

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Emanuel Antonio de Freitas

**Transformação Conforme e Modelo  
Cosmológico com Spin na Teoria de  
Einstein-Cartan**

Orientador: Prof. Dr. Guilherme de Berredo-Peixoto

Juiz de Fora – MG

2010

Emanuel Antonio de Freitas

**Transformação Conforme e Modelo Cosmológico com Spin na  
Teoria de Einstein-Cartan**

Dissertação de Doutorado apresentada  
ao Programa de Pós-graduação em Física,  
da Universidade Federal de Juiz de Fora,  
como requisito parcial para obtenção do  
grau de Doutor.

Orientador: Prof. Dr. Guilherme de Berredo-Peixoto

Juiz de Fora - MG

2010

Dedico este trabalho à memória de Balbina  
Brugger Fernandes, Ildefonso Fernandes e  
Joaquim Carolina.

## Agradecimentos

- A Deus;
- aos meus pais Manoel Antonio de Freitas, Maria Aparecida Fernandes de Freitas, ao meu filho Stefan Menicucci Freitas e ao meu irmão Daniel Antonio de Freitas por todo apoio e carinho;
- Ao Prof. Guilherme de Berredo-Peixoto, por sugerir os problemas nos quais trabalhei, pela orientação e esclarecimentos em questões técnicas e científicas, bem como na análise dos resultados, e pela ajuda na preparação do texto da tese;
- Ao Prof. Ilya L. Shapiro, pelos esclarecimentos prestados em questões técnicas e científicas, pela orientação e pelas valiosas sugestões na preparação da tese;
- Ao Departamento de Física da UFJF, por me proporcionar excelentes condições de trabalho, em especial a assistência de seu quadro administrativo e técnico;
- Ao amigo Humberto de Alencar Vieira Barros por todo apoio, pela amizade e pelos valiosos conselhos;
- Aos colegas e amigos que fiz durante o mestrado e doutorado pelo apoio e amizade;
- ao amigo Bruno Gonçalves pelo apoio e amizade;
- aos amigos Marcelo Pêgo Gomes e professor Paulo José Santos pelos valiosos conselhos, pelo apoio e pela amizade;
- Às professoras Maria Gertrudes Neves Mendes, Roberta Calvano e à funcionária Carla Condé Marques e Oliveira do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia-Sudeste de Minas Gerais, Campus Juiz de Fora pelo apoio;
- Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia-Sudeste de Minas Gerais, Campus Juiz de Fora pelo apoio;
- À FAPEMIG.

## Resumo

No estudo da Gravitação é possível escrever a métrica utilizando um fator conforme, sendo a simetria conforme um aspecto importante em Cosmologia. Assim, apresentamos nesta tese um estudo sobre esse tópico na primeira parte do trabalho, no qual estão incluídas técnicas de cálculo de termos lineares e quadráticos na curvatura em exemplos de interesse físico. A importância de tais técnicas está no fato de possibilitarem a obtenção das equações, necessárias no estudo da gravitação, através de um procedimento eficaz com maior simplicidade com relação ao método tradicional. Em seguida foi realizada uma investigação dos efeitos da torção na teoria de Einstein-Cartan para o universo primordial. Nesta tese foi realizado um estudo das soluções para um fluido de spin relativístico de Weyssenhoff homogêneo e isotrópico e uma corrente axial tipo-tempo, também homogênea e isotrópica. As soluções gerais podem ser descritas em termos de três soluções particulares. As propriedades e aspectos dessas soluções, tais como ausência de singularidade e expansão acelerada, foram analisadas e dependem das relações entre os parâmetros das fontes.

Palavras-chave: Torção, Fluido de Weyssenhoff, Cosmologia, Inflação.

## Abstract

In gravitation, it is possible to write metric tensor using a conformal factor. In this sense, conformal symmetry is an important feature in Cosmology. We firstly present a useful study on this subject, along with several techniques of calculating linear and quadratic terms on curvature. Next, we investigate the effects of torsion in the framework of Einstein-Cartan theory in early cosmology. We study solutions for a homogeneous and study solutions for a homogeneous and isotropic relativistic Weyssenhoff spin fluid with dynamical timelike axial current, also homogeneous and isotropic. The general solutions can mostly be described by means of three particular solutions. The properties of these solutions (such as singularity avoidance and primordial or late accelerated expansion) are analysed and depend on the relations between the source parameters.

Keywords: Torsion, Weyssenhoff fluid, Cosmology, Inflation.

# *Sumário*

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 9
<b>2</b>	<b>Breve revisão dos elementos da Relatividade Geral</b>	p. 14
2.1	Introdução . . . . .	p. 14
2.2	Derivada Covariante . . . . .	p. 15
2.3	Tensor de Riemann . . . . .	p. 15
2.4	Propriedades de simetria do tensor de curvatura . . . . .	p. 16
2.5	Tensor de Ricci . . . . .	p. 17
2.6	Escalar de Curvatura . . . . .	p. 17
2.7	Identidades de Bianchi . . . . .	p. 17
2.8	Tensor de Weyl e o Tensor de Einstein . . . . .	p. 18
2.9	Métrica Cosmológica: . . . . .	p. 20
<b>3</b>	<b>Transformação Conforme e o Teorema da Fatorização</b>	p. 25
3.1	Transformação Conforme . . . . .	p. 25
3.2	Teorema da Fatorização . . . . .	p. 29
<b>4</b>	<b>Obtenção das Equações de Einstein para as Métricas de Interesse Físico</b>	p. 32
4.1	Métrica Cosmológica . . . . .	p. 32
<b>5</b>	<b>Redução dimensional do Invariante Topológico</b>	p. 39
5.1	Invariante Topológico de Gauss-Bonnet . . . . .	p. 39
<b>6</b>	<b>Teoria de Einstein-Cartan e as equações dinâmicas</b>	p. 43

6.1	Elementos da teoria de Einstein-Cartan . . . . .	p. 43
6.2	Princípio variacional e as equações dinâmicas . . . . .	p. 48
6.3	Equações dinâmicas . . . . .	p. 51
<b>7</b>	<b>Soluções com corrente axial e fluido de spin</b>	<b>p. 53</b>
7.1	Soluções . . . . .	p. 53
7.2	Soluções Gerais . . . . .	p. 57
7.3	Corrente Axial Constante . . . . .	p. 58
<b>8</b>	<b>Conclusões</b>	<b>p. 60</b>
	Acknowledgments . . . . .	p. 61
<b>9</b>	<b>Apêndice</b>	<b>p. 62</b>
9.1	Notações Relações Úteis . . . . .	p. 62
9.1.1	Notações e convenções . . . . .	p. 62
9.1.2	Procedimento variacional . . . . .	p. 62
9.2	Métrica de um Espaço-Tempo Esfericamente Simétrica . . . . .	p. 63
9.3	Solução de Schwarzschild . . . . .	p. 65
9.4	Obtenção das Equações de Einstein para a Métrica Esfericamente Simétrica . . . . .	p. 69
	<b>Referências</b>	<b>p. 73</b>



# 1 *Introdução*

É notório como a curiosidade humana em entender o meio ao seu redor, bem como suas origens, possibilitou a construção do conhecimento acumulado ao longo de nossa história, e assim o surgimento da ciência. Muitas questões sempre estiveram presentes, como a origem do homem, a origem das espécies, a origem da vida em nosso planeta, a origem de nosso planeta e do sistema ao qual pertencemos. Ao olhar por esse prisma, torna-se claro como os por quês associados a exaustivos esforços de seres inquietos e dispostos a trabalhar a construção de um novo saber, promoveram verdadeiras revoluções no conhecimento humano. E em meio a tantas descobertas surge a física, uma ciência de natureza singular a qual desde seu surgimento, sempre promoveu rupturas e quebras de paradigmas nas diversas áreas do conhecimento, inclusive em si mesma, influenciando profundamente a história da sociedade.

Na física, a Gravitação vinculada à Mecânica sempre teve seu status garantido ao longo dos séculos. Com Isaac Newton uma grande revolução foi instaurada e outras mais surgiram no início do século XX com a Mecânica Quântica, a Relatividade Especial e a Relatividade Geral, verdadeiros expoentes do pensamento contemporâneo. Tais teorias alimentaram ainda mais a insaciável sede humana na busca do conhecimento, possibilitando o surgimento de novas áreas de pesquisa e alterando para sempre nossa visão a respeito do macro e micro Universo. Teorias como a Teoria Quântica de Campos e Partículas e a Teoria de Cordas (veja por exemplo [1, 2, 3, 4]) surgiram, solucionaram problemas e levantaram questões até então inimagináveis. Mas, entender o meio que nos cerca e nossa origem envolve também compreender o Universo em que estamos inseridos. Surgem então muitas perguntas, sendo muitas delas abordadas no estudo da Gravitação, se estendendo desde a origem de nosso Universo até questões relacionadas ao estado atual do Cosmos como a existência de matéria e energia escuras.

Neste trabalho serão tratados alguns aspectos relacionados à Gravitação no Universo primordial, em seu período inflacionário. Os efeitos da estrutura não-Riemanniana, no contexto da Cosmologia, já são estudados há algum tempo com importantes trabalhos pu-

blicados nas últimas décadas. A generalização mais simples da Relatividade Geral (preservando a metricidade) é encontrada pela introdução de uma conexão afim assimétrica, com o tensor torção obtido a partir dessa como sua parte antissimétrica. O caso Riemanniano é obtido pela imposição de torção nula. É possível considerar modelos cosmológicos em estruturas não-Riemannianas mais gerais, tal como a não-metricidade (veja por exemplo a revisão de Puetzfeld [5]), embora esses casos não sejam abordados neste trabalho. Muitos foram os artigos publicados que discorreram sobre torção com várias abordagens e imensa gama de aplicações. Para a introdução dos fundamentos da teoria da gravidade com torção, veja a Ref. [6], e para as abordagens mais recentes, incluindo os aspectos quânticos da torção, veja a Ref. [7].

Trabalhos desenvolvidos na década de setenta mostraram que a eliminação da singularidade e obtenção da inflação podem ser induzidas pelo uso da torção na teoria de Einstein-Cartan, por Kopczynski [8], Trautman [9], e Hehl e colaboradores [10]. Na teoria de Einstein-Cartan a torção não possui dinâmica e é completamente expressa em termos das fontes de spin (Ref. [6]). Deste modo, ao se trabalhar com a teoria de Einstein-Cartan deve-se introduzir matéria com spin; o que pode ser feito de várias formas. O modo mais natural é considerar, além da ação de Einstein-Cartan, a Lagrangiana para o campo de Dirac de spin  $1/2$ , interagindo minimamente com a torção. É possível assim descrever a teoria como a Relatividade Geral, modificada com uma interação de contato spin-spin. De acordo com a Ref. [11], a torção não prevê a singularidade inicial, mas pode realçar sua presença. Além disso, a torção pode providenciar uma fase de expansão acelerada na teoria métrica-torção com matéria descrita pelos espinores de Dirac e Rarita-Schwinger Ref. [12]. Nesse cenário, os autores do artigo da Ref. [13] descreveram a transição entre a expansão primordial acelerada e uma desacelerada em termos do campo de Dirac massivo (veja também, por exemplo, o trabalho da Ref. [14]). É possível também considerar outra Lagrangiana para a gravidade e torção, num contexto mais geral da teoria de gauge de Poincaré da gravidade, com termos quadráticos da curvatura. Nesse contexto pode-se mencionar por exemplo, os trabalhos nas Refs. [15], [16] que descrevem matéria sem spin.

Outro modo de introduzir torção é considerar um fluido com densidade de spin intrínseco, que em princípio não admite uma descrição Lagrangiana baseada nos campos espinoriais. Nesse caso, é necessário postular uma correção de spin para o tensor momento-energia. No trabalho de Szydlowski e Krawiec, Ref. [17], foi realizado um estudo dos efeitos cosmológicos de um fluido de spin perfeito (fluido perfeito com densidade de spin intrínseco), conhecido como fluido de Weyssenhoff [18], bem como para as restrições do tipo supernova Ia tendo os autores concluído que o fluido de Weyssenhoff produz expansão

acelerada mas não pode servir como alternativa para energia escura. Também, na Ref. [19], Puetzfeld e Chen calcularam algumas restrições para os dados da supernova Ia em um cenário diferente da geometria não-Riemanniana. No trabalho de M. Gasperini (Ref. [20]) foi considerado o fluido de Weyssenhoff com o tensor momento-energia derivado de uma Lagrangiana aperfeiçoada previamente por Ray e Smalley [21], com o spin como uma variável termodinâmica. Vemos também no trabalho de M. Gasperini [20] que a torção providencia ausência de singularidade e expansão acelerada no Universo primordial, mas o fator de expansão da escala cosmológica,  $a(t)$ , é muito pequeno, a menos que o parâmetro  $w$  ( $p = w\rho$ ) da equação de estado do fluido de spin seja ajustado de um modo especial. É possível também verificar no trabalho da Ref. [22] uma análise realizada em um contexto mais geral sem assumir uma métrica particular. Em 1987, Obukhov e Korotky [23] formularam uma teoria variacional mais geral descrevendo o fluido de Weyssenhoff e também à aplicaram para modelos cosmológicos com rotação, shear e expansão. Recentemente, Bohmer e Burnnet [24] introduziram uma matéria espinorial especial satisfazendo o Princípio Cosmológico [25] (veja também a Ref. [26]), o qual, juntamente com os termos de interação e sem constante cosmológica simulam a energia de vácuo responsável pela inflação.

É importante mencionar que existem muitos trabalhos sem torção, mas com diferentes fontes de matéria (juntamente com o campo escalar) que contém um período inflacionário. Como exemplo, é possível citar o artigo de Golounev, Mukhanov e Vanchurin [27] onde se propõe um campo vetorial massivo não-minimamente acoplado, que induz inflação. Num universo homogêneo e isotrópico, esses campos vetoriais se comportam como campos massivos minimamente acoplados, e podem ser introduzidos com três componentes ortogonais ou um grande número orientado aleatoriamente de modo a proporcionar uma inflação isotrópica. Não há uma interpretação clara sobre as motivações físicas para esses campos vetoriais. Os autores Koivisto e Mota [28] consideram o campo vetorial minimamente acoplado do tipo-tempo (veja a Ref. [29]), onde perturbações cosmológicas são estudadas). Entre as teorias sem torção, é possível mencionar também o trabalho da Ref. [30], em que os autores mostram que a energia escura pode ser descrita por meio da eletrodinâmica usual com a adição de um termo não-linear. Além disso, pode-se considerar um campo vetorial do tipo-tempo responsável pela violação da simetria de Lorentz [31]. No presente trabalho, a corrente axial do tipo-tempo não só viola a simetria de Lorentz, mas também é relacionada à torção no contexto da teoria de Einstein-Cartan, e originada pelo fluido de Weyssenhoff. Por outro lado, nós podemos citar a Ref. [32], onde a possibilidade de inflação induzida por espiniores foram investigadas, bem como

suas marcas nas anisotropias da Radiação C3smica de Fundo.

Para efeito deste trabalho n3s consideraremos a teoria de Einstein-Cartan com intera3o spin-spin e o fluido de Weyssenhoff (veja as Ref. [33, 34]). Na pr3tica, t3m-se uma corrente axial e uma densidade de spin como fontes adicionais ao lado de uma usual densidade e press3o de um fluido perfeito e press3o. No Universo primordial, qualquer por3o de mat3ria se encontra a elevadas temperaturas, de modo que n3s devemos fixar  $w$  correspondendo ao fluido de radia3o (com  $w = 1/3$ ), o qual imita o regime ultra-violeta. Se o modelo 3 utilizado para descrever a infla3o primordial, ent3o o fluido de spin 3 uma forma ex3tica de mat3ria que pode desempenhar o papel da energia de v3cuo. O teor de mat3ria do modelo 3 dado por esse fluido ex3tico (com  $w = 1/3$ ) adicionado de uma corrente axial, homog3nea e isotr3pica. O caso anisotr3pico 3 bastante interessante (fornecendo uma descri3o de uma anisotropia primordial), embora esteja al3m do 3mbito da presente tese.

Para iniciar os trabalhos envolvendo a Gravita3o foi realizada uma introdu3o (revis3o) no Cap3tulo 1 a respeito da Relatividade Geral. Neste Cap3tulo ser3o apresentados os elementos b3sicos e fundamentais da Gravita3o Cl3ssica (n3o-qu3ntica). O cap3tulo inicia-se com a apresenta3o dos fundamentos matem3ticos, com uma r3pida defini3o de derivada covariante seguida da apresenta3o do tensor de Riemann ( $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ ). O tensor de Riemann 3 tamb3m conhecido como tensor de curvatura, e recebe este nome pois ele permite a realiza3o da medida da curvatura intr3nseca de uma superf3cie ou do espa3o-tempo. Sabe-se que desse tensor podem ser definidos outros dois objetos na teoria da Relatividade Geral. Tais objetos s3o o tensor de Ricci e o escalar de curvatura, introduzidos subsequentemente. Finalizando a fundamenta3o matem3tica s3o introduzidos os tensores de Weyl e de Einstein, sendo tal designa3o atribuida a Albert Einstein, por ter sido o primeiro a perceber sua import3ncia para o estudo da gravita3o. Esse tensor 3 constru3do a partir do tensor de curvatura e da m3trica, sendo que possui diverg3ncia automaticamente nula. Ainda no Cap3tulo 1, s3o abordadas as m3tricas cosmol3gicas, de espa3o-tempo esfericamente sim3trica e a solu3o de Schwarzschild. A primeira parte do Cap3tulo 2 3 dedicada 3 descri3o da transforma3o conforme, e nele obtemos todas as transforma3o para os escalares de curvaturas de dimensionalidade arbitr3ria  $D$ . Tal transforma3o 3 conhecida por ser um instrumento 3til nas v3rias aplica3o da teoria gravitacional na obten3o das equa3o de interesse f3sico. Em particular, ela 3 relevante para a cosmologia, pois muitas vezes trabalha-se com uma m3trica conformemente plana. Na segunda parte do Cap3tulo 2 3 formulado e apresentado o teorema da fatoriza3o que se mostra um instrumento fundamental para a obten3o de m3tricas com maior simpli-

cidade na realização dos cálculos em problemas de considerável relevância. No Capítulo 3 é feita a aplicação das transformações conformes e do teorema da fatorização para a obtenção das equações de Einstein para métricas cosmológicas (FRW) e de Schwarzschild, comprovando a eficácia do método utilizado. No Capítulo 4 é obtida a redução dimensional do invariante topológico de Gauss-Bonnet aos espaços de 2 dimensões. Em seguida é apresentada, nos Capítulos 5 e 6 a teoria de Einstein-Cartan, as equações dinâmicas bem como as soluções para problemas envolvendo o universo primordial com fluido de spin e corrente axial. Finalmente, é realizada a conclusão a respeito dos resultados obtidos e perspectivas para futuros trabalhos.

## 2 Breve revisão dos elementos da Relatividade Geral

Neste capítulo, vamos abordar alguns aspectos da Relatividade Geral realizando uma breve revisão a respeito de elementos básicos no estudo da Cosmologia.

### 2.1 Introdução

Iniciando o estudo da gravitação, consideremos o movimento de uma partícula em queda livre sob a ação de um dado campo gravitacional. A equação clássica do movimento da partícula é dada por

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -m \nabla \Phi_{grav}, \quad (2.1)$$

onde  $\Phi_{grav}$  é o potencial gravitacional.

O aspecto mais importante desta equação é a igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional, de modo que a massa da partícula se cancela na equação responsável pela descrição de seu movimento em um campo gravitacional. Esta propriedade fundamental dos campos gravitacionais, conforme se apresenta, explica o fato de que partículas de diferentes massas, sob dadas condições iniciais, se movimentam da mesma forma.

Em Relatividade Geral considera-se o espaço-tempo como manifestação dos campos gravitacionais. Deste modo, é fundamental no estudo da gravitação descrever a geometria do espaço-tempo ([35], [36]). Na teoria da Relatividade Geral encontramos o estudo do espaço-tempo curvo, e para isto é indispensável a noção de variedades diferenciáveis (veja Ref. [37]) e o cálculo tensorial (veja Ref. [38]). Consequentemente, torna-se inevitável o surgimento do tensor de curvatura em Relatividade Geral, bem como o estudo de suas propriedades. Inicialmente será definida a ação da derivada covariante sobre um dado tensor  $T^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots}_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \dots}$ . Por consequência, torna-se imprescindível definir os chamados símbolos de Christoffel que nada mais são do que termos originados no desenvolvimento

do cálculo da derivada covariante.

## 2.2 Derivada Covariante

A derivada covariante é definida pela relação

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha} T^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots}_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \dots} &= \partial_{\alpha} T^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots}_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \dots} + \\ &+ \Gamma_{\lambda \alpha}^{\mu_1} T^{\lambda \mu_2 \mu_3 \dots}_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \dots} + \Gamma_{\lambda \alpha}^{\mu_2} T^{\mu_1 \lambda \mu_3 \dots}_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \dots} - \\ &- \Gamma_{\nu_1 \alpha}^{\lambda} T^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots}_{\lambda \nu_2 \nu_3 \dots} - \Gamma_{\nu_2 \alpha}^{\lambda} T^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots}_{\nu_1 \lambda \nu_3 \dots} \quad . \end{aligned} \quad (2.2)$$

Os coeficientes  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}$  são os chamados símbolos de Christoffel, sendo definidos como

$$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\lambda\tau} (\partial_{\alpha} g_{\tau\beta} + \partial_{\beta} g_{\tau\alpha} - \partial_{\tau} g_{\alpha\beta}) , \quad (2.3)$$

tal que a derivada covariante  $\nabla_{\alpha}$  satisfaz à condição de metricidade

$$\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = 0 , \quad (2.4)$$

assim como a não existência de torção (veja e.g. [7], [39] para discussão mais detalhada)

$$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} , \quad (2.5)$$

simétrico em  $\alpha\beta$ .

É interessante notar que o índice trazido pela derivada covariante tem caráter tensorial, em oposição à derivada ordinária. A definição de derivada covariante é baseada exatamente nesta propriedade.

## 2.3 Tensor de Riemann

Considere o operador comutador para duas derivadas covariantes atuando sobre o vetor  $A^{\alpha}$ . Verifica-se assim (veja por exemplo [40], [41]), por cálculos diretos que

$$[\nabla_{\mu} , \nabla_{\nu}] A^{\alpha} = \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} A^{\alpha} - \nabla_{\nu} \nabla_{\mu} A^{\alpha} = -A^{\lambda} \cdot R^{\alpha}_{\lambda\nu\mu} \quad (2.6)$$

e

$$[\nabla_{\mu} , \nabla_{\nu}] B_{\alpha} = \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} B_{\alpha} - \nabla_{\nu} \nabla_{\mu} B_{\alpha} = B_{\lambda} \cdot R^{\lambda}_{\alpha\nu\mu} , \quad (2.7)$$

onde

$$R^{\alpha}_{\lambda\nu\mu} = \partial_{\nu} \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} - \partial_{\mu} \Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} + \Gamma^{\tau}_{\lambda\mu} \Gamma^{\alpha}_{\tau\nu} - \Gamma^{\tau}_{\lambda\nu} \Gamma^{\alpha}_{\tau\mu} \quad (2.8)$$

é conhecido como o tensor de curvatura (ou tensor de Riemann). Pode-se facilmente mostrar que o operador comutador de duas derivadas covariantes, atuando em um tensor qualquer, resulta em uma combinação linear de tensores; por exemplo,

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] T^\alpha_\beta = R^\lambda_{\beta\nu\mu} \cdot T^\alpha_\lambda - R^\alpha_{\lambda\nu\mu} \cdot T^\lambda_\beta . \quad (2.9)$$

O tensor de Riemann tem um papel importante na teoria da Relatividade Geral. É possível ver que a igualdade  $R^\alpha_{\lambda\nu\mu} \equiv 0$  é critério de espaço plano, ou seja, de ausência de campo gravitacional.

Multiplicando  $R^\lambda_{\beta\nu\mu}$  por  $g_{\alpha\lambda}$  verifica-se uma outra forma para o tensor de curvatura, dada por

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\lambda} \cdot R^\lambda_{\beta\mu\nu} , \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu} &= \frac{1}{2}(g_{\alpha\nu, \beta, \mu} + g_{\beta\mu, \alpha, \nu} - g_{\alpha\mu, \beta, \nu} - g_{\beta\nu, \alpha, \mu}) + \\ &+ g_{\tau\lambda}(\Gamma^\tau_{\beta\mu}\Gamma^\lambda_{\alpha\nu} - \Gamma^\tau_{\beta\nu}\Gamma^\lambda_{\alpha\mu}) . \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde  $g_{\alpha\beta, \rho} = \partial_\rho g_{\alpha\beta}$ .

## 2.4 Propriedades de simetria do tensor de curvatura

Observando atentamente a expressão (2.11), nota-se imediatamente que o tensor de curvatura possui certas simetrias (veja Ref. [41]), tais que

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta} , \quad (2.12)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\beta\alpha\nu\mu} , \quad (2.13)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0 . \quad (2.14)$$

Assim, dadas as propriedades do tensor de Riemann, segue-se que para

$$\alpha = \beta \quad \text{ou} \quad \mu = \nu , \quad (2.15)$$

encontramos como resultado

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = 0 . \quad (2.16)$$

A grande importância do tensor de Riemann está no fato de que este é fundamental para a obtenção de um novo tensor, conhecido como tensor de Einstein. Por sua vez, o tensor de Einstein desempenha papel crucial na aquisição das equações do campo gravitacional dentro da teoria relativística.



## 2.5 Tensor de Ricci

Realizando-se a contração do tensor de Riemann  $R^\alpha_{\lambda\nu\mu}$ , é possível encontrar uma outra quantidade, necessária em Relatividade Geral que é o tensor de Ricci  $R_{\lambda\mu}$ , onde

$$R_{\beta\nu} \equiv R^\alpha_{\beta\alpha\nu} = g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\nu} , \quad (2.17)$$

e deste modo

$$R_{\beta\nu} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\beta\alpha} + \Gamma^\tau_{\beta\nu} \Gamma^\alpha_{\tau\alpha} - \Gamma^\tau_{\beta\alpha} \Gamma^\alpha_{\tau\nu} . \quad (2.18)$$

É ainda possível obter o tensor de Ricci misto fazendo

$$R^\gamma_{\nu} = g^{\beta\gamma} R_{\beta\nu} . \quad (2.19)$$

Como pode-se ver, o tensor de Ricci é simétrico com relação aos seus índices, isto é:

$$R_{\beta\nu} = R_{\nu\beta} . \quad (2.20)$$

## 2.6 Escalar de Curvatura

O escalar de curvatura é obtido da contração do tensor de Ricci, ou seja

$$R = R^\nu_{\nu} = g^{\beta\nu} R_{\beta\nu} . \quad (2.21)$$

Note que o escalar de curvatura, como o próprio nome indica, é uma quantidade escalar.

## 2.7 Identidades de Bianchi

Com relação às chamadas identidades de Bianchi ([41]), verificamos utilizando a equação (2.11) que estas são nada mais do que combinações lineares das primeiras derivadas covariantes do tensor de Riemann, onde

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\eta} + R_{\alpha\beta\eta\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\eta;\mu} = 0 . \quad (2.22)$$

Aplicando uma contração às identidades de Bianchi, pela multiplicação de  $g^{\alpha\mu}$

$$g^{\alpha\mu} [R_{\alpha\beta\mu\nu;\eta} + R_{\alpha\beta\eta\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\eta;\mu}] = 0 , \quad (2.23)$$

encontramos

$$R_{\beta\nu;\eta} - R_{\beta\eta;\nu} + R^\gamma_{\beta\nu\eta;\gamma} = 0 . \quad (2.24)$$

Realizando mais uma contração à equação (2.24)

$$g^{\beta\nu}[R_{\beta\nu;\eta} - R_{\beta\eta;\nu} + R^\gamma{}_{\beta\nu\eta;\gamma}] = 0 , \quad (2.25)$$

obtemos

$$R_{;\eta} - R^\beta{}_{\eta;\beta} - R^\gamma{}_{\eta;\gamma} = 0 \quad \text{ou} \quad (R^\beta{}_{\eta} - \frac{1}{2}\delta^\beta{}_{\eta} R)_{;\beta} = 0 . \quad (2.26)$$

Este resultado tem importância particular para a próxima seção.

## 2.8 Tensor de Weyl e o Tensor de Einstein

As propriedades dos tensores de Riemann, de Ricci e do escalar de curvatura obtidos nesta seção são os mesmos tanto para o espaço Riemanniano como pseudo-Riemanniano de dimensão qualquer. Contudo, em espaços de dimensões  $D < 4$ , os tensores de curvatura são mais restritos que no caso geral D-dimensional (veja Ref. [41]). O caso mais extremo é o espaço unidimensional, onde todas as curvaturas se anulam identicamente.

Dado um espaço D-dimensional, podemos calcular o número de componentes independentes dos tensores  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$  e  $R_{\beta\nu}$ . Devido às simetrias algébricas, a curvatura do tensor de Riemann com três índices iguais é identicamente nula. Portanto, encontram-se apenas três possíveis situações.

1) Dois pares de índices iguais, que são construídos como  $R_{0101}$ . A análise combinatória nos diz que o número de combinações distintas deste tipo, num espaço D-dimensional, é dado por

$$n_1 = C_D^2 = \frac{D(D-1)}{2} . \quad (2.27)$$

2) Um par de índices iguais e dois índices distintos, construídos como  $R_{0102}$ . Aqui o número de distintas combinações é dado por

$$n_2 = DC_{D-1}^2 = \frac{D(D-1)(D-2)}{2} . \quad (2.28)$$

3) Quatro índices distintos, que são construídos como  $R_{0123}$ . Neste caso

$$n_3 = \frac{2D(D-1)(D-2)(D-3)}{4!} . \quad (2.29)$$

Somando estas três expressões, verificamos que o número de componentes independentes do tensor de Riemann, num dado espaço D-dimensional é

$$N_D = n_1 + n_2 + n_3 = \frac{D^2(D^2-1)}{12} . \quad (2.30)$$

É possível neste instante considerarmos o caso particular de espaços de dimensões inferiores. Por uma questão de escolha, consideremos inicialmente  $D = 2$ , onde a única opção seria o caso 1). E assim, encontramos  $n_2 = 1$ , de modo que o número de componentes independentes do tensor de Riemann iguala-se a um para o escalar de curvatura. Desde que ambos sejam combinações lineares de derivadas parciais da métrica, eles devem ser proporcionais. Levando em conta as simetrias algébricas, verificamos que

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = tR(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}) , \quad (2.31)$$

sendo que  $t$  é um coeficiente desconhecido. Fazendo a contração, obtemos

$$R_{\beta\nu} = 2tR g_{\beta\nu} , \quad (2.32)$$

e

$$R = 2tR . \quad (2.33)$$

Consequentemente, encontramos  $t = 1/2$ , e assim

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}R(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}) , \quad (2.34)$$

$$R_{\beta\nu} = \frac{1}{2}R g_{\beta\nu} . \quad (2.35)$$

Para o espaço de  $D = 3$  tem-se de acordo com a equação

$$N_D = n_1 + n_2 + n_3 = \frac{D^2(D^2 - 1)}{12} \quad (2.36)$$

seis componentes independentes, dos tensores de Riemann. O tensor de Riemann é uma combinação linear do escalar de curvatura e do tensor de Ricci. Levando em conta as simetrias algébricas e realizando as contrações, encontramos

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu} &= (g_{\alpha\mu}R_{\beta\nu} + g_{\beta\nu}R_{\alpha\mu} - g_{\alpha\nu}R_{\beta\mu} - g_{\beta\mu}R_{\alpha\nu}) + \\ &+ \frac{1}{2}R(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}) . \end{aligned} \quad (2.37)$$

Obviamente, esta relação mostra que existe uma parte do tensor de Riemann que desaparece automaticamente em  $D = 3$ , mas que pode ser diferente de zero para  $D > 3$ . O objeto correspondente é chamado tensor de Weyl, sendo sua definição dada por

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta\mu\nu} &= R_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{D-2}(g_{\alpha\mu}R_{\beta\nu} + g_{\beta\nu}R_{\alpha\mu} - g_{\alpha\nu}R_{\beta\mu} - g_{\beta\mu}R_{\alpha\nu}) + \\ &+ \frac{1}{(D-1)(D-2)}R(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}) . \end{aligned} \quad (2.38)$$

O tensor de Weyl possui, por construção, as mesmas simetrias algébricas que o tensor de Riemann, e também duas propriedades adicionais

$$g^{\alpha\mu}C_{\alpha\beta\mu\nu}(D) = 0 \quad e \quad C_{\alpha\beta\mu\nu}(D = 3) \equiv 0 . \quad (2.39)$$

Outra importante propriedade do tensor de Weyl será discutida na próxima seção.

O último tipo de tensor de curvatura a ser definido será o chamado tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$  (veja por exemplo [36]). Ele é conhecido como tensor de Einstein por de sua importância para a gravitação ter sido primeiramente verificada por Einstein. Assim

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} . \quad (2.40)$$

Este tensor é por sua vez construído a partir da métrica e do tensor de Riemann somente, e possui divergência nula. De fato, das identidades de Bianchi verifica-se que

$$G^{\mu\nu}{}_{;\alpha} = 0 . \quad (2.41)$$

É possível ver que todos os tensores de curvatura (os tensores de Riemann, de Ricci, de Weyl, de Einstein) e o escalar de curvatura são combinações lineares de derivadas segundas da métrica e de quadrados de primeiras derivadas. Em particular, a importância do tensor de Einstein está no fato de que as equações de Einstein, que definem o campo gravitacional em Relatividade Geral, têm a forma (veja por exemplo [40])

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} , \quad (2.42)$$

onde  $T_{\mu\nu}$  é o Tensor Momento-Energia da matéria.

Por uma questão de escolha será tomado  $c = 1$ , e assim

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} , \quad (2.43)$$

onde  $G$  é a constante de Newton (ou constante universal da gravitação) e  $T_{\mu\nu}$  é o termo original, que é chamado Tensor Momento-Energia. Na próxima seção desenvolveremos um método eficiente para o cálculo dos tensores de Riemann, de Ricci, o escalar de curvatura e o tensor de Einstein, para métricas particulares de especial interesse físico.

## 2.9 Métrica Cosmológica:

Considere os espaços de interesse físico uniformemente ocupados por matéria como sendo homogêneos e isotrópicos, o que é coerente com dados observacionais da radiação

cósmica de fundo. Deste modo, devido à homogeneidade e à isotropia do espaço, concluímos que é possível escolher um tempo do universo, tal que a cada instante a métrica do espaço em estudo seja idêntica em todos os seus pontos e em todas as direções, quando comparada com métricas tomadas para a mesma região do espaço em instantes distintos. Considere que o tempo seja momentaneamente “congelado” ([40]). Neste sentido, é possível que se faça um estudo da métrica do espaço isotrópico fixando o tempo num dado instante. E assim, embora o espaço físico seja quadridimensional, podemos buscar maior simplicidade trabalhando com o espaço tridimensional. Para este espaço tridimensional, consideremos as componentes do tensor métrico como sendo dado por  $\gamma_{\tau\nu}$ , de modo que

$$g_{\tau\nu}(D = 3) = \gamma_{\tau\nu} \quad . \quad (2.44)$$

O elemento de distância espacial passa a ser representado por

$$dl^2 = \gamma_{\beta\kappa} dx^\beta dx^\kappa \quad , \quad (2.45)$$

onde as componentes da métrica são dadas por  $\gamma_{\tau\nu}$ . Devemos agora obter também o tensor de curvatura (tensor de Riemann), o tensor de Ricci e o escalar de curvatura. Para  $D = 3$  representaremos o tensor de Riemann por  $P^m_{ijk}$

$$R^\lambda_{\tau\mu\nu}(D = 3) = P^m_{ijk} \quad , \quad (2.46)$$

onde seus respectivos índices 3 – *dimensionais* são dados por

$$\lambda = m \quad , \quad \tau = i \quad , \quad \mu = j \quad , \quad \nu = k \quad . \quad (2.47)$$

Consequentemente, o tensor de Ricci e o escalar de curvatura neste espaço passam a ser definidos por

$$R_{\tau\nu}(D = 3) = P_{ik} \quad , \quad (2.48)$$

e

$$R(D = 3) = P \quad . \quad (2.49)$$

Considerando o caso de uma isotropia completa, o tensor  $P^m_{ijk}$  deve ser expresso somente em termos do tensor métrico  $\gamma_{ki}$ . Portanto, devido às suas propriedades de simetria, o tensor de curvatura  $P^m_{ijk}$ , o tensor de Ricci  $P_{ik}$  e o escalar de curvatura  $P$  são expressos por

$$P^m_{ijk} = \lambda(\delta_j^m \gamma_{ik} - \delta_k^m \gamma_{ij}) \quad , \quad (2.50)$$

$$P_{ik} = 2\lambda \gamma_{ik} \quad , \quad (2.51)$$

$$P = 6\lambda \quad , \quad (2.52)$$

onde  $\lambda$  é a constante que determina as propriedades de curvatura do espaço isotrópico. Analisando a constante  $\lambda$  ([40], [35]) verificamos que são admitidos os valores  $\lambda > 0$ ,  $\lambda < 0$ , e  $\lambda = 0$  (espaço plano). É importante lembrar que o objetivo aqui está centralizado no estudo da geometria dos espaços, tornando fundamental obtenção da métrica correspondente a estes espaços. Apenas por uma questão de conveniência, vamos considerar a geometria destes espaços homogêneos e isotrópicos tri-dimensional em estudo, como sendo a geometria de uma hipersuperfície de espaços também homogêneos e isotrópicos. Esta hipersuperfície, por sua vez, incorpora uma quarta dimensão fictícia, cuja importância será mostrada a seguir. Admite-se, a estes novos espaços, uma hiperesfera cujo raio é representado por “ $a$ ”. Note que embora se esteja agora trabalhando em espaços quadridimensionais, ainda não foi reinserida a coordenada temporal, visto que uma destas dimensões é puramente fictícia. Portanto, podemos assumir que a equação para nossa hiperesfera é dada por

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2 \quad , \quad (2.53)$$

onde  $a^2$  admite os valores  $a^2 > 0$ ,  $a^2 < 0$  e  $a^2 = 0$ . O intervalo infinitesimal para estes espaços é representado por

$$dl_2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 \quad . \quad (2.54)$$

O próximo passo é retornar ao espaço *3 – dimensional* de modo que

$$x_4 = (a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad (2.55)$$

e assim

$$dx_4 = -\frac{x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3}{(a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)^{\frac{1}{2}}} \quad . \quad (2.56)$$

Deste modo

$$\begin{aligned} dl^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{(a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)} \\ &= dr^2 + \frac{(\vec{r} \cdot d\vec{r})^2}{a^2 - r^2} \quad , \end{aligned} \quad (2.57)$$

onde

$$d\vec{r}^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad . \quad (2.58)$$

Sabe-se que em coordenadas esféricas

$$d\vec{r}^2 = dr^2 + r^2 d\Omega, \quad (2.59)$$

sendo

$$d\Omega = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2, \quad (2.60)$$

com

$$0 < \varphi \leq 2\pi \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad . \quad (2.61)$$

Portanto

$$\begin{aligned} dl^2 &= dr^2 + \frac{r^2 dr^2}{a^2 - r^2} + r^2 d\Omega \\ &= \frac{a^2 dr^2}{a^2 - r^2} + r^2 d\Omega = \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} + r^2 d\Omega. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Após uma análise sobre os possíveis valores de “ $a$ ” e fazendo a mudança de “ $r$ ” para “ $a r$ ” encontramos

$$dl^2 = \frac{a^2 dr^2}{1 - k r^2} + a^2 r^2 d\Omega = a^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - k r^2} + r^2 d\Omega \right], \quad (2.63)$$

onde o parâmetro  $k$  admite os valores  $k = -1, 0, 1$ . Para  $k = 0$  o modelo para o universo é de um espaço plano. Se  $k = -1$  (modelo anti de Sitter  $AdS^3$ ) o universo é aberto, e com  $k = 1$  (modelo de Sitter  $dS^3$ ) tem-se um universo fechado. É possível neste momento introduzir uma outra métrica, tomando o intervalo como sendo dado por

$$dl^2 = a^2 dl'^2, \quad (2.64)$$

$$dl'^2 = \frac{dr^2}{1 - k r^2} + r^2 d\Omega. \quad (2.65)$$

Finalmente, calculando o intervalo infinitesimal para os espaços quadridimensionais no espaço-tempo

$$ds^2 = dt^2 - dl^2, \quad (2.66)$$

encontramos o intervalo que fornece a chamada métrica cosmológica, também conhecida como a métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW):

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - k r^2} + r^2 d\Omega \right]. \quad (2.67)$$

No intervalo dado para a métrica FRW, a representação matricial para os elementos da métrica é dada por

$$g_{\tau\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(t)r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad (2.68)$$

sendo

$$g_{00} = 1; \quad g_{11} = -\frac{a^2(t)}{1-kr^2}; \quad g_{22} = -a^2(t)r^2; \quad g_{33} = -a^2(t)r^2 \sin^2\theta. \quad (2.69)$$

Para a métrica contravariante

$$g^{\tau\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1-kr^2}{a^2(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^{-2}(t)r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^{-2}(t)r^{-2} \sin^{-2}\theta \end{pmatrix}. \quad (2.70)$$

$$g^{00} = 1; \quad g^{11} = -\frac{1-kr^2}{a^2(t)}; \quad g^{22} = -\frac{1}{a^2(t)r^2}; \quad g^{33} = -\frac{1}{a^2(t)r^2 \sin^2\theta}. \quad (2.71)$$



## *3 Transformação Conforme e o Teorema da Fatorização*

Neste capítulo, faremos uma breve revisão sobre as transformações conformes e o teorema da fatorização. Posteriormente, será verificada toda a eficiência deste ferramental matemático na obtenção das equações da Relatividade Geral e do Invariante Topológico de Gauss-Bonnet.

### 3.1 Transformação Conforme

Nesta seção apresentaremos as fórmulas de transformações conformes, um elemento importante em teoria da gravitação ([42], [43], [44], [45], [46], [47]). É importante ressaltar que estas fórmulas correspondem ao espaço  $n$ -dimensional. Usaremos em todo o texto notações condensadas como:

$$A_\mu^2 = g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu, \quad (3.1)$$

$$(\nabla B)^2 = g^{\mu\nu} (\nabla_\mu B)(\nabla_\nu B), \quad \square B = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu B. \quad (3.2)$$

Nestas equações os parênteses fechados indicam o fim da ação da derivada para os demais termos existentes ou que possam vir a aparecer. Por exemplo:  $\nabla_\mu B = (\nabla_\mu B) + B \nabla_\mu$ , a derivada atuando em campo à direita de  $B$ .

As Transformações Conformes da métrica, da métrica inversa e do determinante da métrica são dadas por:

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} e^{2\sigma}, \quad \sigma = \sigma(x), \quad (3.3)$$

$$g^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} e^{-2\sigma}, \quad g = \bar{g} e^{2n\sigma}, \quad g = \det(g_{\mu\nu}), \quad (3.4)$$

onde  $\sigma$  é o fator conforme.

A transformação para o símbolo de Christoffel têm a forma

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} = \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\lambda} + \delta_{\alpha}^{\lambda}(\bar{\nabla}_{\beta}\sigma) + \delta_{\beta}^{\lambda}(\bar{\nabla}_{\alpha}\sigma) - \bar{g}_{\alpha\beta}(\nabla^{\lambda}\sigma) = \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\lambda} + \delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}, \quad (3.5)$$

onde o símbolo de Christoffel conforme é dado por

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\lambda} = \frac{1}{2}\bar{g}^{\lambda\kappa}[\partial_{\alpha}\bar{g}_{\kappa\beta} + \partial_{\beta}\bar{g}_{\alpha\kappa} - \partial_{\kappa}\bar{g}_{\alpha\beta}]. \quad (3.6)$$

Vamos agora achar as transformações do tensor de Riemann, tensor de Ricci e escalar de curvatura. Sabemos que, por definição, o tensor de Riemann é dado pela equação (2.8). Após a aplicação da transformação conforme, verificamos que

$$\begin{aligned} R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} &= \partial_{\mu}(\bar{\Gamma}_{\beta\nu}^{\alpha} + \delta\Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}) - \partial_{\nu}(\bar{\Gamma}_{\beta\mu}^{\alpha} + \delta\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}) + \\ &+ (\bar{\Gamma}_{\chi\mu}^{\alpha} + \delta\Gamma_{\chi\mu}^{\alpha})(\bar{\Gamma}_{\beta\nu}^{\chi} + \delta\Gamma_{\beta\nu}^{\chi}) - (\bar{\Gamma}_{\chi\nu}^{\alpha} + \delta\Gamma_{\chi\nu}^{\alpha})(\bar{\Gamma}_{\beta\mu}^{\chi} + \delta\Gamma_{\beta\mu}^{\chi}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

É fácil ver que isso pode ser escrito como

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \bar{R}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} + \bar{\nabla}_{\mu}\delta\Gamma_{\beta\nu}^{\alpha} - \bar{\nabla}_{\nu}\delta\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} + \delta\Gamma_{\beta\nu}^{\chi}\delta\Gamma_{\chi\mu}^{\alpha} - \delta\Gamma_{\beta\mu}^{\chi}\delta\Gamma_{\chi\nu}^{\alpha}, \quad (3.8)$$

onde

$$\bar{\nabla}_{\mu}\delta\Gamma_{\beta\nu}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\sigma + \delta_{\nu}^{\alpha}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\beta}\sigma - \bar{g}_{\beta\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma; \quad (3.9)$$

$$\bar{\nabla}_{\nu}\delta\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha}\bar{\nabla}_{\nu}\bar{\nabla}_{\mu}\sigma + \delta_{\mu}^{\alpha}\bar{\nabla}_{\nu}\bar{\nabla}_{\beta}\sigma - \bar{g}_{\beta\mu}\bar{\nabla}_{\nu}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma; \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{\chi\mu}^{\alpha}\delta\Gamma_{\beta\nu}^{\chi} &= \delta_{\beta}^{\alpha}(\bar{\nabla}_{\mu}\sigma)(\bar{\nabla}_{\nu}\sigma) + \delta_{\mu}^{\alpha}(\bar{\nabla}_{\nu}\sigma)(\bar{\nabla}_{\beta}\sigma) - \bar{g}_{\beta\mu}(\bar{\nabla}_{\nu}\sigma)(\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma) + \\ &+ \delta_{\nu}^{\alpha}(\bar{\nabla}_{\beta}\sigma)(\bar{\nabla}_{\mu}\sigma) + \delta_{\mu}^{\alpha}(\bar{\nabla}_{\beta}\sigma)(\bar{\nabla}_{\nu}\sigma) - \bar{g}_{\nu\mu}(\bar{\nabla}_{\beta}\sigma)(\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma) - \\ &- \bar{g}_{\beta\nu}(\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma)(\bar{\nabla}_{\mu}\sigma) + \delta_{\mu}^{\alpha}\bar{g}_{\beta\nu}(\bar{\nabla}^{\chi}\sigma)(\bar{\nabla}_{\chi}\sigma) + \bar{g}_{\beta\nu}\bar{g}_{\chi\mu}(\bar{\nabla}^{\chi}\sigma)(\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma); \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{\chi\nu}^{\alpha}\delta\Gamma_{\beta\mu}^{\chi} &= \delta_{\beta}^{\alpha}(\bar{\nabla}_{\nu}\sigma)(\bar{\nabla}_{\mu}\sigma) + \delta_{\mu}^{\alpha}(\bar{\nabla}_{\nu}\sigma)(\bar{\nabla}_{\beta}\sigma) - \bar{g}_{\beta\mu}(\bar{\nabla}_{\nu}\sigma)(\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma) + \\ &+ \delta_{\nu}^{\alpha}(\bar{\nabla}_{\beta}\sigma)(\bar{\nabla}_{\mu}\sigma) + \delta_{\nu}^{\alpha}(\bar{\nabla}_{\mu}\sigma)(\bar{\nabla}_{\beta}\sigma) - \delta_{\nu}^{\alpha}\bar{g}_{\beta\mu}(\bar{\nabla}_{\chi}\sigma)(\bar{\nabla}^{\chi}\sigma) - \\ &- \bar{g}_{\beta\nu}(\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma)(\bar{\nabla}_{\mu}\sigma) + \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma)(\bar{\nabla}_{\beta}\sigma) + \bar{g}_{\beta\mu}\bar{g}_{\chi\nu}(\bar{\nabla}^{\chi}\sigma)(\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma); \end{aligned} \quad (3.12)$$

Finalmente obtemos a seguinte transformação:

$$\begin{aligned} R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} &= \bar{R}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} + (\delta_{\nu}^{\alpha}\bar{g}_{\mu\beta} - \delta_{\mu}^{\alpha}\bar{g}_{\nu\beta}) \cdot (\bar{\nabla}\sigma)^2 + \\ &+ \delta_{\nu}^{\alpha}(\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\beta}\sigma) - \delta_{\mu}^{\alpha}(\bar{\nabla}_{\nu}\bar{\nabla}_{\beta}\sigma) + \bar{g}_{\mu\beta}(\bar{\nabla}_{\nu}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma) + \\ &- \bar{g}_{\nu\beta}(\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma) + \delta_{\mu}^{\alpha}(\bar{\nabla}_{\nu}\sigma)(\bar{\nabla}_{\beta}\sigma) - \delta_{\nu}^{\alpha}(\bar{\nabla}_{\mu}\sigma)(\bar{\nabla}_{\beta}\sigma) \\ &+ \bar{g}_{\nu\beta}(\bar{\nabla}_{\mu}\sigma)(\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma) - \bar{g}_{\mu\beta}(\bar{\nabla}_{\nu}\sigma)(\bar{\nabla}^{\alpha}\sigma). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Para o tensor de Ricci temos que

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} - (n-2)(\bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu \sigma) - \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{\square} \sigma) + (n-2)(\bar{\nabla}_\mu \sigma)(\bar{\nabla}_\nu \sigma) - (n-2)\bar{g}_{\mu\nu}(\bar{\nabla} \sigma)^2, \quad (3.14)$$

onde as componentes do tensor de Ricci conforme são dadas por

$$\bar{R}_{\mu\nu} = \bar{R}^\beta{}_{\mu\beta\nu} = \partial_\beta \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\beta - \partial_\nu \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^\beta + \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\chi \bar{\Gamma}_{\chi\beta}^\beta - \bar{\Gamma}_{\mu\beta}^\chi \bar{\Gamma}_{\chi\nu}^\beta. \quad (3.15)$$

Para o escalar de curvatura temos

$$R = e^{-2\sigma} \left[ \bar{R} - 2(n-1)(\bar{\square} \sigma) - (n-1)(n-2)(\bar{\nabla} \sigma)^2 \right]. \quad (3.16)$$

O tensor de Weyl em  $n$  dimensões é definido como

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{n-2} (g_{\beta\mu} R_{\alpha\nu} - g_{\alpha\mu} R_{\beta\nu} + g_{\alpha\nu} R_{\beta\mu} - g_{\beta\nu} R_{\alpha\mu}) + \frac{1}{(n-1)(n-2)} R (g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}). \quad (3.17)$$

Vemos através desta definição que o traço do tensor de Weyl dado por

$$C^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} = 0 \quad (3.18)$$

é satisfeito, enquanto que sua transformação conforme é trivial

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} = e^{2\sigma} \bar{C}_{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (3.19)$$

O tensor  $C^\tau{}_{\beta\mu\mu}$  é um invariante conforme, e por este motivo é conhecido como “Tensor Conforme”.

As transformações do quadrado do tensor de curvatura, do quadrado do tensor de Ricci e do quadrado do escalar de curvatura (veja [48], [39], [49]) são dados por:

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 &= \sqrt{-g} e^{(n-4)\sigma} \left\{ \bar{R}_{\mu\nu\alpha\beta}^2 + 8\bar{R}^{\mu\nu} (\bar{\nabla}_\mu \sigma \bar{\nabla}_\nu \sigma - \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu \sigma) + \right. \\ &+ 4(\bar{\square} \sigma)^2 - 4\bar{R}(\bar{\nabla} \sigma)^2 + 2(n-2)[2(\bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu \sigma)^2 + \\ &\left. - 4(\bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu \sigma)(\bar{\nabla}^\mu \sigma)(\bar{\nabla}^\nu \sigma) + 4(\bar{\square} \sigma)(\bar{\nabla} \sigma)^2 + (n-1)(\bar{\nabla} \sigma)^4 \right\}, \quad (3.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} R_{\mu\nu}^2 &= \sqrt{-g} e^{(n-4)\sigma} \left\{ \bar{R}_{\mu\nu}^2 - 2\bar{R}(\bar{\square} \sigma) + (3n-4)(\bar{\square} \sigma)^2 + \right. \\ &+ (n-2)[2\bar{R}^{\mu\nu} (\bar{\nabla}_\mu \sigma \bar{\nabla}_\nu \sigma - \bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu \sigma) - 2\bar{R}(\bar{\nabla} \sigma)^2 + \\ &+ (n-1)(n-2)(\bar{\nabla} \sigma)^4 + (n-2)(\bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu \sigma)^2 + \\ &- 2(n-2)(\bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu \sigma)(\bar{\nabla}^\mu \sigma)(\bar{\nabla}^\nu \sigma) + \\ &\left. + 2(2n-3)(\bar{\square} \sigma)(\bar{\nabla} \sigma)^2 \right\}, \quad (3.21) \end{aligned}$$

$$\sqrt{-g} R^2 = \sqrt{-\bar{g}} e^{(n-4)\sigma} \left[ \bar{R} - 2(n-1)(\bar{\square}\sigma) - (n-1)(n-2)(\bar{\nabla}\sigma)^2 \right]^2. \quad (3.22)$$

Consideremos agora o quadrado do tensor de Weyl. Usando a equação (3.17), obtemos

$$C^2(n) = C_{\alpha\beta\mu\nu} C^{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - \frac{4}{n-2} R_{\mu\nu}^2 + \frac{2}{(n-1)(n-2)} R^2. \quad (3.23)$$

A partir da equação (3.20) segue-se a seguinte transformação

$$\sqrt{-g} C_{\mu\nu\alpha\beta}^2 = \sqrt{-\bar{g}} e^{(n-4)\sigma} \bar{C}_{\mu\nu\alpha\beta}^2. \quad (3.24)$$

Esta identidade é também útil para verificações parciais de (3.21)-(3.23). Podemos estabelecer a relação entre  $C^2(d)$ , onde

$$C^2(4) = R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - 2R_{\alpha\beta}^2 + 1/3 R^2, \quad (3.25)$$

de forma que

$$C^2(d) = C^2(4) + \frac{2(d-4)}{d-2} R_{\mu\nu}^2 - \frac{(d-4)(d+1)}{3(d-1)(d-2)} R^2. \quad (3.26)$$

Relação similar pode ser calculada entre  $C^2(n)$  e  $C^2(d)$ . Outra importante combinação de invariantes é representada por

$$E = R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} - 4 R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + R^2. \quad (3.27)$$

Em  $n = 4$  esta equação é o integrando do termo topológico de Gauss-Bonnet. Mas, até mesmo para  $n \neq 4$  a expressão  $\int d^n x \sqrt{-g} E$  não contribui para o propagador dos gravitons (parte da métrica  $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$  com traço nulo e completamente transversal). A transformação conforme do termo topológico de Gauss-Bonnet é expressa pela equação

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} E &= \sqrt{-\bar{g}} e^{(n-4)\sigma} \left[ \bar{E} + 8(n-3)\bar{R}^{\mu\nu}(\bar{\nabla}_\mu\sigma\bar{\nabla}_\nu\sigma - \bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma) + \right. \\ &- 2(n-3)(n-4)\bar{R}(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 4(n-2)(n-3)(\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma)^2 \\ &+ 4(n-2)(n-3)(\bar{\square}\sigma)^2 + 8(n-2)(n-3)(\bar{\nabla}_\mu\sigma\bar{\nabla}_\nu\sigma)(\bar{\nabla}^\mu\bar{\nabla}^\nu\sigma) + \\ &- 4(n-3)\bar{R}(\bar{\square}\sigma) + 4(n-2)(n-3)^2(\bar{\square}\sigma)(\bar{\nabla}\sigma)^2 + \\ &\left. + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(\bar{\nabla}\sigma)^4 \right]. \quad (3.28) \end{aligned}$$

Percebemos aqui que este termo não contribui para o propagador de  $\sigma$ , mas somente para casos especiais (e.g. plano), enquanto que para o caso geral isto não é válido.

Por fim, para o termo  $\square R$  segue a seguinte regra de transformação:

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g}(\nabla^2 R) &= \sqrt{-g}e^{(n-4)\sigma} \left[ (\square \bar{R}) - 2(n-1)(\bar{\nabla}^4 \sigma) + \right. \\
&- (n-1)(n-2)\square(\bar{\nabla}\sigma)^2 + -2(n-1)(n-6)(\bar{\nabla}^\mu \sigma)(\bar{\nabla}_\mu \square \sigma) + \\
&- (n-1)(n-2)(n-6)(\bar{\nabla}^\mu \sigma)\bar{\nabla}_\mu(\bar{\nabla}\sigma)^2 - 2\bar{R}(\square \sigma) + \\
&+ 4(n-1)(\square \sigma)^2 + 2(n-1)(3n-10)(\square \sigma)(\bar{\nabla}\sigma)^2 + \\
&- 2(n-4)\bar{R}(\bar{\nabla}\sigma)^2 + +(n-6)(\bar{\nabla}^\mu \sigma)(\bar{\nabla}_\mu \bar{R}) + \\
&\left. + 2(n-1)(n-2)(n-4)(\bar{\nabla}\sigma)^4 \right]. \tag{3.29}
\end{aligned}$$

No cálculo da última expressão nós usamos a transformação do operador  $\square$  atuando em escalares

$$\square = e^{-2\sigma} [\square + (n-2)(\bar{\nabla}^\mu \sigma)\bar{\nabla}_\mu]. \tag{3.30}$$

É fácil verificar que para  $n = 4$  temos a seguinte relação

$$E - \frac{2}{3}(\square R) = \bar{E} - \frac{2}{3}(\square \bar{R}) + 4\bar{\Delta}_4 \sigma, \tag{3.31}$$

onde  $\bar{\Delta}_4$  é o operador invariante Hermitiano conforme de quarta ordem atuando no campo escalar, conformalmente invariante ( veja as Refs. [50, 51])

$$\Delta_4 = \nabla^4 + 2R^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu - \frac{2}{3}R\square + \frac{1}{3}(\nabla^\mu R)\nabla_\mu. \tag{3.32}$$

A fórmula (3.31) parece extremamente simples, especialmente levando em conta a complexidade das relações (3.28) e (3.29).

Por outro lado, para  $n \neq 4$  nenhuma relação simples entre as transformações de  $E$  e  $(\square R)$  é vista, enquanto o operador  $\Delta_4$  pode ser generalizado usando a lei de transformação não-trivial para o correspondente escalar ( veja Ref. [52]).

## 3.2 Teorema da Fatorização

Algumas vezes é possível reduzir os cálculos dos tensores de curvatura para determinadas métricas particulares, para um caso de menor dimensão. O teorema da fatorização trata o caso especial, quando é possível obter uma métrica  $g_{\tau\nu}$  dada pela matriz de dois blocos, que representaremos por  $g_{ab}(x^c)$  e  $g_{ij}(x^k)$ . Vamos assim formular o teorema sobre a fatorização da métrica, cuja prova pode ser obtida muito facilmente.

**TEOREMA.** Considere uma variedade  $D$  – dimensional Riemanniana ou pseudo-Riemanniana dotadas das seguintes coordenadas  $x^\mu = (x^c, x^k)$ , onde  $a, b, c = 1, 2, \dots, n$  e

$i, j, k = n + 1, n + 2, \dots, D$ . Vamos assumir que a métrica fatorizada é dada por

$$g_{\tau\nu} = \begin{pmatrix} g_{ab}(x^c) & 0 \\ 0 & g_{ij}(x^k) \end{pmatrix} . \quad (3.33)$$

Para os elementos desta métrica que tenham índices mistos, tem-se que seus valores são identicamente iguais a zero, de modo que somente os blocos  $g_{ab}$  e  $g_{ij}$  não são nulos. Além disto, os elementos da métrica de cada bloco dependem somente de suas próprias coordenadas  $g_{ab}(x^c)$  e  $g_{ij}(x^k)$ . O fato é que para a métrica (3.33), o tensor de Riemann também é fatorizado, assim como o tensor de Ricci (por extensão), o que implica que todas as suas componentes com índices mistos são nulas.

**PROVA.** Inicialmente, tomando a métrica inversa, concluímos que esta também tem uma estrutura de bloco fatorizada

$$g^{\tau\nu} = \begin{pmatrix} g^{ab}(x^c) & 0 \\ 0 & g^{ij}(x^k) \end{pmatrix} . \quad (3.34)$$

Para o símbolos de Christoffel, é fácil ver que

$$\Gamma_{bc}^a = \Gamma_{bc}^a(g_{ab}) \quad , \quad \Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i(g_{jk}) . \quad (3.35)$$

Considerando os termos mistos, verifica-se que todos estes são identicamente nulos, e assim

$$\Gamma_{ij}^a = \frac{1}{2}g^{ab}(\partial_i g_{jb} + \partial_j g_{ib} - \partial_b g_{ij}) = 0 = \Gamma_{ab}^i , \quad (3.36)$$

$$\Gamma_{ib}^a = \frac{1}{2}g^{ac}(\partial_i g_{cb} + \partial_b g_{ic} - \partial_c g_{ib}) = 0 = \Gamma_{bj}^i , \quad (3.37)$$

visto que para  $g_{ic} = 0$  e  $\partial_b g_{ic} = 0$ , encontra-se  $\Gamma_{ib}^a = 0$ .

O tensor de Riemann por definição é dado pela equação (2.11), de modo que

$$\begin{aligned} R_{abcd} &= \frac{1}{2}(g_{ad,b,c} + g_{bc,a,d} - g_{ac,b,d} - g_{bd,a,c}) + \\ &+ g_{ef}(\Gamma_{bc}^e \Gamma_{ad}^f - \Gamma_{bd}^e \Gamma_{ac}^f) . \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= \frac{1}{2}(g_{il,j,k} + g_{jk,i,l} - g_{ik,j,l} - g_{jl,i,k}) + \\ &+ g_{mn}(\Gamma_{jk}^m \Gamma_{il}^n - \Gamma_{jl}^m \Gamma_{ik}^n) . \end{aligned} \quad (3.39)$$

No setor misto temos

$$\begin{aligned} R_{ajcd} &= \frac{1}{2}(g_{ad,j,c} + g_{jc,a,d} - g_{ac,j,d} - g_{jd,a,c}) + \\ &+ g_{ef}(\Gamma_{jc}^e \Gamma_{ad}^f - \Gamma_{jd}^e \Gamma_{ac}^f) = 0 , \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned}
R_{abkl} &= \frac{1}{2}(g_{al,b,k} + g_{bk,a,l} - g_{ak,b,l} - g_{bl,a,k}) + \\
&+ g_{mn}(\Gamma_{bk}^m \Gamma_{al}^n - \Gamma_{bl}^m \Gamma_{ak}^n) = 0 ,
\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
R_{ajkl} &= \frac{1}{2}(g_{al,j,k} + g_{jk,a,l} - g_{ak,j,l} - g_{jl,a,k}) + \\
&+ g_{mn}(\Gamma_{jk}^m \Gamma_{al}^n - \Gamma_{jl}^m \Gamma_{ak}^n) = 0 .
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Deste modo,  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$  também possui um estrutura de setores  $g_{\tau\nu}$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \text{diag}\left\{ R_{abcd}(x^e), R_{ijkl}(x^m) \right\} . \tag{3.43}$$

O tensor de Ricci por definição é dado pela equação (2.18), de modo que

$$R_{ab} = R_{ab}(g_{cd}) = \partial_\lambda \Gamma_{ab}^\lambda - \partial_a \Gamma_{b\lambda}^\lambda + \Gamma_{ab}^\lambda \Gamma_{\lambda\kappa}^\kappa - \Gamma_{a\lambda}^\kappa \Gamma_{b\kappa}^\lambda , \tag{3.44}$$

$$R_{ij} = R_{ij}(g_{kl}) = \partial_\lambda \Gamma_{ij}^\lambda - \partial_i \Gamma_{j\lambda}^\lambda + \Gamma_{ij}^\lambda \Gamma_{\lambda\kappa}^\kappa - \Gamma_{i\lambda}^\kappa \Gamma_{j\kappa}^\lambda . \tag{3.45}$$

No setor misto temos

$$R_{aj} = \partial_\lambda \Gamma_{aj}^\lambda - \partial_a \Gamma_{j\lambda}^\lambda + \Gamma_{aj}^\lambda \Gamma_{\lambda\kappa}^\kappa - \Gamma_{a\lambda}^\kappa \Gamma_{j\kappa}^\lambda = 0 . \tag{3.46}$$

Deste modo,  $R_{\tau\nu}$  também possui a mesma estrutura de bloco que  $g_{\tau\nu}$

$$R_{\tau\nu} = \text{diag}\left\{ R_{ab}(x^c), R_{ij}(x^k) \right\} . \tag{3.47}$$

## 4 *Obtenção das Equações de Einstein para as Métricas de Interesse Físico*

Nesta etapa, utilizaremos as transformações conformes associadas ao teorema da fatorização, a fim de provarmos a eficácia deste ferramental matemático na obtenção das equações de Einstein para as métricas de interesse físico.

### 4.1 *Métrica Cosmológica*

Como já sabemos, o intervalo que nos fornece a chamada métrica cosmológica, também conhecida como a métrica de Friedmann-Robertson-Walker é dado pela equação (2.67), onde as representações matriciais para o tensor métrico covariante e contravariante são dadas por (2.68) e (2.70).

Podemos obter uma métrica ainda mais simples utilizando o teorema da fatorização. Para isto, tomemos inicialmente

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)}, \quad (4.1)$$

vemos que deste modo podemos obter uma métrica equivalente que depende do tempo conforme  $\eta$ . O intervalo correspondente assume a forma

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[ d\eta^2 - \frac{dr^2}{1 - kr^2} - r^2 d\Omega \right], \quad (4.2)$$

sendo sua métrica correspondente, expressa por

$$g_{\tau\nu} = \begin{pmatrix} a^2(\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2(\eta)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(\eta)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(\eta)r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$



onde

$$g_{00} = a^2(\eta), \quad g_{11} = -a^2(\eta)(1 - kr^2)^{-1}, \quad g_{22} = -a^2(\eta)r^2, \quad g_{33} = -a^2(\eta)r^2\text{sen}^2\theta. \quad (4.4)$$

Fazendo a mudança de variável

$$a(\eta) = e^\sigma, \quad \sigma = \sigma(\eta), \quad (4.5)$$

obtemos

$$ds^2 = e^{2\sigma(\eta)} \left[ d\eta^2 - \frac{dr^2}{1 - kr^2} - r^2 d\Omega \right]. \quad (4.6)$$

Buscando uma métrica mais compacta podemos fazer uso do teorema da fatorização, mas antes disto, devemos reorganizar a equação acima, de modo a obtermos um intervalo em função de outro de maior simplicidade, e assim

$$ds^2 = r^2 e^{2\sigma(\eta)} \left[ r^{-2} d\eta^2 - \frac{dr^2}{r^2(1 - kr^2)} - d\Omega \right], \quad (4.7)$$

tal que, adotando

$$e^\omega = r, \quad e^{2\rho} = (1 - kr^2)^{-1}, \quad \phi = \sigma - \omega, \quad (4.8)$$

verificamos que

$$ds^2 = e^{2\phi} \left[ e^\omega d\eta^2 - e^{2(\rho-\omega)} dr^2 - d\Omega \right], \quad (4.9)$$

onde

$$ds^2 = e^{2\phi} d\bar{s}^2, \quad (4.10)$$

sendo

$$d\bar{s}^2 = e^{-\omega} d\eta^2 - e^{2(\rho-\omega)} dr^2 - d\Omega. \quad (4.11)$$

E assim, graças a estas transformações, temos uma nova métrica mais simples, dada por:

$$\bar{g}_{\tau\nu} = \begin{pmatrix} e^{-\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2(\rho-\omega)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}^2\theta \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Os elementos da nova métrica evidentemente são dados por:

$$\bar{g}_{00} = e^{-\omega}, \quad \bar{g}_{11} = -e^{2(\rho-\omega)}, \quad \bar{g}_{22} = -1, \quad \bar{g}_{33} = -\text{sen}^2\theta. \quad (4.13)$$

Pelo teorema da fatorização, obtemos uma métrica na representação de uma matriz bloco conforme (4.1), de modo que

$$\bar{g}_{ab} = \begin{pmatrix} e^{-\omega} & 0 \\ 0 & -e^{2(\rho-\omega)} \end{pmatrix}, \quad \bar{g}_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -sen^2\theta \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Respectivamente, obtemos para a métrica contravariante

$$\bar{g}^{ab} = \begin{pmatrix} e^{\omega} & 0 \\ 0 & -e^{-2(\rho-\omega)} \end{pmatrix}, \quad \bar{g}^{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -sen^{-2}\theta \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Sabemos que símbolo de Christoffel é dado por (2.3). Verifica-se que após a realização da transformação conforme, a forma da sua equação é conservada. Portanto

$$\bar{\Gamma}_{\tau\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}\bar{g}^{\alpha\kappa} (\partial_{\tau}\bar{g}_{\kappa\nu} + \partial_{\nu}\bar{g}_{\tau\kappa} - \partial_{\kappa}\bar{g}_{\tau\nu}). \quad (4.16)$$

Assim, para  $\tau, \nu, \alpha = 0, 1$

$$\bar{\Gamma}_{00}^1 = -\frac{1}{2}\bar{g}^{11}\partial_1\bar{g}_{00} = -\left(\frac{1-kr^2}{r}\right); \quad (4.17)$$

$$\bar{\Gamma}_{11}^1 = \frac{1}{2}\bar{g}^{11}\partial_1\bar{g}_{11} = \frac{2kr^2-1}{r(1-kr^2)}; \quad (4.18)$$

$$\bar{\Gamma}_{10}^0 = \bar{\Gamma}_{01}^0 = \frac{1}{2}\bar{g}^{11}\partial_0\bar{g}_{11} = -\frac{1}{r}; \quad (4.19)$$

$$\bar{\Gamma}_{00}^0 = \bar{\Gamma}_{11}^0 = \bar{\Gamma}_{01}^1 = \bar{\Gamma}_{10}^1 = 0; \quad (4.20)$$

$$\bar{\Gamma}_{22}^2 = \bar{\Gamma}_{22}^2 = \cot\theta; \quad (4.21)$$

$$\bar{\Gamma}_{33}^2 = -sen\theta cos\theta; \quad (4.22)$$

$$\bar{\Gamma}_{22}^2 = \bar{\Gamma}_{33}^3 = \bar{\Gamma}_{32}^2 = \bar{\Gamma}_{23}^2 = \bar{\Gamma}_{22}^3 = 0. \quad (4.23)$$

Façamos agora alguns cálculos. Já sabemos que:

$$\bar{\nabla}_b\bar{\nabla}_c\phi = \partial_b\partial_c - \bar{\Gamma}_{bc}^a(\partial_a\phi); \quad (4.24)$$

$$\bar{\square}\phi = \bar{g}^{ab}\bar{\nabla}_a\bar{\nabla}_b\phi; \quad (4.25)$$

$$(\bar{\nabla}\phi)^2 = \bar{g}^{ab}(\bar{\nabla}_a\phi)(\bar{\nabla}_b\phi). \quad (4.26)$$

Para  $\tau, \nu, \alpha = 2, 3$ , obtemos

$$\bar{\Gamma}_{22}^2 = \bar{\Gamma}_{33}^3 = \bar{\Gamma}_{23}^2 = \bar{\Gamma}_{32}^2 = \bar{\Gamma}_{22}^3 = 0 . \quad (4.27)$$

Deste modo

$$\bar{\nabla}_0 \bar{\nabla}_0 \phi = \partial_0 \partial_0 \phi - \bar{\Gamma}_{00}^a (\partial_a \phi) = \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \phi \right) + \left( \frac{1 - kr^2}{r} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \phi \right) ; \quad (4.28)$$

$$\bar{\nabla}_1 \bar{\nabla}_1 \phi = \partial_1 \partial_1 \phi - \bar{\Gamma}_{11}^a (\partial_a \phi) = \phi'' - \left[ \frac{2kr^2 - 1}{r(1 - kr^2)} \right] \phi' ; \quad (4.29)$$

$$\bar{\nabla}_0 \bar{\nabla}_1 \phi = \partial_0 \partial_1 \phi - \bar{\Gamma}_{01}^a (\partial_a \phi) = \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \phi' \right) + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \phi \right) ; \quad (4.30)$$

$$\bar{\nabla}_1 \bar{\nabla}_0 \phi = \partial_1 \partial_0 \phi - \bar{\Gamma}_{10}^a (\partial_a \phi) = \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \phi' \right) + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \phi \right) ; \quad (4.31)$$

$$\bar{\square} \phi = \bar{g}^{ab} \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b \phi = \bar{g}^{00} \bar{\nabla}_0 \bar{\nabla}_0 \phi + \bar{g}^{11} \bar{\nabla}_1 \bar{\nabla}_1 \phi ; \quad (4.32)$$

$$\bar{\square} \phi = r^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \phi \right) + [kr^3 \phi' - r^2(1 - kr^2) \phi''] ; \quad (4.33)$$

$$(\bar{\nabla}_0 \phi)(\bar{\nabla}_0 \phi) = \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \phi \right)^2 ; \quad (4.34)$$

$$(\bar{\nabla}_1 \phi)(\bar{\nabla}_1 \phi) = \phi'^2 ; \quad (4.35)$$

$$(\bar{\nabla}_0 \phi)(\bar{\nabla}_1 \phi) = \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \phi \right) \phi' ; \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla} \phi)^2 &= \bar{g}^{00} (\bar{\nabla}_0 \phi)^2 + \bar{g}^{11} (\bar{\nabla}_1 \phi)^2 \\ &= r^2 \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \phi \right)^2 - r^2 (1 - kr^2) \phi'^2 ; \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\bar{g}_{00} (\bar{\nabla} \phi)^2 = \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \phi \right)^2 - (1 - kr^2) \phi'^2 ; \quad (4.38)$$

$$\bar{g}_{11} (\bar{\nabla} \phi)^2 = \phi'^2 - \frac{1}{(1 - kr^2)} \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \phi \right)^2 ; \quad (4.39)$$

$$\bar{g}_{01} (\bar{\nabla} \phi)^2 = \bar{g}_{10} (\bar{\nabla} \phi)^2 = 0 . \quad (4.40)$$

Devemos agora calcular as componentes do tensor de Ricci. Deste modo

$$R_{00} = \bar{R}_{00} - 3\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\sigma\right) - \frac{1}{r^2} . \quad (4.41)$$

Buscando maior simplicidade vamos definir que para  $R_{\mu\nu} = \text{diag}\{R_{ab}(x^c), R_{ij}(x^k)\}$  é feita uma mudança de representação onde  $K_{ab} = R_{ab}(x^c)$  e  $L_{ij} = R_{ij}(x^k)$ . Deste modo

$$K_{00} = \bar{R}_{00}; \quad K_{11} = \bar{R}_{11}; \quad L_{22} = \bar{R}_{22}; \quad L_{33} = \bar{R}_{33} . \quad (4.42)$$

Note que esta mudança na representação se estende para o tensor de Riemann e o escalar de curvatura.

Agora, basta calcular o tensor de Ricci e o escalar de curvatura para a métrica  $\bar{g}_{\mu\nu}$ . Por definição o tensor de Ricci é dado por (2.18). Aplicando os resultados encontrados para o tensor de Ricci conforme (3.17), obtemos para suas componentes

$$K_{00} = \bar{R}_{00} = \partial_\alpha \bar{\Gamma}_{00}^\alpha - \partial_1 \bar{\Gamma}_{0\alpha}^\alpha + \bar{\Gamma}_{00}^\tau \bar{\Gamma}_{\lambda\alpha}^\alpha - \bar{\Gamma}_{0\alpha}^\tau \bar{\Gamma}_{\tau 0}^\alpha = \frac{1}{r^2} ; \quad (4.43)$$

$$K_{11} = \bar{R}_{11} = \partial_\alpha \bar{\Gamma}_{11}^\alpha - \partial_1 \bar{\Gamma}_{1\alpha}^\alpha + \bar{\Gamma}_{11}^\tau \bar{\Gamma}_{\lambda\alpha}^\alpha - \bar{\Gamma}_{1\alpha}^\tau \bar{\Gamma}_{\tau 1}^\alpha = -\frac{1}{r^2(1 - kr^2)} ; \quad (4.44)$$

$$L_{22} = \bar{R}_{22} = \partial_\alpha \bar{\Gamma}_{22}^\alpha - \partial_2 \bar{\Gamma}_{2\alpha}^\alpha + \bar{\Gamma}_{22}^\tau \bar{\Gamma}_{\lambda\alpha}^\alpha - \bar{\Gamma}_{2\alpha}^\tau \bar{\Gamma}_{\tau 2}^\alpha = 1 ; \quad (4.45)$$

$$L_{33} = \bar{R}_{33} = \partial_\alpha \bar{\Gamma}_{33}^\alpha - \partial_3 \bar{\Gamma}_{3\alpha}^\alpha + \bar{\Gamma}_{33}^\tau \bar{\Gamma}_{\lambda\alpha}^\alpha - \bar{\Gamma}_{3\alpha}^\tau \bar{\Gamma}_{\tau 3}^\alpha = \text{sen}^2\theta ; \quad (4.46)$$

$$\bar{R}_{13} = 0; \quad \bar{R}_{31} = 0; \quad \bar{R}_{12} = 0; \quad \bar{R}_{21} = 0; \quad \bar{R}_{32} = 0; \quad \bar{R}_{23} = 0 . \quad (4.47)$$

Utilizando agora estes resultados, e lembrando de (4.8), encontramos finalmente o tensor de Ricci para a métrica de FRW

$$R_{00} = -3\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\sigma\right) ; \quad (4.48)$$

$$R_{ij} = -e^{-2\sigma} \left[ 2k + 2\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\sigma\right)^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\sigma\right) \right] g_{ij} . \quad (4.49)$$

Calculando o escalar de curvatura conforme  $\bar{R}$  pela definição (2.21) encontramos como resultado  $\bar{R} = 0$ . Assim, conforme visto no capítulo 2, o escalar de curvatura é dado pela equação (3.16). Aplicando os resultados encontrados à métrica de Friedmann-Robertson-Walker, obtemos para o escalar de curvatura

$$\begin{aligned} R &= e^{-2\phi} \left[ \bar{R} - 6(\nabla^2\phi) - 6(\nabla\phi)^2 \right] \\ &= -6e^{-2\sigma} \left[ k + \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\sigma\right)^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\sigma\right) \right] . \end{aligned} \quad (4.50)$$

Finalmente, calculamos as componentes do tensor de Einstein para a Métrica Cosmológica. Assim sendo, para a equação geral (2.40) obtemos

$$\begin{aligned} G_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00} \\ &= 3\left[k + \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\sigma\right)^2\right]; \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} = e^{-2\sigma}\left[k + \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\sigma\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\sigma\right)\right]g_{ij}. \quad (4.52)$$

Podemos também obter estas equações para os tensores mistos  $G_{\mu}^{\nu}$  e  $R_{\mu}^{\nu}$  tomando a equação (2.19)

$$R_{\mu}^{\nu} = g^{\nu\tau}R_{\tau\mu},$$

Verificamos que

$$R_0^0 = -3e^{-2\sigma}\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\sigma\right). \quad (4.53)$$

$$R_j^i = -e^{-2\sigma}\left[2k + 2\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\sigma\right)^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\sigma\right)\right]\delta_j^i. \quad (4.54)$$

Podemos fazer o mesmo para o tensor de Einstein

$$G_{\mu}^{\nu} = g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2}R\delta_{\mu}^{\nu}. \quad (4.55)$$

Portanto, vemos que suas componentes são dadas por

$$G_0^0 = 3e^{-2\sigma}\left[k + \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\sigma\right)^2\right]; \quad (4.56)$$

$$G_j^i = e^{-2\sigma}\left[k + \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\sigma\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\sigma\right)\right]\delta_j^i. \quad (4.57)$$

Lembrando que

$$a = e^{\sigma}, \quad (4.58)$$

obtemos

$$\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\sigma\right) = \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial\eta}, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\sigma\right) = \frac{\left(\frac{\partial^2 a}{\partial\eta^2}\right)a - \left(\frac{\partial a}{\partial\eta}\right)^2}{a^2}. \quad (4.59)$$

Lembrando que  $ad\eta = dt$ , podemos agora utilizar estes resultados nas equações que acabam de ser obtidas e, tomando as derivadas de “ $a$ ” em relação a  $t$ , o escalar de curvatura assume o valor

$$R = -6\left[\frac{a^2k + \ddot{a}a^2 + \dot{a}^2a}{a^4}\right]. \quad (4.60)$$

Finalmente, encontramos para as componentes do tensor de Einstein os seguintes valores

$$G_t^t = G_0^0 = 3 \left[ \frac{ka^2 + \dot{a}^2}{a^4} \right] ; \quad (4.61)$$

$$G_j^i = \left[ \frac{k + 2\ddot{a}a + \dot{a}^2}{a^2} \right] \delta_j^i . \quad (4.62)$$

Utilizando as expressões (4.61) e (4.62) podemos facilmente escrever a forma padrão das equações de Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = \frac{8\pi G \rho}{3} , \quad \frac{k + 2\ddot{a}a + \dot{a}^2}{a^2} = -8\pi G P , \quad (4.63)$$

onde  $P$  e  $\rho$  representam a pressão e a densidade de energia de um fluido ideal preenchendo o Universo. Estas duas quantidades estão relacionadas com a equação de estado específico para um dado tipo de fluido (matéria, radiação, energia de vácuo, etc). Do nosso ponto de vista, o método utilizado para o cálculo das equações é muito mais simples que o método padrão. E comparando estas equações obtidas com a literatura somos obrigados a admitir que os resultados encontrados em nada diferem daqueles obtidos pelos métodos convencionais.

## 5 *Redução dimensional do Invariante Topológico*

O objetivo central deste capítulo é ilustrar a utilidade da transformação conforme para teorias além da Teoria Geral da Relatividade (ver [45], [46]).

### 5.1 Invariante Topológico de Gauss-Bonnet

Para iniciar este capítulo deveremos considerar o termo topológico

$$S_{top} = \int d^4x \sqrt{-g} \left( E - \frac{2}{3} \square R \right) . \quad (5.1)$$

Utilizaremos aqui a transformação conforme na obtenção do invariante topológico de Gauss-Bonnet, em  $D = 4$ , para a métrica particular

$$g_{\tau\nu} = \begin{pmatrix} g_{ab} & 0 \\ 0 & g_{ij} \end{pmatrix} , \quad (5.2)$$

tal que

$$g_{ab} = g_{ab}(x^a) , \quad g_{ij} = e^{2\Phi(x^a)} h_{ij}(x^i) , \quad (5.3)$$

e assim

$$g_{\tau\nu} = \begin{pmatrix} g_{ab}(x^a) & 0 \\ 0 & e^{2\Phi(x^a)} h_{ij}(x^i) \end{pmatrix} . \quad (5.4)$$

Vemos aqui que  $g_{ab}(x^a)$  e  $h_{ij}(x^i)$  são ambas métricas bidimensionais, onde  $h_{ij}(x^i)$  é uma métrica com escalar de curvatura ( $k$ ) constante. Com relação a  $\Phi(x^a)$ , vemos que este é um campo escalar bidimensional. Esta redução dimensional nos leva a supor como resultado um termo de superfície, ou topológico para o espaço bidimensional com métrica  $g_{ab}$ , onde  $a, b = 0, 1$ . Dada a simplicidade da Transformação Conforme para

$$E - \frac{2}{3} (\square R) = \bar{E} - \frac{2}{3} (\bar{\square} R) + 4\bar{\Delta}_4 \sigma , \quad (5.5)$$

deve-se então tomar como escolha não apenas o termo topológico de Gauss-Bonnet, e sim uma combinação deste termo com o termo de superfície

$$S_{top} = \int d^4x \sqrt{-g} (E - \frac{2}{3} \square R) \quad . \quad (5.6)$$

Fazendo agora o uso da transformação conforme, encontramos

$$g_{\tau\nu} = e^{2\Phi} \bar{g}_{\tau\nu} \quad . \quad (5.7)$$

A métrica fatorizada é dada por

$$\bar{g}_{\tau\nu} = \begin{pmatrix} \bar{g}_{ab}(x^a) & 0 \\ 0 & h_{ij}(x^i) \end{pmatrix} \quad , \quad (5.8)$$

e assim

$$S_{top} = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} (\bar{E} - \frac{2}{3} \square R + 4\bar{\Delta}_4 \sigma) \quad . \quad (5.9)$$

Portanto, tendo sido a métrica fatorizada, verificamos que os complicados cálculos para as expressões do quadrado dos tensores de curvatura, de Ricci e do escalar de curvatura para métricas 4 – *dimensionais* reduzem-se a cálculos mais simples em métricas 2-dimensional  $\bar{g}_{ab}(x^a)$  e  $h_{ij}$ . As quantidades relacionadas com a métrica esfericamente simétrica 2-dimensional são muito simples devido a

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} R (g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}) \quad ; \quad R_{\alpha\mu} = \frac{1}{2} R g_{\alpha\mu} \quad . \quad (5.10)$$

Vamos representar o tensor de Riemann ( $R_{abcd}$ ) e o tensor de Ricci ( $R_{ab}$ ) para  $g_{ab}$  respectivamente por  $(K_{abcd})$  e  $(K_{ab})$ . Do mesmo modo para  $\bar{g}_{ab}$  tomemos  $(\bar{K}_{abcd})$  e  $(\bar{K}_{ab})$ . Portanto, para 2 dimensões, verifica-se que

$$K_{abcd} = \frac{1}{2} K (g_{ac} g_{bd} - g_{ad} g_{bc}) \quad ; \quad K_{ab} = \frac{1}{2} K g_{ab} \quad , \quad (5.11)$$

$$\bar{K}_{abcd} = \frac{1}{2} \bar{K} (\bar{g}_{ac} \bar{g}_{bd} - \bar{g}_{ad} \bar{g}_{bc}) \quad ; \quad \bar{K}_{ab} = \frac{1}{2} \bar{K} \bar{g}_{ab} \quad . \quad (5.12)$$

Consequentemente, para o setor  $h_{ij}$  tomemos para os tensores de Riemann e Ricci respectivamente  $L_{ijkl}$  e  $L_{ij}$ .

$$L_{ijkl} = \frac{1}{2} L (h_{ik} h_{jl} - h_{il} h_{jk}) \quad ; \quad L_{ij} = \frac{1}{2} L h_{ij} \quad . \quad (5.13)$$

Deste modo, é possível ver que o tensor de Ricci é expresso por:

$$R_{\tau\nu} = \begin{pmatrix} K_{ab} & 0 \\ 0 & L_{ij} \end{pmatrix} \quad . \quad (5.14)$$



Calculemos agora os elementos da expressão

$$S_{top} = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left( \bar{E} - \frac{2}{3} \square R + 4\bar{\Delta}_4 \sigma \right) , \quad (5.15)$$

onde, conforme já mencionado em (5.5), verificamos que

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu}^2 - 4\bar{R}_{\alpha\mu}^2 + \bar{R}^2 \\ &= \bar{K}_{abcd}K^{abcd} - 4\bar{K}_{ab}\bar{K}^{ab} + \bar{L}_{ijkl}L^{ijkl} - 4\bar{L}_{ij}\bar{L}^{ij} + (\bar{K} + L)^2 , \end{aligned} \quad (5.16)$$

visto que

$$\bar{R} = \bar{g}^{\alpha\beta}\bar{R}_{\alpha\beta} = \bar{g}^{ab}K_{ab} + h^{ij}L_{ij} = \bar{K} + L . \quad (5.17)$$

Prosseguindo

$$\bar{E} = \frac{1}{4}\bar{K}^2(4 - 2 \cdot 2 + 4) - 4\frac{1}{4}\bar{K}^2 \cdot 2 + L^2 - 2L^2 + (\bar{K} + L)^2 , \quad (5.18)$$

encontramos como resultado

$$\bar{E} = 2\bar{K}L . \quad (5.19)$$

Representaremos as derivadas covariantes correspondentes às métricas  $g_{ab}$  e  $\bar{g}_{ab}$  respectivamente por  $D_a$  e  $\bar{D}_a$ . E assim, atuando num escalar  $\Psi(x^a)$ , verificamos para a regra de transformação do D'Alambertiano que

$$\square \Psi = \bar{D}^2 \Psi = \bar{g}^{ab}(\bar{D}_a \bar{D}_b) \Psi , \quad (5.20)$$

considerando

$$\bar{g}_{ab} = e^{-2\Phi} g_{ab} , \quad (5.21)$$

$$\bar{\Gamma}_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c + \delta\Gamma_{ab}^c , \quad (5.22)$$

onde

$$\delta\Gamma_{ab}^c = g_{ab}D^c\Phi - \delta_a^c D_b\Phi - \delta_b^c D_a\Phi , \quad (5.23)$$

$$g^{ab}\delta\Gamma_{ab}^c = 2D^c\Phi - 2D^c\Phi = 0 , \quad (5.24)$$

encontramos

$$D^2\Phi = e^{-2\Phi}\bar{D}^2\Phi . \quad (5.25)$$

Tomando

$$\bar{R} = \bar{K} + L , \quad (5.26)$$

obtemos que

$$\bar{K} = e^{2\Phi}(K + 2D^2\Phi) \quad ; \quad (5.27)$$

$$\bar{\square}\bar{R} = \bar{D}^2 K = e^{2\Phi} D^2 [e^{2\Phi}(K + 2D^2\Phi)] \quad . \quad (5.28)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} S_{top} = & \int d^2x \sqrt{-g(x^a)} \{ 2kK + \\ & + D^2 \left( \frac{8}{3} e^{2\Phi} D^2\Phi - \frac{2}{3} e^{2\Phi} K^2\Phi + 4k\Phi \right) + \\ & - \frac{1}{3} D_a [e^{2\Phi}(K + 2D^2\Phi)(D_a\Phi)] \} \quad . \quad (5.29) \end{aligned}$$

## 6 Teoria de Einstein-Cartan e as equações dinâmicas

Neste capítulo, investigaremos as equações dinâmicas bem como os aspectos fundamentais na teoria de Einstein-Cartan. O trabalho correspondente a essa abordagem pode ser encontrado nas ( ver Refs. [33] e [34]).

### 6.1 Elementos da teoria de Einstein-Cartan

Ao se iniciar o estudo da gravitação com torção para o universo primordial, é comum considerar a generalização direta da teoria da Relatividade Geral, conhecida como teoria de Einstein-Cartan (ver [6], [7], [10] e [20]). Deste modo, torna-se fundamental a escolha da estrutura a ser analisada e tratada, buscando a mais simples generalização possível para o Modelo Cosmológico Padrão. Feito isso, deve-se obter as equações de interesse físico, suas soluções, bem como, as contribuições dominantes para o tensor momento-energia e quantidades co-relacionadas. Na busca de uma dinâmica para o Universo deve-se encontrar a conexão entre o comportamento temporal do fator de escala e demais quantidades relacionadas com as respectivas fontes.

É notório que, de acordo com o Modelo Cosmológico Padrão 4-dimensional, uma fase inflacionária adequada de expansão acelerada possa acontecer somente para um período de dominação da energia de vácuo. De fato, no caso de um Universo Isotrópico e Homogêneo preenchido com um fluido ideal com pressão  $p$  e densidade  $\rho$ , o fator de escala de Robertson-Walker  $a(t)$  satisfaz à equação de Friedmann

$$\ddot{a} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3p)$$

(o ponto representa a derivada com respeito ao tempo cósmico  $t$ ); a condição  $\ddot{a} > 0$  necessária para resolver os problemas de horizonte, singularidade (espaço plano) e entropia implica numa pressão negativa efetiva,  $p < -\rho/3$ , a qual somente pode ser encontrada neste cenário com a contribuição de vácuo dominante para o tensor momento-energia.

Na teoria de Einstein-Cartan, a qual é simplesmente um exemplo da teoria de Gauge de Poincaré da gravidade, a lagrangiana gravitacional é o escalar de curvatura usual  $\mathcal{L}_g = \sqrt{-g}R(\tilde{\Gamma})$ , construída com a conexão  $\tilde{\Gamma}$  que é compatível com a metricidade, mas não é simétrica.

No estudo da Relatividade Geral, a escolha particular de  $\Gamma^\mu{}_{\nu\beta}$  é dada pela equação (2.3)

$$\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\lambda\tau}(\partial_\alpha g_{\tau\beta} + \partial_\beta g_{\tau\alpha} - \partial_\tau g_{\alpha\beta}) ,$$

que por sua vez, aparece como uma consequência de duas exigências,

$$i) \Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta} = \Gamma^\lambda{}_{\beta\alpha} \text{ (simetria)}$$

e

$$ii) \nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0 \text{ (metricidade)} .$$

Neste caso, satisfeitas tais condições, verifica-se que a equação dada por (2.3) é a única solução possível a ser obtida; conhecida conforme mencionada anteriormente como símbolo de Christoffel. A equação (2.3) é realmente de grande importância por depender apenas da métrica e representar uma referência para as demais conexões. É possível verificar que, embora a representação dada para o símbolo  $\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}$  possa induzir a leitura de um objeto tensorial, isto não representa uma verdade, pois se for realizada uma transformação, para um dado sistema de coordenadas

$$\Gamma^{\lambda'}{}_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma{}_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x'^\nu} \frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} .$$

Então, verifica-se que  $\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}$  não representa um tensor, a menos que o segundo termo do segundo membro fosse nulo. É possível verificar que a definição de  $\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}$  contém uma certa ambiguidade que pode ser visualizada se tomarmos por exemplo o espaço-tempo plano, onde a equação (2.3) juntamente com a métrica dependem exclusivamente do sistema de coordenadas utilizado. De fato, é possível realizar uma escolha, tal que  $\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}$  seja nulo não apenas em um dado ponto, mas também ao longo de quaisquer pontos de uma dada linha do universo. A importância dos símbolos de Christoffel está em permitir expressar as derivadas covariantes de forma simplificada. Mas, se em vez de tomar o símbolo de Christoffel, for utilizado uma conexão afim dada por

$$\hat{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu{}_{\beta\alpha} + C^\mu{}_{\alpha\beta}$$

onde  $C^\mu{}_{\alpha\beta}$  nada mais é do que um tensor, verifica-se que mesmo  $\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}$  sendo nulo devido à escolha de coordenadas adequadas, o mesmo não ocorre para  $C^\mu{}_{\alpha\beta}$ . Da mesma forma, dada a métrica para o espaço-tempo plano, a derivada covariante em relação a

$\hat{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}$  não poderá ser reduzida para transformação de coordenadas de derivadas parciais. Deste modo, verifica-se que com a introdução da conexão afim diferente do símbolo de Christoffel a geometria não pode ser completamente descrita pela métrica, mas dotada de características absolutamente independentes. Como consequência, essas propriedades da definição de  $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$  tornam-se de grande importância, possibilitando a introdução de campos de gauge diferentes para a gravitação, e assim a descrição de várias interações. Um exemplo de uma teoria de gauge de Poincaré da gravidade é a teoria de Einstein-Cartan.

A ação na estrutura de Einstein-Cartan é dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{\kappa^2} (\tilde{R} - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M \right\} , \quad (6.1)$$

onde a métrica têm assinatura dada por  $(+ - - -)$ , com  $\kappa^2 = 16\pi G$  (aqui são utilizadas unidades tais que  $h = c = 1$ ),  $\Lambda$  é a constante cosmológica e  $\tilde{R}$  é o escalar de Ricci construído com a conexão afim não-simétrica,  $\tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\beta}$ . O termo  $\mathcal{L}_M$  é o Lagrangiano de matéria. Considerando o uso da condição de metricidade ( $\tilde{\nabla}_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ ) e definindo do tensor torção ( $T^\mu_{\alpha\beta}$ ),

$$T^\mu_{\alpha\beta} := \tilde{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} - \tilde{\Gamma}^\mu_{\beta\alpha} .$$

Podemos trabalhar esta equação utilizando a condição de metricidade vista anteriormente, tal que

$$\tilde{\nabla}_\alpha g_{\mu\nu} = 0$$

e assim, da derivada covariante da métrica temos que

$$\tilde{\nabla}_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\alpha} g_{\lambda\nu} - \tilde{\Gamma}^\lambda_{\alpha\nu} g_{\lambda\mu} = 0 .$$

Agora, é possível obter mais duas equações de mesma estrutura realizando permutações cíclicas, sendo que após um pouco de álgebra têm-se que

$$(\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) - (\tilde{\Gamma}_{\mu\nu\alpha} - \tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\nu}) - (\tilde{\Gamma}_{\nu\mu\alpha} - \tilde{\Gamma}_{\nu\alpha\mu}) - (\tilde{\Gamma}_{\alpha\mu\nu} - \tilde{\Gamma}_{\alpha\nu\mu}) = 0 .$$

Porém

$$(\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) = \Gamma_{\alpha\mu\nu}$$

e com o uso da definição de tensor e mais alguns cálculos pode-se verificar que

$$2(\tilde{\Gamma}_{\alpha\mu\nu} - \Gamma_{\alpha\mu\nu}) = T_{\alpha\mu\nu} - T_{\mu\nu\alpha} - T_{\nu\mu\alpha} .$$

Veja que no segundo membro temos apenas tensores, o que nos leva a conclusão de que necessariamente o primeiro membro também tenha propriedades tensoriais. Assim, podemos representar o primeiro membro tal que

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\mu\nu} - \Gamma_{\alpha\mu\nu} = K_{\alpha\mu\nu}$$

ou na forma

$$\tilde{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\alpha\beta} + K^\mu_{\alpha\beta}, \quad (6.2)$$

onde  $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$  representa a conexão Riemanniana (conexão de Levi-Civita) e a quantidade  $K^\mu_{\alpha\beta}$  é o tensor contorção, podendo este ser escrito em função da torção conforme a expressão abaixo

$$K^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (T^\mu_{\alpha\beta} - T^\mu_{\beta\alpha} - T^\mu_{\alpha\beta}).$$

Os índices são elevados e abaixados com o uso da métrica. É importante observar que a contorção é antissimétrica nos dois primeiros índices

$$K_{\alpha\beta\gamma} = -K_{\beta\alpha\gamma},$$

enquanto que a torção é antissimétrica nos dois últimos índices

$$T_{\alpha\beta\gamma} = -T_{\alpha\gamma\beta}.$$

O termo  $\mathcal{L}_M$  é a Lagrangiana descrevendo a distribuição de matéria. Nós consideramos aqui a seguinte Lagrangiana de matéria:

$$\mathcal{L}_M = \mathcal{L}_{AC} + \mathcal{L}_{SF}, \quad (6.3)$$

onde  $\mathcal{L}_{SF}$  é a Lagrangiana do fluido de spin [21] e  $\mathcal{L}_{AC}$  representa a fonte externa, presente no acoplamento mínimo do setor de Dirac (ver Ref. [7]):

$$\mathcal{L}_{AC} = J^\mu S_\mu, \quad (6.4)$$

Aqui,  $S_\mu$  é a parte axial da torção, definida por

$$S_\mu = \varepsilon_{\lambda\rho\sigma\mu} T^{\lambda\rho\sigma}$$

(sendo que  $\varepsilon_{\lambda\rho\sigma\mu}$  representa o tensor de Levi-Civita, com  $\varepsilon_{0123} = \sqrt{-g}$ ), e  $J^\mu$  representa a corrente axial externa,

$$J^\mu = \langle \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi \rangle,$$

onde esta é a média devido, por exemplo, a efeitos quânticos [7], tal que  $J^\mu$  pode ser interpretado como uma propriedade do vácuo, responsável pela violação de Lorentz (ver também Ref. [53]).<sup>1</sup> Ao se iniciar os cálculos e variar a ação é necessário definir as variáveis independentes. Neste caso nós escolhemos  $g^{\mu\nu}$  e  $T^\alpha_{\beta\gamma}$  como sendo as variáveis dinâmicas independentes, e  $J^\mu$  como a quantidade definida para a violação de simetria do

<sup>1</sup>obs.: A matriz  $\gamma^5$  é a matriz de Dirac  $\gamma^5 = (i/4!) \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu = \frac{i}{\sqrt{-g}} \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ , escrita na forma escalar.

vácuo que conforme será mostrado, dependente da variável dinâmica  $g^{\mu\nu}$ . A métrica do espaço-tempo é a métrica espacialmente plana, homogênea e isotrópica tal que

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (6.5)$$

É natural assumir que  $J^\mu$  é um vetor homogêneo e isotrópico, pois de outra forma quebraria a isotropia do universo. Deste modo,  $J^\mu$  é um vetor tipo-tempo tal que nós tomamos  $J^\mu J_\mu = J^2(t)$ .

Para prosseguir é necessário tomar o escalar de Ricci  $\tilde{R}$  para a conexão afim não simétrica, onde

$$\tilde{R} = \tilde{R}^\mu{}_\mu = g^{\lambda\mu} \tilde{R}_{\lambda\mu},$$

ou seja,

$$\tilde{R} = g^{\lambda\mu} \partial_\alpha \tilde{\Gamma}^\alpha{}_{\lambda\mu} - g^{\lambda\mu} \partial_\mu \tilde{\Gamma}^\alpha{}_{\lambda\alpha} + g^{\lambda\mu} \tilde{\Gamma}^\alpha{}_{\tau\alpha} \tilde{\Gamma}^\tau{}_{\lambda\mu} - g^{\lambda\mu} \tilde{\Gamma}^\alpha{}_{\tau\mu} \tilde{\Gamma}^\tau{}_{\lambda\alpha}.$$

Agora, substituindo a conexão em função do tensor contorção

$$\begin{aligned} \tilde{R} = g^{\lambda\mu} \{ & \partial_\alpha (\Gamma^\alpha{}_{\lambda\mu} + K^\alpha{}_{\lambda\mu}) - \partial_\mu (\Gamma^\alpha{}_{\lambda\alpha} + K^\alpha{}_{\lambda\alpha}) \} + \\ & + g^{\lambda\mu} \{ (\Gamma^\alpha{}_{\tau\alpha} + K^\alpha{}_{\tau\alpha}) (\Gamma^\tau{}_{\lambda\mu} + K^\tau{}_{\lambda\mu}) \} - \\ & - g^{\lambda\mu} \{ (\Gamma^\alpha{}_{\tau\mu} + K^\alpha{}_{\tau\mu}) (\Gamma^\tau{}_{\lambda\alpha} + K^\tau{}_{\lambda\alpha}) \} \end{aligned} \quad (6.6)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{R} = R + g^{\lambda\mu} \{ & K^\alpha{}_{\lambda\mu,\alpha} - K^\alpha{}_{\lambda\alpha,\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\tau\alpha} K^\tau{}_{\lambda\mu} + K^\alpha{}_{\tau\alpha} \Gamma^\tau{}_{\lambda\mu} + \\ & + K^\alpha{}_{\tau\alpha} K^\tau{}_{\lambda\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\tau\mu} K^\tau{}_{\lambda\alpha} - K^\alpha{}_{\tau\mu} \Gamma^\tau{}_{\lambda\alpha} - K^\alpha{}_{\tau\mu} K^\tau{}_{\lambda\alpha} \} . \end{aligned} \quad (6.7)$$

No entanto sabe-se pelo uso da derivada covariante que

$$K^\alpha{}_{\lambda\mu,\alpha} = \nabla_\alpha K^\alpha{}_{\lambda\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\alpha\tau} K^\tau{}_{\lambda\mu} + \Gamma^\tau{}_{\alpha\lambda} K^\alpha{}_{\tau\mu} + \Gamma^\tau{}_{\alpha\mu} K^\alpha{}_{\lambda\tau},$$

$$K^\alpha{}_{\lambda\alpha,\mu} = \nabla_\mu K^\alpha{}_{\lambda\alpha} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\tau} K^\tau{}_{\lambda\alpha} + \Gamma^\tau{}_{\mu\lambda} K^\alpha{}_{\tau\alpha} + \Gamma^\tau{}_{\mu\alpha} K^\alpha{}_{\lambda\tau}$$

e assim após as devidas substituições e alguns cálculos obtém-se

$$\tilde{R} = R - 2\nabla_\lambda K^\alpha{}_{\lambda\alpha} - K_{\tau\lambda}{}^\lambda K^{\tau\gamma}{}_\gamma + K_{\tau\gamma\lambda} K^{\tau\lambda\gamma}$$

desconsiderando termos de superfície e realizando algumas manipulações algébricas obtém-se

$$\tilde{R} = R + K^{\alpha\tau}{}_\alpha K^{\tau\gamma}{}_\gamma + K^\alpha{}_{\tau\lambda} K^{\tau\lambda}{}_\alpha.$$

Antes de prosseguir, torna-se importante a obtenção de alguns cálculos conforme mostrado abaixo

i)  $K^{\nu\alpha\mu} + K^{\mu\nu\alpha}$  substituindo em cada termo de contorção

$$K^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (T^{\mu}_{\alpha\beta} - T_{\alpha}^{\mu}_{\beta} - T_{\beta}^{\mu}_{\alpha}) .$$

obtem-se:

$$K^{\nu\alpha\mu} + K^{\mu\nu\alpha} = T^{\nu\alpha\mu} .$$

ii)  $K_{\mu[\alpha\beta]}$

$$K_{\mu[\alpha\beta]} = \frac{1}{2} \{K_{\mu\alpha\beta} - K_{\mu\beta\alpha}\} = \frac{1}{2} T_{\mu\alpha\beta} .$$

iii) Pode-se também reescrever

$$S_{\mu} = \varepsilon_{\lambda\rho\sigma\mu} T^{\lambda\rho\sigma}$$

em função da contorção tomando i), e assim

$$S_{\mu} = \varepsilon_{\lambda\rho\sigma\mu} T^{\lambda\rho\sigma} = \varepsilon_{\lambda\rho\sigma\mu} \{K^{\lambda\rho\sigma} - K^{\sigma\lambda\rho}\}$$

implica que

$$S_{\mu} = 2\varepsilon_{\lambda\rho\sigma\mu} K^{\lambda\rho\sigma}$$

## 6.2 Princípio variacional e as equações dinâmicas

Prosseguindo, temos as equações dinâmicas para o campo da métrica e torção, em termos das fontes, que por sua vez podem ser obtidas respectivamente conforme procedimento que será mostrado adiante (e suprimindo os símbolos de integração por mera conveniência)

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \implies \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\tilde{R})}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\kappa^2}{2} T_{\mu\nu} \quad (6.8)$$

$$\frac{\delta S}{\delta T^{\mu}_{\nu\alpha}} = 0 \implies \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\tilde{R})}{\delta T^{\mu}_{\nu\alpha}} = \kappa^2 \theta_{\mu}^{\nu\alpha}, \quad (6.9)$$

onde

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} = T_{\mu\nu}^{AC} + T_{\mu\nu}^{SF}$$

e

$$\theta_{\mu}^{\nu\alpha} := \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta T^{\mu}_{\nu\alpha}} := (\theta_{AC})_{\mu}^{\nu\alpha} + (\theta_{SF})_{\mu}^{\nu\alpha} .$$

É importante notar que do procedimento (6.9), verifica-se que

$$\frac{\delta S}{\delta K_{\mu\nu\alpha}} = 0 \implies \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\tilde{R})}{\delta K_{\mu\nu\alpha}} = \kappa^2 \tau^{\mu\nu\alpha}, \quad (6.10)$$



tal que

$$\delta\tilde{R} = \delta R + \{g^{\alpha\nu}T^\mu - g^{\alpha\mu}T^\nu + T^{\mu\nu\alpha}\} \delta K_{\mu\nu\alpha} ,$$

sendo  $\tau^{\mu\nu\alpha}$  dado por

$$\tau^{\mu\nu\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta K_{\mu\nu\alpha}} = (\tau_{AC})^{\mu\nu\alpha} + (\tau_{SF})^{\mu\nu\alpha} . \quad (6.11)$$

A equação (6.10) é totalmente equivalente à equação (6.9), de modo que nós devemos utilizar isso para uma conveniente correspondência com as notações encontradas na literatura.

Devido à convenção para o tensor de curvatura,

$$\tilde{R}^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} = 2\tilde{\Gamma}^\mu{}_{\lambda[\beta,\alpha]} + \tilde{\Gamma}^\rho{}_{\lambda\beta}\tilde{\Gamma}^\mu{}_{\rho\alpha} - \tilde{\Gamma}^\rho{}_{\lambda\alpha}\tilde{\Gamma}^\mu{}_{\rho\beta} ,$$

conforme visto anteriormente, é possível encontrar, desconsiderando as derivadas totais, a relação

$$\int d^4x \sqrt{-g} \tilde{R} = \int d^4x \sqrt{-g} (R + K^\alpha{}_{\rho\alpha} K^{\rho\lambda}{}_{\lambda} - K^\alpha{}_{\rho\lambda} K^{\rho\lambda}{}_{\alpha}) .$$

Variando com respeito a  $T^\mu{}_{\nu\alpha}$  é possível verificar que

$$T^{\mu\alpha\beta} + 2g^{\mu[\alpha}T^{\beta]} = \kappa^2 \tau^{\beta\alpha\mu} , \quad (6.12)$$

onde  $T^\beta = T^{\rho\beta}$ . De modo a representar  $\tau^{\beta\alpha\mu}$ , é importante e fundamental lembrar que a contribuição para o fluido de spin é dada por  $\tau_{SF}^{\beta\alpha\mu} = -\frac{1}{2}S^{\beta\alpha}u^\mu$  (Ref. [21]), tal que  $S^{\beta\alpha}$  é o tensor de spin (antissimétrico) e  $u^\mu$  representa a quadrivelocidade do fluido. Utilizando uma álgebra simples, é possível obter a expressão para  $\tau^{\mu\nu\alpha} = (\tau_{AC})^{\mu\nu\alpha} + (\tau_{SF})^{\mu\nu\alpha}$  e conseqüentemente,

$$T^{\mu\alpha\beta} + 2g^{\mu[\alpha}T^{\beta]} = \kappa^2 \left\{ -\frac{1}{2}S^{\beta\alpha}u^\mu + 2\varepsilon^{\beta\alpha\mu\rho}J_\rho \right\} . \quad (6.13)$$

Usando a condição de Weyssenhoff,  $S^{\beta\alpha}u_\alpha = 0$ , para as equações anteriores verifica-se após alguns cálculos que

$$T^{\mu\alpha\beta} = -\kappa^2 \left\{ 2\varepsilon^{\beta\alpha\mu\rho}J_\rho - \frac{1}{2}S^{\alpha\beta}u^\mu \right\} . \quad (6.14)$$

e

$$S_\sigma = \varepsilon_{\mu\alpha\beta\sigma}(2K^{\mu\alpha\beta}) = 12\kappa^2 J_\sigma + \frac{1}{2}\kappa^2 \varepsilon_{\mu\alpha\beta\sigma} S^{\mu\alpha} u^\beta . \quad (6.15)$$

É interessante mencionar que a condição de Weyssenhoff é também conhecida como condição de Frenkel. Pode-se afirmar que ela é inserida à mão, mas na verdade essa surge automaticamente no formalismo proposto por Obukhov e Korotky (Ref. [23]).

Prosseguindo com os cálculos, a variação com respeito a  $g^{\mu\nu}$  pode ser feita com o auxílio dos resultados intermediários,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \left\{ -\frac{1}{k^2} \sqrt{-g} R \right\} = -\frac{1}{k^2} G_{\mu\nu} , \quad (6.16)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \left\{ -\frac{\sqrt{-g}}{k^2} K^\alpha{}_{\rho\lambda} K^{\rho\lambda}{}_\alpha \right\} = & -\frac{1}{8k^2} g_{\mu\nu} (2T^{\alpha\rho\lambda} T_{\rho\lambda\alpha} - T^{\alpha\rho\lambda} T_{\alpha\rho\lambda}) + \\ & + \frac{1}{4k^2} (2T^\alpha{}_{\rho\mu} T^\rho{}_{\nu\alpha} + 2T^\alpha{}_{\mu\lambda} T_\alpha{}^\lambda{}_\nu + T_{\mu\rho\lambda} T_\nu{}^{\rho\lambda}) , \end{aligned} \quad (6.17)$$

de forma direta, gerando como resultado

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \Lambda + K^\alpha{}_{\mu\alpha} K^\lambda{}_{\nu\lambda} - \frac{1}{2} T^\alpha{}_{\rho\mu} T^\rho{}_{\nu\alpha} - \frac{1}{2} T^\alpha{}_{\mu\lambda} T_\alpha{}^\lambda{}_\nu - \frac{1}{4} T_{\mu\rho\lambda} T_\nu{}^{\rho\lambda} - \\ - \frac{1}{8} g_{\mu\nu} (4K^\alpha{}_{\rho\alpha} K^{\lambda\rho}{}_\lambda + 2T^{\alpha\rho\lambda} T_{\rho\lambda\alpha} - T^{\alpha\rho\lambda} T_{\alpha\rho\lambda}) = \frac{\kappa^2}{2} T_{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (6.18)$$

Para escrever as equações dinâmicas, é possível proceder substituindo as equações (6.14) e (6.15) de forma adequada em (6.18), incluindo o tensor momento-energia  $T_{\mu\nu}$ . Isso permite reescrever a equação (6.18) na forma

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \Lambda - \kappa^4 \left\{ g_{\mu\nu} J^2 + 2J_\mu J_\nu - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} J_\sigma \varepsilon^{\alpha\rho\lambda\sigma} S_{\rho\lambda} u_\alpha - \frac{1}{2} J_\sigma \varepsilon_{(\mu}{}^{\rho\lambda\sigma} u_{\nu)} S_{\rho\lambda} + \right. \\ \left. + \frac{1}{32} g_{\mu\nu} S_{\rho\lambda} S^{\rho\lambda} - \frac{1}{8} S_{\mu\lambda} S_\nu{}^\lambda + \frac{1}{16} u_\mu u_\nu S_{\rho\lambda} S^{\rho\lambda} \right\} = \frac{\kappa^2}{2} (T_{\mu\nu}^{AC} + T_{\mu\nu}^{SF}) . \end{aligned} \quad (6.19)$$

onde  $J^2 = J_\sigma J^\sigma$ . Pode-se ver que da equação (6.14), verifica-se que  $T^\mu{}_{\mu\alpha} = 0$ , de modo que vários termos da equação (6.18) se anulam. Portanto, com a corrente axial e o fluido de spin satisfazendo à condição de Frenkel,  $S^{\beta\alpha} u_\alpha = 0$ , só haverá graus de liberdade sem traço da torção. O próximo passo envolve o cálculo da média da equação (6.19). Para isso, podemos admitir uma suposição simples e natural onde  $\langle S_{\alpha\beta} \rangle = 0$ , o que significa que, embora o tensor de spin possua uma direção particular na escala microscópica, a média de seus valores desaparece no domínio macroscópico, ou seja, as partículas possuem uma distribuição de spin randômica. Pode-se então definir (ver Ref. [20])

$$\langle S_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} \rangle = 2\sigma^2 , \quad (6.20)$$

tal que

$$\langle S_\mu{}^\lambda S_{\nu\lambda} \rangle = \frac{2}{3} (g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu) \sigma^2 .$$

Agora é possível representar  $T_{\mu\nu}^{AC}$  e  $T_{\mu\nu}^{SF}$  em termos das fontes. Para  $T_{\mu\nu}^{SF}$ , obtém-se a equação (veja Ref. [20]):

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta}^{SF} = u_{(\alpha} S_{\beta)}{}^\mu u^\nu K^\rho{}_{\mu\nu} u_\rho + u^\rho K^\mu{}_{\sigma\rho} u^\sigma u_{(\alpha} S_{\beta)\mu} - \frac{1}{2} u_{(\alpha} T_{\beta)\mu\nu} S^{\mu\nu} + \\ + \frac{1}{2} T_{\nu\mu(\alpha} S^{\mu}{}_{\beta)} + 2\kappa^2 \{(\rho + p) u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta}\} . \end{aligned} \quad (6.21)$$

Substituindo-se a equação (6.14) em (6.21), verifica-se que

$$T_{\alpha\beta}^{SF} = \kappa^2 J^\rho u_{(\alpha} \varepsilon_{\beta)\mu\nu\rho} S^{\mu\nu} + \kappa^2 J^\rho S^\mu_{(\beta} \varepsilon_{\alpha)\mu\nu\rho} u^\nu + \frac{\kappa^2}{4} u_\alpha u_\beta S^{\mu\nu} S_{\mu\nu} + \frac{\kappa^2}{4} u_\nu u_\nu S^{\mu\alpha} S^\mu_\beta + 2\kappa^2 \{(\rho + p) u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta}\}. \quad (6.22)$$

Tomando a média da equação 6.22, obtemos

$$T_{\alpha\beta}^{SF} = \kappa^2 \langle J^\rho u_{(\alpha} \varepsilon_{\beta)\mu\nu\rho} S^{\mu\alpha} \rangle - \kappa^2 \langle J^\rho S^\mu_{\beta} \varepsilon_{(\alpha\mu)\nu\rho} u^\nu \rangle - \frac{2\kappa^2}{3} u_\alpha u_\beta \sigma^2 + \frac{\kappa^2}{6} g_{\alpha\beta} \sigma^2 + 2\kappa^2 \{(\rho + p) u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta}\}. \quad (6.23)$$

Deve-se mencionar que, embora  $\langle S_{\mu\nu} \rangle$  seja nulo, é possível obter  $\langle S_{\mu\nu} J^\alpha \rangle$  diferente de zero. No entanto, é possível argumentar que a hipótese  $\langle S_{\mu\nu} J^\alpha \rangle = 0$  é correta, visto que  $S_{\mu\nu}$  é randômico somente no espaço 3D, e  $J^\mu$  não possui qualquer componente espacial. Agora que tais resultados foram obtidos, é importante lembrar que ainda resta expressar  $T_{\alpha\beta}^{AC}$  em termos das fontes. Para isso é necessário lembrar que a variação de  $\sqrt{-g} \mathcal{L}_{AC}$  com respeito à métrica  $g^{\mu\nu}$  deve ser feita com um cuidado especial, uma vez que  $J^\alpha$  (e também  $J_\alpha$ ) depende de  $g^{\mu\nu}$ . Esse cálculo é mostrado no Apêndice. Assim sendo, têm-se como resultado

$$T_{\mu\nu}^{AC} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g} S^\rho J_\rho}{\delta g^{\mu\nu}} = -g_{\mu\nu} S^\rho J_\rho + 2 \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} (\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\rho} g_{\alpha\sigma} T^\sigma_{\beta\gamma} J_\rho), \quad (6.24)$$

e conseqüentemente

$$T_{\mu\nu}^{AC} = -2\varepsilon_{(\mu}^{\alpha\beta\rho} T_{\nu)\alpha\beta} - S_{(\mu} J_{\nu)}. \quad (6.25)$$

Substituindo as fontes (6.14) e (6.15), verifica-se que

$$T_{\mu\nu}^{AC} = -8\kappa^2 g_{\mu\nu} J^2 - 4\kappa^2 J_\mu J_\nu - \varepsilon_{(\mu}^{\beta\rho\lambda} u_{\nu)} S_{\beta\rho} J_\lambda + \frac{\kappa^2}{2} \varepsilon_{(\mu}^{\beta\rho\lambda} J_{\nu)} S_{\rho\lambda} u_\beta. \quad (6.26)$$

Agora, após a obtenção da média e utilizando  $\langle S_{\mu\nu} J^\alpha \rangle = 0$ , o resultado encontrado para as equações dinâmicas é dado pela equação

$$G_{\mu\nu} = \kappa^4 \left\{ -3g_{\mu\nu} J^2 + \frac{1}{16} g_{\mu\nu} \sigma^2 - \frac{1}{8} \sigma^2 u_\mu u_\nu \right\} + \frac{\kappa^2}{2} \{(\rho + p) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}\} + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (6.27)$$

### 6.3 Equações dinâmicas

Vamos agora considerar um fluido num regime relativístico, tal que  $p = \rho/3$ . Para a métrica (6.5),

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

as componentes relevantes da equação (6.27) podem ser escritas como

$$\frac{3\dot{a}^2}{a^2} = \kappa^4 \left\{ -3J^2 - \frac{\sigma^2}{16} \right\} + \frac{\kappa^2}{2} \rho + \Lambda \quad (6.28)$$

$$-\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{2\ddot{a}}{a} = \kappa^4 \left\{ 3J^2 - \frac{\sigma^2}{16} \right\} + \frac{\kappa^2}{6} \rho - \Lambda, \quad (6.29)$$

onde o ponto sobre as variáveis significa a derivada temporal e utilizamos  $\kappa^2$  no lugar de  $16\pi G$ . E assim, após simples manipulações é possível que para essas equações seja obtido como resultado

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \kappa^4 \left\{ -J^2 + \frac{\sigma^2}{24} \right\} - \frac{\kappa^2}{6} \rho + \frac{1}{3} \Lambda. \quad (6.30)$$

É notável que a corrente axial apareça na equação acima com sinal diferente da contribuição de spin. Nessa equação, a corrente axial atua como uma espécie de densidade de energia de uma matéria ordinária. Verifica-se que nessa equação, somente a constante cosmológica e o spin contribuem para a expansão acelerada no universo primordial. A lei de conservação da energia pode ser obtida comparando a equação (6.29) com a derivada da equação (6.30):

$$\dot{\rho}a + 4\dot{a}\rho = \rho^2 \left\{ \frac{1}{8} \frac{d}{dt} (a^6 \sigma^2) + 6a \frac{d}{dt} J^2 \right\}. \quad (6.31)$$

Vamos observar que a equação acima descreve a conservação da energia, no caso geral quando todos os campos interagem entre si. Evidentemente, a contribuição de spin ( $\sigma^2$ ) sempre interage trocando energia com o próprio fluido, porque o spin é uma propriedade sua. Por outro lado, existe a liberdade para escolher uma corrente axial que interage ou não com o fluido. Estas possibilidades definem duas classes de soluções, onde o caso da corrente axial sem interação foi estudado anteriormente no trabalho da Ref.[33]. Já o caso sem fluido de spin pode ser encontrado no trabalho da Ref.[7], onde um procedimento variacional diferente foi realizado. As equações (6.28) e (6.31), juntamente com as condições  $\rho(t_0) = \rho_0$  e  $a(t_0) = a_0 = 1$  ( $t_0$  é o tempo presente), determinam as soluções dinâmicas do modelo. Para a radiação cósmica de fundo (CMB da sigla em inglês), nós sabemos que  $\rho_0 \sim \rho_c \Omega_{\text{rad}}$ . Como

$$\Omega_{\text{rad}} \sim 10^{-5} \quad \text{e} \quad \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \sim 4 \times 10^{-47} (GeV)^4 \quad (\text{com } H = \frac{\dot{a}}{a}),$$

pode-se estimar  $\rho_0 \sim 10^{-52} (GeV)^4$  para radiação pura. É claro que estes valores não correspondem necessariamente ao fluido de spin exótico, mas servem como referência (ou limite superior). A seguir, vamos considerar na maioria dos casos, uma densidade muito baixa para o fluido de spin, dada por

$$\rho_0 \sim 10^{-54} (GeV)^4.$$

## 7 Soluções com corrente axial e fluido de spin

Neste capítulo, são apresentadas as soluções relativas aos resultados encontrados no Capítulo 5, envolvendo fluido de spin e corrente axial na teoria de Einstein-Cartan.

### 7.1 Soluções

Na busca das soluções é preciso especificar a dependência de  $J^2$  e  $\sigma^2$  com a densidade,  $\rho$ . Nesse sentido, pode-se adotar  $\sigma^2 = \gamma\rho^{3/2}$  ( $\gamma =$  constante positiva) [54]. Deste modo, identificando a corrente axial como sendo proveniente do fluido de spin, a escolha natural para  $J^2$  é  $J^2 = \beta\rho^{3/2}$  ( $\beta =$  constante positiva). E assim, com essa suposição, as equações dinâmicas para o modelo são

$$\dot{\rho} = \frac{12\kappa^2\dot{a}\gamma\rho^{3/2} - 64\dot{a}\rho}{16a - 3\kappa^2a\gamma\rho^{1/2} - 144\kappa^2a\beta\rho^{1/2}} \quad (7.1)$$

e

$$\dot{a} = a\sqrt{\frac{\kappa^2}{6}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \kappa^4\rho^{3/2}\left(\beta + \frac{1}{48}\gamma\right)}, \quad (7.2)$$

onde (7.1) expressa a conservação da energia.

O sistema anterior é muito complicado e pode não ter solução analítica. Contudo, é possível extrair algumas informações relevantes a partir da equação (7.1). É possível reescrevê-la como:

$$\frac{d\rho}{da} = \frac{12\kappa^2\gamma\rho^{3/2} - 64\rho}{16a - 3\kappa^2a\gamma\rho^{1/2} - 144\kappa^2a\beta\rho^{1/2}}. \quad (7.3)$$

Seja um caso particular  $\rho = \rho_f$  tal que  $d\rho/da = 0$  (ponto fixo). Quando  $\rho(a)$  atinge o valor  $\rho_f$ , este pára de variar, tal que pode-se expressar  $\rho_f$  como sendo

$$\rho_f = \frac{256}{9\kappa^4\gamma^2}.$$

Além disso existe uma singularidade aparente quando  $\rho = \rho_c$ , de modo que  $d\rho/da \rightarrow \infty$ . O valor de  $\rho_c$  é obtido de uma álgebra simples:

$$\rho_c = \frac{256}{(3\kappa^2\gamma + 144\kappa^2\beta)^2} .$$

Na verdade, o sistema não apenas se mostra aparentemente singular, mas é realmente singular, visto que  $\dot{a}$ , em (6.29), não pode ser nulo para  $\rho_c$ . Note que sempre  $\rho_c < \rho_f$ . Assim, ao se investigar as três únicas possibilidades temos

$$(i) \quad \rho_0 < \rho_c < \rho_f ;$$

$$(ii) \quad \rho_c < \rho_0 \leq \rho_f ;$$

$$(iii) \quad \rho_c < \rho_f \leq \rho_0 .$$

Para a primeira possibilidade verifica-se que  $\rho' < 0$  em todo o intervalo  $\rho < \rho_c$ . Assim tomando o sentido reverso do tempo, a densidade cresce até atingir o valor  $\rho_c$ . Isto significa que em um  $a > 0$  no passado,  $\rho'$  é infinito. Como isto não tem significado claro, o melhor a se fazer é abandonar a possibilidade (i). Para a segunda possibilidade, têm-se que  $\rho' > 0$  em todo o intervalo  $\rho_c < \rho < \rho_f$ . Utilizando um raciocínio similar ao anterior,  $\rho'$  torna-se novamente infinito para  $a > 0$  finito no passado. Para a última possibilidade verifica-se que  $\rho' < 0$  no intervalo  $\rho_f \leq \rho$ , de modo que  $\rho$  nunca atinge  $\rho_c$ . Assim o intervalo apresentado em (iii) parece ser a única opção fisicamente viável.

Pelas alternativas apresentadas acima, deve ser satisfeita a seguinte desigualdade:

$$\frac{256}{9\kappa^4\gamma^2} \leq \rho_0 .$$

Em termos numéricos, isso significa que o parâmetro adimensional  $\gamma$  tem um limite inferior determinado por  $\rho_0$ . Para  $\rho_0 = 10^{-54} \text{ GeV}^4$ , verifica-se a obtenção do limite inferior <sup>1</sup>:  $\gamma \geq 1.58 \times 10^{64}$ ! Este limite impõe um limite inferior para  $\sigma^2(t_0) = \gamma\rho_0^{3/2} \geq 1.6 \times 10^{-17} \text{ GeV}^6$ . No entanto, uma análise cuidadosa mostra que o pressuposto  $\sigma^2, J^2 \propto \rho^{3/2}$  não é tão rigoroso. De fato, deve-se iniciar a partir de uma hipótese mais simples e fundamental, considerando a dependência de  $\sigma^2$  e  $J^2$  (ou  $(\bar{\psi}\psi)^2$ ) no fator de escala, como

$$\sigma^2, J^2 \propto a^{-6} . \tag{7.4}$$

Note que no estudo anterior na Ref. [20], a densidade do fluido de spin satisfaz  $\rho \propto a^{-4}$ , tal que  $\sigma^2 \propto \rho^{3/2}$ . No entanto, é possível verificar claramente que  $\rho \propto a^{-4}$  não é uma

---

<sup>1</sup>Note que  $\Lambda = 5 \times 10^{-84} \text{ GeV}^2$  e  $\kappa^2 = 3.38 \times 10^{-37} \text{ GeV}^{-2}$ .

solução exata da equação (6.27). Deste modo, o ansatz (7.4) será adotado a partir de agora. E assim

$$J^2 = \frac{J_0^2}{a^6} \quad \text{e} \quad \sigma^2 = \frac{\sigma_0^2}{a^6}. \quad (7.5)$$

As equações de movimento (6.28) e (6.29) podem ser escritas na forma:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\kappa^4 \left( \frac{J_0^2}{a^6} + \frac{\sigma_0^2}{48a^6} \right) + \frac{\kappa^2}{6} \rho + \frac{\Lambda}{3}, \quad (7.6)$$

$$\frac{d\rho}{da} = -\frac{4\rho}{a} - \frac{36\kappa^2 J_0^2}{a^7}. \quad (7.7)$$

É bastante difícil resolver analiticamente o sistema acima, assim é conveniente tratá-lo numericamente. A primeira observação é que a quantidade  $d\rho/da$  na equação (7.7) é negativa e menor que  $-4\rho/a$ , deste modo, o efeito da corrente axial é tal que, tomando  $\rho_0$  ( $\rho_0 = \rho(t_0)$ ) como sendo a mesma quantidade para ambos os casos (com ou sem a corrente axial), os valores de  $\rho$  se tornam maiores para  $t < t_0$ . É interessante notar que na ausência de corrente axial, a presença do spin do fluido,  $\sigma^2$ , não modifica a condição  $\rho a^{-4}$  que caracteriza um fluido de radiação. Agora, vamos considerar a equação (7.6). Seu lado direito deve ser positivo para todos os valores de  $a(t)$ . Escolhendo o caso especial  $a = 1$ , chegamos à seguinte condição (para  $\rho_0 = 10^{-54} \text{ GeV}^4$ ):

$$J_0^2 + \frac{\sigma_0^2}{48} < \frac{\rho_0}{6\kappa^2} + \frac{\Lambda}{3\kappa^4} \approx 4.38 \times 10^{-11} \text{ GeV}^6, \quad (7.8)$$

que define um limite superior para os parâmetros da fonte  $J_0^2$  e  $\sigma_0^2$ . Na equação (7.6), o termo proporcional  $\kappa^4$  tem a mesma dependência do fator de escala do que os parâmetros não-Riemannianos que aparecem no trabalho [19]. Apesar de ser um modelo diferente do estudado aqui, esta coincidência abre a possibilidade para estimar alguns limites dos dados de supernovas Ia aplicados ao modelo atual. Como resultado, é obtido

$$J_0^2 + \frac{\sigma_0^2}{48} \leq 5.91 \times 10^{-12} \text{ GeV}^6 \quad (7.9)$$

o que é notavelmente semelhante a (7.8).

Antes de investigar soluções gerais para (7.6) e (7.7), vamos considerar a solução particular para (7.6):

$$\rho(a) = \frac{\rho_0}{a^6}. \quad (7.10)$$

Substituindo essa solução em (7.7), verifica-se que

$$\rho_0 = 18\kappa^2 J_0^2. \quad (7.11)$$

Observe que neste caso a equação (7.8) estabelece efetivamente um limite superior para  $\sigma_0^2$ , pois  $J_0^2$  está relacionado a  $\rho_0$ . A equação (7.6) pode ser escrita usando-se (7.10) e (7.11) conforme

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\theta}{a^6} + \frac{\Lambda}{3} \quad \text{onde} \quad \theta := \kappa^4 \left( 2J_0^2 - \frac{\sigma_0^2}{48} \right). \quad (7.12)$$

Existem três soluções, dependendo do sinal de  $\theta$ :

$$a(t) = \left\{ \sqrt{\frac{3\theta}{\Lambda}} \sinh(\sqrt{3\Lambda} t) \right\}^{1/3} \quad \text{para} \quad \theta > 0, \quad (7.13)$$

onde a constante de integração já foi fixada por  $a(0) = 0$ , e segunda solução pode ser dada na forma implícita

$$a(t)^3 + \sqrt{\frac{3\theta}{\Lambda} + a(t)^6} = \sqrt{-\frac{3\theta}{\Lambda}} \exp(\sqrt{3\Lambda} t) \quad \text{para} \quad \theta < 0. \quad (7.14)$$

Na solução acima, a constante de integração foi escolhido tal que

$$a(0) = a_{\min} = (-3\theta/\Lambda)^{1/6},$$

com  $a_{\min}$  sendo o valor mínimo de “ $a$ ” o qual pode ser encontrado pela condição  $\theta + \Lambda a^6 \geq 0$ . Deste modo, para  $\theta < 0$ , a singularidade inicial é evitada, e o universo sofre uma expansão acelerada o tempo todo. Em contraste, a solução (7.13) não impede que o modelo tenha singularidade inicial. A terceira solução vem do caso  $\theta = 0$ :

$$a(t) \propto e^{\sqrt{\Lambda/3} t} \quad (\text{de Sitter}).$$

É notável que neste caso o Universo se expande com apenas a constante cosmológica, mas existe um fluido com  $\rho \propto a^{-6}$ .

É possível extrair informação sobre os parâmetros das fontes,  $J_0^2$  e  $\sigma_0^2$ , a partir das limitações experimentais, tais como a idade do Universo <sup>2</sup>,  $t_0 = 13.7$  bilhões de anos =  $6.56 \times 10^{41} \text{ GeV}^{-1}$ . Vamos considerar, por exemplo, a solução (7.10). Usando a expressão para  $a(t)$  em (7.10) com a igualdade  $a(t_0) = 1$ , pode-se obter  $\theta = 4.18 \times 10^{-86} \text{ GeV}^2$  (uma quantidade similar pode ser encontrada para  $|\theta|$  no caso (7.14)). Agora, escrevendo a equação (6.30) na forma

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{2\theta}{a^6} + \frac{\Lambda}{3},$$

nós encontramos por substituição direta,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda}{3} \left\{ 1 - \text{csch}^2(\sqrt{3\Lambda} t) \right\}.$$

---

<sup>2</sup>Observe que este procedimento não é rigoroso pois o papel da torção é suprimida pelo teor de matéria convencional, como fluido perfeito em forma de poeira.



É possível mostrar que essa quantidade é positiva se  $t > 2.96 \times 10^{41} \text{ GeV}^{-1}$ , o que significa que, tomando  $\theta = 4.18 \times 10^{-86} \text{ GeV}^2$ , a expansão do universo é acelerada para  $a > 0.61$ . Observe que na ausência da constante cosmológica, a quantidade  $\theta$  deve ser positiva. Somente uma constante cosmológica não-nula pode proporcionar ausência de singularidade (para  $J_0^2 \neq 0$ ). É notável que a teoria com corrente axial e fluido de spin, satisfazendo (7.11), exija a introdução de  $\Lambda$ , pois caso contrário, o modelo não teria as soluções para todos os possíveis valores de  $\sigma_0^2$ . Para  $J_0^2 = 0$ , o modelo se reduz ao estudo feito por Gasperini [20], com início e final de expansão acelerada além de ausência de singularidade. Neste caso, a expansão acelerada no universo primordial ocorre em um período muito curto de tempo, e deve ser mencionado que  $J_0^2 \neq 0$  pode ser tomado como uma generalização importante, podendo ser associada a uma teoria com violação de Lorentz ou com um efeito de vácuo quântico, por exemplo. Na verdade, a condição (7.11) parece ser bastante particular. Contudo, como veremos a seguir, as soluções gerais para  $\rho(t_0) \neq 18\kappa^2 J_0^2$  podem ser descritas pelas soluções particulares ditas por  $\rho \propto a^{-6}$ .

## 7.2 Soluções Gerais

Segundo as considerações anteriores, sabemos que  $\rho \propto a^{-6}$  é uma solução particular, que exige (7.11). Na verdade, podemos executar uma integração numérica da equação (7.7), utilizando o software *Mathematica*, a partir do ponto  $\rho(a_0 = 1) = \rho_0$  satisfazendo (7.11). A curva integrada para  $\rho(a)$  será exatamente a curva de  $\rho \propto a^{-6}$ , que pode ser desenhada como uma linha reta com inclinação negativa ( $-6$ ) na escala logarítmica.

A fim de integrar numericamente, nós escolhemos um  $J_0^2$  compatível com a condição (7.8), ou seja,  $J_0^2 = 10^{-11} \text{ GeV}^6$ , e  $\rho_0$  diferente de (7.11). Vamos escolher um valor menor:  $\rho_0 = 10^{-54} \text{ GeV}^4$ . A integração é mostrada no lado esquerdo da figura 1, juntamente com a integração obedecendo a (7.11), correspondendo a  $\rho \propto a^{-6}$ . É notável que ambas as curvas coincidem, mas é essencial salientar que coincidem em um certo intervalo. O mesmo traçado no lado direito da figura 1 é ilustrado em um intervalo muito mais perto de  $a = 1$ , onde a diferença entre as duas soluções se torna clara.

Parece que esse comportamento é universal: a curva de  $\rho(a)$ , para qualquer  $\rho_0$ , difere da solução  $\rho \propto a^{-6}$  em uma região próxima a  $a = 1$ , mas no restante da região, digamos,  $0 < a < 0.1$ , a solução está muito perto de  $\rho(a) = 18\kappa^2 J_0^2 / a^6$ . Agora, lembre-se que não há muito espaço para grandes valores de  $\rho_0$ , e nós estamos considerando principalmente cosmologia primordial, de modo que, as soluções específicas discutidas anteriormente são bastante gerais e instrutivas. Devemos mencionar que o caso  $J_0^2 = 0$  (Gasperini [20]) é

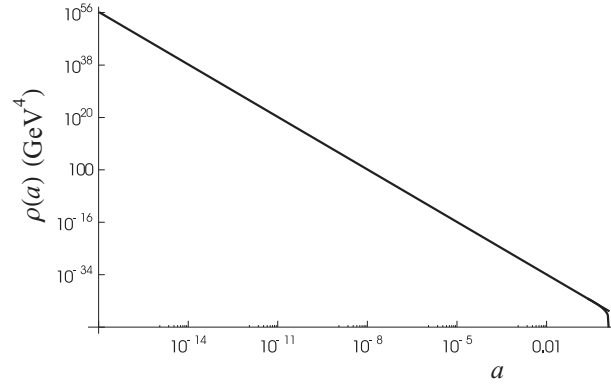


Figura 1: A curva integrada, se encontra na escala logarítmica, de  $\rho(a)$ , para as condições iniciais  $\rho(1) = 10^{-54}\text{GeV}^4$  e  $\rho(1) = 18\kappa^2 J_0^2 = 6.08 \times 10^{-47}\text{GeV}^4$  coincidem.

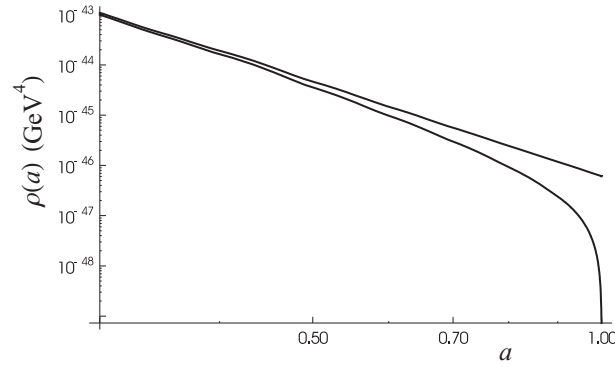


Figura 2: O gráfico acima retrata uma ampliação da região para  $a = 1$  relativa ao gráfico anterior

completamente diferente, porque  $\rho(a)$  vai ser substancialmente afetado, tal que  $\rho \propto a^{-4}$ .

### 7.3 Corrente Axial Constante

Conforme vimos anteriormente, a métrica é espacialmente homogênea e isotrópica dada por  $ds^2 = dt^2 - a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ . Para o fluido de radiação ( $p = \rho/3$ ), as componentes relevantes da equação (6.27) podem ser usadas para a obtenção de

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \kappa^4 \sigma^2 / 24 - \frac{\kappa^2}{6} \rho + \Lambda / 3. \quad (7.15)$$

É surpreendente como a corrente axial não possui efeito na equação acima. Na verdade, manipulações adicionais fornecem a conservação da energia,  $\dot{\rho}a + 4\dot{a}\rho = 0$ , com

solução coincidindo com a solução do período dominado pela radiação,  $\rho = \rho_0 a_0^4/a^4$  (o índice significa a componente temporal). Para encontrar a solução para  $a(t)$ , deve-se substituir esse resultado e supor  $\sigma^2 = \gamma\rho^{3/2}$  (veja Ref. [54]) nas componentes temporais da equação (6.27),

$$\frac{3\dot{a}^2}{a^2} = \kappa^4 (-9J^2 - \sigma^2/16) + \kappa^2\rho/2 + \Lambda. \quad (7.16)$$

Vamos escolher  $\rho_0 = 10^{-54} \text{ GeV}^4$  e manter em mente  $\Lambda = 5 \times 10^{-84} \text{ GeV}^2$  e  $\kappa^2 = 3.38 \times 10^{-37} \text{ GeV}^{-2}$ . Na ausência de fluido de spin, a positividade de  $\dot{a}^2$  estabelece um limite superior  $J_0^2 \simeq 4.863 \times 10^{-12} \text{ GeV}^6$ . Para  $J^2 < J_0^2$  e  $\gamma = 0$ , não há perda de singularidade e a expansão acelerada inicia com  $a = 0.0136$  (independentemente de  $J^2$ ). Um limite superior similar ocorre se for incluído o fluido de spin. Para  $\gamma = 10^{-12}$ , o valor mínimo  $a$  é  $6.50 \times 10^{-39}$ , a (breve) expansão acelerada primordial se encerra com  $a = 9.19 \times 10^{-39}$  e a última expansão acelerada inicia com  $a = 0.0136$ . Atualmente, esses resultados correspondentes ao caso  $J^2 = 0$  ( $J^2 < J_0^2$ ) ainda são muito pequenos para resultarem em um efeito substancial). As duas épocas de expansão acelerada são garantidas tanto quanto  $0 < \gamma < 8 \times 10^{59}$ . É importante ressaltar que Kostelecký, Russell and Tasson [53] obtiveram recentes aplicações experimentais na busca para encontrar limitações para o campo de torção constante. Por exemplo, se a torção é minimamente acoplada com fermions, é verificado em nossas anotações que  $|S_\mu S^\mu| < 8.4 \times 10^{-54} \text{ GeV}^2$ . Claro que não se aplicam ao presente momento, porque a torção depende da densidade de spin e por este motivo não é constante. Mas na ausência do fluido de spin, a torção é interiramente escrita em termos da corrente axial, e por sua vez é constante. Neste caso, o vínculo superior pode ser usado para corrigir  $J^2 \approx 10^{18} \text{ GeV}^6$ , o que é notavelmente maior que o limite superior imposto pela positividade de  $\dot{a}^2$ .

## 8 *Conclusões*

Nesta tese apresentamos um estudo sobre as transformações conformes e demonstramos sua utilidade nos cálculos relativamente simples de várias quantidades envolvidas na teoria gravitacional. Em particular, usando estas transformações, juntamente com o teorema da fatorização, podemos essencialmente reduzir a quantidade de trabalho necessário para a obtenção das equações de Einstein para as métricas cosmológica e esfericamente simétrica. Do nosso ponto de vista, esta forma de se calcular tais equações garante certas vantagens com relação aos cálculos diretos, podendo ser utilizada em cursos básicos de Relatividade Geral.

Nesta tese são apresentadas investigações a respeito dos efeitos cosmológicos da corrente axial juntamente com um fluido de spin relativístico ( $p = \rho/3$ ) na teoria de Einstein-Cartan. Como já é conhecido na literatura (Refs. [8, 9, 10]), torção pode providenciar ausência de singularidade e expansão acelerada. A contribuição da corrente axial, no entanto, favorece uma expansão desacelerada, em contraste com o fluido de spin. Encontrase aqui duas classes de soluções: uma com corrente axial externa sem interação, e outra com corrente axial interagindo (ou seja, corrente axial dependente do tempo). O primeiro foi considerado em trabalhos anteriores (ver [7]) para a situação sem fluido de spin e com vetor axial global conforme, e [33] com vetor axial global constante no vácuo e fluido de spin).

No presente trabalho, consideramos a corrente axial como um campo composto,

$$J^\mu = \langle \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi \rangle,$$

onde os campos de Dirac (presumivelmente) descrevem o próprio fluido. A corrente axial interage com o fluido espinorial, da forma descrita pela conservação do momento-energia. Essa é uma característica essencial, que determina a dependência da densidade de energia com o fator de escala “ $a$ ”, que é substancialmente diferente do caso da corrente axial sem interação. É natural supor que tanto a corrente de spin como a corrente axial descrevem de maneira semelhante como o Universo se expande. Concluimos que, com base no ansatz  $J^2 \propto a^{-6}$  e  $\sigma^2 \propto a^{-6}$ , as soluções em geral se comportam (em um domínio relevante), como

soluções particulares provenientes de  $\rho \propto a^{-6}$ , de tal forma que suas propriedades são as mesmas. Essas propriedades foram analisadas em detalhes para as soluções particulares: se o parâmetro das fontes  $\theta$  é positivo, o universo tem uma singularidade inicial e sua expansão é desacelerada ( $\ddot{a} < 0$ ), até um momento em que a expansão acelerada se inicia. Esta época depende basicamente do parâmetro  $\theta$ , que pode ser determinado a partir da idade do universo conhecido. Ao fazer isso, a expansão acelerada se inicia com  $a = 0.61$ . Em ambas as soluções particulares,  $J_0^2$  pode ser fixado pelo atual valor da densidade,  $\rho_0$ . Portanto,  $\sigma_0^2$  determina o sinal de  $\theta$ .

Para o caso  $\theta < 0$ , universo tem uma expansão acelerada o tempo todo, e representa uma solução sem singularidade inicial. Neste caso, a equação (7.8) representa um limite superior para as quantidades  $J_0^2$  e  $\sigma_0^2$ .

Como discutido acima, as soluções gerais têm um comportamento notável (como o deslocamento mostrado no lado direito da Figura 1) na região próxima aos dias de hoje. Isto é muito estranho do ponto de vista físico, porque seria uma coincidência enorme se o deslocamento da curva do lado direito ocorresse exatamente no tempo presente,  $t_0$ . Assim, parece que a solução fisicamente razoável deve ser uma solução particular, com  $\rho \propto a^{-6}$ . Como consequência, o parâmetro  $J_0^2$  deve estar relacionado com a densidade presente pela equação (7.11).

Como perspectivas para trabalhos futuros temos um trabalho em andamento envolvendo o parâmetro de Imirzi e a possibilidade de outro posterior com relação aos campos de Dirac.

### Acknowledgments

O trabalho dos autores foi apoiado pela bolsa de pesquisa do CNPq (GBP), da FAPEMIG (GBP e EAF) e FAPES (GBP). Nós gostaríamos de expressar nossa gratidão Prof Ilya Shapiro para estimular discussões e sugestões úteis sobre a leitura do manuscrito.

## 9 Apêndice

### 9.1 Notações Relações Úteis

#### 9.1.1 Notações e convenções

No trabalho realizado utilizamos a signatura da métrica dada por  $(+ - - -)$ .

Como regra geral, utilizamos o símbolo til para objetos construídos num espaço de fundo com torção, excetuando-se o operador  $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$ . Deste modo,

- $\tilde{\nabla}_\mu$  é a derivada covariante definida com a conexão na presença de torção,  $\tilde{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}$ .
- $\tilde{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + K^\alpha_{\mu\nu}$ , onde  $K^\alpha_{\mu\nu}$  é o tensor contorção e  $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$  é a conexão métrica,  $\{\mu^\alpha{}_\nu\}$ , considerando metricidade.

Símbolos de simetrização e antissimetrização:

- $A_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu})$
- $A_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})$

Curvatura:

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} \Gamma^\lambda{}_{\alpha\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} \Gamma^\lambda{}_{\alpha\nu}$$

#### 9.1.2 Procedimento variacional

Vamos aqui calcular a derivada funcional de  $J^\mu$ . Para isso, deve-se levar em conta que  $J^\mu = \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi$ , com

$$\gamma^5 = (i/4!) \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu \ .$$

Sabemos que  $\gamma^\mu = e_a{}^\mu \gamma^a$ , e então

$$\frac{\delta \gamma^\rho}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta e_a{}^\rho}{\delta g^{\mu\nu}} \gamma^a \ .$$

As tetradas satisfazem  $g^{\mu\nu} = e_a^\mu e^{a\nu}$ , e assim

$$\delta g^{\mu\nu} = \delta e_a^\mu e^{a\nu} + e_a^\mu \delta e^{a\nu} = (e_a^\mu \delta_\alpha^\nu + e_a^\nu \delta_\alpha^\mu) \delta e^{a\alpha} .$$

A forma mais geral possível para  $\delta e^{a\alpha}$  até a primeira ordem em  $\delta g^{\mu\nu}$  é

$$\delta e^{a\alpha} = [\chi_1 (e^a{}_\mu \delta_\nu^\alpha + e^a{}_\nu \delta_\mu^\alpha) + \chi_2 (e^{a\alpha} g_{\mu\nu})] \delta g^{\mu\nu}$$

A substituição da equação acima na anterior deverá fornecer a identidade

$$\delta g^{\mu\nu} = (e_a^\mu \delta_\alpha^\nu + e_a^\nu \delta_\alpha^\mu) [\chi_1 (e^a{}_\rho \delta_\lambda^\alpha + e^a{}_\lambda \delta_\rho^\alpha) + \chi_2 (e^{a\alpha} g_{\rho\lambda})] \delta g^{\rho\lambda}$$

para  $\chi_1 = \frac{1}{4}$  e  $\chi_2 = 0$  (veja também a Ref. [7]). Como consequência, podemos obter finalmente

$$\frac{\delta \gamma^\rho}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \delta_{(\mu}^\rho \gamma_{\nu)} \quad \text{e} \quad \frac{\delta \gamma_\rho}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} g_{\rho(\mu} \gamma_{\nu)} . \quad (9.1)$$

Agora, sabe-se que  $\varepsilon^{\alpha\beta\rho\lambda} = E^{\alpha\beta\rho\lambda} / \sqrt{-g}$ , onde  $E^{\alpha\beta\rho\lambda}$  é o símbolo de Levi-Civita, que é claramente independente da métrica. Deste modo, é possível obter

$$\frac{\delta \varepsilon^{\alpha\beta\rho\lambda}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \varepsilon^{\alpha\beta\rho\lambda} \quad \text{e} \quad \frac{\delta \varepsilon_{\alpha\beta\rho\lambda}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\beta\rho\lambda} . \quad (9.2)$$

Usando (9.1) e (9.2), é possível encontrar como resultado

$$\frac{\delta \gamma^5}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 .$$

Com todos estes resultados, obtém-se a variação de  $J^\alpha$  e  $J_\alpha$ :

$$\frac{\delta J^\rho}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \delta_{(\mu}^\rho J_{\nu)} , \quad \frac{\delta J_\rho}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} \delta_{(\mu}^\rho J_{\nu)} \quad \text{e} \quad \frac{\delta J^2}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 . \quad (9.3)$$

Cálculos similares podem ser realizados para  $S^\lambda = \varepsilon^{\alpha\beta\rho\lambda} T_{\alpha\beta\rho} = \varepsilon^{\alpha\beta\rho\lambda} g_{\alpha\sigma} T^\sigma{}_{\beta\rho}$ . Finalmente, a variação de  $\sqrt{-g} J^\mu S_\mu$  pode ser expressada por meio do resultado (6.25).

## 9.2 Métrica de um Espaço-Tempo Esfericamente Simétrica

Consideremos uma dada distribuição de massa de esfericamente simétrica. Neste caso, o principal interesse está em encontrar uma solução para o campo gravitacional de simetria central. Dada a simetria da distribuição de massa, consideremos o sistema de coordenadas esférico. E assim, podemos admitir para o intervalo  $ds^2$  a seguinte expressão:

$$ds^2 = h(r, t) c^2 dt^2 + m(r, t) dr^2 + n(r, t) d\Omega + p(r, t) dt dr \quad , \quad (9.4)$$

onde  $h(r, t)$ ,  $m(r, t)$ ,  $n(r, t)$  e  $p(r, t)$  são, conforme indicado, funções do tempo ( $t$ ) e do raio ( $r$ ). Como esperado, devido à arbitrariedade na escolha do sistema de referência na teoria geral da relatividade, temos como consequência que qualquer transformação no sistema de coordenadas não deverá modificar a simetria inicial verificada para  $ds^2$ . É importante que agora realizemos algumas escolhas, de modo que se possa determinar as possíveis formas de  $h(r, t)$ ,  $m(r, t)$ ,  $n(r, t)$  e  $p(r, t)$ . Devemos assim, assumir inicialmente que  $p(r, t) = 0$ , dada a simetria do sistema e a invariância das equações sob a mudança do sistema de coordenadas. Quanto a  $h(r, t)$ ,  $m(r, t)$  e  $n(r, t)$  admitimos que estes sejam representados na forma exponencial tal que

$$h(r, t) = e^{\nu(r, t)}; \quad m(r, t) = -e^{\lambda(r, t)}; \quad n(r, t) = -e^{2\phi(r, t)} \quad (9.5)$$

e assim

$$ds^2 = c^2 e^{\nu(r, t)} dt^2 - e^{\lambda(r, t)} dr^2 - e^{2\phi(r, t)} d\Omega \quad (9.6)$$

Conforme feito antes, é comum tomar  $c = 1$ . Deste modo,  $ds^2$  é dado por:

$$ds^2 = e^{\nu} dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - e^{2\phi} d\Omega \quad , \quad (9.7)$$

onde

$$\nu = \nu(r, t), \quad \lambda = \lambda(r, t), \quad \phi = \phi(r, t) \quad . \quad (9.8)$$

Portanto, verificamos que a métrica é dada por:

$$g_{\tau\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{2\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{2\phi} \text{sen}^2\theta \end{pmatrix} \quad . \quad (9.9)$$

Considere

$$x^0 = t, \quad x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \varphi \quad . \quad (9.10)$$

É fácil ver que seus elementos são:

$$g_{00} = e^{\nu}; \quad g_{11} = -e^{\lambda}; \quad g_{22} = -e^{2\phi}; \quad g_{33} = -e^{2\phi} \text{sen}^2\theta \quad . \quad (9.11)$$

A métrica contravariante é expressa por:

$$g^{\tau\nu} = \begin{pmatrix} e^{-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-2\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-2\phi} \text{sen}^{-2}\theta \end{pmatrix} \quad . \quad (9.12)$$



e seus elementos:

$$g^{00} = e^{-\nu} ; \quad g^{11} = -e^{-\lambda} ; \quad g^{22} = -e^{-2\phi} ; \quad g^{33} = -e^{-2\phi} \text{sen}^{-2}\theta \quad . \quad (9.13)$$

Sendo que para o caso especial

$$e^{2\phi} = r^2, \quad \phi = \ln r \quad , \quad (9.14)$$

o intervalo infinitesimal é dado por:

$$ds^2 = e^{\nu} dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2 d\Omega \quad . \quad (9.15)$$

### 9.3 Solução de Schwarzschild

Conforme podemos ver, o intervalo para uma distribuição esférica de massa é dado pela equação (9.15). Consequentemente a métrica covariante é dada por

$$g_{\tau\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \text{sen}^2\theta \end{pmatrix} , \quad (9.16)$$

e seus elementos são

$$g_{00} = e^{\nu}, \quad g_{11} = -e^{\lambda}, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \text{sen}^2\theta \quad . \quad (9.17)$$

A métrica contravariante tem a forma

$$g^{\tau\nu} = \begin{pmatrix} e^{-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2} \text{sen}^{-2}\theta \end{pmatrix} . \quad (9.18)$$

As componentes não-nulas do tensor de Ricci são dadas por:

$$R_{00} = \frac{1}{4} \left( \dot{\nu}\dot{\lambda} - \dot{\lambda}^2 - 2\ddot{\lambda} \right) + \left( \frac{\lambda''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'}{r} \right) e^{\nu-\lambda} \quad , \quad (9.19)$$

$$R_{11} = \left( \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{4} + \frac{\ddot{\lambda}}{2} \right) e^{-(\nu-\lambda)} + \left( \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu''}{2} + \frac{\lambda'}{r} \right) \quad , \quad (9.20)$$

$$R_{22} = 1 + \left( \frac{r\lambda'}{2} - \frac{r\nu'}{2} - 1 \right) e^{-\lambda} \quad , \quad (9.21)$$

$$R_{33} = R_{22} \cdot \text{sen}^2\theta \quad , \quad (9.22)$$

$$R_{10} = \frac{\dot{\lambda}}{r} \quad . \quad (9.23)$$

As componentes não-nulas do tensor de Einstein são dadas por

$$G_0^0 = e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \quad , \quad (9.24)$$

$$G_1^1 = -e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \quad , \quad (9.25)$$

$$G_0^1 = -e^{-\lambda} \dot{\lambda} \phi' = -\frac{\dot{\lambda}}{r} e^{-\lambda} \quad , \quad (9.26)$$

$$G_2^2 = G_3^3 = e^{-\nu} \left( \frac{1}{4} \dot{\lambda} \dot{\nu} + \frac{1}{2} \ddot{\lambda} + \frac{1}{4} \dot{\lambda}^2 \right) + e^{-\lambda} \left( -\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu' \lambda'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda' - \nu'}{2r} \right) \quad . \quad (9.27)$$

A forma mais geral que temos para que este intervalo seja realmente compatível com a simetria esférica para o caso estático, é aquela em que  $\nu$  e  $\lambda$  sejam funções apenas de  $r$ .

Deste modo, para as componentes não-nulas do tensor de Einstein, verificamos que

$$G_0^0 = e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \quad , \quad (9.28)$$

$$G_1^1 = -e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \quad , \quad (9.29)$$

$$G_0^1 = 0 \quad , \quad (9.30)$$

$$G_2^2 = G_3^3 = e^{-\lambda} \left( -\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu' \lambda'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda' - \nu'}{2r} \right) \quad . \quad (9.31)$$

Para o espaço-tempo vazio, constata-se que as componentes do tensor de Ricci e de Einstein são idênticamente nulas. Portanto, as componentes do tensor de Einstein assumem a forma

$$e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0 \quad , \quad (9.32)$$

$$-e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0 \quad , \quad (9.33)$$

$$e^{-\lambda} \left( -\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu' \lambda'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda' - \nu'}{2r} \right) = 0 \quad . \quad (9.34)$$

Multiplicando a equação (9.33) por  $(-1)$  e em seguida somando com a equação (9.32) encontramos

$$\nu' + \lambda' = 0 \quad . \quad (9.35)$$

Resolvendo esta equação obtemos como resultado

$$\nu + \lambda = C \quad . \quad (9.36)$$

Dada a arbitrariedade de  $C$ , é sempre possível tomar  $C = 0$  (soluções assintoticamente planas), e assim

$$\nu + \lambda = 0 \quad . \quad (9.37)$$

Resolvendo a equação (9.32), com  $\lambda = -\nu$  encontramos para

$$-e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0 \quad (9.38)$$

que

$$-r\nu'e^\nu - e^\nu + 1 = 0 \quad (9.39)$$

tal que

$$\frac{e^\nu d\nu}{e^\nu - 1} = -\frac{dr}{r} \quad (9.40)$$

de modo que, integrando a equação (9.40) obtemos como resultado

$$e^\nu = e^{-\lambda} = 1 + \frac{C}{r} \quad . \quad (9.41)$$

Calculemos agora o valor para a constante de integração  $C$ . Mas para isto é necessário se conhecer as componentes da métrica covariante, conforme visto em (9.16). E assim

$$g^{\tau\nu} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{C}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 + \frac{C}{r})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \text{sen}^2\theta \end{pmatrix} \quad . \quad (9.42)$$

No limite Newtoniano, sabemos que (veja por exemplo [55])

$$g_{00} = 1 + 2\Phi \quad . \quad (9.43)$$

Logo

$$C = 2\Phi \quad . \quad (9.44)$$

Sendo a aceleração dada por

$$a = -\nabla\Phi \quad , \quad (9.45)$$

obtemos

$$\Phi = -\frac{Gm}{r c^2} \quad . \quad (9.46)$$

Para  $c = 1$

$$\Phi = -\frac{Gm}{r} \quad , \quad (9.47)$$

onde, de acordo com (9.43), verificamos que

$$g_{00} = 1 - \frac{2Gm}{r} \quad . \quad (9.48)$$

Logo

$$g^{\tau\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2Gm}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 - \frac{2Gm}{r})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \text{sen}^2\theta \end{pmatrix} \quad . \quad (9.49)$$

Finalmente encontramos a solução de um campo gravitacional para uma distribuição de massa com simetria central. Veja que pelas características intrínsecas a esta distribuição, somos levados ao cálculo de um campo gravitacional estático, no vácuo. Esta solução é conhecida como a solução de Schwarzschild, e nesse caso o intervalo dado por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \text{sen}^2\theta d\phi^2 \quad . \quad (9.50)$$

A grandeza  $2Gm$  possui dimensão de comprimento, recebendo a denominação de raio gravitacional do corpo em estudo, ou seja

$$r_g = 2Gm \quad . \quad (9.51)$$

Podemos então escrever a solução de Schwarzschild da seguinte forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \text{sen}^2\theta d\phi^2 \quad . \quad (9.52)$$

Esta solução corresponde ao caso de uma distribuição de massa puntiforme, estática, localizada no ponto  $r = 0$ . Ela significa que, nesta situação a solução compatível com o potencial de Newton para  $r \rightarrow \infty$ , é necessariamente estático. Um exemplo disto, é o caso de pulsações simétricas em relação ao centro.

É importante observarmos que a solução de Schwarzschild nos permite correções nas previsões realizadas pela teoria Newtoniana para o movimento dos planetas, de modo que, para o sistema solar, tais correções são apreciáveis somente para o caso da precessão do periélio de Mercúrio. A teoria da relatividade, além de ajudar a revolucionar nossa visão do cosmos, trouxe também diversas previsões, como por exemplo, a deflexão dos raios de luz por um campo gravitacional, o desvio para o vermelho da radiação eletromagnética em um dado campo gravitacional. A previsão da existência das chamadas ondas gravitacionais, assume um papel de destaque dentro desta teoria, bem como as mudanças em nossas concepções a respeito dos chamados “buracos negros” ([57]).

## 9.4 Obtenção das Equações de Einstein para a Métrica Esfericamente Simétrica

Conforme visto na introdução, dada uma distribuição de massa esfericamente simétrica, o intervalo  $ds^2$  é dado por (9.6), onde tomando a equação (4.10) verificamos que

$$d\bar{s}^2 = e^A dt^2 - e^B dr^2 - d\Omega, \quad (9.53)$$

onde

$$A = \nu - 2\phi, \quad B = \lambda - 2\phi. \quad (9.54)$$

A matriz dos elementos para a métrica covariante é dada por

$$\bar{g}_{\tau\nu} = \begin{pmatrix} e^A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}^2\theta \end{pmatrix}, \quad (9.55)$$

onde

$$\bar{g}_{00} = e^{A(r,t)}, \quad \bar{g}_{11} = -e^{B(r,t)}, \quad \bar{g}_{22} = -1, \quad \bar{g}_{33} = -\text{sen}^2\theta. \quad (9.56)$$

Para a métrica contravariante, encontramos

$$\bar{g}^{\tau\nu} = \begin{pmatrix} e^{-A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}^{-2}\theta \end{pmatrix}; \quad (9.57)$$

tal que

$$\bar{g}^{00} = e^{-A(r,t)} , \quad \bar{g}^{11} = -e^{-B(r,t)} , \quad \bar{g}^{22} = -1 , \quad \bar{g}^{33} = -\frac{1}{\text{sen}^2\theta} . \quad (9.58)$$

Deve-se nesta etapa realizar o cálculo dos símbolos de Christoffel conforme, dado por (eq. 3.6).

Para  $\alpha, \tau, \nu = 0, 1$

$$\bar{\Gamma}_{00}^0 = \frac{1}{2}\bar{g}^{00}(\partial_0\bar{g}_{00}) = \frac{\dot{A}}{2} = \frac{\dot{\nu} - 2\dot{\phi}}{2} ; \quad (9.59)$$

$$\bar{\Gamma}_{11}^1 = \frac{1}{2}\bar{g}^{11}(\partial_1\bar{g}_{11}) = \frac{B'}{2} = \frac{\lambda' - 2\phi'}{2} ; \quad (9.60)$$

$$\bar{\Gamma}_{00}^1 = -\frac{1}{2}\bar{g}^{11}(\partial_1\bar{g}_{00}) = \frac{A'e^{A-B}}{2} = \left[\frac{\nu' - 2\phi'}{2}\right]e^{\nu-\lambda} ; \quad (9.61)$$

$$\bar{\Gamma}_{11}^0 = -\frac{1}{2}\bar{g}^{00}(\partial_0\bar{g}_{11}) = \frac{\dot{B}e^{-(A-B)}}{2} = \left[\frac{\dot{\lambda} - 2\dot{\phi}}{2}\right]e^{-(\nu-\lambda)} ; \quad (9.62)$$

$$\bar{\Gamma}_{10}^0 = \frac{1}{2}\bar{g}^{00}(\partial_1\bar{g}_{00}) = \frac{A'}{2} = \frac{\nu' - 2\phi'}{2} ; \quad (9.63)$$

$$\bar{\Gamma}_{01}^1 = \frac{1}{2}\bar{g}^{11}(\partial_0\bar{g}_{11}) = \frac{\dot{B}}{2} = \frac{\dot{\lambda} - 2\dot{\phi}}{2} . \quad (9.64)$$

Para  $\alpha, \tau, \nu = 2, 3$ , temos:

$$\bar{\Gamma}_{22}^2 = \bar{\Gamma}_{33}^3 = \bar{\Gamma}_{23}^2 = \bar{\Gamma}_{32}^2 = \bar{\Gamma}_{22}^3 = 0 ; \quad (9.65)$$

$$\bar{\Gamma}_{33}^2 = -\text{sen}\theta\text{cos}\theta \quad ; \quad (9.66)$$

$$\bar{\Gamma}_{23}^3 = \bar{\Gamma}_{32}^3 = \text{cotg}\theta . \quad (9.67)$$

O tensor de Ricci é dado por

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} - 2(\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\phi) - \bar{g}_{\mu\nu}(\square\phi) + 2\partial_\mu\phi - 2\bar{g}_{\mu\nu}\bar{g}^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi \quad ; \quad (9.68)$$

$$(0, 1) = a, b, c, \dots ; (2, 3) = i, j, k, \dots ; \quad (9.69)$$

$$K = \frac{1}{2}e^{-A}(\dot{A}\dot{B} - 2\dot{B} - \dot{B}^2) + \frac{1}{2}e^B(2A'' - A'B' + A'^2) . \quad (9.70)$$

Assim

$$\bar{R}_{ab} = \frac{1}{2}\bar{g}_{ab}K ; \quad (9.71)$$

$$K = R_{(2)} , \quad (9.72)$$

como deveria ser. É fácil verificar que

$$\bar{\nabla}_0\bar{\nabla}_0\phi = \partial_0^2\phi - \bar{\Gamma}_{00}^0\partial_0\phi - \bar{\Gamma}_{00}^1\partial_1\phi = \ddot{\phi} - \frac{1}{2}\dot{A}\dot{\phi} - \frac{1}{2}e^{A-B}A'\phi' ; \quad (9.73)$$

$$\bar{\nabla}_1\bar{\nabla}_1\phi = \partial_1^2\phi - \bar{\Gamma}_{11}^0\partial_0\phi - \bar{\Gamma}_{11}^1\partial_1\phi = \phi'' - \frac{1}{2}e^{-(A-B)}\dot{B}\dot{\phi} - \frac{1}{2}B'\phi' ; \quad (9.74)$$

$$\bar{\nabla}_0\bar{\nabla}_1\phi = \partial_0\partial_1\phi - \bar{\Gamma}_{01}^0\partial_0\phi - \bar{\Gamma}_{01}^1\partial_1\phi = \dot{\phi}' - \frac{1}{2}A'\dot{\phi} - \frac{1}{2}\dot{B}\phi' ; \quad (9.75)$$

$$\bar{\square}\phi = \bar{g}^{00}\bar{\nabla}_0\bar{\nabla}_0\phi + \bar{g}^{11}\bar{\nabla}_1\bar{\nabla}_1\phi ; \quad (9.76)$$

$$\begin{aligned} \bar{\square}\phi &= e^{-A}\left(\ddot{\phi} - \frac{1}{2}\dot{A}\dot{\phi} - \frac{1}{2}e^{A-B}A'\phi'\right) - e^{-B}\left(\phi' - \frac{1}{2}e^{-(A-B)}\dot{B}\dot{\phi}'\right) \\ &= e^{-A}\left(\ddot{\phi} - \frac{1}{2}\dot{A}\dot{\phi} + \frac{1}{2}\dot{B}\dot{\phi}\right) + e^{-B}\left(-\phi'' + \frac{1}{2}B'\phi' - \frac{1}{2}A'\phi'\right) ; \end{aligned} \quad (9.77)$$

$$(\bar{\nabla}\phi)^2 = \bar{g}^{00}\dot{\phi}^2 + \bar{g}^{11}\phi'^2 = e^{-A}\dot{\phi}^2 - e^{-B}\phi'^2 . \quad (9.78)$$

É importante lembrarmos que

$$A = \nu - 2\phi \quad B = \lambda - 2\phi . \quad (9.79)$$

Para o cálculo de  $R$  utiliza-se (3.18) para  $n = 4$ . Os valores de  $\bar{\square}\phi$  e  $(\bar{\nabla}\phi)^2$  são conhecidos, e assim

$$\bar{R} = \bar{g}^{ij}\bar{R}_{ij} + \bar{g}^{ab}\bar{R}_{ab} = K - 2 , \quad (9.80)$$

tal que

$$\begin{aligned} R_{(a,b)} &= e^{-\nu}\left[\frac{1}{2}\dot{\lambda}\dot{\nu} - \ddot{\lambda} - \frac{1}{2}\dot{\lambda}^2 - 2\dot{\lambda}\dot{\phi} + 2\dot{\nu}\dot{\phi} - 4\ddot{\phi} - 6\dot{\phi}^2\right] + \\ &+ e^{-\lambda}\left[\nu'' - \frac{1}{2}\nu'\lambda' + \frac{1}{2}\nu'^2 - 2\lambda'\phi' + 2\nu'\phi' + 4\phi'' + 6\phi'^2\right] . \end{aligned} \quad (9.81)$$

Assim, o escalar de curvatura é dado por:

$$R = R_{(a,b)} - 2e^{-2\phi} . \quad (9.82)$$

Finalmente

$$G_2^2 = R_2^2 - \frac{1}{2}R, \quad (9.83)$$

$$\begin{aligned} G_2^2 &= e^{-\nu} \left[ \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\dot{\lambda}\dot{\nu} - \ddot{\lambda} - \frac{1}{2}\dot{\lambda}^2\right) + \frac{1}{2}\dot{\lambda}\dot{\phi} - \frac{1}{2}\dot{\nu}\dot{\phi} + \ddot{\phi} + \dot{\phi}^2 \right] + \\ &+ e^{-\lambda} \left[ -\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda'\phi'}{2} - \frac{\nu'\phi'}{2} - \phi'' - \phi'^2 \right]. \end{aligned} \quad (9.84)$$

$$G_0^1 = g^{11}G_{10} = g^{11}R_{10} - \frac{1}{2}\delta_0^1 R \quad (9.85)$$

$$G_0^1 = 2e^{-\lambda} \left( \dot{\phi}' - \frac{\nu'\dot{\phi}}{2} - \frac{\dot{\lambda}\phi'}{2} + \phi'\dot{\phi} \right) \quad (9.86)$$

$$G_1^1 = g^{11}R_{11} - \frac{1}{2}\delta_1^1 R = -e^{-\lambda}R_1^1 - \frac{1}{2}R \quad (9.87)$$

$$G_1^1 = e^{-2\phi} - e^{-\lambda}(\nu'\phi' + \phi'^2) + e^{-\nu}(2\ddot{\phi} + 3\dot{\phi}^2 - \dot{\nu}\dot{\phi}) \quad (9.88)$$

$$G_0^0 = g^{00}R_{00} - \frac{1}{2}\delta_0^0 R \quad (9.89)$$

$$G_0^0 = e^{-2\phi} + e^{-\nu}[\dot{\lambda}\dot{\phi} + \dot{\phi}^2] + e^{-\lambda}[-2\phi'' + \lambda'\phi' - 3\phi'^2]. \quad (9.90)$$

Caso particular:  $\varphi = \ln r$ :

$$G_2^2 = e^{-\nu} \left[ \frac{1}{4}\dot{\lambda}\dot{\nu} + \frac{1}{2}\ddot{\lambda} + \frac{1}{4}\dot{\lambda}^2 \right] + e^{-\lambda} \left[ -\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda' - \nu'}{2r} \right] \quad (9.91)$$

$$G_0^1 = -e^{-\lambda}\dot{\lambda}\phi' = -\frac{\dot{\lambda}}{r}e^{-\lambda} \quad (9.92)$$

$$G_1^1 = -e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \quad (9.93)$$

$$G_0^0 = e^{-\lambda} \left[ \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right] + \frac{1}{r^2}. \quad (9.94)$$

Novamente podemos verificar que os resultados obtidos são idênticos àqueles notoriamente encontrados na literatura e que foram apresentados na introdução deste trabalho.



## *Referências*

- [1] Kolb, E., and Turner, M., *The Very Early Universe*, (Addison-Wesley, New York, 1994).
- [2] Zeldovich, Ya.B., and Novikov, I.D., *Structure and Evolution of the Universe*, (In Russian: Nauka, 1975. Translation into English: University of Chicago Press, 1983).
- [3] Weinberg, S., *The Quantum Theory of Fields: Foundations*. (Cambridge Univ. Press, 1995).
- [4] Green, M.B., Schwarz, J.H., and Witten, E., *Superstring Theory*. (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
- [5] D. Puetzfeld, *New Astron. Rev.* 49: 59-64, 2005.
- [6] F. W. Hehl, P. Von der Heyde, G. D. Kerlick, and J. M. Nester, *Rev. Mod. Phys.* 48: 393-416, 1976.
- [7] Shapiro, I.L., *Physical Aspects of the Space-Time Torsion*. *Phys. Rep.* **357**: 113, 2002.
- [8] W. Kopczynski, *Phys. Lett.* 39A: 219, 1972; 42A: 63, 1973.
- [9] A. Trautman, *Nature* 242: 7, 1973.
- [10] F. W. Hehl, P. Von der Heyde and G. D. Kerlick, *Phys. Rev D* 10: 10066, 1974.
- [11] G. D. Kerlick, *Phys. Rev. D* 12: 3004, 1975.
- [12] T. Watanabe and M. J. Hayashi, *General relativity with torsion*, preprint gr-qc/0409029.
- [13] M. O. Ribas and G. M. Kremer, *Fermions fields in Einstein-Cartan theory and the accelerated-decelerated transition in a primordial Universe*, preprint gr-qc/0902.2696.
- [14] M. O. Ribas, F. P. Devecchi and G. M. Kremer, *Phys. Rev. D* 72: 123502, 2005; *Europhys. Lett.* 81: 19001, 2008.

- [15] A. V. Minkevich, A. S. Garkun and V. I. Kudin, *Class. Quantum Grav.* 24: 5835-5847, 2007.
- [16] A. V. Minkevich, *Phys. Lett. B* 678: 423-426, 2009.
- [17] M. Szydlowski and A. Krawiec, *Phys. Rev. D* 70: 043510, 2004.
- [18] J. Weyssenhoff and A. Raabe, *Acta Phys. Pol.* 9: 7, 1947.
- [19] D. Puetzfeld and X. Chen, *Class. Quantum Grav.* 21: 2703, 2004.
- [20] M. Gasperini, *Phys. Rev. Lett.* 56: 2873, 1986.
- [21] J. R. Ray and L. L. Smalley, *Phys. Rev. D* 27: 1383, 1983.
- [22] S. D. Brechet, M. P. Hobson and A. N. Lasenby, *Class. Quantum Grav.* 25: 245016, 2008.
- [23] Yu. N. Obukhov and V. A. Korotky, *Class. Quantum Grav.* 4: 1633-1657, 1987.
- [24] C. G. Boehmer and J. Burnett, *Phys. Rev. D* 78: 104001, 2008.
- [25] M. Tsamparlis, *Phys. Lett. A* 75: 27, 1979.
- [26] C. G. Boehmer and P. Bronowski, The homogeneous and isotropic Weyssenhoff fluid, preprint gr-qc/0601089.
- [27] A. Golounev, V. Mukhanov and V. Vanchurin, *JCAP* 0806: 009, 2008.
- [28] T. S. Koivisto and D. F. Mota, *JCAP* 0808: 021, 2008.
- [29] T. S. Koivisto and D. F. Mota, *JCAP* 0808: 018, 2008.
- [30] S. E. P. Bergliaffa and J. Salim, *Phys. Rev. D* 69: 127301, 2004.
- [31] S. M. Carroll and E. A. Lim, *Phys. Rev. D* 70: 123525, 2004.
- [32] C. G. C. G. Boehmer and D. F. Mota, *Phys. Lett. B* 663: 168-171, 2008.
- [33] G. de Berredo-Peixoto and E. A. de Freitas, *Int. Jour. Mod. Phys. A* 24: 1652-1655, 2009.
- [34] G. de Berredo-Peixoto and E. A. de Freitas, On the torsion effects of a relativistic spin fluid in early cosmology. *Classical and Quantum Gravity*, v. 26, p. 175015, 2009.

- [35] Misner, C.W., Thorn, K.S., and Wheeler, J.A., *Gravitation*. (Freeman, San Francisco, 1973).
- [36] Wald, R.M., *General Relativity*. (University of Chicago Press, 1984).
- [37] Dubrovin, B.A., Fomenko, A.T., Novikov, and S.P., *Modern Geometry-Methods and Applications*, (Springer-Verlag, 1984).
- [38] McConnell, A.J., *Applications of Tensor Analysis*. (Dover Publications, Inc., New York, 1957)
- [39] Buchbinder, I.L., Odintsov, S.D., and Shapiro, I.L., Nonsingular Cosmological Model Induced by Vacuum Quantum Effect in Curved Space-Time with Torsion. *Phys.Lett.* **162B**: 92, 1985.
- [40] Landau, L.D., and Lifshits, E.M., *Field Theory*, (Pergamon, London).
- [41] Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology*. (Wiley, New York, 1972).
- [42] Deser, S., Scale invariance and gravitational coupling. *Ann.Phys. (NY)* **59** (1970) 248.
- [43] Deser, S., Duff, M.J., and Isham, C., Nonlocal Conformal Anomalies. *Nucl. Phys.* **111B**: 45, 1976.
- [44] Duff, M.J., Observations on Conformal Anomalies. *Nucl. Phys.* **125B**: 334, 1977.
- [45] Shapiro, I.L., On the conformal transformation and duality in gravity. *Class. Quantum Grav.* **14**: 391, 1997.
- [46] Shapiro, I.L., and Takata, H., Conformal transformation in gravity. *Phys.Lett.* **361 B**: 31 1996.
- [47] Carneiro, D.F., Freitas, E.A., Gonçalves, B., Lima, A.G. de, Shapiro, I.L., On useful conformal transformations in general relativity. *Gravitation e Cosmology*, v 10, n. 4, p. 305, 2004.
- [48] Stelle, K.S., Classical gravity with higher derivatives. *Gen.Rel.Grav.* **9**: 353, 1978.
- [49] Birell, N.D., and Davies, P.C.W., *Quantum fields in curved space*. (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982).
- [50] Paneitz, S., A Quartic Conformally Covariant Differential Operator for Arbitrary Pseudo-Riemannian Manifolds, MIT preprint, 1983 (unpublished).

- [51] Reigert, R.J., A non-local action for the trace anomaly. *Phys.Lett.* **134B**: 56, 1980.
- [52] Barros, J.A. de, and Shapiro, I.L., Renormalization group study of the higher derivative conformal scalar model. *Phys. Lett.* **412B**: 242, 1997.
- [53] V. A. Kostelecky, N. Russell and J. Tasson, *Phys. Rev. Lett.*, 100: 111102, 2008.
- [54] I. S. Nurgaliev and W. N. Ponomarev, *Phys. Lett. B* 130: 378-379, 1983.
- [55] Dirac, P.A.M., *General Theory of Relativity*. (Princeton Landmarks in Physics, 1996).
- [56] G. G. A. Bauerle and C. J. Haneveld, *Physica A* 121: 541, 1983.
- [57] Frolov, V.P., and Novikov, I.D., *Black Hole Physics - Basic Concepts and New Developments*. (Kluwer Academic Publishers, 1989).