Dissertação de Mestrado

Ações de Cordas Bosônicas como Sistemas Vinculados

Daniel Oliveira de Souza

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Física

Orientador: Prof. Dr. Wilson Oliveira

Coorientador: Prof. Dr. Everton M. C. de Abreu

Juiz de Fora
Agosto de 2010

Ações de Cordas Bosônicas como Sistemas Vinculados

Daniel Oliveira de Souza

Dissertação para o Curso de Mestrado em Física, Área da Física Teórica, do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em 24 de Agosto de 2010.

BANCA EXAMINADORA

Prof.Dr. Wilson Oliveira (Orientador)
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof.Dr. Everton M. C. de Abreu (Coorientador)
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Prof.Dr. Albert C. R. Mendes
Universidade Federal de Juiz de Fora

A minha mãe e à memória de meu pai.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela vida, tudo que sou, aprendo e por mais essa conquista.
Ao meu orientador Prof. ***Wilson Oliveira*** *, por acreditar em mim e pela orientação paciente e dedicada.*
Ao meu coorientador Prof. ***Everton Abreu****, pelas correções, conselhos e dicas que muito me valeram.*
A Coodenação de Pós-Graduação.
A minha mãe pelo amor, carinho e apoio.
A minha namorada pelo apoio e compreensão.
Aos meus irmãos pela torcida e incentivo.
Aos meus colegas do curso de mestrado, pelo conhecimento necessário para a edição desse trabalho.
A ***Universidade Federal de Juiz de Fora*** *e ao* ***Departamento de Física****.*
Ao órgão financiador do projeto, ***CAPES****.*

Conteúdo

Resumo

As quatro forças fundamentais da natureza conhecidas são: a força gravitacional, a eletromagnética, a força fraca e a força forte. As três últimas são regidas por aspectos da chamada teoria quântica de campos. O grande interesse da teoria de cordas consiste no fato de que acredita-se que a mesma pode unificar a força gravitacional com a mecância quântica. Sendo portanto, uma candidata a formar a famigerada teoria da unificação dessas forças fundamentais. Com essa motivação em mente, nessa dissertação abordamos as ações de cordas de Nambu-Goto, Born-Infeld-Nambu-Goto e Dirac-Born-Infeld-Nambu-Goto de cordas bosônicas como sistemas vinculados. O nosso principal caminho para estudar esse assunto fascinante da física teórica é o conhecido método de Dirac para a análise de vínculos.

Palavras-chave: Cordas bosônicas. Sistemas vinculados. Invariantes por parâmetros.

Abstract

The four fundamental forces of nature are known: the force gravitational, the electromagnetic, the weak force and strong force. The three latter aspects are governed by the so-called quantum field theory. The great interest in string theory is the fact that it is believed that it can unify the gravitational force with quantum mechanics. Being thus a candidate to form the notorious theory of unification these fundamental forces. With this motivation in mind, this dissertation discusses the actions of the Nambu-Goto strings, Born-Infeld-Nambu-Goto and Dirac-Born-Infeld-Nambu-Goto bosonic string as bound systems. Our main way to study this fascinating subject in physics is the known theoretical method for analysis of Dirac links.

Keywords: Bosonics strings. Constrained systems. Invariant for parameters.

Capítulo 1

Introdução

Nas últimas décadas, a teoria de cordas vem levantando possibilidades de realizar uma junção próspera entre a Mecânica Quântica (MQ) e a Relatividade Geral (RG), assim como, fornece indícios de que a unificação das quatro interações fundamentais que conhecemos: gravitacional, eletromagnética, fraca e forte, pode ser possível mediante um modelo mais simples do que as propostas atuais de nenhuma eficácia. Essas possibilidades, evidentemente, dependerão de resultados experimentais no futuro que comprovem a existência das cordas.

Atualmente, a física está sustentada sobre duas colunas de conhecimento. Uma relacionada aos sistemas de escala atômica, para os quais as teorias da MQ têm modelos que os descrevem, e a outra voltada aos sistemas de escala astronômica, para os quais a teoria da RG aborda com bastante sucesso. Outra teoria bem popular, que une a MQ e a RG, é a chamada Loop Quantum Gravity. Além disso, acredita-se que a geometria não-comutativa traz uma ferramenta matemática para descrever a física da escala de Planck. São teorias que confirmam resultados físicos no limite clássico. Foram bem sucedidas em suas previsões e confirmadas no ramo experimental.

Apesar disso, essas duas ciências antagônicas não são compatíveis por enquanto mediante os conhecimentos atuais de teoria de campos. E a unificação dessas grandes teorias é importante para a evolução das pesquisas físicas, mesmo porque existem exemplos na natureza que desafiam a compreensão atual da física teórica.

Nas formulações teóricas, por exemplo, para os buracos negros e para as condições iniciais do universo, é necessário uma altíssima concentração de massa em espaços diminutos e, inevitavelmente, isso confere uma força de gravidade tão grande que esmiúça a matéria até a partículas cujas as regras de interação são quânticas. São condições físicas que determinam fenômenos relativísticos e quânticos em um mesmo sistema, o que exige um modelo unificado dessas duas teorias.

O uso desses conhecimentos estão relacionados ao sistema de estudo. Se for o macrouniverso, na escala do visível, o estudo da RG tem alto grau de precisão em sua descrição dos fenômenos celestes. Se tomarmos porém regiões do espaço-tempo bem pequenas na escala do comprimento de Planck, o espaço-tempo é pertubado por efeitos quânticos garantidos pelo princípio da incerteza. Ainda em regiões onde não existiria matéria e a gravidade seria clássicamente nula, a MQ garante que, concentrando atenção em escalas ainda menores do espaço-tempo, existem efeitos quânticos.

Nesse quadro, é completamente caótico descrever equações de movimento que atendam os princípios quânticos e relativísticos. No universo do microcosmo, até ao final da década de sessenta, acreditávamos que as partículas fundamentais da matéria eram os prótons, elétrons e nêutrons. Mas experiências em aceleradores de partículas, nessa época, revelaram que os prótons e nêurons são partículas compostas. Esses componentes são denominados "quarks"e são dois, o quark up e o quark down. Além isso, outras experiências de colisões de matéria, sob energias ainda mais elevadas, mostraram novas partículas fundamentais que, junto com as primeiras, formam as três famílias de partículas de matéria dentro de um padrão de classificação. Essas experiências confirmaram também a previsão teórica da anti-matéria, de Paul Dirac (1928). Essas verificações apotaram que ainda havia muito o que aprender sobre a estrutura da matéria.

Os esforços na pesquisa em esclarecer a natureza das partículas fundamentais dá origem à Eletrodinâmica Quântica (EDQ), mais tarde denominada Teoria Quântica de Campos (TQC). Ela engloba a Cromodinâmica Quântica que estuda os quarks e as interações fortes e a Teoria Quântica Eletrofraca que está relacionada às forças fraca e eletromagnética.

Através da TQC ou eletrodinâmica quântica conseguimos atribuir ao fóton seu papel de partícula mínima do campo eletromagnético e especificar sua interação com partículas de carga elétrica. Especificamos, também, quanticamente, os gluons, partículas transportadoras da força forte e os bósons da força fraca, como transportadores da força fraca. Ao conjunto dessas teorias das partículas fundamentais e suas interações convencionou-se o nome de Modelo Padrão das Partículas Fundamentais.

A partir da década de 80 as teorias das interações (forte e eletrofraca) foram submetidas a muitas experiências e após atribuírem valores numéricos a várias propriedades das partículas, mediante os recursos experimentais, muitas previsões se revelaram em concordância com resultados medidos. Atualmente, entetanto, persistem o problema para unificar a gravidade com a teoria quântica de campo.

A teoria de cordas recebe atualmente bastante atenção da física teórica, uma vez que ofererece perspectivas para a unificação da RG com a MQ, assim como respostas para as questões do Modelo Padrão, mesmo para a principal questão, a unificação das quatro interações fundamentais.

Como dissemos acima, a teoria de cordas oferece apenas perspectivas de solução, não a própria solução. As equações de movimento da teoria, em sistemas físicos, já são aproximações, o que implica soluções aproximadas. Não existe ainda confirmação de resultados já conhecidos, como por exemplo, as massas e as cargas das partículas fundamentais entre outros exemplos. E isso é motivo para muitos pesquisadores considerarem a teoria de cordas como uma teoria não-física, mas uma formulação matemática elegante do que poderia ser a realidade natural das partículas fundamentais.

Nessa dissertação apresentamos um caráter introdutório dessa teoria. Abordamos seis ações que descrevem as cordas bosônicas, a de Nambu-Goto (NG), a de Born-Infeld-Nambu-Goto (BING), a de Dirac-Born-Infeld-Nambu-Goto (DBING) e as mesmas acopladas a um determinado campo escalar. Analisamos os vínculos de cada uma das ações mediante o critério de Dirac.

No capítulo 2 começamos com um estudo na partícula relativística livre como sistema vinculado, usando o critério de Dirac. No capítulo 3 iniciamos com as cordas bosônicas através da ação de NG, mas, encontrando as equações de movimento para a corda mediante outra ação (Ação de Polyakov) equivalente a NG. Em seguida começamos com o estudo das seis ações para a corda como sistema vinculado. O capítulo 5 encerra a dissertação com as conclusões e perspectivas. A parte final é reservada para os apêndices que têm por objetivo esclarecer alguns assuntos gerais que consideramos “espinhosos".

Capítulo 2

Partícula Relativística Livre como Sistema Vinculado

O estudo da partícula relativística tem por finalidade, aqui, introduzir conhecimentos importantes para um estudo preliminar das cordas bosônicas.

As equações de movimento da partícula livre, na mecânica clássica, podem ser obtidas com o princípio da mínima ação (Apêndice B). Definimos a ação da partícula livre como sendo o funcional

$$S_{PL}[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L[x(t), \dot{x}(t)]dt, \tag{2.1}$$

onde $x_i(t)$ é a posição da partícula no espaço tridimensional (i=1,2,3) e

$$\dot{x}(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt}. \tag{2.2}$$

Sob o aspecto matemático, esse espaço é real onde a métrica é a usual, ou seja, a distância infinitesimal dl entre dois pontos é

$$dl = \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2}. \tag{2.3}$$

A função lagrangeana, nesse caso, é

$$L_{PL}[x(t), \dot{x}(t)] = \frac{1}{2}\, m[\dot{x}_i(t)]^2. \tag{2.4}$$

Determinando a variação dessa ação (Apêndice B),

$$\delta S_{PL} = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \delta L(t) \tag{2.5}$$

$$\delta S_{PL} = -2m \int_{t_1}^{t_2} dt\ \ddot{x}_i(t)\delta[x_i(t)], \tag{2.6}$$

e impondo a ação mínima,

$$\delta S_{PL} = 0 \tag{2.7}$$

encontramos

$$\ddot{x}_i(t) = 0. \tag{2.8}$$

que é a equação da partícula livre não relativística. Essas equações serão invariantes mediante as transformações de Galileu,

$$x'_i(t) = R_{ij}x_j(t) + v_i t + x_{j_0} \tag{2.9}$$

$$t' = t + t_0 \tag{2.10}$$

onde x'_i e x_i são coordenadas de referenciais inerciais que estão em um movimento relativo a velocidade constante v_i. x_0 e t_0 são constantes reais e R_{ij} é uma matriz real ortongonal. Nessa estrutura então a partícula não relativística fica bem determinada.

O estudo da partícula relativística livre (PRL) é realizado em um espaço vetorial métrico, o *Espaço de Minkowski*. As coordenadas desse espaço que descrevem a trajetória da partícula são definidas como

$$X^\mu(\tau), \qquad \mu = 0, 1, 2, 3 \tag{2.11}$$

sendo $X^0(\tau) = ct(\tau)$ a coordenada temporal e $X^i(\tau)$, $i = 1, 2, 3$, as coordenadas espaciais,

$$X^\mu(\tau) = \left(X^0(\tau), X^1(\tau), X^2(\tau), X^3(\tau)\right), \tag{2.12}$$

$$X^\mu(\tau) = \left(ct(\tau), X^1(\tau), X^2(\tau), X^3(\tau)\right). \tag{2.13}$$

O τ é um parâmetro de evolução da partícula e c é a velocidade da luz. Por conveniência adotamos $X^\mu(\tau) \equiv X^\mu$.

As coordenadas (2.11) obedecem as regras de *transformações de Poincaré*,

$$X^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu + a^\mu, \tag{2.14}$$

onde $\Lambda^\mu{}_\nu$ são elementos de matriz, quantidades constantes. Observe que $X^0(\tau) = ct$ também atende às transformações de (2.14). Mas c e τ são constantes para essas transformações. $\Lambda_\nu{}^\mu$ são os elementos da matriz transposta da matriz dos elementos $\Lambda^\mu{}_\nu$, ou seja,

$$\Lambda_\nu{}^\mu = \left(\Lambda^\mu{}_\nu\right)^T. \tag{2.15}$$

Definimos que o elemento de linha ds nesse espaco como

$$ds = \sqrt{\eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu}, \tag{2.16}$$

ou

$$ds = \sqrt{dX_\nu dX^\nu} = \sqrt{c^2 dt^2 - (dX^1)^2 - (dX^2)^2 - (dX^3)^2}, \tag{2.17}$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço de Minkowski,

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Em (2.17),

$$dX_\nu = \eta_{\mu\nu} dX^\mu = (cdt, -dX^1, -dX^2, -dX^3), \tag{2.18}$$

ou seja, $\eta_{\mu\nu}$ tem a propriedade de levantar e abaixar índices dos vetores e o elemento de linha ds é invariante pelas transformações de Poincaré. A métrica obedece a seguinte regra de transformação

$$\eta_{\rho\lambda} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\lambda \eta_{\mu\nu}. \tag{2.19}$$

Definindo $\eta^{\mu\nu}$ como a inversa de $\eta_{\mu\nu}$, verificamos que

$$\eta^{\rho\beta}\eta_{\rho\lambda} = \eta^{\rho\beta} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\lambda \eta_{\mu\nu}. \tag{2.20}$$

$$\delta^\beta_\lambda = \Lambda_\nu{}^\beta \Lambda^\nu{}_\lambda, \tag{2.21}$$

ou seja, a matriz de Lorentz transposta é a sua inversa,

$$\Lambda^T = \Lambda^{-1}. \tag{2.22}$$

Antes de prosseguirmos, se faz necessário definirmos algumas convenções. Um quadrivetor qualquer como A^μ, no espaço de Minkowski, que tem regra de transformação de Lorentz é denominado como um *vetor contra-variante*. Um quadrivetor B_ν é denominado como um *vetor covariante* e tem a seguinte regra de transformação

$$B'_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu B^\mu. \tag{2.23}$$

Objetos de dois ou mais índices como $T^{\beta\rho}$, $F^{\mu\nu}_\lambda$ obedecem as regras de transformações

$$\begin{aligned} T'^{\beta\rho} &= \Lambda^\beta{}_\alpha \Lambda^\rho{}_\nu T^{\alpha\nu} && (2.24) \\ F'^{\mu\nu}_\lambda &= \Lambda^\mu{}_\beta \Lambda^\nu{}_\alpha \Lambda_\lambda{}^\rho \; F^{\beta\alpha}_\rho, && (2.25) \end{aligned}$$

e são chamados de tensores.

Vamos encontrar as equações de movimento para a PRL com o uso do princípio da mínima ação, como no caso não-relativístico. A ação dessa partícula é tomada como sendo proporcional a um elemento de arco da "linha de mundo", que é a trajetória da partícula no espaço-tempo de Minkowski,

$$S_{prl} = -\alpha \int_a^b ds, \tag{2.26}$$

a qual pode ser explícitamente escrita (Apêndice D) como

$$S_{prl} = -mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \sqrt{\eta_{\mu\nu} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu}, \tag{2.27}$$

onde

$$\dot{X}^\mu \equiv \frac{dX^\mu}{d\tau}. \tag{2.28}$$

A ação (2.27) é invariante por reparametrização

$$\tau = \tilde{\tau}(\tau) \tag{2.29}$$

e nas transformações de Poincaré, (Apêndice D).

Uma vez que a lagrangeana de (2.27) é

$$L_{prl} = -mc\sqrt{\dot{X}^2}, \tag{2.30}$$

escrevemos o momento conjugado de X^μ como

$$P_\mu = \frac{\partial L_{prl}}{\partial \dot{X}^\mu}, \tag{2.31}$$

$$P_\mu = -mc \frac{\dot{X}^\mu}{\sqrt{\dot{X}^2}}, \tag{2.32}$$

onde $P^\mu = P^\mu(\tau)$. Desse resultado encontramos

$$P^2 = P_\mu P^\mu = (mc)^2. \tag{2.33}$$

Interpretamos que (2.33) é o vínculo primário da teoria,

$$\phi_1 = P^2 - (mc)^2 \approx 0, \tag{2.34}$$

por ser o primeiro vínculo encontrado diretamente da relação do momento (2.31). A igualdade " $\approx$ " é denominado de igualdade fraca definida, com o objetivo de informar que podem existir funções dinâmicas da teoria que não comutam com ϕ_1 nos parênteses de Poisson (Apêndice C). Por isso a igualdade fraca assinala também a inconsistência da quantização canônica para sistemas vinculados [16].

Aqui podemos também já classificar ϕ_1 como um vínculo de primeira classe (VPC) (Apêndice C), ou seja, como o único vínculo primário da teoria

$$\{\phi_1, \phi_1\} = 0. \tag{2.35}$$

A hamiltoniana desse sistema vinculado será

$$H_{prl} = H^c_{prl} + \lambda_1 \phi_1 \tag{2.36}$$

onde $\lambda_1 = \lambda_1(X, P)$ é também uma função dinâmica da teoria denonimada multiplicador de Lagrange (Apêndice C). A hamiltoniana canônica, H^c_{prl}, de $(C.8)$, é

$$H^c_{prl} = P_\mu \dot{X}^\mu - L_{prl}. \tag{2.37}$$

Inserindo (2.30) e (2.32) em (2.37), H^c_{prl} fica

$$H^c_{prl} = 0. \tag{2.38}$$

Então a hamiltoniana é simplesmente

$$H_{prl} = \lambda_1 [P^2 + (mc)^2]. \tag{2.39}$$

Com os resultados $(C.17)$ e $(C.18)$ escrevemos as equações de Hamilton da PRL

$$\dot{P}_\mu = \frac{\partial H^c_{prl}}{\partial X^\mu} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial X^\mu}, \tag{2.40}$$

$$\dot{X}^\mu = -\frac{\partial H^c_{prl}}{\partial P_\mu} - \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial P_\mu}, \tag{2.41}$$

que, usando (2.34) e (2.38) resulta em

$$\dot{P}_\mu = 0, \tag{2.42}$$

$$\dot{X}^\mu = -2\lambda_1 P^\mu. \tag{2.43}$$

Observe que (2.42) confirma o fato de a partícula estar livre. Veja também que a equação (2.43) está arbitrária por conta da função $\lambda_1 = \lambda_1(X, P)$ que não conhecemos.

A invariância por reparametrização permite-nos escolher

$$X^0 = \tau, \tag{2.44}$$

. Entendemos também que (2.44) é um vínculo,

$$\phi_2 = X^0 - \tau \approx 0. \tag{2.45}$$

Juntos ϕ_1 e ϕ_2 formam um conjunto de vínculos de segunda classe (VSC) (Apêndice C),

$$\begin{aligned}
\{\phi_1, \phi_2\} &= \{P^2 + (mc)^2, X^0 - \tau\} \\
\{\phi_1, \phi_2\} &= 2P^\mu\{P_\mu, X^0\} \\
\{\phi_1, \phi_2\} &= -2P^0 \\
\{\phi_1, \phi_2\} &= -2mc \neq 0,
\end{aligned} \tag{2.46}$$

A nova hamiltoniana fica

$$H_{prl} = \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2. \tag{2.47}$$

Verificamos agora se existem vínculos secundários com a condição de consistência (Apêndice C), ou seja, uma vez que os vínculos regem o movimento da partícula, por consistência, esses vínculos devem ser conservados ao longo do tempo,

$$\dot{\phi}_1 \approx 0$$

$$\{\phi_1, H\} \approx 0$$

$$\lambda_1 \{\phi_1, \phi_1\} + \lambda_2 \{\phi_1, \phi_2\} + \frac{\partial \phi_1}{\partial \tau} \approx 0$$

$$-2\lambda_2 P^0 \approx 0$$

$$\lambda_2 \approx 0. \tag{2.48}$$

e

$$\dot{\phi}_2 \approx 0$$

$$\lambda_1 \{\phi_2, \phi_1\} + \lambda_2 \{\phi_2, \phi_2\} + \frac{\partial \phi_2}{\partial \tau} \approx 0$$

$$2\lambda_1 P^0 - 1 \approx 0 \tag{2.49}$$

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{2P^0}. \tag{2.50}$$

Assim, ϕ_1 e ϕ_2 não revelam vínculos secundários, por consistência. Portanto os únicos vínculos da teoria são

$$\begin{aligned} \phi_1 &= P^2 + (mc)^2 \approx 0, & (2.51) \\ \phi_2 &= X^0 - \tau \approx 0. & (2.52) \end{aligned}$$

Sendo a última relação referente a uma escolha arbitrária de parametrização.

Note que, nas consistências, indentificamos os multiplicadores de Lagrange λ_1 e λ_2, o que implica em equações de movimentos não artbitrárias para a teoria. Isso significa que bastou apenas um vínculo arbitrário de segunda classe para encontrarmos equações explícitas para o sistema.

A hamiltoniana da PRL, (2.47), com os valores (2.48) e (2.50) e as relações (2.51) e (2.52) fica explícitamente

$$H_{prl} = \frac{1}{2P^0}[P^2 + (mc)^2]. \tag{2.53}$$

e as equações de Hamilton (2.42) e (2.43),

$$\begin{aligned} \dot{P}_\mu &= 0, & (2.54) \\ \dot{X}^\mu &= -\frac{P^\mu}{P^0}. & (2.55) \end{aligned}$$

De (2.32) encontramos

$$P_0 = -mc\frac{\dot{X}_0}{\sqrt{\dot{X}^2}}. \tag{2.56}$$

Impondo o calibre $\tau = X^0 = ct$ em (2.56)

$$P_0 = -\frac{mc}{\sqrt{\left(\frac{dX}{cdt}\right)^2}}. \tag{2.57}$$

Aqui

$$\left(\frac{dX}{cdt}\right)^2 = \eta_{\mu\nu}\frac{dX^\mu}{cdt}\frac{dX^\nu}{cdt} = \left(\frac{dX^0}{cdt}\right)^2 - \left(\frac{d\vec{X}}{cdt}\right)^2,$$

impondo o calibre $\tau = ct$,

$$\left(\frac{dX}{cdt}\right)^2 = 1 - \left(\frac{d\vec{X}}{cdt}\right)^2,$$

$$\left(\frac{dX}{cdt}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\vec{v}}{c}\right)^2, \tag{2.58}$$

onde $\vec{v}$ é a velocidade da partícula em relação ao tempo ordinário. Inserindo o resultado acima em (2.57)

$$P^0 = -\frac{mc}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \tag{2.59}$$

o qual em (2.55) implica

$$P_\mu = \frac{m}{\sqrt{1 - \left(\frac{\vec{v}}{c}\right)^2}} \frac{dX_\mu}{dt}, \tag{2.60}$$

ou seja, encontramos o quadri-momento da partícula, onde

$$m_{rel} = \frac{m}{\sqrt{1 - \left(\frac{\vec{v}}{c}\right)^2}}, \tag{2.61}$$

é a sua massa relativística.

Nesse capítulo verificamos os vínculos da teoria da PRL e encontramos a equação de movimento para a partícula mediante a primeira etapa do método de Dirac, que é identificar os vínculos da teoria e constituir um conjunto de VSC.

O VPC da teoria da PRL determina que a sua ação seja invariante mediante determinadas transformações, denominadas transformações de calibre [**?**]. Nessa ação são as transformações de parâmetros. A escolha de um parâmetro particular $\tau = X^0$ impôs no sistema uma fixação de calibre, que permitiu encontrarmos a solução do sistema.

A segunda etapa do método é constituir o parênteses generalizado de Poisson ou parênteses de Dirac para a quantização do sistema vinculado. Essa segunda etapa, porém, não foi objetivo dessa dissertação nem para a PRL e nem para as cordas.

O que faremos a seguir é realizar todo esse procedimento nas teorias descritas pelas ações expostas ao longo dessa dissertação.

Capítulo 3

Introdução à Teoria de Cordas

3.1 Histórico

Os estudos que provocaram o conceito para a teoria de corda vieram de outras intenções. Em 1968, o físico italiano Gabriele Veneziano, do CERN, descobriu que a aplicação de uma determinada expressão matemática, a *função gamma de Euler*, para sistemas sob interações fortes resolvia alguns problemas a respeito. A função não tinha (ou ainda não tem), entretanto, uma justificativa para a sua aplicabilidade às interações fortes. As consequências dessa função no meio físico ainda seria melhor investigado em anos posteriores.

Os primeiros trabalhos sobre a teoria das cordas foram divulgados em 1970, por Yoichiro Nambu, da Universidade de Chicago, Holger Nielsen, do Instituto Niels Bhor, e Leonard Susskind, da Universidade de Stanford. Na época, tentavam entender, justamente, a aplicação próspera da fórmula de Euler sobre os problemas da força forte. Demonstraram que se as partículas fossem tomadas como pequenas cordas vibrantes e unidimensionais, as suas interações seriam perfeitamente justificadas com a fórmula de Euler. Elas deveriam ser pequenas o suficiente para estarem de acordo com as observações experimentais.

O desenvolvimento dessas pesquisas, com partículas sob altas energias, nos anos seguintes, revelaram entretanto que as previsões desse modelo estavam erradas. E isso proporcionou um abandono da teoria no meio acadêmico a partir de 1980.

Alguns pesquisadores, como Michael Green, John Schwartz e Joël Scherk persistiram porém em prosseguir com o estudo da teoria de cordas. Demonstraram que certas vibrações das cordas correspodem exatamente às propriedades da partícula mensageira "hipotética"da gravidade, o gráviton. Esses resultados incentivaram o retorno da pesquisa em teoria de cordas em muitos centros acadêmicos.

Além disso, um outro incentivo importante às pesquisas com cordas, são os trabalhos do pesquisador Edward Witten, divulgados em 1995. Nesses trabalhos, Witten demonstra que as cinco descrições possíveis da teoria de cordas (Apêndice A) podem ser deduzidas de uma só teoria, a *teoria M*, em onze dimensões.

3.2 Cordas Bosônicas

A idéia central da teoria de cordas é que uma corda é um elemento físico unidimensional cujas oscilações representam uma partícula fundamental. As várias partículas fundamentais conhecidas hoje seriam na verdade cordas e o modo de vibração de cada uma delas seria diferente uma da outra e determinaria a característica específica de cada partícula. Nesse trabalho será utilizado entretanto a ação da corda para partículas bosônicas.

Enquanto uma partícula traça uma trajetória imaginária unidimensional no espaço-tempo, chamada “linha de mundo"da partícula, a corda, durante seu movimento, esboça uma superfície de caminho no espaço-tempo chamada "superfície de mundo".

A ação da corda foi pensada para ser proporcional à superfície de mundo. Essa superfície de duas dimensões, em um espaço-tempo de dimensão qualquer, é parametrizada por dois parâmetros. Nesse raciocínio, Nambu propõem que a ação para uma corda bosônica é

$$S = -\frac{T}{c}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\pi} d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau}.\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2\left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2} \tag{3.1}$$

onde $X = X(\tau, \sigma)$ são as coordenadas da corda no espaço-tempo de Minkowski, τ parâmetro temporal, σ parâmetro de comprimento ao longo da corda, esses parâmetros são denominados são denominados como coordenadas internas da corda. O T é a tensão da corda, tem dimensão de força e é constante aqui. Os limites de integração, π e 0, do parâmetro σ se referem às pontas de uma corda aberta e são assim adotados por conveniência. A ação será invariante às transformações de Poincaré e por reparametrização (Apêndice D),

$$(\tilde{\tau}, \tilde{\sigma}) \longrightarrow (\tau, \sigma) \tag{3.2}$$

A ação é reescrita, simplificadamente, como

$$S = -\frac{T}{c}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\pi} d\sigma \sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}, \tag{3.3}$$

ou ainda,

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\pi} d\sigma\ \mathcal{L}, \tag{3.4}$$

onde

$$\mathcal{L} = -\frac{T}{c}\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2} \tag{3.5}$$

é a lagrangeana da teoria e

$$\dot{X} \equiv \frac{\partial X}{\partial \tau} \tag{3.6}$$

e

$$X' \equiv \frac{\partial X}{\partial \sigma}. \tag{3.7}$$

As equações de movimento da corda serão encontrados com o princípio de Hamilton sobre a ação relativística (3.4),

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\pi} d\sigma \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \sigma} \right] \tag{3.8}$$

onde

$$\delta \dot{X}^\mu = \delta \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} = \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \tau} \tag{3.9}$$

e

$$\delta X'^\mu = \delta \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} = \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \sigma}. \tag{3.10}$$

Pode-se reescrever as quantidades $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}$ e $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu}$ como

$$\mathcal{P}_\mu^\tau = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -\frac{T}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X')X'_\mu - (X')^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}} \tag{3.11}$$

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} = -\frac{T}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X')\dot{X}_\mu - (\dot{X})^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}} \tag{3.12}$$

e usar essa notação em (3.8)

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\pi} d\sigma \left[\mathcal{P}_\mu^\tau \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \tau} + \mathcal{P}_\mu^\sigma \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \sigma} \right]. \tag{3.13}$$

Continuando a busca das equações de movimento da corda, agora a partir de (3.13)

$$\delta S = \int d\tau d\sigma \left[\frac{\partial(\mathcal{P}_\mu^\tau \delta X^\mu)}{\partial \tau} + \frac{\partial(\mathcal{P}_\mu^\sigma \delta X^\mu)}{\partial \sigma} - \left(\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right) \delta X^\mu \right]. \tag{3.14}$$

Uma vez que a evolução de τ implica na evolução do tempo $\partial X^0/\partial\tau \neq 0$,

$$\delta X^\mu(\tau_f, \sigma) = \delta X^\mu(\tau_i, \sigma) = 0, \tag{3.15}$$

a variação se torna

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^\pi d\sigma \left[\frac{\partial(\mathcal{P}_\mu^\sigma \delta X^\mu)}{\partial\sigma} - \left(\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial\tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial\sigma} \right) \delta X^\mu \right], \tag{3.16}$$

e quando $\delta S = 0$, o segundo termo de (3.16) deve ser zero para qualquer valor de δX^μ entre τ_i e τ_f,

$$\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial\tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial\sigma} = 0, \tag{3.17}$$

que é a equação de movimento para a corda relativística, onde $\mathcal{P}_\mu^\tau$ e $\mathcal{P}_\mu^\sigma$ são dados por (3.11) e (3.12) respectivamente.

O primeiro termo de (3.16) deverá ser analisado de acordo com as condições de contorno para a corda. Se for aberta, aquele termo se refere ao comportamento das pontas dessa corda. As pontas poderão ser fixas ou livres com um certo grau de liberdade. Quando for fixas, (3.16) implicará em

$$\delta X^\mu(\tau, 0) = \delta X^\mu(\tau, \pi) = 0 \quad \mu \neq 0, \tag{3.18}$$

que é a condição de contorno de Dirichlet. Se as pontas são livres (3.16) implica em

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma = 0 \tag{3.19}$$

a chamada condição de contorno de Neumann.

Para uma corda fechada não há necessidade de imposição de condições de contorno. Nesse caso $X^\mu(\tau, 0) = X^\mu(\tau, \pi)$.

Voltando à equação de movimento (3.17), poderíamos encontrar sua solução a partir dela, mas a tarefa é muito difícil. Uma saída alternativa e eficaz é partir de uma ação equivalente a ação de Nambu-Goto e encontrar novas equações de movimento mais simples e também equivalentes às equações (3.17). Se trata da ação de Polyakov (Apêndice F),

$$S_p = -\frac{T}{c} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^\pi d\sigma \sqrt{-g}\; g^{\alpha\beta} \frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial\sigma^\beta} \eta_{\mu\nu}, \tag{3.20}$$

onde $g^{\alpha\beta}(\tau, \sigma)$ é a métrica da superfície de evolução da corda de coordenadas,

$$\sigma^\alpha = (\sigma^0, \sigma^1) \equiv (\tau, \sigma), \tag{3.21}$$

onde $\alpha = 0, 1$; para $\sigma^0 \equiv \tau$, $\sigma^1 \equiv \sigma$. A ação S_p é invariante pelas transformações desses parâmetros, pelas transformações de Lorentz e, também, pela transformação de *Wyel* (Apêndice F),

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega(\tau, \omega) g_{\mu\nu}, \tag{3.22}$$

onde $\Omega(\tau, \omega)$ é uma função de escala.

As equações de movimento serão encontradas a partir da variação da ação de Polyakov (3.20) através das coordenadas $X^\mu = X^\mu(\tau, \sigma)$,

$$\frac{\delta S_p}{\delta X^\lambda} = 0 \tag{3.23}$$

que implica em,

$$-\frac{T}{2} \int d\tau d\sigma' \sqrt{-g}\ g^{\alpha\beta}\ \frac{\delta}{\delta X^\lambda(\tau, \sigma')} \left(\frac{\partial}{\partial \sigma^\alpha} X^\mu(\tau, \sigma)\ \frac{\partial}{\partial \sigma^\beta} X^\nu(\tau, \sigma) \eta_{\mu\nu} \right) = 0,$$

$$-\frac{T}{2} \int d\tau d\sigma' \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} \left\{ \frac{\partial}{\partial \sigma^\alpha} \left[\delta^\mu_\lambda \delta(\sigma - \sigma') \right] \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^\beta} + \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial}{\partial \sigma^\beta} \left[\delta^\nu_\lambda \delta(\sigma - \sigma') \right] \right\} = 0,$$

$$-T \int d\tau d\sigma' \left\{ \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial X_\lambda}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial}{\partial \sigma^\beta} \left[\delta(\sigma - \sigma') \right] \right\} = 0,$$

$$-T \int d\tau d\sigma' \left\{ -\delta(\sigma - \sigma') \partial_{\sigma^\alpha} \left(\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial X_\lambda}{\partial \sigma^\beta} \right) + \partial_{\sigma^\alpha} \left(\delta(\sigma - \sigma') \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial X_\lambda}{\partial \sigma^\beta} \right) \right\} = 0,$$

o que implica nas equações

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^\alpha} \left(\sqrt{-g}\ g^{\alpha\beta}(\tau, \sigma) \frac{\partial}{\partial \sigma^\beta} X_\lambda(\tau, \sigma) \right) = 0 \tag{3.24}$$

$$\left[\sqrt{-g}\ g^{1\beta}(\tau, \sigma) \frac{\partial}{\partial \sigma^\beta} X_\lambda(\tau, \sigma) \right]_{\sigma = 0, \sigma_1} \tag{3.25}$$

para o caso das cordas abertas. Nas cordas fechadas temos apenas a equação (3.24).

Para simplificar essas equações, pode-se escolher uma métrica de superfície plana na superfície de evolução da corda. Para isso é necessário usar a simetria de Weyl (Apêndice F) da ação de Polyakov,

Portanto, pode-se escolher

$$g_{\alpha\beta} = \Omega(\tau, \sigma) \eta_{\alpha\beta}, \tag{3.26}$$

onde $\eta_{\alpha,\beta}$ é uma matriz dois por dois,

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

com $(\alpha, \beta = 0, 1)$ e elementos $\eta_{00} = -1$, $\eta_{11} = 1$ e $\eta_{01} = \eta_{10} = 0$.

Em (3.25) e (3.26) resulta em,

$$\frac{\partial^2 X}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 X}{\partial \sigma^2} = 0, \tag{3.27}$$

onde,

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}\Big|_{0,\pi} = 0, \tag{3.28}$$

para cordas abertas e

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + \pi), \tag{3.29}$$

para cordas fechadas.

São equações de onda em uma dimensão que portanto tem a solução geral,

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu_d(\tau - \sigma) + X^\mu_e(\tau + \sigma). \tag{3.30}$$

Explícitamente as equações para as cordas abertas

$$X^\mu_d(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} q^\mu + \frac{1}{2\pi T} p^\mu(\tau - \sigma) + \frac{i}{2\sqrt{\pi T}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n}\ \alpha^\mu_n e^{-in(\tau - \sigma)} \cos(n\sigma) \tag{3.31}$$

$$X^\mu_e(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} q^\mu + \frac{1}{2\pi T} p^\mu(\tau + \sigma) + \frac{i}{2\sqrt{\pi T}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n}\ \alpha^\mu_n e^{-in(\tau + \sigma)} \cos(n\sigma) \tag{3.32}$$

onde p^μ é o momento total total da corda,

$$p^\mu = \int_0^\pi \mathcal{P}^\mu(\tau, \sigma) d\sigma \tag{3.33}$$

e q^μ, α^μ_n constantes de integração. E o correspondente momento canônico $P^\mu(\tau, \sigma)$, é

$$\mathcal{P}^\mu(\tau, \sigma) = \sqrt{\frac{T}{\pi}} \left[p^\mu - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^\mu_n e^{in\tau} cos(2n\sigma) \right]. \tag{3.34}$$

Para o caso da corda fechada, a equação geral de movimento é

$$X^\mu_d(\tau,\sigma) = \frac{1}{2}q^\mu + \frac{p^\mu}{2T\pi}(\tau-\sigma) + \frac{i}{2\sqrt{\pi T}}\sum_{n\neq 0}\alpha^\mu_n e^{2in(\tau-\sigma)} \tag{3.35}$$

$$X^\mu_e(\tau,\sigma) = \frac{1}{2}q^\mu + \frac{p^\mu}{2T\pi}(\tau+\sigma) + \frac{i}{2\sqrt{\pi T}}\sum_{n\neq 0}\tilde{\alpha}^\mu_n e^{-2in(\tau+\sigma)}. \tag{3.36}$$

Com a ação de Polyakov em (3.20) verificamos que a teoria de cordas é singular, ou seja, a lagrangeana densidade dessa ação, $\mathcal{L}_p$, é singular pois $det\frac{\partial^2\mathcal{L}_p}{\partial\dot{X}^\mu\partial\dot{X}^\nu} = 0$ (Apêndice C). Esse resultado revela que a teoria tem vínculos. Os quais vamos, aliás, analisar em algumas ações específicas para corda no próximo capítulo.

Capítulo 4

Cordas Bosônicas como Sistemas Vinculados

A partir daqui, analisamos seis ações para a corda bosônica, a de Nambu-Goto (NG), a de Born-Infeld-Nambu-Goto (BING), Dirac-Born-Infeld-Nambu-Goto (DBING) e as mesmas acopladas com um determinado campo escalar, a ser especificado mais a frente. Todas essas ações são invariantes por reparametrização e por transformações de Lorentz (Apêndice D). As ações portanto descrevem o movimento das cordas bosônicas fechadas, $X^\mu(\tau,\sigma) = X^\mu(\tau,\sigma+\pi)$, no espaço-tempo de Minkowski d-dimensional, onde $d = 26$.

Vamos abordar essas ações com o objetivo de indentificar seus vínculos, mediante o critério de Dirac. Faremos isso através da transferência do formalismo lagrangeano para o formalismo hamiltoniano das teorias.

4.1 Os vínculos da Ação de Nambu-Goto

Começamos com a já apresentada ação de NG,

$$\begin{aligned}
S_1 &= -\frac{T}{c}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_{\sigma}^{\sigma+\pi} d\sigma \sqrt{-det(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu})},\\
S_1 &= -\frac{T}{c}\int d^2\sigma \sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2},\\
S_1 &= -\frac{T}{c}\int d^2\sigma \sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2},\\
S_1 &= \int d^2\sigma \mathcal{L}_1, \qquad (4.1)\\
& \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

onde

$$\eta_{\mu\nu} = diag(1,-1,...,-1,-1), \qquad (4.3)$$

$$\mu, \nu \;=\; 0, 1, 2, ..., (d-1), \tag{4.4}$$

e

$$\mathcal{L}_1 \equiv -\frac{T}{c}\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}, \tag{4.5}$$

como a densidade de lagrangeana da ação. Considere a notação,

$$\dot{X}^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}, \quad X'^\mu \equiv \frac{\partial X'^\mu}{\partial \tau}. \tag{4.6}$$

Aqui, $\sigma^\alpha = (\sigma^0, \sigma^1) = (\tau, \sigma)$, são os parâmetros que descrevem a superfície de mundo.

Em busca do formalismo hamiltoniano para a teoria via criterio de Dirac, calculamos o momento conjugado à coordenada $X^\mu(\tau, \sigma)$,

$$\Pi_\mu \;=\; \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \dot{X}^\mu}, \tag{4.7}$$

$$\Pi_\mu \;=\; -\frac{T}{c}\frac{[(\dot{X}\cdot X')X'_\mu - (X')^2\dot{X}_\mu]}{[(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2]^{1/2}}. \tag{4.8}$$

De onde podemos encontrar as relações,

$$\begin{aligned} \Pi\cdot X' &= 0, \\ \Pi^2 &= -\frac{T^2}{c^2}(X')^2. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Dos quais encontramos dois vínculos,

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \Pi\cdot X' \approx 0, \\ \phi_2 &= \Pi^2 + \frac{T^2}{c^2}(X')^2 \approx 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Eles são portanto os *vínculos primários* da teoria, pois são os primeiros a serem encontrados de imediato já da relação (4.7). Vamos a seguir verificar os parênteses de Poisson entre esses vínculos.

Antes, especificamos que os parênteses de Poisson fundamentais da teoria são

$$\begin{aligned} \{X^\mu(\tau,\sigma), \Pi^\nu(\tau,\tilde{\sigma})\} = \int_\sigma^{\sigma+\pi} d\bar{\sigma} \Bigg\{ & \frac{\partial X^\mu(\tau,\sigma)}{\partial X^\gamma(\tau,\bar{\sigma})}\,\frac{\partial \Pi^\nu(\tau,\tilde{\sigma})}{\partial \Pi_\gamma(\tau,\bar{\sigma})} \\ & - \frac{\partial X^\mu(\tau,\sigma)}{\partial \Pi_\gamma(\tau,\bar{\sigma})}\,\frac{\partial \Pi^\nu(\tau,\tilde{\sigma})}{\partial X^\gamma(\tau,\bar{\sigma})} \Bigg\}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

onde a integral em σ está entre os limites de uma corda fechada, $X^\mu(\tau,\sigma) = X^\mu(\tau,\sigma+\pi)$. Completando o cálculo de (4.11),

$$\{X^\mu(\tau,\sigma),\Pi^\nu(\tau,\tilde{\sigma})\} = \int_\sigma^{\sigma+\pi} d\bar{\sigma}\ \eta^{\nu\lambda}\left\{\frac{\partial X^\mu(\tau,\sigma)}{\partial X^\gamma(\tau,\bar{\sigma})}\ \frac{\partial \Pi_\lambda(\tau,\tilde{\sigma})}{\partial \Pi_\gamma(\tau,\bar{\sigma})}\right\},$$

$$\{X^\mu(\tau,\sigma),\Pi^\nu(\tau,\tilde{\sigma})\} = \int_\sigma^{\sigma+\pi} d\bar{\sigma}\ \eta^{\nu\mu}\{\delta(\sigma-\bar{\sigma})\delta(\tilde{\sigma}-\bar{\sigma})\},$$

o que implica em,

$$\{X^\mu(\tau,\sigma),\Pi^\nu(\tau,\tilde{\sigma})\} = \eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\tilde{\sigma}) \tag{4.12}$$

e

$$\{X^\mu(\tau,\sigma),X^\nu(\tau,\tilde{\sigma})\} = \{\Pi^\mu(\tau,\sigma),\Pi^\nu(\tau,\tilde{\sigma})\} = 0. \tag{4.13}$$

Adotando uma notação menos carregada de dados podemos reescrever esses resultados como

$$\{X^\mu(\sigma),\Pi^\nu(\tilde{\sigma})\} = \eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\tilde{\sigma}) \tag{4.14}$$

e

$$\{X^\mu(\sigma),X^\nu(\tilde{\sigma})\} = \{\Pi^\mu(\sigma),\Pi^\nu(\tilde{\sigma})\} = 0. \tag{4.15}$$

Então os parênteses de Poisson entre ϕ_1 e ϕ_2 ficam,

$$\{\phi_1,\phi_2\} = \{\Pi(\sigma)\cdot X'(\sigma),\ \Pi^2(\tilde{\sigma}) + \frac{T^2}{c^2}(X'(\tilde{\sigma}))^2\}, \tag{4.16}$$

o que implica em

$$\{\phi_1,\phi_2\} = 2\left[\Pi(\sigma)\cdot\Pi(\tilde{\sigma}) + \frac{T^2}{c^2}X'(\sigma)\cdot X'(\tilde{\sigma})\right]\delta'(\sigma-\tilde{\sigma}), \tag{4.17}$$

$$\{\phi_1,\phi_2\} = 2\phi_2\delta'(\sigma-\tilde{\sigma}) \approx 0. \tag{4.18}$$

Ou seja, ϕ_1 e ϕ_2 são vínculos de primeira classe (VPC) (Apêndice C).

Outro modo de verificarmos que existem vínculos de primeira classe no sistema é calcularmos a determinante da matriz dos parênteses de Poisson

$$C_{mn} \equiv \{\phi_m,\phi_n\}, \qquad m,n = 1,2$$

dos vínculos encontrados até aqui (Apêndice C). E na teoria de NG

$$det(C_{mn}) = 0, \tag{4.19}$$

ou seja, de fato existe ao menos um VPC nessa teoria.

Os VPC de uma teoria determinam que exitem invariâncias de calibres (Apêndice C) nessa teoria, ou seja, suas soluções gerais serão arbitrárias em função do tempo [6].

O nosso objetivo aqui e nas demais ações será encontrar as equações de movimento dos sistemas e, em seguida, fixar os calibres com escolhas de vínculos arbitrários no sistema, de modo que o conjunto total seja de vínculos de segunda classe (VSC), ou seja $det(C_{mn}) \neq 0$.

A determinação das soluções explícitas da teoria de NG mediante os VSC, como no caso da partícula, depende de encontrarmos os elementos da matriz inversa de C_{mn}. Aqui e nas demais ações deixaremos isso para trabalhos posteriores, quando também encotraremos os parênteses de Dirac desses sistemas vinculados para construírmos o formalismo quântico dessas teorias.

A seguir calculamos a dinâmica do sistema, via formalismo de Hamilton em sistemas vinculados.

A hamiltoniana densidade da teoria é então

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_c + u_1\phi_1 + u_2\phi_2, \tag{4.20}$$

onde $u_m = u_m(q,p)$, $m = 1,2$ (q e p sendo os campos e os momentos da teoria) são os multiplicadores de Lagrange. A hamiltoniana canônica $\mathcal{H}_c$ é

$$\mathcal{H}_c = \Pi_\mu \dot{X}^\mu - \mathcal{L}_1, \tag{4.21}$$

mas, de (4.5),

$$\mathcal{H}_c = \Pi_\mu \dot{X}^\mu + \frac{T}{c}\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}. \tag{4.22}$$

e de (4.7)

$$\mathcal{H}_c = \left\{-\frac{T}{c}\frac{[(\dot{X}\cdot X')X'_\mu - (X')^2\dot{X}_\mu]}{[(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2]^{1/2}}\right\}\dot{X}^\mu + \frac{T}{c}\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}. \tag{4.23}$$

ou seja,

$$\mathcal{H}_c = 0. \tag{4.24}$$

A hamiltoniana densidade da teoria sendo então,

$$\mathcal{H}_1 = u_1\phi_1 + u_2\phi_2. \tag{4.25}$$

Observe que esses vínculos não trazem outros secundários, por consistência,

$$\dot{\phi_2} = \{\phi_1, H_1^T\} \approx 0,$$

$$u_1 \{\phi_2, \phi_1\} + u^2 \{\phi_2, \phi_2\} \approx 0,$$

$$u_1 \{\phi_2, \phi_1\} \approx 0,$$

que de (4.18) implica em

$$\dot{\phi_1} = \phi_2 \approx 0, \tag{4.26}$$

e

$$\dot{\phi_1} = \phi_2 \approx 0. \tag{4.27}$$

onde a hamiltoniana total, H_1 é

$$H_1^T = \int_{\sigma}^{\sigma+\pi} \mathcal{H}_1^T \; d\sigma. \tag{4.28}$$

Para deixar mais explícito a dinâmica do sistema encontramos suas equações de movimento de Hamilton,

$$\begin{aligned}
\partial_\tau X^\mu &= \frac{\partial H_1^T}{\partial \Pi_\mu} = u_1 X'^\mu + 2u_2 \Pi^\mu, \\
-\partial_\tau \Pi_\mu &= \frac{\partial H_1^T}{\partial X^\mu} = \partial_\sigma [u_1 \Pi_\mu + 2u_2 \frac{T^2}{c^2} X'^\mu], \\
\partial_\tau u_1 &= \frac{\partial H_1^T}{\partial p_{u_1}} = 0, \\
-\partial_\tau p_{u_1} &= \frac{\partial H_1^T}{\partial u_1} = \Pi \cdot X' = \phi_1 \approx 0, \\
\partial_\tau u_2 &= \frac{\partial H_1^T}{\partial p_{u_2}} = 0, \\
-\partial_\tau p_{u_2} &= \frac{\partial H_1^T}{\partial u_2} = \Pi^2 + \frac{T^2}{c^2} (X')^2 = \phi_2 \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

onde os momentos conjugados a u_1 e u_2 são definidos como p_{u_1} e p_{u_2} respectivamente. Observe que as equações de Hamilton dessas novas variáveis expressam os vínculos da teoria, ou seja, o sistema tem movimento determindo pelo seus vínculos. A partir daqui buscamos determinar a fixação desse calibre dos VPC,

mediante escolhas arbitrárias de outros vínculos que sejam de segunda classe com os anteriores [6]. Aqui escolhemos os seguintes,

$$\begin{aligned}
\phi_3 &= X^2 \approx 0, \\
\phi_4 &= \Pi'_\mu \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Com esses novos vínculos (vínculos de calibre), a teoria tem agora o seguinte conjunto,

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \Pi \cdot X' \approx 0, \\
\phi_2 &= \Pi^2 + \frac{T^2}{c^2}(X')^2 \approx 0, \\
\phi_3 &= X^2 \approx 0, \\
\phi_4 &= \Pi'_\mu \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Os vínculos acima formam um conjunto de VSC, como é verificado com os parenteses de Poisson, $C_{mn} = \{\phi_m, \phi_n\}$, os quais são os elementos da matriz dos vínculos,

$$\begin{aligned}
C_{14} &= -C_{41} = -\Pi_\mu \, \delta''(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
C_{23} &= -C_{32} = -4 \, \Pi \cdot X \, \delta(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
C_{24} &= -C_{42} = -2 \, \frac{T^2}{c^2} \, X'_\mu \, \delta''(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
C_{34} &= -C_{43} = -2 \, X_\mu \, \delta(\sigma - \tilde{\sigma}).
\end{aligned} \tag{4.32}$$

cujo o determinante da metriz C desses elementos não nulos é

$$det \; C = 16\Pi^2[\Pi \cdot X]^2[\delta(\sigma - \tilde{\sigma})\delta(\sigma - \tilde{\sigma})]^2 \tag{4.33}$$

O determinante não nulo de C_{mn}, implica em podermos, mais tarde, encontrarmos as soluções explícitas das equações de movimento da teoria de NG e formalizar sua quantização, mediante a técnica de Dirac.

Portanto, encontramos os vínculos primários da teoria da ação de NG. Em seguida, com o acréscimo de outros de vínculos de calibre, encontramos o conjunto de VSC.

Como já foi destacado no fianl do capítulo 2, a solução geral das equações de movimento mediante o critério de Dirac não será feito aqui. Os cálculos porém, nesse sentido, serão objetos de estudos em trabalhos posteriores, assim como a quantização de Dirac para a teoria.

4.2 A Ação de NG com o Campo Dilaton

Nesse item temos a ação de NG acoplada ao valor esperado de um campo escalar que descreve uma partícula escalar sem massa, o *dilaton*, φ.

Como dissemos na introdução, a teoria de cordas descreve as partículas de um modo geral com os seus modos de vibrações. Dentre essas partículas estão os escalares sem massa. Uma delas é o dilaton, φ.

No modelo da teoria de cordas para o universo primitivo o campo dilaton é acrescentado à ação da corda a fim de proporcionar uma dinâmica consistente nos primeiros instantes do universo primitivo [17]. Isso porque é uma consequência fundamental da teoria de cordas que a interação gravitacional seja descrito pelo sistema acoplado da métrica e o dilaton.

Uma propriedade importante do dilaton é que seu valor esperado informa sobre o acoplamento das cordas. O acoplamento de uma teoria é um número admensional que diz respeito ao potencial de interação dessa teoria. Um exemplo disso é a constante de estrutura fina do campo eletromagnético, $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c}$.

O valor esperado do campo dilaton é definido como

$$e^{\varphi(X)}, \tag{4.34}$$

onde $\varphi(X)$ tem valores diferentes em diferentes campos.

A ação é dada por

$$S_2 \;=\; -\frac{T}{c}\int d^2\sigma e^{-\varphi}\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2-(\dot{X})^2(X')^2}, \tag{4.35}$$

ou

$$S_2 \;=\; \int d^2\sigma\;\mathcal{L}_2, \tag{4.36}$$

onde $\mathcal{L}_2$ é a lagrangeana da teoria,

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{T}{c}e^{-\varphi}\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2-(\dot{X})^2(X')^2}. \tag{4.37}$$

O procedimento que se segue é o mesmo como na ação anterior. Escrevemos a hamiltoniana da teoria, encontramos os vínculos primários e com os vínculos de calibre obtermos um novo conjunto de VSC.

Os momentos canônicos Π_μ e π conjugados respectivamente a X^μ e φ são

$$\begin{aligned}
\Pi_\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}_2}{\partial\dot{X}^\mu} = -e^{-\varphi}\frac{T}{c}\frac{[(\dot{X}\cdot X')X'_\mu-(X')^2\dot{X}_\mu]}{[(\dot{X}\cdot X')^2-(\dot{X})^2(X')^2]^{1/2}}, \\
\pi &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = 0.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Observe que $\varphi(X)$ é um novo campo na superfície de mundo da corda, por isso estudamos também sua dinâmica.

A ação S_2 descreve então uma teoria de três vínculos primários

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}_1 &= \pi \approx 0, \\
\tilde{\phi}_2 &= \Pi \cdot X' \approx 0, \\
\tilde{\phi}_3 &= \Pi^2 + \frac{T^2}{c^2} e^{-2\varphi}(X')^2 \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Onde o determinante, da matriz dos elementos dos parênteses de Poisson, é nulo, pois temos aqui VPC. (Apêndice C).

A densidade hamiltoniana canônica é então

$$\mathcal{H}_2^c = \Pi \cdot \dot{X} + \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}_2 = 0, \tag{4.40}$$

a qual é novamente nula, usando (4.37) e (4.38). Assim, a evolução dinâmica do sistema é novamente determinada pelos vínculos,

$$\mathcal{H}_2^T = v_1 \tilde{\phi}_1 + v_2 \tilde{\phi}_2 + v_3 \tilde{\phi}_3, \tag{4.41}$$

onde os v_m são os multiplicadores de Lagrange, tal que $m = 1, 2, 3$. O vínculo $\tilde{\phi}_1$ não traz outro secundário, por consistência.

As equações de Hamilton então ficam,

$$\begin{aligned}
\partial_\tau X^\mu &= \frac{\partial H_2^T}{\partial \Pi_\mu} = v_2 X'^\mu + 2v_3 \Pi^\mu, \\
-\partial_\tau \Pi_\mu &= \frac{\partial \mathcal{H}_2^T}{\partial X^\mu} = -\partial_\sigma (v_2 \Pi_\mu + 2v_3 X'_\mu T^2 e^{-2\varphi}), \\
\partial_\tau \varphi &= \frac{\partial H_2^T}{\partial \pi} = v_1, \\
-\partial_\tau \pi &= \frac{\partial H_2^T}{\partial \varphi} = -2 \; v_3 \frac{T^2}{c^2} e^{-2\varphi}(X')^2, \\
\partial_\tau v_1 &= \frac{\partial H_2^T}{\partial p_{v_1}} = 0, \\
-\partial_\tau \pi_{v_1} &= \frac{\partial H_2^T}{\partial \nu_1} = \pi = \tilde{\phi}_1 \approx 0, \\
\partial_\tau v_2 &= \frac{\partial H_2^T}{\partial p_{v_2}} = 0, \\
-\partial_\tau \pi_{v_2} &= \frac{\partial H_2^T}{\partial v_2} = \Pi \cdot X' = \tilde{\phi}_2 \approx 0,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\partial_\tau v_3 &= \frac{\partial H_2^T}{\partial p_{\nu_3}} = 0, \\
-\partial_\tau p_{v_3} &= \frac{\partial H_2^T}{\partial v_3} = \Pi^2 + \frac{T^2}{c^2} e^{-2\varphi}(X')^2 = \tilde{\phi}_3 \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.42}
$$

Os vínculos de calibre serão

$$
\begin{aligned}
\tilde{\phi}_4 &= X^2 \approx 0, \\
\tilde{\phi}_5 &= \Pi'_\mu \approx 0, \\
\tilde{\phi}_6 &= \varphi \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.43}
$$

de modo que o novo conjunto total de vínculos

$$
\begin{aligned}
\tilde{\phi}_1 &= \pi \approx 0, \\
\tilde{\phi}_2 &= \Pi \cdot X' \approx 0, \\
\tilde{\phi}_3 &= \Pi^2 + \frac{T^2}{c^2} e^{-2\varphi} X'^2 \approx 0, \\
\tilde{\phi}_4 &= X^2 \approx 0, \\
\tilde{\phi}_5 &= \Pi'_\mu \approx 0, \\
\tilde{\phi}_6 &= \varphi \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.44}
$$

são de segunda classe.

O que os parênteses de Poisson, $\{\tilde{\phi}_m, \tilde{\phi}_n\} = \tilde{C}_{mn}$, não nulos verificam,

$$
\begin{aligned}
\tilde{C}_{13} &= -\tilde{C}_{31} = 2\ \frac{T^2}{c^2}\ e^{-2\varphi} X'^2\ \delta(\sigma - \sigma), \\
\tilde{C}_{16} &= -\tilde{C}_{61} = -\delta(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
\tilde{C}_{25} &= -\tilde{C}_{52} = -\Pi_\mu\ \delta''(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
\tilde{C}_{34} &= -\tilde{C}_{43} = -4\Pi \cdot X\ \delta(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
\tilde{C}_{35} &= -\tilde{C}_{53} = -2\frac{T^2}{c^2} e^{-2\varphi} X' \delta''(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
\tilde{C}_{45} &= -\tilde{C}_{54} = -2\ X^\mu \delta(\sigma - \tilde{\sigma}).
\end{aligned} \tag{4.45}
$$

onde o determinante da matriz $\tilde{C}$ desses elementos não nulos é

$$
det\ \tilde{C} = 16\Pi^2[\Pi \cdot X]^2[\delta(\sigma - \tilde{\sigma})]^4[\delta''(\sigma - \tilde{\sigma})]^2. \tag{4.46}
$$

Como no caso anterior, verificamos aqui os vínculos da teoria da ação de NG, agora com o campo dilaton. Por conta desse novo campo um outro vínculo,$\tilde{\phi}_1 = \pi \approx 0$, de segunda classe, é acrescentado a teoria.

A invariância de calibre novamente permite-nos acrescentar funções que confere ao conjunto total de vínculos serem de segunda classe.

4.3 A Ação de Born-Infeld-Nambu-Goto (BING)

Nesse item a ação de NG está ajustada com a teoria eletromagnética de Born-Infeld (BI). Essa teoria foi formulada com o objetivo de atribuir a uma carga pontual energia eletromagnética finita, ao contrário da teoria de Maxwell que prevê energia infinita [8].

A ação de BING é definida por

$$S_3 = -\frac{T}{c}\int d^2\sigma\ \sqrt{-det(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} + F_{\alpha\beta})}, \tag{4.47}$$

onde $F_{\alpha\beta}$ é a representação tensorial do campo de Maxwell na superfície de mundo. A ação será invariante no calibre

$$\delta A = \partial_\sigma \epsilon, \tag{4.48}$$

onde $\delta F_{\alpha\beta} = 0$ nesse calibre, pois,

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha. \tag{4.49}$$

Mais explícitamente,

$$\begin{aligned}
S_3 &= -\frac{T}{c}\int d^2\sigma\ \sqrt{-det(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} + \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)} \\
S_3 &= -\frac{T}{c}\int d^2\sigma\ \sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2 - (\dot{A}_1 - A_0')^2} \\
S_3 &= \int d^2\sigma\ \mathcal{L}_3.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_3 &= -\frac{T}{c}\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2 - (\dot{A}_1 - A_0')^2} \\
\mu,\nu &= 0,1,2,...,(d-1); \quad \alpha,\beta = 0,1 \\
\dot{X}^\mu &\equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}; \quad X'^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}; \quad \dot{A}_1 \equiv \frac{\partial A_1}{\partial \tau}; \quad A_0' \equiv \frac{\partial A_0}{\partial \sigma}.
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Os momentos conjugados são

$$\begin{aligned}
\Pi_\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial \dot{X}^\mu} = -\frac{T}{c}\frac{(\dot{X}\cdot X')X'_\mu - (X')^2\dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2 - (\dot{A}_1 - A_0')^2}}, \\
\pi^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial \dot{A}_0} = 0, \\
\pi^1 &= \frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial \dot{A}_1} = \frac{T}{c}\frac{\dot{A}_1 - A_0'}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2 - (\dot{A}_1 - A_0')^2}},
\end{aligned} \tag{4.52}$$

onde Π_μ, π^0 e π^1 são os momentos conjugados respectivamente a X^μ, A_0 e A_1. Os vínculos primários sendo três,

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \pi^0 \approx 0 \\ \theta_2 &= \Pi \cdot X' \approx 0 \\ \theta_3 &= \Pi^2 + [(\pi^1)^2 + \frac{T^2}{c^2}](X')^2 \approx 0, \end{aligned} \tag{4.53}$$

tais que formam um conjunto de VPC. Indicam portanto que além das duas invariâncias por reparametrizações, a ação de BING manifesta também invariância de calibre para o campo eletromagnético.

A hamiltoniana densidade canônica é

$$\mathcal{H}_3^c = \Pi \cdot \dot{X} + \pi^0 \dot{A}_0 + \pi^1 \dot{A}_1 - \mathcal{L}_3, \tag{4.54}$$

$$\mathcal{H}_3^c = \pi^1(1 + A_0' - \dot{A}_1). \tag{4.55}$$

Então a densidade de hamiltoniana total é

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_3^T &= \pi^1(1 + A_0' - \dot{A}_1) + s_1\pi^0 + s_2\ \Pi \cdot X' \\ &+ s_3[\Pi^2 + ((\pi^1)^2 + \frac{T^2}{c^2})(X')^2]. \end{aligned} \tag{4.56}$$

onde s_m são os multiplicadores de Lagrange, tal que $m = 1, 2, 3$. Os momentos conjugados aos multiplicadores sendo p_{s_m}.

As equações de Hamilton serão,

$$\begin{aligned}
\partial_\tau X^\mu &= \frac{\partial H_3^T}{\partial \Pi_\mu} = s_2 X'^\mu + 2\ s_3 \Pi^\mu, \\
-\partial_\tau \Pi_\mu &= \frac{\partial H_3^T}{\partial X^\mu} = -\partial_\sigma[s_2\Pi^\mu + 2\ s_3 X'^\mu((\pi^1)^2 + \frac{T^2}{c^2})], \\
\partial_\tau A_0 &= \frac{\partial H_3^T}{\partial \pi^0} = s^1, \\
-\partial_\tau \pi^0 &= \frac{\partial H_3^T}{\partial A_0} = 0, \\
\partial_\tau A_1 &= \frac{\partial H_3^T}{\partial \pi^1} = A_0' + 2\ s_3\pi^1(X')2, \\
\partial_\tau \pi^1 &= \frac{\partial H_3^T}{\partial A_1} = 0, \\
\partial_\tau s_1 &= \frac{\partial H_3^T}{\partial p_{\nu_1}} = 0, \\
\partial_\tau p_{s_1} &= \frac{\partial H_3^T}{\partial s_1} = \pi^0 = \theta_1 \approx 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_\tau s_2 &= \frac{\partial H_3^T}{\partial p_{s_2}} = 0, \\
-\partial_\tau p_{s_2} &= \frac{\partial H_3^T}{\partial s_2} = \Pi \cdot X' = \theta_2 \approx 0, \\
\partial_\tau s_3 &= \frac{\partial H_3^T}{\partial p_{s_3}} = 0, \\
-\partial_\tau p_{s_3} &= \frac{\partial H_3^T}{\partial s_3} = \Pi^2 + [(\pi^1)^2 + \frac{T^2}{c^2}](X')^2 = \theta_3 \approx 0. \qquad (4.57)
\end{aligned}$$

Essas equações de movimento que preservam os vínculos do sistema ao longo do tempo. Apenas o vínculo θ_1, por consistência, fornece um vínculo secundário,

$$\dot{\theta}_1 = \left\{\theta_1, H_3^T\right\} = \theta_4 = \pi^{1'} \approx 0. \qquad (4.58)$$

A teoria possui então quatro vínculos, θ_1, θ_2, θ_3 e θ_4, os quais permanecem de primeira classe.

Por conta dos VPC a teoria tem invariância de calibre. A fixação vem de escolhermos outros quatro vínculos de calibres, sendo dois deles já usados na teoria de NG,

$$\begin{aligned}
\theta_5 &= X^2 \approx 0 \\
\theta_6 &= \Pi' \approx 0 \\
\theta_7 &= A_1 \approx 0 \\
\theta_8 &= A_0 \approx 0, \qquad (4.59)
\end{aligned}$$

tais que o novo conjunto,

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \pi^0 \approx 0, \\
\theta_2 &= \Pi \cdot X' \approx 0, \\
\theta_3 &= \Pi^2 + [(\pi^1)^2 + \frac{T^2}{c^2}](X')^2 \approx 0, \\
\theta_4 &= \pi^{1'} \approx 0, \\
\theta_5 &= X^2 \approx 0, \\
\theta_6 &= \Pi'_\mu \approx 0, \\
\theta_7 &= A_1 \approx 0, \\
\theta_8 &= A_0 \approx 0, \qquad (4.60)
\end{aligned}$$

seja de vínculos de VSC. Os parênteses de Poisson que verificam isso, $\{\theta_m, \theta_n\} \equiv M_{mn}$, são,

$$
\begin{aligned}
M_{18} &= -M_{81} = -\delta(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
M_{25} &= -M_{52} = -2\ X \cdot X'\ \delta(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
M_{26} &= -M_{62} = -\Pi_\mu\ \delta''(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
M_{35} &= -M_{53} = -4\ X \cdot \Pi\ \delta(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
M_{36} &= -M_{63} = -2\ X \cdot \Pi\ [(\pi^1)^2 + \frac{T^2}{c^2}]\ \delta''(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
M_{37} &= -M_{73} = -2\ (X')^2\ \pi^1 \delta(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
M_{47} &= -M_{74} = -\delta(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
M_{56} &= -M_{65} = -2\ X^\mu\ \delta'(\sigma - \tilde{\sigma}).
\end{aligned} \tag{4.61}
$$

onde o determinate da matriz M desses elementos não nulos é

$$
det\ M = 16\Pi^2[\Pi \cdot X]^2[\delta(\sigma - \tilde{\sigma})]^4[\delta'(\sigma - \tilde{\sigma})]^2[\delta(\sigma - \tilde{\sigma})]^2. \tag{4.62}
$$

Observamos que na ação do BING o campo eletromagnético implica em um novo vínculo primário, $\pi^0 \approx 0$ e outro secundário, $\pi^{1\prime} \approx 0$.

4.4 A Ação de BING com o Campo Dilaton

Nesse sistema a ação de BING está acoplada ao campo dilaton,

$$\begin{aligned}
S_4 &= -\frac{T}{c}\int d^2\sigma\ e^{-\varphi}\sqrt{-det(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} + F_{\alpha\beta})}, \\
S_4 &= -\frac{T}{c}\int d^2\sigma\ e^{-\varphi}\sqrt{-det(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} + \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)}, \\
S_4 &= -\frac{T}{c}\int d^2\sigma e^{-\varphi}\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2 - (\dot{A}_1 - A'_0)^2}, \\
S_4 &= \int d^2\sigma\ \mathcal{L}_4. \qquad (4.63)
\end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{L}_4 = -\frac{T}{c}e^{-\varphi}\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2 - (\dot{A}_1 - A'_0)^2}. \qquad (4.64)$$

Os momentos canônicos de $\mathcal{L}_4$

$$\begin{aligned}
\Pi_\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}_4}{\partial \dot{X}^\mu} = -\ \frac{T}{c}e^{-\varphi}\frac{(\dot{X}\cdot X')X'_\mu - (X')^2\dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2 - (\dot{A}_1 - A'_0)^2}}, \\
\pi^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}_4}{\partial \dot{A}_0} = 0, \\
\pi^1 &= \frac{\partial \mathcal{L}_4}{\partial \dot{A}_1} = \frac{T}{c}e^{-\varphi}\frac{\dot{A}_1 - A'_0}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2 - (\dot{A}_1 - A'_0)^2}}, \\
\pi &= \frac{\partial \mathcal{L}_4}{\partial \dot{\phi}} = 0. \qquad (4.65)
\end{aligned}$$

onde. Aqui, Π_μ, π^0, π^1 e π são momentos canônicos conjugados respectivamente aos campos X^μ, A_0, A_1 e φ.

Os vínculos primários da teoria então são

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}_1 &= \pi \approx 0, \\
\tilde{\theta}_2 &= \pi^0 \approx 0, \\
\tilde{\theta}_3 &= \Pi\cdot X' \approx 0, \\
\tilde{\theta}_4 &= \Pi^2 + [(\pi^1)^2 + \frac{T^2}{c^2}e^{-2\varphi}](X')^2 \approx 0, \qquad (4.66)
\end{aligned}$$

onde $\tilde{\theta}_1$ e $\tilde{\theta}_4$ são de segunda classe

$$\{\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_4\} = -2[\Pi^2 + (\pi^1)^2(X')^2]. \qquad (4.67)$$

Ou seja, a ação de BING com o campo dilaton já manifesta duas invariâncias de calibre.

Com esses vínculos construímos a densidade de hamiltoniana total da teoria

$$\mathcal{H}_4^T = \mathcal{H}_4^c + t_1\tilde{\theta}_1 + t_2\tilde{\theta} + t_3\tilde{\theta}_3 + t_4\tilde{\theta}_4, \tag{4.68}$$

onde

$$\mathcal{H}_4^c = \Pi \cdot \dot{X} + \pi^0 \dot{A}_0 + \pi^1 \dot{A}_1 + \pi\dot{\varphi} - \mathcal{L}_4 \tag{4.69}$$

ou, usando (4.64) encontramos que

$$\mathcal{H}_4^c = \pi^1 A_0'. \tag{4.70}$$

A densidade hamiltoniana fica então, usando os vínculos de (4.66),

$$\mathcal{H}_4^T = \pi^1 A_0' + t_1\ \pi + t_2\ \pi^0 + t_3\ \Pi \cdot X' + t_4\ [\Pi^2 + ((\pi^1)^2 + \frac{T^2}{c^2}e^{-\varphi})(X')^2]. \tag{4.71}$$

onde t_m, são os multiplicadores de Langrange, tal que $m = 1, 2, 3, 4$.

As equações de Hamilton do sistema serão

$$\begin{aligned}
\partial_\tau X^\mu &= \frac{\partial H_4^T}{\partial \Pi_\mu} = t_3 X'^\mu + 2\ t_4 \Pi^\mu, \\
-\partial_\tau \Pi_\mu &= \frac{\partial H_4^T}{\partial X^\mu} = -\partial_\sigma[t_3\Pi_\mu + 2\ t_4 X'^\mu((\pi^1)^2 + \frac{T^2}{c^2}e^{-2\varphi})], \\
\partial_\tau A_0 &= \frac{\partial H_4^T}{\partial \pi^0} = t_2, \\
-\partial_\tau \pi^0 &= \frac{\partial H_4^T}{\partial A_0} = -\pi^{1\prime}, \\
\partial_\tau A_1 &= \frac{\partial H_4^T}{\partial \pi^1} = A_0' + 2\ t_4\ \pi^1 (X')^2, \\
-\partial_\tau \pi^1 &= \frac{\partial H^T}{\partial A_1} = 0, \\
\partial_\tau \varphi &= \frac{\partial H_4^T}{\partial \pi} = t_1, \\
-\partial_\tau \pi &= \frac{\partial H_4^T}{\partial \varphi} = -2\ t_4 \frac{T^2}{c^2} e^{-2\varphi}(X')^2, \\
\partial_\tau t_1 &= \frac{\partial H_4^T}{\partial p_{t_1}} = 0, \\
-\partial_\tau p_{t_1} &= \frac{\partial H_4^T}{\partial t_1} = \pi = \tilde{\theta}_1 \approx 0,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\partial_\tau t_2 &= \frac{\partial H_4^T}{\partial p_{t_2}} = 0, \\
-\partial_\tau p_{t_2} &= \frac{\partial H_4^T}{\partial t_2} = \pi^0 = \tilde{\theta}_2 \approx 0, \\
\partial_\tau t_3 &= \frac{\partial H_4^T}{\partial p_{t_3}} = 0, \\
-\partial_\tau p_{t_3} &= \frac{\partial H_4^T}{\partial t_3} = \Pi \cdot X' = \tilde{\theta}_3 \approx 0, \\
\partial_\tau t_4 &= \frac{\partial H_4^T}{\partial t_4} = 0, \\
-\partial_\tau p_{t_5} &= \frac{\partial H_4^T}{\partial t_4} = \Pi^2 + [(\pi^1)^2 + \frac{T^2}{c^2}\ e^{-2\varphi}](X')^2 = \tilde{\theta}_4 \approx 0. \qquad (4.72)
\end{aligned}
$$

onde os p_{t_m} são os momentos conjugados das variáveis t_m.

As equações das novas variáveis (os multiplicadores de Lagrange) revelam explícitamente os vínculos primários da teoria. A condição de consistência sobre os vínculos revela que apenas $\tilde{\theta}_2$ gera o vínculo secundário de primeira classe $\tilde{\theta}_5$,

$$
\tilde{\theta}_5 = \dot{\tilde{\theta}}_2 = \{\tilde{\theta}_2, H_4^T\} = \pi^{1'} \approx 0, \qquad (4.73)
$$

Então o conjunto total de vínculos primários e secundário é

$$
\begin{aligned}
\tilde{\theta}_1 &= \pi \approx 0, \\
\tilde{\theta}_2 &= \pi^0 \approx 0, \\
\tilde{\theta}_3 &= \Pi'_\mu \cdot X' \approx 0, \\
\tilde{\theta}_4 &= \Pi^2 + ((\pi)^2 + \frac{T^2}{c^2} e^{-2\varphi})(X')^2 \approx 0, \\
\tilde{\theta}_5 &= \pi^{1'} \approx 0. \qquad (4.74)
\end{aligned}
$$

Observe que existem agora, nesse conjunto, três VPC, dois primários $\tilde{\theta}_2$ e $\tilde{\theta}_3$ e um secundário, $\tilde{\theta}_5$.

Anexamos então, ao conjunto dos três VPC, os seguintes vínculos de calibre,

$$
\begin{aligned}
\tilde{\theta}_6 &= \Pi'_\mu \approx 0, \\
\tilde{\theta}_7 &= A_1 \approx 0, \\
\tilde{\theta}_8 &= A_0 \approx 0. \qquad (4.75)
\end{aligned}
$$

O novo conjunto

$$
\tilde{\theta}_1 = \pi \approx 0,
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\theta}_2 &= \pi^0 \approx 0, \\
\tilde{\theta}_3 &= \Pi'_\mu \cdot X' \approx 0, \\
\tilde{\theta}_4 &= \Pi^2 + ((\pi)^2 + \frac{T^2}{c^2} e^{-2\varphi})(X')^2 \approx 0, \\
\tilde{\theta}_5 &= \pi^{1\prime} \approx 0, \\
\tilde{\theta}_6 &= \Pi'_\mu \approx 0, \\
\tilde{\theta}_7 &= A_1 \approx 0, \\
\tilde{\theta}_8 &= A_0 \approx 0,
\end{aligned}
\tag{4.76}
$$

sendo de VSC. Os elementos não nulos da matriz desses vínculos nos parênteses de Poisson, $\{\tilde{\theta}_m, \tilde{\theta}_n\} \equiv \tilde{M}_{mn}$, são

$$
\begin{aligned}
\tilde{M}_{14} = -\tilde{M}_{41} &= 2[\Pi^2 + (\pi^1)^2 (X')^2]\delta(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
\tilde{M}_{28} = -\tilde{M}_{82} &= -\delta(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
\tilde{M}_{36} = -\tilde{M}_{63} &= -\Pi_\mu \delta''(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
\tilde{M}_{46} = -\tilde{M}_{64} &= 2\Pi^2 X'_\mu \delta''(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
\tilde{M}_{75} = -\tilde{M}_{57} &= -\delta(\sigma - \tilde{\sigma}).
\end{aligned}
\tag{4.77}
$$

onde o determinante da matriz $\tilde{M}$ desses elementos é

$$
det\ \tilde{M} = 4\frac{T^4}{c^4} e^{-4\varphi} [\delta(\sigma - \tilde{\sigma})]^4 [\delta(\sigma - \tilde{\sigma})\delta(\sigma - \tilde{\sigma})]^2 \tag{4.78}
$$

Nesse item vimos que a ação de BING com o campo dilaton tem um novo vínculo primário de segunda classe, $\pi \approx 0$. Mas, como no caso do item 4.3, essa ação descreve a teoria com três VPC, sendo um secundário.

4.5 A Ação de Dirac-Born-Infeld-Nambu-Goto (DBING)

Nessa teoria temos o acréscimo do campo de Kalb-Ramond à ação de BING. O campo de Kalb-Ramond, $B_{\alpha\beta}$, é um campo de de calibre anti-simétrico originalmente introduzido para descrever o processo de interação entre objetos estendidos unidimensionais [15]. É análogo ao campo de calibre A_α de Maxwell, portanto, responsável físicamente por atribuir a corda a propriedade de carga.

A ação de $DBING$ é escrita como

$$\begin{aligned} S_5 &= -\frac{T}{c}\int d^2\sigma\ \sqrt{-det(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} + \mathcal{F}_{\alpha\beta})}, \\ S_5 &= -\frac{T}{c}\int d^2\sigma\ \sqrt{-det(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} + F_{\alpha\beta} - B_{\alpha\beta})} \\ S_5 &= -\frac{T}{c}\int d^2\sigma\ \sqrt{-det(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} + \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha - B_{\alpha\beta})} \end{aligned} \tag{4.79}$$

onde $d^2\sigma \equiv d\tau d\sigma$, $\sigma^\alpha = (\sigma^0, \sigma^1) \equiv (\tau, \sigma)$, $\mathcal{F}_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} - B_{\alpha\beta}$. O tensor $F_{\alpha\beta}$ representa o campo de Maxwell,

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha, \tag{4.80}$$

tal que $A_\alpha(X^\mu(\tau,\sigma))$ é o campo de calibre da teoria de Maxwell na superfície de mundo.

O tensor $B_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}(X(\tau,\sigma))$ está também em função das coordenadas internas da corda.

Escrevendo a ação mais explícitamente,

$$\begin{aligned} S_5 &= -\frac{T}{c}\int d^2\sigma \sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2 - f^2 + 2bf - b^2}, \\ &= -\frac{T}{c}\int d^2\sigma \sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2 - f^2 + 2bf - b^2}, \\ &= -\frac{T}{c}\int d^2\sigma \sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2 - (f-b)^2}, \\ &= \int d^2\sigma\ \mathcal{L}_5, \end{aligned} \tag{4.81}$$

onde

$$\mathcal{L}_5 = -\frac{T}{c}\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2 - (f-b)^2}, \qquad f = \dot{A}_1 - A'_0 \tag{4.82}$$

e

$$B_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

Em busca do formalismo hamiltoniano da teoria, calculamos os momentos conjugados dos campos X_μ, A_0, A_1 e b,

$$\begin{aligned}
\Pi_\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}_5}{\partial \dot{X}^\mu} = -\frac{T}{c}\frac{(\dot{X}\cdot X')X'_\mu - (X')^2\dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2 - (f-b)^2}}, \\
\pi^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}_5}{\partial \dot{A}_0} = 0, \\
\pi^1 &= \frac{\partial \mathcal{L}_5}{\partial \dot{A}_1} = \frac{T}{c}\frac{f-b}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2 - (f-b)^2}}, \\
\pi_b &= \frac{\partial \mathcal{L}_5}{\partial \dot{b}} = 0.
\end{aligned} \tag{4.83}$$

Usando esses resultados, chegamos aos vínculos primários

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \pi_b \approx 0 \\
\psi_2 &= \pi^0 \approx 0 \\
\psi_3 &= \Pi \cdot X' \approx 0 \\
\psi_4 &= \Pi^2 + [(\pi^1)^2 + \frac{T^2}{c^2}](X')^2 \approx 0,
\end{aligned} \tag{4.84}$$

os quais, já são de primeira classe.

Para construir o formalismo hamiltoniano começamos com a densidade de hamiltoniana canônica

$$\mathcal{H}_5^c = \Pi \cdot \dot{X} + \pi^0 \dot{A}_0 + \pi^1 \dot{A}_1 + \pi_b \dot{b} - \mathcal{L}_5 \tag{4.85}$$

onde usando as equações para os momentos fica

$$\mathcal{H}_5^c = \pi^1 (A'_0 - b) \tag{4.86}$$

A densidade de hamiltoniana total sendo então escrita como

$$\mathcal{H}_5^T = \mathcal{H}_5^c + \omega_1 \psi_1 + \omega_2 \psi_2 + \omega \psi_3 + \omega \psi_4 \tag{4.87}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_5^T = \pi^1 A'_0 - \pi^1 b + \omega_1 \Pi_b + \omega_2 \pi^0 + \omega_3 \Pi \cdot X' \\
+\omega_4 [\Pi^2 + ((\pi^1)^2 + \frac{T^2}{c^2})(X')^2.
\end{aligned} \tag{4.88}$$

As equações de Hamilton são,

$$
\begin{aligned}
\partial_\tau X^\mu &= \frac{\partial H_5^T}{\partial \Pi_\mu} = \omega_3 X'^\mu + 2\ \omega_4 \Pi^\mu, \\
-\partial_\tau \Pi_\mu &= \frac{\partial H_5^T}{\partial X^\mu} = -\partial_\sigma[\omega_3 \Pi_\mu + 2\ \omega_4 X'^\mu((\pi^1)^2 + \frac{T^2}{c^2})], \\
\partial_\tau A_0 &= \frac{\partial H_5^T}{\partial \pi^0} = \omega_2, \\
-\partial_\tau \pi^0 &= \frac{\partial H_5^T}{\partial A_0} = -\pi^{1\prime}, \\
\partial_\tau A_1 &= \frac{\partial H_5^T}{\partial \pi^1} = A_0' + b + 2\ \omega_4 \pi^1 (X')^2, \\
-\partial_\tau \pi^1 &= \frac{\partial H_5^T}{\partial A_1} = 0, \\
\partial_\tau b &= \frac{\partial H_5^T}{\partial \pi_b} = \omega_1, \\
-\partial_\tau \pi_b &= \frac{\partial H_5^T}{\partial b} = \pi^1, \\
\partial_\tau \omega_1 &= \frac{\partial H_5^T}{\partial p_{\omega_1}} = 0, \\
-\partial_\tau p_{\omega_1} &= \frac{\partial H_5^T}{\partial \omega_1} = \pi_b = \psi_1 \approx 0, \\
\partial_\tau \omega_2 &= \frac{\partial H_5^T}{\partial p_{\omega_2}} = 0, \\
-\partial_\tau p_{\omega_2} &= \frac{\partial H_5^T}{\partial \omega_2} = \pi^0 = \psi_2 \approx 0, \\
\partial_\tau \omega_3 &= \frac{\partial H_5^T}{\partial p_{\omega_3}} = 0, \\
-\partial_\tau p_{\omega_3} &= \frac{\partial H_5^T}{\partial \omega_3} = \Pi \cdot X' = \psi_3 \approx 0, \\
\partial_\tau \omega_4 &= \frac{\partial H_5^T}{\partial p_{\omega_4}} = 0, \\
-\partial_\tau p_{\omega_4} &= \frac{\partial H_5^T}{\partial \omega_4} = \Pi^2 + [(\pi^1)^2 + \frac{T^2}{c^2}](X')^2 = \psi_4 \approx 0.
\end{aligned}
\tag{4.89}
$$

onde observamos os vínculos primários como equações de movimento.

Apenas o vínculo ψ_1, por cosistência, gera um vínculo secundário,

$$\psi_5 = \dot{\psi_1} = \{\psi_1, H_5^T\} = -\pi^1 \approx 0. \tag{4.90}$$

Como o conjunto dos vínculos são de primera classe, a teoria confirma a sua invariância de calibre. Cabendo então sob a análise de Dirac fixarmos os calibres. Os vínculos de fixação serão

$$\begin{aligned}
\psi_6 &= X^2 \approx 0, \\
\psi_7 &= \Pi' \approx 0, \\
\psi_8 &= A_1 \approx 0, \\
\psi_9 &= A_0 \approx 0, \\
\psi_{10} &= b \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.91}$$

Então o número total de vínculos da teoria é

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \pi_b \approx 0, \\
\psi_2 &= \pi^0 \approx 0, \\
\psi_3 &= \Pi \cdot X' \approx 0, \\
\psi_4 &= \Pi^2 + [(\pi^1)^2 + \frac{T^2}{c^2}](X')^2 \approx 0, \\
\psi_5 &= \pi^{1\prime} \approx 0, \\
\psi_6 &= X^2 \approx 0, \\
\psi_7 &= \Pi' \approx 0, \\
\psi_8 &= A_1 \approx 0, \\
\psi_9 &= A_0 \approx 0, \\
\psi_{10} &= b \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.92}$$

As relações acima formam um conjunto de VSC. Tomando $\{\psi_m, \psi_n\} \equiv Q_{m,n}$ conferimos isso,

$$\begin{aligned}
Q_{1,10} &= -\delta(\sigma - \sigma'), \\
Q_{2,9} &= -\delta(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
Q_{3,6} &= 2\ X' \cdot X\ \delta(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
Q_{3,7} &= -\Pi_\mu\ \delta''(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
Q_{4,6} &= -4\ \Pi \cdot X\ \delta(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
Q_{4,7} &= 2\ X'^\mu((\pi^1)^2 + \frac{T^2}{c^2})\ \delta''(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
Q_{4,8} &= -2\ (X')^2 \pi^1\ \delta(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
Q_{5,8} &= -\delta(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
Q_{6,7} &= -2\ X^\mu\ \delta'(\sigma - \sigma).
\end{aligned} \tag{4.93}$$

onde o determinante da matriz Q desses elementos é

$$det\ Q = 16\Pi^2[\Pi \cdot X]^2[\delta(\sigma - \tilde{\sigma})]^6[\delta(\sigma - \tilde{\sigma})]^2. \tag{4.94}$$

Além dos demais vínculos das ações anteriores, o acréscimo do campo $B_{\mu\nu}$ na ação DBING gera um outro vínculo primário $\pi_b \approx 0$. Com os acréscimos dos vínculos de calibres, a teoria pode então ter equações definidas para a corda.

4.6 A Ação de DBING com o Campo Dilaton

A ação de $DBING$ com o campo dilaton, φ é dada por

$$\begin{aligned} S_6 &= -fracTc\int d^2\sigma e^{-\varphi}\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2-(\dot{X})^2(X')^2-(\dot{A}_0-A_0'-b)^2}, \\ S_6 &= \int d^2\sigma\mathcal{L}_6, \end{aligned}$$

onde a lagrangeana é

$$\mathcal{L}_6 = -\frac{T}{c}e^{-\varphi}\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2-(\dot{X})^2(X')^2-(\dot{A}_0-A_0'-b)^2}. \tag{4.95}$$

Começando o formalismo hamiltoniano, escrevemos os momentos conjugados

$$\begin{aligned} \Pi_\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}_6}{\partial\dot{X}^\mu} = -\frac{T}{c}e^{-\varphi}\frac{(\dot{X}\cdot X')X'_\mu-(X')^2\dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2-(\dot{X})^2(X')^2-(\dot{A}_0-A_0'-b)^2}}, \\ \pi^0 &= \frac{\partial\mathcal{L}_6}{\partial\dot{A}_0} = 0, \\ \pi^1 &= \frac{\partial\mathcal{L}_6}{\partial\dot{A}_1} = \frac{T}{c}e^{-\varphi}\frac{\dot{A}_1-A_0'-b}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2-(\dot{X})^2(X')^2-(\dot{A}_0-A_0'-b)^2}}, \\ \pi_b &= \frac{\partial\mathcal{L}_6}{\partial\dot{b}} = 0, \\ \pi &= \frac{\partial\mathcal{L}_6}{\partial\dot{\varphi}} = 0, \end{aligned} \tag{4.96}$$

os quais implicam nos vínculos primários de primeira classe

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_1 &= \pi \approx 0, \\ \tilde{\psi}_2 &= \pi_b \approx 0, \\ \tilde{\psi}_3 &= \pi^0 \approx 0, \\ \tilde{\psi}_4 &= \Pi\cdot X' \approx 0, \\ \tilde{\psi}_5 &= \Pi^2+[(\pi^1)^2+\frac{T^2}{c^2}e^{-2\varphi}](X')^2 \approx 0. \end{aligned} \tag{4.97}$$

A densidade hamiltoniana total $\mathcal{H}_6^T$ pode então ser escrita como

$$\mathcal{H}_6^T = \mathcal{H}_6^c + l_1\tilde{\psi}_1 + l_2\tilde{\psi}_2 + l_3\tilde{\psi}_3 + l_4\tilde{\psi}_4 + l_5\tilde{\psi}_5, \tag{4.98}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_6^c &= \Pi\cdot\dot{X} + \pi^0\dot{A}_0 + \pi^1\dot{A}_1 + \pi_b\dot{b} + \pi\dot{b} - \mathcal{L}_6, \\ &= \pi^1(A_0'+b). \end{aligned} \tag{4.99}$$

Aqui $\pi^1 = \pi^1(\tau,\sigma)$, $A_0 = A_0(\tau,\sigma)$ e $b = b(\tau,\sigma)$.

Aplicando (4.99) e os vínculos $\tilde{\psi}$ em (4.98) a densidade de hamiltoniana total fica escrita como

$$\mathcal{H}_6^T = \pi^1(A_0' + b) + l_1\pi + l_2\Pi_b + l_3\pi^0 + l_4\Pi\cdot X' + \\ l_5[\Pi^2 + ((\pi^1)^2 + \frac{T^2}{c^2}e^{-2\varphi})(X')^2] \qquad (4.100)$$

As equações de Hamilton serão

$$\begin{aligned}
\partial_\tau X^\mu &= \frac{\partial H_6^T}{\partial \Pi^\mu} = l_4 X'^\mu + 2l_5\Pi^\mu,\\
-\partial_\tau \Pi^\mu &= \frac{\partial H_6^T}{\partial X^\mu} = -\partial_\sigma[l_4\Pi^\mu + 2l_5 X'^\mu((\pi^1)^2 + \frac{T^2}{c^2}e{-}2\varphi)],\\
\partial_\tau A_0 &= \frac{\partial H_6^T}{\partial \pi^0} = l_3,\\
-\partial_\tau \pi^0 &= \frac{\partial H_6^T}{\partial A_0} = -\pi_1',\\
\partial_\tau A_1 &= \frac{\partial H_6^T}{\partial \pi^1} = A_0' + b + 2l_5\pi^1(x')^2,\\
\partial_\tau \pi^1 &= \frac{\partial H_6^T}{\partial A_1} = 0,\\
\partial_\tau b &= \frac{\partial H_6^T}{\partial \pi_b} = l_2,\\
-\partial_\tau \pi_b &= \frac{\partial H_6^T}{\partial b} = \pi^1,\\
\partial_\tau \varphi &= \frac{\partial H_6^T}{\partial \pi} = l_1,\\
-\partial_\tau \pi &= \frac{\partial H_6^T}{\partial \varphi} = 2l_5\frac{T^2}{c^2}e^{-2\varphi}(X')^2,\\
\partial_\tau l_1 &= \frac{\partial H_6^T}{\partial p_{l_1}} = 0,\\
-\partial_\tau p_{l_1} &= \frac{\partial H_6^T}{\partial l_1} = \pi = \tilde{\psi}_1 \approx 0,\\
\partial_\tau l_2 &= \frac{\partial H_6^T}{\partial p_{l_2}} = 0,\\
-\partial_\tau p_{l_2} &= \frac{\partial H_6^T}{\partial l_2} = \pi_b = \tilde{\psi}_2 \approx 0,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\partial_\tau l_3 &= \frac{\partial H_6^T}{\partial p_{l_3}} = 0, \\
-\partial_\tau p_{l_3} &= \frac{\partial H_6^T}{\partial l_3} = \pi^0 = \tilde{\psi}_3 \approx 0, \\
\partial_\tau l_4 &= \frac{\partial H_6^T}{\partial p_{l_4}} = 0, \\
-\partial_\tau p_{l_4} &= \frac{\partial H_6^T}{\partial l_4} = \Pi \cdot X' = \tilde{\psi}_4 \approx 0, \\
\partial_\tau l_5 &= \frac{\partial H_6^T}{\partial p_{l_5}} = 0, \\
-\partial_\tau p_{l_5} &= \frac{\partial H_6^T}{\partial l_5} = \Pi^2 + [(\pi^1)^2 + \frac{T^2}{c^2} e^{-2\varphi}](X') = \tilde{\psi}_5 \approx 0. \qquad (4.101)
\end{aligned}
$$

Requerendo a conservação temporal desses vínculos primários, encontramos vínculos secundários com $\tilde{\psi}_2$

$$\tilde{\psi}_6 = \dot{\tilde{\psi}}_2 = \{\tilde{\psi}_2, H_6^T\} = \pi^1 \approx 0 \qquad (4.102)$$

e com $\tilde{\psi}_3$,

$$\tilde{\psi}_7 = \dot{\tilde{\psi}}_3 = \{\tilde{\psi}_3, H_6^T\} = \pi^{1\prime} \approx 0 \qquad (4.103)$$

Esse último sendo irrelevante por ser consequência direta de (4.102). Portanto fica válido, entre os dois vínculos secundários acima, o vínculo $\tilde{\psi}_6$. A teoria possui então seis vínculos $\tilde{\psi}_1$, $\tilde{\psi}_2$, $\tilde{\psi}_3$, $\tilde{\psi}_4$, $\tilde{\psi}_5$ e $\tilde{\psi}_6$ de primeira classe. Esses VPC proporcionam a invariâcia de calibre da teoria.

Os vínculos de calibres sendo,

$$
\begin{aligned}
\tilde{\psi}_7 &= X^2 \approx 0, \\
\tilde{\psi}_8 &= \Pi' \approx 0, \\
\tilde{\psi}_9 &= A_1 \approx 0, \\
\tilde{\psi}_{10} &= A_0 \approx 0, \\
\tilde{\psi}_{11} &= b \approx 0, \\
\tilde{\psi}_{12} &= \varphi \approx 0. \qquad (4.104)
\end{aligned}
$$

O conjunto total de vínculos da teoria então é

$$
\begin{aligned}
\tilde{\psi}_1 &= \pi \approx 0, \\
\tilde{\psi}_2 &= \pi_b \approx 0, \\
\tilde{\psi}_3 &= \pi^0 \approx 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\psi}_4 &= \Pi \cdot X' \approx 0, \\
\tilde{\psi}_5 &= \Pi^2 + ((\pi^1)^2 + \frac{T^2}{c^2}) \approx 0, \\
\tilde{\psi}_6 &= \pi^1 \approx 0, \\
\tilde{\psi}_7 &= X^2 \approx 0, \\
\tilde{\psi}_8 &= \Pi' \approx 0, \\
\tilde{\psi}_9 &= A_1 \approx 0, \\
\tilde{\psi}_{10} &= A_0 \approx 0, \\
\tilde{\psi}_{11} &= b \approx 0, \\
\tilde{\psi}_{12} &= \varphi \approx 0.
\end{aligned}
\tag{4.105}
$$

Todos VSC, conforme observamos nos parênteses de Poisson, $\tilde{\psi}_m, \tilde{\psi}_n\} \equiv \tilde{Q}_{m,n}$, abaixo,

$$
\begin{aligned}
\tilde{Q}_{1,5} &= 2\ e^{2\varphi}\ \delta(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
\tilde{Q}_{1,12} &= -\delta(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
\tilde{Q}_{2,11} &= -\delta(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
\tilde{Q}_{3,10} &= -\delta(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
\tilde{Q}_{4,7} &= -2\ X \cdot X'\ \delta(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
\tilde{Q}_{4,8} &= \Pi^\mu\ \delta(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
\tilde{Q}_{5,7} &= 4\ X \cdot \Pi\ \delta(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
\tilde{Q}_{5,8} &= 2\ X^\mu[(\pi^1)^2 + \frac{T^2}{c^2} e{-}2\varphi]\ \delta(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
\tilde{Q}_{5,9} &= -2\ (X')\pi^1\ \delta(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
\tilde{Q}_{6,9} &= -\delta(\sigma - \tilde{\sigma}), \\
\tilde{Q}_{7,8} &= 2\ X^\mu\ \delta(\sigma - \tilde{\sigma}).
\end{aligned}
\tag{4.106}
$$

onde o determinante da matriz $\tilde{Q}$ desses elementos é

$$
det\ \tilde{Q} = 16\Pi^2[\Pi \cdot X]^2[\delta(\sigma - \tilde{\sigma})]^{10}[\delta(\sigma - \tilde{\sigma})]^2. \tag{4.107}
$$

Como vemos a teoria de S_6 é bem semelhante a anterior, mas com um vínculo a mais por conta do campo dilaton. Sob essas condições a teoria pode ter equações de movimento definidas pelo método de Dirac.

Capítulo 5

Conclusão e Perspectivas Futuras

Como observamos, a teoria de cordas é uma teoria vinculada. Observamos isso nas ações de NG, BING e DBING, os quais revelaram os mesmos vínculos com o acréscimo de outros oriundos dos campos acoplados, o dilaton, o kalb-Ramond e o eletromagnético. Em cada teoria encontramos, no critério de Dirac, vínculos de primeira e com vínculos de calibre arbitrários obtemos um conjunto de vínculos de segunda classe.

Em trabalhos posteriores poderemos encontrar os parênteses de Dirac dos VSC dessas teorias para as escrevermos sob as regras de quantização de sistemas vinculados.

Apêndice A

As cinco teorias de corda

Até meados da década de noventa havia um consenso de que existiam cinco alternativas para descreverem a teoria de cordas. Hoje se sabe entretanto que essas alternativas são cinco modos diferentes de estruturar uma mesma teoria. As cinco possíveis descrições da teoria são

- **Teoria de corda bosônica**

  É a formulação da teoria que tem apenas bosons. Como não há férmions na teoria, ela não descreve a matéria. Ela inclui as cordas abertas e fechadas e precisa de 26 dimensões no espaço-tempo para sua consistência. Portanto, além de não descrever o nosso universo padrão, precisa de muitas dimensões extras

- **Teoria de corda do tipo I**

  Ela descreve bosons e férmions. As interações de partículas incluem supersimetria e grupo de simetria $SO(32)$. A teoria é válida em 10 dimensões do espaço-tempo.

- **Teoria de corda do tipo II-A**

  Essa versão da teoria inclui supersimetria, cordas fechadas e abertas. As cordas abertas estão conectadas as D-branas. Os férmions não são quirais.

- **Teoria de cordas do tipo II-B**

  É a teoria de corda do tipo II-A, mas com férmions quirais.

- **Teoria de corda heterótica**

Essa teoria tem a supersimetria e apenas cordas fechadas. Tem um grupo de calibre chanada $E_8 \times E_8$. Essa versão da teoria admite diferentes números de dimensões (10 e 26).

Apêndice B

O Princípio de Hamilton, os Formalismos Lagrangeano e Hamiltoniano e a Quantização Canônica

B.1 As Equações de Euler-Lagrange

Seja um sistema de $x_i(t)$ coordenadas independenttes. O princípio de Hamilton determina que o sistema evolui ao longo de uma trajetória $x_i(t)$ para a qual $S[(t)]$ tem um mínimo

$$\delta S[x(t)] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L[x_i(t), \dot{x}_i(t)] = 0. \tag{B.1}$$

Nessa condição, a trajetória $x_i(t)$ satizfaz as equações de Euler-Langrange

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0 \tag{B.2}$$

Definimos S como um funcional, ou seja, S associa a cada função de $x(t)$ um número indicado por $S[(t)]$:

$$S : x(t) \longrightarrow R \tag{B.3}$$

$$x(t) \longrightarrow S[(t)]. \tag{B.4}$$

Sendo $L(x_i(t), \dot{x}_i(t))$ uma função admitindo derivadas parciais contínuas até segunda ordem em todos os seus argumentos, então,

$$S[x_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(x_i(t), \dot{x}_i(t))dt \tag{B.5}$$

é um funcional.

O funcional $S[(t)]$ para a variação de $x(t)$ é

$$S[x_i(t) + \delta x_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[L(x_i(t) + \delta x_i(t), \dot{x}_i + (\dot{\delta x_i})) \right], \tag{B.6}$$

$$\begin{aligned} S[x_i(t) + \delta x_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \Bigg[& L(x_i(t), \dot{x}_i(t)) + \frac{\partial L}{\partial x_i}\delta x_i \\ & + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(\dot{\delta x_i}) + O\left((\delta x_i)^2 \right) \Bigg], \end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned} S[x_i(t) + \delta x_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \Bigg\{ & \left[\frac{\partial L}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \right] \delta x_i \\ + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i \right) & + L(x_i(t), \dot{x}_i(t)) + O\left((\delta x_i)^2 \right) \Bigg\}, \end{aligned} \tag{B.8}$$

onde $\delta x_i(t_1) = \delta x(t_2) = 0$. Então

$$\begin{aligned} S(x_i(t) + \delta x_i(t)) - S(t) = \int_{t_1}^{t_2} dt & \Bigg[\frac{\partial L}{\partial x_i} \\ - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \Bigg] & \delta x_i(t) + O\left((\delta x)^2 \right). \end{aligned} \tag{B.9}$$

Definindo

$$S(x_i + \delta x_i) - S(x_i) = \delta S + O\left((\delta x_i(t))^2 \right), \tag{B.10}$$

onde δS é a parte linear de δx_i,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \right]. \tag{B.11}$$

Através de teoremas do cálculo funcional, que não abordaremos aqui, é possível provar que para o funcional $S[x(t)]$ ter uma variação mínima, $S[x(t)] = 0$, é necessário que $x_i(t)$ satisfaça as equações

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \right) = 0, \tag{B.12}$$

para o caso das coordenadas, $x_i(t)$, independentes.

Podemos reescrever $(B.12)$, admitindo que $L = L(q_i, \dot{q}_i, q_j, \dot{q}_j)$, onde os $q_i = q_i(t)$ e $q_i' = q_i'(t)$ são coordenadas. Iniciamos com

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0, \tag{B.13}$$

onde as derivadas parciais e temporal se comutam, então

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{dL}{dt}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{B.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \tag{B.15}$$

$$\ddot{q}_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} + \dot{q}_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} + \frac{\partial L}{\partial q_j}\delta_i^j - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{B.16}$$

Mas $i \neq j$, assim,

$$\ddot{q}_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} + \dot{q}_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \tag{B.17}$$

B.2 O Formalismo Hamiltoniano

Faremos um breve resumo do formalismo hamiltoniano.

Começamos cosiderando a expressão de dL,

$$dL = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial L}{\partial q_i}d\dot{q}_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t} \tag{B.18}$$

Inserindo a definição de momento conjugado a q_i, ou seja,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \tag{B.19}$$

escrevemos $(B.18)$ como

$$dL = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i + p_i d\dot{q}_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t}. \tag{B.20}$$

Usando as equações de Euler-Lagrange em $(B.20)$ temos

$$dL = \sum_{i=1}^{N}\left(\dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t}. \tag{B.21}$$

Observe que

$$\sum_{i=1}^{N} p_i d\dot{q}_i = d\left(\sum_{i=1}^{N} p_i \dot{q}_i\right) - \sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i dp_i, \tag{B.22}$$

que introduzido em $(B.21)$ traz

$$d\left(\sum_{i=1}^{N} p_i \dot{q}_i - L\right) = \sum_{i=1}^{N} (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{B.23}$$

A quantidade

$$H = \left(\sum_{i=1}^{N} p_i \dot{q}_i - L\right) \tag{B.24}$$

é uma função de q_i, p_i, t. H é a chamada função *hamiltoniana*. Com isso podemos escrever que dH é

$$dH = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i\right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \tag{B.25}$$

Analisando as relações $(B.23)$ e $(B.25)$ vemos

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{B.26}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \tag{B.27}$$

as quais são as *Equações de Hamilton* do movimento. Como $(B.23)$ vem das equações de Euler-Lagrange, as equações de Hamilton descrevem de fato a evolução temporal do sistema.

Observamos então que o formalismo lagrangeano é desenvolvido no *espaço de configurações*, um espaço de N coordenadas generalizadas. As equações de Euler-Lagrange nos dizem que a evolução temporal do sistema é dada por N equações diferenciais de segunda ordem. O formalismo hamiltoniano está desenvolvido no espaço de $2N$-dimensional, onde existem N q_i's e N p_i's coordenadas. É o chamado *espaço de fase*. O sistema evolui em $2N$ equações diferenciais de primeira ordem, as equações de Hamilton.

O formalismo hamiltoniano tem um papel importante na transição da mecânica clássica para a mecânica quântica, no tocante a quantização canônica. É o que vamos conferir a seguir.

A evolução temporal de uma certa quantidade dinâmica $A(q_i, \dot{q}_i)$, definida no espaço de fase, é

$$\frac{dA}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i}\right) + \frac{\partial A}{\partial t}. \tag{B.28}$$

Com o uso das equações de Hamilton obtemos

$$\frac{dA}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial A}{\partial t}, \tag{B.29}$$

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}, \tag{B.30}$$

onde

$$\{A, H\} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \tag{B.31}$$

é conhecido como *parênteses de Poisson* entre A e H.

Com essa definição, podemos escrever que uma variável dinâmica F como

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i, \tag{B.32}$$

que no uso das equações de Hamilton se torna

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}, \tag{B.33}$$

$$\dot{F} = \{F, H\} \tag{B.34}$$

ou seja, as equações $(B.26)$ e $(B.27)$ podem ser escritas como

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \tag{B.35}$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\}. \tag{B.36}$$

Como veremos na próxima seção, uma regra de quantização pode ser construída mediante a relação $(B.30)$ com outra que define a evolução temporal de um operador quântico.

B.3 Fundamentos da Quantização Canônica

Na Mecânica Quântica (MQ), obtemos informações de uma partícula através de seu estado quântico $\psi(\vec{r}, t)$, que é um vetor de um espaço vetorial especial chamado Espaço de Hilbert. As informações físicas reais dessa partícula são representados pelos obejetos matemáticos chamados operadores $\hat{A}$ que operam no espaço vetorial de ψ

$$A\psi = a\psi, \tag{B.37}$$

onde a é a informação da medida de uma grandeza física.

A equação de estado quântico ψ de uma partícula de massa m é,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\psi(\vec{r},t) + V(\vec{r})\psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t), \tag{B.38}$$

a chamada Equação de Schrödinger [Erwin Schrodinger (1887-1961)].

Para sistemas conservativos,

$$\hat{H}\psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t), \tag{B.39}$$

onde $\hat{H}$ é o operador hamiltoniano do sistema conservativo,

$$\hat{H} \equiv -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \hat{V}(\vec{r}). \tag{B.40}$$

Podemos, a partir de $(B.32)$ e $(B.34)$, obter como o operador $\hat{A}$ evolui com o tempo.

Derivando $(B.32)$ em relação ao tempo,

$$\frac{d}{dt}(\hat{A}\psi) = \frac{d}{dt}(a\psi), \tag{B.41}$$

$$\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\psi + \hat{A}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{da}{dt}\psi + a\frac{\partial\psi}{\partial t}, \tag{B.42}$$

onde usando $(B.34)$ temos

$$\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\psi + \frac{\hat{A}}{i\hbar}\hat{H}\psi = \frac{da}{dt}\psi + \frac{a}{i\hbar}\hat{H}\psi, \tag{B.43}$$

$$\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\psi + \frac{1}{i\hbar}(\hat{A}\hat{H}\psi - \hat{H}a\psi) = \frac{da}{dt}\psi, \tag{B.44}$$

ou, usando $(B.32)$,

$$\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\psi + \frac{1}{i\hbar}(\hat{A}\hat{H}\psi - \hat{H}A\psi) = \frac{da}{dt}\psi, \tag{B.45}$$

$$\frac{\partial \hat{A}}{\partial t}\psi + \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{H}]\psi = \frac{da}{dt}\psi, \tag{B.46}$$

considerando que da/dt deve ser decorrente da atuação do operador $d\hat{A}/dt$ sobre ψ, podemos concluir que a evolução temporal do operador $\hat{A}$ é

$$\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{H}] = \frac{d\hat{A}}{dt}. \tag{B.47}$$

Como adiantamos acima, as relações $(B.42)$ e $(B.30)$ sugerem que as relações quânticas devam ser obtidas das análogas clássicas por substituições do tipo

$$\{A, B\} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{B}], \tag{B.48}$$

onde $\{A, B\}$ está definido como em $(B.31)$.

A analogia acima é suportada por dois resultados. O primeiro é que os parênteses fundamentais de Poisson

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \tag{B.49}$$

$$\{q_i, q_j\} = 0, \tag{B.50}$$

$$\{p_i, p_j\} = 0, \tag{B.51}$$

que possuem os análogos entre os operadores $\hat{x}$ e $\hat{p}$. O segundo se refere às expressões algébricas envolvendo parênteses de Poisson, semelhante ao caso dos comutadores:

$$\{A, B\} = -\{B, A\}, \tag{B.52}$$

$$\{A + B, C\} = \{A, C\} + \{B, C\}, \tag{B.53}$$

$$\{A, \{B, C\}\} + \{C, \{A, B\}\} + \{B, \{C, A\}\} = 0. \tag{B.54}$$

Essas regras de quantização canônica estão válidas para sistemas sem vínculos.

Apêndice C

Elementos de Sistemas Vinculados. Tratamento de Dirac

C.1 Vínculos

Os vínculos são limitações impostas a um sistema físico de modo que as posições e os movimentos de seus constituintes tem limites. Um sistema então será vinculado quando algumas de suas variáveis forem dependentes de outras variáveis desse sistema.

Os vínculos estão determinados de várias maneiras, mas podemos de início classificá-los em vínculos holônomos e não-holônomos. Dado um sistema vinculado com $q_1, q_2, q_3...q_N$ variáveis (coordenadas generalizadas), se os vínculos forem holônomos, poderão ser expressos na forma

$$f(q_1, q_2, q_3...q_N, t) = 0 \tag{C.1}$$

onde t é o tempo.

O método para se livrar dos vínculos é direto nesse caso. Usa-se a equação (C.1) para eliminar as variáveis dependentes. E as equações de movimento serão então independentes.

Se não se apresentarem como $(C.1)$ serão conhecidos como vínculos não-holônomos. Estes terão um tratamento especial quando for o caso.

C.1.1 Os Vínculos Primários e Secundários

Para estudarmos sistemas vinculados é conveniente iniciarmos o estudo a partir do princípio da mínima ação no fomalismo lagrangeano. Em seguida transferiremos a análise do sistema para o formalismo hamiltoniano, a fim de obtermos todos os seus vínculos e ainda nesse formalismo estudaremos a técnica de Dirac para encontrar equações de sistemas vinculados.

As equações clássicas de movimento poderão ser encontradas a partir do princípio de hamilton na ação

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t))dt \tag{C.2}$$

onde $L(q_i(t), \dot{q}_i(t))$ é a lagrangeana do sistema, $i = 1, 2, 3, ..., N$ e $\dot{q}_i \equiv dq_i(t)/dt$.

A condição do princípio de hamilton sobre $(C.2)$ são as equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{C.3}$$

as quais podem ser escritas como

$$\ddot{q}_i \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} + \dot{q}_i \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0. \tag{C.4}$$

Em $(C.4)$, observamos que as acelerações poderão ser unicamente determinadas se a matriz $\partial^2 L/\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j$ for inversível, ou seja, se

$$det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i}\right) \tag{C.5}$$

não for nula. Nesse caso as equações de movimento serão unicamente obtidas.

Caso $(C.5)$ tenha o determinante nulo, as acelerações não serão unicamente determinadas e as equações de movimento serão funções arbitrárias do tempo. Abordaremos esse caso ao longo do capítulo.

O primeiro passo para o formalismo hamiltoniano é definir o momento canônico da teoria

$$p_i(t) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(q_i \dot{q}_i). \tag{C.6}$$

No caso do determinante $(C.5)$ ser nulo, vemos em $(C.6)$ que não é possível obter relações inversas das velocidades $\dot{q}_i(t)$ como funções únicas dos $p_i(t)$. Os momenta portanto não serão todos independentes, antes alguns deles estarão em relações de **vínculos** como

$$\phi_m = \phi_m(q, p), \tag{C.7}$$

onde $m = 1, 2, 3, ..., M$. Teríamos, a princípio, M relações de vínculos em N coordenadas generalizadas, onde $M \leq N$. Esses vínculos, obtidos diretamente de

$(C.6)$, são os chamados **vínculos primários** (VP) do sistema. Os VP estarão inseridos nas equações de movimento através do formalismo hamiltoniano.

Introduzimos então a hamiltoniana canônica como

$$H_c = \dot{q}_i p^i - L, \tag{C.8}$$

a qual, de fato, mostra H_c como uma função de p^i e q_i, veja que,

$$\delta H_c = \dot{q}_i \delta p^i + p^i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i, \tag{C.9}$$

mas com a definição $(C.6)$, δH_c fica

$$\delta H_c = \dot{q}_i \delta p^i - \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i. \tag{C.10}$$

Os VP são inseridos na hamiltoniana como

$$H = H_c + u^m \phi_m, \tag{C.11}$$

onde H_c é a hamiltoniana canônica de um sistema sem vínculo. As funções $u^m = u^m(q,p)$ têm o nome de multiplicadores de Lagrange. As funções $u(q,p)$ surgem da necessidade de definirmos a transformação de Lengendre do espaço-$(q,\dot{q})$ para a superfície $\phi(q,p) = 0$ do espaço-(q,p,u) como

$$\begin{aligned} q_i &= q_i, & \text{(C.12)}\\ p^i &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(q,\dot{q}), & \text{(C.13)}\\ u^m &= u^m(q,\dot{q}). & \text{(C.14)} \end{aligned}$$

Usando o princípio variacional na hamiltoniana $(C.11)$, aplicando o resultado$(C.8)$,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}_i p_i - H) = 0, \tag{C.15}$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}_i p_i - H_c - u^m \phi_m) = 0, \tag{C.16}$$

encontramos as equações de movimento

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} & \text{(C.17)}\\ \dot{p}_i &= \frac{\partial H_c}{\partial q_i} - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i}, & \text{(C.18)}\\ \phi_m &= \phi_m(q,p). & \text{(C.19)} \end{aligned}$$

De modo geral, as equações $(C.17)$ e $(C.18)$ podem ser escritas como (Apêndice B)

$$\dot{F} = \{F, H_c\} + u^m \{F, \phi_m\}. \tag{C.20}$$

onde F é uma variável dinâmica qualquer e as chaves $\{\ ,\ \}$ representam os parênteses de Poisson em relação às variáveis canônicas q_i e p_i,

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}. \tag{C.21}$$

Podemos examinar uma consequência das equações $(C.20)$. Por consistência, os vínculos primários devem ser fixos em relação ao tempo. Logo, escrevendo $(C.20)$ com ϕ_m no lugar de F, temos

$$\dot{\phi}_m = 0, \tag{C.22}$$

e a condição de consistência implica

$$\{\phi_m, H_c\} + u^{m'} \{\phi_m, \phi_{m'}\} = 0. \tag{C.23}$$

Se $\{\phi_m, \phi_{m'}\} \neq 0$, encontramos relações independentes dos $u_m(q,p)$'s envolvendo os p's e os q's. Se $\{\phi_m, \phi_{m'}\} = 0$, podemos encontrar relações entre p e q que confirmem os VP. E se não forem encontrados novos vínculos após o uso da consistência em todos os VP, esgota-se a busca. Mas quando as relações encontradas ficam independentes dos VP, elas se configuram como novos vínculos do sistema, os **vínculos secundários**, (VS).

A consistência é aplicada também aos novos vínculos. E continuamos nessa tarefa até encontrarmos somente relações para os $u^m(q,p)$'s. Classificando os VS como ϕ_r, temos

$$\phi_r = 0, \qquad r = M+1, ..., M+R, \tag{C.24}$$

onde R é o número total de VS. Essa classificação se justifica uma vez que a diferença entre os VP e VS se resume tão somente nas suas origens. Convencionamos então que os VP e VS sejam classificados como

$$\phi_s = 0, \qquad s = 1, ..., M+R = S. \tag{C.25}$$

Podemos a partir daqui adotar uma nova igualdade para $(C.25)$,

$$\phi_s \approx 0, \tag{C.26}$$

onde "$\approx$"é chamada de "igualdade fraca". Isso é necessário por considerar que os parênteses de Poisson entre algumas variáveis dinâmicas e ϕ_s não serem idênticamente nulas. Esse símbolo para a igualdade deixa indício de que existe inconsistência para uma quantização canônica de sistemas vinculados.

A hamiltoniana (C.11) será reescrita como

$$H_T \approx H_c + u^s \phi_s, \tag{C.27}$$

a chamada **hamiltoniana total**, H_T. Em termos da H_T, as equações de movimento são lidas como

$$\dot{F} \approx \{F, H_T\}. \tag{C.28}$$

Como já dissemos, a distinção entre VP e VS não tem importância física. Uma outra classificação de vínculos é mais útil na determinação do perfil de um sistema vinculado: os vínculos de primeira classe e os vínculos de segunda classe.

C.1.2 Vínculos de Primeira e Segunda Classe

Um vínculo $Q(p,q) \approx 0$ será de primeira classe (VPC) quando seu parêntese de Poisson com todos os vínculos da teoria for fracamente zero,

$$\{Q, \phi_j\} \approx 0, \qquad j = 1, ..., J. \tag{C.29}$$

Em caso contrário, o vínculo será de segunda classe (VSC). Então o vínculo $Q(q,p) \approx 0$ é VSC se existir ao menos um vínculo da teoria tal que os parênteses de Poisson não sejam fracamente zero com $Q(q,p) \approx 0$.

Os VPC são geradores de tranformações de calibre. Uma transformação de calibre é aquela que conserva as variáveis dinâmicas de um sistema através de mudança abitrária seu referencial ao longo do tempo. Uma consenquência disso é que as equações de movimento de um sistema vinculado serão arbitrárias no tempo, desde que tenha VPC.

C.2 Os Parenteses de Dirac

Os parênteses de Dirac são usados para o tratamento dos VSC's. Dados duas variáveis dinâmicas quaisquer A e B, os parênteses de Dirac entre elas serão

$$\{A, B\}^* = \{A, B\} - \{A, \chi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \{\chi_\beta, B\} \tag{C.30}$$

onde os vínculos χ_α são VSC e a matriz $C^{\alpha\beta}$ é a inversa da matriz $C_{\alpha\beta} = \{\chi_\alpha, \chi_\beta\}$. Pode-se demonstrar que o parênteses de Dirac entre um VPC, ϕ_j, e uma variável dinâmica é igual ao correspondente parenteses de Poisson dessas quantidades, veja,

$$\{\phi_j, B\}^* = \{\phi_j, B\} - \{\phi_j, \chi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \{\chi_\beta, B\}$$

mas $\{\phi_j, \chi_\alpha\} = 0$ e assim,

$$\{\phi_j, B\}^* = \{\phi_j, B\}.$$

Se tomarmos um VSC, χ_μ, demonstra-se que

$$\{\chi_\mu, B\}^* = \{\chi_\mu, B\} - \{\chi_\mu, \chi_\alpha\}C^{\alpha\beta}\{\chi_\beta, B\}$$

$$\{\chi_\mu, B\}^* = \{\chi_\mu, B\} - C_{\mu\alpha}C^{\alpha\beta}\{\chi_\beta, B\}$$

$$\{\chi_\mu, B\}^* = \{\chi_\mu, B\} - \delta_\mu^\beta\{\chi_\beta, B\}$$

onde usamos que $C_{\mu\alpha}C^{\alpha\beta} = \delta_\mu^\beta$, logo

$$\{\chi_\mu, B\}^* = \{\chi_\mu, B\} - \{\chi_\mu, B\} \tag{C.31}$$

$$\{\chi_\mu, B\}^* = 0, \tag{C.32}$$

para qualquer variável dinâmica B da teoria. Com esses parênteses então pode-se descrever qualquer equação de movimento de um sistema vinculado, seja com VPC ou com VSC. Assim os VSC podem ser tomados em suas igualdades fortes, ou seja,

$$\chi_\mu = 0, \tag{C.33}$$

e estas se tornam meras identidades que expressam algumas variáveis conônicas em termos de outras.

C.2.1 Fixação de Calibre

Vimos até aqui que um sistema mecânico vinculado pode ter VPC e VSC. Com os VPC, a teoria do sistema manifesta invariância de calibre, o que confere equações de movimento com funções arbitrárias do tempo. A presença dessas funções nos diz que nem todas as variáveis da teoria são realmente físicas. Essa arbitrariedade é removida pela fixação de calibre. Isso é feito escolhendo-se uma superfície de vínculos $E_b \approx 0$ tais que essa quantidade seja igual ao número de VPC, $\phi_j \approx 0$ da teoria e que garanta

$$det\{E_b, \phi_j\} \neq 0. \tag{C.34}$$

A condição acima expressa que os vínculos ϕ_j, E_b formam juntos um conjunto de VSC.

Assim, não resta VPC na teoria, o que garante equações não arbitrárias para o sistema vinculado.

A seguir, apresentamos exemplos de teorias vinculadas nos quias encontramos os vínculos primários e fixamos os calibres. São os casos da Partícula Relativística Livre e da Corda Bosônica Livre.

C.3 As Equações de Hamilton do Sistema Vinculado

Começamos com a mínima ação

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt L = 0. \tag{C.35}$$

Em função da hamiltoniana,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt (p_i \dot{q}_i - H) = 0, \qquad i = 1, ..., N. \tag{C.36}$$

Mas, $H = H_c - \lambda_a \phi_a$, então

$$\int_{t_1}^{t_2} (p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i - \delta H_c - \lambda_a \delta \phi_a) \approx 0, \tag{C.37}$$

onde $a = 1, ..., M$. Seguindo então,

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left(-\dot{p}_i \delta q_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H_c}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i} \delta p_i - \lambda_a \frac{\partial \phi_a}{\partial q_i} \delta q_i \right.$$
$$\left. - \lambda_a \frac{\partial \phi_a}{\partial p_i} \delta p_i \right) \approx 0. \tag{C.38}$$

Com garantia de teorema, podemos então escrever as equações de Hamilton do sistema vinculado como

$$\dot{p}_i \approx -\frac{\partial H_c}{\partial q_i} + \lambda_a \frac{\partial \phi_a}{\partial q_i} \tag{C.39}$$

$$\dot{q}_i \approx \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda_a \frac{\partial \phi_a}{\partial p_i}. \tag{C.40}$$

Apêndice D

As Invariâncias das Ações da PRL, de NG e BING

Por definição uma ação é um funcional que atribui várias funções que podem descrever uma trajetória de movimento a um número. Dentre as trajetórias possíveis no espaco-tempo, a que implicar na mínima ação será a linha de mundo da partícula. Essa trajetória tem a mesma interpretação para todos os observadores inerciais, todos determinarão o mesma intervalo $d\tau = ds/c$ entre dois eventos dessa trajetória, onde

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dX^{1^2} + dX^{2^2} + dX^{3^2} \tag{D.1}$$

ou

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dX^\mu dX^\nu. \tag{D.2}$$

Por isso é conveniente que a ação seja proporcional a ds,

$$S = \alpha \int ds, \tag{D.3}$$

$$S = c\alpha \int d\tau. \tag{D.4}$$

Uma ação tem a dimensão de energia-tempo

$$[S] = M\frac{L^2}{T^2}T = \frac{ML^2}{T}. \tag{D.5}$$

Considerando que a dimensão de τ é de tempo, α tem dimensão de ML/T, velocidade vezes massa. A massa é a da própria partícula e a velocidade é c, velocidade da luz, implicando em $\alpha = mc$. Consideramos c porque ela é invariante às transformações de Ponicaré.

Portanto, a ação da PRL de massa m pode ser, com o uso de $(D.5)$

$$S = mc\int ds. \tag{D.6}$$

Usando $(D.2)$ nessa ação vemos

$$S = mc\int \sqrt{\eta_{\mu\nu}dX^{\mu}dX^{\nu}}. \tag{D.7}$$

Aplicando a integral sobre um itervalo de tempo $[\tau_i, \tau_f]$

$$S = mc\int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{\eta_{\mu\nu}\dot{X}^{\mu}\dot{X}^{\nu}}d\tau. \tag{D.8}$$

onde queríamos chegar.

D.1 A Invariância por Reparametrização na Ação da PRL

Seja a ação

$$\tilde{S} = mc\int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{\dot{X}^{\mu}\dot{X}_{\mu}}d\tilde{\tau}. \tag{D.9}$$

Escrevendo explícitamente,

$$\tilde{S} = mc\int \sqrt{\left(\frac{dX^{\mu}}{d\tilde{\tau}}\frac{dX_{\mu}}{d\tilde{\tau}}\right)}d\tilde{\tau} \tag{D.10}$$

$$\tilde{S} = mc\int \sqrt{\left(\frac{dX^{\mu}}{d\tilde{\tau}}\frac{d\tau}{\tilde{\tau}}\frac{dX_{\mu}}{d\tilde{\tau}}\frac{d\tau}{d\tilde{\tau}}\right)}\frac{d\tilde{\tau}}{d\tau}d\tau, \tag{D.11}$$

$$\tilde{S} = mc\int \sqrt{\left[\frac{dX^{\mu}}{d\tilde{\tau}}\frac{dX_{\mu}}{d\tilde{\tau}}\left(\frac{d\tau}{d\tilde{\tau}}\right)^{2}\right]}\frac{d\tilde{\tau}}{d\tau}d\tau, \tag{D.12}$$

$$\tilde{S} = mc\int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{dX^{\mu}}{d\tau}\frac{dX^{\nu}}{d\tau}}d\tau. \tag{D.13}$$

$$\tilde{S} = S. \tag{D.14}$$

D.2 A Invariância de Poincaré na Ação da PRL

A transformação de Poincaré é

$$X'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} X^{\nu} + b^{\mu} \tag{D.15}$$

onde Λ^{μ}_{ν} é a matriz de transformação de Lorentz e b^{μ} uma constante de translação.

Vamos mostrar primeiramente a invariâcia de Lorentz,

$$\tilde{S} = mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{\eta_{\mu\nu} \dot{\tilde{X}}^{\mu} \dot{\tilde{X}}^{\nu}} d\tau. \tag{D.16}$$

$$\tilde{S} = mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{\dot{\tilde{X}}_{\nu} \dot{\tilde{X}}^{\nu}} d\tau, \tag{D.17}$$

$$\tilde{S} = mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{\left(\Lambda_{\nu}{}^{\lambda} \dot{X}_{\lambda}\right) \left(\Lambda^{\nu}{}_{\rho} \dot{X}^{\rho}\right)} d\tau, \tag{D.18}$$

$$\tilde{S} = mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{\Lambda_{\nu}{}^{\lambda} \Lambda^{\nu}{}_{\rho} \dot{X}_{\lambda} \dot{X}^{\rho}} d\tau, \tag{D.19}$$

o que implica em

$$\tilde{S} = mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{\delta^{\lambda}{}_{\rho} \dot{X}_{\lambda} \dot{X}^{\rho}} d\tau, \tag{D.20}$$

$$\tilde{S} = mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{\dot{X}_{\rho} \dot{X}^{\rho}} d\tau = S. \tag{D.21}$$

ou seja, a ação da PRL é invariante pelas transformações de Lorentz.

A translação fica diretamente demonstrada, uma vez que a ação depende de derivadas de X^{μ}.

D.3 A invariância por reparametrização da ação de NG

A partir da equação (4.1) podemos ver isso rapidamente,

$$\begin{aligned} S_1 &= -\frac{T}{c} \int d^2\sigma \sqrt{-det(\partial_{\alpha} X^{\mu} \partial_{\beta} X_{\mu})}, \\ &= -\frac{T}{c} \int d^2\sigma \sqrt{-det(\frac{\partial \tilde{\sigma}^{\lambda}}{\partial \sigma^{\alpha}} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \tilde{\sigma}^{\lambda}} \frac{\partial \tilde{\sigma}^{\gamma}}{\partial \sigma^{\beta}} \frac{\partial X_{\mu}}{\partial \tilde{\sigma}^{\gamma}})}, \\ &= -\frac{T}{c} \int d^2\sigma \left|\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \sigma}\right| \sqrt{-det(\tilde{\partial}_{\lambda} X^{\mu} \tilde{\partial}_{\gamma} X_{\mu})}, \end{aligned}$$

mas

$$d^2\sigma = \left|\frac{\partial\sigma}{\partial\tilde{\sigma}}\right| d^2\tilde{\sigma},$$

então

$$\begin{aligned} S_1 &= -\frac{T}{c}\int d^2\tilde{\sigma}\sqrt{-det(\tilde{\partial}_\lambda X^\mu \tilde{\partial}_\beta X_\mu)}, \\ S_1 &= \tilde{S}_1. \end{aligned}$$

É também direto verificar a invariância de Lorentz da ação de NG.

D.4 A invariância por reparametrização de BING

Basta iniciarmos de sua lagrangeana $\mathcal{L}_3$, em (4.51)

$$\mathcal{L}_3 = \sqrt{-det(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu) + \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha}.$$

O primeiro termo da raíz se transforma como na ação de NG. O termo do campo de calibre sofre a transformação sob a condição de

$$A_\alpha = \frac{\partial\sigma^\lambda}{\partial\tilde{\sigma}^\alpha} A_\lambda. \tag{D.22}$$

Portanto, fica direto observar que a langrangeana se transforma como

$$\mathcal{L}_3 = \left|\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial\sigma}\right| \tilde{\mathcal{L}}_3, \tag{D.23}$$

e com a transformação de $d^2\sigma$ a ação S_3 fica invariante por reparamentrição.

Apêndice E

A Invariância por Reparametrização de uma Ação Geral

Com a intenção de demonstrar a invariâcia por reparametrização da ação de NG, verificamos a invariância por reparametrização das ações de um modo geral.

Seja uma ação geral dada por

$$S = \int d^n\lambda \;\; \mathcal{L}\left[\phi(\lambda), \frac{\partial}{\partial\lambda}\phi(\lambda)\right] \tag{E.1}$$

onde $\phi(\lambda)$ é um escalar que está definido num espaço de n parâmetros, λ^ν, $(\nu = 1, ..., n)$.

Uma transformação infinitesimal de reparametrização será representada como

$$\delta S = \int d^n\lambda \;\; \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\phi}(\tilde{\lambda}), \tilde{\partial}_\nu\tilde{\phi}(\tilde{\lambda})) - \int d^n\lambda \;\; \mathcal{L}(\phi(\lambda), \partial_\nu\phi(\lambda)), \tag{E.2}$$

onde

$$\tilde{\lambda}_\alpha = \lambda_\alpha + \epsilon_\alpha. \tag{E.3}$$

E para escrever $d^n\tilde{\lambda}$ em termos de $d^n\lambda$, temos do teorema do cálculo que

$$d^n\tilde{\lambda}_\alpha = det\left(\frac{\partial\tilde{\lambda}_\beta}{\partial\lambda_\gamma}\right) d^n\lambda_\alpha, \tag{E.4}$$

$$d^n\tilde{\lambda}_\alpha = det\left(\delta^\gamma_\beta + \partial^\gamma\epsilon_\beta\right) d^n\lambda_\alpha \tag{E.5}$$

$$d^n\tilde{\lambda}_\alpha \simeq (1 + \partial^\beta\epsilon_\beta) d^n\lambda_\alpha. \tag{E.6}$$

Colocando em $(D.5)$, encontramos

$$\delta S = \int d^n\lambda \;\; (\tilde{\mathcal{L}} - \mathcal{L} + \partial^\alpha \epsilon_\alpha \tilde{\mathcal{L}}) \tag{E.7}$$

$$\delta S = \int d^n\lambda \;\; (\delta L + \partial^\alpha \epsilon_\alpha \tilde{L}). \tag{E.8}$$

O cálculo do primeiro termo, δL, fica

$$\delta L = \tilde{L}(\tilde{\phi}(\lambda), \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\phi}(\tilde{\lambda})) - L(\phi(\lambda), \partial_\alpha \phi(\lambda)) \tag{E.9}$$

mas a forma da função L não varia na transformação de reparametrização, essa função é escalar, então $\tilde{L} \equiv L$ e

$$\delta L = L(\tilde{\phi}(\lambda), \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\phi}(\tilde{\lambda})) - L(\phi(\lambda), \partial_\alpha \phi(\lambda)) \tag{E.10}$$

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \phi}(\tilde{\phi}(\tilde{\lambda}) - \phi(\lambda)) + \frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha \phi)} L(\tilde{\partial}_\alpha \tilde{\phi}(\lambda) - \partial_\alpha \phi(\lambda)) \tag{E.11}$$

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha \phi)}\delta(\partial_\alpha \phi) \tag{E.12}$$

mas ϕ é escalar também, logo

$$\tilde{\phi}(\tilde{\lambda}) = \phi(\lambda) \tag{E.13}$$

assim,

$$\delta\phi = \tilde{\phi}(\tilde{\lambda}) - \phi(\lambda) = 0 \tag{E.14}$$

$$\delta(\partial_\alpha \phi) = \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\phi}(\tilde{\lambda}) - \frac{\partial}{\partial \lambda_\alpha}\phi(\lambda) \tag{E.15}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}^\alpha}\phi(\lambda) - \frac{\partial}{\partial \lambda_\alpha}\phi(\lambda) \tag{E.16}$$

$$= \frac{\partial \lambda^\beta}{\partial \tilde{\lambda}^\alpha}\; \frac{\partial}{\partial \lambda^\beta}\phi(\lambda) - \frac{\partial}{\partial \lambda}\phi(\lambda) \tag{E.17}$$

$$= \left(\delta_\alpha^\beta - \frac{\partial \epsilon}{\partial \lambda_\alpha}\right)\; \frac{\partial}{\partial \lambda_\beta}\phi(\lambda) - \frac{\partial}{\partial \lambda_\alpha}\phi(\lambda) \tag{E.18}$$

e

$$\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial\lambda^\alpha}\right) = -\frac{\partial\epsilon^\beta}{\partial\lambda^\alpha}\ \frac{\partial}{\partial\lambda^\beta}\phi(\lambda) \tag{E.19}$$

Utilizando os resultados $(E.12)$, $(E.14)$ e $(E.18)$ temos

$$\delta L = -\frac{\partial\epsilon^\beta}{\partial\lambda^\alpha}\ \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\phi)}\ \frac{\partial\phi}{\partial\lambda^\beta}, \tag{E.20}$$

o que implica em $(E.3)$ ser

$$\delta S = \int d^n\lambda\ \ \left(-\frac{\partial\epsilon^\beta}{\partial\lambda^\alpha}\ \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha\phi)}\ \frac{\partial\phi}{\partial\lambda_\beta} + \frac{\partial\epsilon^\alpha}{\partial\lambda_\alpha}L\right). \tag{E.21}$$

Assim, a invariância por reparametrização determina que

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{\partial\epsilon}{\partial\lambda^\alpha}\mathcal{L} - \frac{\partial\epsilon}{\partial\lambda^\alpha}\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\lambda^\alpha\phi)}\ \frac{\partial\phi}{\partial\lambda_\beta} \tag{E.22}$$

seja zero para $\delta S = 0$.

Apêndice F

A ação de Polyakov e a sua equivalência com a Ação de Nambu-Goto

Apresentamos nesse apêndice a ação da corda bosônica por Polyakov, equivalente à ação de NG. Falamos também de suas invariâncias. Em seguida verificamos a equivalência entre as ações.

F.1 A ação de Polyakov e sua invariâncias

Uma ação alternativa e mais conveniente do que a de NG, para se trabalhar com a teoria de cordas, é a *ação de Polyakov.* Embora muito conhecida como ação de Polyakov, ela foi introduzida primeiramente por S.Deser e B.Zumino e independentemente por L.Brink, P.Di Vecchia e P.S.Howe (em Physics Letters B65, pgs 369 e 471 respectivamente). Alexander Polyakov a usou para quantizar a teoria de cordas (em Physics Letters B103 (1981)207).

A ação é escrita como

$$S_p = -\frac{T}{2}\int d\tau d\sigma \sqrt{-g} g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu}, \tag{F.1}$$

onde $g_{\alpha\beta}$ é uma métrica da superfície de mundo da corda que se move no espaço-tempo de Minkowski e $g^{\alpha\beta}$ sua inversa. Aqui $\sqrt{-g}$ é a raíz quadrada do valor do determinante de $g_{\alpha\beta}$.

A ação de Polyakov tem três simetrias: a invariância por reparametrização, a invariância por transformação de Poincaré e a invariância de escala ou de Weyl.

A invariância por reparametrização já foi demonstrada no apêndice anterior. Podemos porém expressá-la nessa ação. Desde que

$$\tilde{g}_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}'} = \frac{\partial\xi^{\tilde{\alpha}}}{\partial\xi^\lambda}\frac{\partial\xi^{\tilde{\beta}}}{\partial\xi^\gamma} g_{\lambda\gamma} \tag{F.2}$$

e

$$\tilde{X}^\mu(\tilde{\tau},\tilde{\sigma}) = X^\mu(\tau,\sigma), \tag{F.3}$$

a invariância se mantêm. Observando também que de $(F.2)$

$$g' = Jg \tag{F.4}$$

onde $J = \frac{\partial \xi^{\tilde{\alpha}}}{\partial \xi^\lambda}$ e g=det $g_{\alpha\beta}$ e do cálculo é possível demonstrar que

$$d\tilde{\tau}d\tilde{\sigma} = J^{-1}d\tau d\sigma. \tag{F.5}$$

As quntidades $\sqrt{-g}\ d\tau d\sigma$ e $g^{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu$ serão, então, invariantes as reparametrizações $(\tilde{\tau},\tilde{\sigma}) \to (\tau,\sigma)$. O que mostra a simetria de S_p nos parâmetros.

A seguir, escrevemos a invariância de Lorentz da ação de Polyakov. A transformação de Lorentz, e sua forma infinitesimal, fica

$$\delta X^\mu = a^\mu{}_\nu X^\nu + b^\mu, \tag{F.6}$$

onde b^μ é constante e $a_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho}\ a^\rho{}_\nu$ é antissimétrico e constante. Sob essa tranforamção, $\delta g_{\alpha\beta} = 0$.

Verificamos a invariância da ação mediante a lagrangeana da ação, L_p, omitindo a tensão e o termo $\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}$,

$$\begin{aligned}
L_p &= -\frac{1}{2}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta \partial X^\nu \eta_{\mu\nu},\\
\delta L_p &= -\partial_\alpha \delta X^\mu \partial_\beta \partial\delta X^\nu \eta_{\mu\nu} - \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta \partial \delta X^\nu \eta_{\mu\nu},\\
&= -\partial_\alpha (a^\mu{}_\lambda X^\lambda)\partial_\beta \partial X^\nu \eta_{\mu\nu} - \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta \partial (a^\nu{}_\lambda X^\lambda)\eta_{\mu\nu},\\
&= -a_{\nu\lambda}\partial_\alpha X^\lambda \partial_\beta \partial X^\nu - a_{\mu\lambda}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta \partial X^\lambda,\\
&= -a_{\mu\lambda}\partial_\alpha X^\lambda \partial_\beta \partial X^\mu - a_{\mu\lambda}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta \partial X^\lambda,\\
&= -a_{\mu\lambda}\partial_\alpha X^\lambda \partial_\beta \partial X^\mu - a_{\lambda\mu}\partial_\alpha X^\lambda \partial_\beta \partial X^\mu,\\
&= 0.
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos a antissimetria de $a_{\mu\nu}$.

A transformação de Weyl, tem a seguinte forma,

$$g^{\alpha\beta} = e^{\omega(\tau,\sigma)}g^{\alpha\beta} \tag{F.7}$$

onde $\omega(\tau, sigma)$ é um escalar. Usando os resultados

$$det(AB) = detA\ detB \tag{F.8}$$

$$det(\alpha A) = det(\alpha I_n A) = \alpha^n detA \tag{F.9}$$

para o espaço de duas dimensões, vemos que

$$\begin{aligned} g &= detg^{\alpha\beta} = det(e^{\omega(\tau,\sigma)}g^{\alpha\beta}), && \text{(F.10)} \\ g &= e^{2\omega}detg^{\alpha\beta}, && \text{(F.11)} \\ g &= e^{2\omega}g. && \text{(F.12)} \end{aligned}$$

o que significa

$$\sqrt{-g}g^{\alpha\beta} \to \sqrt{-e^{2\omega}g}e^{-\omega}g^{\alpha\beta} = \sqrt{-g}g^{\alpha\beta}. \qquad \text{(F.13)}$$

Por isso a ação de Polyakov é invariante para as transformações de Weyl.

F.2 A equivalência entre as ações de Polyakov e Nambu-Goto

Para demonstrarmos a equivalência entre a ações de Polyakov e NG, consideramos a variação da ação de Polyakov em relação ao tensor métrico da superfície de mundo.

Seja então a ação de Polyakov,

$$S = -\frac{T}{2}\int d\tau d\sigma \sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu} \qquad \text{(F.14)}$$

onde $\partial_\alpha \equiv \partial/\partial\xi^\alpha$, $\alpha = 0, 1$.

Então,

$$\begin{aligned} \delta S = -\frac{T}{2}\int d\tau d\sigma \left[-\frac{g^{\alpha\beta}}{2}(-g)^{-1/2}\delta g + (-g)^{1/2}\delta g^{\alpha\beta}\right] \\ \times\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu, \end{aligned} \qquad \text{(F.15)}$$

mas $\delta g = g(g^{\lambda\rho}\delta g_{\lambda\rho})$,

$$\begin{aligned} \delta S = -\frac{T}{2}\int d\tau d\sigma \left[-\frac{g^{\alpha\beta}}{2}(-g)^{1/2}g^{\lambda\rho}\delta g_{\lambda\rho} + (-g)^{1/2}\delta g^{\alpha\beta}\right] \\ \times\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu, \end{aligned} \qquad \text{(F.16)}$$

$$\delta S = -\frac{T}{2}\int d\tau d\sigma \sqrt{-g}\left[-\frac{g^{\alpha\beta}}{2}g^{\lambda\rho}\delta g_{\lambda\rho} + \delta g^{\alpha\beta}\right]\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu, \qquad \text{(F.17)}$$

$$\delta S = -\frac{T}{2}\int d\tau d\sigma\sqrt{-g}\left[-\frac{g^{\alpha\beta}}{2}g_{\lambda\rho}\delta g^{\lambda\rho}+\right.$$
$$\left.\frac{g^{\alpha\beta}}{2}\delta(g^{\lambda\rho}g_{\lambda\rho})+\delta g^{\alpha\beta}\right]\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu, \tag{F.18}$$

$$\delta S = -\frac{T}{2}\int d\tau d\sigma\sqrt{-g}\left[-\frac{g^{\alpha\beta}}{2}g_{\lambda\rho}\delta g^{\lambda\rho}+\right.$$
$$\left.+\delta g^{\alpha\beta}\right]\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu, \tag{F.19}$$

$$\delta S = -\frac{T}{2}\int d\tau d\sigma\sqrt{-g}\left[-\frac{g^{\alpha\beta}}{2}g_{\lambda\rho}\delta g^{\lambda\rho}\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu+\right.$$
$$\left.\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu\delta g^{\alpha\beta}\right], \tag{F.20}$$

$$\delta S = -\frac{T}{2}\int d\tau d\sigma\sqrt{-g}\left[-\frac{g^{\alpha\beta}}{2}g_{\lambda\rho}\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu+\right.$$
$$\left.+\partial_\lambda X^\mu\partial_\rho X_\mu\right]\delta g^{\lambda\rho}. \tag{F.21}$$

As equações de movimento em relação à métrica da superfície de mundo implicam em $\frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} = 0$ ou

$$-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\lambda\rho}\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu + \partial_\lambda X^\mu\partial_\rho X_\mu = 0 \tag{F.22}$$

ou

$$\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\lambda\rho}\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu = \partial_\lambda X^\mu\partial_\rho X_\mu. \tag{F.23}$$

Calculando o determinante da matriz,

$$det\left\{\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\lambda\rho}\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu\right\} = det\{\partial_\lambda X^\mu\partial_\rho X_\mu\}, \tag{F.24}$$

$$\frac{1}{4}\left(g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu\right)^2 det(g_{\lambda\rho}) = det\{\partial_\lambda X^\mu\partial_\rho X_\mu\}, \tag{F.25}$$

onde o espaço é bidimensional, $\alpha, \beta = 0, 1$.

Calculando a raíz quadrada da relação acima, vemos

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu = \sqrt{-det\,(\partial_\lambda X^\mu \partial_\rho X_\mu)}, \tag{F.26}$$

onde $g = det\ g_{\lambda\rho}$.

Substituindo o termo da direita de $(F.26)$ em $(F.14)$ obtemos

$$S = -\frac{T}{2}\int d\tau d\sigma \sqrt{-det\,(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu)}. \tag{F.27}$$

Se tomarmos os valores $\alpha, \beta = 0, 1$ em $(F.27)$ e calcularmos o determinante da matriz, obtemos exatamente a ação de Nambu-Goto, o que demonstra a equivalência.

Bibliografia

[1] BARCELOS NETO, João. Notas de aula em teoria de cordas bosônicas.

[2] DUFF, M.J.; POPE, C.N.; SEZGIN, E. Proceeding of the Conference, *Supermembranes and Physics in 2+1 Dimensions*. World Scientific Publising Co Pte. Ltd., 1989.

[3] FAIRLIE, D.B. *Dirac-Born-Infeld Equations*, hep-th/9902204v1, 1999.

[4] GITMAN, Dmitriy M.; TYUTIN, Igor V. *Quantization of Fields with Constraints*. Berlin: Springer-Verlag, 1990.

[5] GREENE, Brian. *O Universo Elegante*: supercordas, dimensões ocultas e a busca da teoria definitiva. Tradução José Viegas Filho; revisor Rogério Rosenfeld. 7. ed. São Paulo: Companhia das Letras, 2001.

[6] HENNEAUX, Marc; TEITELBOIM, Cláudio. *Quantization of Gauge Systems*. New Jersey: Princeton Univ. Press, 1992.

[7] KAMAL, L.P. *D-Brana Dynamics in Dp-Brane Background*, hep-th/0407134v3, 2004.

[8] KRUGLOV, I.C. *On generalized Born-Infeld eletrodynamics*, hep-th/09091032v3, 2010.

[9] KULSHRESTHA, Usha; KULSHRESTHA, D.S. *D-Brane Actions as Constrained Systems*, hep-th/0511058, (2005).

[10] KULSHRESTHA, Usha; KULSHRESTHA, D.S., Int.J.Theor.Phys., vol.43, n°.12,(2004).

[11] KULSHRESTHA, Usha; KULSHRESTHA, D.S., Int.J.Theor.Phys., vol.44, n°.5, (2005).

[12] KULSHRESTHA, Usha; KULSHRESTHA, D.S., Eur.Phys.J. C 29, 453-461 (2003).

[13] LEMOS, P.S.; RICHARD, K. *The Born-Infeld Eletromagnetism in Kaluza-Klein Theory*, hep-th/9907187v1, 1999.

[14] OLIVEIRA, Wilson. Notas de Aula em Sistemas Vinculados.

[15] OTOYA, Victor. *Campos, Partículas e Simetrias de Calibre com Violação da Simetria de Lorentz.*2004. Dissertação (Mestrado em Física)-UFRJ, 2004.

[16] P.A.M. Dirac, Can. J. Math. 2, 129, 1950.

[17] TSEYTLIN, A.; VAFA, C. *Elements of String Cosmology*, hep-th/9109048v1, 1991.

[18] ZWIEBACH Barton. *A First Course in String Theory.* 1. ed. NY: Cambrige Univ. Press, 2004.