

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Alcides Farias Andrade

**Trajéórias num espaço com uma deslocação esfericamente  
simétrica**

Juiz de Fora

Agosto, 2011

Alcides Farias Andrade

# **Trajétórias num espaço com uma deslocação esfericamente simétrica**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Guilherme de Berredo Peixoto

Juiz de Fora  
Agosto, 2011

Alcides Farias Andrade

# **Trajétórias num espaço com uma deslocação esfericamente simétrica**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.

Aprovada em 25 de Agosto de 2011.

---

Prof. Dr. Guilherme de Berredo Peixoto  
Orientador

---

Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Prof. Dr. Afranio Rodrigues Pereira  
Universidade Federal de Viçosa

Aos meus pais, *Seu Alcides e Dona Maria*;  
A Jaqueline.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao professor Guilherme Peixoto pela paciência e ajuda sem a qual não seria possível este trabalho;

Aos professores que ministraram as disciplinas do curso, especialmente Ilya Shapiro;

Aos colegas que me acompanharam e ajudaram durante todo esse tempo;

À minha família e aos amigos pelo apoio;

A CAPES pelo financiamento.

Women love us for our defects. If we have enough of them, they will forgive us everything, even our intellects.

Oscar Wilde

## RESUMO

Estudamos um defeito tipo deslocação com simetria esférica. Encontramos a métrica para um meio contendo uma única deformação deste tipo. Para isso, calculamos o vetor deslocamento por meio da teoria linear da elasticidade e usando o esquema da teoria geométrica de defeitos, na qual o meio é caracterizado por objetos geométricos tais como curvatura e torção, encontramos as componentes do tensor métrico. Calculamos também outras quantidades geométricas como os tensores de Riemann e Ricci, e o escalar de curvatura bem como as componentes do tensor momento-energia. Em todas estas quantidades aparecem funções  $\delta$ , indicando divergência na superfície onde está localizado o defeito. Fora desta superfície, o meio possui uma geometria euclideana. Resolvemos as equações geodésicas radial e no plano para a região externa ao defeito e observamos que, mesmo localizado, ele exerce influência sobre o movimento nesta região.

**Palavras-chave:** Trajetórias, Deslocação, Simetria esférica.

## ABSTRACT

We study a dislocation defect with spherical symmetry. We find the metric for a medium containing a single deformation of this kind. For this, we calculate the displacement vector through the linear theory of elasticity and using the scheme of geometric theory of defects, in which the medium is characterized by geometric objects such as curvature and torsion, we find the components of the metric tensor. We calculate also other geometrical quantities as the Riemann and Ricci tensor, and the scalar curvature as well as the energy-momentum tensor. In these quantities,  $\delta$ -functions show up, indicating divergence in the surface where the defect is located. Outside this surface, the medium has an Euclidean geometry. We solve the geodesic equations for the outer region to the defect and we observed, despite being located, its influence on the movement in this region.

**Keywords:** Trajectories, Dislocation, Spherical symmetry.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 Um cilindro (a) inicialmente cortado e deformado, de (b) a (g), para produzir seis tipos de distorções como proposto por Volterra [16]. . . . .	19
Figura 3.2 Deslocação lateral em um cristal [16]. . . . .	19
Figura 3.3 Deslocação tipo hélice em um cristal [16]. . . . .	20
Figura 3.4 Método para gerar deslocação em um material. Um corte é feito ao longo da superfície limitada pela curva. O material de um lado da superfície do corte é deslocado em relação ao outro lado por um vetor $\mathbf{b}$ [21]. . . . .	21
Figura 3.5 Definição do vetor de Burgers $\mathbf{b}$ . Na presença de deslocação, a imagem de um circuito o qual é fechado em um cristal ideal não se fecha em um cristal com defeito [22]. . . . .	21
Figura 3.6 Vetor de Burgers em uma deslocação tipo hélice [22]. . . . .	22
Figura 5.1 Deslocação produzida ao ser retirado material da casca esférica e posterior identificação das superfícies esféricas de raio $r_1$ e $r_2$ com a superfície de raio $\rho$ . . . . .	29
Figura 5.2 Curva radial com $l = 100$ , $r_0 = \rho = \frac{203}{3}$ e $\dot{r}_0 = 50$ . . . . .	40
Figura 5.3 Comparação de $\dot{\phi}$ para os casos com e sem defeito onde $l = 2$ , $\rho = 7/3$ , $r_0 = 3$ e $\dot{r}_0 = 2$ . A curva $a$ é para o caso com defeito. . . . .	41
Figura 5.4 Curva radial com $l = 100$ , $r_0 = \rho = \frac{203}{3}$ e $\dot{r}_0 = 50$ . . . . .	42
Figura 5.5 Curva radial com $l = 100$ , $r_0 = \rho = \frac{203}{3}$ e $\dot{r}_0 = 50$ . . . . .	42
Figura 5.6 Curva radial com $l = 100$ , $r_0 = \rho = \frac{203}{3}$ e $\dot{r}_0 = 50$ . . . . .	43
Figura 5.7 Comparação de $r$ para os casos sem defeito, $a$ , e com defeito $b$ , com $l = 2$ , $\rho = 7/3$ , $r_0 = 3$ e $\dot{r}_0 = 2$ . . . . .	43

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>TEORIA DA ELASTICIDADE</b>	<b>12</b>
2.1	O TENSOR DE DEFORMAÇÃO	13
2.2	O TENSOR DE ESTRESSE	14
2.3	AS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO	16
<b>3</b>	<b>DEFEITOS EM CRISTAIS</b>	<b>18</b>
3.1	DESLOCAÇÕES	18
3.2	O VETOR DE BURGERS	20
<b>4</b>	<b>TEORIA GEOMÉTRICA DE DEFEITOS</b>	<b>23</b>
4.1	ASPECTOS MATEMÁTICOS GERAIS	24
<b>5</b>	<b>DESLOCAÇÃO COM SIMETRIA ESFÉRICA</b>	<b>28</b>
5.1	APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA	28
5.2	RESOLUÇÃO DO PROBLEMA	30
5.2.1	A Solução Interna	31
5.2.2	A Solução Externa	31
5.2.3	A Descontinuidade em $u$	32
5.2.4	A Métrica Induzida	33
5.2.5	Algumas Quantidades Geométricas	35
5.2.6	Geodésicas	38

<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS</b> . . . . .	<b>44</b>
----------	--	-----------

	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>45</b>
--	------------------------------	-----------

# 1 INTRODUÇÃO

A física é uma ciência baseada na experimentação. Isto significa que as teorias físicas devem ser corroboradas pela observação ou evidência experimental. Sendo assim os nossos modelos, os quais são representações dos fenômenos mais fundamentais construídos numa linguagem matemática, têm que descrever realmente algum fenômeno na natureza. Apesar disso, nem sempre uma confirmação factual do modelo em determinado momento é possível, o que não impede que o trabalho do físico teórico seja feito porque este pode ocorrer de duas maneiras: modelos podem ser criados para um conjunto de observações ou fatos experimentais conhecidos; ou também podem ser criados mesmo não havendo confirmação experimental sendo que no futuro passarão pelo crivo da experiência. A história da física é cheia de ocorrências dos dois tipos e o exemplo mais conhecido do segundo tipo é a Teoria das Cordas.

Na sua atividade, o teórico tem liberdade para criar modelos quaisquer, contanto que exista consistência lógica interna e que esteja de acordo com os modelos já bem estabelecidos pela evidência experimental. O exemplo mais comum desta atividade é a junção de duas ou mais teorias dando origem a uma nova com uma capacidade muito maior para abordar os problemas e com previsões que não havia antes. Citaremos como exemplo a Teoria Geométrica de Defeitos [1] a qual trata de meios com defeitos, especialmente cristais, utilizando um formalismo geométrico, mais precisamente o da gravitação com torção. Esta abordagem no estudo de cristais deformados, embora não sendo única [2], tem suas vantagens em relação à tradicional Teoria da Elasticidade, por exemplo, nela é possível abordar distribuições contínuas de defeitos além de usar o robusto formalismo da Geometria Diferencial.

O uso deste modelo geométrico tem sido frequente no tratamento de muitos problemas físicos, como por exemplo, a equação de Schrödinger na presença de defeitos foi considerada em [3, 4, 5] e o espalhamento de fônons em meios deformados foi estudado em [6, 7]. O problema de uma deslocação com simetria cilíndrica foi estudado [8] e aplicado em nanotubos com dupla camada [9]. Seguindo essa linha, estudamos neste trabalho o problema de uma deslocação com simetria esférica. Encontramos a métrica para um meio contendo um defeito com esta caracte-

terística, calculamos algumas quantidades geométricas como os tensores de curvatura e de Ricci e estudamos as equações geodésicas.

O trabalho está dividido na seguinte maneira: no capítulo dois apresentamos os principais resultados da teoria linear da elasticidade que foram utilizados neste trabalho, especialmente a equação para o estado de equilíbrio de um meio não submetido à ação de forças externas; no terceiro capítulo introduzimos brevemente alguns conceitos da teoria de cristais, em particular a noção de deslocação que é um defeito bastante comum em cristais; no capítulo quatro colocamos de forma sucinta a teoria geométrica de defeitos e suas principais características; no quinto capítulo construímos um defeito com simetria esférica no material e determinamos várias quantidades geométricas para o mesmo como também resolvemos, para os movimentos radial e no plano equatorial, as equações geodésicas na região externa ao defeito; seguindo este capítulo vem as conclusões e perspectivas.

## 2 TEORIA DA ELASTICIDADE

A teoria da elasticidade é a área da física que estuda a mecânica dos meios deformáveis, os quais depois de removidas as forças que produzem deformações, recuperam sua forma inicial. Todos os materiais possuem, até um certo limite, a propriedade da elasticidade, ou seja, se as forças externas que produzem deformações na estrutura do material não ultrapassam um certo limite, as deformações desaparecem com a remoção das forças. Na teoria da elasticidade, a estrutura molecular de que são constituídos os corpos não é considerada. Nesta teoria, considera-se que a matéria constituinte dos corpos elásticos é continuamente distribuída por todo o seu volume de tal forma que uma pequena porção do corpo possui as mesmas propriedades físicas do corpo inteiro [10, 11].

A passagem de uma estrutura discreta para uma contínua, isto é, a substituição da rede molecular por um meio contínuo, implica uma mudança radical na descrição do material a qual passa de uma abordagem microscópica para uma macroscópica, e requer novos conceitos, termos e relações [12]. Por este motivo, a teoria da elasticidade encontrou algumas dificuldades no início de seu desenvolvimento. De um lado havia a teoria da estrutura molecular dos corpos de Newton, e de outro a representação desses corpos por meio de um contínuo matemático no qual é possível obter distâncias infinitesimais. Diante disso, os primeiros trabalhos em teoria da elasticidade receberam muitas críticas e tiveram sua validade questionada. Mas o fato de até mesmo um volume muito pequeno do material conter um número muito grande de moléculas, permitiu aos pesquisadores ultrapassarem esta barreira conceitual ligando o espaço contínuo da representação matemática à estrutura discreta dos corpos sólidos. Isto tornou possível a aplicação das técnicas matemáticas a esta nova área da física. O sucesso da teoria da elasticidade na resolução de problemas importantes fez todas aquelas dúvidas, referentes à justificação física dos métodos utilizados, desaparecerem. Por isso é dito que a teoria da elasticidade é baseada na hipótese da estrutura contínua dos sólidos, embora esta seja somente uma hipótese de trabalho [13].

A teoria da elasticidade se desenvolveu em um importante ramo da física matemática na

primeira metade do século XIX. Antes disso, os cientistas dos séculos XVII e XVIII, como Galileu Galilei, E. Mariotte, R. Hooke, J. Bernoulli, L. Euler, C. A. Coulomb e outros, trabalharam a teoria de curvas e flexões em barras elásticas finas. No início do século XIX, J. L. Lagrange e Sophie Germain resolveram o problema de curvas e vibrações em placas elásticas finas. Os fundamentos da teoria da elasticidade foram estabelecidos pelos franceses A. L. Cauchy, C. L. M. H. Navier e S. D. Poisson, que derivaram as equações diferenciais básicas desta teoria. Nos séculos XIX e XX, a teoria atraiu a atenção de muitos outros pesquisadores, os quais, ao lado dos fundadores, contribuíram muito para seu estabelecimento como ciência, dentre eles podemos citar M. V. Ostrogradsky, G. Lamé, B. P. E. Clapeyron, B. de Saint-Venant, G. Green, J. C. Maxwell, Lord Kelvin (Sir W. Thomson), Lord Rayleigh e outros. Para uma apresentação histórica completa, ver [14].

## 2.1 O TENSOR DE DEFORMAÇÃO

Quando submetidos à ação de forças aplicadas, os corpos sólidos exibem deformação mudando sua forma e volume. A deformação sofrida por um corpo pode ser descrita matematicamente da seguinte maneira: seja a posição de um ponto qualquer do corpo definida por seu vetor posição  $\mathbf{r} = (x^1, x^2, x^3)$  em um sistema de coordenadas. Quando o corpo é deformado, todos os pontos, em geral, são deslocados. Sejam  $\mathbf{r}(x^i)$  e  $\mathbf{r}'(x'^i)$  os vetores que definem as posições do ponto antes e depois da deformação, respectivamente. O deslocamento deste ponto devido à deformação é dado pelo vetor  $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$ , denotado por  $\mathbf{u}$ :

$$u^i = x'^i - x^i, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.1.1)$$

O vetor  $\mathbf{u}$  é chamado de vetor deslocamento.

Quando um corpo é deformado, a distância entre seus pontos também muda. Sejam  $P$  e  $Q$  dois pontos próximos. Se o vetor que os liga antes da deformação for  $dx^i$ , depois da deformação será  $dx'^i = dx^i + du^i$ . Se a distância entre eles antes da deformação era  $dl$ , depois dela será  $dl'$ . Como  $du^i = \frac{\partial u^i}{\partial x^k} dx^k$ , temos

$$dl'^2 = dl^2 + 2 \frac{\partial u^i}{\partial x^k} dx^i dx^k + \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \frac{\partial u^i}{\partial x^l} dx^k dx^l, \quad (2.1.2)$$

com a repetição dos índices indicando uma soma. O segundo termo pode ser colocado na forma

simétrica

$$\left( \frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \right) dx^i dx^k. \quad (2.1.3)$$

No terceiro termo, trocamos  $i \leftrightarrow l$ , então  $dl'^2$  assume a forma

$$dl'^2 = dl^2 + 2\varepsilon_{ik} dx^i dx^k, \quad (2.1.4)$$

onde o tensor  $\varepsilon_{ik}$  é definido como

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^i} + \frac{\partial u^l}{\partial x^i} \frac{\partial u^l}{\partial x^k} \right). \quad (2.1.5)$$

O tensor  $\varepsilon_{ik}$  é chamado de tensor de deformação. Da definição, ele é simétrico:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}, \quad (2.1.6)$$

e é o objeto geométrico responsável pelo estado deformado do corpo.

Na prática, as deformações são pequenas. Isto significa que a mudança na distância entre pontos do corpo é pequena se comparada às dimensões deste, ou seja, as extensões relativas  $(dx'^i - dx^i)/dx^i$ , são pequenas diante da unidade. Se um corpo é sujeito a pequenas deformações, todas as componentes do tensor de deformação são pequenas e, em geral, para este tipo de deformação, o vetor deslocamento também é pequeno [15]. Neste caso,  $u^i$  e suas derivadas são pequenos e pode-se desprezar em (2.1.5) o último termo. Assim, para pequenas deformações, o tensor de deformação é dado por

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \right). \quad (2.1.7)$$

A teoria baseada na definição de  $\varepsilon_{ik}$  dada por (2.1.7) é chamada de teoria linear da elasticidade [12]. Nesta teoria, o princípio de sobreposição é válido, ou seja, o deslocamento causado por um conjunto de forças atuando no corpo é igual a soma daqueles causados pelas forças individuais [16]. Para um tratamento da teoria não-linear da elasticidade, ver [17].

## 2.2 O TENSOR DE ESTRESSE

Em um corpo não-deformado, o arranjo das moléculas corresponde a estados de equilíbrio térmico, e todas as partes do corpo estão em equilíbrio mecânico. Quando ocorre a deformação,



o arranjo das moléculas é alterado e o corpo deixa seu estado original de equilíbrio, neste momento surgem forças as quais tendem a trazer o corpo ao equilíbrio. Estas forças internas que surgem no corpo deformado, são chamadas de estresses ou tensões internas. Se não existe deformação, não há tensões internas [15].

Consideremos a força total em alguma porção do corpo. Primeiramente, força total é igual a soma de todas as forças sobre todos os elementos de volume nesta porção do corpo, isto é, ela pode ser escrita como uma integral de volume  $\int \mathbf{F}dV$ , onde  $\mathbf{F}$  é a força por unidade de volume e  $\mathbf{F}dV$  é a força sobre o elemento de volume  $dV$ . Segundo, as forças com as quais as várias partes da porção do corpo considerado atuam uma sobre as outras devem se cancelar pela terceira lei de Newton, portanto a força total resultante deve ser zero. A força total pode, portanto, ser considerada como a soma das forças exercidas sobre a dada porção do corpo pelas porções vizinhas a ela. Assim, estas forças atuam sobre a superfície desta porção e a força resultante pode ser representada como a soma das forças atuando sobre todos os elementos de superfície, isto é, uma integral sobre a superfície [15].

Assim, para qualquer porção do corpo, cada uma das três componentes  $\int F_i dV$  da força resultante de todas as tensões internas pode ser transformada em uma integral sobre a superfície. Então, o vetor  $F_i$  deve ser a divergência de um tensor de segunda ordem,

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x^k}. \quad (2.2.1)$$

Assim, a força sobre qualquer volume pode ser escrita como uma integral sobre a superfície fechada limitando o volume:

$$\int F_i dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x^k} dV = \oint \sigma_{ik} da_k. \quad (2.2.2)$$

O tensor  $\sigma_{ik}$  é chamado de tensor de estresse ou de tensão. De (2.2.2),  $\sigma_{ik} da_k$  é a  $i$ -ésima componente da força sobre o elemento de superfície  $da$ .

No equilíbrio, as tensões internas em todo elemento de volume tem que se balancear, isto é,  $F_i = 0$ . Assim, as equações de equilíbrio para um corpo deformado são:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x^k} = 0. \quad (2.2.3)$$

Se o corpo está em um campo gravitacional, a soma  $\mathbf{F} + \rho \mathbf{g}$ , das tensões internas e a força gravitacional (por unidade de volume) tem que se anular.  $\rho$  é a densidade e  $\mathbf{g}$  é a aceleração da

gravidade. Neste caso, as equações de equilíbrio são [15]:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x^k} + \rho g_i = 0. \quad (2.2.4)$$

## 2.3 AS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Para corpos sólidos isotrópicos, ou seja, corpos cujas propriedades elásticas são as mesmas em todas as direções, o tensor de tensão, em termos do tensor de deformação, é dado por [15]

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1 + \sigma} \left( \varepsilon_{ik} + \frac{\sigma}{1 - 2\sigma} \varepsilon_{ll} \delta_{ik} \right), \quad (2.3.1)$$

onde  $E$  é o módulo de extensão ou módulo de Young, e  $\sigma$  é a razão de Poisson, que dá a razão da compressão transversal pela extensão longitudinal. Estas quantidades são dadas pelas expressões

$$E = \frac{9K\mu}{3K + \mu}, \quad (2.3.2)$$

$$\sigma = \frac{(3K - 2\mu)}{2(3K + \mu)}. \quad (2.3.3)$$

onde  $K$  é o módulo de compressão hidrostática e  $\mu$  é o módulo de rigidez.  $K$  e  $\mu$  são sempre positivos, e  $\sigma$  varia entre  $-1$  (para  $K = 0$ ) e  $\frac{1}{2}$  (para  $\mu = 0$ ), assim

$$-1 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}. \quad (2.3.4)$$

De (2.3.1) temos

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x^k} = \frac{E\sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \frac{\partial \varepsilon_{ll}}{\partial x^i} + \frac{E}{1 + \sigma} \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x^k}. \quad (2.3.5)$$

Substituindo (2.3.5) e (2.1.7) em (2.2.4), obtemos as equações de equilíbrio na forma

$$\frac{E}{2(1 + \sigma)} \frac{\partial^2 u^i}{(\partial x^k)^2} + \frac{E}{2(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \frac{\partial^2 u^l}{\partial x^i \partial x^l} + \rho g_i = 0. \quad (2.3.6)$$

Estas equações podem ser escritas em notação vetorial. As quantidades  $\frac{\partial^2 u^i}{(\partial x^k)^2}$  são as componentes do vetor  $\Delta \mathbf{u}$ , com  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$  o operador laplaciano, e  $\frac{\partial u^l}{\partial x^l} = \nabla \cdot \mathbf{u}$ . Assim, as equações de equilíbrio tornam-se

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1 - 2\sigma} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = -\rho \mathbf{g} \frac{2(1 + \sigma)}{E}. \quad (2.3.7)$$

É útil transformar (2.3.7) usando a identidade  $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \Delta \mathbf{u} + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})$ , então

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = -\rho \mathbf{g} \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)}. \quad (2.3.8)$$

Escrevemos as equações de equilíbrio para um campo gravitacional uniforme pois esta é a força mais comum em teoria da elasticidade. Quando a deformação é causada somente por forças aplicadas à superfície do corpo, as equações de equilíbrio tornam-se:

$$(1-2\sigma)\Delta \mathbf{u} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0. \quad (2.3.9)$$

e

$$2(1-\sigma)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (1-2\sigma)\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = 0. \quad (2.3.10)$$

Para um tratamento completo da teoria da elasticidade ver [10, 11, 13, 14, 15, 17].

## 3 DEFEITOS EM CRISTAIS

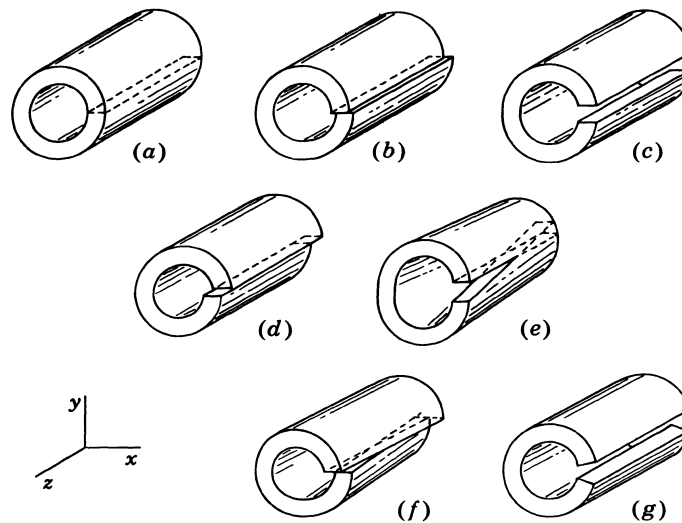
A cristalografia é uma ciência que estuda a estrutura da matéria na escala atômica determinando, classificando e interpretando as estruturas geométricas dos sólidos, em particular os cristais. Um cristal é um sólido tridimensional cuja estrutura microscópica é caracterizada por uma repetição periódica do arranjo de átomos. Tal periodicidade na estrutura atômica afeta várias propriedades macroscópicas. Propriedades físicas como dureza, condutividades elétrica e térmica, índice de refração, dependem da orientação. Propriedades independentes da orientação são chamadas de isotrópicas e as dependentes de anisotrópicas [18].

Um arranjo periódico perfeito da estrutura atômica não existe em cristais reais. Todo cristal é mais ou menos desordenado. Esta desordem é chamada de defeito estrutural. Muitas propriedades como condutividade elétrica e propriedades mecânicas dependem dos defeitos na estrutura. Estes defeitos podem surgir por vários motivos. O mais importante é por movimentos dos átomos devido as agitações térmicas. Impurezas e vacâncias também são desordens. Um outro tipo de defeito de fundamental importância nas propriedades físicas dos cristais são as deslocações, defeitos lineares que são translações ou deslocamentos de uma parte do cristal com relação a outra parte. Portanto, deslocações são defeitos associados a quebra de simetria de translação do arranjo cristalino [2, 18].

### 3.1 DESLOCAÇÕES

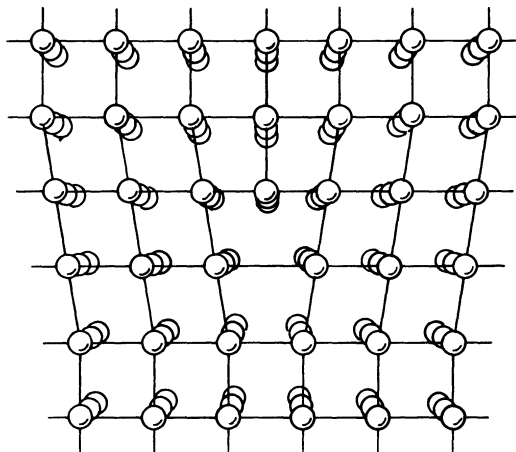
As primeiras indicações para a existência de deslocações ocorreu no século XIX no estudo de deformações em metais. Em 1907, Vito Volterra, investigando o comportamento elástico de meios homogêneos e isotrópicos, considerou as propriedades elásticas de um cilindro que tinha sido cortado e deformado como mostra a **Fig. 3.1**. As configurações (b) e (c) correspondem a deslocações laterais, *edge dislocations*, e (d) a uma deslocação tipo hélice, *screw dislocation*.

As configurações (e), (f) e (g) foram chamadas de desclinações [16, 19].



**Figura 3.1:** Um cilindro (a) inicialmente cortado e deformado, de (b) a (g), para produzir seis tipos de distorções como proposto por Volterra [16].

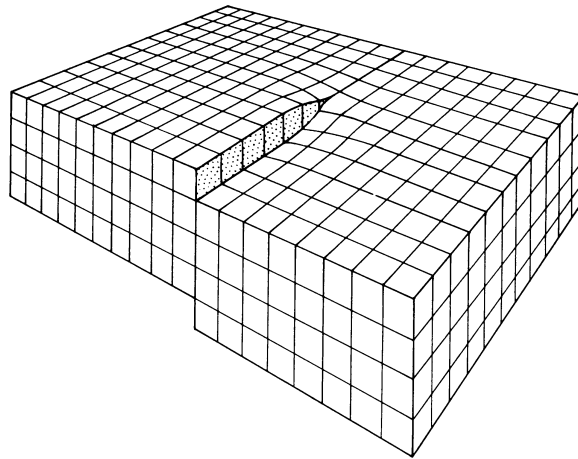
Em 1934, a deslocação lateral, mostrada na **Fig. 3.2**, foi proposta por Orowan, Polanyi e Taylor para explicar diferenças entre os resultados experimentais e teóricos do estresse em cristais. Em 1939, Burgers estudou a deslocação tipo hélice, **Fig. 3.3** [16].



**Figura 3.2:** Deslocação lateral em um cristal [16].

O desenvolvimento da teoria de deslocações pode ser dividida em três períodos. No primeiro, até 1950, a teoria foi desenvolvida para configurações de simples deslocações, geralmente linhas de deslocações em meios contínuos isotrópicos infinitos. Este período é marcado pelos trabalhos de Orowan, Polanyi, Timpe, Taylor, Burgers, e outros. No segundo período, de 1950

a 1965, foi feito um extensivo trabalho na teoria de defeitos principalmente a tentativa de formular teorias para distribuições contínuas de deslocações. Para citar alguns nomes, Kröner, Eshelby, Kondo, Nabarro. No terceiro período, a partir de 1965, a geometria diferencial tornou-se uma parte integrante da teoria de deslocações. Ainda na década de 1950, Kondo estabeleceu a relação entre teoria de deslocações e geometria não-riemanniana [2].

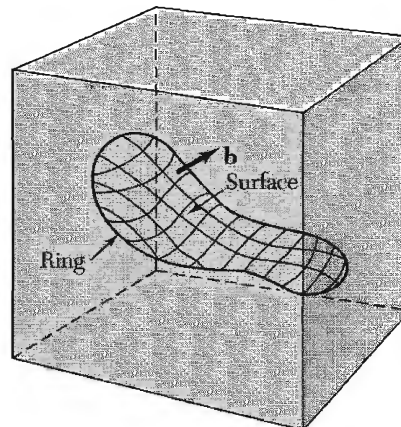


**Figura 3.3:** Deslocação tipo hélice em um cristal [16].

As deslocações podem ser vistas como defeitos topológicos, pois a presença delas altera a topologia do meio. Os defeitos topológicos estão associados a quebra de simetrias. Um defeito topológico em geral é caracterizado por uma região central (um ponto ou uma linha), onde certa ordem é destruída, e por uma outra região onde algum parâmetro associado a ordem varia no espaço. Defeitos topológicos possuem diferentes nomes dependendo da simetria quebrada e do sistema em questão. Em hélio superfluido são chamados de vórtices, em cristais periódicos são deslocações, e em cristais líquidos desclinações [2, 20].

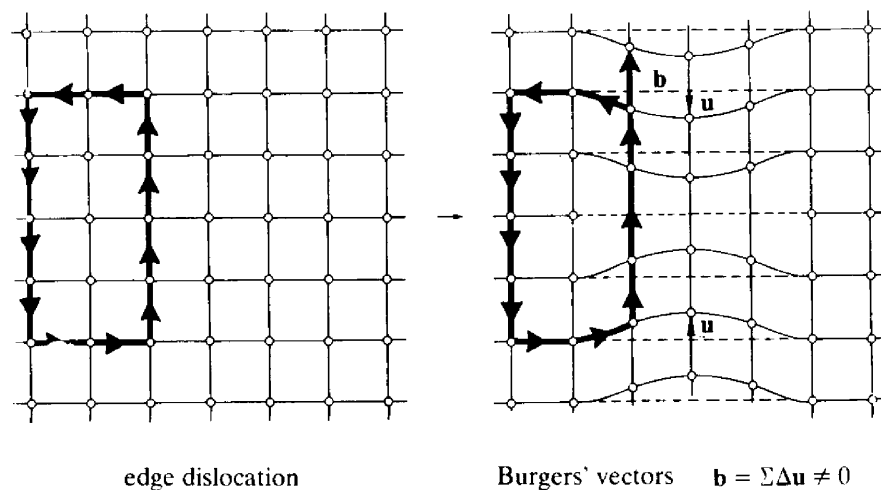
## 3.2 O VETOR DE BURGERS

Outras formas de deslocações podem ser construídas através de um esquema desenvolvido por Burgers e mostrado na **Fig. 3.4**. Consideremos qualquer curva fechada no material: (a) fazemos um corte ao longo de qualquer superfície limitada pela linha; (b) deslocamos o material de um lado desta superfície por um vetor  $\mathbf{b}$  relativamente ao outro lado, o vetor  $\mathbf{b}$  é chamado de vetor de Burgers [21].



**Figura 3.4:** Método para gerar deslocação em um material. Um corte é feito ao longo da superfície limitada pela curva. O material de um lado da superfície do corte é deslocado em relação ao outro lado por um vetor  $\mathbf{b}$  [21].

Consideremos um circuito fechado,  $B_0$ , em um cristal ideal cuja orientação pode ser escolhida arbitrariamente, e um circuito imagem em um cristal deformado (**Fig. 3.5**). Para cada passo, ao longo do circuito, feito na rede do cristal sem defeito, um passo correspondente será feito sobre o circuito imagem no cristal deformado. Se os sítios na rede original são denotados por  $\mathbf{x}_n$ , os pontos imagens serão denotados por  $\mathbf{x}_n + \mathbf{u}(\mathbf{x}_n)$ , onde  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_n)$  é um deslocamento. Em cada passo, o ponto imagem move-se de uma forma levemente diferente do original.



**Figura 3.5:** Definição do vetor de Burgers  $\mathbf{b}$ . Na presença de deslocação, a imagem de um circuito o qual é fechado em um cristal ideal não se fecha em um cristal com defeito [22].

Enquanto o circuito  $B_0$  é fechado no cristal ideal, no cristal com defeito o circuito imagem

permanece aberto. Esta diferença é dada por um vetor  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ , o vetor de Burgers

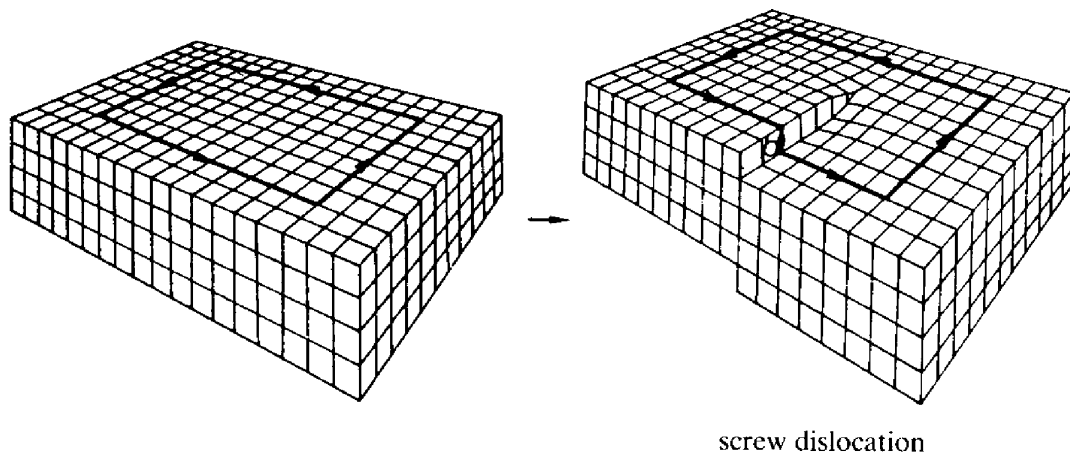
$$\sum_{B_0} \Delta u^i(\mathbf{x}_n) = b^i, \quad (3.2.1)$$

onde  $\Delta u^i(\mathbf{x}_n)$  são os incrementos no vetor deslocamento passo a passo. O procedimento inverso também pode ser feito: considerar um circuito fechado,  $B$ , em um cristal deformado e o circuito imagem em um cristal perfeito.

Se considerarmos o processo no limite contínuo

$$\int_B du^i(x_a) = b^i. \quad (3.2.2)$$

O circuito  $B$  é chamado de circuito de Burgers. Na **Fig. 3.6** temos um circuito de Burgers em uma deslocação tipo hélice.



**Figura 3.6:** Vetor de Burgers em uma deslocação tipo hélice [22].

Para um tratamento mais completo ver sobre este assunto ver [16, 22].



## 4 TEORIA GEOMÉTRICA DE DEFEITOS

O papel desempenhado pela geometria na física é grande e o exemplo mais conhecido é a Teoria Geral da Relatividade. Como já foi dito, sua importância também foi percebida por físicos ao estudarem sólidos com defeitos. Desde então, a descrição geométrica de defeitos em sólidos tem atraído muita atenção nos últimos anos [2]. Nesta abordagem, a torção é um objeto geométrico que desempenha um papel central.

A torção foi introduzida por E. Cartan em 1922 como uma tentativa de modificar a Teoria Geral da Relatividade, permitindo o espaço-tempo ter torção além da curvatura riemanniana. Ele relacionou a torção a um momento angular intrínseco da matéria [23]. Cartan foi influenciado pelos trabalhos dos irmãos Cosserat (1909), os quais, estudando sólidos, consideraram os pontos de um meio elástico como tendo tanto rotação como graus de liberdade de translação. Nos anos 50 a torção foi introduzida na teoria de cristais com defeitos sendo relacionada com as deslocções [24]. Aspectos clássicos e quânticos da torção podem ser vistos em [25].

Uma dessas abordagens geométricas é a Teoria Geométrica de Defeitos [1]. Neste modelo, o cristal é considerado como um meio elástico contínuo possuindo uma estrutura de spin. A geometria do espaço é de Riemann-Cartan, na qual existe curvatura e torção não nulas. Se o campo do vetor deslocamento possui descontinuidades, então existem defeitos na estrutura elástica do material. Defeitos como deslocções correspondem a torção não-nula.

Nesse esquema, as deformidades do meio funcionam como fontes de curvatura e torção. Defeitos na estrutura de spin são chamados de desclinações e correspondem a curvatura riemanniana não-nula. Quando o meio possui somente deslocções, a curvatura é nula e a torção é diferente de zero, configurando então um espaço de absoluto paralelismo porque o deslocamento paralelo de vetores não depende do caminho. A densidade superficial do vetor de Burgers é então identificada com o tensor de torção [26].

A Teoria Geométrica de Defeitos, devido às suas características, aborda tipos diferentes de deformações em materiais sob um único aspecto, o geométrico. Além disso, ela permite tratar

tanto as configurações de defeitos individuais quanto as distribuições contínuas de defeitos, as quais não podem ser descritas dentro da Teoria da Elasticidade, bem como obter os resultados desta última na aproximação linear [27]. Outro fato é a analogia que pode ser feita entre os problemas em gravitação e em matéria condensada, uma vez que existe uma equivalência entre a gravitação tridimensional com torção e a teoria de defeitos em sólidos, ou seja, qualquer solução para a gravitação tridimensional possui uma interpretação na Teoria da Elasticidade [1].

## 4.1 ASPECTOS MATEMÁTICOS GERAIS

Apresentaremos brevemente algumas noções matemáticas utilizadas neste trabalho, especialmente a notação tensorial. Um tratamento completo pode ser visto em [28].

Um tensor de tipo  $(p, q)$  e ordem  $p + q$  é relativamente a um sistema de coordenadas  $x^1, \dots, x^n$ , um conjunto de quantidades  $T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$  definidas em cada ponto do espaço. Sob uma mudança de coordenadas  $x^{k'} = x^{k'}(x^1, \dots, x^n)$ , estas quantidades se transformam da seguinte maneira:

$$T_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}. \quad (4.1.1)$$

A métrica é um tensor de segunda ordem covariante simétrico  $g_{\mu\nu}(x) = g_{\nu\mu}(x)$  e não-degenerado ( $\det g_{\mu\nu} \neq 0$ ), que se transforma sob mudanças de coordenadas  $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}(x)$  de acordo com (4.1.1)

$$g_{\mu' \nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} g_{\mu\nu}. \quad (4.1.2)$$

Em um espaço euclidiano com coordenadas cartesianas, a métrica é dada por

$$g_{ij} = \delta_{ij}. \quad (4.1.3)$$

Por meio da métrica é possível definir o produto interno de vetores  $(X, Y)$

$$(X, Y) = X^\mu Y^\nu g_{\mu\nu}. \quad (4.1.4)$$

Dada a métrica, podemos construir sua inversa,  $g^{\mu\nu}$ , tal que  $g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu$ .

Uma conexão, em um sistema de coordenadas, dada pelo conjunto de quantidades  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho(x)$

que se transformam da seguinte maneira,

$$\Gamma_{\mu'v'\rho'} = \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\rho}} \left( \Gamma_{\mu\nu\rho} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} + \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} \right), \quad (4.1.5)$$

é dita ser afim. Através da conexão é possível construir um tipo de derivada, chamada de derivada covariante  $\nabla_{\mu}$ , de tensores da forma

$$\nabla_{\mu} T_{\rho_1 \dots}^{\nu_1 \dots} = \partial_{\mu} T_{\rho_1 \dots}^{\nu_1 \dots} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu_1} T_{\rho_1 \dots}^{\alpha \dots} + \dots - \Gamma_{\mu\rho_1}^{\beta} T_{\beta \dots}^{\nu_1 \dots} - \dots. \quad (4.1.6)$$

Para escalares,  $\nabla_{\mu} \varphi = \partial_{\mu} \varphi$ . O fato relevante é que a derivada covariante introduz um índice tensorial.

Da parte anti-simétrica de (4.1.5) podemos construir um tensor chamado de tensor de torção

$$T_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}. \quad (4.1.7)$$

Em geral, a conexão  $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$  não possui simetria em seus índices nem está relacionada a métrica  $g_{\mu\nu}$ . Estes objetos são definidos de modo completamente independente. Se são dadas a métrica  $g$  e a conexão afim  $\Gamma$ , dizemos que uma geometria afim foi definida no espaço.

Dada uma geometria afim, podemos construir um tensor chamado de não-metricidade  $Q_{\mu\nu\rho}$  definido como a derivada covariante da métrica

$$-Q_{\mu\nu\rho} = \nabla_{\mu} g_{\nu\rho} = \partial_{\mu} g_{\nu\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} g_{\sigma\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} g_{\nu\sigma}. \quad (4.1.8)$$

A combinação

$$\nabla_{\mu} g_{\nu\rho} + \nabla_{\nu} g_{\rho\mu} - \nabla_{\rho} g_{\mu\nu}$$

produz a expressão para a conexão afim com todos os índices abaixados:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu\rho} = \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} g_{\sigma\rho} &= \frac{1}{2} (\partial_{\mu} g_{\nu\rho} + \partial_{\nu} g_{\rho\mu} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} (T_{\mu\nu\rho} - T_{\nu\rho\mu} + T_{\rho\mu\nu}) + \\ &+ \frac{1}{2} (Q_{\mu\nu\rho} + Q_{\nu\rho\mu} - Q_{\rho\mu\nu}). \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Para definir uma geometria afim num espaço, é necessário definir três tensores: métrica, torção e não-metricidade. Estes tensores são especificados de maneira arbitrária e são todos independentes.

H. Weyl, tentando unificar gravitação e eletromagnetismo, propôs uma não-metricidade do tipo

$$Q_{\mu\nu\rho} = W_{\mu} g_{\nu\rho}, \quad (4.1.10)$$

onde  $W_{\mu}$  foi identificado por Weyl com o potencial eletromagnético, assumindo torção nula.

Se são dadas a métrica, a torção e a não-metricidade na forma (4.1.10), dizemos que uma geometria de Riemann-Cartan-Weyl é definida no espaço.

Se a não-metricidade é nula ( $Q_{\mu\nu\rho} = 0$ ) e a torção é diferente de zero, uma geometria de Riemann-Cartan é dada. Neste caso, a conexão é dada por

$$\Gamma_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu}g_{\nu\rho} + \partial_{\nu}g_{\rho\mu} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} (T_{\mu\nu\rho} - T_{\nu\rho\mu} + T_{\rho\mu\nu}). \quad (4.1.11)$$

Esta conexão é dita ser métrica porque a derivada covariante da métrica é zero.

Se a torção é nula ( $T_{\mu\nu}{}^{\rho} = 0$ ) e a não-metricidade é da forma (4.1.10), uma geometria de Riemann-Weyl é dada.

Se tanto a não-metricidade quanto a torção são nulas, temos  $Q_{\mu\nu\rho} = 0$  e  $T_{\mu\nu}{}^{\rho} = 0$ , e consequentemente obtemos uma geometria de Riemann. Neste caso, a conexão é simétrica e dada a partir da métrica:

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu}g_{\nu\rho} + \partial_{\nu}g_{\rho\mu} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}). \quad (4.1.12)$$

Esta conexão é chamada de conexão de Levi-Civita, ou símbolos de Christoffel.

Uma linha geodésica é uma curva  $x^{\mu}(t)$  tal que um vetor tangente sempre permanece tangente sob transporte paralelo ao longo da curva. Com o parâmetro  $t$  escolhido ao longo da curva, uma linha geodésica é definida pelo sistema de equações

$$\ddot{x}^{\mu} = -\Gamma_{\nu\rho}{}^{\mu} \dot{x}^{\nu} \dot{x}^{\rho}, \quad (4.1.13)$$

onde o ponto indica derivação com relação a  $t$ .

Um outro objeto importante é o tensor de curvatura, dado por

$$R_{\mu\nu\rho}{}^{\sigma} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\rho}{}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\rho}{}^{\lambda}\Gamma_{\nu\lambda}{}^{\sigma} - (\mu \leftrightarrow \nu). \quad (4.1.14)$$

A contração do tensor de curvatura produz o tensor de Ricci,  $R_{\mu\rho\nu}{}^{\rho} = R_{\mu\nu}$ . Na geometria riemanniana, o tensor de Ricci é simétrico nos índices:  $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$ . Também podemos construir o escalar de curvatura  $R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$ .

Com o tensor de Ricci e o escalar de curvatura escrevemos as equações de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (4.1.15)$$

sendo  $G$  a constante de Newton,  $c$  a velocidade da luz e  $T_{\mu\nu}$  o tensor momento-energia, responsável pelo conteúdo material.

Na Teoria geométrica de Defeitos, a geometria é de Riemann-Cartan e, por definição, os tensores de torção e curvatura são iguais às densidades superficiais dos vetores de Burgers e de Frank <sup>1</sup> respectivamente. Assim, de (3.2.2),

$$\int_C dx^\mu \partial_\mu u^i(x) = b^i \doteq \int \int_S dx^\mu dx^\nu T_{\mu\nu}{}^i, \quad (4.1.16)$$

onde  $S$  é qualquer superfície limitada pelo contorno  $C$  [26]. Dessa forma, as deslocções atuam como fontes de torção no meio, uma vez que a presença delas é indicada pela existência de um vetor de Burgers diferente de zero.

Se o meio contém somente deslocções, a torção pode ser escrita em termos das triadas  $e_\nu{}^i$

$$T_{\mu\nu}{}^i = \partial_\mu e_\nu{}^i - \partial_\nu e_\mu{}^i, \quad (4.1.17)$$

onde elas satisfazem a relação

$$g_{\mu\nu} = e_\mu{}^i e_\nu{}^j \delta_{ij}, \quad (4.1.18)$$

com  $\det e_\mu{}^i \neq 0$ . As componentes inversas  $e^\mu{}_i$ , satisfazem

$$\delta_{ij} = e^\mu{}_i e^\nu{}_j g_{\mu\nu}. \quad (4.1.19)$$

Para mais detalhes do formalismo usado na Teoria Geométrica de Defeitos e como ela se relaciona com a Teoria da Elasticidade, ver [1, 26].

---

<sup>1</sup>Não iremos abordar aqui o vetor de Frank porque ele está associado a um outro tipo de defeito, chamado de desclinação, que aparece em cristais líquidos e está associado a deformidades na estrutura de spin.

## 5 DESLOCAÇÃO COM SIMETRIA ESFÉRICA

### 5.1 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

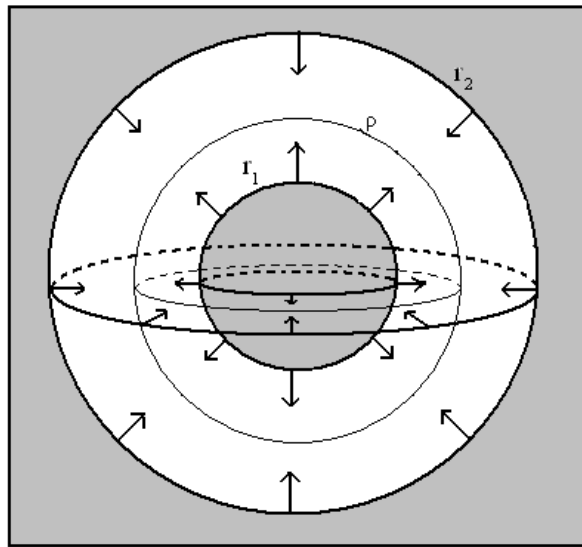
A partir de agora iremos tratar o problema de uma deslocação com simetria esférica do ponto de vista da teoria linear da elasticidade.

Consideremos um espaço euclidiano tridimensional  $\mathbb{R}^3$ , meio elástico infinito homogêneo e isotrópico, com coordenadas  $x^i, y^i, i = 1, 2, 3$ . A métrica euclidiana é denotada por  $\delta_{ij} = \text{diag}(+, +, +)$ . A variável básica na teoria da elasticidade é o campo do vetor deslocamento  $u^i(x), x \in \mathbb{R}$ , o qual mede o deslocamento de um ponto no meio elástico. Na ausência de forças externas, a equação que descreve o estado de equilíbrio do meio elástico é a (2.3.9):

$$(1 - 2\sigma)\Delta\mathbf{u} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0.$$

As condições de contorno para (2.3.9) serão dadas pelo problema a ser resolvido.

A deslocação esférica é mostrada na **Fig. 5.1**. Esta deslocação é produzida da seguinte maneira: cortamos uma casca esférica do meio material localizada entre as duas esferas de raios  $r_1$  e  $r_2$ , ( $r_1 < r_2$ ), e movemos as superfícies do corte uma em direção à outra colando em seguida. No estado de equilíbrio, a superfície onde ocorreu a identificação terá um raio  $\rho$ . Apresentamos um caso onde parte do material foi removido. O contrário também pode ser feito (adicionar material ao meio).



**Figura 5.1:** Deslocação produzida ao ser retirado material da casca esférica e posterior identificação das superfícies esféricas de raio  $r_1$  e  $r_2$  com a superfície de raio  $\rho$ .

O problema será formulado e resolvido em coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  devido à simetria. Denotaremos as componentes do vetor deslocamento em coordenadas esféricas por  $u^r, u^\theta, u^\phi$ . No nosso caso,  $u^\theta = u^\phi = 0$  por simetria, e a componente radial,  $u^r$ , depende somente do raio  $r$ ,  $u^r = u^r(r) = u(r)$ . Na nossa notação, o ponto com coordenadas  $y^i$ , depois da deslocação, foi movido para o ponto com coordenadas  $x^i$ . Denotamos por  $y^i = (y, \theta, \phi)$ , em coordenadas esféricas, as coordenadas antigas e por  $x^i = (r, \theta, \phi)$  as novas coordenadas. Somente a coordenada radial muda após a deslocação  $y \rightarrow r$ , os ângulos não são alterados. Dessa forma, teremos para a mudança das coordenadas a expressão

$$y^i \rightarrow x^i = y^i + u^i(x), \quad (5.1.1)$$

com o vetor deslocamento sendo a diferença entre as coordenadas novas e as antigas,  $u^i(x) = x^i - y^i$ . As componentes do vetor deslocamento devem ser funções das novas coordenadas porque na presença de deslocações as coordenadas antigas  $y^i$  não cobrem todo o espaço [8].

## 5.2 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Para resolver (2.3.9) no nosso problema, vamos escrever o laplaciano da componente radial do vetor deslocamento, a única não-nula, e a divergência em coordenadas esféricas:

$$\Delta \mathbf{u} \Big|_r = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r u) - \frac{2}{r^2} u, \quad (5.2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 u). \quad (5.2.2)$$

Assim, substituindo (5.2.1) e (5.2.2) em (2.3.9), encontramos

$$(1 - 2\sigma) \left[ \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r u) - \frac{2}{r^2} u \right] + \partial_r \left[ \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 u) \right] = 0. \quad (5.2.3)$$

Se, no primeiro termo de (5.2.3), calcularmos a derivada e depois agruparmos os termos, encontraremos

$$\left[ \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r u) - \frac{2}{r^2} u \right] = \partial_r \left[ \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 u) \right].$$

Então, (5.2.3) resulta em

$$(2 - 2\sigma) \left\{ \partial_r \left[ \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 u) \right] \right\} = 0. \quad (5.2.4)$$

Como  $\sigma \neq 1$ , de (2.3.4), temos

$$\partial_r \left[ \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 u) \right] = 0. \quad (5.2.5)$$

Então, a solução geral de (5.2.5) é da forma

$$u(r) = \frac{C_1}{3} r + \frac{C_2}{r^2} \quad (5.2.6)$$

com  $C_1$  e  $C_2$  constantes de integração.

A expressão (5.2.6), é a solução geral para o vetor deslocamento, quando este possui somente a componente radial, na teoria linear da elasticidade. Quando existem deslocções no meio, o vetor deslocamento apresenta descontinuidades [26], sendo assim, de (5.2.6), obtemos duas soluções para o nosso caso, a saber, uma solução interna e outra externa à superfície esférica onde ocorreu a identificação.



## 5.2.1 A Solução Interna

Para encontrarmos a forma explícita da solução interna, devemos estabelecer as condições de contorno que o vetor deslocamento deve satisfazer. As condições são

$$\lim_{r \rightarrow 0} u(r) = 0, \quad (5.2.7)$$

$$\lim_{r \rightarrow \rho^-} u(r) = \rho - r_1. \quad (5.2.8)$$

A condição (5.2.7) é para que não tenha deslocamento na origem. Já a condição (5.2.8), vem de (5.1.1) pois  $r = \rho$  quando  $y = r_1$  no processo de identificação. Assim, de (5.2.6) com as condições (5.2.7) e (5.2.8), encontramos os valores das constantes de integração

$$C_1 = 3 \left( \frac{\rho - r_1}{\rho} \right),$$

$$C_2 = 0.$$

Dessa forma, encontramos como solução para a região interna

$$u_{int}(r) = \left( \frac{\rho - r_1}{\rho} \right) r, \quad 0 \leq r \leq \rho. \quad (5.2.9)$$

## 5.2.2 A Solução Externa

Para a solução externa, as condições de contorno são

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(r) = 0, \quad (5.2.10)$$

$$\lim_{r \rightarrow \rho^+} u(r) = \rho - r_2. \quad (5.2.11)$$

A condição (5.2.10) é necessária desde que assumimos que o defeito não exerce efeito algum no infinito. A condição (5.2.11) também vem de (5.1.1), pois  $r = \rho$  quando  $y = r_2$  no processo de identificação. Então, de (5.2.6) com as condições (5.2.10) e (5.2.11), encontramos

$$C_1 = 0,$$

$$C_2 = -\rho^2(r_2 - \rho).$$

Então a solução externa é da forma

$$u_{ext}(r) = -\frac{\rho^2(r_2 - \rho)}{r^2}, \quad \rho < r < \infty. \quad (5.2.12)$$

### 5.2.3 A Descontinuidade em $u$

Das soluções (5.2.9) e (5.2.12), podemos encontrar a descontinuidade do vetor deslocamento  $u$  na superfície de identificação,

$$\lim_{r \rightarrow \rho^-} u_{int}(r) - \lim_{r \rightarrow \rho^+} u_{ext}(r) = r_2 - r_1 = l. \quad (5.2.13)$$

Chamamos de  $l$  a espessura da casca esférica de material que foi retirada (ou adicionada, dependendo do caso) do meio.

De (5.2.13), vemos que na superfície de identificação, as derivadas laterais de (5.2.9) e (5.2.12) coincidem, esta continuidade da derivada do vetor deslocamento é garantida pelo teorema de Weingarten [22], portanto

$$\left. \frac{du_{int}(r)}{dr} \right|_{r \rightarrow \rho^-} = \left. \frac{du_{ext}(r)}{dr} \right|_{r \rightarrow \rho^+}. \quad (5.2.14)$$

Então, de (5.2.9), (5.2.12) e (5.2.14), encontramos o valor do raio da superfície de identificação no estado de equilíbrio,

$$\rho = \frac{2r_2 + r_1}{3}. \quad (5.2.15)$$

Diferentemente do caso cilíndrico [8], este valor não é a média aritmética de  $r_1$  e  $r_2$ .

Vamos escrever  $u$  em termos de  $l$  e  $\rho$ . Para isso, usamos (5.2.15) e (5.2.13) e encontramos

$$r_1 = \frac{3\rho - 2l}{3}, \quad (5.2.16)$$

$$r_2 = \frac{3\rho + l}{3}. \quad (5.2.17)$$

Então, as soluções (5.2.9) e (5.2.12) ficam na forma

$$u_{int}(r) = \frac{2l}{3\rho}r, \quad 0 \leq r \leq \rho, \quad (5.2.18)$$

$$u_{ext}(r) = -\frac{l\rho^2}{3r^2}, \quad \rho < r < \infty. \quad (5.2.19)$$

## 5.2.4 A Métrica Induzida

Agora, vamos calcular as componentes da métrica induzida pela deslocação. Antes da deformação, a métrica, em coordenadas esféricas, era dada por

$$\tilde{g}_{ij} = \text{diag}(1, (y)^2, (y)^2 \sin^2 \theta). \quad (5.2.20)$$

A deformação causa uma mudança na métrica  $\tilde{g}_{ij}$ , dada por

$$g_{ij} = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \tilde{g}_{kl}. \quad (5.2.21)$$

Como as coordenadas angulares não mudaram,  $x^2 = y^2 = \theta$  e  $x^3 = y^3 = \phi$ . Portanto, as componentes da métrica induzida serão

$$g_{rr} = \left( \frac{\partial y}{\partial r} \right)^2, \quad (5.2.22)$$

$$g_{\theta\theta} = (y)^2, \quad (5.2.23)$$

$$g_{\phi\phi} = (y)^2 \sin^2 \theta, \quad (5.2.24)$$

com  $g_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ .

De (5.1.1), a transformação da coordenada radial é escrita na forma

$$y = r - u(r). \quad (5.2.25)$$

Assim, de (5.2.22), (5.2.23), (5.2.24) e (5.2.25), obtemos

$$g_{rr} = (1 - u')^2, \quad (5.2.26)$$

$$g_{\theta\theta} = (r - u)^2, \quad (5.2.27)$$

$$g_{\phi\phi} = (r - u)^2 \sin^2 \theta. \quad (5.2.28)$$

E o elemento de linha será dado por

$$ds^2 = (1 - u')^2 dr^2 + (r - u)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (5.2.29)$$

Como  $u$  é descontínua em  $\rho$ , vamos escrever os elementos de linha para cada região separadamente. Assim, de (5.2.18), para a região interna teremos

$$ds_{int}^2 = \left( 1 - \frac{2l}{3\rho} \right)^2 [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (5.2.30)$$

ou seja, a métrica induzida interna é conformalmente plana globalmente, pois  $\left(1 - \frac{2l}{3\rho}\right)^2$  é constante. Neste caso, temos

$$g_{ij}^{(int)} = \left(1 - \frac{2l}{3\rho}\right)^2 \tilde{g}_{ij}. \quad (5.2.31)$$

Para a região externa, e de (5.2.19), o elemento de linha será dado por

$$ds_{ext}^2 = \left(1 - \frac{2l\rho^2}{3r^3}\right)^2 dr^2 + \left(1 + \frac{l\rho^2}{3r^3}\right)^2 r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (5.2.32)$$

Esta métrica não é conformalmente plana. Tanto para (5.2.30) como para (5.2.32), as componentes do tensor de Riemann (4.1.14) são nulas, ou seja, o meio é plano. Isto ocorre porque nestas regiões ocorreram difeomorfismos entre estes domínios e o espaço euclidiano, e como este último possui curvatura nula, o mesmo deve acontecer com estes dois domínios. Somente na superfície onde ocorreu a identificação é que a curvatura não é nula. Passaremos agora a mostrar esta última afirmação.

Primeiramente, voltemos às expressões para o vetor deslocamento (5.2.18) e (5.2.19). Podemos escrevê-las numa única forma por meio da função de Heaviside

$$H(r - \rho) = \begin{cases} 1, & \text{se } r > \rho, \\ 0, & \text{se } r \leq \rho, \end{cases}$$

na seguinte maneira

$$u(r) = \frac{2l}{3\rho} r H(\rho - r) - \frac{l\rho^2}{3r^2} H(r - \rho), \quad (5.2.33)$$

onde

$$H(\rho - r) = 1 - H(r - \rho).$$

Também temos as seguintes propriedades de  $H(r - \rho)$ :

$$\frac{dH(r - \rho)}{dr} = \delta(r - \rho),$$

e

$$\frac{dH(\rho - r)}{dr} = -\delta(r - \rho).$$

Então, derivando (5.2.33), encontramos

$$\frac{du(r)}{dr} = u'(r) = \frac{2l}{3\rho} H(\rho - r) + \frac{2l\rho^2}{3r^2} H(r - \rho) - l\delta(r - \rho). \quad (5.2.34)$$

Chamando de  $v(r)$  a quantidade

$$\frac{2l}{3\rho} H(\rho - r) + \frac{2l\rho^2}{3r^2} H(r - \rho),$$

ficamos com

$$u'(r) = v(r) - l\delta(r - \rho). \quad (5.2.35)$$

Agora, substituindo (5.2.33) e (5.2.35) em (5.2.29), definimos a métrica para um meio com uma deslocação com simetria esférica como

$$ds^2 = (1 - v)^2 dr^2 + (r - u)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (5.2.36)$$

A componente  $g_{rr}$  deve ser colocada desta forma, sem o termo com  $\delta(r - \rho)$ , para que o vetor de Burgers possa ser escrito como uma integral de superfície [8].

## 5.2.5 Algumas Quantidades Geométricas

As componentes da métrica (5.2.36) são

$$g_{rr} = (1 - v)^2, \quad (5.2.37)$$

$$g_{\theta\theta} = (r - u)^2,$$

$$g_{\phi\phi} = (r - u)^2 \sin^2 \theta,$$

com inversas

$$g^{rr} = \frac{1}{(1 - v)^2}, \quad (5.2.38)$$

$$g^{\theta\theta} = \frac{1}{(r - u)^2}, \quad (5.2.39)$$

$$g^{\phi\phi} = \frac{1}{(r - u)^2 \sin^2 \theta}. \quad (5.2.40)$$

Sendo  $g$  o determinante do tensor métrico  $g_{ij}$ ,

$$\sqrt{|g|} = (1 - v)(r - u)^2 \sin \theta. \quad (5.2.41)$$

Os símbolos de Christoffel de segundo tipo são dados por:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{mi} (\partial_j g_{mk} + \partial_k g_{mj} - \partial_m g_{jk}), \quad (5.2.42)$$

com  $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ . Então, para a métrica (5.2.36), temos

$$\Gamma^r_{rr} = -\frac{v'}{(1-v)}, \quad (5.2.43)$$

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -\frac{(r-u)}{(1-v)^2} [(1-v) + l\delta(r-\rho)], \quad (5.2.44)$$

$$\Gamma^r_{\phi\phi} = -\frac{(r-u)}{(1-v)^2} [(1-v) + l\delta(r-\rho)] \sin^2 \theta, \quad (5.2.45)$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{(r-u)} [(1-v) + l\delta(r-\rho)], \quad (5.2.46)$$

$$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin \theta \cos \theta, \quad (5.2.47)$$

$$\Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{(r-u)} [(1-v) + l\delta(r-\rho)], \quad (5.2.48)$$

$$\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \quad (5.2.49)$$

As componentes do tensor de Riemann para a métrica (5.2.36), com as componentes tendo todos os índices abaixados, podem ser escritas na forma

$$R_{r\theta r\theta} = -l(r-u) \left[ \delta'(r-\rho) + \frac{v'}{(1-v)} \delta(r-\rho) \right], \quad (5.2.50)$$

$$R_{r\phi r\phi} = -l(r-u) \left[ \delta'(r-\rho) + \frac{v'}{(1-v)} \delta(r-\rho) \right] \sin^2 \theta, \quad (5.2.51)$$

$$R_{\theta\phi\theta\phi} = -l(r-u)^2 \left[ \frac{2}{(1-v)} \delta(r-\rho) + \frac{l}{(1-v)^2} \delta^2(r-\rho) \right] \sin^2 \theta, \quad (5.2.52)$$

com  $\delta'(r-\rho) = d\delta(r-\rho)/dr$ .

As componentes do tensor de Ricci são dadas por:

$$R_{\nu\beta} = R^\mu_{\nu\mu\beta}. \quad (5.2.53)$$

Então, para a métrica (5.2.36):

$$R_{rr} = -\frac{2l}{(r-u)} \left[ \delta'(r-\rho) + \frac{v'}{(1-v)} \delta(r-\rho) \right], \quad (5.2.54)$$

$$\begin{aligned} R_{\theta\theta} = & -\frac{l}{(1-v)^3} \{ (1-v)(r-u)\delta'(r-\rho) + \\ & + [v'(r-u) + 2(1-v)^2] \delta(r-\rho) + \\ & + l(1-v)\delta^2(r-\rho) \}, \end{aligned} \quad (5.2.55)$$

$$\begin{aligned} R_{\phi\phi} = & -\frac{l}{(1-v)^3} \{ (1-v)(r-u)\delta'(r-\rho) + \\ & + [v'(r-u) + 2(1-v)^2] \delta(r-\rho) + \\ & + l(1-v)\delta^2(r-\rho) \} \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (5.2.56)$$

O escalar de curvatura  $R$  é dado por:

$$R = R^\mu{}_\mu. \quad (5.2.57)$$

Então

$$\begin{aligned} R = & -\frac{4l}{(r-u)^2(1-v)^3} \{ (r-u)(1-v)\delta'(r-\rho) + \\ & + [v'(r-u) + (1-v)^2] \delta(r-\rho) \} - \\ & -\frac{2l^2}{(r-u)^2(1-v)^2} \delta^2(r-\rho). \end{aligned} \quad (5.2.58)$$

O tensor de Einstein é dado por:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (5.2.59)$$

Então, para a métrica (5.2.36), obtemos

$$G_{rr} = \frac{l}{(r-u)^2} [2(1-v)\delta(r-\rho) + l\delta^2(r-\rho)], \quad (5.2.60)$$

$$G_{\theta\theta} = \frac{l(r-u)}{(1-v)^2} \left[ \delta'(r-\rho) + \frac{v'}{(1-v)} \delta(r-\rho) \right], \quad (5.2.61)$$

$$G_{\phi\phi} = \frac{l(r-u)}{(1-v)^2} \left[ \delta'(r-\rho) + \frac{v'}{(1-v)} \delta(r-\rho) \right] \sin^2 \theta. \quad (5.2.62)$$

As componentes do tensor momento-energia  $T_{\mu\nu}$ , na abordagem da Teoria Geométrica de Defeitos, podem ser escritas na forma

$$-\frac{1}{2}T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (5.2.63)$$

Então:

$$T_{rr} = -\frac{2l}{(r-u)^2} [2(1-v)\delta(r-\rho) + l\delta^2(r-\rho)], \quad (5.2.64)$$

$$T_{\theta\theta} = -\frac{2l(r-u)}{(1-v)^2} \left[ \delta'(r-\rho) + \frac{v'}{(1-v)} \delta(r-\rho) \right], \quad (5.2.65)$$

$$T_{\phi\phi} = -\frac{2l(r-u)}{(1-v)^2} \left[ \delta'(r-\rho) + \frac{v'}{(1-v)} \delta(r-\rho) \right] \sin^2 \theta. \quad (5.2.66)$$

Como afirmamos anteriormente, a curvatura do meio só é diferente de zero na superfície de identificação, as deltas de Dirac que aparecem em todas estas quantidades geométricas indicam isso.

Para compreender esses resultados, devemos observar que, em geral, para uma função  $f(x)$

contínua em  $x_0$ , temos

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0).$$

Então, se por um lado,  $\delta(x-x_0)$  é uma distribuição bem definida, quantidades como  $H(x-x_0)\delta(x-x_0)$  são ambíguas. Em outras palavras, a integral  $\int f(x)\delta(x-x_0)dx$  não é definida se  $f(x)$  é descontínua em  $x_0$ , pois  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ . Então, deltas de Dirac multiplicadas por funções descontínuas são ambíguas. Quantidades como  $\delta(x-x_0)\delta(x-x_0)$  também se enquadram nessa categoria. As expressões (5.2.64), (5.2.65) e (5.2.66) contém vários termos ambíguos. Em [8], esses termos puderam ser cancelados, o que não acontece aqui. Isso indica problemas potenciais para a abordagem dentro da Teoria Geométrica de Defeitos. Desse modo, é conveniente e suficiente nos restringirmos à abordagem da Teoria da Elasticidade.

## 5.2.6 Geodésicas

Para a região interna, de métrica (5.2.30), o fator conforme é constante e por isso pode ser cancelado na conexão (5.2.42):

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -r, \quad (5.2.67)$$

$$\Gamma^r_{\phi\phi} = -r \sin^2 \theta, \quad (5.2.68)$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r}, \quad (5.2.69)$$

$$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin \theta \cos \theta, \quad (5.2.70)$$

$$\Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{r}, \quad (5.2.71)$$

$$\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \quad (5.2.72)$$

Sendo assim, as geodésicas (4.1.13) são triviais. Elas correspondem às retas euclidianas em coordenadas esféricas.

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 = 0, \quad (5.2.73)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = 0, \quad (5.2.74)$$

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\phi} + 2\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\dot{\theta}\dot{\phi} = 0. \quad (5.2.75)$$

Uma quantidade  $\dot{a}$  significa uma derivada em relação ao parâmetro afim  $\tau$ ,  $\dot{a} = \frac{da}{d\tau}$ .

Para a região externa, de métrica (5.2.32), o mesmo fator não pode ser cancelado nos sím-



bolos de Christoffel:

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{6l\rho^2}{r(3r^3 - 2l\rho^2)}, \quad (5.2.76)$$

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -\frac{r(3r^3 + l\rho^2)}{(3r^3 - 2l\rho^2)}, \quad (5.2.77)$$

$$\Gamma^r_{\phi\phi} = -\frac{r(3r^3 + l\rho^2)}{(3r^3 - 2l\rho^2)} \sin^2 \theta, \quad (5.2.78)$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{(3r^3 - 2l\rho^2)}{r(3r^3 + l\rho^2)}, \quad (5.2.79)$$

$$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin \theta \cos \theta, \quad (5.2.80)$$

$$\Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{(3r^3 - 2l\rho^2)}{r(3r^3 + l\rho^2)}, \quad (5.2.81)$$

$$\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \quad (5.2.82)$$

Para esta região, as geodésicas são

$$\ddot{r} + \frac{6l\rho^2}{r(3r^3 - 2l\rho^2)} \dot{r}^2 - \frac{r(3r^3 + l\rho^2)}{(3r^3 - 2l\rho^2)} \dot{\theta}^2 - \frac{r(3r^3 + l\rho^2)}{(3r^3 - 2l\rho^2)} \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 = 0, \quad (5.2.83)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2(3r^3 - 2l\rho^2)}{r(3r^3 + l\rho^2)} \dot{r}\dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = 0, \quad (5.2.84)$$

$$\ddot{\phi} + \frac{2(3r^3 - 2l\rho^2)}{r(3r^3 + l\rho^2)} \dot{r}\dot{\phi} + 2\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \dot{\theta}\dot{\phi} = 0. \quad (5.2.85)$$

Vamos considerar somente o movimento radial, isto é, para  $\theta$  e  $\phi$  constantes. Dessa forma, só ficamos com uma equação

$$\ddot{r} + \frac{6l\rho^2}{r(3r^3 - 2l\rho^2)} \dot{r}^2 = 0. \quad (5.2.86)$$

Esta equação pode ser resolvida da seguinte maneira: dividimos por  $\dot{r}$  e integramos pelo método de frações parciais. Então

$$\dot{r} = \frac{Ar^3}{3r^3 - 2l\rho^2}, \quad (5.2.87)$$

onde  $A$  é uma constante de integração dada explicitamente por

$$A = \dot{r}_0 \left( \frac{3r_0^3 - 2l\rho^2}{r_0^3} \right), \quad (5.2.88)$$

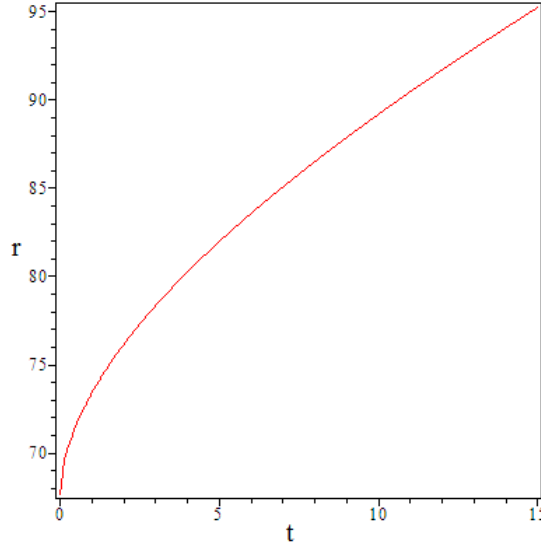
com  $\dot{r}_0$  e  $r_0$  a velocidade e a posição iniciais.

Com uma simples integração de (5.2.87) encontramos

$$r + \frac{l\rho^2}{3r^2} + \alpha t + \beta = 0, \quad (5.2.89)$$

onde  $\alpha = -\frac{A}{3}$  e  $\beta = -\left(\frac{3r_0^3 + l\rho^2}{3r_0^3}\right)$ .

Na **Fig. 5.2**, é mostrada a curva radial para (5.2.89).



**Figura 5.2:** Curva radial com  $l = 100$ ,  $r_0 = \rho = \frac{203}{3}$  e  $\dot{r}_0 = 50$ .

Próximo ao defeito, a curva difere da reta, mas longe do defeito ela tende para uma reta como é esperado.

Antes de investigar órbitas mais gerais, podemos obter uma informação interessante de (5.2.83). Considere  $\dot{r} = 0$ . Isso significa uma órbita numa casca esférica superficial (ou num círculo num caso mais particular). Fazendo  $\dot{r} = 0$ , temos

$$\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi} = 0.$$

Esta relação proíbe  $\dot{\theta} \neq 0$  e  $\dot{\phi} \neq 0$ . Então o movimento restrito a uma casca esférica superficial não é possível. Se  $\dot{r} = 0$ , então a partícula deverá estar em repouso.

Fazendo  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ( $\dot{\theta} = 0$ ), movimento no plano, obtemos

$$\ddot{r} + \frac{6l\rho^2}{r(3r^3 - 2l\rho^2)}\dot{r}^2 - \frac{r(3r^3 + l\rho^2)}{(3r^3 - 2l\rho^2)}\dot{\phi}^2 = 0, \quad (5.2.90)$$

$$\ddot{\phi} + \frac{2(3r^3 - 2l\rho^2)}{r(3r^3 + l\rho^2)}\dot{r}\dot{\phi} = 0. \quad (5.2.91)$$

A equação (5.2.91) pode ser resolvida dividindo por  $\dot{\phi}$  e integrando pelo método das frações parciais. Então

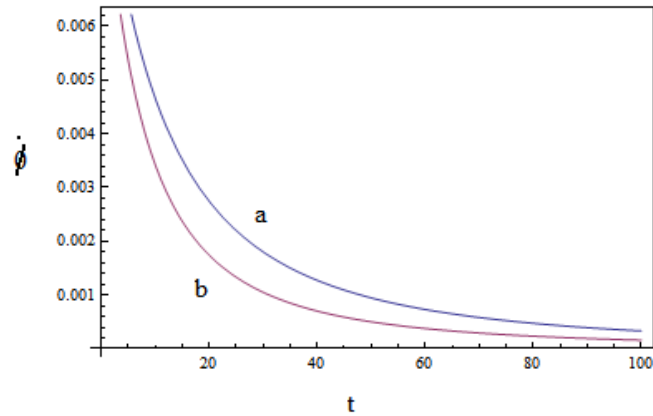
$$\dot{\phi} = \frac{Br^4}{(3r^3 + l\rho^2)^2}, \quad (5.2.92)$$

onde  $B$  é uma constante de integração dada por

$$B = \dot{\phi}_0 \frac{(3r_0^3 + l\rho^2)^2}{r_0^4}, \quad (5.2.93)$$

com  $\dot{\phi}_0$  e  $r_0$  a velocidade angular e a posição iniciais.

Na **Fig. 5.3** é mostrada a comparação de (5.2.92) para os casos com defeito,  $a$ , e sem defeito,  $b$ , para as mesmas condições iniciais.



**Figura 5.3:** Comparação de  $\dot{\phi}$  para os casos com e sem defeito onde  $l = 2$ ,  $\rho = 7/3$ ,  $r_0 = 3$  e  $\dot{\phi}_0 = 2$ . A curva  $a$  é para o caso com defeito.

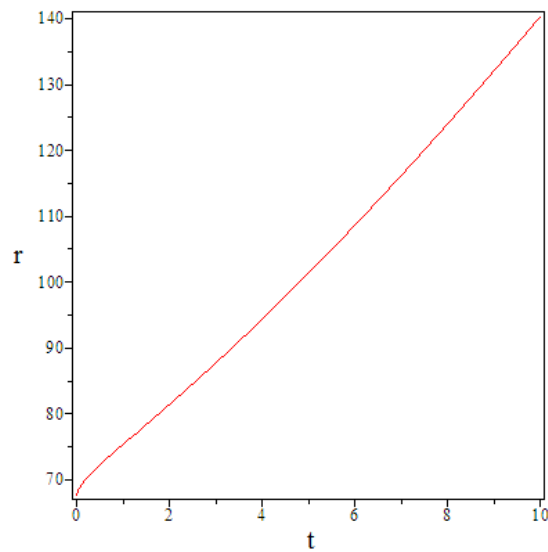
Substituindo (5.2.92) em (5.2.90), obtemos

$$\ddot{r} + \frac{6l\rho^2}{r(3r^3 - 2l\rho^2)} \dot{r}^2 - \frac{B^2 r^9}{(3r^3 - 2l\rho^2)(3r^3 + l\rho^2)^3} = 0. \quad (5.2.94)$$

Numa região distante do defeito, onde  $r^3 \gg l\rho^2$ ,  $\dot{\phi} \sim r^{-2}$  e (5.2.94) pode ser aproximada para

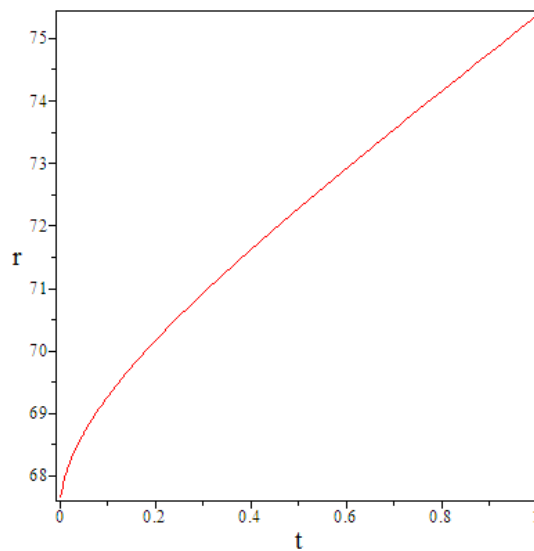
$$\ddot{r} + \frac{2l\rho^2}{r^4} \dot{r}^2 - \frac{B^2}{81r^3} = 0. \quad (5.2.95)$$

Na **Fig. 5.4**, é mostrada a curva para (5.2.94).

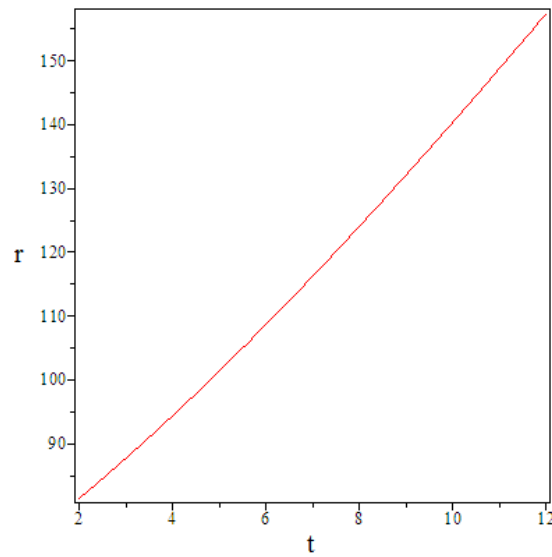


**Figura 5.4:** Curva radial com  $l = 100$ ,  $r_0 = \rho = \frac{203}{3}$  e  $\dot{r}_0 = 50$ .

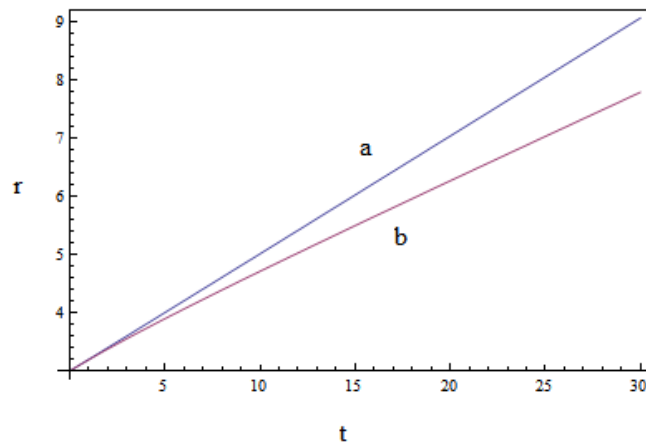
Mais uma vez notamos uma desaceleração nas proximidades do defeito e uma leve aceleração, devido à velocidade angular não nula, à medida que a partícula se afasta dele como pode ser visto nas **Fig. 5.5** e **Fig. 5.6**. Longe da superfície de identificação a curva tende para uma reta, **Fig. 5.7**.



**Figura 5.5:** Curva radial com  $l = 100$ ,  $r_0 = \rho = \frac{203}{3}$  e  $\dot{r}_0 = 50$ .



**Figura 5.6:** Curva radial com  $l = 100$ ,  $r_0 = \rho = \frac{203}{3}$  e  $\dot{r}_0 = 50$ .



**Figura 5.7:** Comparação de  $r$  para os casos sem defeito,  $a$ , e com defeito  $b$ , com  $l = 2$ ,  $\rho = 7/3$ ,  $r_0 = 3$  e  $\dot{r}_0 = 2$ .

Nesta região a curvatura é nula, portanto o espaço é plano, mas mesmo assim o defeito exerce uma influência na geometria do meio como pode ser visto nestas curvas. O defeito mesmo estando localizado na superfície onde ocorreu a identificação altera a geometria do meio influenciando nas trajetórias das partículas livres.

## 6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Neste trabalho estudamos um meio com um defeito, conhecido como deslocação, possuindo simetria esférica. Resolvemos a equação para o estado de equilíbrio na Teoria Linear da Elasticidade e encontramos o vetor deslocamento. Na presença de defeitos o vetor deslocamento possui descontinuidades. Encontramos a métrica para o tal meio e a dividimos em duas partes, cada uma descrevendo uma região. Para a região interna a métrica é conformalmente plana, e a curvatura é nula em ambas. Escrevemos também a métrica para o espaço inteiro, considerando a superfície onde está localizado o defeito, e obtemos descontinuidades nas componentes do tensor métrico bem como curvatura não-nula. As componentes dos tensores de Riemann, Ricci e momento-energia dependem de funções  $\delta(r - \rho)$  e sua derivada  $\delta'(r - \rho)$  como também de produtos do tipo  $\delta^2(r - \rho)$ . Estes resultados levam a ambiguidades porque não é bem definido este último produto nem o produto de funções  $\delta$  por uma função descontínua, no caso o vetor deslocamento  $u$ . Este resultado não aparece se a simetria é cilíndrica [8], lá todos os termos ambíguos são cancelados. Resolvemos as equações geodésicas para os movimentos radial e no plano equatorial, na região externa, e observamos que o defeito mesmo localizado exerce influência sobre o movimento de partículas livres. Um próximo passo no trabalho seria resolver o mesmo problema inteiramente dentro da Teoria Geométrica de Defeitos e comparar os resultados. Também pode ser feito um estudo sobre a influência deste tipo de defeito com simetria esférica na equação de Schrödinger [9] e como ele modifica os níveis de energia de uma partícula livre.

## REFERÊNCIAS

- [1] KATANAEV, M. O.; VOLOVICH, I. V. *Theory of defects in solids and three-dimensional gravity*. Annals of Physics, **216** (1), 1 - 28 (1992).
- [2] KADIC, A.; EDELEN, D. G. B. *A gauge theory of dislocations and disclinations*. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [3] FURTADO, C.; DA CUNHA, B. G. C.; MORAES, F.; BEZERRA DE MELLO, E. R.; BEZERRA, V. B. *Landau levels in presence of disclinations*. Physics Letters A, **195**, 90 - 94 (1994).
- [4] AZEVEDO, S.; MORAES, F. *Topological Aharonov-Bohm effect around a disclination*. Physics Letters A, **246**, 374 - 376 (1998).
- [5] DE LIMA RIBEIRO, C. A.; FURTADO, C.; MORAES, F. *On the localization of electrons and holes by a disclination core*. Physics Letters A, **288**, 329 - 334 (2001).
- [6] MORAES, F. *Geodesics around a dislocation*. Physics Letters A, **214**, 189 - 192 (1996).
- [7] KATANAEV, M. O.; VOLOVICH, I. V. *Scattering on dislocations and cosmic strings in the geometric theory of defects*. Annals of Physics, **271**, 203 - 232 (1999).
- [8] DE BERREDO-PEIXOTO, G.; KATANAEV, M. O. *Tube dislocations in gravity*. Journal of Mathematical Physics, **50**, 042501 (2009).
- [9] DE BERREDO-PEIXOTO, G.; KATANAEV, M. O.; KONSTANTINOVA, E.; SHAPIRO, I. L. *Schrödinger equation in the space with cylindrical geometric defect and possible application to multi-wall nanotubes*. Il Nuovo Cimento, **125 B**, (8), 915 - 931 (2010).
- [10] AMENZADE, Y. A. *Theory of elasticity*. Moscow: Mir Publishers, 1979.
- [11] TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. *Theory of elasticity*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1951.
- [12] KOSSEVICH, A. M. *The crystal lattice: phonons, solitons, dislocations*. Berlin: Wiley-Vch, 1999.
- [13] FILONENKO-BORODICH, M. M. *Theory of elasticity*. Moscow: Peace Publishers, 1963.
- [14] LOVE, A. E. H. *Treatise on the mathematical theory of elasticity*. 4 ed. New York: Dover Publications, 1944.
- [15] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Theory of elasticity*. 3 ed. vol. 7. Elsevier, 2005.

- [16] HIRTH, J. P.; LOTHE, J. *Theory of dislocations*. 2 ed. New York: John Wiley & Sons, 1992.
- [17] LURIE, A. I. *Theory of elasticity*. New York: Springer-Verlag, 2005.
- [18] SCHWARZENBACH, D. *Crystallography*. New York: John Wiley & Sons, 1996.
- [19] PUNTIGAM, R. A.; SOLENG, H. H. *Volterra distortions, spinning strings, and cosmic defects*. *Classical and Quantum Gravity*, **14**, 1129 - 1149 (1997).
- [20] CHAIKIN, P. M.; LUBENSKY, T. C. *Principles of condensed matter physics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- [21] KITTEL, C. *Introduction to solid state physics*. 8 ed. New York: John Wiley & Sons, 2005.
- [22] KLEINERT, H. *Gauge fields in condensed matter*. vol. 2. Singapore: World Scientific, 1989.
- [23] HAMMOND, R. T. *Torsion gravity*. *Reports on Progress in Physics*, **65**, 599 - 649 (2002).
- [24] HEHL, F. W.; OBUKHOV, Y. N. *Élie Cartan's torsion in geometry and in field theory, an essay*. arXiv: gr-qc/07111535 v1 9 Nov 2007.
- [25] SHAPIRO, I. L. *Physical aspects of the space-time torsion*. *Physics Reports*, **357** (2), 113 - 213 (2002).
- [26] KATANAEV, M. O. *Geometric theory of defects*. *Physics-Uspekhi*, **48**, 675 - 701 (2005).
- [27] KATANAEV, M. O. *Wedge dislocation in the geometric theory of defects*. *Theoretical and Mathematical Physics*, **135**, 733 - 744 (2003).
- [28] DUBROVIN, B. A.; FOMENKO, A. T.; NOVIKOV, S. P. *Modern geometry: methods and applications*. Part I. *The geometry of surfaces, transformation groups, and fields*. 2 ed. New York: Springer-Verlag, 1992.