
Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas, ICE
Departamento de Física

*Campo Quântico de Dirac Localizado
Tipo-String*

Erichardson Tarocco de Oliveira

Dissertação de Mestrado

Orientador: **Prof. Dr. Jens Mund**

14 de Setembro de 2010

Juiz de Fora - MG

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Erichardson Tarocco de Oliveira** e aprovada pela comissão julgadora.

Juiz de Fora, 14 de setembro de 2010.

Prof. Dr. **Jens Mund**

Orientador

Dissertação (Mestrado) apresentada ao Departamento de Física, ICE, **UFJF**, como requisito parcial para obtenção do Título de **mestre em Física**.

Oliveira, Erichardson Tarocco – Localização de Campo Quântico Tipo string
Erichardson Tarocco – Juiz de Fora, [M.G. 95], 2010.

Orientador: Jens Mund

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Juiz de Fora,
Departamento de Física

Banca examinadora: 1. Dr. Jens Mund (Orientador-UFJF)
2. Dr. João Carlos Alves Barata
3. Dr. Wilson Oliveira

Data da defesa: 14/09/2010

*Dedico este trabalho a minha família
e aos meus amigos.*

Agradecimentos

Agradeço primeiro a Deus, que é o criador de todas as coisas.

A meus pais, meus irmãos, Eduardo Tarocco de Oliveira e Edney Tarocco de Oliveira, pelo apoio, pela compreensão e pelas orações.

Ao professor Dr. Jens Mund(orientador) , pela paciência, pela competência e confiança.

Aos professores da banca, Dr. João Carlos Alves Barata e Dr. Wilson Oliveira, por aceitarem participar da minha banca.

À Coordenação da pós-graduação, ao secretário da pós-graduação Domingos e aos demais professores do departamento de física, por toda ajuda prestada no decorrer do meu curso.

Aos meus colegas de curso, em especial, a José Amâncio dos Santos, Mateus Vinícius Marcial e a todos que participaram diretamente ou indiretamente desta minha caminhada na UFJF.

Finalmente, agradeço à CAPES pela bolsa concedida durante a realização deste trabalho.

Resumo

Como são bem conhecidos; os campos quânticos estudados na TQC satisfazem o princípio de localidade segundo pontos do espaço-tempo. A eles, referem-se como campos que possuam localização do tipo-ponto ou que são puntiformemente localizados. Nesta dissertação, será feita a construção de campos quânticos livre de Dirac, com localização "tipo-string". Em contraste aos campos usuais, que vivem em ponto do espaço-tempo, estes vivem em semi-reta que começa num certo ponto do espaço de Minkowski e se estende até o infinito numa certa direção tipo-espaço. Tal localização é permitida pelos princípios da física quântica relativística, dado que os campos admitem a construção de observáveis locais. O interesse na localização tipo-string deve-se ao fato de ser uma localização menos forte, que implica um comportamento menos singular nas altas energias, apresentado pelos campos quânticos com localização tipo-ponto. Com isso apresentarão um melhor comportamento UV. Com essa localização menos forte, pode-se, então, criar mais modelos interagentes. Campos livres com localização tipo-string já foram obtidos para várias partículas [1, 2], a partir dos quais podem se fazer modelos interagentes .

Para construir modelos interagentes vindos do campo livre, deve-se fazer uma análise da função de dois pontos do campo livre correspondente. Tal análise, porém, não será feita nesse trabalho, visto que não é o objetivo do estudo em questão. Nesse trabalho foi construído o campo quântico livre de Dirac com localização tipo-string, em que foram verificadas a equação de Dirac e a relação de covariância. Definiu-se sua densidade de corrente e verificou-se que esta se conserva. Por último, definiu-se a função de dois pontos para localização tipo-string, que pode ser verificada a localidade do campo tipo-string.

Palavras chaves: Covariância, Localidade, Campo Quântico Tipo-string

Abstract

As is well known, quantum fields studied in TQC satisfy the second principle of locality of space-time points. To them, refer to fields that have location-point type or that are located punctate. In this dissertation, will be the construction of free quantum fields Dirac, with location-type "string". In contrast to the usual fields, living in space-time point, they live in semi-straight line beginning at a certain point in Minkowski space and extends to infinity in a certain space-like direction. This location is permitted by the principles of relativistic quantum physics, since the fields admit the construction of local observables. The interest in location-string type is due to the fact that a location is less strong, which implies a less singular behavior at high energies, described by quantum fields with point-type location. With this present an improved UV behavior. With this location less strong, we can then create more models interacting. Free fields with location-string type have been obtained for several particles [1, 2], from which they can make interacting models.

To build models from the field interacting free, one must make an analysis of the function of two points corresponding free field. This analysis, however, will not be done in this work, since it is not the objective of the study. In this work we construct a quantum field-free Dirac-string type with location, which was verified in the Dirac equation and the ratio of covariance. We defined its current density and found that it is conserved. Finally, we defined the function of two points for location-string type, which can be verified the location of the string-type field.

Keywords: Covariance, Locality, Quantum Field type-string

Conteúdo

Agradecimentos	v
Resumo	vi
Introdução	xi
1 Ferramentas	1
1.1 Grupos $SL(2, \mathbb{C})$, Lorentz e Poincaré	1
1.1.1 Grupo de Lorentz	1
1.1.2 Grupo de Poincaré	2
1.1.3 Recobrimento do Grupo $SL(2, \mathbb{C})$ sobre o grupo Lorentz	3
1.2 Representações de dimensão finita do Grupo $SL(2, \mathbb{C})$	5
1.2.1 Representações irredutíveis unitárias de $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$	8
1.2.2 Representações Covariantes	11
1.3 Espaço Fock	14
2 Campos Quânticos	18
2.1 Introdução	18
2.2 Campo Quântico Livre escalar	22
2.3 Campo Quântico livre com spin s arbitrário	28
2.3.1 Exemplos de soluções para os intertwiner para certas Representações.	35
2.3.2 Teorema de Spin Estatística	36
2.3.3 Campo de Dirac	38

2.4	Teorema de Bisognano- Wichmann	41
3	Construção do campo quântico tipo string fermiônico	46
3.1	Introdução	46
3.2	Propriedades dos intertwiners	49
3.3	Exemplos de soluções intertwiner.	52
3.4	Construção do intertwiner via teorema de Bisognano-Wichmann.	54
3.4.1	Para $D = D^{\frac{1}{2},0}$ e a solução u^+	56
3.4.2	Para $D = D^{0,\frac{1}{2}}$ e a solução u^-	56
3.4.3	Para Dirac, $S = D^{(\frac{1}{2},0)} \oplus D^{(0,\frac{1}{2})}$ e a solução u	57
3.5	Modelos para nosso Campo Quântico Dirac tipo-string	58
3.5.1	Covariância para nosso Campo tipo String	62
3.6	Densidade de corrente	64
4	Função de Dois Pontos	66
4.1	Covariância	69
4.2	Localidade	71
5	Conclusão e Perspectivas Futuras	74
A	Grupo, Recobrimento e Representação	75
A.1	Grupo	75
A.2	Recobrimento	75
A.2.1	Espaço Topológico	75
A.3	Representação	77
A.3.1	Representação irreduzível e unitária	77
A.3.2	Lema de Schur	78
B	Relações dos operadores de entrelaçamento no caso puntiforme.	79
C	Demonstração de equações utilizadas.	80

Sumário

x

Referências Bibliográficas

81

Introdução

Nesse trabalho, buscou-se construir um campo quântico livre de Dirac com localização tipo-string, cuja motivação é verificar que uma localização desta forma, possivelmente, admite interações, resultando em novos modelos da TQC. Os campos usuais, que possui localização do tipo-ponto ou que são puntiformemente localizados, não admitem essas interações, seja em construção perturbativa ou não-perturbativa.

No capítulo 1, será feita uma revisão de conceitos que servirão de ferramentas úteis para o desenvolvimento do trabalho. Conceitos como Grupos de Lorentz, Poincaré, $SL(2, \mathbb{C})$, Representações, Recobrimento e Espaço Fock.

No capítulo 2, será introduzido o que é uma Teoria Quântica de Campos e os motivos que levaram ao seu desenvolvimento. Além disso, será especificado o que é um campo no esquema conceitual da teoria de campos e o que é preciso para definir um campo quântico. Será feito um estudo de campos quânticos com localização tipo-ponto na respectiva ordem: campo quântico livre escalar e campo quântico livre com spin s arbitrário. Esses campos devem satisfazer algumas exigências. A partir de sua construção serão encontrados exemplos de soluções para certas representações de $SL(2, \mathbb{C})$ para partículas com spin $\frac{1}{2}$. Também será verificado o Teorema de Spin Estatística[9] e, por último, será apresentado o teorema de Bisognano- Wichmann para o caso de campos quânticos com localização tipo-string[10], de forma a se preparar para a construção do campo quântico com localização tipo-string com spins $\frac{1}{2}$, desenvolvida no próximo capítulo.

No capítulo 3, será construído o campo quântico tipo-string que é o principal objetivos nesse trabalho. Para isso, seguirá o estudo uma estratégia: Primeiro, encontrar

a forma do campo com seus respectivos intertwiners. Pode-se verificar que eles não são completamente fixados pela relação de covariância, como são no caso de campos com localização tipo-ponto, em que as soluções são únicas módulo constante. Em seguida, achar as soluções para o intertwiner $u(p, e)$ via a relação de entrelaçamento com suas respectivas representações. Por fim, fazer uso do teorema de Bisognano- Wichmann[10] para se encontrar a solução para o intertwiner $v(p, e)$. De posse dessas soluções, pode-se escrever, de forma explícita, o campo quântico tipo-string $\varphi_i(x, e)$. Com o campo quântico Dirac tipo-string, verifica-se alguns modelos.

No capítulo 4, será definida a função de dois pontos para o campo tipo-string, $w(x, e; x', e')$ e de posse dessa função pode-se tirar a condição de causalidade dos campos.

Finalmente, no capítulo 5, serão discutidos os resultados e apresentados os objetivos futuros com relação ao trabalho desenvolvido.

Capítulo 1

Ferramentas

Nesse primeiro capítulo, será apresentada uma breve revisão de conceitos como, grupos particulares, recobrimento, representação e o Espaço Fock para que, apoiados neles, consiga-se desenvolver o trabalho proposto.

1.1 Grupos $SL(2, \mathbb{C})$, Lorentz e Poincaré

O Grupo $SL(2, \mathbb{C})$, é parecido com o grupo $SU(2)$ ¹ e ao grupo de Lorentz², cuja importância é muito grande nos estudos de representação do grupo de Lorentz para partícula com $\text{spin } \frac{1}{2} + \mathbb{N}$.

O grupo $SL(2, \mathbb{C})$ é o grupo formado pelas matrizes complexas 2×2 de determinante igual a 1.

1.1.1 Grupo de Lorentz

Considera-se o espaço-tempo quadridimensional dotado com a métrica de Minkowski proveniente do produto interno.

$$g(x, y) = x^0 y^0 - \sum_{i=1}^3 x^i y^i \tag{1.1}$$

¹Grupo das matrizes unitárias 2×2 com determinante igual a 1

²veremos na próxima seção

Nota-se que a métrica está em relação a um sistema de coordenadas, a saber "coordenadas de Lorentz ou inerciais". Contudo, a métrica não depende dos sistemas de coordenadas.

Dado Λ , que aqui será denominado como *transformações de Lorentz*, que representa uma transformação entre sistemas de referências inerciais que preserve a estrutura causal e não envolve dilatações. O grupo de todas as transformações de Lorentz do espaço de Minkowski, é denominado de Grupo de Lorentz. Pode-se também dizer que o grupo de Lorentz³ é o grupo de isometrias linear desta métrica (1.1)..

Depois da escolha de uma origem e de um sistema de coordenadas $x \mapsto (x^0, x^1, x^2, x^3)$, ele \mathcal{L} pode ser identificado pelo grupo $O(1, 3)$. $\mathcal{L} = O(1, 3)$, que é o grupo de todas as matrizes 4×4 ($\Lambda \in Mat(\mathbb{R}, 4)$) e que satisfazem: $\Lambda^{-1} = \eta \Lambda^T \eta^{-1}$
 $det(\Lambda) = \pm 1$

Para η lê-se: $\eta := \eta(3, 1) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ denominado métrica de Minkowski.

Será introduzido o \mathcal{L}_+^\uparrow , subgrupo de \mathcal{L} , que recebe o nome de *grupo de Lorentz próprio ortócrono ou grupo de Lorentz restrito*. É um subgrupo de Lorentz de mapas lineares de \mathbb{R}^4 que preservam a forma bilinear (1.1) e também deixa o cone positivo invariante $\{x \in \mathbb{R}^4 : x^0 > 0 \text{ e } g(x, x) > 0 \text{ e } det(\Lambda) + 1\} \simeq \mathcal{L}^\uparrow$.

\mathcal{L}_+^\uparrow usado na sub-seção (1.1.3)

$$\mathcal{L}_+^\uparrow := \{\Lambda \in \mathcal{L} | det(\Lambda) + 1 \text{ e sinal de } \Lambda_0^0 > 0\}$$

1.1.2 Grupo de Poincaré

O conjunto de transformações no espaço de Minkowski, constituído de todas as translações e a transformações de *proper Lorentz* e seu produto, formam um grupo \mathcal{P}_+^\uparrow , chamado de *grupo de Poincaré próprio*, ou grupo não homogêneo de Lorentz que representa o grupo mais geral de transformações do espaço-tempo, que mantêm os intervalos invariantes, e, hoje, na Física, considera que o \mathcal{P}_+^\uparrow representa uma simetria da natureza (na ausência de campos gravitacionais). Sua ação no espaço-tempo é interpretada como uma

³Onde vamos usar o símbolo \mathcal{L} para grupo de Lorentz

transformação de Lorentz, seguida de uma translação cujos elementos são constituídos por pares de translação e uma transformação homogênea, denotado por $g := (b, \Lambda)$, que induz transformação de um quadrivetor:

$$\boxed{g : x \mapsto x' = b + \Lambda x.}$$

Acima, b é um vetor quadridimensional e $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$.

Uma transformação (b', Λ') seguida por outra (b, Λ) , é equivalente a uma única transformação dada pela regra de multiplicação de grupo.

$$\boxed{(b, \Lambda)(b', \Lambda') = (b + \Lambda b', \Lambda \Lambda')}$$

Em particular,

$$\boxed{(b, \Lambda) = (b, \mathbf{1}) \cdot (0, \Lambda)}$$

1.1.3 Recobrimento do Grupo $SL(2, \mathbb{C})$ sobre o grupo Lorentz

Há uma identificação natural entre o espaço-tempo \mathbb{R}^4 e o espaço das matrizes (2×2) complexa hermitianas, $Mat(\mathbb{C}, 2)^h$ dada por :

$$\mathbb{R}^4 \longleftrightarrow Mat(\mathbb{C}, 2)^h$$

$$\mathbb{R}^4 \ni x \mapsto \underline{x} = x^0 + \vec{x} \cdot \vec{\sigma} = \sum x^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \in Mat(\mathbb{C}, 2)^h$$

com $\sigma_0 := \mathbf{1}$. Podemos verificar que: $\underline{x} = \underline{x}^*$

Nota-se que:

$$\begin{aligned} \det(\underline{x}) &= (x^0 + x^3)(x^0 - x^3) - \{(x^1 - ix^2)(x^1 + ix^2)\} \\ &= (x^0)^2 - ((x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2) = x \cdot x = x^2 \end{aligned}$$

Usando esta identificação, pode-se definir uma ação de $SL(2, \mathbb{C})$ no espaço-tempo de Minkowski $A \mapsto \Lambda(A) : SL(2, \mathbb{C}) \mapsto \mathcal{L}$, (observe que ainda sabemos que $\Lambda(A)$ pertence a \mathcal{L}) através do mapa: $SL(2, \mathbb{C}) \times Mat(\mathbb{C}, 2)^h \mapsto Mat(\mathbb{C}, 2)^h$ dado por:

$$\boxed{\underline{x} \longrightarrow A \underline{x} A^* = \underline{x}' = \underline{\Lambda(A)x}} \quad (1.2)$$

$$\begin{array}{ccc} \underline{x} \mapsto A\underline{x}A^* \in Mat(\mathbb{C}, 2)^h & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{\Phi} Mat(\mathbb{C}, 2)^h \\ & \Lambda(A) \downarrow & \downarrow A \cdot A^* \\ & \mathbb{R}^4 & \xleftarrow{\Phi^{-1}} Mat(\mathbb{C}, 2)^h \end{array}$$

$$\Lambda(A)x := \text{único } x' \text{ com } \underline{x}' = A\underline{x}A^*, \text{ ou seja, } \Lambda(A)x = \Phi^{-1}(A\underline{x}A^*)$$

Observa-se que é utilizado o fato de que $A, A^* \in SL(2, \mathbb{C})$ e que $\det(A) = \det(A^*) = 1$, tem-se que $\det(A\underline{x}A^*) = \det(A)\det(\underline{x})\det(A^*) = x^2$. Isso implica em $(\Lambda(A)x)^2 = x^2$.

Percebe-se que a métrica é preservada portanto $\Lambda(A) \in \mathcal{L}$.

Com isso, vê-se que a ação de $SL(2, \mathbb{C})$ no espaço-tempo de Lorentz preserva a métrica de Lorentz. Em outras palavras, $SL(2, \mathbb{C})$ atua isometricamente sobre o espaço-tempo. Assim tem-se um mapa bem definido $SL(2, \mathbb{C}) \xrightarrow{\Phi} SO(1, 3)$, de fato um homomorfismo de grupo.

O grupo de Lorentz é composto pela união de quatro componentes conexas, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\downarrow$, como a aplicação de $SL(2, \mathbb{C}) \mapsto \mathcal{L}$ é contínua e como o grupo $SL(2, \mathbb{C})$ é conexo e contém a unidade logo o recobrimento deve ser sobre a componente \mathcal{L}_+^\uparrow pois é a única das componentes conexas do grupo de \mathcal{L} que contém a unidade ($\det \Lambda = 1$ e $\Lambda_0^0 > 0$) portanto tem-se:

$$SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}_+^\uparrow$$

$$A \longrightarrow \Lambda(A)$$

Observação: Na notação que usaremos $\Lambda = \Lambda(A)$

Lema 1.1.1. *Com isso, pode-se representar as transformações de Lorentz próprias através de elementos de $SL(2, \mathbb{C})$ em que os Boost são dados pelos elementos de sua pré-imagem no recobrimento por matrizes $\in SL(2, \mathbb{C})$ e as rotações são dadas pelos elementos de sua pré-imagem no recobrimento por matrizes do subgrupo $SU(2)$ de $SL(2, \mathbb{C})$, como segue.*

$$e^{\frac{t}{2}\sigma_i} \mapsto \Lambda_i(t)$$

$$e^{\frac{i\alpha}{2}\sigma_i} \mapsto R_i(\alpha)$$

Isso mostra que o mapa $SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}_+^\downarrow$ é sobrejetor.[8] Tem-se também que o núcleo deste mapa é $\{\pm 1\}$, portanto, $\mathcal{L}_+^\uparrow = SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ [6].

O mapa $SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}_+^\uparrow$ define um recobrimento de \mathcal{L}_+^\uparrow . Como $SL(2, \mathbb{C})$ é simplesmente conexo[3], o $SL(2, \mathbb{C})$ é o grupo de recobrimento universal do grupo \mathcal{L}_+^\uparrow .

Da equação 1.2 verifica-se facilmente que:

$$\boxed{\widetilde{\Lambda(A)}x = A^{*-1}\tilde{x}A^{-1}} \quad (1.3)$$

1.2 Representações de dimensão finita do Grupo $SL(2, \mathbb{C})$

Primeiro serão colocados os aspectos da representação de $SU(2)$ em que a representação D^s age em $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 2s}$ (para entender o termo de produto tensorial simetrizado ver equação (1.18)) na seguinte maneira:

Definição 1.2.1. $i) D^s(A)u_1 \otimes_s \dots \otimes_s u_{2s} = Au_1 \otimes_s \dots \otimes_s Au_{2s}$ (Dimensão: $2s + 1$).

Teorema 1.2.2. A representação de $SU(2)$ satisfaz: $D^{s_1} \otimes D^{s_2} = D^{|s_1-s_2|} \oplus D^{|s_1-s_2+1|} \oplus \dots \oplus D^{|s_1+s_2|}$

Pode-se notar que D^s é unitário.

Como $D^s(A)$ preserva a norma num espaço de $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 2s}$ dimensional, a norma será preservada em um subespaço menor. Mostra-se que $D^s(A)$ é unitária em um vetor da forma: $u_1 \otimes u_2 \dots \otimes u_{2s}$ em $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 2s}$

Demonstração. $\|D^s(A)u_1 \otimes \dots \otimes u_{2s}\| = \|Au_1 \otimes \dots \otimes Au_{2s}\| = \|Au_1\| \dots \|Au_{2s}\| = \|u_1\| \dots \|u_{2s}\| = \|u_1 \otimes \dots \otimes u_{2s}\|$. Para $A \in SU(2)$ □

Pode-se estender a representação D^s de $SU(2)$ para $SL(2, \mathbb{C})$, observando que elas não são unitárias.

Representação (não unitária) de $SL(2, \mathbb{C})$: Considere as representações de $SL(2, \mathbb{C})$

- i) $D := A \mapsto A$
- ii) $D := A \mapsto \bar{A}$
- iii) $D := A \mapsto (A^t)^{-1}$
- iv) $D := A \mapsto (A^*)^{-1} = \overline{((A^t)^{-1})}$

Lema 1.2.3. Dado $\varepsilon := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ este satisfaz: $(A^t)^{-1} = \varepsilon A \varepsilon^{-1}$ o que mostrará que i) e iii) são equivalentes, consequentemente será visto também que a ii) e iv) são equivalentes.

Demonstração do lema (1.2.3).

Demonstração. Dado, $A \in SL(2, \mathbb{C})$ tal que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \det(A)^{-1}, \text{ mas } \det(A) = 1 \text{ portanto } A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon A \varepsilon^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

$$(A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Comparando as matrizes obtidas acima, tem-se:

$$\boxed{(A^t)^{-1} = \varepsilon A \varepsilon^{-1}} \tag{1.4}$$

Com isso, mostra-se que i) \cong iii), se aplicar o conjugado em ambos os lados da equação 1.4, isso dará que $(A^*)^{-1} = \bar{\varepsilon} \bar{A} \bar{\varepsilon}^{-1}$ em que se mostra que ii) \cong iv).

□

Será definida a representação de $SL(2, \mathbb{C})$ da seguinte forma:

Definição 1.2.4.

$$\boxed{D^{(\frac{1}{2}, 0)}(A) := A \text{ em } \mathbb{C}^2} \quad (1.5)$$

$$\boxed{D^{(0, \frac{1}{2})}(A) := \bar{A}} \quad (1.6)$$

Essa representação age em $(\mathbb{C}^2)^{\otimes_s 2j} \otimes (\mathbb{C}^2)^{\otimes_s 2k}$ na seguinte maneira:

Definição 1.2.5.

$$D^{(j,k)}(A) : \underbrace{u_1 \otimes_s \cdots \otimes_s u_{2j}}_{\text{simetrizado}} \otimes \underbrace{v_1 \otimes_s \cdots \otimes_s v_{2k}}_{\text{simetrizado}} := Au_1 \otimes_s \cdots \otimes_s Au_{2j} \otimes \bar{A}v_1 \otimes_s \cdots \otimes_s \bar{A}v_{2k} \quad (1.7)$$

A representação irredutível $D^{(j,k)}$ de $SL(2, \mathbb{C})$ satisfaz:

$$\overline{D^{(j,k)}(A)} = D^{(j,k)}(\bar{A}) \quad \text{e} \quad D^{(j,k)}(A)^* = D^{(j,k)}(A^*) \quad (1.8)$$

Pegue-se um $T \in (\mathbb{C}^2)^{\otimes_s 2j} \otimes (\mathbb{C}^2)^{\otimes_s 2k}$ de acordo com a expressão abaixo e aplique-se a representação sobre ele.

$$T = \sum_{\substack{r_1 \leq r_{2j} \\ \hat{r}_1 \leq \hat{r}_{2k}}} T^{r_1 \cdots r_{2j} \hat{r}_1 \cdots \hat{r}_{2k}} \vec{e}_{r_1} \otimes_s \cdots \otimes_s \vec{e}_{r_{2j}} \otimes \vec{e}_{\hat{r}_1} \otimes_s \cdots \otimes_s \vec{e}_{\hat{r}_{2k}}.$$

$$D^{(j,k)}(A)T = \sum_{\substack{r_1 \leq r_{2j} \\ \hat{r}_1 \leq \hat{r}_{2k}}} T^{r_1 \cdots r_{2j} \hat{r}_1 \cdots \hat{r}_{2k}} A\vec{e}_{r_1} \otimes_s \cdots \otimes_s A\vec{e}_{r_{2j}} \otimes \bar{A}\vec{e}_{\hat{r}_1} \otimes_s \cdots \otimes_s \bar{A}\vec{e}_{\hat{r}_{2k}} =$$

Usando o fato que $A\vec{e}_r = \sum_s A_r^s \vec{e}_s$, tem-se:

$$D^{(j,k)}(A)T = \sum T^{r_1 \cdots r_{2j} \hat{r}_1 \cdots \hat{r}_{2k}} A_{r_1}^{s_1} \cdots A_{r_{2j}}^{s_{2j}} \bar{A}_{\hat{r}_1}^{\hat{s}_1} \cdots \bar{A}_{\hat{r}_{2k}}^{\hat{s}_{2k}} \vec{e}_{s_1} \otimes_s \vec{e}_{s_{2j}} \otimes \vec{e}_{\hat{s}_1} \otimes_s \cdots \otimes_s \vec{e}_{\hat{s}_{2k}}$$

$$=$$

$$\sum T^{s_1 \cdots s_{2j} \hat{s}_1 \cdots \hat{s}_{2k}} A_{s_1}^{r_1} \cdots A_{s_{2j}}^{r_{2j}} \bar{A}_{\hat{s}_1}^{\hat{r}_1} \cdots \bar{A}_{\hat{s}_{2k}}^{\hat{r}_{2k}} \vec{e}_{r_1} \otimes_s \vec{e}_{r_{2j}} \otimes \vec{e}_{\hat{r}_1} \otimes_s \cdots \otimes_s \vec{e}_{\hat{r}_{2k}}$$

Portando vê-se que :

$$\boxed{D^{(j,k)}(A) : T^{r_1 \cdots r_{2j} \hat{r}_1 \cdots \hat{r}_{2k}} \longmapsto T^{s_1 \cdots s_{2j} \hat{s}_1 \cdots \hat{s}_{2k}} A_{s_1}^{r_1} \cdots A_{s_{2j}}^{r_{2j}} \bar{A}_{\hat{s}_1}^{\hat{r}_1} \cdots \bar{A}_{\hat{s}_{2k}}^{\hat{r}_{2k}}}$$

1.2.1 Representações irreduzíveis unitárias de $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$

Tendo-se $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow = \mathbb{R}^4 \times SL(2, \mathbb{C})$ o grupo de recobrimento universal de \mathcal{P}_+^\uparrow , se tivermos duas transformações de Poincaré seguidas, de acordo com a regra de multiplicação, tem-se:

$$(a, A)(a', A') = (a + \Lambda(A)a', AA')$$

$$SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}_+^\uparrow$$

$$A \longrightarrow \Lambda(A)$$

O objetivo aqui é construir a representação irreduzível unitária de $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ com energia positiva, para isso faça-se o seguinte:

$$U(a) := U(a, \mathbf{1}) =: e^{ia \cdot P}$$

acima, $a \cdot P = a^\mu P_\mu$

$$U(A) := U(0, A)$$

Lema 1.2.6. *O operador quadrimento irá se comportar como um vetor e o mesmo ao quadrado irá comutar com a representação irreduzível unitária de \mathcal{P}_+^\uparrow com isso, tem-se:*

$$U(A)PU(A^{-1}) = \Lambda^{-1}P \quad \text{onde } P = (P_0, P_1, P_2, P_3)$$

$$[U(a, A), P^2] = 0$$

com $P^2 := P \cdot P = \sum_\mu P_\mu P^\mu$ Onde P_μ , operador vetor de energia-momento, o gerador das translações na direção μ .

Seja $|p, \alpha\rangle$ "auto-vetor" (generalizado) simultâneo de (P_0, P_1, P_2, P_3)

$$P_\mu |p, \alpha \rangle = p_\mu |p, \alpha \rangle$$

e \mathcal{H}_p auto espaço simultâneo de P com auto valores $p = (p_0, p_1, p_2, p_3)$, $\mathcal{H}_p = \text{span}\{|p, \alpha \rangle, \alpha = 1, 2, \dots\}$

Lema 1.2.7. *i) Através do Lema 1.2.6 nós temos, $U(A) : \mathcal{H}_p \longrightarrow \mathcal{H}_{\Lambda p}$*

ii) espectro de P é invariante sobre \mathcal{L}_+^\uparrow , isto é, $p \in \text{spec}P \implies \Lambda p \in \text{spec}P$.

De acordo com o Lema 1.2.6, tem-se que $U(a, A)P^2 = P^2U(a, A)$, mas uma representação U de um grupo G em um espaço vetorial V é dita ser uma representação irredutível para operadores se valer a seguinte propriedade: os únicos operadores $B : V \longrightarrow V$ tais que $BU(g) = U(g)B$ para todo g pertencente a G são da forma $B = c\mathbb{1}$ [6]. Como $U(a, \Lambda)$ é uma representação irredutível, conclui-se que $P^2 \in \mathbb{C}I$. Como se quer energia positiva tem-se $P^2 = m^2\mathbb{1}, m \geq 0, p_0 \geq 0$, isso implica que, $\text{spec}P = H_m^+$ ou H_0^+ ou $\{0\}$. Daqui para frente será denominado de concha de massa o $H_m^+ := \{p : p^2 = m^2, p_0 \geq 0\}$.

Observe que se pode também chegar ao mesmo resultado fazendo o uso do Lema de Schur ver (A.3.2) para chegar que $P^2 \in \mathbb{C}I$. Nesse caso, tem-se $AU(g) = U(g)A$ com $A \in \mathbb{C}I$, pelo Lema de Schur.

Pegue o caso em que se tem uma partícula em repouso na concha de massa e com energia positiva, ou seja, estando em \bar{p} . Com isso tem-se:

$$\bar{p} \in \text{spec}P = H_m^+, \bar{p} = (m, 0, 0, 0)$$

$$\mathcal{H}_{\bar{p}} = \text{span}\{|\bar{p}, \alpha \rangle, \alpha = 1, \dots, N\}$$

Para todo $p \in H_m^+$, fixa $A_p \in SL(2, \mathbb{C})$ tal que $\Lambda(A_p) : \bar{p} \longrightarrow p$, ver equação(1.12) e (1.13). Com \mathcal{H}_p : B.O.N. definida por $|p, \alpha \rangle := U(A_p)|\bar{p}, \alpha \rangle \in \mathcal{H}_p$, se aplicar a representação irredutível $U(A)$ em $|p, \alpha \rangle$ e com alguns cálculos, consegue-se chegar à importante representação irredutível unitária para partículas com massa $m > 0$ e spin s arbitrário.

Ψ vive em H_m^+ com valores em \mathbb{C}^{2s+1} , ou seja, $\Psi : H_m^+ \longrightarrow \mathbb{C}^{2s+1}$.

$$\boxed{(U(A, a)\Psi)(p) = e^{ia \cdot p} D^s(R(A, p))\Psi(\Lambda^{-1}p)}$$

D^s é representação irredutível de $SU(2)$. Aqui está se identificando,

$$A_p^{-1}AA_{\Lambda^{-1}p} = R(A, p) \quad (1.9)$$

$R(A, p)$, chamada de rotação de Wigner que deixa invariante o \bar{p} . Vale observar que $R(A, p)^{-1} = R(A^{-1}, \Lambda^{-1}p)$.

Está sendo usada a seguinte notação: $\Psi(p) = \sum_{k=1}^{2s+1} \Psi_k(p)\vec{e}_k \longleftrightarrow \Psi_k(p) :=$ componente k do vetor $\Psi(p) \in \mathbb{C}^{2s+1}$

Será utilizada a medida invariante de Lorentz na concha de massa H_m :

$$d\mu(\mathbf{p}) = \frac{d^3(\mathbf{p})}{2\omega(\mathbf{p})},$$

Em $\omega(\mathbf{p})$ lê se:

$$\omega(\mathbf{p}) = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$$

E defini-se

$$\mathcal{H}^{(m,s)} = L^2(H_m^+, d\mu(p), \mathbb{C}^{2s+1})$$

$$\|\Psi\|^2 = \int_{H_m^+} d\mu(p) \|\Psi(p)\|_s^2$$

Com isso, tem-se:

$$\|U(A)\Psi\|^2 = \int d\mu(p) \|\Psi(\Lambda^{-1}p)\|_s^2 = \int d\mu(\Lambda p) \|\Psi(p)\|_s^2 = \int d\mu(p) \|\Psi(p)\|_s^2 = \|\Psi\|^2$$

Acima foi utilizado o fato que $D^s(R(A, p))$ é unitária.

Ficando com a Representação irredutível unitária (m,s) dada da seguinte forma:

$$\boxed{(U(a, A)\Psi)(p) = e^{ip \cdot a} D^s(R(A, p))\Psi(\Lambda^{-1}p)} \quad (1.10)$$

A representação acima é chamada de representação de Wigner.

1.2.2 Representações Covariantes

D^s possui uma extensão para as representações de $SL(2, \mathbb{C})$, onde iremos trabalhar com duas delas, a saber $D^{(s,0)}(A)$ e $D^{(0,s)}(A)$. Aqui

$$D^{(0,s)}(A)u_1 \otimes_s \dots \otimes_s u_n := A^{*-1}u_1 \otimes_s \dots \otimes_s A^{*-1}u_n$$

Primeiro, faz-se para $D^s(A) := D^{(s,0)}(A)$

Ao definir $(V\Psi)(p) := D^{(s)}(A_p)\Psi(p)$ tem-se

$$\begin{aligned} (VU(A)\Psi)(p) &= D^s(A_p)(U(A)\Psi)(p) = \\ &= D^s(A_p)D^s(R(A,p))\Psi(\Lambda^{-1}p) =: (U^{(s,0)}(A)V\Psi)(p) \end{aligned}$$

Com isso, vê-se que V é um operador de entrelaçamento⁴ entre as representações $U(a, A)$ e $U^{(s,0)}(a, A)$, da seguinte forma:

$$VU(a, A) = U^{(s,0)}(a, A)V$$

Fazendo $\Phi = V\Psi$, chega-se a seguinte representação covariante:

$$\boxed{U^{(s,0)}(A)\Psi(p) := D^{(s,0)}(A)\Psi(\Lambda^{-1}p)} \quad (1.11)$$

Como V deve ser unitário, calcula-se o produto escalar para obter V unitário:

$$\begin{aligned} \|\Psi\|_{s,0}^2 &:= \|V^{-1}\Psi\|_m^2 = \\ &= \int_{H_m^+} d\mu(p) \| (V^{-1}\Psi)(p) \|^2 = \int_{H_m^+} d\mu(p) \| D(A_p^{-1})\Psi(p) \|^2 = \\ &= \int_{H_m^+} d\mu(p) \langle \Psi(p), D^s(A_p^*)^{-2}\Psi(p) \rangle . \end{aligned}$$

⁴Seja G um grupo e V_1, V_2 dois espaços vetoriais (sobre o mesmo corpo) onde atuam duas representações $G : H_1 \rightarrow H_2$, respectivamente em V_1 e V_2 . Um operador $W : V_1 \rightarrow V_2$ tal que $WH_1(g) = H_2(g)W$, para todo $g \in G$, é dito ser um *operador de entrelaçamento* de H_1 e H_2 estes operadores são conhecidos na literatura como *intertwiners*.

A equação acima é válida quando $A_p = A_p^*$.

Tem-se das equações (1.2) e (1.3) que, $\underline{p} := \Lambda(A_p)\bar{p} = A_p \underline{p} A_p^*$ e $\tilde{p} = A^{*-1} \tilde{p} A^{-1}$. Mas por definição $p = (p^0, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^4$, $\underline{p} := p^0 I + \vec{p} \cdot \vec{\sigma}$, e $\tilde{p} := p^0 I - \vec{p} \cdot \vec{\sigma}$, portanto, $\bar{p} = \bar{p}^0 \mathbf{1} = m \mathbf{1}$, e $\tilde{\bar{p}}^0 = \tilde{p}^0 \mathbf{1} = m \mathbf{1}$ então fica-se com $\underline{p} = m A_p A_p^*$ e $\tilde{p} = m A_p^{*-1} A_p^{-1}$.

Escolheu-se uma raiz $\sqrt{\underline{p}}$ da matriz \underline{p} e de forma análoga para \tilde{p} e definiu-se:

$$\boxed{A_p := \sqrt{\frac{\underline{p}}{m}} = A_p^*} \quad (1.12)$$

$$\boxed{A_p^{-1} := \sqrt{\frac{\tilde{p}}{m}} = (A_p^*)^{-1}} \quad (1.13)$$

Um exemplo para $\sqrt{\frac{\underline{p}}{m}}$ ver (2.121). Portanto tem-se um novo espaço de Hilbert dado por;

$$\|\Psi\|_{(s,0)}^2 = \int_{H_m^+} d\mu(p) \langle \Psi(p), D^s\left(\frac{\tilde{p}}{m}\right)\Psi(p) \rangle .$$

$$\mathcal{H}_{(s,0)} = \{\Psi : H_m^+ \mapsto \mathbb{C}^{2s+1}, \|\Psi\|_{(s,0)} < \infty\}$$

$$\boxed{(U^{(s,0)}(a, A)\Psi)(p) := e^{ia \cdot p} D^{(s,0)}(A)\Psi(\Lambda^{-1}p)} \quad (1.14)$$

Agora, para a representação $D^{(0,s)}(A) = D^{(s,0)}(A^{*-1})$

Definiu-se: $(W\Psi)(p) := D^{(s,0)}(C_p)\Psi(p)$, em que a matriz C_p deve ser determinada.

Com isso, tem-se:

$$(WU(A)\Psi)(p) = D^{(s,0)}(C_p)D^{(s,0)}(A_p^{-1}\Lambda A_{\Lambda^{-1}p})\Psi(\Lambda^{-1}p)$$

$$(U^{(0,s)}(A)W\Psi)(p) := D^{(0,s)}(A)(W\Psi)(\Lambda^{-1}p) = D^{(0,s)}(A)D^{(s,0)}(C_{\Lambda^{-1}p})\Psi(\Lambda^{-1}p)$$

Para que as duas equações a cima sejam iguais, com $D^{(0,s)}(A) = D^{(s,0)}(A^{*-1})$, é necessário que se tenha à seguinte condição:

$D^{(s,0)}(C_p)D^{(s,0)}(A_p^{-1}AA_{\Lambda^{-1}p}) = D^{(s,0)}(A^{*-1})D^{(s,0)}(C_{\Lambda^{-1}p})$, que implica:

$$C_p A_p^{-1} A A_{\Lambda^{-1}p} = A^{*-1} C_{\Lambda^{-1}p}$$

Assim, pode-se facilmente verificar que para tal igualdade ocorrer, deve-se ter:

$$C_p = A_p^{-1}$$

Com isso, tem-se: $A_p^{-2}AA_{\Lambda^{-1}} = A^{*-1}A_{\Lambda^{-1}p}^{-1}$, se e somente se, $A^*\widetilde{p}A = \widetilde{\Lambda^{-1}(A)p}$ ver equação (1.3).

Proposição 1.2.8.

$$(W\Psi)(p) := D^{(s,0)}(A_p^{-1})\Psi(p)$$

satisfaz:

$$WU(a, A) = U^{(0,s)}(a, A)W$$

A representação covariante é:

$$\boxed{U^{(0,s)}(A)\Psi(p) = D^{(s,0)}(A^{*-1})\Psi(\Lambda^{-1}p)}$$

Se W é isométrico ou ($U^{(0,s)}$ unitária) tem-se, $\|\Psi\|^2 = \|W^{-1}\Psi\|^2$

$$\begin{aligned} (W^{-1}\Psi)(p) &= D^{(s,0)}(A_p)\Psi(p) \\ \|\Psi\|^2 &= \int_{H_m^+} d\mu(p) \|W^{-1}\Psi\|_{\mathbb{C}^{2s+1}}^2 = \int_{H_m^+} d\mu(p) \|D(A_p)\Psi(p)\|^2 = \\ &= \int_{H_m^+} d\mu(p) \langle \Psi(p), D(A_p^2)\Psi(p) \rangle \end{aligned}$$

$$\|\Psi\|^2 = \int_{H_m^+} d\mu(p) \langle \Psi(p), D(A_p^2)\Psi(p) \rangle$$

Como $A_p^2 = \frac{p}{m}$, fica-se com:

$$\|\Psi\|^2 = \int_{H_m^+} d\mu(p) \langle \Psi(p), D\left(\frac{p}{m}\right)\Psi(p) \rangle$$

Agora, o espaço de Hilbert é dado por:

$$\|\Psi\|_{(0,s)}^2 = \int_{H_m^+} d\mu(p) \langle \Psi(p), D\left(\frac{p}{m}\right)\Psi(p) \rangle$$

$$\mathcal{H}_{(0,s)} = \{\Psi : H_m^+ \mapsto \mathbb{C}^{2s+1}, \|\Psi\|_{(0,s)} < \infty\}$$

$$\boxed{(U^{(0,s)}(a, A)\Psi)(p) := e^{iap} D^{(s,0)}(A^{*-1})\Psi(\Lambda^{-1}p)} \quad (1.15)$$

Visto as representações covariantes do grupo $SL(2, \mathbb{C})$ tem-se um caso que é a representação de Dirac:

$$S(A) := D^{(\frac{1}{2},0)}(A) \oplus D^{(0,\frac{1}{2})}(A)$$

$$S(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{*-1} \end{pmatrix}$$

Com espaço de Hilbert da seguinte forma:

$$\mathcal{H}^D = \mathcal{H}_{(\frac{1}{2},0)} \oplus \mathcal{H}_{(0,\frac{1}{2})} = \{(\psi, \varphi) : \psi \in \mathcal{H}_{(\frac{1}{2},0)}, \varphi \in \mathcal{H}_{(0,\frac{1}{2})}\}$$

$$\|(\psi, \varphi)\|_s^2 := \|\psi\|_{\frac{1}{2},0+}^2 + \|\varphi\|_{0,\frac{1}{2}}^2$$

$$\|(\psi, \varphi)\|_s^2 = \int_{H_m^+} d\mu(p) \{ \langle \psi(p), D^{\frac{1}{2}}(A_p^{*-2})\psi(p) \rangle + \langle \varphi(p), D^{\frac{1}{2}}(A_p^2)\varphi(p) \rangle \}$$

$$(U^{(s,0)}(a, A)(\Psi))(p) := e^{iap} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{*-1} \end{pmatrix} \cdot \Psi(\Lambda^{-1}p).$$

$$(U^{(s,0)}(a, A)\Psi)(p) := e^{iap} \cdot (D^{(\frac{1}{2},0)} \oplus D^{(0,\frac{1}{2})})(A) \cdot \Psi(\Lambda^{-1}p). \quad (1.16)$$

Com

$$\Psi(p) = \begin{pmatrix} \psi(p) \\ \varphi(p) \end{pmatrix}$$

Com $\Psi : \mathcal{H}_m^+ \rightarrow \mathbb{C}^4$

1.3 Espaço Fock

Outro conceito importante para esse trabalho é do espaço de Fock, que em mecânica quântica, é um sistema algébrico (um espaço de Hilbert) usado para descrever um estado quântico com um número variável ou desconhecido de partículas. Tecnicamente, o espaço de Fock é o espaço de Hilbert preparado como soma direta dos produtos

tensoriais dos espaços de Hilbert para uma partícula. \mathcal{H}^1 é definido como o estado de uma partícula e $\mathcal{H}^{1^{\otimes}} := \mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}^1$.

A fim de introduzir os subespaços relevantes para a descrição de bósons e férmions, definiu-se o operador projetor de simetrização ou anti-simetrização sobre o espaço de Fock. Primeiro definiu-se:

$$U_n^\epsilon(\pi)\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n := \epsilon(\pi)\phi_{\pi^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \phi_{\pi^{-1}(n)} \quad (1.17)$$

Para todo ϕ_1, \dots, ϕ_n pertencente ao espaço de Hilbert. Agora pode-se definir o operador projetor de simetrização ou anti-simetrização. Sua imagem são tensores totalmente (anti)-simétricos.

Definição 1.3.1. *Portanto, tem-se o operador de simetrização ou anti-simetrização:*

$$E_n^\epsilon := \frac{1}{n!} \sum_{\pi} U_n^\epsilon(\pi) \quad (1.18)$$

O Espaço de Fock é definido da seguinte forma:

$$\mathcal{H}^\epsilon := \bigoplus_{n=0}^{\infty} E_n^\epsilon \mathcal{H}_1^{\otimes n} = E^\epsilon \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_1^{\otimes n} \text{ para } n \geq 2 \quad (1.19)$$

$\mathcal{H}^{1^\epsilon} := \mathcal{H}^1$; $\mathcal{H}^0 = \mathbb{C}$ (vácuo $\Omega = (1, 0, 0, \dots)$); o espaço Fock para bósons temos $\epsilon = 1$ e para férmions $\epsilon = -1$.

Descrevem-se duas álgebras de observáveis associados bósons e férmions, respectivamente. Ambas são definidas com o auxílio de partícula e operadores "aniquilação" e "criação" são apresentadas como se segue. Para cada ϕ pertencente ao espaço de Hilbert, pode-se definir os operadores $b(\psi)$ e $b^*(\psi)$, em \mathcal{H}^ϵ ver equação (1.19) da seguinte forma:

Definição 1.3.2.

$$b(\psi)(\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n) := \sqrt{n}(\psi, \phi_1)\phi_2 \otimes \dots \otimes \phi_n.$$

Tem-se a restrição de,

$$b(\psi)\Omega = 0$$

$$b^*(\psi)\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n := \sqrt{n+1}\psi \otimes \phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_n.$$

Com isso, finalmente definiram-se os operadores aniquilação $a(\psi)$ e criação $a^*(\psi)$:

Definição 1.3.3. "*Aniquilador/ Criador*"

$$a(\psi) = E^\epsilon b(\psi) E^\epsilon$$

$$a^*(\psi) = E^\epsilon b^*(\psi) E^\epsilon$$

E^ϵ (*anti-*) *simetrizador*, ver equação (1.19).

Verifica-se, facilmente, que,

$$a(\psi) = E^\epsilon b(\psi) E^\epsilon = b(\psi) E^\epsilon$$

$$a^*(\psi) = E^\epsilon b^*(\psi) E^\epsilon = E^\epsilon b^*(\psi),$$

porque $b(\psi)$ deixa o subespaço de Hilbert simetrizado ou anti-simetrizado invariante. Note que os mapas $\psi \mapsto a(\psi)$ são anti-lineares , mas os mapas $\psi \mapsto a^*(\psi)$ são lineares.[5]

As relações de comutação que ligam os operadores aniquilação e criação são da seguinte forma:

$$[a(\psi), a^*(\phi)]_\pm = (\psi, \phi) \mathbf{1}$$

e

$$[a(\psi), a(\phi)]_\pm = [a^*(\psi), a^*(\phi)]_\pm = 0$$

$[A, B]_\pm := AB - \epsilon BA$, com $\epsilon = -1$ para férmions e $\epsilon = +1$ para bósons.

Em $L^2(\mathbb{R}^\nu, d\mu)$, onde $d\mu$ é alguma medida em \mathbb{R}^ν , pode-se definir as distribuições $a^*(p)$ e $a(p)$ como:

$$a^*(\Psi) =: \int d\mu(p) \Psi(p) a^*(p) \tag{1.20}$$

$$a(\Psi) =: \int d\mu(p) \overline{\Psi(p)} a(p) \tag{1.21}$$

Onde $\overline{\Psi(p)}$ é o complexo conjugado de $\Psi(p)$. Os quais satisfazem as seguintes relações:[5]

No caso de bosónico, $\epsilon = +1$

$$[a(\vec{p}), a^*(\vec{q})]_\epsilon = 2\omega(\vec{p}) \cdot \delta(\vec{p} - \vec{q}), \mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} E^+ \mathcal{H}^1 \tag{1.22}$$

No caso fermiônico, $\epsilon = -1$

$$\{a_k(\vec{p}), a^*_l(\vec{q})\} = 2\omega(\vec{p}) \cdot \delta_{kl}(\vec{p} - \vec{q}), \mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} E^n \mathcal{H}^1 \quad (1.23)$$

Note que estamos usando as definições $[A, B] = AB - BA$ e $\{A, B\} = AB + BA$

Onde: \mathcal{H}^1 estado de uma partícula, E^\pm operador que simetriza(+) e anti-simetriza (-) respectivamente.

Capítulo 2

Campos Quânticos

2.1 Introdução

A Teoria Quântica de Campos é a aplicação conjunta da mecânica quântica e da relatividade especial aos campos que fornecem a estrutura teórica usada na física de partículas elementares. Em particular, a teoria quântica do campo eletromagnético e a de Dirac, conhecida como eletrodinâmica quântica (tradicionalmente abreviada como QED, do inglês "Quantum Electrodynamics"), é a teoria com alguns modelos verificados experimentalmente com maior precisão na Física. Resumidamente, pode-se dizer que a teoria quântica dos campos é uma teoria criada com o objetivo de descrever os campos de forma quantizada (na denominação mais antiga se chama segunda quantização que é uma das várias abordagens para a construção de um modelo quântico). Por outro lado, a mecânica quântica lida essencialmente com a quantização da matéria e da energia. A teoria quântica dos campos considera cada espécie de partículas que compõem a matéria como excitações de um campo fundamental. Os Campos que transmitem forças entre partículas de matéria também possuem excitações fundamentais que podem ser interpretadas como partículas.

A origem da teoria quântica dos campos é marcada pelos estudos de Max Born e Pascual Jordan, de 1925, sobre o problema da computação da potência irradiada de um

átomo em uma transição energética.

Em 1926, Born, Jordan e Werner Heisenberg formularam a teoria quântica do campo eletromagnético desprezando tanto a polarização como a presença de fontes, levando ao que se chama hoje de uma teoria do campo livre. Para tanto, usaram o procedimento da quantização canônica.

Três razões principais motivaram o desenvolvimento da teoria quântica dos campos:

- i) A necessidade de uma teoria que lidasse com a variação do número de partículas; Pois experimentalmente podemos criar partículas, um exemplo é na colisão de um elétron com positron onde se tem a criação de fótons.
- ii) A necessidade de conciliação entre as duas teorias: mecânica quântica e a relatividade;
- iii) A necessidade de lidar com estatísticas de sistemas de muitas partículas.

Um campo, no esquema conceitual da teoria dos campos, é uma entidade com infinitos graus de liberdade, cujo estado de mais baixa energia é denominado vácuo (Ω), correspondente ao estado de ausência de partículas.

Com mais detalhes, o campo quântico φ vive em \mathbb{R}^4 com valores operadores em \mathcal{H} , ou seja, $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \{\text{operadores em } \mathcal{H}\}$. Portanto, para definirmos um campo quântico, devemos especificar um espaço de Hilbert \mathcal{H} , cujos vetores descrevem os estados dos sistemas e uma representação unitária do grupo de Poincaré. Nesse caso, o espaço de Hilbert deve apresentar as seguintes especificações:

- i) $U(a, A)$, representação unitária de $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow : \text{spec}(P) = \{(p_0, \dots, p_3) : p_\mu \in \text{spec} P_\mu\} \subset \bar{V}_+ = \{p^2 \geq 0, p^0 \geq 0\}$.

Como a energia deve ser positiva em qualquer referencial, e devido a covariância de Lorentz, o espectro deve ser em \bar{V}_+ .

- ii) O estado de vácuo denominado por $\mathcal{H}^0 = \mathbb{C}\Omega$, $\Omega =:$ vetor vácuo; que satisfaz a seguinte propriedade, $U(a, A)\Omega = \Omega$, para todo $(a, A) \in \tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ implicando que $P_\mu\Omega = 0$.

$$[P_\mu = \frac{1}{i} \frac{d}{dt} U(te_\mu)|_{t=0}]$$

$\mathcal{H}^0 =$ auto-espaço de P com auto-valor 0.

O campo quântico $\varphi(x)$, no caso escalar, deve satisfazer as seguintes exigências:

Covariância:

$$U(a, A)\varphi(x)U(a, A)^{-1} = \varphi(a + \Lambda x) \quad (2.1)$$

Causalidade:

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = 0 \quad (2.2)$$

se $(x - y)^2 < 0$ (intervalo entre dois eventos no \mathbb{R}^4 , denominado de tipo espaço)

No caso de um campo quântico com spin s arbitrário, sendo $D(A)$ uma representação não unitária finita de $SL(2, \mathbb{C})$, $\cong D(A)_{ij}$, com $i, j = \{1, \dots, N\}$, o campo $\varphi_i(x)$ irá se transformar conforme a representação D da seguinte forma:

Covariância:

$$U(a, A)\varphi_i(x)U(a, A)^{-1} = \sum_j D(A^{-1})_{ij}\varphi_j(\Lambda x + a) \quad (2.3)$$

E também deve satisfazer a relação de causalidade:

Causalidade:

$$[\varphi_i(x), \varphi_j(y)] = 0 \quad (2.4)$$

$$[\varphi_i(x), \varphi_j^*(y)] = 0 \quad (2.5)$$

se $(x - y)^2 < 0$ (intervalo entre dois eventos no \mathbb{R}^4). Observe que as equações acima devem ser entendidas no sentido de distribuição. Os campos acima são denominados campos quânticos com localização tipo ponto.

Se exigir que φ seja observável localizado em x , tem-se:

$$\varphi(x) = \varphi(x)^*. \quad (2.6)$$

Se $\varphi(x) \notin \mathbb{C}1$, então $\varphi(x)$ deve ser distribuição.[7]

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \ni f$. Com isso, tem-se que o campo quântico φ é uma distribuição que associa a cada função de teste f um operador $\varphi(f) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Logo, tem-se que:

$$\begin{aligned} \varphi(f) &:= \int dx f(x)\varphi(x) \\ \mathcal{D} \subset \mathcal{H} &: \varphi(f_1) \dots \varphi(f_n)\Omega \in \mathcal{D} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Vetores dessa forma geram o \mathcal{H} .

Note que:

$$\varphi(x) = \varphi(x)^* \quad \text{isso implica que} \quad \varphi(f)^* = \varphi(\bar{f}) \quad (2.8)$$

Especifica-se aqui, o conceito de um campo quântico com localização tipo-string.

Sendo: $e \in H := \{e \in \mathbb{R}^4 : e \cdot e = -1\}$, $e = (e^0, \mathbf{e})$. A string, com origem em $x \in \mathbb{R}^4$ e direção do tipo espaço $e \in H$, é o subconjunto $S_{x,e} \subset \mathbb{R}^4$ definido por

$$S_{x,e} = \{x + te; t \geq 0\} \quad (2.9)$$

O campo quântico com localização tipo-string φ é uma distribuição que associa a cada função de teste $f : \mathbb{R}^4 \times H \rightarrow \mathbb{C}$ um operador $\varphi(f) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, e este deve satisfazer as seguintes condições:

Covariância:

$$U(a, A)\varphi_i(x, e)U(a, A)^{-1} = \sum_{j=1}^N D(A^{-1})_{ij}\varphi_j(\Lambda x + a, \Lambda e), \quad \text{com} \quad \Lambda = \Lambda(A) \quad (2.10)$$

para toda transformação de Poincaré $P(a, \Lambda) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$.

Causalidade:

$$[\varphi_i(x, e), \varphi_j(x', e')] = 0 \quad (2.11)$$

Se $S_{x,e}$ e $S_{x',e'}$ são causalmente disjuntos, isto é, $(z - z')^2 < 0$ quaisquer que sejam $z \in S_{x,e}$ e $z' \in S_{x',e'}$.

Primeiramente é necessário fazer um estudo de campos quânticos com localização puntiforme, obedecendo a seguinte ordem: campo quântico livre escalar e campo quântico livre com spin s arbitrário. Feito tal construção, parte-se para a construção no caso do campo quântico com localização tipo-string.

No entanto, deve-se especificar que, em um campo livre, partículas podem ser criadas e destruídas através de dois operadores: o operador criação (a^*) e o operador aniquilação (a). Ambos já foram definidos no subitem (1.3.3).

Os operadores criação e aniquilação, que agem sobre a função de onda, respectivamente simbolizando a criação e a aniquilação de partículas dotadas de momento,

possibilidade exigida pela relatividade, agem sobre os estados de um tipo específico de espaço de Hilbert, chamado espaço de Fock ver equação (1.19), criam e destroem as partículas. Entretanto, tem-se uma restrição $\mathbf{a}\Omega = 0$, o que quer dizer que não pode haver aniquilação sobre o vácuo, já que nesse caso não há partículas a serem aniquiladas.

2.2 Campo Quântico Livre escalar

O campo livre escalar é caracterizado por:

- i) $(\square + m^2)\varphi(x) = 0$ equação de Klein- Gordon , ou alternativamente por,
- ii) $\varphi(x)\Omega \in \mathcal{H}^1 = \mathcal{H}^{(m,0)} \cong$ Representação unitária irredutível de $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ correspondente a massa $m > 0$, e spin $s = 0$, estado de uma partícula.

Tem-se então:

$$(U(a, A)\varphi(x)\Omega)(p) = e^{ia \cdot p}(\varphi(x)\Omega)(\Lambda^{-1}p). \quad (2.12)$$

||

$$(U(a, A)\varphi(x)U(a, A)^{-1}\Omega)(p) = (\varphi(a + \Lambda x)\Omega)(p). \quad (2.13)$$

Fazendo $x = 0$ e $\Lambda = 1$ nas duas equações (2.12) e (2.13), pode-se concluir que $(\varphi(x)\Omega)(p) = e^{ix \cdot p}v(p)$ com $v(p) = (\varphi(0)\Omega)(p)$.¹

Facilmente se percebe através das equações (2.12) e (2.13), quando se faz $a = 0$ que, $(\varphi(x)\Omega)(\Lambda^{-1}p) = (\varphi(x)\Omega)(p)$, obtém-se $e^{ix \cdot \Lambda^{-1}p}v(\Lambda^{-1}p) = e^{i\Lambda x \cdot p}v(p)$. Com isso, chega-se à equação.

$$v(\Lambda^{-1}p) = v(p), \quad p \in \mathcal{H}_m^+. \quad (2.14)$$

Como \mathcal{L}_+^\uparrow age transitivamente em \mathcal{H}_m^+ , fica-se a conclusão de que $v(p)$ é uma constante e que, por convenção, faze-se a constante igual² a $(2\pi)^{-\frac{d-1}{2}}$, obtendo com tudo isso a

¹Podemos também a partir das equações (2.12) e (2.13) verificar que $e^{-ix \cdot p}(\varphi(x)\Omega)(p)$, logo é independente de x , por esta razão fizemos tal definição para $v(p)$.

²tal escolha da constante é feita de forma a satisfazer a relação canônica de comutação $[\varphi(0, \mathbf{x}), \dot{\varphi}(0, \mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$

seguinte equação na dimensão 4 do espaço-tempo:

$$(\varphi(x)\Omega)(p) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}e^{ix \cdot p} = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d\mu(q)e^{iqx}(a^*(q)\Omega)(p) \quad (2.15)$$

Com $p \in \mathcal{H}_m^+$.

Mas como se espera que $\varphi^*(x)\Omega \neq 0$, pois de acordo com o Teorema de Reeh-Schlieder [9] (Teorema 4.3) isto implica $\varphi^*(x) = 0$, com isso, defini-se $\varphi(x)$ da seguinte forma:

$$\varphi(x) := (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d\mu(q)e^{iqx}a^*(q) + A, \quad (2.16)$$

e deve-se ter $A\Omega = 0$. Porém $A^*\Omega \neq 0$, e devido ao Teorema de Bisognano- Wichmann [11, 12], tem-se $\varphi^*(x)\Omega \in \mathcal{H}^1$. Portanto aplicando o adjunto na equação (2.16), pode-se encontrar o A . Assim, tem-se $\varphi^*(x)\Omega = A^*\Omega$, deve-se então encontrar o $\varphi^*(x)\Omega$.

Tem-se agora:

$$(U(a, A)\varphi^*(x)\Omega)(p) = e^{ia \cdot p}(\varphi^*(x)\Omega)(\Lambda^{-1}p). \quad (2.17)$$

||

$$(U(a, A)\varphi^*(x)U(a, A)^{-1}\Omega)(p) = (\varphi^*(a + \Lambda x)\Omega)(p). \quad (2.18)$$

Fazendo $x = 0$ e $\Lambda = 1$ nas equações (2.17) e (2.18) pode-se concluir que $(\varphi^*(x)\Omega)(p) = e^{ix \cdot p}\overline{u(p)}$ com $\overline{u(p)} = (\varphi^*(0)\Omega)(p)$.

Facilmente se percebe através das equações (2.17) e (2.18), quando se faz $a = 0$ que, $(\varphi^*(x)\Omega)(\Lambda^{-1}p) = (\varphi^*(x)\Omega)(p)$, obtém-se $e^{ix \cdot \Lambda^{-1}p}\overline{u(\Lambda^{-1}p)} = e^{i\Lambda x \cdot p}\overline{u(p)}$. Com isso, chega-se à equação.

$$\overline{u(\Lambda^{-1}p)} = \overline{u(p)}, \quad p \in \mathcal{H}_m^+. \quad (2.19)$$

Como \mathcal{L}_+^\uparrow age transitivamente em \mathcal{H}_m^+ , fica-se com a conclusão de que $\overline{u(p)}$ é uma constante que, pela mesma justificativa anterior, será igual a constante no caso de $v(p)$, obtendo com tudo isso a seguinte equação na dimensão 4 do espaço-tempo:

$$(\varphi^*(x)\Omega)(p) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}e^{ix \cdot p} = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d\mu(q)e^{iqx}(a^*(q)\Omega)(p) \quad (2.20)$$

Com $p \in \mathcal{H}_m^+$. De acordo com a equação (2.20), tem-se que:

$$A = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d\mu(q) e^{-iqx} a(q)$$

Com isso, chega-se:

$$(\varphi(x)\Omega)(p) := (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d\mu(q) e^{iqx} (a^*(q)\Omega)(p) + e^{-iqx} (a(q)\Omega)(p)$$

E obtém-se o campo quântico livre escalar:

$$\boxed{\varphi(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d\mu(p) \{e^{ipx} a^*(p) + e^{-ipx} a(p)\}} \quad (2.21)$$

A equação acima é uma forma simbólica, pois o significado é:

$$\boxed{\varphi(f) = a^*(Ef) + a(E\bar{f})},$$

$Ef := \varphi(f)\Omega = \sqrt{2\pi} \cdot \widehat{f}|_{\mathcal{H}_m^+} \equiv a^*(Ef)\Omega$ uma aplicação linear, $E\bar{f} := \varphi^*(f)\Omega = \sqrt{2\pi} \cdot \widehat{\bar{f}}|_{\mathcal{H}_m^+} \equiv a(E\bar{f})\Omega$ uma aplicação anti-linear e $\varphi(f) = \int dx f(x)\varphi(x)$.

Tem-se:

$$\widehat{f}(p) := (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int d^d x f(x) e^{ix \cdot p},$$

com d sendo o valor da dimensão espaço-tempo.

Usando as equações (1.20) e (1.21), tem-se:

$$\varphi(f) = a^*(Ef) + a(E\bar{f}) = \int d\mu(p) \{a^*(p)Ef(p) + a(p)\overline{E\bar{f}}(p)\} \quad (2.22)$$

com $d = 4$ obtém-se a seguinte equação.

$$\varphi(f) = \int dx^4 f(x) (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d\mu(p) \{e^{ip \cdot x} a^*(p) + e^{-ip \cdot x} a(p)\} \quad (2.23)$$

Note que se conseguiu criar o campo escalar livre, simplesmente através de exigências feitas no começo. Vale aqui mencionar que a solução é única pelo teorema de Jost-Schroer [9](Teorema 4.15), em que se teve somente uma constante livre e que, por convenção, fez-se tal constante igual a $(2\pi)^{-\frac{3}{2}}$.

Com o campo, será verificada a covariância e condição de causalidade, mas, antes disso, será visto o comportamento dos operadores criação e aniquilação sobre transformações definidos pelas equações (1.20) e (1.21).

$$U(a, A)a^*(\Phi)U(a, A)^{-1} = \int d\mu(p)\Phi(p)U(a, A)a^*(p)U(a, A)^{-1} \quad (2.24)$$

mas,[5]

$$U(a, A)a^*(\Phi)U(a, A)^{-1} = a^*(U(a, A)\Phi) = \quad (2.25)$$

$$= \int d\mu(p)(U(a, A)\Phi)(p)a^*(p) = \int d\mu(p)e^{ip \cdot a}\Phi(\Lambda^{-1}p)a^*(p) \quad (2.26)$$

Fazendo $\Lambda^{-1}p = q$ e umas pequenas modificações, pode-se comparar as equações (2.24) e (2.26), e obter-se:

$$U(a, A)a^*(p)U(a, A)^{-1} = e^{i\Lambda p \cdot a}a^*(\Lambda p) \quad (2.27)$$

De forma análoga, pode-se fazer para o operador aniquilação.

$$U(a, A)a(\Phi)U(a, A)^{-1} = \int d\mu(p)\overline{\Phi}(p)U(a, A)a(p)U(a, A)^{-1} \quad (2.28)$$

mas,

$$U(a, A)a(\Phi)U(a, A)^{-1} = a(U(a, A)\Phi) = \quad (2.29)$$

$$= \int d\mu(p)\overline{(U(a, A)\Phi)}(p)a(p) = \int d\mu(p)e^{-ip \cdot a}\overline{\Phi}(\Lambda^{-1}p)a(p) \quad (2.30)$$

Fazendo $\Lambda^{-1}p = q$ e umas pequenas modificações, pode-se comparar as equações (2.28) e (2.30) e obter-se,

$$U(a, A)a(p)U(a, A)^{-1} = e^{-i\Lambda p \cdot a}a(\Lambda p) \quad (2.31)$$

Agora, esta-se preparado para mostrar a covariância (2.1) e causalidade (2.2).

Demonstração. Covariância

$$U(a, A)\varphi(x)U(a, A)^{-1} = U(a, A)(2\pi)^{-3} \int d\mu(p)\{e^{ip \cdot x}a^*(p) + e^{-ip \cdot x}a(p)\}U(a, A)^{-1} = \quad (2.32)$$

$$= (2\pi)^{-3} \int d\mu(p)\{e^{ip \cdot x}U(a, A)a^*(p)U(a, A)^{-1} + e^{-ip \cdot x}U(a, A)a(p)U(a, A)^{-1}\} = \dots \quad (2.33)$$

Através das equações (2.27) e (2.31) e de simples substituições de varáveis, será obtido a relação de covariância.

$$\dots = (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) \{e^{ip \cdot (\Lambda x + a)} a^*(p) + e^{-ip \cdot (\Lambda x + a)} a(p)\} = \varphi(\Lambda x + a). \quad (2.34)$$

□

Agora será mostrada a causalidade, mas para tal será definido o que se chama de "função" de dois pontos. A partir dela, será conseguido verificar a causalidade.

A "Função" (Distribuição) de dois pontos para o campo escalar é definida através da seguinte equação.

$$w_2(x, y) := (\Omega, \varphi(x)\varphi(y)\Omega) \quad \text{e pela covariância 2.1, é fácil ver que:} \quad (2.35)$$

$$w_2(x, y) = w_2(\Lambda x + a, \Lambda y + a) \quad (2.36)$$

Demonstração. Pode-se escrever, usando a equação (2.1) que,

$$\begin{aligned} w_2(\Lambda x + a, \Lambda y + a) &= (\Omega, U(A)\varphi(x)U(A)^{-1}U(A)\varphi(y)U(A)^{-1}\Omega) = \\ &= (\Omega, U(A)\varphi(x)\varphi(y)U(A)^{-1}\Omega) = \dots \end{aligned}$$

Agora, usando o fato de que $U(a, A)\Omega = \Omega$, para todo $(a, A) \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ tem-se

$$= \dots (\Omega, \varphi(x)\varphi(y)\Omega) = w_2(x, y)$$

□

Escreve-se a função de dois pontos da seguinte forma $w_2(x, y) = w_2(x - y, 0) := w(x - y)$. Com isso, vê-se que em particular a "função" de dois pontos, só depende de $x - y$, por isso será escrito $w_2(x, y) = w(x - y)$

Escrevendo de forma explícita a "função" de dois pontos, tem-se:

$$(\Omega, \varphi(x)\varphi(y)\Omega) = (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) \int d\mu(q) (\Omega, e^{-ip \cdot x} a(p) \cdot e^{iq \cdot y} a^*(q)\Omega) = \quad (2.37)$$

$$= (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) d\mu(q) e^{-i(p \cdot x - q \cdot y)} (\Omega, a(p)a^*(q)\Omega) = \quad (2.38)$$

$$= (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) \frac{d^3\vec{q}}{2\omega(\vec{q})} e^{-i(p\cdot x - q\cdot y)} (\Omega, [a(p), a^*(q)] - a^*(q)a(p)\Omega) = \quad (2.39)$$

$$= (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) \frac{d^3\vec{q}}{2\omega(\vec{q})} e^{-i(p\cdot x - q\cdot y)} (2\omega(\vec{p})\delta(\vec{p} - \vec{q})) = \dots \quad (2.40)$$

Utilizou-se a medida já definida anteriormente e também utilizou-se a equação (1.22), com isso chegou-se a função de dois pontos.

$$\dots w_2(x, y) = w(x - y) = (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) e^{-ip\cdot(x-y)} \quad (2.41)$$

Pode-se, agora, calcular o comutador $[\varphi(x), \varphi(y)]$ para verificar a condição de causalidade equação (2.2).

Causalidade:

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) d\mu(q) [e^{ip\cdot x} a^*(p) + e^{-ip\cdot x} a(p), e^{iq\cdot y} a^*(q) + e^{-iq\cdot y} a(q)] = \quad (2.42)$$

$$= (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) d\mu(q) \{e^{ip\cdot x - iq\cdot y} [a^*(p), a(q)] + e^{-ip\cdot x + iq\cdot y} [a(p), a^*(q)]\} \quad (2.43)$$

Mais uma vez, pode-se utilizar a equação (1.22) e obter.

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) \{e^{-ip\cdot(x-y)} - e^{ip\cdot(x-y)}\}. \quad (2.44)$$

Note que obteve-se o seguinte resultado.

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = w(x - y) - w(y - x). \quad (2.45)$$

Portanto, para ter a condição de causalidade satisfeita, deve então ter, para $(x - y)^2 < 0$.

$$i\Delta(x - y) := w(x - y) - w(y - x) = 0 \quad \text{que implica} \quad w(x - y) = w(y - x) \quad (2.46)$$

Pode-se encontrar a condição de causalidade de uma forma mais simples, levando em conta que todos os comutadores relevantes são múltiplos da $\mathbf{1}$ (ver equação (2.42)) tem-se que $[\varphi(x), \varphi(y)] = c\mathbf{1}$, e c é dado pelo valor esperado do comutador. Será calculado o valor esperado no estado do vácuo e terá então:

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = (\Omega, [\varphi(x), \varphi(y)]\Omega)\mathbf{1} = i\Delta(x - y)\mathbf{1}$$

Mostra-se a equação (2.46).

Demonstração.

$$i\Delta(x-y) = (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) \{e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}\} = -(2\pi)^{-3} (2i) \int d\mu(p) \text{sen}[p \cdot (x-y)] = \quad (2.47)$$

$$= (2\pi)^{-3} (2i) \int d\mu(p) \text{sen}[-p \cdot (x-y)] = \quad (2.48)$$

Sendo $p = (\omega(\mathbf{p}), \mathbf{p})$ e $x = (x^0, \mathbf{x})$ e $y = (y^0, \mathbf{y})$. Primeiro, será calculado para x^0 e y^0 iguais a 0, com isso, fica-se com:

$$i\Delta(0, \mathbf{x} - \mathbf{y}) = w(0, \mathbf{x} - \mathbf{y}) - w(0, \mathbf{y} - \mathbf{x}) = -(2\pi)^{-3} (2i) \int \frac{d^3(\mathbf{p})}{2\omega(\mathbf{p})} \text{sen}[\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})] = \quad (2.49)$$

$$= (2\pi)^{-3} (2i) \int \frac{d^3(\mathbf{p})}{2\omega(\mathbf{p})} \text{sen}[-\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})], \quad (2.50)$$

se faz uma mudança de variável de $+\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ tem-se

$$(2\pi)^{-3} (2i) \int \frac{d^3(-\mathbf{p})}{2\omega(\mathbf{p})} \text{sen}[\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})]. \quad (2.51)$$

e usa-se que $d^3(-\mathbf{p})$ é igual a $d^3(\mathbf{p})$. Logo, obtém-se

$$(2\pi)^{-3} (2i) \int \frac{d^3(\mathbf{p})}{2\omega(\mathbf{p})} \text{sen}[\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})]. \quad (2.52)$$

Comparando esta última equação com a equação (2.49) implica que $w(0, \mathbf{x} - \mathbf{y}) - w(0, \mathbf{y} - \mathbf{x}) = 0$. Se $\mathbf{x} - \mathbf{y} \neq 0$.

Observa-se que, para $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$, tem-se $i\Delta(0, \mathbf{x} - \mathbf{y}) = i\Delta(\Lambda(0, \mathbf{x} - \mathbf{y}))$, o que, pela covariância, fica facilmente determinado ver equação (2.36), implicando a invariância sobre transformação de Lorentz.

Para completar a demonstração, tem-se que para $(x-y)^2 < 0$ existe $\Lambda, \mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ tal que, $x - y = \Lambda(0, \mathbf{z})$, logo $i\Delta(x - y) = i\Delta(\Lambda(0, \mathbf{z})) = 0$. Com isso, finaliza-se a demonstração. \square

2.3 Campo Quântico livre com spin s arbitrário

Durante esse desenvolvimento, será utilizada a representação de Wigner, ver equação abaixo, no espaço de uma partícula \mathcal{H}^1 .

$$(U(a, A)\varphi)(p) = e^{ip \cdot a} D^s(R(A, p))\varphi(\Lambda(A)^{-1}p).$$

Será feita de forma semelhante a feita no caso do campo livre escalar. Será exigido que $\varphi_i(x)\Omega \in \mathcal{H}^1 \cong \mathcal{H}^{(m,s)}$, representação unitária irredutível de $\widetilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ correspondente a massa $m > 0$ e spin s arbitrário.

Tem-se então:

$$(U(a, A)\varphi_i(x)\Omega)_k(p) = e^{ip \cdot a} D^s_{ij}(R(A, p))(\varphi_j(x)\Omega)_k(\Lambda(A)^{-1}p) \quad (2.53)$$

||

$$(U(a, A)\varphi_i(x)U(a, A)^{-1}\Omega)_k(p) = D_{ij}(A^{-1})(\varphi_j(a + \Lambda x)\Omega)_k(p). \quad (2.54)$$

Fazendo $\Lambda = 1$ e $x = 0$ nas duas equações (2.53) e (2.54) pode-se concluir que $(\varphi_i(x)\Omega)_k(p) = e^{ip \cdot x} v_{ik}(p)$ com $k = -s \dots s$ e $i = 1, \dots, N$. e

$$\boxed{v_{ik}(p) := (\varphi_i(0)\Omega)_k(p).}$$

Portanto, tem-se:

$$(\varphi_i(x)\Omega)_k(p) = e^{ip \cdot x} v_{ik}(p) = \int d\mu(q) e^{iqx} v_{il} a_l^*(q) \Omega)_k(p), \quad (2.55)$$

com $p \in \mathcal{H}_m^+$.

Mas, como se quer $\varphi_i^*(x)\Omega \neq 0$, pois de acordo como Teorema de Reeh-Schlieder[9](Teorema 4.3), isso implica $\varphi_i^*(x) = 0$, com isso, defini-se o $\varphi_i(x)$ da seguinte forma:

$$\varphi_i(x) := \int d\mu(q) e^{iqx} v_{il} a_l^*(q) + A_i, \quad (2.56)$$

Deve-se ter $A\Omega = 0$. Porém $A^*\Omega \neq 0$, e devido ao Teorema de Bisognano- Wichmann [11, 12], tem-se então $\varphi_i^*(x)\Omega \in \mathcal{H}^1$. Portanto, aplicando o adjunto na equação (2.56) pode-se encontrar o A . Tem-se $(\varphi_i^*(x)\Omega)_k(p) = (A_i^*\Omega)_k(p)$, logo deve-se então encontrar $(\varphi_i^*(x)\Omega)_k(p)$.

Tem-se agora:

$$(U(a, A)\varphi_i^*(x)\Omega)_k(p) = e^{ip \cdot a} D^s_{ij}(R(A, p))(\varphi_j^*(x)\Omega)_k(\Lambda(A)^{-1}p) \quad (2.57)$$

||

$$(U(a, A)\varphi_i^*(x)U(a, A)^{-1}\Omega)_k(p) = \overline{D_{ij}(A^{-1})}(\varphi_j^*(a + \Lambda x)\Omega)_k(p). \quad (2.58)$$

Fazendo $\Lambda = 1$ e $x = 0$ nas duas equações (2.57) e (2.58), pode-se concluir que $(\varphi_i^*(x)\Omega)_k(p) = e^{ip \cdot x} \overline{u_{ik}(p)}$ com $k = -s \dots s$ e $i = 1, \dots, N$. e

$$\boxed{u_{ik}(p) := (\varphi_i^*(0)\Omega)_k(p).}$$

Portanto, tem-se

$$(\varphi_i^*(x)\Omega)_k(p) = e^{ip \cdot x} \overline{u_{ik}(p)} = \int d\mu(q) e^{iqx} \overline{u_{il}(q)} (a_l^*(q)\Omega)_k(p), \quad (2.59)$$

com $p \in \mathcal{H}_m^+$. De acordo com a equação (2.59), tem-se que:

$$A_i = \int d\mu(q) e^{-iqx} u_{il}(q) a_l(q),$$

Com isso, obtém-se:

$$(\varphi_i(x)\Omega)_k(p) = \int d\mu(q) e^{iqx} v_{il}(q) a_l^*(q) \Omega)_k(p) + e^{-iqx} u_{il}(q) (a_l(q)\Omega)_k(p)$$

E, em consequência o campo quântico livre com spin s arbitrário:

$$\boxed{\varphi_i(x) = \int d\mu(p) \{ e^{ipx} v_{ik}(p) a_k^*(p) + e^{-ipx} u_{ik}(p) a_k(p) \}} \quad (2.60)$$

A equação (2.60) é uma forma simbólica, pois o significado é:

$$\boxed{\varphi(\vec{f}) := a^*(E\vec{f}) + a(\tilde{E}\vec{f}).}$$

Aqui tem-se E uma aplicação linear da seguinte forma:

$$E : \mathcal{D}(\mathbb{R}^4) \otimes \mathbb{C}^N \longmapsto \mathcal{H}^{(m,s)}$$

$$(\varphi(\vec{f})\Omega)_k(p) =: (E\vec{f})_k(p) = v_{ik}(p) \widehat{f}_i(p) \equiv a_k^*(E\vec{f})\Omega, \quad (2.61)$$

e \tilde{E} uma aplicação anti-linear da seguinte forma:

$$\tilde{E} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^4) \otimes \mathbb{C}^N \longmapsto \mathcal{H}^{(m,s)}$$

$$(\varphi(\vec{f})^*\Omega)_k(p) =: (\tilde{E}\vec{f})_k(p) = \overline{u_{ik}(p)} \widehat{f}_i(p) \equiv a_k^*(\tilde{E}\vec{f})\Omega \quad (2.62)$$

Aqui esta-se a seguinte definição:

$$\widehat{f}_i(p) := \int dx f_i(x) e^{ipx}$$

Também tem-se: $\varphi(\vec{f}) := \sum_i \int dx f_i(x) \varphi_i(x)$

Agora fazendo o uso da equação (1.20) e (1.21), obtém-se

$$\varphi(\vec{f}) = \sum_{k=1}^{2s+1} \int d\mu(p) \{ a_k^*(p) (E\vec{f})(p) + a_k(p) \overline{\widetilde{E}\vec{f}}(p) \} \quad (2.63)$$

Utilizando a definição de $E\vec{f}$ e $\widetilde{E}\vec{f}$, chega-se a seguinte equação.

$$\varphi(\vec{f}) := \sum_i \int dx f_i(x) \sum_k \int d\mu(p) \{ e^{ip \cdot x} v_{ik}(p) a_k^*(p) + e^{-ip \cdot x} u_{ik}(p) a_k(p) \} \quad (2.64)$$

Os $v(p)$ e $u(p)$ devem ser determinados, já adiantando que eles serão operadores que irão fazer o intertwiners entre representações e estão fixados pela covariância.

Será visto o comportamento dos operadores criação e aniquilação sobre transformações.

$$U(a, A) a^*(\Phi) U(a, A)^{-1} = \sum_k \int d\mu(p) \Phi_k(p) U(a, A) a_k^*(p) U(a, A)^{-1} \quad (2.65)$$

mas, equação [5], tem-se

$$\begin{aligned} & U(a, A) a^*(\Phi) U(a, A)^{-1} = a^*(U(a, A)\Phi) = \\ & = \sum_k \int d\mu(p) (U(a, A)\Phi)_k(p) a_k^*(p) = \sum_k \int d\mu(p) e^{ip \cdot a} (D^s(R(A, p))\Phi)_k(\Lambda(A)^{-1}p) a_k^*(p) = \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$= \sum_{k,l} \int d\mu(p) e^{ip \cdot a} D^s(R(A, p))_{kl} \Phi_l(\Lambda^{-1}p) a_k^*(p) = \dots \quad (2.67)$$

Pode-se fazer uma mudança de variável de $p = \Lambda^{-1}p$ e pequenas manipulações algébricas e obtém-se:

$$\dots = \sum_{k,l} \int d\mu(p) \Phi_k(p) D^s(R(A, \Lambda p))_{lk} e^{i\Lambda p \cdot a} a_l^*(\Lambda p). \quad (2.68)$$

Comparando as equações (2.65) e (2.68), concluí-se que:

$$\boxed{U(a, A) a_k^*(p) U(a, A)^{-1} = D^s(R(A, \Lambda p))_{lk} e^{i\Lambda p \cdot a} a_l^*(\Lambda p)}. \quad (2.69)$$

com $\Lambda = \Lambda(A)$.

Da mesma forma pode-se fazer para o operador aniquilação.

$$U(a, A)a(\Phi)U(a, A)^{-1} = \sum_k \int d\mu(p) \bar{\Phi}_k(p) U(a, A) a_k(p) U(a, A)^{-1} \quad (2.70)$$

mas, tem-se:

$$\begin{aligned} U(a, A)a(\Phi)U(a, A)^{-1} &= a(U(a, A)\Phi) = \\ &= \sum_k \int d\mu(p) \overline{(U(a, A)\Phi)_k}(p) a_k(p) = \sum_k \int d\mu(p) e^{-ip \cdot a} \overline{(D^s(R(A, p))\Phi)_k}(\Lambda^{-1}p) a_k(p) = \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$= \sum_{k,l} \int d\mu(p) e^{-ip \cdot a} \overline{D^s(R(A, p))}_{kl} \bar{\Phi}_l(\Lambda^{-1}p) a_l(p) = \quad (2.72)$$

Pode-se fazer uma mudança de variável de $p = \Lambda^{-1}p$ e pequenas manipulações algébricas e obter

$$\sum_{k,l} \int d\mu(p) \bar{\Phi}_k e^{-i\Lambda p \cdot a} \overline{D^s(R(A, \Lambda p))}_{kl} a_l(\Lambda p) \quad (2.73)$$

Comparando as equações (2.70) e (2.73), chega-se a:

$$\boxed{U(a, A)a_k(p)U(a, A)^{-1} = e^{-i\Lambda p \cdot a} \overline{D^s(R(A, \Lambda p))}_{lk} a_l(\Lambda p)}, \quad (2.74)$$

com $\Lambda = \Lambda(A)$.

A partir da construção acima, serão encontradas as relações de intertwiners dos operadores $u(p)$ e $v(p)$, e algumas soluções para ambos. Primeiramente, a partir da definição de covariância e do $\varphi_i(x)$, serão encontrados os intertwiners.

Pega-se a equação (2.60) e coloca-se no lado esquerdo da equação da covariância (2.3), tem-se:

$$U(a, A) \sum_k \int d\mu(p) \{e^{ip \cdot x} v_{ik}(p) a_k^*(p) + e^{-ip \cdot x} u_{ik}(p) a_k(p)\} U(a, A)^{-1} = \quad (2.75)$$

$$\sum_k \int d\mu(p) \{e^{ip \cdot x} v_{ik}(p) U(a, A) a_k^*(p) U(a, A)^{-1} + e^{-ip \cdot x} u_{ik}(p) U(a, A) a_k(p) U(a, A)^{-1}\} \quad (2.76)$$

Utilizando as equações (2.69) e (2.74) fica-se com,

$$\sum_{k,l} \int d\mu(p) \{ e^{ip \cdot x} v_{ik}(p) D^s(R(A, \Lambda p))_{lk} e^{i\Lambda p \cdot a} a_l^*(\Lambda p) + e^{-ip \cdot x} u_{ik}(p) e^{-i\Lambda p \cdot a} \overline{D^s(R(A, \Lambda p))_{lk}} a_l(\Lambda p) \} \quad (2.77)$$

Pegando a equação(2.77) e fazendo $p = \Lambda p$, obtém-se:

$$\sum_{k,l} \int d\mu(p) \{ e^{ip \cdot (\Lambda x + a)} v_{ik}(\Lambda^{-1} p) D^s(R(A, p))_{lk} a_l^*(p) + e^{-ip \cdot (\Lambda x + a)} u_{ik}(\Lambda^{-1} p) \overline{D^s(R(A, p))_{lk}} a_l(p) \} \quad (2.78)$$

Aqui resolve-se o lado direito da equação (2.3).

$$\varphi_j(\Lambda x + a) = \sum_k \int d\mu(p) \{ e^{ip \cdot (\Lambda x + a)} v_{jk}(p) a_k^*(p) + e^{-ip \cdot (\Lambda x + a)} u_{jk}(p) a_k(p) \} \quad (2.79)$$

Portanto tem-se:

$$\sum_j D(A^{-1})_{ij} \varphi_j(\Lambda x + a) = \sum_j D(A^{-1})_{ij} \sum_k \int d\mu(p) \{ e^{ip \cdot (\Lambda x + a)} v_{jk}(p) a_k^*(p) + e^{-ip \cdot (\Lambda x + a)} u_{jk}(p) a_k(p) \} = \quad (2.80)$$

$$= \sum_{j,k} \int d\mu(p) \{ e^{ip \cdot (\Lambda x + a)} D(A^{-1})_{ij} v_{jk}(p) a_k^*(p) + e^{-ip \cdot (\Lambda x + a)} D(A^{-1})_{ij} u_{jk}(p) a_k(p) \} \quad (2.81)$$

Fazendo comparação entre as equações (2.78) e (2.81) , obtém-se as relações de intertwiner(entrelaçamento) para os operadores $u(p)$ e $v(p)$.

$$\sum_j D(A^{-1})_{ij} v_{jk}(p) = \sum_k v_{ik}(\Lambda^{-1} p) D^s(R(A, p))_{lk} \quad (2.82)$$

e

$$\sum_j D(A^{-1})_{ij} u_{jk}(p) = \sum_k u_{ik}(\Lambda^{-1} p) \overline{D^s(R(A, p))_{lk}} \quad (2.83)$$

Para se achar os $v(p)$ e $u(p)$, serão reescritas as equações acima (2.82) e (2.83) de uma outra forma, que são facilmente demonstradas. Utilizou-se o fato de que $R(A, p)^{-1} = R(A^{-1}, \Lambda^{-1} p)$.

$$\boxed{\sum_j D(A)_{ij} u_{jk}(\Lambda^{-1} p) = \sum_l u_{il}(p) D^s(R(A, p))_{lk}} \quad (2.84)$$

e

$$\boxed{\sum_j D(A)_{ij} v_{jk}(\Lambda^{-1} p) = \sum_l v_{il}(p) \overline{D^s(R(A, p))_{lk}},} \quad (2.85)$$

com $\Lambda = \Lambda(A)$. Acha-se, agora, o $u(p)$ e o $v(p)$. Identifica-se o $u(p)$ e $v(p)$ como uma aplicação linear de $\mathbb{C}^{2s+1} \mapsto \mathbb{C}^N$, seguindo a estratégia.

Seja $u_0 := u(\bar{p})$, recordando que, $\bar{p} = (m, 0, 0, 0)$; tem-se

$$u(p) = u(A_p \bar{p}) = D(A_p)u(\bar{p}) = D(A_p)u_0$$

Para $A \in SU(2)$, identificado como R e p , identificado como \bar{p} , o u_0 satisfaz a equação (2.84), com

$$D(R)u_0 = u_0 D^s(R)$$

para todo $R \in SU(2)$. Com isso, vê-se que u_0 é o intertwiner de D^s , para D com restrição a $SU(2)$.

Assim é fácil mostrar que se u_0 satisfaz a equação acima, $u(p)$ irá satisfazer a equação (2.84). Assim:

$$u(p) = D(A_p) \cdot u_0 = D\left(\sqrt{\frac{p}{m}}\right) \cdot u_0 \quad (2.86)$$

Agora para o $v(p)$, seja $v_0 := v(\bar{p})$, tem-se

$$v(p) = v(A_p \bar{p}) = D(A_p)v(\bar{p}) = D(A_p)v_0$$

.

Para $A \in SU(2)$, identificado como R e p , identificado como \bar{p} , o v_0 satisfaz a equação (2.85) da seguinte forma,

$$D(R)v_0 = v_0 D^s(\bar{R})$$

para todo $R \in SU(2)$. Utilizou-se o fato de que para nossas representações vale que $D^s(\bar{R}) = \overline{D^s(R)}$. Reciprocamente se v_0 satisfaz $D(R)v_0 = v_0 D^s(\bar{R})$ o $v(p)$ satisfaz a equação (2.85). Tem-se:

$$v(p) = D(A_p) \cdot v_0 = D\left(\sqrt{\frac{p}{m}}\right) \cdot v_0 \quad (2.87)$$

Dado o u_0 satisfazendo $D(R)u_0 = u_0 D^s(R)$, pode-se achar v_0 , satisfazendo $D(R)v_0 = v_0 D^s(\bar{R})$. Veja o esquema abaixo.

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{v_0} \\
 D(R) \xleftarrow{u_0} D^s(R) \xleftarrow{D^s(\varepsilon)} D^s(\bar{R})
 \end{array}$$

Com isso, pode-se ver que $v_0 := u_0 \circ D^s(\varepsilon)$

$$v_0 \circ D^s(\bar{R}) = u_0 \circ D^s(\varepsilon) \circ D^s(\bar{R}) = u_0 \circ D^s(\varepsilon \bar{R}) = \quad (2.88)$$

$$= u_0 \circ D^s(R\varepsilon) = u_0 \circ D^s(R) \circ D^s(\varepsilon) = \quad (2.89)$$

$$= D(R) \circ u_0 \circ D^s(\varepsilon) = D(R) \circ v_0 \quad (2.90)$$

Utilizou-se o fato de que $\varepsilon \bar{R} = R\varepsilon$, ver equação (1.4), com isso $v(p) = D(A_p) \circ v_0 = D(A_p) \circ u_0 \circ D^s(\varepsilon)$, o que nos leva a obter:

$$v(p) = u(p) \circ D^s(\varepsilon) \quad (2.91)$$

Se D é irredutível $v(p)$ é único módulo constante.

2.3.1 Exemplos de soluções para os intertwiner para certas Representações.

Acha-se agora, o u_0 para os casos em que $D = D^{(s,0)}$ e $D = D^{(0,s)}$, com $u(p) \in Mat(2s+1)$

Sabe-se que o u_0 satisfaz: $D(R)u_0 = u_0 D^s(R)$, primeiro faz-se o caso em que $D = D^{(s,0)}$, mas deve-se observar que $D^{(s,0)}(R) = D^s(R)$, portanto fica com a seguinte equação:

$$D^s(R)u_0 = u_0 D^s(R) \longrightarrow u_0 = c\mathbb{1}, \text{ pois } D^s \text{ é irredutível.} \quad (2.92)$$

Pelo Lema de Schur ver (A.3.2).

Agora, para o caso em que $D = D^{(0,s)}$, observa-se o fato de que $D^{(s,0)}(R^{*-1}) = D^s(R^{*-1})$, tem-se então:

$$u_0 D^s(R) = D^{(0,s)}(R)u_0 = D^{(s,0)}(R^{*-1})u_0 = D^s(R^{*-1})u_0 \quad (2.93)$$

Mas como $R \in SU(2)$, R é unitário, portanto $R^{*-1} = R$. Obtém-se novamente pelo Lema de Schur:

$$u_0 = c\mathbb{1}, \text{ pois } D^s \text{ é irredutível,} \quad (2.94)$$

escolhendo $c = 1$, tem-se a solução:

$$u(p) = D(A_p)$$

Vê que se $D|SU(2)$ é irredutível, tem-se u_0 e v_0 fixados módulo constante o que implica que $u(p)$ e $v(p)$ estão fixados módulos constante, portanto tem-se duas constantes em aberto.

2.3.2 Teorema de Spin Estatística

A seguir, mostra-se o **Teorema Spin Estatística**: $[\varphi_i(x), \varphi_j(y)]_\epsilon = 0$, se x e y são causalmente disjuntos. Vale ressaltar que, no sentido de estatística, tem-se:

$$\epsilon = \begin{cases} +1, & \text{se Simétrico, Bósons} \\ -1, & \text{se antisimétrico, fermions} \end{cases}$$

$\varphi_i(x)$ dado pela equação (2.60) e usando a notação A^t para indicar a matriz transposto A .

$$\begin{aligned} [\varphi_i(x), \varphi_j(y)]_\epsilon &= (2\pi)^{-3} \sum_{k,l} \int d\mu(p) \int d\mu(q) \{ e^{ipx-iqy} v_{ik}(p) u_{jl}(q) [a_k^*(p), a_l(q)]_\epsilon \\ &\quad + e^{-ipx+iqy} u_{ik}(p) v_{jl}(q) [a_k(p), a_l^*(q)]_\epsilon \} \end{aligned} \quad (2.95)$$

Pode-se fazer uso da equação (1.22) e obtém-se:

$$[\varphi_i(x), \varphi_j(y)]_\epsilon = (2\pi)^{-3} \sum_k \int d\mu(p) \{ e^{-ip \cdot (x-y)} u_{ik}(p) v_{jk}(p) - \epsilon e^{ip \cdot (x-y)} v_{ik}(p) u_{jk}(p) \} = \quad (2.96)$$

$$= (2\pi)^{-3} \sum_k \int d\mu(p) \{ e^{-ip \cdot (x-y)} (u(p)v(p)^t)_{ij} - \epsilon e^{ip \cdot (x-y)} (u(p)v(p)^t)_{ji} \} = \quad (2.97)$$

Usando as equações (2.91) e (2.92) e considerando o caso de $D = D^{(s,0)}$ tem-se: $u(p) = D^{(s,0)}(A_p)$ e $v(p) = D^{(s,0)}(A_p \epsilon) = D^{(s,0)}(\epsilon \bar{A}_p^{*-1}) = D^{(s,0)}(\epsilon A_p^{-1t})$,

$$u(p)v(p)^t = D^{(s,0)}(A_p) D^{(s,0)}(\epsilon A_p^{-1t})^t =$$

$$= D^{(s,0)}(A_p A_p^{-1} \varepsilon^t) = D^{(s,0)}(\varepsilon^t)$$

Considerando o caso em que $D = D^{(0,s)}$, tem-se: $u(p) = D^{(s,0)}(A_p^{*-1})$ e $v(p) = D^{(s,0)}(A_p^{*-1} \varepsilon) = D^{(s,0)}(\varepsilon \bar{A}_p)$,

$$u(p)v(p)^t = D^{(s,0)}(A_p^{*-1} \bar{A}_p^t \varepsilon^t) = D^{(s,0)}(A_p^{*-1} A_p \varepsilon^t) = D^{(s,0)}(\varepsilon^t)$$

com isso, mostra-se que para os dois casos:

$$(u(p)v(p)^t)_{ij} = D^s(\varepsilon^t)_{ij} \quad (2.98)$$

Lema 2.3.1. *A seguinte relação é satisfeita:*

$$D^{(s,0)}(\varepsilon^t) = (-1)^{2s} D^{(s,0)}(\varepsilon^t)^t$$

Demonstração.

$$D^{(s,0)}(\varepsilon^t)^t (u \otimes \cdots \otimes u) = \varepsilon^{tt} u \otimes \varepsilon^{tt} u = (-1)^{2s} (\varepsilon^t u \otimes \cdots) = (-1)^{2s} D^{(s,0)}(\varepsilon^t) (u \otimes \cdots \otimes u)$$

Utilizou-se o fato de que $\varepsilon^t = -\varepsilon$ e $D(A)^t = D(A^t)$, obteve-se então:

$$(u(p)v(p)^t)_{ji} = D^s(\varepsilon^t)_{ji} = (-1)^{2s} D^s(\varepsilon^t)_{ij} \quad (2.99)$$

□

Utilizando as equações (2.98) e (2.99), obtém-se que:

$$\boxed{[\varphi_i(x), \varphi_j(y)]_\epsilon = (2\pi)^{-3} D^s(\varepsilon^t)_{ij} \int d\mu(p) \{e^{-ip \cdot (x-y)} - \epsilon (-1)^{2s} e^{ip \cdot (x-y)}\}} \quad (2.100)$$

Para se ter campos localizados, deve-se ter comutador ou anti-comutador igual a 0 para x e y causalmente disjuntos, logo com $\epsilon = (-1)^{2s}$, tem-se:

$$[\varphi_i(x), \varphi_j(y)]_\epsilon = D^s(\varepsilon^t)_{ij} i \Delta(x - y)$$

satisfazendo a condição de localidade.

2.3.3 Campo de Dirac

Deve-se lembrar que a representação de Dirac é definida da seguinte forma:

$$S(A) := D^{(\frac{1}{2},0)}(A) \oplus D^{(0,\frac{1}{2})}(A).$$

Agora será utilizada a seguinte definição $D^{(0,\frac{1}{2})}(A) = A^{*-1}$, portanto, tem-se:

$$S(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{*-1} \end{pmatrix}$$

$u(p)$ deve satisfazer $S(A)u(\Lambda^{-1}p) = u(p)R(A,p)$, ver equação (2.84), com $A \in SL(2, \mathbb{C})$.

$$u(p) = S(A_p)u_0$$

assim, $u_0 = u(\bar{p})$, deve satisfazer $S(R)u_0 = u_0R$ ver equação (2.84) com $A \in SU(2)$ identificado por R , $p \mapsto \bar{p}$, para todo $R \in SU(2)$. Escreve-se $u_0 : \mathbb{C}^2 \mapsto \mathbb{C}^4$, como $u_0 = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, com $A, B : \mathbb{C}^2 \mapsto \mathbb{C}^2$, tem-se da equação $S(R)u_0 = u_0R$ a seguinte conclusão $RA = AR$ e $RB = BR$ o que leva à seguinte solução $A = \alpha \mathbf{1}$ e $B = \beta \mathbf{1}$; portanto a solução geral é:

$$u(p) = S(A_p)u_0 = \begin{pmatrix} A_p & 0 \\ 0 & A_p^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \mathbf{1} \\ \beta \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha A_p \\ \beta A_p^{-1} \end{pmatrix} \quad (2.101)$$

Para o $v(p)$, tem-se que deve satisfazer $S(A)v(\Lambda^{-1}p) = v(p)\overline{R(A,p)}$, ver equação (2.85), com $A \in SL(2, \mathbb{C})$. Tem-se que:

$$v(p) = S(A_p)v_0$$

Neste caso, $v_0 = v(\bar{p})$, satisfaz $S(R)v_0 = v_0\bar{R}$, para todo $R \in SU(2)$. Escreve-se $v_0 : \mathbb{C}^2 \mapsto \mathbb{C}^4$, como $v_0 = \begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{pmatrix}$, com $\hat{A}, \hat{B} : \mathbb{C}^2 \mapsto \mathbb{C}^2$, tem-se da equação $S(R)v_0 = v_0\bar{R}$ a seguinte conclusão $R\hat{A} = \hat{A}\bar{R}$ e $R\hat{B} = \hat{B}\bar{R}$ o que leva à seguinte solução $\hat{A} = \hat{\alpha}\varepsilon^t$ e $\hat{B} = \hat{\beta}\varepsilon^t$; portanto a solução geral é:

$$v(p) = S(A_p)v_0 = \begin{pmatrix} A_p & 0 \\ 0 & A_p^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\alpha}\varepsilon^t \\ \hat{\beta}\varepsilon^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}A_p\varepsilon^t \\ \hat{\beta}A_p^{-1}\varepsilon^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}\varepsilon^t A_p^{t-1} \\ \hat{\beta}\varepsilon^t A_p^t \end{pmatrix} \quad (2.102)$$

Para se achar as constantes α , β , $\widehat{\alpha}$ e $\widehat{\beta}$, será utilizada a condição de causalidade ver equação (2.4).

Observe que para o campo quântico de Dirac, foi usada a seguinte notação $\Psi(x)$.

Aplicando a condição de causalidade:

$$\begin{aligned} \{\Psi_i(x), \Psi_j(y)\} &= (2\pi)^{-3} \sum_k \int d\mu(p) \{e^{-ip \cdot (x)} e^{iq \cdot (y)} u_{ik}(p) v_{jl}(q) \{a_k^*(p), a_l(q)\} + \\ &\quad + v_{il}(p) u_{jl}(q) e^{ip \cdot (x)} e^{-iq \cdot (y)} \{a_k(p), a_l^*(q)\}\} = \\ &= (2\pi)^{-3} \sum_k \int d\mu(p) \{e^{-ip \cdot (x-y)} (u(p) v(p)^t)_{ij} + e^{ip \cdot (x-y)} (v(p) u(p)^t)_{ij}\} \dots \end{aligned} \quad (2.103)$$

Usando as equações (2.101) e (2.102), e o fato que $A_p^2 = \frac{p}{m}$ e $A_p^{-2} = \frac{\tilde{p}}{m}$, tem-se:

$$u(p)v(p)^t = \begin{pmatrix} \alpha \widehat{\alpha} \epsilon & \alpha \widehat{\beta} \frac{p}{m} \epsilon \\ \beta \widehat{\alpha} \frac{\tilde{p}}{m} \epsilon & \beta \widehat{\beta} \epsilon^t \end{pmatrix} =: A(p) \quad \text{Matriz com entradas em } p. \quad (2.104)$$

e

$$v(p)u(p)^t = - \begin{pmatrix} \alpha \widehat{\alpha} \epsilon & \beta \widehat{\alpha} \frac{p}{m} \epsilon \\ \alpha \widehat{\beta} \frac{\tilde{p}}{m} \epsilon & \beta \widehat{\beta} \epsilon \end{pmatrix} =: -B(p) \quad \text{Matriz com entradas em } p. \quad (2.105)$$

$$\dots = (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) \{A_{ij}(p) e^{-ip \cdot (x-y)} - B_{ij}(p) e^{ip \cdot (x-y)}\} = \quad (2.106)$$

$$(2\pi)^{-3} \int d\mu(p) \{A_{ij}(i\partial_x) e^{-ip \cdot (x-y)} - B_{ij}(-i\partial_x) e^{ip \cdot (x-y)}\} \quad (2.107)$$

Logo, tem-se a condição de localidade satisfeita se vale, $B_{ij}(-i\partial_x) = A_{ij}(i\partial_x)$. Isso leva ao seguinte:

$$\{\Psi_i(x), \Psi_j(y)\} = A_{ij}(i\partial_x) (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) \{e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}\} = A_{ij}(i\partial_x) i\Delta(x, y). \quad (2.108)$$

Portanto, precisa-se de $B(p) = A(-p)$ para a condição de causalidade ser satisfeita, levando através das equações (2.104) e (2.105), tem-se

$$\alpha \widehat{\beta} = -\beta \widehat{\alpha} \mapsto \widehat{\beta} = -\frac{\widehat{\alpha} \beta}{\alpha}$$

Calculando $\{\Psi_i(x), \Psi_j^*(y)\}$ ver equação (2.5):

$$\begin{aligned} \{\Psi_i(x), \Psi_j^*(y)\} &= (2\pi)^{-3} \sum_k \int d\mu(p) d\mu(q) \{e^{-ip \cdot x} u_{ik}(p) e^{iq \cdot y} \overline{u_{jl}(q)} \delta_{kl} \delta_\mu(p, q) + \\ &\quad + e^{ip \cdot x} v_{ik}(p) e^{-iq \cdot y} \overline{v_{jl}(q)} \delta_{kl} \delta_\mu(p, q)\} = \\ \{\Psi_i(x), \Psi_j^*(y)\} &= (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) \{e^{-ip \cdot (x-y)} u_{ik}(p) \overline{u_{jk}(p)} + e^{ip \cdot (x-y)} v_{ik}(p) \overline{v_{jk}(p)}\} = \end{aligned} \quad (2.109)$$

$$= (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) \{e^{-ip \cdot (x-y)} (u(p) u^*(p))_{ij} + e^{ip \cdot (x-y)} (v(p) v^*(p))_{ij}\} = \dots \quad (2.110)$$

$$u(p) u^*(p) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 \frac{p}{m} & \alpha \bar{\beta} \\ \bar{\alpha} \beta & |\beta|^2 \frac{\tilde{p}}{m} \end{pmatrix} =: \hat{A}(p) \quad \text{Matriz com entradas em } p. \quad (2.111)$$

$$v(p) v^*(p) = \begin{pmatrix} |\hat{\alpha}|^2 \frac{p}{m} & \hat{\alpha} \bar{\hat{\beta}} \\ \bar{\hat{\alpha}} \hat{\beta} & |\hat{\beta}|^2 \frac{\tilde{p}}{m} \end{pmatrix} =: \hat{C}(p) \quad \text{Matriz com entradas em } p. \quad (2.112)$$

Como antes, precisa-se de $\hat{C}(p) = -\hat{A}(-p)$, para a condição de causalidade ser satisfeita, com isso através das equações (2.111) e (2.112) obtém-se:

$$i) \alpha \hat{\beta} = -\beta \hat{\alpha} \quad \text{vêm da equações 2.104 e 2.105} \quad ii) \bar{\alpha} \hat{\beta} = -\bar{\alpha} \beta \quad iii) |\hat{\beta}| = |\beta| \quad iv) |\hat{\alpha}| = |\alpha| \quad (2.113)$$

A relação $i)$ já implica a causalidade $\{\Psi_i(x), \Psi_j(y)\} = 0$, e as relações $iii)$ e $iv)$ são triviais, portanto tem-se duas liberdades e uma solução de $i)$ e $ii)$ é: $\alpha = \hat{\alpha} = 1, \beta = 1e\hat{\beta} = -1$.

Com essa escolha, tem-se

$$u(p) u^*(p) = \begin{pmatrix} \frac{p}{m} & 1 \\ 1 & \frac{\tilde{p}}{m} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} m & p \\ \tilde{p} & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{m} (\not{p} + m) \gamma^0 \quad (2.114)$$

E

$$\gamma^0 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

De forma análoga, fica-se com,

$$v(p) v^*(p) = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} -m & p \\ \tilde{p} & -m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{m} (\not{p} - m) \gamma^0 \quad (2.115)$$

Portanto:

$$\{\Psi_i(x), \Psi_j^*(y)\} = \frac{(2\pi)^{-3}}{m} \int d\mu(p) \{(\not{p} + m)\gamma^0 e^{-ip \cdot (x-y)} + (\not{p} - m)\gamma^0 e^{ip \cdot (x-y)}\}_{ij} = \quad (2.116)$$

$$= \frac{1}{m} [(i \not{\partial}_x + m) \cdot \gamma^0]_{ij} (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) \{e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)}\} \quad (2.117)$$

Com isso, obtém-se:

$$\{\Psi_i(x), \Psi_j^*(y)\} = \frac{1}{m} (S(x-y)\gamma^0)_{ij} \quad \text{onde } S(x-y) = (i \not{\partial}_x + m)i\Delta(x-y). \quad (2.118)$$

e

$$u(p) = \begin{pmatrix} A_p \\ A_p^{-1} \end{pmatrix} \quad (2.119)$$

$$v(p) = \begin{pmatrix} A_p \epsilon^t \\ -A_p^{-1} \epsilon^t \end{pmatrix} \quad (2.120)$$

Com isso, consegue-se determinar o campo quântico com spin $s = \frac{1}{2}$ da equação (2.60).

Note que os $u(p)$ e $v(p)$ satisfazem algumas relações, ver apêndice (B).

2.4 Teorema de Bisognano- Wichmann

Apresentam-se, a seguir, algumas ferramentas que serão usadas no Teorema:

Destaca-se uma solução particular para o A_p .

Lema 2.4.1.

$$A_p = \sqrt{\frac{p}{m}} = (2m(p_0 + m))^{-\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} p_0 + p_3 + m & \overline{p_1 + ip_2} \\ p_1 + ip_2 & p_0 - p_3 + m \end{pmatrix} \quad (2.121)$$

A transformação j esta definida da seguinte forma:

$$j := \text{diag}(-1, -1, 1, 1) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \longmapsto (-x^0, -x^1, x^2, x^3)$$

Recordando a representação redutível unitária que é da forma:

$$U(A)\Psi(p) := D^s(R(A, p))\Psi(\Lambda(A)^{-1}p),$$

utilizando a mesma faz-se a extensão para a representação $U(j)$, através da seguinte proposição.

Proposição 2.4.2. $(U(j)\Psi)(p) := D^s(i\sigma_3)\overline{\Psi(-jp)}$,

que irá satisfazer:

$$i)U(j)^2 = \mathbf{1}$$

$$ii)U(j)U(A)U(j)^{-1} = U(jAj)$$

Lema 2.4.3. *Têm-se as seguintes relações:*

$$i)A_{-jp} = \sigma_1 A_p \sigma_1$$

$$ii)R(A, -jp) = \sigma_1 R(\sigma_1 A \sigma_1, p) \sigma_1$$

Demonstra-se o Lema 2.4.3:

Demonstração. Utilizando a equação (2.121), e o $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, tem-se:

$$\sigma_1 A_p \sigma_1 = (2m(p_0 + m))^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} p_0 - p_3 + m & p_1 + ip_2 \\ \overline{p_1 + ip_2} & p_0 + p_3 + m \end{pmatrix},$$

por outro lado tem-se, $-jp = (p_0, p_1, -p_2, -p_3)$ portanto:

$$A_{-jp} = (2m(p_0 + m))^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} p_0 - p_3 + m & p_1 + ip_2 \\ \overline{p_1 + ip_2} & p_0 + p_3 + m \end{pmatrix}$$

Logo mostra-se *i*). Agora, é mostrado *ii*).

$$R(A, -jp) = A_{-jp}^{-1} A A_{-\Lambda(A)^{-1}jp} = \dots$$

Usando a primeira parte do Lema 2.4.3 e o fato que $j^2 = 1$, tem-se: $-\Lambda^{-1}jp = -j(j\Lambda^{-1}j)p$, com isso, obtém-se:

$$\dots = \sigma_1 A_p^{-1} \sigma_1 A \sigma_1 A_{\sigma_1 A^{-1} \sigma_1 p} \sigma_1 = \sigma_1 R(\sigma_1 A \sigma_1, p) \sigma_1,$$

ficando assim mostrado todo o Lema (2.4.3). □

Para completar, demonstra-se a Proposição (2.4.2).

Demonstração. A *i*) é facilmente verificada, portanto mostra-se somente a *ii*). Tem-se

$$\begin{aligned} (U(j)U(A)U(j)^{-1}\Psi)(p) &= D^s(i\sigma_3)\overline{(U(A)U(j)^{-1}\Psi)(-jp)} = \\ &= D^s(i\sigma_3)\overline{(D^s(R(A, -jp))U(j)^{-1}\Psi)(-\Lambda^{-1}jp)} = D^s(i\sigma_3)\overline{D^s(R(A, -jp))D^s(i\sigma_3)\Psi(j\Lambda^{-1}jp)} = \\ &= D^s(i\sigma_3)\overline{D^s(R(A, -jp))}D^s(-i\sigma_3)\Psi(j\Lambda^{-1}jp) \end{aligned}$$

Por outro lado, tem-se:

$$U(jAj)\Psi(p) = D^s(R(jAj, p))\Psi(j\Lambda^{-1}jp),$$

portanto, deve-se mostrar que $D^s(i\sigma_3)\overline{D^s(R(A, -jp))}D^s(-i\sigma_3) = D^s(R(jAj, p))$.

Usando o Lema 2.4.3 *i*) e o fato de que $jA^{-1}j = \sigma_1 A^{-1} \sigma_1$, tem-se que $\overline{D^s(R(A, -jp))} = \overline{D^s(\sigma_1 R(\sigma_1 A \sigma_1, p) \sigma_1)}$.

Logo,

$$D^s(i\sigma_3)\overline{D^s(R(A, -jp))}D^s(-i\sigma_3) = D^s(i\sigma_3\sigma_1)\overline{D^s(R(\sigma_1 A \sigma_1, p))}D^s(-i\sigma_1\sigma_3) = \dots$$

Usando o fato de que $i\sigma_3\sigma_1 = i\varepsilon$, e $-i\sigma_1\sigma_3 = i\varepsilon$, tem-se:

$$\dots = D^s(\varepsilon\overline{R(\sigma_1 A \sigma_1, p)}\varepsilon^{-1}) = \dots,$$

e por último, utilizando a equação (1.4), obtém-se:

$$\dots = D^s(R(\sigma_1 A \sigma_1, p)) = D^s(R(jAj, p)).$$

Com isso, demonstra-se a proposição. Observe que se esta denotando $\Lambda(A)$ por Λ . \square

E para finalizar, denota-se o Boost de Lorentz na direção x^1 por $\Lambda_1(t)$, agindo como $\cosh t \mathbf{1} + \sinh t \sigma_1$ nas coordenadas x^0 e x^1 ,

$$\Lambda_1(t) := \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 \\ 0 & & \mathbf{1} \end{pmatrix},$$

$t \rightarrow \Lambda_1(t)$ é holomorfa e tem-se:

$$\Lambda_1(t)|_{\pm i\pi} = j \quad (2.122)$$

Feito isso, já se está preparado para continuar o trabalho. O Teorema de Bisognano-Wichmann para o caso de campos com localização puntiforme [11, 12] não será colocado. Somente será colocado o Teorema Bisognano-Wichmann para o caso de campos quânticos com localização tipo-string [10], que é o interesse no presente trabalho.

Seja $W_1 := \{|x^0| < x^1\}$, cuja a forma geométrica será de uma cunha (figura 2.1). Assim como seu complemento causal W'_1 ,

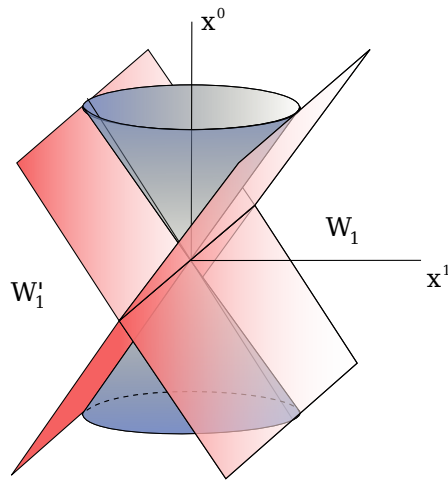


Figura 2.1: cunha

Vale mencionar que a transformação j faz a reflexão na "borda" de W_1 e que $\Lambda_1(t)$ deixa W_1 invariante. Tem-se que $A_1(t) := e^{\frac{t}{2}\sigma_1}$. Com isso, $U(A_1(t)) = e^{itK_1}$ o que implica $U(A_1(t + is)) = e^{itK_1}e^{-sK_1}$. Como não é limitado, observa-se que o domínio de $U(A_1(t))$ não é todo o espaço de Hilbert. Tem-se o seguinte teorema:

Teorema 2.4.4. Bisognano- Wichmann para localização de campo quântico tipo string.

Seja, $\text{supp} f \subset W_1, \text{supp} h \subset W_1 \cap H, (h = h(e))$ isso implica que $\varphi_i(f, h)$ é localizado em W_1 .

i) $\varphi(f, h)\Omega \in \text{dom}U(A_1(z))$, para todo $z \in \mathbb{R} + i[0, \pi]$

ii) $U(A_1(z))\varphi_i(f, h)\Omega$ é holomorfa em $z \in \mathbb{R} + i(0, \pi)$, e

$$\text{iii) } U(j)U(A_1(z))|_{z=i\pi}\varphi_i(f, h)\Omega = c\varphi_i(f, h)^*\Omega$$

Tem-se também, que dado $W'_1 := \{-|x^0| > x^1\}$.

Seja, $\text{supp}f \subset W'_1$, $\text{supp}h \subset W'_1 \cap H$, ($h = h(e)$) isso implica que $\varphi_i(f, h)$ é localizado em W'_1 .

i) $\varphi(f, h)\Omega \in \text{dom}U(A_1(z))$, para todo $z \in \mathbb{R} - i[0, \pi]$

ii) $U(A_1(z))\varphi_i(f, h)\Omega$ é holomorfa em $z \in \mathbb{R} - i(0, \pi)$, e

$$\text{iii) } U(j)U(A_1(z))|_{z=-i\pi}\varphi_i(f, h)\Omega = c\varphi_i(f, h)^*\Omega$$

Capítulo 3

Construção do campo quântico tipo string fermiônico

3.1 Introdução

Nesse capítulo, será construído o campo quântico tipo string que é um dos objetivos nesse trabalho. Para tal, será seguida a seguinte estratégia: primeiro será encontrar a forma do campo com seus respectivos intertwiners em que será visto que tais não são completamente fixados pela relação de covariância como eram no caso puntiforme, em que as soluções eram únicas módulo constante; depois serão achadas as soluções para o intertwiner $u(p, e)$ via a relação de entrelaçamento com suas respectivas representações. Em seguida, será feito o uso do teorema de Bisognano- Wichmann para se encontrar a solução para o intertwiner $v(p, e)$ e, de posse dessas soluções, pode-se escrever de forma explícita o campo quântico tipo string $\varphi_i(x, e)$. Por fim, será calculada a função de dois pontos $w(x, e; x', e')$. De posse da mesma, pode-se tirar a condição de causalidade dos campos.

Relembrando que um campo quântico com localização tipo-string φ é uma distribuição que associa a cada função de teste $f : \mathbb{R}^4 \times H \rightarrow \mathbb{C}$ um operador $\varphi(f) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, com $H := \{e \in \mathbb{R}^4 : e \cdot e = -1\}$, em que tal deve satisfazer algumas condições

já descritas na introdução do Capítulo 2.

Será feito um raciocínio análogo ao caso de campo livre com localização puntiforme, portanto, exigiu-se que $\varphi_i(x, e)\Omega \in \mathcal{H}^1 \cong \mathcal{H}^{m,s}$, representação unitária irredutível de $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ correspondente a massa $m > 0$, e spin s arbitrário.

Devido ao fato de $U(a, A)\Omega = \Omega$, tem-se:

$$(U(a, A)\varphi_i(x, e)\Omega)_k(p) = e^{ip \cdot a} D_{ij}^s(R(A, p))(\varphi_j(x, e)\Omega)_k(\Lambda(A)^{-1}p) \quad (3.1)$$

||

$$(U(a, A)\varphi_i(x, e)U(a, A)^{-1}\Omega)_k(p) = D_{ij}(A^{-1})(\varphi_j(a + \Lambda x, \Lambda e)\Omega)_k(p). \quad (3.2)$$

Fazendo $\Lambda = 1$ e $x = 0$ nas duas equações (3.1) e (3.2), pode-se concluir que $(\varphi_i(x, e)\Omega)_k(p) = e^{ip \cdot x} v_{ik}(p, e)$ com $k = -s \dots s$ e $i = 1, \dots, N$. e

$$\boxed{v_{ik}(p, e) := (\varphi_i(0, e)\Omega)_k(p).}$$

Portanto, tem-se

$$(\varphi_i(x, e)\Omega)_k(p) = e^{ip \cdot x} v_{ik}(p, e) = \int d\mu(q) e^{iqx} v_{il}(q, e) (a_l^*(q)\Omega)_k(p), \quad (3.3)$$

com $p \in \mathcal{H}_m^+$

Mas como será querido $\varphi_i^*(x, e)\Omega \neq 0$, pois de acordo com o Teorema de Reeh-Schlieder [9], (Teorema 4.3) isso implica $\varphi_i^*(x, e) = 0$, será definido $\varphi_i(x, e)$ da seguinte forma:

$$\varphi_i(x, e) := \int d\mu(q) e^{iqx} v_{il}(q, e) a_l^*(q) + A_i, \quad (3.4)$$

E $A_i\Omega = 0$, porém $A_i^*\Omega \neq 0$, e devido ao Teorema de Bisognano-Wichmann para o caso de campos quânticos com localização tipo string [10], tem-se $\varphi_i^*(x, e)\Omega \in \mathcal{H}^1$. Portanto, aplicando o adjunto na equação (3.4), pode-se encontrar A . Tem-se: $(\varphi_i^*(x, e)\Omega)_k(p) = (A_{ik}^*\Omega)(p)$, logo devemos então encontrar nosso $(\varphi_i^*(x, e)\Omega)_k(p)$.

Tem-se agora:

$$(U(a, A)\varphi_i^*(x, e)\Omega)_k(p) = e^{ip \cdot a} D_{ij}^s(R(A, p))(\varphi_j^*(x, e)\Omega)_k(\Lambda(A)^{-1}p) \quad (3.5)$$

||

$$(U(a, A)\varphi_i^*(x, e)U(a, A)^{-1}\Omega)_k(p) = \overline{D_{ij}(A^{-1})}(\varphi_j^*(a + \Lambda x, \Lambda e)\Omega)_k(p). \quad (3.6)$$

Fazendo $\Lambda = 1$ e $x = 0$ nas duas equações (3.5) e (3.6), pode-se concluir que $(\varphi_i^*(x, e)\Omega)_k(p) = e^{ip \cdot x} \overline{u_{ik}(p, e)}$ com $k = -s \dots s$ e $i = 1, \dots, N$. e

$$\boxed{u_{ik}(p, e) := (\varphi_i^*(0, e)\Omega)_k(p).}$$

Portanto, tem-se:

$$(\varphi_i^*(x, e)\Omega)_k(p) = e^{ip \cdot x} \overline{u_{ik}(p, e)} = \int d\mu(q) e^{iqx} \overline{u_{il}(q, e)} (a_l^*(q)\Omega)_k(p), \quad (3.7)$$

com $p \in \mathcal{H}_m^+$. De acordo com a equação (3.7), tem-se que:

$$A_i = \int d\mu(q) e^{-iqx} u_{il}(q, e) a_l(q),$$

Com isso, obtém:

$$(\varphi_i(x, e)\Omega)_k(p) = \int d\mu(q) e^{iqx} v_{il}(q, e) (a_l^*(q)\Omega)_k(p) + e^{-iqx} u_{il}(q, e) (a_l(q)\Omega)_k(p)$$

E obtém-se o campo quântico tipo-string com spin s arbitrário:

$$\boxed{\varphi_i(x, e) = \int d\mu(p) \{ e^{ipx} v_{ik}(p, e) a_k^*(p) + e^{-ipx} u_{ik}(p, e) a_k(p) \}} \quad (3.8)$$

A equação (3.8) é uma forma simbólica, pois o significado é:

$$\boxed{\varphi(\vec{f}) := a^*(E\vec{f}) + a(\tilde{E}\vec{f}).}$$

Aqui tem-se E uma aplicação linear da seguinte forma:

$$E : \mathcal{D}(\mathbb{R}^4) \otimes \mathbb{C}^N \longmapsto \mathcal{H}^{(m,s)}$$

$$(\varphi(\vec{f})\Omega)_k(p) =: (E\vec{f})_k(p) = v_{ik}(p, e) \widehat{f}_i(p) \equiv a_k^*(E\vec{f})\Omega, \quad (3.9)$$

e \tilde{E} uma aplicação anti-linear da seguinte forma:

$$\tilde{E} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^4) \otimes \mathbb{C}^N \longmapsto \mathcal{H}^{(m,s)}$$

$$(\varphi(\vec{f})^* \Omega)_k(p) =: (\tilde{E}\vec{f})_k(p) = \overline{u_{ik}(p, e)} \widehat{f}_i(p) \equiv a_k^*(\tilde{E}\vec{f}) \Omega \quad (3.10)$$

Utilizando as seguintes definições: $\widehat{f}_i(p) := \int dx f_i(x, e) e^{ipx}$ e $\varphi(\vec{f}) := \int dx f_i(x, e) \varphi_i(x, e)$

Fazendo o uso da equação (1.20) e (1.21), obtém-se:

$$\varphi(\vec{f}) = \int d\mu(p) \{a_k^*(p)(E\vec{f})(p) + a_k(p)\overline{\tilde{E}\vec{f}(p)}\} \quad (3.11)$$

Utilizando a definição de $E\vec{f}$ e $\tilde{E}\vec{f}$, chega-se a seguinte equação:

$$\varphi(\vec{f}) := \int dx f_i(x, e) \int d\mu(p) \{e^{ip \cdot x} v_{ik}(p, e) a_k^*(p) + e^{-ip \cdot x} u_{ik}(p, e) a_k(p)\} \quad (3.12)$$

Os operadores de entrelaçamentos $v_{ik}(p, e)$ e $u_{ik}(p, e)$ estão relacionados pela relação de covariância, como será visto na seção seguinte.

3.2 Propriedades dos intertwiners

Utilizando as equações (3.1) e (3.2) com $^1 a = 0$, pode-se tirar a relação intertwiner $v(p, e)$:

$$D^s(R(A, p))_{kl}(\varphi_i(x, e)\Omega)_l(\Lambda^{-1}p) = D(A^{-1})_{ij}(\varphi_j(\Lambda x, \Lambda e)\Omega)_k(p) \quad (3.13)$$

Resolvendo o lado esquerdo da equação (3.13), tem-se:

$$D^s(R(A, p))_{kl}(\varphi_i(x, e)\Omega)_l(\Lambda^{-1}p) = e^{i\Lambda^{-1}p \cdot x} D^s(R(A, p))_{kl} v(\Lambda^{-1}p, e)_{il}$$

Agora, o lado direito da equação (3.13) tem-se:

$$D(A^{-1})_{ij} e^{ip\Lambda \cdot x} v(p, \Lambda e)_{jk}$$

Portanto, deve-se ter,

$$D^s(R(A, p))_{kl} e^{i\Lambda^{-1}p \cdot x} v(\Lambda^{-1}p, e)_{il} = D(A^{-1})_{ij} e^{ip\Lambda \cdot x} v(p, \Lambda e)_{jk},$$

¹Questão de comodidade, porém pode ser feito da mesma forma para $a \neq 0$, que o resultado será o mesmo.

o que leva a:

$$D^s(R(A, p))_{kl}v(\Lambda^{-1}p, e)_{il} = D(A^{-1})_{ij}v(p, \Lambda e)_{jk},$$

Usando o fato que $R^t = \overline{R^*} = \overline{R^{-1}}$, tem-se, $D^s(R(A, p))_{kl} = \overline{D^s(R(A^{-1}, \Lambda^{-1}p))_{lk}}$, e fazendo a troca de $A \rightarrow A^{-1}$ e $\Lambda^{-1}p \rightarrow p$ obtém-se a seguinte equação, com $v(p, e)$, identificado como uma aplicação linear de $\mathbb{C}^{2s+1} \mapsto \mathbb{C}^N$.

$$D(A)v(\Lambda^{-1}p, \Lambda^{-1}e) = v(p, e)\overline{D^s(R(A, p))} \quad (3.14)$$

Agora será encontrado o intertwiner $u(p, e)$. Para isso, serão utilizadas as equações (3.5) e (3.6) com² $a = 0$.

$$(U(0, A)\varphi_i^*(x, e)U(0, A)^{-1}\Omega)_k(p) = \sum_{j=1} \overline{D(A^{-1})_{ij}}(\varphi_j^*(\Lambda x, \Lambda e)\Omega)_k(p) \quad (3.15)$$

Resolvendo o lado esquerdo da equação (3.15), tem-se:

$$D^s(R(A, p))_{kl}(\varphi_i^*(x, e)\Omega)_l(\Lambda^{-1}p) = e^{i\Lambda^{-1}p \cdot x} D^s(R(A, p))_{kl} \overline{u(\Lambda^{-1}p, e)_{il}}$$

Agora, para o lado direito da equação (3.15) tem-se:

$$\overline{D(A^{-1})_{ij}} e^{ip \cdot \Lambda x} \overline{u(p, \Lambda e)_{jk}}$$

Portanto, deve-se ter:

$$e^{i\Lambda^{-1}p \cdot x} D^s(R(A, p))_{kl} \overline{u(\Lambda^{-1}p, e)_{il}} = \overline{D(A^{-1})_{ij}} e^{ip \cdot \Lambda x} \overline{u(p, \Lambda e)_{jk}}$$

O que leva a,

$$D^s(R(A, p))_{kl} \overline{u(\Lambda^{-1}p, e)_{il}} = \overline{D(A^{-1})_{ij}} \overline{u(p, \Lambda e)_{jk}},$$

²Questão de comodidade, porém pode ser feito da mesma forma para $a \neq 0$, que o resultado será o mesmo.

consequentemente, tem-se a seguinte equação:

$$u(\Lambda^{-1}p, e)_{il} D^s(R(A, p)^{-1})_{lk} = D(A^{-1})_{ij} u(p, \Lambda e)_{jk} = \dots$$

Utilizando o fato de que $R(A, p)^{-1} = R(A^{-1}, \Lambda^{-1}p)$, tem-se:

$$\dots = u(\Lambda^{-1}p, e)_{il} D^s(R(A^{-1}, \Lambda^{-1}p))_{lk} = D(A^{-1})_{ij} u(p, \Lambda e)_{jk}.$$

Fazendo $A^{-1} \rightarrow A$, depois fazendo $\Lambda p \rightarrow p$, obtém-se a seguinte equação, com $u(p, e)$, identificado como uma aplicação linear de $\mathbb{C}^{2s+1} \mapsto \mathbb{C}^N$.

$$D(A)u(\Lambda^{-1}p, \Lambda^{-1}e) = u(p, e)D^s(R(A, p)) \quad (3.16)$$

Achando $u(p, e)$, que está associado ao operador destruição através da relação de entrelaçamento, será feito de modo bem parecido ao caso puntiforme, portanto, faz-se a seguinte estratégia: Seja $u_0(e) := u(\bar{p}, e)$. Pegando a equação (3.16) e aplicando em ambos os lado o operador $D(A^{-1})$, fica-se com,

$$u(\Lambda^{-1}p, \Lambda^{-1}e) = D(A^{-1})u(p, e)D^s(R(A, p)).$$

Substituindo $\Lambda^{-1}e$ com e , em seguida Λ^{-1} com A_p e p com \bar{p} , obtém-se a seguinte equação:

$$\boxed{u(p, e) = D(A_p)u_0(A_p^{-1}e)} \quad (3.17)$$

Através dessa equação, pode-se achar a relação para $u_0(e)$. Pega-se a equação (3.17) e substituí-se na equação (3.16), aplica-se pela esquerda em ambos os lados o operador $D(A_p^{-1})$ e faz-se a mudança de $A_p^{-1}e$ para e , pode-se facilmente chegar a seguinte equação com $A \in SU(2)$ identificado por R e fazendo $p = \bar{p}$:

$$\boxed{D(R)u_0(R^{-1}e) = u_0(e)D^s(R)}, \quad \text{para todo } R \in SU(2) \quad (3.18)$$

Pode-se, agora, achar a relação para $v(p, e)$ que está associado ao operador criação através da relação de entrelaçamento, será feita de forma análoga feita para $u(p, e)$, faz-se a seguinte estratégia: Seja $v_0(e) := v(\bar{p}, e)$. Ao pegar a equação (3.14) e aplicar em ambos os lado o operador $D(A^{-1})$ fica-se com,

$$v(\Lambda^{-1}p, \Lambda^{-1}e) = D(A^{-1})v(p, e)\overline{D^s(R(A, p))}.$$

Substituindo $\Lambda^{-1}e$ com e , em seguida Λ^{-1} com A_p e p com \bar{p} , obtêm-se a seguinte equação:

$$\boxed{v(p, e) = D(A_p)v_0(A_p^{-1}e)} \quad (3.19)$$

Da mesma forma, pode-se, com essa equação, achar a relação de entrelaçamento para $v_0(e)$. Pega-se a equação (3.19) e coloca-se na equação (3.14), aplica-se pela esquerda em ambos os lados por $D(A_p^{-1})$ e fazendo a mudança de $A_p^{-1}e$ para e , pode-se facilmente chegar à seguinte equação com $A \in SU(2)$ identificado por R e fazendo $p = \bar{p}$:

$$\boxed{D(R)v_0(R^{-1}e) = v_0(e)\overline{D^s(R)}}, \quad \text{para todo } R \in SU(2). \quad (3.20)$$

3.3 Exemplos de soluções para o intertwiner associado ao operador de aniquilação para certas Representações.

Será definido $\bar{e}(e^0) := (e^0, 0, 0, \sqrt{1 + (e^0)^2})$ de acordo com a equação (3.18), pode-se escolher o caso de uma rotação em torno do eixo 3, o qual irá deixar invariante o \bar{e} , com isso, tem-se que $R^{-1}\bar{e} = \bar{e}$. Então, chega-se para $s = \frac{1}{2}$ à seguinte equação:

$$R_3(\omega)u_0(\bar{e}) = u_0(\bar{e})R_3(\omega) \quad (3.21)$$

Com $R_3(\omega) = e^{\frac{i\omega}{2}\sigma_3}$, através da equação (3.21), tem-se que o $u_0(\bar{e})$ irá comutar com σ_3 . Pode-se facilmente ver que $u_0(\bar{e})$ tem que ser da forma de uma matriz diagonal, portanto tem-se:

$$u_0(\bar{e}) := \begin{pmatrix} a(e^0) & 0 \\ 0 & \widehat{b}(e^0) \end{pmatrix} = a_0(e^0)\mathbf{1} + \mathbf{a}(e^0) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \text{ onde } \mathbf{a}(e^0) = c(e^0)\bar{\mathbf{e}}(e^0) \quad (3.22)$$

E $\bar{e} = (e^0, \bar{\mathbf{e}})$. Com isso, tem-se que $R\bar{e} = (e^0, R\bar{\mathbf{e}})$, portanto, para se ficar de acordo com a expressão (3.18), tem-se que definir:

$$u_0(R\bar{e}) := Ru_0(\bar{e})R^{-1} \quad (3.23)$$

Para todo e da forma $e = R\bar{e}$ a equação (3.23) define $u_0(e)$ para todo $e \in H$.

Deve-se verificar se a equação (3.23) está bem definida, ou seja, é independente de R e de acordo com a equação (3.18) ele satisfaz $u_0(Re) = Ru_0(e)R^{-1}$.

Demonstração. Se $R\bar{e} = \widehat{R}\bar{e}$, temos $\bar{e} = R^{-1}\widehat{R}\bar{e}$, portanto, $R^{-1}\widehat{R} = R_3(\omega)$. Da equação (3.21) vem, $R^{-1}\widehat{R}u_0(\bar{e}) = u_0(\bar{e})R^{-1}\widehat{R}$, se e somente se, $\widehat{R}u_0(\bar{e})\widehat{R}^{-1} = Ru_0(\bar{e})R^{-1}$ que implica $u_0(\widehat{R}\bar{e}) = u_0(R\bar{e})$. Com isso, verifica-se que a equação (3.23) está bem definida e satisfaz $u_0(Re) = Ru_0(e)R^{-1}$. \square

Logo tem-se $u_0(e) = R(a_0(e^0)\mathbf{1} + c(e^0)\bar{e}(e^0) \cdot \sigma)R^{-1} = a_0(e^0)\mathbf{1} + c(e^0)R\bar{e}(e^0) \cdot \sigma$, e pode-se usar o fato de que $R\bar{e}(e^0) = e$, e adicionando e subtraindo $c(e^0)e^0$ chega-se a seguinte equação:

$$u_0(e) = f_1(e^0)\mathbf{1} + f_2(e^0)e \cdot \sigma + c(e^0)e^0 - c(e^0)e^0 \quad (3.24)$$

Através dessa última equação, pode-se definir nossas soluções para $u_0(e)$.

$$\boxed{u_0(e) := f(e^0)\mathbf{1} + g(e^0)\underline{e} \quad \text{ou} \quad u_0(e) := f(e^0)\mathbf{1} + g(e^0)\tilde{e}} \quad (3.25)$$

Segundo o Teorema de Bisognano-Wichmann $t \mapsto u_0(\Lambda(t)e)$ deve ser analítica em $\mathbb{R} - i(0, \pi)$, o que implica que as funções f e g são analíticas em $\mathbb{R} - i\mathbb{R}^+$.

Assim, fica-se pronto para colocar a solução para $u(p, e)$, através das soluções encontradas para $u_0(e)$.

Para o caso $D^{(\frac{1}{2}, 0)}$, utilizando o fato de que $(A_p^{-1}e)^0 = \frac{e \cdot p}{m}$ e a equação (1.2), tem-se $u^+(p, e)$, dado da seguinte forma ver equação (3.17).

$$u^+(p, e) = D(A_p)u_0^+(A_p^{-1}e) = A_p f_+\left(\frac{e \cdot p}{m}\right) + g_+\left(\frac{e \cdot p}{m}\right)\underline{e}A_p^{-1}. \quad (3.26)$$

E para o caso, $D^{(0, \frac{1}{2})}$, utilizando o fato de que $(A_p^{-1}e)^0 = \frac{e \cdot p}{m}$ e a equação (1.3) tem-se $u^-(p, e)$, da seguinte forma, ver equação (3.17).

$$u^-(p, e) := D(A_p)u_0^-(A_p^{-1}e) = A_p^{-1}f_-\left(\frac{e \cdot p}{m}\right) + g_-\left(\frac{e \cdot p}{m}\right)\tilde{e}A_p \quad (3.27)$$

Outra solução de interesse é a solução para o campo de Dirac, $S(A) := D^{(\frac{1}{2},0)} \oplus D^{(0,\frac{1}{2})}$, portanto de acordo equação (3.17), tem-se:

$$u(p, e) := S(A_p)u_0(A_p^{-1}e) \quad (3.28)$$

E

$$u_0(e) := \begin{pmatrix} u_0^+(e) \\ u_0^-(e) \end{pmatrix} \quad e \quad S(A_p) = \begin{pmatrix} A_p & 0 \\ 0 & A_p^{*-1} \end{pmatrix}$$

De acordo com a solução para $u_0(e)$, tem-se: $u_0^+(A_p^{-1}e) = f_+((A_p^{-1}e)^0) + g_+((A_p^{-1}e)^0)\underline{A_p^{-1}e}$ e $u_0^-(A_p^{-1}e) = f_-((A_p^{-1}e)^0) + g_-((A_p^{-1}e)^0)\widetilde{A_p^{-1}e}$, com isso:

$$u(p, e) := \begin{pmatrix} A_p & 0 \\ 0 & A_p^{*-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_+((A_p^{-1}e)^0) + g_+((A_p^{-1}e)^0)\underline{A_p^{-1}e} \\ f_-((A_p^{-1}e)^0) + g_-((A_p^{-1}e)^0)\widetilde{A_p^{-1}e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_p f_+((A_p^{-1}e)^0) + A_p g_+((A_p^{-1}e)^0)\underline{A_p^{-1}e} \\ A_p^{-1} f_-((A_p^{-1}e)^0) + A_p^{-1} g_-((A_p^{-1}e)^0)\widetilde{A_p^{-1}e} \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Mas, usando equação (1.2) e (1.3), e fato que $(A_p^{-1}e)^0 = \frac{e \cdot p}{m}$, obtém-se:

$$u(p, e) := \begin{pmatrix} A_p f_+(\frac{e \cdot p}{m}) + g_+(\frac{e \cdot p}{m})\underline{A_p^{-1}e} \\ A_p^{-1} f_-(\frac{e \cdot p}{m}) + g_-(\frac{e \cdot p}{m})\widetilde{A_p^{-1}e} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

As funções f_+ , g_+ , f_- e g_- são holomorfas em $\mathbb{R} - i\mathbb{R}^+$

3.4 Construção do intertwiner associado ao operador criação via teorema de Bisognano-Wichmann

Será achada a solução para o operador $v(p, e)$, não utilizando a equação de entrelaçamento, mas sim através do Teorema de Bisognano-Wichmann ver (2.4.4), isso para evitar que se tenha mais 4 funções arbitrárias, pois teria-se que relacionar um total de 8 funções arbitrárias para ter a localidade do campo, o que é muito difícil de se fazer. Assim, justifica-se a maneira escolhida para achar o $v(p, e)$.

$$(U(A_1(t))\varphi_i^*(x, e)\Omega)_k(p), \text{ é holomorfa para } \mathbb{R} + i(0, \pi) \quad (3.31)$$

$$(U(j)(U(A_1(t))|_{t=i\pi}\varphi_i^*(x, e)\Omega))_k(p) = c(\varphi_i(x, e)\Omega)_k(p) \quad (3.32)$$

Usando a covariância equação (3.6), tem-se:

$$(U(A_1(t))\varphi_i^*(x, e)\Omega)_k(p) = \overline{D}_{ij}(A_1(-t))(\varphi_j^*(\Lambda_1(t)x, \Lambda_1(t)e)\Omega)_k(p) \quad (3.33)$$

Como visto, na seção 3.2, tem-se que: $(\varphi_i^*(x, e)\Omega)_k(p) = e^{ip \cdot x} \overline{u(p, e)_{ik}}$, substituindo esta na equação (3.33), obtém-se:

$$(U(A_1(t))\varphi_i^*(x, e)\Omega)_k(p) = \overline{D}_{ij}(A_1(-t))e^{ip\Lambda_1(t)x} \overline{u_{jk}(p, \Lambda_1(t)e)} \quad (3.34)$$

Pegando o lado esquerdo da equação (3.32), e aplicando a Proposição (2.4.2) tem-se:

$$(U(j)(U(A_1(t))|_{t=i\pi}\varphi_i^*(x, e)\Omega))_k(p) = e^{ijp\Lambda x} D^s(i\sigma_3)_{kl} \overline{\overline{\overline{D}(A_1(-t))_{ij} u_{jl}(-jp, \Lambda_1(t)e)}}|_{t=i\pi} \quad (3.35)$$

Pelo lado direito da equação (3.32), lembrando, tem-se que:

$$(\varphi_i(x, e))_k(p) = e^{ipx} v_{ik}(p, e) \quad (3.36)$$

Tem-se, de acordo com a equação (3.32), se fizer a extensão para $t = i\pi$ deve-se ter as equações (3.35) e (3.36) iguais módulo uma constante, portanto será obtido:

$$e^{ipx} v_{ik}(p, e) = e^{ijp\Lambda(t)x} D^s(i\sigma_3)_{kl} \overline{\overline{\overline{D}(A_1(-t))_{ij} u_{jl}(-jp, \Lambda_1(t)e)}}|_{t=i\pi} \quad (3.37)$$

Por hipótese para nossas representações, vale o fato de que $\overline{D(A)} = D(\overline{A})$, portanto $\overline{D(A_1(-t))} = D(A_1(-t))$ e que $\overline{D(A_1(-t))}|_{t=-i\pi} = \overline{D(A_1(-t))}|_{t=i\pi}$ com isso, consegue-se obter a relação para o $v(p, e)$ em função do $u(p, e)$.

$$v_{ik}(p, e) = c \left\{ \overline{D(A_1(-t))} u(-jp, \Lambda_1(t)e) \right\} |_{t=-i\pi} D^s(i\sigma_3)_{lk} \quad (3.38)$$

Pode ser escrita, fazendo o uso da equação (2.122) da seguinte forma:

$$\boxed{v(p, e) = c \left\{ \overline{D(A_1(-t))} |_{t=-i\pi} u(-jp, je) D^s(i\sigma_3) \right\}} \quad (3.39)$$

Com isso, pode-se encontrar a solução de $v(p, e)$ para os casos em que, $D = D^{(\frac{1}{2}, 0)}$, $D = D^{(0, \frac{1}{2})}$ e $D = S := D^{(\frac{1}{2}, 0)} \oplus D^{(0, \frac{1}{2})}$ em função dos resultados encontrados para as soluções de $u(p, e)$.

3.4.1 Para $D = D^{\frac{1}{2},0}$ e a solução u^+

Tem-se que: $\overline{D(A_1(-t))} |_{-i\pi} = e^{-\frac{t\sigma_1}{2}} |_{-i\pi} = e^{\frac{i\pi\sigma_1}{2}} = i\sigma_1$. Então, de acordo com a equação (3.39), tem-se:

$$v_0^+(e) = ci\sigma_1 u_0^+(je) D^{\frac{1}{2}}(i\sigma_3) = ci\sigma_1 u_0^+(je) i\sigma_3,$$

mas ver equação (3.25) tem-se, $u_0^+(je) = f_+((je)^0)\mathbb{1} + g_+((je)^0)\underline{je}$, que equivale $f_+(-e^0)\mathbb{1} + g_+(-e^0)\underline{je}$, com isso obtém-se:

$$v_0^+(e) = -c\sigma_1(f_+(-e^0)\mathbb{1} + g_+(-e^0)\underline{je})\sigma_3,$$

usando o fato de que $:\sigma_1 x = \underline{(-jx)}\sigma_1$,³ com isso, tem-se $\sigma_1(\underline{je}) = \underline{(-j^2e)}\sigma_1$ como $j^2 = 1$, encontra-se $\sigma_1(\underline{je}) = \underline{(-e)}\sigma_1$.

Portanto, o $v_0^+(e) = -cf_+(-e^0)\sigma_1\sigma_3 - cg_+(-e^0)\underline{(-e)}\sigma_1\sigma_3$, mas usando o fato que $\sigma_1\sigma_3 = -i\sigma_2 = -\varepsilon$, obtém-se:

$$v_0^+(e) = cf_+(-e^0)\varepsilon + cg_+(-e^0)\underline{(-e)}\varepsilon \quad (3.40)$$

Com isso, fazendo o uso da equação (3.19), obtém-se $v^+(p, e) = D^{(\frac{1}{2},0)}(A_p)v_0^+(A_p^{-1}e) = cA_p f_+((-A_p^{-1}e)^0)\varepsilon + cA_p g_+((-A_p^{-1}e)^0)\underline{(-A_p^{-1}e)}\varepsilon$. Pode-se, mais uma vez, fazer o uso das equações (1.2) e (1.3), e a relação $(A_p^{-1}e)^0 = \frac{e \cdot p}{m}$ tem-se:

$$v^+(p, e) = cA_p f_+\left(\frac{-e \cdot p}{m}\right)\varepsilon + cg_+\left(-\frac{e \cdot p}{m}\right)\underline{(-e)}A_p^{-1}\varepsilon.$$

Fazendo o uso da equação (3.26), obtém-se:

$$\boxed{v^+(p, e) = cu^+(p, -e)\varepsilon}, \quad c = \text{uma constante.} \quad (3.41)$$

3.4.2 Para $D = D^{0,\frac{1}{2}}$ e a solução u^-

De acordo com a equação (3.39), tem-se:

$$v_0^-(e) = cD^{(0,\frac{1}{2})}(i\sigma_1)u_0^-(je)D^{\frac{1}{2}}(i\sigma_3) = -ci\sigma_1 u_0^-(je) i\sigma_3,$$

³Ver Apêndice C

mas, ver equação (3.25), tem-se $u_0^-(je) = f_-((je)^0)\mathbb{1} + g_-((je)^0)\widetilde{(je)}$, que equivale a $f_-(-e^0)\mathbb{1} + g_-(-e^0)\widetilde{je}$, com isso, obtém-se:

$$v_0^-(e) = c\sigma_1(f_-(-e^0)\mathbb{1} + g_-(-e^0)\widetilde{je})\sigma_3,$$

usando o fato que⁴: $\sigma_1\widetilde{x} = \widetilde{(-jx)}\sigma_1$, tem-se $\sigma_1\widetilde{je} = \widetilde{(-j^2e)}\sigma_1$ como $j^2 = 1$, encontra-se $\sigma_1\widetilde{je} = \widetilde{(-e)}\sigma_1$.

Portanto, o $v_0^-(e) = c(f_-(-e^0)\mathbb{1} + g_-(-e^0)\widetilde{(-e)})\sigma_1\sigma_3$, mas usando o fato de que $\sigma_1\sigma_3 = -i\sigma_2 = -\varepsilon$, obtém-se:

$$v_0^-(e) = -c(f_-(-e^0)\mathbb{1} + g_-(-e^0)\widetilde{(-e)})\varepsilon = -cu_0^-(e)\varepsilon \quad (3.42)$$

Fazendo o uso da equação (3.19), obtém-se $v^-(p, e) = D^{(0, \frac{1}{2})}(A_p)v_0^-(A_p^{-1}e) = -cA_p^{-1}(f_-((-A_p^{-1}e)^0)\mathbb{1} + g_-((-A_p^{-1}e)^0)\widetilde{(-A_p^{-1}e)})\varepsilon$. Pode-se, mais uma vez, fazer o uso das equação (1.3), e a relação $(A_p^{-1}e)^0 = \frac{e \cdot p}{m}$ tem-se:

$$v^-(p, e) = -c(A_p^{-1}f_-(-\frac{e \cdot p}{m})\mathbb{1} + g_-(-\frac{e \cdot p}{m})\widetilde{(-e)}A_p)\varepsilon.$$

Agora, fazendo o uso da equação (3.27), obtém-se:

$$\boxed{v^-(p, e) = -cu^-(p, -e)\varepsilon}, \quad c = \text{uma constante.} \quad (3.43)$$

Portanto, o $v(p, e)$ fica fixado em função do $u(p, e)$, da seguinte forma:

$$v(p, e) = c \cdot \begin{pmatrix} u^+(p, -e) \\ u^-(p, -e) \end{pmatrix} \cdot \varepsilon = c \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot u(p, -e) \cdot \varepsilon, \quad \text{qualquer que seja o } u(p, -e). \quad (3.44)$$

3.4.3 Para Dirac, $S = D^{(\frac{1}{2}, 0)} \oplus D^{(0, \frac{1}{2})}$ e a solução u

De acordo com a equação (3.19), tem-se:

$$v(p, e) := S(A_p)v_0(A_p^{-1}e) \quad (3.45)$$

⁴Demonstração é análogo ao caso $\sigma_1\widetilde{x} = \widetilde{(-jx)}\sigma_1$ feita no apêndice C.

$$v_0(e) := \begin{pmatrix} v_0^+(e) \\ v_0^-(e) \end{pmatrix} \quad e \quad S(A_p) = \begin{pmatrix} A_p & 0 \\ 0 & A_p^{*-1} \end{pmatrix}$$

De acordo com as soluções encontradas acima para $v_0^+(e), v_0^-(e)$, tem-se:

$$v(p, e) := \begin{pmatrix} A_p & 0 \\ 0 & A_p^{*-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} cf_+((-A_p^{-1}e)^0) + cg_+((-A_p^{-1}e)^0) - \widetilde{A_p^{-1}e} \\ -cf_-((-A_p^{-1}e)^0) - cg_-((-A_p^{-1}e)^0) - \widetilde{A_p^{-1}e} \end{pmatrix} \cdot \varepsilon =$$

$$\begin{pmatrix} cf_+((-A_p^{-1}e)^0)A_p + cg_+((-A_p^{-1}e)^0)A_p \widetilde{A_p^{-1}e} \\ -cf_-((-A_p^{-1}e)^0)A_p^{-1} - cg_-((-A_p^{-1}e)^0)A_p^{-1} \widetilde{A_p^{-1}e} \end{pmatrix} \cdot \varepsilon \quad (3.46)$$

Mas usando equação (1.2) e (1.3) e fato que $(A_p^{-1}e)^0 = \frac{e \cdot p}{m}$, obtém-se:

$$v(p, e) := c \cdot \begin{pmatrix} f_+(-\frac{e \cdot p}{m})A_p - g_+(-\frac{e \cdot p}{m})\underline{e}A_p^{-1} \\ -f_-(-\frac{e \cdot p}{m})A_p^{-1} + g_-(-\frac{e \cdot p}{m})\tilde{e}A_p \end{pmatrix} \cdot \varepsilon \quad (3.47)$$

E as funções f_+, g_+, f_- e g_- são holomorfas em $\mathbb{R} - i\mathbb{R}^+$

3.5 Modelos para nosso Campo Quântico Dirac tipo-string

Conseguiu-se determinar o Campo Quântico Tipo-String com spin $s = \frac{1}{2}$ arbitrário ver equação (3.8) com as respectivas soluções para $u(p, e)$ e $v(p, e)$ que era um dos objetivos no presente trabalho.

Com essas soluções para $u(p, e)$ e $v(p, e)$, definiu-se $\not{p} := \sum p_\mu \gamma^\mu$ e $\gamma^i := \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$, com $\gamma^0 := \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, e os σ_i com $i = 1, 2, 3$ as matrizes de Pauli, com $\sigma_0 = \mathbf{1}$. Fica-se com \not{p} na forma matricial:

$$\not{p} := \begin{pmatrix} 0 & \underline{p} \\ \tilde{p} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

Serão analisados uns casos importantes, em que D corresponde a representação de Dirac S .

Para o caso em que se estiver em um ponto da concha de massa \mathcal{H}_m^+ e,

$$\boxed{g_-\left(\frac{p \cdot e}{m}\right) = -g_+\left(\frac{p \cdot e}{m}\right) \quad \text{e} \quad f_-\left(\frac{p \cdot e}{m}\right) = f_+\left(\frac{p \cdot e}{m}\right) + 2\frac{p \cdot e}{m}g_+\left(\frac{p \cdot e}{m}\right)} \quad (3.49)$$

Terão as seguintes equações satisfeitas.

$$\boxed{(\not{p} - m)u(p, e) = 0} \quad (3.50)$$

e

$$\boxed{(\not{p} + m)v(p, e) = 0} \quad (3.51)$$

Essas equações (3.50) e (3.51) são facilmente verificadas.⁵

Agora, verifica-se a equação de Dirac para o Campo Quântico Tipo-String.

$$\boxed{(i \not{\partial} - m)\Psi_i(x, e) = 0.}$$

Demonstração.

$$(i \not{\partial} - m)\Psi_i(x, e) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d\mu(p)(i \not{\partial} - m)\{e^{ip \cdot x}v_{ik}(p, e)a_k^*(p) + e^{-ip \cdot x}u_{ik}(p, e)a_k(p)\},$$

mas $\not{\partial}e^{ip \cdot x} = i \not{p}e^{ip \cdot x}$ e $\not{\partial}e^{-ip \cdot x} = -i \not{p}e^{-ip \cdot x}$, com isso, tem-se:

$$(i \not{\partial} - m)\Psi_i(x, e) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d\mu(p)\{e^{ip \cdot x}(-\not{p} - m)v_{ik}(p, e)a_k^*(p) + e^{-ip \cdot x}(\not{p} - m)u_{ik}(p, e)a_k(p)\}$$

Usando as equações (3.50) e (3.51), obtém-se:

$$\boxed{(i \not{\partial} - m)\Psi_i(x, e) = 0} \quad (3.52)$$

Portanto, o campo satisfaz a equação de Dirac, se e somente se, as condições feitas pela equação (3.49) forem satisfeitas. \square

Definindo: $\overline{u(p, e)} := u^*(p, e)\gamma_0$ e $\overline{v(p, e)} := v^*(p, e)\gamma_0$, têm-se as seguintes relações satisfeitas:

$$\boxed{\overline{u(p, e)}(\not{p} - m) = 0} \quad \boxed{\overline{v(p, e)}(\not{p} + m) = 0} \quad (3.53)$$

⁵Ver apêndice (C)

Vale, aqui, fazer uma pequena observação: $\overline{u_{ik}(p, e)} \neq \overline{u(p, e)_{ik}}$ o mesmo vale para $v(p, e)$, e $\overline{u_{ik}(p, e)}$ é conjugado da componente ik de $u(p, e)$, e $\overline{u(p, e)_{ik}}$ é a componente ik de $\overline{u(p, e)}$.

Para o caso equação da (3.49), A_P e A_P^{-1} dados de acordo com as equações (1.12) e (1.13), $u^*(p, e)$ é o adjunto da equação (3.30), $v^*(p, e)$ é o adjunto da equação (3.47) e por fim, estar em um ponto da concha de massa \mathcal{H}_m^+ .

Define-se:

$$\overline{\Psi_i(x, e)} := (\Psi_j(x, e)^* \gamma_{ji}^0) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{H_m^+} d_\mu(p) \left\{ e^{-ip \cdot x} a_k(p) \overline{v(p, e)_{ki}} + e^{ip \cdot x} a_k^*(p) \overline{u(p, e)_{ki}} \right\}, \quad (3.54)$$

tem-se a seguinte "equação de Dirac":

$$\boxed{\overline{\Psi(x, e)}(i \overleftarrow{\not{\partial}} + m) = 0} \quad (3.55)$$

Demonstração. Tem-se que,

$$\overline{\Psi(x, e)} \overleftarrow{\not{\partial}} = \overline{\Psi(x, e)} \overleftarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu = (\partial_\mu \overline{\Psi(x, e)}) \gamma^\mu.$$

Portanto tem-se,

$$\begin{aligned} \overline{\Psi_j(x, e)}(i \overleftarrow{\not{\partial}}_{ji}) &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{H_m^+} d_\mu(p) \left\{ e^{ip \cdot x} a_k^*(p) \overline{u(p, e)_{kj}} i \overleftarrow{\not{\partial}}_{ji} + e^{-ip \cdot x} a_k(p) \overline{v(p, e)_{kj}} i \overleftarrow{\not{\partial}}_{ji} \right\} = \\ &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{H_m^+} d_\mu(p) \left\{ e^{ip \cdot x} a_k^*(p) (-\overline{u(p, e)} \not{p})_{ki} + e^{-ip \cdot x} a_k(p) (\overline{v(p, e)} \not{p})_{ki} \right\} =, \end{aligned}$$

usando a equação (3.53), tem-se:

$$\begin{aligned} -m(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{H_m^+} d_\mu(p) \left\{ e^{-ip \cdot x} a_k(p) \overline{v(p, e)_{ki}} + e^{ip \cdot x} a_k^*(p) \overline{u(p, e)_{ki}} \right\} = \\ = -m \overline{\Psi_i(x, e)} \end{aligned}$$

Fica assim mostrado a equação (3.55). □

Proposição 3.5.1. *Dado*

$$\boxed{\Psi_f(x, e) := \int f(t) \not{\partial} \Psi(x + te) dt} \quad (3.56)$$

este irá satisfazer a covariância equação (2.10), e irá coincidir como uma de nossas soluções quando se estiver em um ponto da concha de massa \mathcal{H}_m^+ e,

$$\boxed{f_- = f_+ = 0 \quad e \quad g_+(\frac{e \cdot p}{m}) = g_-(\frac{e \cdot p}{m}) = f(p \cdot e)} \quad (3.57)$$

Será mostrada, a seguir, que a relação (3.56), satisfaz a covariância ver equação (2.10) com $a = 0$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} & U(A) \int f(t) \not{e} \Psi(x + te) dt U(A)^{-1} = \\ & = \int f(t) \not{e} U(A) \Psi(x + te) U(A)^{-1} dt = \\ & = \int f(t) \not{e} S(A)^{-1} \Psi(\Lambda x + t \Lambda e) dt = \dots \end{aligned}$$

Antes de continuar, devem-se notar que, devido a equação 1.2 tem-se, $\underline{\Lambda} a = A \underline{a} A^*$ e $\widetilde{\Lambda} a = A^{*-1} \widetilde{a} A^{-1}$, pode-se facilmente verificar que $\not{\Lambda} e = S(A) \not{e} S(A)^{-1}$, portanto, $\not{e} S(A)^{-1} = S(A)^{-1} \not{\Lambda} e$, com isso,

$$\begin{aligned} \dots & = S(A)^{-1} \int f(t) \not{\Lambda} e \Psi(\Lambda x + t \Lambda e) dt = \\ & S(A)^{-1} \Psi_f(\Lambda x + \Lambda e) \end{aligned} \quad (3.58)$$

Assim, fica mostrado que a relação (3.56) realmente satisfaz a covariância (2.10).

Agora, é possível ver que realmente $\int f(t) \not{e} \Psi(x + te) dt$, coincide com uma de nossas soluções.

Tem-se que:

$$\Psi_i(x + te) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{H_m^+} d_\mu(p) \{ e^{ip \cdot (x+te)} a_k^*(p) v_{ik}(p) + e^{-ip \cdot (x+te)} a_k(p) u_{ik}(p) \},$$

com isso, obtém-se:

$$\Psi_f(x, e) = \not{e} \int dt f(t) \int d_\mu(p) \{ e^{ip \cdot x} e^{itp \cdot e} v_{ik}(p) a_k^*(p) + e^{-ip \cdot x} e^{-itp \cdot e} u_{ik}(p) a_k(p) \}$$

Usando o fato da transformada de Fourier $f(w) = \int f(t) e^{-iwt} dt$, tem-se:

$$\Psi_f(x, e) = \int d_\mu(p) e^{ip \cdot x} f(-p \cdot e) \not{e} v_{ik}(p) a_k^*(p) + e^{-ip \cdot x} f(p \cdot e) \not{e} u_{ik}(p) a_k(p)$$

Identificando $\widehat{v}(p, e) = f(-p \cdot e) \not{v}_{ik}(p)$ e $\widehat{u}(p, e) = f(p \cdot e) \not{u}_{ik}(p)$, tem-se:

$$\Psi_f(x, e) = \int d_\mu(p) e^{ip \cdot x} \widehat{v}(p) a_k^*(p) + e^{-ip \cdot x} \widehat{u}(p, e) a_k(p)$$

Com

$$\widehat{u}(p, e) = f(p \cdot e) \begin{pmatrix} \underline{e}A_p^{-1} \\ \tilde{e}A_p \end{pmatrix}$$

e

$$\widehat{v}(p, e) = f(-p \cdot e) \cdot c \begin{pmatrix} -\underline{e}A_p^{-1} \\ \tilde{e}A_p \end{pmatrix} \cdot \varepsilon$$

Observe que $\widehat{u}(p, e)$ coincide com a equação (3.30) se $f(p \cdot e) = g_+(\frac{e \cdot p}{m}) = g_-(\frac{e \cdot p}{m})$, e $f_+ = f_- = 0$, o mesmo ocorre no caso de $\widehat{v}(p, e)$ que irá coincidir com a equação (3.47) se $f(-p \cdot e) = g_+(\frac{-e \cdot p}{m}) = g_-(\frac{-e \cdot p}{m})$, e $f_+ = f_- = 0$. Com isso $\Psi_f(x, e)$ irá coincidir com nossa solução ver equação (3.8). \square

3.5.1 Covariância para nosso Campo tipo String

Deverão ser achadas as relações de covariância para o campo tipo string, mas para tal precisa-se, primeiro, mostrar a seguinte relação:

$$S(A^{*-1})\gamma^0 = \gamma^0 S(A) \quad (3.59)$$

Demonstração. Tem-se, $S(A^{*-1}) = \begin{pmatrix} A^{*-1} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ e $\gamma^0 := \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$

Portanto:

$$S(A^{*-1})\gamma^0 = \begin{pmatrix} A^{*-1} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A^{*-1} \\ A & 0 \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

Por outro lado, tem-se:

$$\gamma^0 S(A) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{*-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A^{*-1} \\ A & 0 \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

Portanto, comparando as equações (3.60) e (3.61), verifica-se a relação dada pela equação (3.59). \square

Munido dessa informação equação (3.59) e da relação de covariância equação (2.10), pode-se trabalhar com a representação de Dirac ($D(A) = S(A) := D^{\frac{1}{2},0} \oplus D^{0,\frac{1}{2}}$) tem-se as seguintes relações:

$$U(A)\Psi^*(x, e)U(A)^{-1} = \Psi^*(\Lambda x, \Lambda e)S(A^{-1})^* \quad (3.62)$$

$$U(A)\overline{\Psi(x, e)}U(A)^{-1} = \overline{\Psi(\Lambda x, \Lambda e)}S(A) \quad (3.63)$$

$$U(A)\overline{\Psi(x, e)}\Psi(x, e)U(A)^{-1} = \overline{\Psi(\Lambda x, \Lambda e)}\Psi(\Lambda x, \Lambda e) \quad (3.64)$$

Demonstram-se as equações (3.62), (3.63) e (3.64).

Demonstração. Primeiro a equação (3.62), tem-se da covariância $U(A)\Psi(x, e)U(A)^{-1} = S(A^{-1})\Psi(\Lambda x, \Lambda e)$, portanto se pegar o adjunto nos dois lados, tem-se: $(U(A)\Psi(x, e)U(A)^{-1})^* = (S(A^{-1})\Psi(\Lambda x, \Lambda e))^*$, usando o fato de que $U(A)$ é uma representação irredutível unitária de $SU(2)$, o que deixa com $U(A)^{-1} = U(A)^*$, obtém-se que $U(A)\Psi^*(x, e)U(A)^{-1} = \Psi^*(\Lambda x, \Lambda e)S(A^{*-1})$ ficando mostrada a equação (3.62).

Agora para $U(A)\overline{\Psi_i(x, e)}U(A)^{-1} = U(A)\Psi_j^*(x, e)\gamma_{ji}^0U(A)^{-1} = U(A)\Psi_j^*(x, e)U(A)^{-1}\gamma_{ji}^0$. Usando a equação (3.62) fica-se com a seguinte relação

$$U(A)\Psi_j^*(x, e)U(A)^{-1}\gamma_{ji}^0 = \Psi_j^*(\Lambda x, \Lambda e)S(A^{*-1})\gamma_{ji}^0.$$

Pode-se agora usar a equação (3.59) e obtém-se $U(A)\overline{\Psi(x, e)}U(A)^{-1} = \overline{\Psi(\Lambda x, \Lambda e)}S(A)$, ficando mostrada a equação (3.63).

Agora para $U(A)\overline{\Psi(x, e)}\Psi(x, e)U(A)^{-1}$ pode-se introduzir entre $\overline{\Psi(x, e)}$ e $\Psi(x, e)$ uma identidade $\mathbf{1} = U(A)^{-1}U(A)$, ficando com $U(A)\overline{\Psi(x, e)}U(A)^{-1}U(A)\Psi(x, e)U(A)^{-1}$. Pode-se, nesta, utilizar a equação (3.63) e a covariância equação (2.10) e obtém-se,

$$U(A)\overline{\Psi(x, e)}\Psi(x, e)U(A)^{-1} = \overline{\Psi(\Lambda x, \Lambda e)}\Psi(\Lambda x, \Lambda e),$$

ficando assim demonstrada a equação (3.64). □

3.6 Densidade de corrente

Pode-se também definir a densidade de corrente $j^\mu(x, e)$ através do campo tipo-string, da seguinte forma:

$$\boxed{j^\mu(x, e) := :\overline{\Psi}_i(x, e)\gamma_{ij}^\mu\Psi_j(x, e):} \quad (3.65)$$

: : é o Wick-Ordering, que faz uma ordenação entre o operador a e a^* . A densidade de corrente obedece a seguinte equação:

$$\boxed{U(A)j^\mu(x, e)U(A)^{-1} = \Lambda_\nu^\mu j^\nu(\Lambda x, \Lambda e)} \quad (3.66)$$

Demonstração.

$$U(A):\overline{\Psi}_i(x, e)\gamma_{ij}^\mu\Psi_j(x, e):U(A)^{-1} = \dots$$

Novamente será introduzida uma identidade $\mathbf{1} = U(A)^{-1}U(A)$, na equação acima e fica-se com: $\dots = \overline{\Psi}_i(\Lambda x, \Lambda e)S(A)\gamma_{ij}^\mu S(A^{-1})\Psi_j(\Lambda x, \Lambda e)$;, como tem-se

$$\not\Lambda e = S(A) \not e S(A)^{-1}$$

isso leva a

$$S(A)\gamma^\mu S(A^{-1}) = \Lambda_\nu^\mu \gamma^\nu,$$

portanto fica-se com,

$$U(A):\overline{\Psi}_i(x, e)\gamma_{ij}^\mu\Psi_j(x, e):U(A)^{-1} = \Lambda_\nu^\mu j^\nu(\Lambda x, \Lambda e)$$

Ficando mostrada a equação (3.66). □

Vale observar que, com isso, mostra-se que devido à equação (3.64) o $\overline{\Psi}(x, e)\Psi(x, e)$, se comporta como um escalar e da equação (3.66) que $j^\mu(x, e)$ é um vetor.

Usando a equação de Dirac para o caso do campo quântico tipo string, ver equação (3.52) e a equação (3.55), pode-se de forma fácil verificar a equação que segue.

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu(x, e) = :\overline{\Psi}(x, e)(\overleftarrow{\not{\partial}} + \overrightarrow{\not{\partial}})\Psi(x, e): = 0} \quad (3.67)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu j^\mu(x, e) &= \partial_\mu (\overline{\Psi(x, e)} \gamma^\mu \Psi(x, e)) = \\
 &= (\partial_\mu \overline{\Psi(x, e)}) \gamma^\mu \Psi(x, e) + \overline{\Psi(x, e)} \gamma^\mu (\partial_\mu \Psi(x, e)) = \\
 &= \overline{\Psi(x, e)} \overleftarrow{\not{\partial}} \Psi(x, e) + \overline{\Psi(x, e)} \not{\partial} \Psi(x, e) = \dots
 \end{aligned}$$

Será feito o uso das equações (3.52) e (3.55) e encontra-se:

$$\dots = im \overline{\Psi(x, e)} \Psi(x, e) - im \overline{\Psi(x, e)} \Psi(x, e) = 0$$

□

Capítulo 4

Função de Dois Pontos

Calculando as "funções" de dois pontos para o caso do Campo tipo string, define as das seguintes formas:

$$\boxed{w_{i\bar{j}}(x, e; x', e') := (\Omega, \Psi_i(x, e) \overline{\Psi_j(x', e') \Omega})} \quad (4.1)$$

$$\boxed{w_{\bar{i}j}(x, e; x', e') := (\Omega, \overline{\Psi_i(x, e) \Psi_j(x', e') \Omega})} \quad (4.2)$$

Com tais definições para as "funções" de dois pontos, enunciam-se alguns Lemas e com suas respectivas demonstrações.

Lema 4.0.1. *As funções de dois pontos terão as seguintes formas explícitas.*

$$w_{i\bar{j}}(x, e; x', e') = (2\pi)^{-3} \int_{H_m^+} d_\mu(p) \left\{ e^{-ip \cdot (x-x')} (u(p, e) \overline{u(p, e')})_{ij} \right\} \quad (4.3)$$

$$w_{\bar{i}j}(x, e; x', e') = (2\pi)^{-3} \int_{H_m^+} d_\mu(p) \left\{ e^{-ip \cdot (x-x')} (v(p, e') \overline{v(p, e)})_{ji} \right\} \quad (4.4)$$

Lema 4.0.2. *Os $u(p, e)$ e $v(p, e)$ obedecem as seguinte relações:*

$$v(p, e') \overline{v(p, e)} = S(A^{-1}) v(\Lambda p, \Lambda e') \overline{v(\Lambda p, \Lambda e)} S(A) \quad (4.5)$$

$$v(p, e') \overline{v(p, e)} = S(A_1(i\pi)) u(-jp, je') \overline{u(-jp, je)} S(A_1(i\pi)) \quad (4.6)$$

$$u(p, e) u(p, e') = S(A_1(i\pi)) v(-jp, je) \overline{v(-jp, je')} S(A_1(i\pi)) \quad (4.7)$$

Acima

$$S(A_1(i\pi)) := \begin{pmatrix} i\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Demonstra-se o Lema 4.0.1.

Demonstração. Primeiro a equação (4.3).

Usando a definição de $\overline{\Psi(x, e)}$ ver equação (3.54), fica-se com:

$$\overline{\Psi_j(x', e')} = (\Psi_n^*(x', e')\gamma_{nj}^0) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d\mu(q) \{e^{-iqx'} \overline{v_{nl}(q, e')} \gamma_{nj}^0 a_l(q) + e^{iqx'} \overline{u_{nl}(q, e')} \gamma_{nl}^0 a_l^*(q)\} \quad (4.9)$$

Tem-se portanto que

$$(\Omega, \Psi_i(x, e) \overline{\Psi_j(x', e')} \Omega) = (\Psi_i^*(x, e) \Omega, \overline{\Psi_j(x', e')} \Omega) = \dots$$

Usando o adjunto da equação (3.8), tem-se:

$$\dots = (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) \int d\mu(q) (e^{ipx} \overline{u_{ik}(p, e)} a_k^*(p) \Omega, e^{iqx'} u_{ln}^*(q, e') \gamma_{nj}^0 a_l^*(q) \Omega) = \quad (4.10)$$

$$= (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) \int d\mu(q) e^{-ipx} u_{ik}(p, e) e^{iqx'} u_{ln}^*(q, e') \gamma_{nj}^0 (a_k^*(p) \Omega, a_l^*(q) \Omega) = \quad (4.11)$$

$$= (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) \int d\mu(q) e^{-ipx} u_{ik}(p, e) e^{iqx'} \overline{u(q, e')}_{lj} (\Omega, a_k(p) a_l^*(q) \Omega) \quad (4.12)$$

Pode-se usar a equação (1.23) e verifica-se que:

$$(\Psi_i^*(x, e) \Omega, \overline{\Psi_j(x', e')} \Omega) = (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) \int e^{-ip \cdot (x-x')} u_{ik}(p, e) \overline{u(p, e')}_{kj} = \quad (4.13)$$

$$= (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) \int e^{-ip \cdot (x-x')} (u(p, e) \overline{u(p, e')})_{ij} \quad (4.14)$$

Ficando assim mostrada a equação (4.3).

Agora, a equação (4.4).

Tem-se que

$$(\Omega, \overline{\Psi_i(x, e)} \Psi_j(x', e') \Omega) = (\Psi_n(x, e) \gamma_{ni}^0 \Omega, \Psi_j(x', e') \Omega) = \dots$$

Usando a equação (3.8), tem-se:

$$\dots = (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) \int d\mu(q) e^{-ipx} \overline{v_{nl}(p, e)} \gamma_{ni}^0 e^{iqx'} v_{jk}(q, e') (a_l^*(p) \Omega, a_k^*(q) \Omega) = \quad (4.15)$$

$$= (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) \int d\mu(q) e^{-ipx} v_{ln}^*(p, e) \gamma_{ni}^0 e^{iqx'} v_{jk}(q, e') (\Omega, a_l(p) a_k^*(q) \Omega) = \quad (4.16)$$

Usando novamente a equação (1.23), verifica-se que:

$$(\Psi_n(x, e) \gamma_{ni}^0 \Omega, \Psi_j(x', e') \Omega) = (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) \overline{v(p, e)}_{ki} v_{jk}(p, e') = \quad (4.17)$$

$$= (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) (v(p, e') \overline{v(p, e)})_{ji} \quad (4.18)$$

Ficando assim mostrado a equação (4.4). \square

Partindo para demonstração do Lema 4.0.2

Demonstração. Para a primeira relação, será utilizada a equação (3.14), portanto tem-se:

$v(p, e) = S(A) v(\Lambda^{-1}p, \Lambda^{-1}e) \overline{D^s(R(A, p))}^{-1}$, com isso fica-se com:

$$v(p, e') \overline{v(p, e)} = S(A) v(\Lambda^{-1}p, \Lambda^{-1}e') \overline{D^s(R(A, p))}^{-1} \overline{D^s(R(A, p))}^{-1*} v(\Lambda^{-1}p, \Lambda^{-1}e)^* S(A^*) \gamma^0 \quad (4.19)$$

Usando o fato que D^s é unitário e $S(A^*)^{-1} \gamma^0 = \gamma^0 S(A)^{-1}$ ver equação (3.59), tem-se:

$$v(p, e') \overline{v(p, e)} = S(A) v(\Lambda^{-1}p, \Lambda^{-1}e') v(\Lambda^{-1}p, \Lambda^{-1}e)^* \gamma^0 S(A^{-1}) \quad (4.20)$$

Substituindo A por A^{-1} , obtém-se a equação (4.5), ficando mostrado a primeira parte do Lema 4.0.2.

Para a segunda parte, será usado o teorema 2.4.4 de Bisognano-Wichmann, ver equação (3.39), e o fato que $\overline{v(p, e)} := v^*(p, e) \gamma^0$, tem-se: $v(p, e') = S(A_1(i\pi)) u(-jp, je') D^s(i\sigma_3)$, com isso fica-se com:

$$v(p, e') \overline{v(p, e)} = S(A_1(i\pi)) u(-jp, je') D^s(i\sigma_3) D^s(i\sigma_3)^* u^*(-jp, je) S(A_1(i\pi))^* \gamma^0 \quad (4.21)$$

Agora usando a equação (3.59) e o fato que para as representações (1.8), vale $D^s(i\sigma_3)^* = D^s(i\sigma_3^*)$ o que implica $D^s(i\sigma_3)^* = D^s(-i\sigma_3)$ tem-se, $D^s(i\sigma_3) D^s(-i\sigma_3) = D^s(\mathbf{1})$, portanto, obtém-se:

$$v(p, e') \overline{v(p, e)} = S(A_1(i\pi)) u(-jp, je') u^*(-jp, je) \gamma^0 S(A_1(i\pi)) \quad (4.22)$$

Obtendo então a equação (4.6), ficando assim mostrado a segunda parte do Lema 4.0.2.

Para terminar, será mostrada a equação (4.7) do Lema 4.0.2. Através do teorema de Bisognano-Wichmann (2.4.4), pode-se verificar de forma análoga feita para o $v(p, e)$, ver equação (3.32), porém, trocando os $\varphi^*(x, e)$ e $\varphi(x, e)$ de lugar que o $u(p, e)$ será dado da seguinte forma:

$$u(p, e) = -S(A_1(i\pi))v(-jp, je)D^s(i\sigma_3)$$

e lembrando que $\overline{u(p, e)} := u^*(p, e)\gamma^0$, tem-se que:

$$u(p, e)\overline{u(p, e')} = S(A_1(i\pi))v(-jp, je)D^s(i\sigma_3)D^s(i\sigma_3)^*v^*(-jp, je')S(A_1(i\pi))^*\gamma^0 \quad (4.23)$$

Agora usando a equação (3.59) e o fato que para as representações (1.8), vale $D^s(i\sigma_3)^* = D^s(i\sigma_3^*)$ o que implica $D^s(i\sigma_3)^* = D^s(-i\sigma_3)$ tem-se, $D^s(i\sigma_3)D^s(-i\sigma_3) = D^s(\mathbf{1})$, portanto, obtém-se:

$$u(p, e)\overline{u(p, e')} = S(A_1(i\pi))v(-jp, je)v^*(-jp, je')\gamma^0 S(A_1(i\pi)) \quad (4.24)$$

Obtendo então a equação (4.7), ficando assim todo o Lema 4.0.2 demonstrado. \square

4.1 Covariância

Será feita a relação de covariância das "funções" de dois pontos definidas pelas equações (4.1) e (4.2).

Proposição 4.1.1.

$$w_{\bar{i}\bar{j}}(x, e; x', e') = S(A)_{ri}S(A^{-1})_{js}w_{\bar{r}\bar{s}}(\Lambda x, \Lambda e; \Lambda x', \Lambda e') \quad (4.25)$$

$$w_{i\bar{j}}(x, e; x', e') = S(A_1(i\pi))_{ir}S(A_1(i\pi))_{sj}w_{\bar{s}r}(jx', je'; jx, je) \quad (4.26)$$

Demonstração. Primeiro equação (4.25), tem-se:

$$w_{\bar{i}\bar{j}}(x, e; x', e') = (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) \int e^{-ip \cdot (x-x')} (v(p, e')\overline{v(p, e)})_{ji}$$

usando equação (4.5), tem-se:

$$w_{\bar{i}j}(x, e; x', e') = (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) e^{-ip \cdot (x-x')} S_{js}(A^{-1}) v_{sm}(\Lambda p, \Lambda e') \overline{v(\Lambda p, \Lambda e)_{mr}} S_{ri}(A) = \quad (4.27)$$

$$= S_{ri}(A) S_{js}(A^{-1}) (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) e^{-ip \cdot (x-x')} v_{sm}(\Lambda p, \Lambda e') \overline{v(\Lambda p, \Lambda e)_{mr}} \quad (4.28)$$

Fazendo $\Lambda p = p$, obtém-se:

$$S_{ri}(A) S_{js}(A^{-1}) (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) e^{-ip \cdot (x-x')} v_{sm}(p, \Lambda e') \overline{v(p, \Lambda e)_{mr}} \quad (4.29)$$

E

$$w_{\bar{r}s}(\Lambda x, \Lambda e; \Lambda x', \Lambda e') := (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) e^{-ip \cdot (x-x')} v_{sm}(p, \Lambda e') \overline{v(p, \Lambda e)_{mr}}.$$

Portanto temos obtido:

$$w_{\bar{i}j}(x, e; x', e') = S_{ri}(A) S_{js}(A^{-1}) w_{\bar{r}s}(\Lambda x, \Lambda e; \Lambda x', \Lambda e') \quad (4.30)$$

Mostra-se a equação (4.25). Será mostrada a equação (4.26).

Tem-se do Lema 4.0.1 ver equação (4.3) que,

$$w_{\bar{i}j}(x, e; x', e') = (2\pi)^{-3} \int_{H_m^+} d\mu(p) \left\{ e^{-ip \cdot (x-x')} (u(p, e) \overline{u(p, e')})_{ij} \right\}.$$

Usando equação (4.7), tem-se:

$$w_{\bar{i}j}(x, e; x', e') = (2\pi)^{-3} \int_{H_m^+} d\mu(p) e^{-ip \cdot (x-x')} S(A_1(i\pi))_{ir} v_{rm}(-jp, je) \overline{v(-jp, je')_{ms}} S(A_1(i\pi))_{sj} = \quad (4.31)$$

$$= S(A_1(i\pi))_{ir} S(A_1(i\pi))_{sj} (2\pi)^{-3} \int_{H_m^+} d\mu(p) e^{-ip \cdot (x-x')} v_{rm}(-jp, je) \overline{v(-jp, je')_{ms}} \quad (4.32)$$

Fazendo $-jp = p$, obtém-se:

$$S(A_1(i\pi))_{ir} S(A_1(i\pi))_{sj} (2\pi)^{-3} \int_{H_m^+} d\mu(p) e^{-ip \cdot (x'-x)} v_{rm}(p, je) \overline{v(p, je')_{ms}} \quad (4.33)$$

E

$$w_{\bar{s}r}(jx', je'; jx, je) := (2\pi)^{-3} \int_{H_m^+} d\mu(p) e^{-ip \cdot (jx' - jx)} v_{rm}(p, je) \overline{v(p, je')_{ms}}$$

Portanto, tem-se obtido equação (4.26), completando a demonstração da Proposição 4.1.1. \square

Pode-se também mostrar a (4.25), somente usando o fato da covariância dos Campos tipo-string , $\Psi(x, e)$ e $\overline{\Psi(x', e')}$:

Demonstração. Pode-se introduzir na equação (4.2) uma identidade $U(A^{-1})U(A) = \mathbb{1}$ entre os campos quânticos, e relembrar o fato de que $U(A)$, é unitária e tem-se:

$$w_{\bar{i}j}(x, e; x', e') := (\Omega, \overline{\varphi_i(x, e)}U(A^{-1})U(A)\varphi_j(x', e')\Omega) \quad (4.34)$$

Usando a relação de covariância dos campos equações (3.13) e (3.63) tem-se:

$$w_{\bar{i}j}(x, e; x', e') = (\Omega, U(A^{-1})S_{ri}(A)\overline{\varphi_r(\Lambda x, \Lambda e)}S_{js}(A^{-1})\varphi_s(\Lambda x', \Lambda e')U(A)\Omega) \quad (4.35)$$

Agora usando o fato de que $U(A)\Omega = \Omega$, obtém-se:

$$w_{\bar{i}j}(x, e; x', e') = S_{ri}(A)S_{js}(A^{-1})(\Omega, \overline{\varphi_r(\Lambda x, \Lambda e)}\varphi_s(\Lambda x', \Lambda e')\Omega) \quad (4.36)$$

Assim, consegue-se mostrar novamente que:

$$w_{\bar{i}j}(x, e; x', e') = S_{ri}(A)S_{js}(A^{-1})w_{\bar{r}s}(\Lambda x, \Lambda e; \Lambda x', \Lambda e') \quad (4.37)$$

Acima, $w_{\bar{r}s}(\Lambda x, \Lambda e; \Lambda x', \Lambda e') = (\Omega, \overline{\varphi_r(\Lambda x, \Lambda e)}\varphi_s(\Lambda x', \Lambda e')\Omega)$ □

4.2 Localidade

Corolário 4.2.1. *Será utilizada para indicar o Boost na direção x a seguinte notação:*

$\Lambda_1(t)$ por Λ_t .

$$w_{\bar{i}j}(x, e; j\Lambda_t x', j\Lambda_t e') = (S(A_1(i\pi))S(A_1(t)))_{ir} (S(A_1(-t))S(A_1(i\pi)))_{sj} w_{\bar{r}s}(x', e'; \Lambda_{-t} jx, \Lambda_{-t} je) \quad (4.38)$$

Demonstração. Usando a equação (4.26), tem-se:

$$w_{\bar{i}j}(x, e; j\Lambda_t x', j\Lambda_t e') = S(A_1(i\pi))_{im} S(A_1(i\pi))_{nj} w_{\bar{m}n}(jj\Lambda_t x', jj\Lambda_t e'; jx, je) \quad (4.39)$$

Usando o fato $jj = 1$, tem-se então que a equação (4.39) pode ser escrita da seguinte forma:

$$S(A_1(i\pi))_{im} S(A_1(i\pi))_{nj} w_{\bar{m}n}(\Lambda_t x', \Lambda_t e'; jx, je) \quad (4.40)$$

Pode-se agora utilizar a equação (4.25) com $A = A^{-1}$

$$w_{\bar{n}m}(\Lambda_t x', \Lambda_t e'; jx, je) = S(A^{-1})_{sn} S(A)_{mr} w_{\bar{s}r}(x', e'; \Lambda_{-t} jx, \Lambda_{-t} je) \quad (4.41)$$

Juntando as duas equações (4.40) e (4.41) encontradas tem-se:

$$w_{i\bar{j}}(x, e; j\Lambda_t x', j\Lambda_t e') = S(A_1(i\pi))_{im} S(A_1(i\pi))_{nj} S(A^{-1})_{sn} S(A)_{mr} w_{\bar{s}r}(x', e'; \Lambda_{-t} jx, \Lambda_{-t} je) \quad (4.42)$$

$$= (S(A_1(i\pi))S(A))_{ir} (S(A^{-1})S(A_1(i\pi)))_{sj} w_{\bar{s}r}(x', e'; \Lambda_{-t} jx, \Lambda_{-t} je) \quad (4.43)$$

□

Para se ter satisfeita a condição de localidade para campo quântico tipo-string, deve-se ter para $\mathcal{S}_{x,e}$ e $\mathcal{S}_{x',e'}$ causalmente disjuntos,

$$0 = (\Omega, \left\{ \Psi_i(x, e), \overline{\Psi_j(x', e')} \right\} \Omega) = (\Omega, \Psi_i(x, e) \overline{\Psi_j(x', e')} \Omega) + (\Omega, \overline{\Psi_j(x', e')} \Psi_i(x, e) \Omega) = \dots \quad (4.44)$$

Utilizando as equações (4.1) e (4.2), tem-se:

$$\dots = w_{i\bar{j}}(x, e; x', e') + w_{\bar{j}i}(x', e'; x, e) \quad (4.45)$$

Proposição 4.2.2. *Que é equivalente a dizer: Se $\mathcal{S}_{x,e}$ e $\mathcal{S}_{x',e'}$ são causalmente disjuntos deve-se ter:*

$$\boxed{w_{i\bar{j}}(x, e; x', e') = -w_{\bar{j}i}(x', e'; x, e)} \quad (4.46)$$

Demonstração. Por hipótese existe um $W : \mathcal{S}_{x,e} \in W, \mathcal{S}_{x',e'} \in W'$ o que implica que deve-se ter, $x \in W, e \in W_H(:= W - a(W) \cap H)$ e $x' \in W', e' \in W'_H(:= W' - a(W') \cap H)$. Devido a covariância pode-se supor $x, e \in W_1; x', e' \in W'_1$. A figura 4.1 nos permite visualizar o W_1 e o seu complemento causal W'_1 , com seus respectivos strings.

Para $t \in G$, onde $G = \mathbb{R} + i(0, \pi)$ tem-se partes imaginárias de $j\Lambda_t x', j\Lambda_t e', \Lambda_{-t} jx, \Lambda_{-t} je$ todas pertencentes a V^+ , cone de Luz positivo, portanto os dois lados da equação (4.38) são holomorfas para $t \in G$, e são iguais para $t = i\pi$.

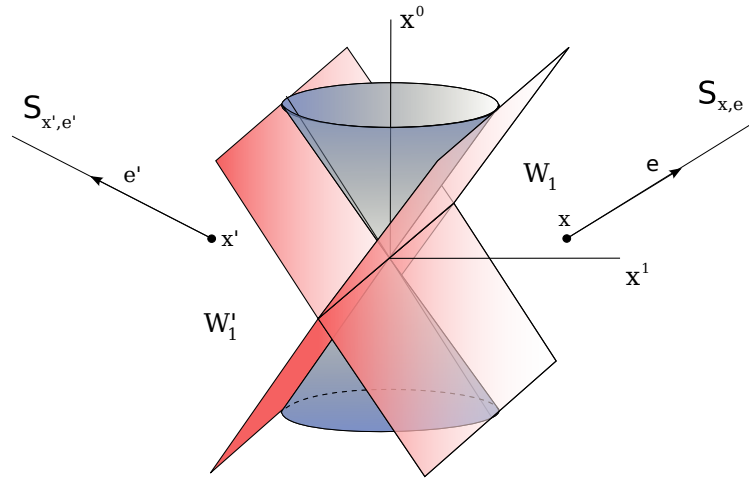


Figura 4.1: cunha

Aplicando as condições impostas acima na equação (4.38) e o fato de que $\Lambda_1(\pm i\pi) = j$, pode-se verificar a condição de Localidade.

$$w_{i\bar{j}}(x, e; j\Lambda_{i\pi}x', j\Lambda_{i\pi}e') = (S(A_1(i\pi))S(A_1(i\pi)))_{ir} (S(A_1(-i\pi))S(A_1(i\pi)))_{sj} w_{\bar{s}r}(x', e'; \Lambda_{-i\pi}jx, \Lambda_{-i\pi}je) \quad (4.47)$$

$$w_{i\bar{j}}(x, e; j^2x', j^2e') = (S(A_1(i\pi))S(A_1(i\pi)))_{ir} (S(A_1(-i\pi))S(A_1(i\pi)))_{sj} w_{\bar{s}r}(x', e'; j^2x, j^2e) \quad (4.48)$$

Usando o fato que $j^2 = 1$, $(S(A_1(i\pi))S(A_1(i\pi)))_{ir} = -\mathbb{1} \delta_{ir}$ e $(S(A_1(-i\pi))S(A_1(i\pi)))_{sj} = \mathbb{1} \delta_{sj}$, o que é fácil verificado através da definição da representação j e da equação (4.8), tem-se:

$$w_{i\bar{j}}(x, e; x', e') = -\mathbb{1} \delta_{ir} \mathbb{1} \delta_{sj} w_{\bar{s}r}(x', e'; x, e) \quad (4.49)$$

Que por fim obtém-se:

$$w_{i\bar{j}}(x, e; x', e') = -w_{\bar{j}i}(x', e'; x, e) \quad (4.50)$$

Com a equação (4.50) verifica-se a Localidade para o Campo Quântico Tipo String Fermiônico desejado. \square

Capítulo 5

Conclusão e Perspectivas Futuras

Nessa dissertação, apresenta-se a construção do campo quântico livre de Dirac localizado tipo-string com a solução mais geral possível, onde tem-se apenas quatro funções arbitrárias em aberto a saber f_+ , g_+ , f_- e g_- . Verificou-se sua localidade e covariância. Com perspectivas de a partir de tal campo construído, fazer estudos sobre modelos interagentes. Um primeiro passo seria a interação do mesmo com um campo eletromagnético clássico. Também pode-se notar que se $g_+ = g_- = 0$ e $f_+ = f_-$ igual uma constante, será retornado ao caso de campo com localização tipo-ponto. Um fato ainda não verificado é que parece que na construção perturbativa o campo perde sua localidade.

Apêndice A

Grupo, Recobrimento e Representação

A.1 Grupo

Definição A.1.1. Um conjunto G consistindo dos elementos a, b, c, \dots $G = \{a, b, c, \dots\} \equiv \{G, * \}$ é chamado de **Grupo** para uma dada operação $(*)$, se seus elementos satisfazem as seguintes propriedades:

- a) Para todo $a, b \in G, a * b = c \in G$ (Condição de **Fechamento**);
- b) Para todo $a, b, c \in G, (a * b) * c = a * (b * c)$ (Condição de **Associatividade**);
- c) $\exists e \in G$, tal que: Para todo $a \in G, a * e = e * a = a$ (e é chamado de **Elemento Unidade**);
- d) $\forall a \in G, \exists a^{-1}$ tal que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (a^{-1} é chamado o **Elemento Inverso** de a)

A.2 Recobrimento

A.2.1 Espaço Topológico

Primeiramente precisa-se de definir o que é um *espaço topológico*.

Topologia: Uma coleção τ de subconjuntos de X , ou seja, $\tau \subset \mathbb{P}(X)$, é dito ser uma topologia em X se os seguintes requisitos forem satisfeitos:

1. $\emptyset \in \tau$ e $X \in \tau$
2. Se $A \in \tau$ e $B \in \tau$ então $A \cap B \in \tau$
3. Se I é um conjunto arbitrário de índices e $A_\lambda \in \tau$ para todo $\lambda \in I$ então $\bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda$ também é um elemento de τ . Onde $\mathbb{P}(X)$ denota-se a coleção de todos os sub-conjuntos de X .

Definição A.2.1. *Um espaço topológico é um par (X, τ) onde X é um conjunto não-vazio e $\tau \subset \mathbb{P}(X)$ é uma topologia em X .*

Deixe X ser um espaço topológico: Um espaço *de recobrimento* de X consiste em um \tilde{X} e um mapa contínuo p de \tilde{X} sobre X que satisfaz uma certa exigência de suavidade muito forte. A teoria de *espaço de recobrimento* é importante não somente em topologia, mas também em disciplinas relacionadas com geometria diferencial, a teoria de grupos de Lie e teoria de superfícies de Riemann.

Definição A.2.2. *Um aplicação $p : \tilde{X} \rightarrow X$ chama-se aplicação de recobrimento (ou, simplesmente, recobrimento) quando cada ponto $x \in X$ pertence a um aberto $V \subset X$ tal que $p^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ é uma reunião de abertos U_{α} , dois a dois disjuntos, cada um dos quais se aplica por p homeomorficamente sobre V . Cada aberto V desse tipo chama-se uma vizinhança distinguida. O espaço \tilde{X} chama-se um recobrimento de X e, para cada $x \in X$, o conjunto $p^{-1}(x)$ chama-se de fibra sobre x .*

Uma aplicação de recobrimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$ é um homeomorfismo local¹ de \tilde{X} sobre X . Onde X é um espaço topológico.

Se \tilde{X} e X tem uma estrutura de grupos e p é um homomorfismo², então dizemos que $p : \tilde{X} \rightarrow X$ é um recobrimento de grupos.

¹Cada ponto $x \in X$ tem uma vizinhança aberta V tal que $f(V)$ é aberta e f mapeia V topologicamente sobre $f(V)$.

²*Homomorfismo de grupos* é uma função entre dois grupos que preserva as operações binárias. Sejam $(G, *)$ e (H, \cdot) grupos, e f uma função de domínio G e contra-domínio H . Então f é um homomorfismo de grupos se, e somente se para todo, $x, y \in G$, $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$.

A.3 Representação

No campo matemático da teoria da representação, representações de grupos descrevem grupos abstratos em termos de transformações lineares de espaços vetoriais; em particular, eles podem ser usados para representar elementos de grupo como matrizes assim como a operação do grupo pode ser representada por multiplicação de matrizes.

Definição A.3.1. *Uma representação de um grupo G em um espaço vectorial V é uma aplicação que a cada $g \in G$ associa um operador linear inversível $D(g) : V \rightarrow V$ de modo que devem ter as seguintes propriedades satisfeitas:*

1. $D(gh) = D(g)D(h)$, Para todos $g, h \in G$.
2. $D(g^{-1}) = D(g)^{-1}$, Para todo $g \in G$.
3. $D(e) = I$ e : elemento unitário de G e I : operador identidade em V .

A.3.1 Representação irredutível e unitária

Antes de definir as representações irredutíveis e as representações unitárias, nos devemos primeiro definir o subespaço invariante. Seja $U(G)$ uma representação de G sobre o espaço vectorial V , e V_1 um subespaço de V com a propriedade de que: $U(g)x \in V_1$ para todo $x \in V_1$ e $g \in G$, ou seja, $U(G)V_1 \subset V_1$. V_1 é dito ser um *subespaço invariante* de V em relação $U(G)$.

Um subespaço invariante é chamado de "irredutível" quando o subespaço não contém nenhum subespaço invariante não trivial em relação a $U(G)$. Exemplos de subespaço invariante trivial de V em relação a $U(G)$ são quando o subespaço é o próprio espaço V e quando o subespaço consiste apenas do vetor nulo. *Representações irredutíveis:* Uma representação $U(G)$ sobre V é irredutível se não houver nenhum subespaço invariante não trivial em V com relação ao $U(G)$. Caso contrário, a representação é redutível. Neste último caso, se o complemento ortogonal do subespaço invariante é também invariante com respeito $U(G)$, a representação é dita ser totalmente redutível.

Como as transformações de simetria são naturalmente associada com operadores unitários (que preservam a probabilidade), as representações unitárias desempenham

um papel central no estudo de simetria de grupos. *Representação Unitária:* Se o espaço de representação de grupo é um espaço com produto interno, e os operadores $U(g)$ são unitários para todos os g pertencentes a G , então a representação de $U(G)$ é dita ser uma representação unitária.

A.3.2 Lema de Schur

Lema A.3.2. *Se U_1 e U_2 são duas representações irredutíveis de um grupo G em espaços vetoriais V_1 e V_2 , respectivamente, e $A : V_1 \rightarrow V_2$ um entrelaçamento de U_1 e U_2 , ou seja, $AU_1(g) = U_2(g)A$ para todo $g \in G$, então ou A é inversível ou $A = 0$. Caso A seja inversível e V_1 e V_2 sejam espaços vetoriais complexos de dimensão finita, então A é único, a menos de uma multiplicação por um escalar.*

Apêndice B

Relações dos operadores de entrelaçamento no caso puntiforme.

Para tais relações, tem-se as seguintes definições:

$$\gamma^0 := \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

$$\not{p} := \sum p_\mu \gamma^\mu \quad \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ -\sigma_\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$\not{p} := \begin{pmatrix} 0 & \underline{p} \\ \tilde{p} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Os σ_μ com $\mu = 1, 2, 3$ são as matrizes de Pauli. Com isso, tem-se as seguintes relações satisfeitas:

$$u(p)u^*(p)\gamma^0 = \frac{1}{m}(\not{p} + m), \quad v(p)v^*(p)\gamma^0 = \frac{1}{m}(\not{p} - m) \quad (\text{B.4})$$

$$(\not{p} - m)u(p) = 0, \quad (\not{p} + m)v(p) = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$u^*(p)\gamma^0 u(p) = 2, \quad v^*(p)\gamma^0 v(p) = -2 \quad (\text{B.6})$$

$$u^*(p)\gamma^0 \gamma^\mu u(p) = 2\frac{P^\mu}{m}, \quad v^*(p)\gamma^0 \gamma^\mu v(p) = 2\frac{P^\mu}{m} \quad (\text{B.7})$$

$$u^*(p)\gamma^0 v(p) = 0, \quad v^*(p)\gamma^0 u(p) = 0 \quad (\text{B.8})$$

$$u^*(\omega(\mathbf{p}), \mathbf{p})v^*(\omega(\mathbf{p}), -\mathbf{p}) = 0, \quad v^*(\omega(\mathbf{p}), \mathbf{p})u^*(\omega(\mathbf{p}), -\mathbf{p}) = 0 \quad (\text{B.9})$$

Apêndice C

Demonstração de equações utilizadas.

Primeira a relação utilizada na página 55, $\sigma_1 \underline{x} = (\underline{-jx})\sigma_1$

Demonstração. Tem-se que $\sigma_1 \underline{x} = \sigma_1(x^0\sigma_0 + x^1\sigma_1 + x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3)$ que é igual a: $x^0\sigma_1 + x^1 + x^2\sigma_1\sigma_2 + x^3\sigma_1\sigma_3$. Por outro lado temos: $(\underline{-jx})\sigma_1 = (-jx^0\sigma_0 - jx^1\sigma_1 - jx^2\sigma_2 - jx^3\sigma_3)\sigma_1 = -jx^0\sigma_1 - jx^1 - jx^2\sigma_2\sigma_1 - jx^3\sigma_3\sigma_1$ mas usando o fato de que $\sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i$ ($i = 1, 2, 3$) e $j : (x^0, x^1, x^2, x^3) \mapsto (-x^0, -x^1, x^2, x^3)$ tem-se que, $(\underline{-jx})\sigma_1 = x^0\sigma_1 + x^1 + x^2\sigma_1\sigma_2 + x^3\sigma_1\sigma_3$. que é igual a $\sigma_1 \underline{x}$. ficando assim demonstrado. \square

Equações (3.50) e (3.51) Primeiro a equação (3.50)

Demonstração.

$$\begin{pmatrix} 0 & \underline{p} \\ \tilde{p} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_p f_+(\frac{e-p}{m}) + g_+(\frac{e-p}{m}) \underline{e} A_p^{-1} \\ A_p^{-1} f_-(\frac{e-p}{m}) + g_-(\frac{e-p}{m}) \tilde{e} A_p \end{pmatrix} = \dots \quad (\text{C.1})$$

Usando as equações (1.2) e (1.3), o fato de que $\tilde{x} + \underline{x} = 2x^0$ e que $\underline{p} A_p^{-1} = m A_p$ e $\tilde{p} A_p = m A_p^{-1}$, temos:

$$\dots \begin{pmatrix} m f_-(\frac{e-p}{m}) A_p + g_-(\frac{e-p}{m}) (-m \underline{e} A_p^{-1} + 2p \cdot e A_p) \\ m f_+(\frac{e-p}{m}) A_p^{-1} + g_+(\frac{e-p}{m}) (-m \tilde{e} A_p + 2p \cdot e A_p^{-1}) \end{pmatrix} = \dots \quad (\text{C.2})$$

Agrupando os termos e colocando a m em evidência, obtém-se:

$$\dots m \cdot \begin{pmatrix} (f_-(\frac{e-p}{m}) + g_-(\frac{e-p}{m}) 2\frac{p \cdot e}{m}) A_p + g_-(\frac{e-p}{m}) (-\underline{e}) A_p^{-1} \\ (f_+(\frac{e-p}{m}) + g_+(\frac{e-p}{m}) 2\frac{p \cdot e}{m}) A_p^{-1} + g_+(\frac{e-p}{m}) (-\tilde{e}) A_p \end{pmatrix} \quad (\text{C.3})$$

Ficando mostrada a equação (3.50) para nossas exigências feitas pela equação (3.49).

Agora a equação (3.51) Neste caso vamos usar que, $v(p, e) = c\gamma^5 u(p, -e)\varepsilon$, onde $\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$ e o fato de que $\not{p}\gamma^5 = -\gamma^5 \not{p}$. Com isso temos

$$\not{p}v(p, e) = c \not{p}\gamma^5 u(p, -e)\varepsilon = -c\gamma^5 \not{p}u(p, -e)\varepsilon,$$

agora usando o fato verificado anteriormente de que $\not{p}u(p, -e) = mu(p, -e)$, temos:

$$-mc\gamma^5 u(p, -e)\varepsilon = -mv(p, e)$$

Ficando mostrada a equação (3.51) para nossas exigências feitas pela equação (3.49). □

Referências Bibliográficas

- [1] J.Mund, B. Schroer, and J.Yngvason, String-Localized quantum fields form Wigner Representations, *Phys. Lett. B*.596 (2004), 156-162.
- [2] J.Mund, B. Schroer, and J.Yngvason, String-Localized quantum fields and modular localization, *Commun. Math, Phys. Lett.* 268(2006), 621-672.
- [3] W.K. Tung, ,Group Theory in Physics (World Scientific 19xx)
- [4] P. A. M. Dirac, *Can. J. Math.* 2,129 (1950).
- [5] O. Bratteli, D.W. Robinson , *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanic 2* , 2º edição , 1996
- [6] J.C.A. Barata, Curso de Física-Matemática (Apostila 20 janeiro de 2009)
- [7] Bogoliubov, Logunov, Todorov, *Axiomatic Quantum Field Theory.*
- [8] Lewis H. Ryder, *Quantum Field Theory*; Secon edition.
- [9] R.F.Streater, A.S.Wightman ,W.A. Benjamin, Inc. , *PCT, SPIN AND STATISTICS, AND ALL THAT*
- [10] Jens Mund, The Bisognano-Wichmann Theorem for Massive Theories, *Ann. Henri Poincaré* 2,907- 926 (2001)
- [11] J.J. Bisognano and E.H. Wichmann, On the duality condition for a Hermitean scalar field, *J. Math.Phys.* **16**, **985** (1975).

- [12] J.J. Bisognano and E.H. Wichmann, On the duality condition for quantum fields, J. *Math. Phys.* **17**, **303** (1976).