^0 \eta - \\
&- \left[\frac{1}{2} p^r \partial^j A^0(\vec{x}) \varepsilon_{rjl} + \frac{1}{2} p^i F^{0k}(\vec{x}) \varepsilon_{lki} - \beta \partial^i F_{il} - m^2 A_l + p^0 \partial^j A^k \varepsilon_{jkl} \right] \partial^l \eta + \\
&+ \left[-\beta \partial^i F_{0i} + m^2 A_0 - p^n \partial^i A^m \varepsilon_{inm} \right] \partial^0 \eta + \frac{m^2}{2} (\partial_m \eta \partial^m \eta + \partial_0 \eta \partial^0 \eta). \qquad (7.68)
\end{aligned}
$$

sendo

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} p^r \partial^j A^0(\vec{x}) \varepsilon_{rjl} - \frac{1}{2} p^f \partial^0 A^h \varepsilon_{fhl} + \frac{1}{2} p^i F^{0k} \varepsilon_{lki} &= \frac{1}{2} p^r (\partial^j A^0 - \partial^0 A^j) \varepsilon_{rjl} + \frac{1}{2} p^i F^{0k} \varepsilon_{kil} \\
&= p^i F^{k0} \varepsilon_{ikl}. \qquad (7.69)
\end{aligned}
$$

Logo, a equação (7.68) torna:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{L} &= L + \left[m^2 A_l + \beta \partial^0 F_{0l} + \beta \partial^i F_{il} - p^0 \partial^j A^k \varepsilon_{jkl} - p^i F^{k0} \varepsilon_{ikl} \right] \partial^l \eta + \\
&+ \left[m^2 A_0 + \beta \partial^i F_{i0} - p^n \partial^i A^m \varepsilon_{inm} \right] \partial^0 \eta + \frac{m^2}{2} (\partial_m \eta \partial^m \eta + \partial_0 \eta \partial^0 \eta) \qquad (7.70)
\end{aligned}
$$

onde L é dado em (7.1).

Se substituimos a corrente de Noether, visto a relação (A.13), na equação (7.70), cujos os valores de suas componentes são:

$$
\begin{aligned}
J_l &= m^2 A_l + \beta \partial^0 F_{0l} + \beta \partial^i F_{il} - p^0 \partial^j A^k \varepsilon_{jkl} - p^i F^{k0} \varepsilon_{ikl} \\
J_0 &= m^2 A_0 + \beta \partial^i F_{i0} - p^n \partial^i A^m \varepsilon_{inm}, \qquad (7.71)
\end{aligned}
$$

podemos escrever $\widetilde{L}$ como:

$$
\widetilde{L} = L + J_\mu \partial^\mu \eta + \frac{m^2}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta. \qquad (7.72)
$$

Resolvendo em $\partial_\mu \eta$, chegamos a equação de movimento:

$$J_\mu + m^2 \partial_\mu \eta = 0 \tag{7.73}$$

ou ainda,

$$\partial_\mu \eta = -\frac{1}{m^2} J_\mu. \tag{7.74}$$

Substituindo as equações (7.74) e (7.1) na (7.72), obtemos, analogamente ao MDN, a sua forma invariante de calibre:

$$\begin{aligned} L &= \frac{\beta}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} p^\alpha (\partial^\beta A^\nu) A^\nu - \frac{1}{2m^2} (\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} p^\alpha (\partial^\beta A^\nu))^2 A^\nu - \\ &- \frac{1}{2m^2} \beta (\partial^\mu F_{\mu\nu}) - \frac{\beta^2}{2m^2} (\partial_\mu F^{\mu\nu})^2 + \frac{\beta}{m^2} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} p^\alpha (\partial^\beta A^\nu)(\partial_\rho F_{\rho\mu}). \end{aligned} \tag{7.75}$$

que é o equivalente dual para a ação (7.1). Vemos que, como o modo-zero dado (7.38) é arbitrário, qualquer outro modo-zero para a matriz simplética (7.37) nos levará a uma nova ação dual equivalente. Acreditamos que essa seja uma excelente vantagem para FSI quando comparada com o MDN.

Para completar a comparação entre ambos os métodos, como bem conhecido pela literatura sobre o Formalismo Simplético, o modo-zero é o mesmo gerador da transformação infinitesimal de calibre de (7.1). E assim, usando o modo-zero, equação (7.38), como gerador da transformação infinitesimal de calibre dado por $\delta\mathcal{O} = \epsilon \widetilde{\nu}^{(0)}$, temos:

$$\delta A^i(\vec{x}) = \epsilon(\vec{x}) \partial^i = -\partial^i \epsilon(\vec{x}), \tag{7.76}$$

$$\delta \Pi^i(\vec{x}) = 0, \tag{7.77}$$

$$\delta A^0(\vec{x}) = \epsilon(\vec{x}) \partial^0 = -\partial^0 \epsilon(\vec{x}), \tag{7.78}$$

$$\delta\eta(\vec{x}) = \epsilon(\vec{x}), \tag{7.79}$$

onde $\epsilon(\vec{x})$ é um parâmetro infinitesimal dependente do tempo. Consequentemente, a hamiltoniana (que é $\int \widetilde{V}^{(0)}(\vec{y})d^3y$) deve ser invariante sob estas transformações, $\delta\widetilde{H}^{(0)} = 0$, devido a equação (7.46).

É importante mencionar que mais que uma simetria WZ estará revelada (veja [13] para uma revisão), mostrando que o modelo estudado não tem uma única descrição WZ invariante de calibre, mas uma família de representação dinâmica equivalente WZ invariante de calibre.

Capítulo 8

Conclusão e Perspectivas

Neste trabalho foi abordado um tema atual, a cerca das Teorias Duais [27], que, resumidamente, pode ser descrita com duas formulações matemáticas equivalentes para descrever um sistema. A existência de duas formas distintas de descrever um mesmo sistema físico pode sugerir um erro. De alguma forma, algum aspecto ou princípio foge, resultando em um aparente ambiguidade na descrição do sistema. De fato, já experimentou-se sensação semelhante com a mecânica quântica, em que descrições aparentemente distintas, onda/partícula, se complentam para uma melhor visão sobre o fenômeno. A compreensão das relações entre as diferentes formas de descrever um sistema tem-se mostrado muito útil em diversas escalas de energia, desde aplicações em máteria condensada, até explicações da teoria de supercordas.

A Dualidade aqui mencionada foi obtida via Formalismo Simplético de Imersão (FSI), desenvolvido por C. Neves e W. Oliveira em 2001 [12]. Esta técnica consiste na imersão de uma teoria de segunda classe em dual com invariância de calibre. Baseia-se no FS e na extensão do espaço de configuração através das variáveis WZ [10]. Neste contexto, obteve-se uma descrição lagrangeana invariante de calibre equivalente dual para a eletrodinâmica massiva, definida em (3+1)D, o modelo de Maxwell-Proca-Chern-Simons. A partir de uma escolha simples e direta dos geradores das transformações de calibre, o modo-zero, pôde-se confrontar os resultados obtidos com aqueles já conhecidos na literatura, usando outras técnicas (vide o apêndice A). No entanto, é possível com o FSI obter uma família de representações dinâmicas duais para mesma teoria. É importante enfatizar aqui que o FSI já havia sido aplicado em diversos sistemas [13, 29], não só reproduzindo resultados conhecidos, mas também revelando novos resultados dos sistemas estudados. Espera-se que o futuro desenvolvimento desse método conduza a soluções dos problemas atuais, como a introdução de simetrias internas e a unificação das teorias de campos. Essa esperança justifica-se pelo fato do Método Simplético tratar de forma mais moderna e direta da estrutura do espaço de fase que o método de Dirac. Sendo em particular mais econômico, é portanto natural considerar que seus princípios demonstrarem, consideravelmente, mais convenienência, ou mesmo mais eficácia, que as abordagens predecessoras para resolução de problemas por meio da imersão.

Para finalizar, é necessário mencionar algumas questões que nos servirão como objetos de estudo futuro. Primeiro é uma possível análise da versão dual e invariante de calibre da teoria de Maxwell-Proca, através da teoria de Maxwell-Podolsky. O termo de Podolsky - corresponde o quinto termo da equação (7.75) - envolve derivadas de ordem-superior e minimiza a singularidade ultravioleta. Por sua vez, a eletrodinânica de Podolsky apresenta-se mais atraente, pois é uma teoria que propaga um fóton massivo sem violar as simetrias em questão. Além disso, tem um papel fundamental na discussão a respeito da compatibilidade do monopólo magnético e fóton massivo. O que sugere a extensão essa abordagem ao modelo Maxwell-Podolsky, sob análise espectral por meio da matriz residual de cada pólo do propagador. Os pólos nos darão uma relação entre energia e o momento, e estão associados com a partícula massiva. A matriz residual nos dará a informação sobre os graus de liberdade com a polarização.

Outro ponto, que seguirá no contexto de imersão via FS, será sua aplicação em teorias supersimétricas, o que provavelmente levará a uma extensão desse método, pois as variáveis grassmannianas (graus de liberdade fermiônicos) estarão presentes nas teorias. Espera-se, em consequência, vir mostrar a equivalência do FSI com o chamado Formalismo BFFT [30] (Batalin-Fradkin-Fradkina-Tyutin), cujo o procedimento geral consiste nas transformações de teorias com vínculos de segunda classe para primeira. Portanto, o BFFT e o método apresentado (FSI) obtêm teorias de calibre a partir da assimetria.

Apêndice A

A construção de Lagrangeana invariante: Método de Dualização de Noether

Seguiremos os principais passos de [16], tratando a dualização da densidade lagrangeana massiva de Maxwell-Chern- Simons em quatro dimensões com MDN. A ação de MCS é dada por:

$$L^{(0)} = -\frac{\beta}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu - \frac{1}{4} p_\alpha A_\beta \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu}. \tag{A.1}$$

e a respeito da simetria de calibre é,

$$\begin{aligned} A_\alpha &\longrightarrow A_\alpha + \partial_\alpha \eta, \\ \delta A_\alpha &= \partial_\alpha \eta. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Tomando a primeira variação dessa densidade Lagrangeana, visto cada termo separadamente, retornemos a equação (2.64):

$$F_{\mu\nu} \;=\; g_{\mu\alpha} \partial^\alpha g_{\nu\beta} A^\beta - g_{\nu\beta} \partial^\beta g_{\mu\alpha} A^\alpha$$

$$= \quad g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta}(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) \tag{A.3}$$

e

$$\frac{\partial(\partial^\alpha A^\beta)}{\partial(\partial^\rho A^\sigma)} = \delta^\alpha_\rho \delta^\beta_\sigma. \tag{A.4}$$

Escrevendo a equação de Euler-Lagrange para este campo A^σ,

$$\frac{\partial L^{(0)}}{\partial A^\sigma} = \partial^\rho \left[\frac{\partial L^{(0)}}{\partial(\partial^\rho A^\sigma)} \right] \tag{A.5}$$

onde o $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ é o tensor métrico e válida a convenção de soma de Einstein, e, δ^α_ρ representa o delta de Kronecker. O primeiro termo da densidade Lagrangeana, equação (A.1), assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^{(0)}}{\partial(\partial^\rho A^\sigma)} \quad &= \quad -\frac{\beta}{4} \left[g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \left(\delta^\alpha_\rho \delta^\beta_\sigma - \delta^\beta_\rho \delta^\alpha_\sigma \right) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - \right. \\ & \left. -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \left(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha \right) \left(\delta^\mu_\beta \delta^\nu_\sigma - \delta^\nu_\rho \delta^\mu_\sigma \right) \right] \end{aligned} \tag{A.6}$$

após alguns cálculos:

$$\frac{\partial L^{(0)}}{\partial(\partial^\rho A^\sigma)} = -\beta(\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho). \tag{A.7}$$

Contudo,

$$\partial^\rho \left[\frac{\partial L^{(0)}}{\partial(\partial^\rho A^\sigma)} \right] = -\beta\{\partial^\rho \left[\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho\right]\} = \beta(\partial^\rho F_{\rho\sigma}). \tag{A.8}$$

Já, o segundo termo torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^{(0)}}{\partial A^\sigma} \quad &= \quad \frac{1}{2} m^2 \left[\frac{\partial}{\partial A^\sigma} (g_{\nu\mu} A^\mu A^\nu) \right] \\ &= \quad m^2 A_\sigma \end{aligned} \tag{A.9}$$

e o terceiro,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L^{(0)}}{\partial A^{\sigma}} &= -\frac{1}{4}p^{\alpha}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\frac{\partial}{\partial A^{\sigma}}\left[A^{\beta}\left(\partial^{\mu}A^{\nu}-\partial^{\nu}A^{\mu}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{4}p^{\alpha}\varepsilon_{\alpha\sigma\mu\nu}\partial^{\mu}A^{\nu}+\frac{1}{4}p^{\alpha}\varepsilon_{\alpha\sigma\nu\mu}\partial^{\mu}A^{\nu}+ \\
&+ \frac{1}{4}p^{\alpha}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\sigma}\partial^{\mu}A^{\beta}-\frac{1}{4}p^{\alpha}\varepsilon_{\alpha\sigma\nu\beta}\partial^{\nu}A^{\beta}
\end{aligned} \tag{A.10}
$$

Aplicando as propriedades do tensor de Levi-Civita à equação (A.10) fica:

$$
\frac{\partial L^{(0)}}{\partial A^{\sigma}} = -p^{\alpha}\varepsilon_{\alpha\sigma\beta\mu}\partial^{\mu}A^{\nu}. \tag{A.11}
$$

Finalizando, a equação (6.5) torna:

$$
\delta L^{(0)}[A_{\mu}] = \left[m^2A_{\mu}+\beta(\partial^{\nu}F_{\nu\mu})-\varepsilon_{\alpha\beta\nu\mu}p^{\alpha}(\partial^{\beta}A^{\nu})\right]\partial^{\mu}\eta, \tag{A.12}
$$

A corrente de Noether pode ser calculada como:

$$
J_{\mu} = m^2A_{\mu}+\beta(\partial^{\nu}F_{\mu\nu})-\varepsilon_{\alpha\beta\nu\mu}p^{\alpha}(\partial^{\beta}A^{\nu}) \tag{A.13}
$$

e densidade langrangeana de primeira iteração foi introduzida em um campo auxiliar B, $L^{(1)} = L^{(0)} - JB$. Seguindo o procedimento vimos que o campo B transforma-se como,

$$
\delta B_{\mu} = \delta A_{\mu} = \partial_{\mu}\eta, \tag{A.14}
$$

então,

$$
\delta L^{(1)} = -(\delta J_{\mu})B^{\mu}. \tag{A.15}
$$

Temos também que,

$$
\delta J_{\mu} = m^2\delta A_{\mu} = m^2(\partial_{\mu}\eta). \tag{A.16}
$$

Substituindo na anterior, temos que a Lagrangeana de segunda iteração é,

$$L^{(2)} = L^{(1)} + \frac{m^2}{2} B_\mu B^\mu. \tag{A.17}$$

Usando (A.15) e (A.16), a variação deve ser nula, $\delta L^2 = 0$, e a forma final dessa ação é,

$$\begin{aligned} L^{(2)} &= -\frac{\beta}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu - \frac{1}{4} p_\alpha A_\beta \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu} - \\ &- \left[m^2 A_\mu + \beta(\partial^\mu F_{\mu\nu}) - \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} p^\alpha (\partial^\beta A^\nu) \right] B^\mu + \frac{m^2}{2} B_\mu B^\mu, \end{aligned} \tag{A.18}$$

onde, resolvendo para B a equação de movimento é,

$$-J + m^2 B = 0. \tag{A.19}$$

Substituindo este resultado na (A.17), obtermos a notável teoria invariante de calibre,

$$L^{(2)} = -\frac{\beta}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu - \frac{1}{4} p_\alpha A_\beta \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{J_\mu J^\mu}{2m^2} \tag{A.20}$$

De acordo com a equação (A.13), calculamos $J_\mu J^\mu$:

$$\begin{aligned} J_\mu J^\mu = m^4 A_\mu A^\mu + \beta^2 (\partial_\nu F^{\nu\mu})^2 + \left[\varepsilon_{\alpha\beta\nu\mu} p^\alpha (\partial^\beta A^\nu) \right]^2 + m^2 \beta \left[A_\mu (\partial_\lambda F^{\lambda\mu}) + \right. \\ \left. + A^\mu (\partial^\nu F_{\nu\mu}) \right] - 2m^2 A_\mu \varepsilon^{\alpha\beta\nu\mu} p_\alpha (\partial_\beta A_\nu) - 2\beta \varepsilon_{\alpha\beta\nu\mu} p^\alpha (\partial^\beta A^\nu)(\partial_\nu F^{\nu\mu}) \end{aligned} \tag{A.21}$$

onde

$$\begin{aligned} \left[A_\mu (\partial_\lambda F^{\lambda\mu}) + A^\mu (\partial^\nu F_{\nu\mu}) \right] &= -(\partial_\lambda A_\mu) F^{\lambda\mu} - (\partial^\nu A^\mu) F_{\nu\mu} \\ &= -(\partial_\lambda A_\mu) F^{\lambda\mu} - (\partial_\nu A_\mu) F^{\nu\mu} \\ &= -(\partial_\lambda A_\mu) F^{\lambda\mu} - (\partial_\mu A_\nu) F^{\mu\nu} \\ &= -(\partial_\lambda A_\mu) F^{\lambda\mu} - (\partial_\mu A_\lambda) F^{\mu\lambda} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -(\partial_\lambda A_\mu - \partial^\mu A^\lambda)F^{\lambda\mu} \\
&= -F_{\lambda\mu}F^{\lambda\mu}. \qquad \text{(A.22)}
\end{aligned}
$$

Analogamente, o terceiro termo da equação (A.20) pode ser escrito como:

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{4}p_\alpha A_\beta \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu} &= -\frac{1}{4}p_\alpha A_\beta \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\
&= -\frac{1}{2}p_\alpha A_\beta \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\partial_\mu A_\nu. \qquad \text{(A.23)}
\end{aligned}
$$

Substituindo as equações (A.19) e (A.20) na (A.18), finalmente encontramos a ação dual da (A.1):

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{\beta}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}p^\alpha(\partial^\beta A^\nu)A^\nu - \frac{1}{2m^2}(\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}p^\alpha(\partial^\beta A^\nu))^2 A^\nu - \\
&- \frac{1}{2m^2}\beta(\partial^\mu F_{\mu\nu}) - \frac{\beta^2}{2m^2}(\partial_\mu F^{\mu\nu})^2 + \frac{\beta}{m^2}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}p^\alpha(\partial^\beta A^\nu)(\partial_\rho F_{\rho\mu}). \qquad \text{(A.24)}
\end{aligned}
$$

Note que o termo de Maxwell permanece inalterado dentro da Dualização e este pode não ser considerado ($\beta = 0$). Isto é uma carcterística do termo invariante-calibre na ação inicial. Também, no limite $\beta = 0$, a ação (A.20) é um tipo de ação para essa dualidade, isto é um comportamento frequente do MDN. Além disso, podemos observar a lagrangeana de última iteração (A.20) é precisamente a famosa ação familiar.

Apêndice B

Cálculo da Matriz Inversa do Modelo de MPCS

Seja a matriz dada em (7.45):

$$f^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -g_{ij}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) & 0 & f_{A^i(\vec{x})\gamma(\vec{y})} \\ g_{ji}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) & 0 & 0 & \partial_i^y\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \\ 0 & 0 & 0 & m^2\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \\ f_{\gamma(\vec{x})A^j(\vec{y})} & -\partial_j^x\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) & -m^2\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) & 0 \end{pmatrix} \tag{B.1}$$

A inversa é obtida através da relação:

$$\int d^3x f_{nk}^{(1)^{-1}}(\vec{x},\vec{x'}) f_{km}^{(1)}(\vec{x'},\vec{y}) = \delta_{nm}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}), \tag{B.2}$$

onde $n = 1,2,3,4$ e $m = 1,2,3,4$.

Para $n = 1$ e $m = 1$ (mas variando o índice k):

$$\begin{aligned} \int d^3x' \left[f_{11}^{(1)^{-1}} f_{11}^{(1)} + f_{12}^{(1)^{-1}} f_{21}^{(1)} + f_{13}^{(1)^{-1}} f_{31}^{(1)} + f_{14}^{(1)^{-1}} f_{41}^{(1)}\right] &= \delta_{11}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \\ \int d^3x' \left[f_{12}^{(1)^{-1}} f_{21}^{(1)} + f_{14}^{(1)^{-1}} f_{41}^{(1)}\right] &= \delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \\ \int d^3x' \left[f_{12}^{(1)^{-1}} g_{ij}\delta^3(\vec{x'}-\vec{y}) + f_{14}^{(1)^{-1}} \frac{1}{2} p^n \partial_x^m \delta^3(\vec{x'}-\vec{y})\varepsilon_{nim}\right] &= \delta^3(\vec{x}-\vec{y}). \end{aligned} \tag{B.3}$$

Logo,

$$f_{12}^{(1)^{-1}}(\vec{x},\vec{y})g_{ij} + f_{14}^{(1)^{-1}}(\vec{x},\vec{y})\frac{1}{2}p^n\partial_x^m\varepsilon_{nim} = \delta^3(\vec{x}-\vec{y}). \tag{B.4}$$

Agora, para $n = 1$ e $m = 2$:

$$\begin{aligned} \int d^3x' \left[f_{11}^{(1)^{-1}} f_{12}^{(1)} + f_{12}^{(1)^{-1}} f_{22}^{(1)} + f_{13}^{(1)^{-1}} f_{32}^{(1)} + f_{14}^{(1)^{-1}} f_{42}^{(1)}\right] &= \delta_{12}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \\ \int d^3x' \left[f_{11}^{(1)^{-1}} g_{ij}\delta^3(\vec{x'}-\vec{y}) + f_{14}^{(1)^{-1}}\partial_j^x\delta^3(\vec{x'}-\vec{y})\right] &= 0. \end{aligned} \tag{B.5}$$

Então,

$$f_{11}^{(1)^{-1}}(\vec{x},\vec{y})g_{ij} + f_{14}^{(1)^{-1}}(\vec{x},\vec{y})\partial_j^x = 0. \tag{B.6}$$

Já, para $n = 1$ e $m = 3$:

$$\begin{aligned} \int d^3x' \left[f_{11}^{(1)^{-1}} f_{13}^{(1)} + f_{12}^{(1)^{-1}} f_{23}^{(1)} + f_{13}^{(1)^{-1}} f_{33}^{(1)} + f_{14}^{(1)^{-1}} f_{43}^{(1)}\right] &= \delta_{13}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \\ \int d^3x' \left[f_{14}^{(1)^{-1}} m^2\delta^3(\vec{x'}-\vec{y})\right] &= 0. \end{aligned} \tag{B.7}$$

Portanto,

$$m^2 f_{14}^{(1)^{-1}}(\vec{x}-\vec{y}) = 0, \tag{B.8}$$

ou

$$f_{14}^{(1)^{-1}}(\vec{x}-\vec{y}) = f_{41}^{(1)^{-1}}(\vec{x}-\vec{y}) = 0, \tag{B.9}$$

Substituindo as equações (B.9) em (B.4) e depois, em (B.6):

$$\begin{aligned} f_{12}^{(1)^{-1}}(\vec{x},\vec{y}) &= g^{ij}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \\ f_{21}^{(1)^{-1}}(\vec{x},\vec{y}) &= \left[-f_{12}^{(1)^{-1}}(\vec{x},\vec{y})\right]^T = -g^{ij}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \end{aligned} \tag{B.10}$$

e

$$f_{11}^{(1)^{-1}}(\vec{x},\vec{y}) = 0. \tag{B.11}$$

Finalmente, para $n = 1$ e $m = 4$:

$$\begin{aligned} \int d^3x' \left[f_{11}^{(1)^{-1}} f_{14}^{(1)} + f_{12}^{(1)^{-1}} f_{24}^{(1)} + f_{13}^{(1)^{-1}} f_{34}^{(1)} + f_{14}^{(1)^{-1}} f_{44}^{(1)}\right] &= \delta_{14}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \\ \int d^3x' \left[g^{ji}\delta^{(3)}(\vec{x}'-\vec{x})\partial_i^y\delta^3(\vec{x'}-\vec{y}) + f_{13}^{(1)^{-1}} m^2\delta^3(\vec{x'}-\vec{y})\right] &= \delta_{14}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \end{aligned} \tag{B.12}$$

tem-se,

$$\begin{aligned}
f_{13}^{(1)^{-1}}(\vec{x},\vec{y}) &= -\frac{1}{m^2}\partial_y^j\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \\
f_{31}^{(1)^{-1}}(\vec{x},\vec{y}) &= \left[f_{13}^{(1)^{-1}}(\vec{x},\vec{y})\right]^T = \frac{1}{m^2}\partial_x^i\delta^3(\vec{x}-\vec{y})
\end{aligned} \tag{B.13}$$

Analogamente, para $n=2$ e $m=1$:

$$\begin{aligned}
\int d^3x'\left[f_{21}^{(1)^{-1}}f_{11}^{(1)} + f_{22}^{(1)^{-1}}f_{21}^{(1)} + f_{23}^{(1)^{-1}}f_{31}^{(1)} + f_{24}^{(1)^{-1}}f_{41}^{(1)}\right] &= \delta_{21}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \\
\int d^3x'\left[f_{22}^{(1)^{-1}}(-1)g_{ij}\delta^{(3)}(\vec{x}'-\vec{y}) + f_{24}^{(1)^{-1}}\frac{1}{2}p^n\partial_y^m\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\varepsilon_{nim}\right] &= 0.
\end{aligned} \tag{B.14}$$

Logo,

$$-f_{22}^{(1)^{-1}}(\vec{x},\vec{y})g_{ij} + f_{24}^{(1)^{-1}}(\vec{x},\vec{y})\frac{1}{2}p^n\partial_y^m\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\varepsilon_{nim} = 0. \tag{B.15}$$

Agora, para $n=2$ e $m=2$:

$$\begin{aligned}
&\int d^3x'\left[f_{21}^{(1)^{-1}}f_{12}^{(1)} + f_{22}^{(1)^{-1}}f_{22}^{(1)} + f_{23}^{(1)^{-1}}f_{32}^{(1)} + f_{24}^{(1)^{-1}}f_{42}^{(1)}\right] = \delta_{22}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \\
&\int d^3x'\left[(-1)g^{ji}\delta^{(3)}(x-x')(-1)g_{ij}\delta^3(\vec{x'}-\vec{y}) + \right. \\
&\left. + f_{24}^{(1)^{-1}}(-1)\partial_j^y\delta^3(\vec{x'}-\vec{y})\right] = \delta^3(\vec{x}-\vec{y}).
\end{aligned} \tag{B.16}$$

Então,

$$\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) - f_{24}^{(1)^{-1}}\partial_j^y = \delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \tag{B.17}$$

ou

$$f_{24}^{(1)^{-1}}(\vec{x},\vec{y}) = f_{42}^{(1)^{-1}}(\vec{x},\vec{y}) = 0. \tag{B.18}$$

Retornando a equação (B.15):

$$f_{22}^{(1)^{-1}}(\vec{x},\vec{y}) = 0. \tag{B.19}$$

Já, para $n=2$ e $m=3$:

$$\int d^3x'\left[f_{21}^{(1)^{-1}}f_{13}^{(1)} + f_{22}^{(1)^{-1}}f_{23}^{(1)} + f_{23}^{(1)^{-1}}f_{33}^{(1)} + f_{24}^{(1)^{-1}}f_{43}^{(1)}\right] = \delta_{23}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}), \tag{B.20}$$

também obtém,

$$f_{24}^{(1)^{-1}}(\vec{x},\vec{y}) = f_{42}^{(1)^{-1}}(\vec{x},\vec{y}) = 0. \tag{B.21}$$

Enquanto, para $n = 2$ e $m = 4$:

$$\begin{aligned}
\int d^3x' \left[f_{21}^{(1)^{-1}} f_{14}^{(1)} + f_{22}^{(1)^{-1}} f_{24}^{(1)} + f_{23}^{(1)^{-1}} f_{34}^{(1)} + f_{24}^{(1)^{-1}} f_{44}^{(1)} \right] &= \delta_{24}\delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\
\int d^3x' \left[\delta_j^i \delta^3(x - x') \frac{1}{2} p^n \partial_y^m \delta^3(x' - y)\varepsilon_{nim} + f_{23}^{(1)^{-1}} m^2 \delta^3(x' - y) \right] &= 0, \\
-\delta_j^i \partial_y^m \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \frac{1}{2} p^n \varepsilon_{nim} + f_{23}^{(1)^{-1}} m^2 &= 0, \qquad \text{(B.22)}
\end{aligned}$$

tem-se,

$$\begin{aligned}
f_{23}^{(1)^{-1}}(\vec{x}, \vec{y}) &= -\frac{1}{2m^2} p^n \varepsilon_{njm} \partial_y^m \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\
f_{32}^{(1)^{-1}}(\vec{x}, \vec{y}) &= -\left[f_{23}^{(1)^{-1}}(\vec{x}, \vec{y}) \right]^T = \frac{1}{2m^2} p^n \varepsilon_{nim} \partial_x^m \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \qquad \text{(B.23)}
\end{aligned}$$

Agora, para $n = 3$ e $m = 1$:

$$\begin{aligned}
&\int d^3x' \left[f_{31}^{(1)^{-1}} f_{11}^{(1)} + f_{32}^{(1)^{-1}} f_{21}^{(1)} + f_{33}^{(1)^{-1}} f_{31}^{(1)} + f_{34}^{(1)^{-1}} f_{41}^{(1)} \right] = \delta_{31}\delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\
&\int d^3x' \left[\frac{1}{2m^2} p^n \partial_y^m \varepsilon_{njm} \delta^{(3)}(x - x') \delta_j^i \delta^3(\vec{x'} - \vec{y}) + \right. \\
&\left. + f_{34}^{(1)^{-1}} \frac{1}{2} p^n \partial_y^m \delta^3(\vec{x'} - \vec{y}) \varepsilon_{nmi} \right] = \delta_{31}\delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \qquad \text{(B.24)}
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
f_{34}^{(1)^{-1}}(\vec{x}, \vec{y}) &= -\frac{1}{m^2} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\
f_{43}^{(1)^{-1}}(\vec{x}, \vec{y}) = -\left[f_{34}^{(1)^{-1}}(\vec{x}, \vec{y}) \right]^T &= \frac{1}{m^2} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \qquad \text{(B.25)}
\end{aligned}$$

Em seguida, para os demais de $n = 3$, e, $n = 4$ variando m de 1 até 4, calculam-se os restantes das entradas da matriz inversa, $(f^{(1)})^{-1}$, que são respectivamente:

$$f_{33}^{(1)^{-1}}(\vec{x}, \vec{y}) = f_{44}^{(1)^{-1}}(\vec{x}, \vec{y}) = 0, \qquad \text{(B.26)}$$

a fim de,

$$
(f^{(1)})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & g^{ij} & -\frac{1}{m^2}\partial_y^j & 0 \\ -g^{ij} & 0 & -\frac{1}{2m^2}\varepsilon^{jnm}p_n\partial_m^y & 0 \\ \frac{1}{m^2}\partial_x^i & \frac{1}{2m^2}\varepsilon^{inm}p_n\partial_m^x & 0 & -\frac{1}{m^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{m^2} & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \tag{B.27}
$$

.

Referências Bibliográficas

[1] Paul A. M. Dirac, LECTURES ON QUANTUM MECHANIC, Yeschiva University (1964).

[2] J. Barcelos Neto, *Quantização Simplética com Vínculos*, IF/UFRJ/Monografia/M92/01.

[3] Wilson Oliveira, *Teoria Quântica de Campos*, Notas de aula.

[4] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, *Topologically Massive Calibre Theories*,Ann. Phys. **140** (1982) 372. R. Jackiw,*(Constrained) Quantization without Tears*,hep-th/9306075 (1993).

[5] S. Deser and R. Jackiw, *Self Duality of Topologically Massive Calibre Theories*, Phys. Lett. B **139**:371 (1984) 2366.

[6] L. D. Faddeev and R. Jackiw, *Hamiltonian Reduction of Unconstrained and Constrained Systems*, Phys. Rev. Lett. **60** (1988) 1692. N.M.J. Woodhouse, *Geometric Quantization*, Claredon Press, Oxford 1980, J. Barcelos Neto and C. Wotzasek, *Symplectic Quantization of Constrained Systems* Int, J. Mod. Phys. A **7** (1992)737.

[7] C. Wotzasek, *Faddeev-Jackiw Aproach to Hidden Symmetries* Ann. Phys **243** (1995) 76-89.

[8] H. Montani and C. Wotzasek, *Faddeev-Jackiw Quantization of Non-Abelian Systems*, Mod. Phys.Lett. A **35** (1993) 3387-96.

[9] H. Montani, *Symplectic analysis of constrained systems*, Int. J. Mod. Phys. A **8** (1993)4319.

[10] L. Faddev and S. L. Shatashivilli, Phys Lett. B **167** (1998) 225.

[11] E. Fradkin, V. Manias and F. A. Schaposnik, *The Fermion-Boson Mapping in Three-dimensional Quantum Field Theory*, Nuc. Phys. B **446** (1995) 144.

[12] J. Ananias Neto, C. Neves and W. Oliveira, *Gauging the SU(2) Skyrme Model*, Phys. Rev. D **63** (2001) 085018.

[13] E.M.C. Abreu, A.C.R. Mendes, C. Neves, W. Oliveira and F.I.Takakura, *Duality through the Symplectic Embedding Formalism*, Int. J. Mod. Phys. A **22** (2007) 3605. A.C.R. Mendes, C. Neves, W. Oliveira and D. C. Rodrigues, *Symplectic Embedding of Second Class Systems*, Nuc. Phys. B (Proc. Suppl.) **127** (2004) 170-173.

[14] E.M.C. Abreu, A.C.R. Mendes, C. Neves, W. Oliveira, F.I. Takakura and L.M.V. Xavier, *The Dual Embedding Method in D=3*, Mod. Phys. Lett. A **23**, 829 (2008).

[15] Sean M. Carrol, George B. Field and R. Jackiw, *Limits on a Lorentz and Parity-Violating Modification of Eletrodynamics* Phys. Rev. D **41** 1231 (1990).

[16] M. Botta Cantcheff, C. F. L. Goldinho, A. P. Baêta Scarpelli and J. A. Hellayël-Neto, *Dual Embedding of the Lorentz- Violating Eletrodynamics/ and Batalin-Vilkovisky Quantization*, Phys. Rev. D **68** (2003) 065025.

[17] R. Banerjee, H. J. Rothe, and K. D. Rothe, *Equivalence of the MCS Theory and a Self-dual Model*, Phys. Rev. D **52** (1995).

[18] S.E. Hjelmeland and U. Lindstrom, hep-th/9705122.

[19] P. K. Townsend, K. Pilch and P. Van Nieuwenhuizen, *Selfduality in Odd Dimensions*, Phys. Lett. B **136** (1984) 38.

[20] A. Karlhed, U. Lindstrom, M. Rocĕk and P. van Nieuwenhuizen, Phys. Lett. B **186** (1987) 96.

[21] R. Banerjee and C. Wotzasek, Nucl. Phys. B **527** (1998) 402.

[22] N.A. Lemos. *Mecânica Análitica*, 1^o edição, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2004.

[23] Herbert Goldstein, *Classics Mechanics*, Addilson Wesley.

[24] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, 4^o edition, Butterworth Heinemann, Oxford, 1987.

[25] J. Barcelos Neto, *Fundamentos de Relatividade Especial*, UFRJ.

[26] Davi C. Rodrigues, *Estudos em Sistemas Vinculados*, Monografia/UFJF, 2000. Davi C. Rodrigues, *Dualidade Eletromagnética em Espaço-Tempo Não-Comutativo e Formalismo Simplético*, Tese de Doutorado/UFRJ,2006.

[27] Marcelo S. Guimarães, *A dualidade Maxwell-Chern-Simons/Auto-dual e sua extensão para Espaço-Tempo Não-Comutativo*/ UFRJ, 2005.

[28] Emanuel J.R. Oliveira, *Quantização Operatorial dos Skyrmions*, UFMG/ Dissertação.

[29] J. Ananias Neto, C. Neves, E.R. Oliveira and W. Oliveira, J. Phys. A: Math. Gen. **34**, 5117-5130 (2001).

[30] I.A. Batalin, E.S. FradKin, *Operator Quantization of Dynamical Systems with Irreducible First and Secund Class Constraints*,Phys. Lett. B **180**, 157 (1986); I. A.Batalin, E. S. Fradkin e T.E. Fradkina, *Another Version for Operatorial Quantization of Dynamical Systems with Irreducible Constraints* Nucl. Phys. B **134**,

158 (1989); I.A. Batalin, I.V. Tyutin, *Existence Theorem for effective Gauge Algebra in the Generalized Canonical Formalism with abelian Conversion of Secund Class Constraints*, Int.J.Mod.Phys. A **6**, 3255 (1991).

[31] Svend E. Hyelmelamd and Ulf Lindström, *Duality for the Non-Speciality*, hep-th/9705122(1997).