UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Análise das Singularidades da Função de Dois Pontos do Campo Quântico Escalar Localizado Tipo-String

José Amâncio dos Santos

Dissertação de Mestrado apresentada ao curso de Mestrado do Progama de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Jens Mund

Juiz de Fora - Minas Gerais - Brasil

Junho, 2010

Santos, José Amâncio dos

Análise das Singularidades da Função de Dois Pontos do Campo Quântico Escalar Localizado Tipo-String / José Amâncio dos Santos. – 2010.
56 f.: il.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2010.

1. Teoria Quântica de Campos

2. Localização Tipo-String

CDU 53

Resumo

Como é bem conhecido, os campos quânticos estudados na TQC satisfazem o princípio de localidade segundo pontos do espaço-tempo. Entretanto, os príncipios da física também admitem campos quânticos que satisfazem a uma condição de localidade determinada por strings [1], as quais são semi-retas no espaço-tempo partindo de algum ponto (evento) e se estendendo em alguma direção do tipo espaço. Devido a esta noção de localidade via string, dizemos que tais campos possuem localização do tipo-string. Por outro lado, nos referimos aos campos cuja localidade é caracterizada por pontos do espaço-tempo, dizendo que eles possuem localização do tipo-ponto ou que são puntiformemente localizados. O interesse na localização do tipo-string está na possibilidade de campos com tal localização apresentarem um comportamento UV, isto é, em altas energias, menos singular do que os campos com a localização do tipo-ponto, permitindo assim a obtenção de mais modelos interagentes com localização do tipo-string. Campos livres com localização tipo-string já foram obtidos para vários tipos de partículas [1, 2], a partir dos quais pode-se construir modelos interagentes. No entanto, para realizar esta tarefa, ou seja, construir modelos com interação a partir do campo livre, deve-se fazer uma análise da função de dois pontos do campo livre correspondente. Neste ponto se faz necessário o uso de certos conceitos e instrumentos - por exemplo: suporte singular, wave front set e scaling degree - na análise da função de dois pontos. Neste texto procuramos introduzir estes conceitos e instrumentos. Além disso, consideramos um modelo de campo escalar livre com localização do tipo-string para uma partícula massiva com spin nulo, para o qual apresentamos e procuramos analisar a estrutura de singularidades da função de dois pontos correspondente, dando uma interpretação em termos de strings.

[1]Nota: O termo string aqui mencionado não se refere à Teoria de Cordas (String Theory). Esta observação se faz necessária devido à grande popularidade da Teoria de Cordas.

Abstract

As is well-known, the quantum fields studied in QFT satisfy the principle of locality according to points in space-time. However, the principles of physics also admit quantum fields that satisfy a condition of locality determined by strings[2], which are rays (semi axes) in space-time starting from some point (event) and extending in some space-like direction. Due to this notion of locality via string, we say that such fields are string-localized. On the other hand, we refer to fields whose locality is characterized by points in space-time, saying that they are localized on points. The interest in string localization is the possibility that fields with such kind of localization present a less singular UV behaviour, that is, at high energy, than that of fields localized on points, and then permitting the construction of more interacting models. String-localized free quantum fields have been constructed for many particles types [1, 2], from which one can construct interacting models. However, in order to do this, that is, to construct interacting models from the free fields, it is necessary to analyse the two point function of the corresponding free fields. At this point we have to use some concepts and tools - for example: singular support, wave front set and scaling degree - to analyse the two point function. In this text we introduce these concepts and tools. Moreover, we consider a string-localized free scalar quantum field model for a massive spin zero particle, for which we present and analyse the singularity structure of the corresponding two point function, giving a interpretation in terms of strings.

[2]Note: The term string mentioned here does not refer to String Theory. This observation is needed due to the great popularity of String Theory.

Conteúdo

Introdução

Os campos quânticos estudados na TQC satisfazem o princípio de localidade segundo pontos do espaço-tempo. Entretanto, os príncipios da física também admitem campos quânticos que satisfazem a uma condição de localidade determinada por strings do tipo espaço. Antes de mais nada, enfatizamos que o termo "string" aqui não se refere à Teoria de Cordas (String Theory). Strings são semi-retas no espaço-tempo partindo de algum ponto (evento) e se estendendo em alguma direção do tipo espaço. Devido a esta noção de localidade via string, dizemos que tais campos possuem localização do tipo-string. Por outro lado, nos referimos aos campos cuja localidade é caracterizada por pontos do espaço-tempo, dizendo que eles possuem localização do tipo-ponto ou que são puntiformemente localizados. O interesse na localização do tipo-string está na possibilidade de campos com tal localização apresentarem um comportamento UV menos singular do que os campos com a localização do tipo-ponto, permitindo assim a obtenção de mais modelos interagentes com localização do tipo-string. Lembrando que o termo UV (ultra-violeta) diz respeito a altas energias ou, equivalentemente, a pequenas escalas. Além disso, existem certos tipos de partículas que não possuem campo livre puntiformemente localizados, ao passo que campos livres com localização do tipo-string já foram obtidos para tais partículas, além daquelas que possuem modelos de campos livres com localização do tipo-ponto [1, 2]. Assim, a partir dos campos livres, pode-se construir, através da abordagem perturbativa, os modelos interagentes correspondentes. No entanto, para construir modelos com interação a partir dos campos livres, deve-se fazer uma análise da função de dois pontos do campo livre correspondente. Neste ponto se faz necessário o uso de certos conceitos e instrumentos - por exemplo: suporte singular, wave front set e scaling degree - na análise da função de dois pontos. Neste texto procuramos introduzir estes conceitos e instrumentos. Além disso, consideramos um modelo de campo escalar livre com localização do tipo-string para uma partícula massiva com spin nulo, para o qual apresentamos e procuramos analisar a estrutura de singularidades da função de dois pontos correspondente, dando uma interpretação em termos de strings.

Antes de introduzir o conceito de campo quântico com localização do tipo-string, vamos recordar o conceito de campo quântico. Isto servirá tanto para fixar as ideias quanto para compreendermos melhor os conceitos de localidade.

Para definir um campo quântico precisamos especificar um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$, cujos vetores descrevem estados do sistema, e uma representação unitária do grupo de Poincaré, isto é, um homomorfismo

$$\begin{aligned} U : \mathscr{P} &\rightarrow \mathscr{U}(\mathscr{H}) \\ (a,\Lambda) &\mapsto U(a,\Lambda) : \mathscr{H} \rightarrow \mathscr{H} \end{aligned} \tag{1}$$

que associa a cada transformação de Poincaré $(a,\Lambda) \in \mathscr{P}$ um operador unitário $U(a,\Lambda) : \mathscr{H} \rightarrow \mathscr{H}$, em que $\mathscr{U}(\mathscr{H})$ é o grupo, com a operação binária de composição de funções, dos operadores lineares unitários $U : \mathscr{H} \rightarrow \mathscr{H}$. Além disso, assumimos a existência de um vetor $\Omega \in \mathscr{H}$, que descreve o estado de vácuo, satisfazendo a seguinte propriedade

$$U(a,\Lambda)\,\Omega = \Omega \tag{2}$$

para toda transformação de Poincaré $(a,\Lambda) \in \mathscr{P}$.

Um campo quântico φ é uma distribuição que associa a cada função de teste $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4,\mathbb{C})$ um operador $\varphi(f) : \mathscr{H} \rightarrow \mathscr{H}$, o qual descreve um observável[1], satisfazendo as seguintes condições:

1) Localidade

$$[\varphi(x),\varphi(x')] = 0 \tag{3}$$

quando x e x' são causalmente separados, isto é, $(x-x')^2 < 0$.

2) Covariância do campo,

$$U(a,\Lambda)\,\varphi(x)\,U(a,\Lambda)^{-1} = \varphi(\Lambda x + a) \tag{4}$$

para toda transformação de Poincaré $(a,\Lambda) \in \mathscr{P}$ e todo $x \in \mathbb{R}^4$. As equações acima devem ser entendidas no sentido de distribuições. Vamos nos referir a esta definição de um campo quântico como puntiformemente localizada ou com localização do tipo-ponto para distinguir da definição mencionada a seguir, na qual se diz que campo quântico possui localização do tipo-string.

Agora, vamos introduzir o conceito de campo quântico com localização tipo-string. Seja

$$H = \{e \in \mathbb{R}^4 ; e \cdot e = -1\} \tag{5}$$

A string, com origem em $x \in \mathbb{R}^4$ e direção do tipo espaço $e \in H$, é o subconjunto $S_{x,e} \subset \mathbb{R}^4$ definido por

$$S_{x,e} = \{x + te ; t \geqslant 0\} \tag{6}$$

[1]Devemos observar que, em certos casos, o campo não é observável. No entanto, em tais casos, assumimos que campos observáveis podem ser obtidos a partir de φ.

Observemos que uma string $S_{x,e}$ se transforma da seguinte forma

$$(a,\Lambda)(S_{x,e}) = S_{a+\Lambda x,\Lambda e} \tag{7}$$

sob uma transformação de Poincaré $(a,\Lambda) \in \mathscr{P}$. Em palavras, a string $S_{x,e}$ é transformada na string $S_{a+\Lambda x,\Lambda e}$, com origem $(a+\Lambda x) \in \mathbb{R}^4$ e direção do tipo espaço $\Lambda e \in H$, pois $\Lambda e \cdot \Lambda e = e \cdot e = -1$. Para constatar isto, basta notar que $(a,\Lambda)(x+te) = a+\Lambda(x+te) = a+\Lambda x+\Lambda(te) = (a+\Lambda x)+t\Lambda e$.

Um campo quântico com localização tipo-string φ é uma distribuição que associa a cada função de teste $f : \mathbb{R}^4 \times H \to \mathbb{C}$ um operador $\varphi(f) : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, satisfazendo as seguintes condições:

1) Localidade segundo strings

$$[\varphi(x,e),\varphi(x',e')] = 0 \tag{8}$$

quando $S_{x,e}$ e $S_{x',e'}$ são causalmente separados, isto é, $(y-y')^2 < 0$ quaisquer que sejam $y \in S_{x,e}$ e $y' \in S_{x',e'}$.

2) Covariância

$$U(a,\Lambda)\,\varphi(x,e)\,U(a,\Lambda)^{-1} = \varphi(\Lambda x+a,\Lambda e) \tag{9}$$

para toda transformação de Poincaré $(a,\Lambda) \in \mathscr{P}$ e todo $(x,e) \in \mathbb{R}^4 \times H$.

Nosso interesse é analisar a chamada função de dois pontos. No caso de um campo quântico φ com localização do tipo-ponto, a função de dois pontos é definida por

$$w(x,x') = (\Omega,\varphi(x)\,\varphi(x')\,\Omega) \tag{10}$$

Já para um campo quântico com localização do tipo-string φ, a função de dois pontos é definida por

$$w(x,e,x',e') = (\Omega,\varphi(x,e)\,\varphi(x',e')\,\Omega) \tag{11}$$

No caso de campo escalar livre para uma partícula massiva de spin zero, a função de dois pontos é dada por

$$w(x,x') = (2\pi)^{-d+1} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} dp\, \frac{e^{-ip\cdot(x-x')}}{2\,\omega(p)} \tag{12}$$

onde $\omega(p) = \sqrt{p^2+m^2}$ e $p = (p^0,p) = (\omega(p),p)$. Nosso interesse é considerar um modelo de campo escalar livre com localização do tipo-string para uma partícula massiva de spin zero, o qual foi introduzido em [2] e cuja função de dois pontos é dada por

$$w(x,e,x',e') = (2\pi)^{-d+1} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} dp\, \frac{e^{-ip\cdot(x-x')}}{2\,\omega(p)(p\cdot e-i\varepsilon)(p\cdot e'+i\varepsilon)} \tag{13}$$

1 Fundamentos Matemáticos

Usaremos as notações tradicionais $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ para designar o conjunto dos números naturais, inteiros, racionais, reais e complexos, respectivamente. Para ser mais preciso, $\mathbb{R}$ denota o corpo ordenado completo dos números reais e $\mathbb{C}$ designa o corpo dos números complexos. Além disso, quando nos referirmos às propriedades topológicas de $\mathbb{R}$, fica subentendido que se trata da topologia usual sobre a reta real $\mathbb{R}$, isto é, a topologia obtida a partir da relação de ordem em $\mathbb{R}$ [1]. Consideremos agora o produto cartesiano $\mathbb{R}^n$, onde $n \in \mathbb{N}$ [2]. O conjunto $\mathbb{R}^n$ munido das operações de soma de vetores e produto por escalar, definidas respectivamente por,

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (x,y) &\mapsto x+y = (x_1+y_1, ..., x_n+y_n) \end{aligned}$$

$\forall x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, e

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (\alpha,x) &\mapsto \alpha \cdot x = \alpha x = (\alpha x_1, ..., \alpha x_n) \end{aligned}$$

$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, constitui um espaço vetorial, sobre o corpo dos números reais, de dimensão n. Indicaremos por $e_i \in \mathbb{R}^n$ o i-ésimo vetor da base canônica $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, sendo $e_i = (x_1, ..., x_n)$ caracterizado por: $x_i = 1$ e $x_j = 0, \forall j \neq i$. Donde,

$$x = (x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Sobre o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ temos o produto interno usual, dado por,

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{aligned}$$

[1] Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ é aberto se, e somente se, para todo $a \in A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}; a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R}; |x-a| < \varepsilon\} \subset A$, onde $|x| = \max\{x, -x\}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

[2] Para um conjunto X qualquer, defini-se X^n indutivamente por $X^1 = X$ e $X^{n+1} = X^n \times X$.

$\forall x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, do qual obtém-se a norma euclidiana

$$\begin{array}{rcl} \|\ \|_2 : \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Embora a norma euclidiana tenha um maior apelo geométrico, em geral é mais conveniente utilizar a norma da soma $\|\ \|_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ou a do máximo $\|\ \|_\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, sendo

$$\begin{array}{rcl} \|x\|_1 & = & \sum_{i=1}^{n} |x_i| \\ \|x\|_\infty & = & \max\{|x_i|; i = 1, ..., n\} \end{array}$$

$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. De agora em diante usaremos a notação $\|\ \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ para nos referir a uma norma qualquer em $\mathbb{R}^n$, isto se justifica pelo fato de que todas as normas são equivalentes em $\mathbb{R}^n$. Dado um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ e um número real $r > 0$, a bola aberta de centro a e raio r é o subconjunto $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\| < r\}$, a bola fechada de centro a e raio r é o subconjunto $B[a, r] = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\| \leq r\}$, e por fim, a esfera de centro a e raio r é o subconjunto $S[a, r] = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\| = r\}$. A forma geométrica de cada um dos subconjuntos $B(a, r)$, $B[a, r]$ e $S[a, r]$ depende da norma $\|\ \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, no entanto, devido à equivalência das normas, a topologia obtida a partir de qualquer norma em $\mathbb{R}^n$ é a mesma, a saber, a topologia usual $\tau = \{A \subset \mathbb{R}^n; \forall a \in A, \exists r > 0 : B(a, r) \subset A\}$. Em palavras, um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto($A \in \tau$) se, e somente se, todo ponto $a \in A$ é centro de uma bola aberta contida em A. Como $\mathbb{C}$ pode ser construído como o produto cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ munido das operações de soma $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e produto $\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de números complexos, dadas, respectivamente, por

$$\begin{array}{rcl} (a, b) + (x, y) & = & (a + x, b + y) \\ (a, b) \cdot (x, y) & = & (ax - by, ay + bx) \end{array}$$

quaisquer que sejam $z = (a, b), w = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Assim, temos $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) \cdot (1, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1)$ ou, usando o abuso de linguagem ao escrever $x = (x, 0)$, temos $z = x + iy$, onde $1 = (1, 0)$ é o elemento neutro da multiplicação em $\mathbb{C}$ e $i = (0, 1)$ é a unidade imaginária em $\mathbb{C}$ ($i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$). Observemos que $(x, 0) = x \cdot (1, 0)$ e $(0, y) = y \cdot (0, 1)$, onde $\cdot$ indica o produto de um escalar $x \in \mathbb{R}$ por um vetor em $\mathbb{R}^2$. Ou seja, ao escrever $z = (x, y) = x + iy$, podemos olhar para $x = x1$ e $yi = iy$ como o produto de um escalar em $\mathbb{R}$ por um vetor em $\mathbb{R}^2$, ou como produto de números complexos, por meio da identificação (isomorfismo) $f : \mathbb{R} \rightarrow \{(x, y) \in \mathbb{C}; y = 0\}$, dado por, $f(x) = (x, 0)$. Denotamos $x =$Re(z) e

$y = \text{Im}(z)$, por parte real e parte imaginária de $z = x + iy$, respectivamente, e por $\bar{z} = x - iy$ o complexo conjugado de $z = x + iy$. Temos $\overline{z+w} = \bar{z} + \overline{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\overline{w}$, $|z| = |\bar{z}|$, $|z|^2 = z\bar{z}$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$ e portanto, $0 = \overline{0} = \overline{z - z} = \overline{z + (-z)} = \bar{z} + \overline{(-z)} \Rightarrow \overline{(-z)} = -\bar{z}$, $\forall z \in \mathbb{C}$ e $1 = \overline{1} = \overline{z(\frac{1}{z})} = \bar{z}\overline{(\frac{1}{z})} \Rightarrow \overline{(\frac{1}{z})} = \frac{1}{\bar{z}}$, $\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$. Tendo isto em mente, munimos $\mathbb{C}$ da topologia usual de $\mathbb{R}^2$, a qual denomina-se topologia usual em $\mathbb{C}$. Da equivalência das normas em $\mathbb{R}^2$, segue-se que qualquer norma induz a topologia usual em $\mathbb{C}$. É comum utilizar a norma $\| \, \| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$ proveniente do módulo $| \, | : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, em que $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Isto é, $\|z\| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, e vemos que se trata da norma euclidiana em $\mathbb{R}^2$.

1.1 Noções sobre relatividade restrita

Nosso objetivo aqui é dar as nocões básicas, e introduzir as notações, sobre os conceitos relacionados ao espaço-tempo no contexto da relatividade restrita ou especial. A descrição do espaço-tempo no caso geral usa o conceito de variedade. Para ser mais preciso, o espaço-tempo é descrito como uma variedade M de quatro dimensões. Tendo isto em mente, vamos nos referir à variedade M como o espaço-tempo. Os pontos $p \in M$ do espaço-tempo M, os quais descrevem "idealmente" fatos ou acontecimentos, são denominados eventos. Dizemos idealmente pois, na realidade, o melhor que podemos dizer sobre um dado acontecimento, por exemplo, um eclipse ou a colisão de um elétron com um pósitron, é a região e o instante aproximado em que ocorre. E sabemos que esta limitação se deve tanto a dificuldades técnicas no processo de medida quanto a príncipios fundamentais da natureza, revelados pela mecânica quântica. Para um referencial inercial, um evento $p \in M$ é descrito por um ponto $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^4$, com $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ e $x^3 = z$, onde t é o instante em que o evento ocorreu, c é a velocidade da luz no vácuo e x, y, z são as coordenadas cartesianas do evento. É muito comum usar a notação $x = (x^0, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^4$, onde x é denominado quadri-vetor, x^0 é chamado de parte temporal do quadri-vetor x e $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ é chamado de parte espacial do quadri-vetor x. Assim, em um referencial inercial, um evento é caracterizado pelas suas coordenadas x^μ, e referir-nos-emos a um ponto $x \in \mathbb{R}^4$ como evento de agora em diante. Dados dois eventos $x, y \in \mathbb{R}^4$, o intervalo entre eles é definido por

$$\Delta s^2 = (x^0 - y^0)^2 - (x^1 - y^1)^2 - (x^2 - y^2)^2 - (x^3 - y^3)^2 \tag{1.1}$$

ou usando notação $x = (x^0, \mathbf{x}) = (ct, \mathbf{x})$ e $y = (y^0, \mathbf{y}) = (ct', \mathbf{y})$, temos

$$\Delta s^2 = c^2 (t - t')^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 \tag{1.2}$$

ou ainda, usando a convenção de soma de Einstein, podemos escrever

$$\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu}(x^\mu - y^\mu)(x^\nu - y^\nu) \tag{1.3}$$

onde

$$\eta = (\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

é a métrica de Minkowski. Considerando a função bilinear, também chamada de produto de Minkowski, $\cdot : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, dada por

$$(x,y) \mapsto x \cdot y = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \tag{1.5}$$

quaisquer que sejam $x = (x^0, \mathbf{x}), y = (y^0, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^4$, podemos escrever o intervalo entre x e y como

$$\Delta s^2 = (x-y) \cdot (x-y) = (x-y)^2 \tag{1.6}$$

A importância do intervalo reside no fato de que ele é um invariante relativístico, ou seja, o intervalo entre dois eventos não depende do referencial inercial, embora seja comum introduzir o seu conceito após terem sido dadas coordenadas. O sinal do intervalo entre dois eventos possui um significado muito importante. Para ser mais preciso, dados dois eventos $x, y \in \mathbb{R}^4$, temos uma e somente uma das possibilidades: $(x-y)^2 > 0$ ou $(x-y)^2 < 0$ ou $(x-y)^2 = 0$. E cada um desses casos recebe uma denominação especial, a saber,

1) Quando $(x-y)^2 > 0$ diz-se que a separação entre os eventos x e y é do tipo tempo. Neste caso, um dos eventos pode ser a causa do outro. Existe um referencial inercial em que estes eventos ocorrem na mesma posição, ao passo que não há um referencial inercial no qual estes eventos sejam simultâneos, daí a nomenclatura.

2) Quando $(x-y)^2 < 0$ diz-se que a separação entre os eventos x e y é do tipo espaço. Neste caso, nenhum dos eventos pode ser a causa do outro, e por isso, diz-se que estes eventos são causalmente separados. Além disso, existe um referencial inercial em que estes eventos são simultâneos, porém, não há um referencial inercial no qual estes eventos ocorram na mesma posição.

3) Quando $(x-y)^2 = 0$ diz-se que a separação entre os eventos x e y é do tipo luz. Novamente, um dos eventos pode ser a causa do outro. Neste caso, existe um referencial inercial no

qual estes eventos são simultâneos (ou ocorrem na mesma posição) se, e somente se, $x = y$.

Consideremos agora um outro referencial inercial, no qual, o evento $p \in M$ é representado pelo ponto $x' = (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) \in \mathbb{R}^4$. Sabemos, pela teoria da relatividade restrita, que a relação entre x e x' é dada por uma transformação de Poincaré

$$\begin{aligned} P(a,\Lambda) : \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R}^4 \\ x &\mapsto x' = P(a,\Lambda)\, x = a + \Lambda x \end{aligned} \tag{1.7}$$

onde $a \in \mathbb{R}^4$ descreve translações no espaço-tempo e

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R}^4 \\ x &\mapsto \Lambda x \end{aligned} \tag{1.8}$$

é uma transformação linear, chamada transformação de Lorentz. Além da linearidade, uma transformação de Lorentz $\Lambda : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ é caracterizada pela propriedade de preservar o produto de Minkowski, isto é,

$$(\Lambda x) \cdot (\Lambda y) = x \cdot y \tag{1.9}$$

quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}^4$. Assim, em particular, uma transformação de Lorentz preserva o intervalo, pois

$$\begin{aligned} (\Lambda x - \Lambda y)^2 = (\Lambda x - \Lambda y) \cdot (\Lambda x - \Lambda y) = \\ (\Lambda (x-y)) \cdot (\Lambda (x-y)) = (x-y) \cdot (x-y) = (x-y)^2 \end{aligned} \tag{1.10}$$

e por conseguinte, vemos que uma transformação de Poincaré $P(a,\Lambda) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ também preserva o intervalo, já que

$$P(a,\Lambda)\, x - P(a,\Lambda)\, y = (a + \Lambda x) - (a + \Lambda y) = \Lambda x - \Lambda y \tag{1.11}$$

É muito comum escrever as expressões acima em termos de coordenadas. Como uma transformação de Lorentz $\Lambda : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ é linear, sabemos que existem únicos Λ^μ_ν tais que

$$(\Lambda x)^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \tag{1.12}$$

Assim, para uma transformação de Poincaré $P(a,\Lambda) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ temos

$$(P(a,\Lambda)\, x)^\mu = a^\mu + \Lambda^\mu_\nu x^\nu \tag{1.13}$$

Dados $x, y \in \mathbb{R}^4$ quaisquer, temos

$$
\begin{aligned}
(\Lambda x)\cdot(\Lambda y) - x\cdot y = \eta_{\mu\nu}\,(\Lambda x)^{\mu}\,(\Lambda y)^{\nu} - \eta_{\alpha\beta}\,x^{\alpha}\,y^{\beta} = \\
= \eta_{\mu\nu}\,\Lambda^{\mu}_{\ \alpha}\,x^{\alpha}\,\Lambda^{\nu}_{\ \beta}\,y^{\beta} - \eta_{\alpha\beta}\,x^{\alpha}\,y^{\beta} = (\eta_{\mu\nu}\,\Lambda^{\mu}_{\ \alpha}\,\Lambda^{\nu}_{\ \beta} - \eta_{\alpha\beta})\,x^{\alpha}\,y^{\beta}
\end{aligned}
$$

assim, vemos que uma transformação linear $\Lambda : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ preserva o produto de Minkowski se, e somente se,

$$
(\eta_{\mu\nu}\,\Lambda^{\mu}_{\ \alpha}\,\Lambda^{\nu}_{\ \beta} - \eta_{\alpha\beta})\,x^{\alpha}\,y^{\beta} = 0 \tag{1.14}
$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^4$. Logo, $\Lambda : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ é uma transformação de Lorentz se, e somente se, $\Lambda^{\mu}_{\ \alpha}$ satisfazem

$$
\eta_{\mu\nu}\,\Lambda^{\mu}_{\ \alpha}\,\Lambda^{\nu}_{\ \beta} = \eta_{\alpha\beta} \tag{1.15}
$$

Para um terceiro referencial inercial, no qual o evento $p \in M$ é representado pelo ponto $x'' \in \mathbb{R}^4$, a relação entre x'' e x' é dada por $x'' = P(a', \Lambda')\,x' = a' + \Lambda'\,x'$. Como $x' = P(a, \Lambda)\,x$, segue que $x'' = P(a', \Lambda')\,x' = P(a', \Lambda')P(a, \Lambda)\,x$. Vamos determinar agora a composta $P(a', \Lambda')P(a, \Lambda)$: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$. Temos $x''^{\mu} = a'^{\mu} + \Lambda'^{\mu}_{\ \nu}\,x'^{\nu} = a'^{\mu} + \Lambda'^{\mu}_{\ \nu}\,(a^{\nu} + \Lambda^{\nu}_{\ \alpha}\,x^{\alpha}) = a'^{\mu} + \Lambda'^{\mu}_{\ \nu}\,a^{\nu} + (\Lambda'^{\mu}_{\ \nu}\,\Lambda^{\nu}_{\ \alpha})\,x^{\alpha}$, isto é,

$$
x''^{\mu} = a'^{\mu} + \Lambda'^{\mu}_{\ \nu}\,a^{\nu} + (\Lambda'^{\mu}_{\ \nu}\,\Lambda^{\nu}_{\ \alpha})\,x^{\alpha} \tag{1.16}
$$

Além disso, lembrando que $\eta_{\mu\nu}\,\Lambda^{\mu}_{\ \alpha}\,\Lambda^{\nu}_{\ \beta} = \eta_{\alpha\beta}$ e $\eta_{\mu\nu}\,\Lambda'^{\mu}_{\ \alpha}\,\Lambda'^{\nu}_{\ \beta} = \eta_{\alpha\beta}$, temos

$$
\eta_{\mu\nu}\,(\Lambda'^{\mu}_{\ \lambda}\,\Lambda^{\lambda}_{\ \alpha})(\Lambda'^{\nu}_{\ \tau}\,\Lambda^{\tau}_{\ \beta}) = (\eta_{\mu\nu}\,\Lambda'^{\mu}_{\ \lambda}\,\Lambda'^{\nu}_{\ \tau})\,\Lambda^{\lambda}_{\ \alpha}\,\Lambda^{\tau}_{\ \beta} = \eta_{\lambda\tau}\,\Lambda^{\lambda}_{\ \alpha}\,\Lambda^{\tau}_{\ \beta} = \eta_{\alpha\beta}
$$

Portanto, a composta de duas transformações de Poincaré é uma transformação de Poincaré, e vale

$$
P(a', \Lambda')P(a, \Lambda) = P(a' + \Lambda'\,a, \Lambda'\,\Lambda) \tag{1.17}
$$

onde $(\Lambda'\,\Lambda)^{\mu}_{\ \alpha} = \Lambda'^{\mu}_{\ \nu}\,\Lambda^{\nu}_{\ \alpha}$ e $(\Lambda'\,a)^{\mu} = \Lambda'^{\mu}_{\ \nu}\,a^{\nu}$. O conjunto de todas as transformações de Poincaré $P(a, \Lambda) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ forma um grupo com respeito à composição de funções, isto é , a operação binária do grupo consiste em tomar a composta das funções. Este grupo é chamado de grupo de Poincaré e denotado por $\mathscr{P}$, o qual é um subgrupo do grupo das funções inversíveis $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$.

1.2 Funções de teste

Antes de prosseguir, lembremos que dados um conjunto X qualquer e um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$, podemos construir um novo espaço vetorial $\mathscr{F}(X;V)$. Seja $\mathscr{F}(X;V) = V^X$ o conjunto de todas as funções $f : X \to V$, definimos então a soma de funções (vetores), $+ : \mathscr{F}(X;V) \times \mathscr{F}(X;V) \to \mathscr{F}(X;V)$, e o produto de escalares por funções, $\cdot : \mathbb{K} \times \mathscr{F}(X;V) \to \mathscr{F}(X;V)$, respectivamente por,

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x), \quad \forall x \in X \\ (\alpha \cdot f)(x) &= \alpha \cdot f(x), \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

quaisquer que sejam $f,g \in \mathscr{F}(X;V)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Como exemplos rotineiros desta construção, temos o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n = \mathscr{F}(\{1,...,n\};\mathbb{R})$, lembremos que $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre si mesmo, e o espaço das matrizes M de ordem $m \times n$, $\mathbb{R}^{mn} = \mathscr{F}(\{1,...,m\} \times \{1,...,m\};\mathbb{R})$ cujos elementos M_{ij} são números reais.

Definição 1.1. *Seja $f : X \to \mathbb{C}$ uma função definida num subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$. Diz-se que $f : X \to \mathbb{C}$ é contínua em $a \in X$ se, e somente se, para todo número real $\varepsilon > 0$ existir um número real $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, desde que tenhamos $x \in X$ e $\|x-a\| < \delta$. Se $f : X \to \mathbb{C}$ for contínua em todos os pontos de X, dizemos que f é contínua, ou que f é uma função de classe C^0 em X. Escrevemos $C(X;\mathbb{C}) = C^0(X;\mathbb{C})$ para denotar o conjunto de todas as funções contínuas $f : X \to \mathbb{C}$.*

Uma função $f : X \to \mathbb{C}$ contínua em um ponto $a \in X \subset \mathbb{R}^n$ é limitada numa vizinhança deste ponto, isto é, existem $\delta > 0$ e $M > 0$ tais que $|f(x)| \leqslant M$, $\forall x \in X \cap B(a,\delta)$. Para ver isto tomemos $\varepsilon = 1 > 0$, obtemos então um número $\delta > 0$ tal que $x \in X, \|x-a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon = 1$. Pela desigualdade triangular, temos que $x \in X, \|x-a\| < \delta \Rightarrow |f(x)| = |f(x) - f(a) + f(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| < \varepsilon + |f(a)| = 1 + |f(a)|$. Ou seja, $x \in X, \|x-a\| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq M$, onde $M = 1 + |f(a)| > 0$.

Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $f = u + iv : X \to \mathbb{C}$, isto é, $f(x) = u(x) + iv(x)$, $\forall x \in X$, as funções $u,v : X \to \mathbb{R}$ são denominadas parte real e parte imaginária de $f : X \to \mathbb{C}$. Assim, $f : X \to \mathbb{C}$ contínua em um ponto $a \in X$ se, e somente se, $u,v : X \to \mathbb{R}$ são contínuas em $a \in X$. De fato, suponhamos que $f : X \to \mathbb{C}$ seja contínua $a \in X$, então, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X, \|x-a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Como $f(x) - f(a) = [u(x) - u(a)] + i[v(x) - v(a)]$, temos $|u(x) - u(a)| \leq |f(x) - f(a)|$ e $|v(x) - v(a)| \leq |f(x) - f(a)|$, $\forall x \in X$. Logo, $x \in X, \|x-a\| < \delta \Rightarrow |u(x) - u(a)| \leq |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ e $|v(x) - v(a)| \leq |f(x) - f(a)| < \varepsilon$, o que significa que $u,v : X \to \mathbb{R}$ são contínuas em $a \in X$. Reciprocamente, se $u,v : X \to \mathbb{R}$ são contínuas em

$a \in X$, então dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que $x \in X, \|x-a\| < \delta_1 \Rightarrow |u(x)-u(a)| < \varepsilon/2$, e $x \in X, \|x-a\| < \delta_2 \Rightarrow |v(x)-v(a)| < \varepsilon/2$. Pondo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, segue-se que $\|x-a\| < \delta \Rightarrow \|x-a\| < \delta_1$ e $\|x-a\| < \delta_2$, pois $\delta \leqslant \delta_1$ e $\delta \leqslant \delta_2$. Portanto, pela desigualdade triangular, $x \in X, \|x-a\| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| = |[u(x)-u(a)]+i[v(x)-v(a)]| \leqslant |u(x)-u(a)|+|i||v(x)-v(a)| = |u(x)-u(a)|+|v(x)-v(a)| < \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon$. Isto mostra que $f : X \to \mathbb{C}$ é contínua em $a \in X$.

Proposição 1.2. *Se as funções $f, g : X \to \mathbb{C}$ são contínuas em $a \in X$, então também são contínuas em $a \in X$ as funções $f+g, \alpha f, fg : X \to \mathbb{C}$, onde $\alpha \in \mathbb{C}$ e $(f+g)(x) = f(x) + g(x), (\alpha f)(x) = \alpha f(x), (fg)(x) = f(x)g(x), \forall x \in X$.*

Demonstração. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que $x \in X, \|x-a\| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon/2$, e $x \in X, \|x-a\| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)-g(a)| < \varepsilon/2$. Pondo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, segue-se que $\|x-a\| < \delta \Rightarrow \|x-a\| < \delta_1$ e $\|x-a\| < \delta_2$, pois $\delta \leqslant \delta_1$ e $\delta \leqslant \delta_2$. Portanto, pela desigualdade triangular, $x \in X, \|x-a\| < \delta \Rightarrow |(f+g)(x)-(f+g)(a)| = |[f(x)+g(x)]-[f(a)+g(a)]| = |[f(x)-f(a)]+[g(x)-g(a)]| \leqslant |f(x)-f(a)|+|g(x)-g(a)| < \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon$. Isto mostra que $f+g : X \to \mathbb{C}$ é contínua em $a \in X$. Consideremos agora $\alpha f : X \to \mathbb{C}$, se $\alpha = 0$ então $\alpha f(x) = 0, \forall x \in X$, e portanto, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, teremos $|\alpha f(x) - \alpha f(a)| = 0 < \varepsilon$ desde que $x \in X, \|x-a\| < \delta$, sendo $\delta > 0$ arbitrário. Já se $\alpha \neq 0$, procedemos como segue, seja $\varepsilon > 0$ qualquer, da continuidade de $f : X \to \mathbb{C}$ em $a \in X$, segue-se que existe $\delta > 0$ tal que $x \in X, \|x-a\| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon/|\alpha|$. Logo, $x \in X, \|x-a\| < \delta \Rightarrow |\alpha f(x) - \alpha f(a)| = |\alpha||f(x)-f(a)| < |\alpha| \frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon$. Vemos assim que $\alpha f : X \to \mathbb{C}$ é contínua em $a \in X$. Analisemos agora a função $fg : X \to \mathbb{C}$, para começar existem $\delta_0 > 0$ e $M > 0$ tais que $|f(x)| \leqslant M, \forall x \in X \cap B(a, \delta_0)$. Seja então $\varepsilon > 0$ arbitrário, como $f, g : X \to \mathbb{C}$ são contínuas em $a \in X$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que $x \in X, \|x-a\| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon/2(M+|g(a)|)$, e $x \in X, \|x-a\| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)-g(a)| < \varepsilon/2(M+|g(a)|)$. Pondo $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$, temos que, usando a desigualdade triangular, $x \in X, \|x-a\| < \delta \Rightarrow |(fg)(x)-(fg)(a)| = |f(x)g(x)-f(a)g(a)| = |f(x)g(x)-f(x)g(a)+f(x)g(a)-f(a)g(a)| \leq |f(x)||g(x)-g(a)|+|f(x)-f(a)||g(a)| \leq M|g(x)-g(a)|+|f(x)-f(a)||g(a)| < M\frac{\varepsilon}{2(M+|g(a)|)} + |g(a)|\frac{\varepsilon}{2(M+|g(a)|)} \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Portanto, a função $fg : X \to \mathbb{C}$ é contínua em $a \in X$. □

Como consequência do que acabamos de mostrar, segue-se que, se as funções $f, g : X \to \mathbb{C}$ são contínuas, então as funções $f+g, \alpha f, fg : X \to \mathbb{C}$ também são contínuas. Concluímos que o conjunto $C^0(X;\mathbb{C}) \subset \mathscr{F}(X;\mathbb{C})$ de todas as funções contínuas $f : X \to \mathbb{C}$ é um subespaço vetorial de $\mathscr{F}(X;\mathbb{C})$.

Para tratar das derivadas parciais de uma função $f : X \to \mathbb{C}$, em que $X \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, vamos utilizar o conceito de limite de uma função definida em um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$, diz-se que $a \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de acumulação de X se, e somente se, para todo $r > 0$ existe um ponto $x \in X - \{a\}$ tal que $\|x - a\| < r$, ou seja, $(X - \{a\}) \cap B(a,r) \neq \varnothing$. Em palavras, podemos dizer que a é um ponto de acumulação de X quando existem pontos de X arbitrariamente próximos de $a \in \mathbb{R}^n$. Denota-se o conjunto de todos os pontos de acumulação de X por X'.

Definição 1.3. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$, $a \in X'$, isto é, a é ponto de acumulação de X, e $f : X \to \mathbb{C}$. Diz-se que f possui limite $\alpha \in \mathbb{C}$ quando x tende a a, e escrevemos $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in X - \{a\}, \|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$.*

Proposição 1.4. *Seja $f : X \to \mathbb{C}$, com $X \subset \mathbb{R}^n$. Se $a \in X'$, $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ e $\lim_{x\to a} f(x) = \beta$, então $\alpha = \beta$.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que $x \in X - \{a\}, \|x - a\| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon/2$ e $x \in X - \{a\}, \|x - a\| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - \beta| < \varepsilon/2$. Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, como $\delta \leq \delta_1$ e $\delta \leq \delta_2$, segue-se que $x \in X - \{a\}, \|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon/2$ e $|f(x) - \beta| < \varepsilon/2$. Portanto, pela desigualdade triangular, temos que $x \in X - \{a\}, \|x - a\| < \delta \Rightarrow |\alpha - \beta| = |\alpha - f(x) + f(x) - \beta| \leq |\alpha - f(x)| + |f(x) - \beta| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Ou seja, $|\alpha - \beta| < \varepsilon$, e sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, temos necessariamente $|\alpha - \beta| = 0$, donde $\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$. □

Proposição 1.5. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$, $a \in X'$ e $f = u + iv : X \to \mathbb{C}$. Assim, existe o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ se, e somente se, existem os limites $\lim_{x\to a} u(x)$ e $\lim_{x\to a} v(x)$. E, no caso afirmativo, temos*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} u(x) + i \lim_{x\to a} v(x) \tag{1.18}$$

Demonstração. De fato, suponhamos que $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha = k + il$, então, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X - \{a\}, \|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Como $f(x) - \alpha = [u(x) - k] + i[v(x) - l]$, temos $|u(x) - k| \leq |f(x) - \alpha|$ e $|v(x) - l| \leq |f(x) - \alpha|, \forall x \in X$. Logo, $x \in X - \{a\}, \|x - a\| < \delta \Rightarrow |u(x) - k| \leq |f(x) - \alpha| < \varepsilon$ e $|v(x) - l| \leq |f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Logo, temos $\lim_{x\to a} u(x) = k$ e $\lim_{x\to a} v(x) = l$. Reciprocamente, suponhamos que $\lim_{x\to a} u(x) = k$ e $\lim_{x\to a} v(x) = l$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que $x \in X - \{a\}, \|x - a\| < \delta_1 \Rightarrow |u(x) - k| < \varepsilon/2$, e $x \in X - \{a\}, \|x - a\| < \delta_2 \Rightarrow |v(x) - l| < \varepsilon/2$. Pondo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, segue-se que $\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|x - a\| < \delta_1$ e $\|x - a\| < \delta_2$, pois $\delta \leqslant \delta_1$ e $\delta \leqslant \delta_2$. Portanto, usando a desigualdade triangular, segue que $x \in X - \{a\}, \|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - (k + il)| = |[u(x) - k] + i[v(x) - l]| \leqslant |u(x) - k| + |i||v(x) - l| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Isto mostra que $\lim_{x\to a} f(x) = k + il$. □

Seja $f : X \to \mathbb{C}$, onde $X \subset \mathbb{R}^n$ e $a \in X'$. Suponhamos que exista o limite $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$, e consideremos a função $\widetilde{f} : X \cup \{a\} \to \mathbb{C}$, dada por, $\widetilde{f}(x) = f(x), \forall x \in X - \{a\}$ e $\widetilde{f}(a) = \alpha$. Afirmamos que $\widetilde{f}$ é contínua em $a \in X \cup \{a\}$. De fato, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X - \{a\}, \|x-a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Mas, como $|\widetilde{f}(a) - \widetilde{f}(a)| = 0$ e $|\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(a)| = |f(x) - \alpha|, \forall x \in X - \{a\}$, concluímos que $x \in X \cup \{a\}, \|x-a\| < \delta \Rightarrow |\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(a)| < \varepsilon$. Isto mostra que $\widetilde{f}$ é contínua em $a \in X \cup \{a\}$. Por outro lado, se $\widetilde{f} : X \cup \{a\} \to \mathbb{C}$ é contínua em $a \in X'$, então existem os limites $\lim_{x\to a} \widetilde{f}(x)$ e $\lim_{x\to a} f(x)$, com $\lim_{x\to a} \widetilde{f}(x) = \lim_{x\to a} f(x) = \widetilde{f}(a)$, onde $f : X \to \mathbb{C}$ coincide com $\widetilde{f}$ em $X - \{a\}$, isto é, $f(x) = \widetilde{f}(x), \forall x \in X - \{a\}$. Com efeito, seja $\varepsilon > 0$ qualquer, então existe $\delta > 0$ tal que $x \in X \cup \{a\}, \|x-a\| < \delta \Rightarrow |\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(a)| < \varepsilon$. Em particular temos que $x \in X - \{a\}, \|x-a\| < \delta \Rightarrow |\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(a)| < \varepsilon$. Lembrando que $|\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(a)| = |f(x) - \widetilde{f}(a)|, \forall x \in X - \{a\}$, segue que $x \in X - \{a\}, \|x-a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - \widetilde{f}(a)| = |\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(a)| < \varepsilon$, o que prova nossa afirmação. Com isto, podemos provar o seguinte resultado.

Proposição 1.6. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$, $a \in X'$ e $f, g : X \to \mathbb{C}$ funções que possuem limite quando x tende a a, com $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$. Então $f+g, \gamma f, fg : X \to \mathbb{C}$ também possuem limite quando x tende a a, onde $\gamma \in \mathbb{C}$. E temos,*

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \alpha + \beta \tag{1.19}$$

$$\lim_{x\to a}(\gamma f)(x) = \gamma\alpha \tag{1.20}$$

$$\lim_{x\to a}(fg)(x) = \alpha\beta \tag{1.21}$$

Demonstração. Consideremos as funções $\widetilde{f}, \widetilde{g} : X \cup \{a\} \to \mathbb{C}$, definidas por, $\widetilde{f}(x) = f(x), \widetilde{g}(x) = g(x), \forall x \in X - \{a\}$ e $\widetilde{f}(a) = \alpha, \widetilde{g}(a) = \beta$. Como vimos, $\widetilde{f}, \widetilde{g} : X \cup \{a\} \to \mathbb{C}$ são contínuas em a, e portanto $\widetilde{f} + \widetilde{g}, \gamma \widetilde{f}, \widetilde{f}\widetilde{g} : X \cup \{a\} \to \mathbb{C}$ também são contínuas em a. Logo, existem os limites $\lim_{x\to a}(\widetilde{f} + \widetilde{g})(x)$ e $\lim_{x\to a}(f+g)(x)$, pois $f+g$ coincide com $\widetilde{f} + \widetilde{g}$ em $X - \{a\}$, isto é, $(f+g)(x) = (\widetilde{f} + \widetilde{g})(x), \forall x \in X - \{a\}$, com

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a}(\widetilde{f} + \widetilde{g})(x) = (\widetilde{f} + \widetilde{g})(a) = \widetilde{f}(a) + \widetilde{g}(a) = \alpha + \beta$$

Também existem os limites $\lim_{x\to a}(\gamma\widetilde{f})(x)$ e $\lim_{x\to a}(\gamma f)(x)$, pois γf coincide com $\gamma\widetilde{f}$ em $X - \{a\}$, isto é, $(\gamma f)(x) = (\gamma\widetilde{f})(x), \forall x \in X - \{a\}$, com

$$\lim_{x\to a}(\gamma f)(x) = \lim_{x\to a}(\gamma\widetilde{f})(x) = (\gamma\widetilde{f})(a) = \gamma\widetilde{f}(a) = \gamma\alpha$$

E por fim, existem os limites $\lim_{x\to a}(\widetilde{f}\widetilde{g})(x)$ e $\lim_{x\to a}(fg)(x)$, pois fg coincide com $\widetilde{f}\widetilde{g}$ em

$X-\{a\}$, isto é, $(f\,g)(x)=(\widetilde{f}\,\widetilde{g})(x)\,,\forall x\in X-\{a\}$, com

$$\lim_{x\to a}(f\,g)(x)=\lim_{x\to a}(\widetilde{f}\,\widetilde{g})(x)=(\widetilde{f}\,\widetilde{g})(a)=\widetilde{f}(a)\,\widetilde{g}(a)=\alpha\,\beta$$

□

Definição 1.7. *Seja $f:X\to\mathbb{C}$, em que $X\subset\mathbb{R}^n$ é aberto. Tomemos um ponto $a\in X$ e um natural $i\in\{1,\ldots,n\}$, a i-ésima derivada parcial de $f:X\to\mathbb{C}$ neste ponto, denotada por $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou $(\partial_i f)(a)$, é definida pelo limite*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+te_i)-f(a)}{t} \tag{1.22}$$

caso este exista.

Um resultado imediato é o seguinte. Seja $f=u+i\,v:X\to\mathbb{C}$, em que $X\subset\mathbb{R}^n$ é aberto. Já que,

$$\frac{f(a+te_i)-f(a)}{t}=\frac{u(a+te_i)-u(a)}{t}+i\,\frac{v(a+te_i)-v(a)}{t}$$

para todo $t\in\mathbb{R}-\{0\}$ tal que $(a+te_i)\in X$, segue-se da proposição (1.5), que a i-ésima derivada parcial de $f=u+i\,v:X\to\mathbb{C}$ existe em $a\in X$ se, e somente se, existem as i-ésimas derivadas parciais de $u,v:X\to\mathbb{R}$ em $a\in X$. E, caso valha uma das hipóteses, temos $(\partial_i f)(a)=(\partial_i u)(a)+i\,(\partial_i v)(a)$.

Proposição 1.8. *Sejam $f,g:X\to\mathbb{C}$, em que $X\subset\mathbb{R}^n$ é aberto. Se as i-ésimas derivadas parciais de $f,g:X\to\mathbb{C}$ existem em $a\in X$, então existem as i-ésimas derivadas parciais de $f+g,\alpha f,f\,g:X\to\mathbb{C}$ em $a\in X$, onde $\alpha\in\mathbb{C}$. E vale*

$$[\partial_i(f+g)]\,(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)+\frac{\partial g}{\partial x_i}(a) \tag{1.23}$$

$$[\partial_i(\alpha f)]\,(a) = \alpha\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right] \tag{1.24}$$

$$[\partial_i(f\,g)]\,(a) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right]g(a)+f(a)\,\left[\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)\right] \tag{1.25}$$

Demonstração. Notemos que, como X é aberto, podemos encontrar $r>0$ tal que $|t|<r\Rightarrow(a+te_i)\in X$. Consideremos as funções $p,q:(-r,r)-\{0\}\to\mathbb{C}$, dadas por $p(t)=\frac{f(a+te_i)-f(a)}{t}$ e $q(t)=\frac{g(a+te_i)-g(a)}{t}$. Assim, como as i-ésimas derivadas parciais de $f,g:X\to\mathbb{C}$ existem em $a\in X$, temos $\lim_{t\to 0}p(t)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ e $\lim_{t\to 0}q(t)=\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)$. Temos $(f+g)(a+te_i)-(f+g)(a)=f(a+te_i)+g(a+te_i)-f(a)-g(a)=f(a+te_i)-f(a)+g(a+te_i)-g(a)$, donde

$$\frac{(f+g)(a+te_i)-(f+g)(a)}{t}=p(t)+q(t)\ ,\ \ \forall t\in(-r,r)-\{0\}$$

como $(\alpha f)(a+te_i)-(\alpha f)(a)=\alpha f(a+te_i)-\alpha f(a)=\alpha[f(a+te_i)-f(a)]$, obtemos

$$\frac{(\alpha f)(a+te_i)-(\alpha f)(a)}{t}=\alpha\, p(t)\ ,\ \ \forall t\in(-r,r)-\{0\}$$

também temos $(fg)(a+te_i)-(fg)(a)=f(a+te_i)\,g(a+te_i)-f(a)\,g(a)=f(a+te_i)\,g(a+te_i)-f(a+te_i)\,g(a)+f(a+te_i)\,g(a)-f(a)\,g(a)=f(a+te_i)\,[g(a+te_i)-g(a)]+[f(a+te_i)-f(a)]\,g(a)=[f(a+te_i)-f(a)+f(a)]\,[g(a+te_i)-g(a)]+[f(a+te_i)-f(a)]\,g(a)=[f(a+te_i)-f(a)]\,[g(a+te_i)-g(a)]+f(a)\,[g(a+te_i)-g(a)]+[f(a+te_i)-f(a)]\,g(a)$, e segue que

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(a+te_i)-(fg)(a)}{t}&=f(a+te_i)\,q(t)+g(a)\,p(t)=\\&=p(t)\,q(t)\,t+f(a)\,q(t)+g(a)\,p(t)\ ,\ \ \forall t\in(-r,r)-\{0\}\end{aligned}$$

Como $\lim_{t\to 0}t=0$, usando a proposição (1.6) nas equações acima, obtemos o resultado. $\square$

Se a i-ésima derivada parcial de $f=u+i\,v:X\to\mathbb{C}$ existir em todos os pontos de X, então podemos definir, devido à unicidade do limite, a função i-ésima derivada parcial

$$\begin{aligned}\partial_i f=\frac{\partial f}{\partial x_i}:X&\ \to\ \mathbb{C}\\ x&\ \mapsto\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\end{aligned}$$

E como $(\partial_i f)(x)=(\partial_i u)(x)+i\,(\partial_i v)(x)\,,\forall x\in X$, também estão definidas as i-ésimas derivadas parciais $\partial_i u,\partial_i v:X\to\mathbb{R}$ das funções $u,v:X\to\mathbb{R}$. Se este for o caso, podemos prosseguir indagando sobre a continuidade e a existência das derivadas parciais da função $\partial_i f=\partial_i u+i\,\partial_i v:X\to\mathbb{C}$.

Suponhamos que existam, em todos os pontos de X, a i-ésima derivada parcial de $f=u+i\,v:X\to\mathbb{C}$, para todo $i\in\{1,...,n\}$. Nesta situação estão definidas as n derivadas parciais $\partial_i f=\partial_i u+i\,\partial_i v:X\to\mathbb{C}$. Quando todas estas n funções são contínuas, isto é, $\partial_i f\in C^0(X;\mathbb{C})$, $\forall i\in\{1,...,n\}$, dizemos que $f:X\to\mathbb{C}$ é uma função de classe C^1 em X. Escrevemos $C^1(X;\mathbb{C})$ para designar o conjunto de todas as funções $f:X\to\mathbb{C}$ de classe C^1 em X.

Como já vimos, a continuidade de $\partial_i f=\partial_i u+i\,\partial_i v:X\to\mathbb{C}$ é equivalente à continuidade das funções $\partial_i u,\partial_i v:X\to\mathbb{R}$. Assim, as n derivadas parciais $\partial_i f:X\to\mathbb{C}$ são contínuas se, e somente se, as $2n$ derivadas parciais $\partial_i u,\partial_i v:X\to\mathbb{R}$ são contínuas. Lembremos que uma função real $u:X\to\mathbb{R}$ de classe C^1 em X, ou seja, cujas derivadas parciais são contínuas, é diferenciável e portanto é contínua. Disto, concluímos que uma função $f:X\to\mathbb{C}$ de classe C^1 em X é contínua, ou seja, $f\in C^0(X;\mathbb{C})$. Logo, temos $C^1(X;\mathbb{C})\subset C^0(X;\mathbb{C})$.

Prosseguindo indutivamente, dizemos que $f=u+i\,v:X\to\mathbb{C}$ é uma função de classe C^{k+1}

em X, quando existem, em todos os pontos de X, todas as derivadas parciais de $f : X \to \mathbb{C}$, e todas as n funções $\partial_i f = \partial_i u + i\,\partial_i v : X \to \mathbb{C}$ são de classe C^k em X. Dado um número natural k, escrevemos $C^k(X;\mathbb{C})$ para denotar o conjunto de todas as funções $f : X \to \mathbb{C}$ de classe C^k em X.

Afirmamos que $C^k(X;\mathbb{C}) \subset C^{k-1}(X;\mathbb{C})$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Já vimos que isto é verdade para $k = 1$. Como hipótese de indução, supomos a veracidade deste resultado para $k \in \mathbb{N}$, isto é, $C^k(X;\mathbb{C}) \subset C^{k-1}(X;\mathbb{C})$. A partir desta hipótese, vamos mostrar a validade do resultado para $(k+1) \in \mathbb{N}$, a saber, $C^{k+1}(X;\mathbb{C}) \subset C^k(X;\mathbb{C})$. Seja $f \in C^{k+1}(X;\mathbb{C})$ qualquer, logo, por definição, existem, em todos os pontos de X, todas as derivadas parciais de $f : X \to \mathbb{C}$, e todas as n funções $\partial_i f : X \to \mathbb{C}$ são de classe C^k em X. Assim, pela hipótese de indução, segue-se que todas as n funções $\partial_i f : X \to \mathbb{C}$ são de classe C^{k-1} em X. Portanto, como existem em todos os pontos de X, todas as derivadas parciais de $f : X \to \mathbb{C}$ e todas as n derivadas parciais $\partial_i f : X \to \mathbb{C}$ são de classe C^{k-1} em X, temos, por definição, que $f \in C^k(X;\mathbb{C})$. Isto significa que $C^{k+1}(X;\mathbb{C}) \subset C^k(X;\mathbb{C})$, e encerramos a demonstração.

Finalmente, diz-se que $f : X \to \mathbb{C}$ é uma função de classe C^∞ em X em X, quando é uma função de classe C^k em X para todo $k \in \mathbb{N}$. O conjunto de todas funções de classe C^∞ em X é denotado $C^\infty(X;\mathbb{C})$. Logo, $C^\infty(X;\mathbb{C}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(X;\mathbb{C}) \subset \cdots \subset C^k(X;\mathbb{C}) \subset \cdots \subset C^1(X;\mathbb{C}) \subset C^0(X;\mathbb{C})$.

Vamos mostrar agora que se $f, g \in C^k(X;\mathbb{C})$ então $f+g, \alpha f, fg \in C^k(X;\mathbb{C})$, qualquer que seja o natural $k \in \mathbb{N}$. Sejam $f, g : X \to \mathbb{C}$, em que $X \subset \mathbb{R}^n$ é aberto. Já vimos que a continuidade de f e g acarreta na continuidade das funções $f+g, \alpha f, fg : X \to \mathbb{C}$, onde $\alpha \in \mathbb{C}$. Suponhamos que existam em todos os pontos de X, as i-ésimas derivadas parciais de $f, g : X \to \mathbb{C}$. Nesta situação estão definidas as i-ésimas derivadas parciais $\partial_i f, \partial_i g : X \to \mathbb{C}$. Assim, pela proposição (1.8), segue que as funções $f+g, \alpha f, fg : X \to \mathbb{C}$ possuem a i-ésima derivada parcial em todos os pontos de X. E portanto, estão definidas as i-ésimas derivadas parciais $\partial_i(f+g), \partial_i(\alpha f), \partial_i(fg) : X \to \mathbb{C}$, com

$$\begin{aligned}
[\partial_i(f+g)](x) &= (\partial_i f)(x) + (\partial_i g)(x) \\
[\partial_i(\alpha f)](x) &= \alpha\,[(\partial_i f)(x)] \\
[\partial_i(fg)](x) &= [(\partial_i f)(x)]\,g(x) + f(x)\,[(\partial_i g)(x)]
\end{aligned}$$

para todo $x \in X$. Ou seja, temos

$$\begin{aligned} \partial_i(f+g) &= (\partial_i f)+(\partial_i g) && (1.26)\\ \partial_i(\alpha f) &= \alpha\,(\partial_i f) && (1.27)\\ \partial_i(fg) &= (\partial_i f)\,g+f\,(\partial_i g) && (1.28) \end{aligned}$$

Assim, se $f,g \in C^1(X;\mathbb{C})$, concluímos pela proposição (1.2) e das equações (1.26), (1.27) e (1.28), que $f+g, \alpha f, fg \in C^1(X;\mathbb{C})$, onde $\alpha \in \mathbb{C}$. Isto mostra a validade do resultado para $k=1$. Suponhamos (hipótese de indução) que se $f,g \in C^k(X;\mathbb{C})$ então tem-se $f+g, \alpha f, fg \in C^k(X;\mathbb{C})$. Sejam $f,g \in C^{k+1}(X;\mathbb{C}) \subset C^k(X;\mathbb{C})$, logo, por definição, as $2n$ funções $\partial_i f, \partial_i g : X \to \mathbb{C}$ são de classe C^k em X. Assim, pela hipótese de indução aplicada às equações (1.26), (1.27) e (1.28) conclui-se que as $3n$ funções $\partial_i(f+g), \partial_i(\alpha f), \partial_i(fg) : X \to \mathbb{C}$ são de classe C^k em X. Portanto, pela definição, segue que $f+g, \alpha f, fg \in C^{k+1}(X;\mathbb{C})$.

Como consequência do que acabamos de mostrar, segue-se que, qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$, o conjunto $C^k(X;\mathbb{C}) \subset \mathscr{F}(X;\mathbb{C})$ de todas as funções $f : X \to \mathbb{C}$ de classe C^k em X é um subespaço vetorial de $\mathscr{F}(X;\mathbb{C})$. E assim, $C^\infty(X;\mathbb{C}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(X;\mathbb{C})$ é um subespaço vetorial, pois é a interseção de subespaços.

Dada uma função $f = u+iv : X \to \mathbb{C}$, com $X \subset \mathbb{R}^n$ aberto, sabemos que f é de classe C^k em X se, e somente se, $u,v : X \to \mathbb{R}$ são de classe C^k em X. E como a ordem das derivadas parciais de ordem menor ou igual a k de uma função real $u : X \to \mathbb{R}$ de classe C^k em X podem ser trocadas, concluímos que o mesmo vale para funções complexas $f : X \to \mathbb{C}$ de classe C^k em X. Assim, dada uma $n-$upla de inteiros não-negativos $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, vamos usar a seguinte notação

$$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\cdots\partial_n^{\alpha_n} f \tag{1.29}$$

onde α_i é o número de vezes em que se toma a $i-$ésima derivada parcial e $|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ é a ordem da derivada $\partial^\alpha f$.

Definição 1.9 (Suporte)**.** *O suporte de uma função $f : X \to \mathbb{C}$, definida em $X \subset \mathbb{R}^n$, é o fecho, relativamente ao subespaço topológico X de $\mathbb{R}^n$, do subconjunto $\{x \in X\,;\, f(x) \neq 0\} \subset X$, o qual é denotado $\mathrm{supp}\, f$.*

Definição 1.10. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ aberto, escrevemos $C_0^k(X;\mathbb{C})$ para denotar o conjunto de todas as funções $f : X \to \mathbb{C}$ de classe C^k em X cujo suporte $\mathrm{supp}\, f$ é compacto, relativamente ao subespaço topológico X. As funções $f \in C_0^\infty(X;\mathbb{C}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_0^k(X;\mathbb{C})$ são chamadas funções de teste. Utiliza-se também a notação $\mathscr{D}(X) = C_0^\infty(X;\mathbb{C})$.*

Proposição 1.11. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $k \in \mathbb{N}$. Então $C_0^k(X;\mathbb{C}) \subset C^k(X;\mathbb{C})$ é um subespaço vetorial, e consequentemente $C_0^\infty(X;\mathbb{C}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_0^k(X;\mathbb{C})$, sendo a interseção de subespaços, é um subespaço vetorial.*

1.3 Distribuições

Agora iremos introduzir o conceito de distribuição. Para ser mais preciso, vamos tratar de distribuições com valores complexos, isto é, aplicações $u : C_0^\infty(X;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ que associam cada função de teste $f \in C_0^\infty(X;\mathbb{C})$, definida em um aberto $X \subset \mathbb{R}^n$ não vazio, um número complexo $u(f) \in \mathbb{C}$. No entanto, para dizer que uma função $u : C_0^\infty(X;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ é uma distribuição, devemos fazer mais algumas exigências sobre u, a saber, u deve ser linear e contínua. Ao dizer que uma função $u : C_0^\infty(X;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ é linear, fica subentendido que tanto o domínio de u quanto seu contradomínio possuem estrutura de espaço vetorial. Como vimos, o conjunto $C_0^\infty(X;\mathbb{C})$ formado por todas as funções de teste $f : X \to \mathbb{C}$ definidas em um aberto $X \subset \mathbb{R}^n$ constitui um espaço vetorial, sobre o corpo dos números complexos, com as operações usuais de soma de funções e produto de um escalar por uma função. Além disso, $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial sobre si mesmo. Assim, dizer que uma função $u : C_0^\infty(X;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ é linear significa que

$$u(\lambda f + g) = \lambda\, u(f) + u(g) \tag{1.30}$$

quaisquer que sejam $f, g \in C_0^\infty(X;\mathbb{C})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

Agora nos resta o problema da continuidade, ou seja, devemos dizer o que significa afirmar que uma função $u : C_0^\infty(X;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ é contínua.

Dada uma função de teste $f \in C_0^\infty(X;\mathbb{C})$ qualquer, temos $f(X) = \{0\} \cup f(supp\, f)$. De fato, dado $z \in f(X)$ então existe $x \in X$ tal que $z = f(x)$. Caso $x \in supp\, f$ temos $z = f(x) \in f(supp\, f)$ e se $x \notin supp\, f$ então $z = f(x) = 0$. Logo $f(X) \subset \{0\} \cup f(supp\, f)$. Agora seja $z \in \{0\} \cup f(supp\, f)$, então $z \in \{0\}$ ou $z \in f(supp\, f)$. Se $z \in f(supp\, f)$ temos claramente $z \in f(X)$, pois $supp\, f \subset X$. Já se $z \in \{0\}$, isto é, $z = 0$, afirmamos que $z = 0 \in f(X)$. Se isto não fosse verdade, teríamos $f(x) \neq 0$ para todo $x \in X$ e portanto $supp\, f = X$. No entanto, isto é um absurdo pois $X \subset \mathbb{R}^n$ é aberto não vazio e $supp\, f$ é compacto. Mas o único subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que é aberto e compacto é o conjunto vazio. Logo temos $\{0\} \cup f(supp\, f) \subset f(X)$, e portanto $f(X) = \{0\} \cup f(supp\, f)$.

Como $f \in C_0^\infty(X;\mathbb{C})$ é contínua e $supp\, f$ é compacto, segue-se que $f(supp\, f) \subset \mathbb{C}$ é compacto. Assim, concluímos que $f(X) = \{0\} \cup f(supp\, f)$, sendo a união finita de compactos, é compacto e portanto limitado, ou seja, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M, \forall x \in X$. Logo, o conjunto $\{|f(x)|\,; x \in X\} \subset \mathbb{R}$ possui supremo. Além disso, já que $\partial^\alpha f \in C_0^\infty(X;\mathbb{C})$ desde que $f \in C_0^\infty(X;\mathbb{C})$, concluímos que existe o supremo $\sup_{x\in X} |(\partial^\alpha f)(x)| = \sup\{|(\partial^\alpha f)(x)|\,; x \in X\}$.

Portanto, podemos definir

$$\begin{array}{rcl} |\;|_\alpha : C_0^\infty(X;\mathbb{C}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & |f|_\alpha = \sup\limits_{x\in X} |(\partial^\alpha f)(x)| \end{array} \tag{1.31}$$

Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $f \in C_0^\infty(X;\mathbb{C})$ uma função de teste. Dado um subconjunto compacto $K \subset X$, $k \in \mathbb{N}$ e $r > 0$ seja

$$B_K(f,k,r) = \{g \in C_0^\infty(X;\mathbb{C})\,; supp\,(g-f) \subset K \,\mathrm{e}\, |g-f|_\alpha < r\,, \forall\, \alpha\,:\, |\alpha| \leqslant k\}$$

Definição 1.12. *Seja uma função $u : C_0^\infty(X;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, em que $X \subset \mathbb{R}^n$ é aberto. Dizemos que u é contínua em $f \in C_0^\infty(X;\mathbb{C})$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ e todo subconjunto compacto $K \subset X$, existem $k \in \mathbb{N}$ e $r > 0$ tais que $g \in B_K(f,k,r) \Rightarrow |u(g)-u(f)| < \varepsilon$, isto é, $u(B_K(f,k,r)) \subset B(u(f);\varepsilon)$. Quando $u : C_0^\infty(X;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ é contínua em todos os pontos $f \in C_0^\infty(X;\mathbb{C})$, diz-se que u é contínua.*

Proposição 1.13. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, um número complexo $\lambda \in \mathbb{C}$ e $u, v : C_0^\infty(X;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ funções contínuas em $f \in C_0^\infty(X;\mathbb{C})$. Então, as funções $(u+v), (\lambda\, u), (u\,v) : C_0^\infty(X;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, definidas por*

$$(u+v)(g) = u(g)+v(g) \tag{1.32}$$

$$(\lambda\, u)(g) = \lambda\, u(g) \tag{1.33}$$

$$(u\,v)(g) = u(g)\,v(g) \tag{1.34}$$

para toda $g \in C_0^\infty(X;\mathbb{C})$, também são contínuas em $f \in C_0^\infty(X;\mathbb{C})$.

Demonstração. Sejam $\varepsilon > 0$ e $K \subset X$ (compacto) arbitrários. Seja

$$M = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2\,(1+|\lambda|+|u(f)|+|v(f)|)}\right\}$$

disto segue que $M > 0$, $M \leqslant 1$ e $M \leqslant \frac{\varepsilon}{2\,(1+|\lambda|+|u(f)|+|v(f)|)}$. E da última desigualdade obtemos $M \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, $|\lambda| M \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ e $(1+|u(f)|+|v(f)|)M \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Usaremos estas desigualdades abaixo. Como u e v são contínuas em $f \in C_0^\infty(X;\mathbb{C})$, existem $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ e $r_1, r_2 > 0$ tais que $g \in B_K(f,k_1,r_1) \Rightarrow |u(g)-u(f)| < M$ e $g \in B_K(f,k_2,r_2) \Rightarrow |v(g)-v(f)| < M$. Notemos que $g \in B_K(f,k_1,r_1) \Rightarrow |u(g)| = |u(g)-u(f)+u(f)| \leqslant |u(g)-u(f)|+|u(f)| < M+|u(f)| \leqslant 1+|u(f)|$. Ponhamos $r = \min\{r_1,r_2\} > 0$ e $k = \max\{k_1,k_2\} \in \mathbb{N}$. Assim, $g \in B_K(f,k,r) \Rightarrow supp\,(g-f) \subset K$ e $|g-f|_\alpha < r$ para todo α com $|\alpha| \leqslant k$. E em particular, temos $|g-f|_\alpha < r \leqslant r_1$ para todo α com $|\alpha| \leqslant k_1 \leqslant k$ e $|g-f|_\alpha < r \leqslant r_2$ para todo α com $|\alpha| \leqslant k_2 \leqslant k$. Ou seja, temos $g \in B_K(f,k_1,r_1)$

e $g \in B_K(f, k_2, r_2)$.
Assim, dada $g \in B_K(f, k, r)$ qualquer, temos

$$\begin{aligned}|(u+v)(g)-(u+v)(f)| &= |u(g)+v(g)-u(f)-v(f)| \leqslant \\ \leqslant |u(g)-u(f)|+|v(g)-v(f)| &< M+M \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

enquanto que para $\lambda\, u$ temos

$$\begin{aligned}|(\lambda\, u)(g)-(\lambda\, u)(f)| &= |\lambda\, u(g)-\lambda\, u(f)| = \\ = |\lambda|\,|u(g)-u(f)| &\leqslant |\lambda| M \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\end{aligned}$$

e por fim, para $u\,v$ temos

$$\begin{aligned}|(u\,v)(g)-(u\,v)(f)| &= |u(g)\,v(g)-u(f)\,v(f)| = \\ = |u(g)\,v(g)-u(g)\,v(f)+u(g)\,v(f)-u(f)\,v(f)| &\leqslant \\ \leqslant |u(g)\,v(g)-u(g)\,v(f)|+|u(g)\,v(f)-u(f)\,v(f)| &= \\ = |u(g)|\,|v(g)-v(f)|+|u(g)-u(f)|\,|v(f)| &\leqslant \\ \leqslant |u(g)|M+M\,|v(f)| < (1+|u(f)|)M+|v(f)|M &= \\ = (1+|u(f)|+|v(f)|)M \leqslant \frac{\varepsilon}{2} &< \varepsilon\end{aligned}$$

com isto mostramos que as funções $(u+v), (\lambda\, u), (u\,v) : C_0^\infty(X;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ são contínuas em $f \in C_0^\infty(X;\mathbb{C})$. □

Definição 1.14. *Dado um aberto $X \subset \mathbb{R}^n$, uma distribuição em X é uma função $u : C_0^\infty(X;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ linear e contínua. O conjunto de todas as distribuições em X é denotado por $\mathscr{D}'(X)$.*

Proposição 1.15. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Então, o conjunto $\mathscr{D}'(X)$ de todas as distribuições em X é um subespaço vetorial do espaço $\mathscr{F}(C_0^\infty(X;\mathbb{C});\mathbb{C})$ de todas as funções $u : C_0^\infty(X;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ com as operações usuais de soma de funções e produto de um escalar por uma função.*

Demonstração. Este resultado é uma consequência imediata da proposição (1.13) e do fato de que soma de funções lineares é linear e o produto de um escalar por uma função linear também é linear. □

Proposição 1.16. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $u : C_0^\infty(X;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ uma função linear. Então, $u : C_0^\infty(X;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ é contínua se, e somente se, é contínua em $0 \in C_0^\infty(X;\mathbb{C})$.*

Demonstração. Se u é contínua, então sua continuidade em $0 \in C_0^\infty(X;\mathbb{C})$ é uma consequência imediata da definição. Suponhamos agora que u seja contínua em $0 \in C_0^\infty(X;\mathbb{C})$. Seja $f \in$

$C_0^\infty(X;\mathbb{C})$ uma função de teste qualquer. Mostraremos que u é contínua em $f \in C_0^\infty(X;\mathbb{C})$. Sejam $\varepsilon > 0$ e $K \subset X$, um subconjunto compacto, arbitrários. Como, por hipótese, u é contínua em $0 \in C_0^\infty(X;\mathbb{C})$, exitem $k \in \mathbb{N}$ e $r > 0$ tais que $g \in B_K(0,k,r) \Rightarrow |u(g) - u(0)| < \varepsilon$, isto é, $u(B_K(f,k,r)) \subset B(u(f);\varepsilon)$. Seja $g \in B_K(f,k,r)$ qualquer, então temos $supp\,(g-f) \subset K$ e $|g-f|_\alpha < r$ para todo α com $|\alpha| \leqslant k$. Portanto, temos $h = (g-f) \in B_K(0,k,r)$. Assim, segue que $|u(g-f)-u(0)| < \varepsilon$, e como u é linear temos $|u(g)-u(f)| = |u(g-f)| = |u(g-f-0)| = |u(g-f)-u(0)| < \varepsilon$. Logo, u é contínua em $f \in C_0^\infty(X;\mathbb{C})$ e como f é arbitrária, concluímos que u é contínua. □

Proposição 1.17. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $u : C_0^\infty(X;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ uma função linear. A fim de que $u : C_0^\infty(X;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ seja uma distribuição é necessário e suficiente que para todo compacto $K \subset X$ existam $k \in \mathbb{N}$ e $C > 0$ tais que*

$$|u(f)| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant k} \sup_{x\in X} |(\partial^\alpha f)(x)| \tag{1.35}$$

para toda função de teste $f \in C_0^\infty(X;\mathbb{C})$ com suporte contido em K.

Demonstração. Suponhamos que $u : C_0^\infty(X;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ seja uma distribuição. Assim, u é contínua em $0 \in C_0^\infty(X;\mathbb{C})$. Fixemos $\varepsilon = 1$, isto é, fixamos o aberto $B(0,1) = \{z \in \mathbb{C};\, |z| < 1\}$, o qual é uma vizinhança de $u(0) = 0$. Seja $K \subset X$ um compacto qualquer, então existem $k \in \mathbb{N}$ e $r > 0$ tais que $g \in B_K(0,k,r) \Rightarrow |u(g)| = |u(g) - u(0)| < \varepsilon = 1$, em outras palavras $u(B_K(0,k,r)) \subset B(0,1)$. Tomemos um número real $C > 0$ tal que $C > \frac{1}{r}$.
Seja f uma função de teste com suporte contido em K. Suponhamos que f seja não nula, donde conclui-se que $\sup_{x\in X} |(\partial^0 f)(x)| = \sup_{x\in X} |f(x)| > 0$ e portanto

$$\sum_{|\alpha| \leqslant k} \sup_{x\in X} |(\partial^\alpha f)(x)| \geqslant \sup_{x\in X} |f(x)| > 0$$

Pondo $s = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \sup_{x\in X} |(\partial^\alpha f)(x)| > 0$, vemos que $\sup_{x\in X} |(\partial^\alpha f)(x)| \leqslant s$ para todo α com $|\alpha| \leqslant k$, e por conseguinte

$$\frac{1}{s} \sup_{x\in X} |(\partial^\alpha f)(x)| \leqslant 1$$

para todo α com $|\alpha| \leqslant k$. Assim $g = \frac{1}{sC} f$ é uma função de teste com suporte contido em K e satisfaz

$$\sup_{x\in X} |(\partial^\alpha g)(x)| = \frac{1}{C}\frac{1}{s} \sup_{x\in X} |(\partial^\alpha f)(x)| \leqslant \frac{1}{C} < r$$

para todo α com $|\alpha| \leqslant k$. Mas isto significa que $g \in B_K(0,k,r)$ e portanto temos $|u(g)| < 1$. Como $u : C_0^\infty(X;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ é linear, temos $|u(f)| = |u(sCg)| = |(sC)u(g)| = sC|u(g)| \leqslant Cs$, ou seja,

$$|u(f)| \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant k} \sup_{x\in X} |(\partial^\alpha f)(x)|$$

Se $f = 0$ a desigualdade acima é claramente satisfeita. Portanto, a condição da proposição é necessária.

Nossa tarefa agora será mostrar que a condição é suficiente, ou seja, que tal condição acarreta na continuidade de u. Para isso basta mostrar que u é contínua em $0 \in C_0^\infty(X;\mathbb{C})$. Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Dado um subconjunto compacto $K \subset X$ existem $k \in \mathbb{N}$ e $C > 0$ tais que

$$|u(f)| \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant k} \sup_{x\in X} |(\partial^\alpha f)(x)|$$

para toda função de teste $f \in C_0^\infty(X;\mathbb{C})$ com suporte contido em K. Tomemos um número real $r > 0$ tal que

$$r < \varepsilon \left(C \sum_{|\alpha|\leqslant k} 1 \right)^{-1}$$

Seja $f \in B_K(0,k,r)$ arbitrária, então $supp\, f \subset K$ e $\sup_{x\in X} |(\partial^\alpha f)(x)| \leqslant r$ para todo α com $|\alpha| \leqslant k$. Logo, temos

$$|u(f)| \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant k} \sup_{x\in X} |(\partial^\alpha f)(x)| \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant k} r =$$

$$= \left(C \sum_{|\alpha|\leqslant k} 1 \right) r < \left(C \sum_{|\alpha|\leqslant k} 1 \right) \varepsilon \left(C \sum_{|\alpha|\leqslant k} 1 \right)^{-1} = \varepsilon$$

ou seja, $|u(f) - u(0)| < \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ e $K \subset X$ (compacto) são arbitrários, conclui-se que $u : C_0^\infty(X;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ é contínua em $0 \in C_0^\infty(X;\mathbb{C})$ e portanto é contínua. □

Definição 1.18. *Seja u uma distribuição em um aberto $X \subset \mathbb{R}^n$. O suporte de u, denotado por $(supp\, u)$, é o subconjunto de X definido pela seguinte condição. Diz-se que $x \in X - (supp\, u)$ quando existe uma vizinhança V de x tal que*

$$u(f) = 0 \tag{1.36}$$

para toda função de teste $f \in C_0^\infty(X;\mathbb{C})$ cujo suporte esteja contido em V, ou seja, $supp\, f \subset V$.

Definição 1.19. *Seja u uma distribuição em um aberto $X \subset \mathbb{R}^n$. O suporte singular de u, denotado por $(sing\, supp\, u)$, é o conjunto satisfazendo a seguinte condição. Temos $a \in X - (sing\, supp\, u)$ se, e somente se, existe uma vizinhança aberta V de a e uma função $g : V \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ tal que*

$$u(f) = \int_V dx\, g(x) f(x) \tag{1.37}$$

para toda função de teste $f \in C_0^\infty(X;\mathbb{C})$ com suporte contido em V, isto é, $\operatorname{supp} f \subset V$. Neste caso diz-se que u "é uma função" em V.

Proposição 1.20. *Seja $u : C_0^\infty(X;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ uma distribuição em um aberto $X \subset \mathbb{R}^n$ e $h : X \to \mathbb{C}$ uma função de classe C^∞ em X. Então, a função $(hu) : C_0^\infty(X;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ definida por*

$$(hu)(f) = u(hf), \quad \forall f \in C_0^\infty(X;\mathbb{C}) \tag{1.38}$$

é uma distribuição em $X \subset \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Notemos inicialmente que hu está bem definida já que $hf \in C_0^\infty(X;\mathbb{C})$ quaisquer que sejam $f \in C_0^\infty(X;\mathbb{C})$ e $h \in C^\infty(X;\mathbb{C})$. Agora, dadas $f, g \in C_0^\infty(X;\mathbb{C})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos

$$(hu)(\lambda f + g) = u(h(\lambda f + g)) = u(\lambda hf + hg) =$$
$$u(\lambda hf) + u(hg) = \lambda u(hf) + u(hg) = \lambda [(hu)(f)] + (hu)(g)$$

ou seja, hu é linear. □

Seja $u : C_0^\infty(X;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ uma distribuição em um aberto $X \subset \mathbb{R}^n$, com suporte $\operatorname{supp} u$ compacto. O cone $\Sigma(u)$ é o subconjunto de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ caracterizado da seguinte forma. Temos $\eta \notin \Sigma(u)$ se, e somente se, existe uma vizinhança cônica V (o adjetivo cônica significa que $\lambda \xi \in V$ quaisquer que sejam $\xi \in V$ e $\lambda > 0$) de η para a qual vale o seguinte: para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $C_k > 0$ tal que

$$|\hat{u}(\xi)| \leqslant C_k(1 + \|\xi\|)^{-k} \tag{1.39}$$

para todo $\xi \in V$. Agora, dado um ponto $x \in X$, consideremos o seguinte subconjunto

$$\Sigma_x(u) = \bigcap_{f \in L_x} \Sigma(fu) \tag{1.40}$$

sendo a interseção tomada sobre todas as funções de teste $f \in L_x$, onde $L_x = \{f \in C_0^\infty(X;\mathbb{C})\,;\, f(x) \neq 0\}$.

Definição 1.21. *Seja $u : C_0^\infty(X;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ uma distribuição em X, com $X \subset \mathbb{R}^n$ aberto. O subconjunto $WF(u) \subset X \times (\mathbb{R}^n - \{0\})$, definido por*

$$WF(u) = \{(x, \xi) \in X \times (\mathbb{R}^n - \{0\})\,;\, \xi \in \Sigma_x(u)\} \tag{1.41}$$

é denominado wave front set de u.

2 Função de dois pontos

Podemos agora apresentar a função de dois pontos por meio do conceito de distribuição. Seja $\mathscr{H}$ um espaço de Hilbert, cujos vetores descrevem estados do sistema, e consideremos uma representação unitária do grupo de Poincaré, isto é, um homomorfismo

$$\begin{aligned} U : \mathscr{P} &\rightarrow \mathscr{U}(\mathscr{H}) \\ P(a,\Lambda) &\mapsto U(a,\Lambda) : \mathscr{H} \rightarrow \mathscr{H} \end{aligned} \tag{2.1}$$

do grupo de Poincaré $\mathscr{P}$ no grupo $\mathscr{U}(\mathscr{H})$ dos operadores lineares unitários $U : \mathscr{H} \rightarrow \mathscr{H}$. Supomos também a existência de um vetor $\Omega \in \mathscr{H}$, que descreve o estado de vácuo, tal que

$$U(a,\Lambda)\,\Omega = \Omega \tag{2.2}$$

para toda transformação de Poincaré $P(a,\Lambda)$.

Seja E o conjunto dos pontos do tipo espaço, isto é,

$$E = \{e \in \mathbb{R}^d\,;\, e \cdot e < 0\} \tag{2.3}$$

Uma string é um subconjunto $S_{x,e} = \{x + t\,e \in \mathbb{R}^d\,;\, t \geqslant 0\}$, onde $e \in E$. Consideremos o aberto $X = \mathbb{R}^d \times E$ e $C_0^\infty(X;\mathbb{C})$ o espaço vetorial das funções de teste $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ definidas no aberto $X = \mathbb{R}^d \times E$. Um campo quântico escalar com localização do tipo-string é uma distribuição

$$\varphi : C_0^\infty(X;\mathbb{C}) \rightarrow \mathscr{L}(\mathscr{D}) \tag{2.4}$$

onde $\mathscr{L}(\mathscr{D})$ é o conjunto dos operadores lineares $T : D_T \rightarrow \mathscr{H}$ cujo domínio $D_T \subset \mathscr{H}$ é um subespaço do espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ e contém um subespaço $\mathscr{D} \subset \mathscr{H}$ denso em $\mathscr{H}$, ou seja, $\mathscr{D} \subset D_T \subset \mathscr{H}$ para todo $T \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$. Ao dizer que $\varphi : C_0^\infty(X;\mathbb{C}) \rightarrow \mathscr{L}(\mathscr{D})$ é uma distribuição, queremos dizer que φ é linear, ou seja,

$$\varphi(\lambda\, f + g) = \lambda\, \varphi(f) + \varphi(g), \quad \forall f, g \in C_0^\infty(X;\mathbb{C}), \forall \lambda \in \mathbb{C} \tag{2.5}$$

e que φ é contínua no seguinte sentido, quaisquer que sejam $\Phi, \Psi \in \mathscr{D}$, a função $u_{\Phi,\Psi} : C_0^\infty(X;\mathbb{C}) \rightarrow$

$\mathbb{C}$ dada por

$$u_{\Phi,\Psi}(f) = (\Phi, \varphi(f)\Psi), \quad \forall f \in C_0^\infty(X;\mathbb{C}) \tag{2.6}$$

é contínua. Além disso, φ satisfaz às seguintes condições:

1) Localidade segundo strings

$$[\varphi(f), \varphi(g)] = 0 \tag{2.7}$$

ou seja, $\varphi(f)$ e $\varphi(g)$ comutam, quando

$$\mathscr{S}_f = \bigcup_{(x,e)\in supp\, f} S_{x,e} \quad \text{e} \quad \mathscr{S}_g = \bigcup_{(x',e')\in supp\, g} S_{x',e'} \tag{2.8}$$

são causalmente separados, isto é, $(y-y')^2 < 0$ quaisquer que sejam $y \in \mathscr{S}_f$ e $y' \in \mathscr{S}_g$.

2) Covariância

$$U(a,\Lambda)\,\varphi(f)\,U(a,\Lambda)^{-1} = \varphi(f_{(a,\Lambda)}) \tag{2.9}$$

para toda transformação de Poincaré $P(a,\Lambda)$ e toda $f \in C_0^\infty(X;\mathbb{C})$, sendo $f_{(a,\Lambda)}(x,e) = f(\Lambda^{-1}x - \Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1}e)$.

Dado um campo quântico $\varphi : C_0^\infty(X;\mathbb{C}) \to \mathscr{L}(\mathscr{D})$, a função de dois pontos correspondente é a distribuição $w : C_0^\infty(X;\mathbb{C}) \times C_0^\infty(X;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ dada por

$$w(f,g) = (\Omega, \varphi(f)\,\varphi(g)\,\Omega) \tag{2.10}$$

quaisquer que sejam $f,g \in C_0^\infty(X;\mathbb{C})$. No caso do modelo de campo escalar livre com localização do tipo-string para uma partícula massiva de spin zero obtido em [2], temos

$$w(f,g) = k \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} dp \int_{\mathbb{R}^{4d}} dx\, de\, dx'\, de' \frac{e^{-ip\cdot(x-x')}\, f(x,e)\, g(x',e')}{2\,\omega(p)(p\cdot e - i\varepsilon)(p\cdot e' + i\varepsilon)} \tag{2.11}$$

onde $k = (2\pi)^{-d+1}$, ou usando a notação tradicional

$$w(x,e,x',e') = (2\pi)^{-d+1} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} dp\, \frac{e^{-ip\cdot(x-x')}}{2\,\omega(p)(p\cdot e - i\varepsilon)(p\cdot e' + i\varepsilon)} \tag{2.12}$$

em que $\omega(p) = \sqrt{p^2+m^2}$ e $p = (p^0, p) = (\omega(p), p)$. A função de dois pontos (2.11) satisfaz a condição de localidade segundo strings, este fato é mostrado em [2]. Além disso, a função de dois pontos (2.11) é uma distribuição (veja[4]-Theorem IX.16), pois é o valor de contorno da função holomorfa $w(x-iy, e-i\eta, x'+iy', e'+i\eta')$ em $y, y', \eta, \eta' \in V_+$, onde $V_+ = \{x \in \mathbb{R}^d\,; x\cdot x > 0, x^0 > 0\}$. Agora vamos reescrever a expressão acima de uma forma que nos possibilitará determinar a estrutura de singularidades da função de dois pontos w com uma interpretação em termos de strings. Dado um número complexo $z = x + iy \in \mathbb{C}$, com $y > 0$, temos

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = -i \int_0^\infty ds\, e^{izs} \tag{2.13}$$

Assim, levando em conta que $\varepsilon > 0$, temos

$$\frac{1}{p\cdot e - i\varepsilon} = -\frac{1}{-p\cdot e + i\varepsilon} = i \int_0^\infty ds\, e^{i(-p\cdot e + i\varepsilon)s} \tag{2.14}$$

e

$$\frac{1}{p\cdot e' + i\varepsilon} = -i \int_0^\infty ds\, e^{i(p\cdot e' + i\varepsilon)s} \tag{2.15}$$

Portanto, podemos escrever

$$\frac{1}{(p\cdot e - i\varepsilon)(p\cdot e' + i\varepsilon)} = \int_0^\infty ds\, e^{i(-p\cdot e+i\varepsilon)s} \int_0^\infty ds'\, e^{i(p\cdot e'+i\varepsilon)s'} =$$

$$\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty ds\,ds'\, e^{i(-p\cdot e+i\varepsilon)s}\, e^{i(p\cdot e'+i\varepsilon)s'} = \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty ds\,ds'\, e^{i[(-p\cdot e+i\varepsilon)s+(p\cdot e'+i\varepsilon)s']}$$

e por conseguinte obtemos

$$\frac{e^{-ip\cdot(x-x')}}{\omega(p)(p\cdot e - i\varepsilon)(p\cdot e' + i\varepsilon)} = \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty ds\,ds'\, \frac{e^{-ip\cdot(x-x'+se-s'e')-\varepsilon(s+s')}}{\omega(p)}$$

Com isto, podemos escrever

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{d-1}} dp\, \frac{e^{-ip\cdot(x-x')}}{2\,\omega(p)(p\cdot e - i\varepsilon)(p\cdot e' + i\varepsilon)} &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} dp \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty ds\,ds'\, \frac{e^{-ip\cdot(x-x'+se-s'e')-\varepsilon(s+s')}}{2\,\omega(p)} \\ &= \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty ds\,ds' \int_{\mathbb{R}^{d-1}} dp\, \frac{e^{-ip\cdot(x-x'+se-s'e')-\varepsilon(s+s')}}{2\,\omega(p)}\end{aligned}$$

Em resumo, temos

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} dp\, \frac{e^{-ip\cdot(x-x')}}{2\,\omega(p)(p\cdot e - i\varepsilon)(p\cdot e' + i\varepsilon)} = \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty ds\,ds'\, w_0(x - x' + s\,e - s'e')\, e^{-\varepsilon(s+s')} \tag{2.16}$$

Portanto, a expressão (2.11) pode ser escrita como

$$w(x,e,x',e') = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty ds\,ds'\, w_0(x - x' + s\,e - s'e')\, e^{-\varepsilon(s+s')} \tag{2.17}$$

onde,

$$w_0(x) = (2\pi)^{-d+1} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} dp\, \frac{e^{-ip\cdot x}}{2\,\omega(p)} \tag{2.18}$$

é a função de dois pontos do campo escalar livre com localização do tipo-ponto para uma partícula massiva de spin zero.

2.1 Suporte Singular

Nosso interesse é considerar pontos (x,e,x',e') para os quais se tem $(e \pm e')^2 < 0$ ou $e' = \lambda\, e$, com $\lambda \in \mathbb{R}$. Isto nos permite considerar somente o caso $e^0 = 0 = e'^0$. No caso de $d = 2+1$ dimensões, no qual estamos interessados, usamos o resultado conhecido para (2.18), a saber,

$$w_0(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{e^{-m\sqrt{x^2-(x^0-i\varepsilon)^2}}}{4\pi\sqrt{x^2-(x^0-i\varepsilon)^2}} \tag{2.19}$$

ou ainda

$$w_0(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{e^{-m\sqrt{-x^2+2x^0\varepsilon\, i+\varepsilon^2}}}{4\pi\sqrt{-x^2+2x^0\varepsilon\, i+\varepsilon^2}} \tag{2.20}$$

o que significa que os pontos que estão no suporte singular da função de dois pontos w_0 são do tipo luz. Tendo isto em mente, a expressão (2.17) nos sugere que a possibilidade de um ponto (x,e,x',e') estar no suporte singular de w está relacionado com a possibilidade de ocorrer $(x-x'+se-s'e')^2 = 0$ para algum $(s,s') \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$, em que $\mathbb{R}_0^+ = [0,+\infty)$. No entanto, isto significa que algum ponto de $A = \{x+se-s'e'\,;\, s,s' \geqslant 0\}$ está no cone de luz de x', denotado por $\Gamma(x') = \{y \in \mathbb{R}^3\,;\,(x'-y)^2 = 0\}$. Vamos nos referir a este caso, ou seja, quando $A \cap \Gamma(x') \neq \varnothing$, como sendo um “problema UV”(ultra-violeta). O aspecto interessante é que o suporte singular de w está intimamente relacionado com a maneira que o cone de luz de x' é intersectado por A, o que, por sua vez, possui uma interpretação em termos das strings $S_{x,e}$ e $S_{x',e'}$. Por exemplo, uma análise detalhada mostra que o “problema UV”, isto é, $A \cap \Gamma(x') \neq \varnothing$, acarreta em singularidades nos seguintes casos, e somente neles: (i) quando o evento x estiver no cone de luz de x', ou equivalentemente, caso o ponto x' estiver no cone de luz de x; (ii) quando a string $S_{x,e}$ (respectivamente $S_{x',e'}$) toca o cone de luz de x' (respectivamente x) tangencialmente. A (Fig.2.1) ilustra uma situação em que $A \cap \Gamma(x') = \varnothing$. Entretanto o fato de termos $A \cap \Gamma(x') = \varnothing$ não assegura um comportamento suave de w, pois deve-se levar em conta também o comportamento de w_0 quando $s,s' \to +\infty$. Iremos nos referir a este caso, isto é, situação em que $s,s' \to +\infty$, como “problema IR”(infra-red)-(infra-vermelho). Novamente, uma análise detalhada nos mostra que o “problema IR” resulta em singularidade de w quando, e só quando, e e e' possuem a mesma direção e sentido, ou seja, no caso em que $e' = \lambda\, e$, com $\lambda > 0$.

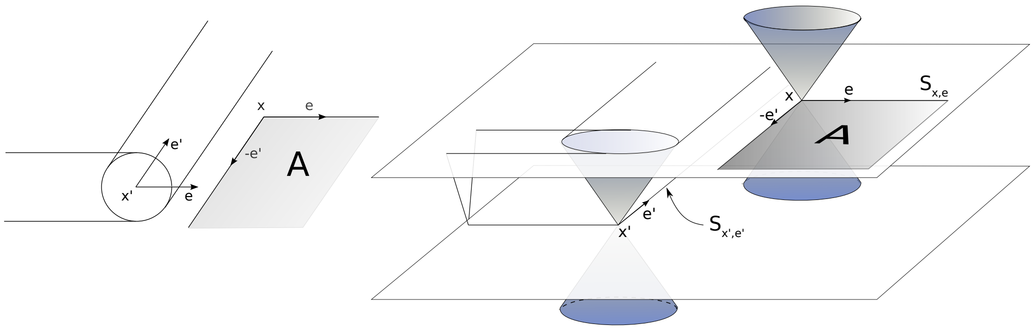

Figura 2.1: Cones-vista em corte, com $A = \{x + se - s'e'\,;\, s, s' \geqslant 0\}$.

Ao analisarmos em detalhe o que discutimos qualitativamente acima vemos que o suporte singular da função de dois pontos w, restrito aos pontos com $e^0 = e'^0 = 0$, é dado por

$$sing\,supp\,w = M \cup N \cup N' \cup N'' \cup O$$

onde

$$\begin{aligned}
M &= \{(x,e,x',e')\,;\, x \in \Gamma(x')\} \\
N &= \{(x,e,x',e')\,;\, e,e'\,L.I. \quad \text{e} \quad S_{x,e}\,\text{toca tan.}\,\Gamma(x')\,,\, x \notin \Gamma(x')\} \\
N' &= \{(x,e,x',e')\,;\, e,e'\,L.I. \quad \text{e} \quad S_{x',e'}\,\text{toca tan.}\,\Gamma(x)\,,\, x' \notin \Gamma(x)\} \\
N'' &= \{(x,e,x',e')\,;\, e' = \lambda\, e\,,\, \lambda \neq 0 \quad \text{e} \quad S_{x,e}\,\text{toca tan.}\,\Gamma(x')\,\text{ou} \\
&\qquad S_{x',e'}\,\text{toca tan.}\,\Gamma(x))\,,\, x \notin \Gamma(x')\} \\
O &= \{(x,e,x',e')\,;\, e' = \lambda\, e\,,\, \lambda > 0\} - (M \cup N \cup N' \cup N'')
\end{aligned}$$

em que "e,e' $L.I.$" significa que os vetores $e,e' \in \mathbb{R}^3$ são linearmente independentes, e "toca tan." quer dizer toca tangencialmente. Assim, a expressão "$S_{x,e}$ toca tan. $\Gamma(x')$" significa que a string $S_{x,e}$, com origem x e direção e, toca tangencialmente o cone de luz $\Gamma(x')$ do evento x'.

Para determinar o suporte singular de w no caso de $d = 2+1$ dimensões, vamos reescrever (2.17),

$$w(x,e,x',e') = \lim_{\varepsilon,\delta \to 0^+} \int_0^\infty \int_0^\infty ds\,ds'\, w_\delta(x - x' + s\,e - s'e')\, e^{-\varepsilon(s+s')} \tag{2.21}$$

em que

$$w_\delta(x) = \frac{e^{-m\sqrt{-x^2+2x^0\delta\, i+\delta^2}}}{4\pi\sqrt{-x^2+2x^0\delta\, i+\delta^2}} = \frac{e^{-m\sqrt{x^2-(x^0-i\,\delta)^2}}}{4\pi\sqrt{x^2-(x^0-i\,\delta)^2}} \tag{2.22}$$

Para $\lambda \in \mathbb{C}$, temos $z^\lambda = \exp[\lambda\, Log(z)] = \exp\{\lambda\,[\ln|z| + i Arg(z)]\} = \exp[\lambda\,\ln|z| + i\,\lambda\, Arg(z)] =$

$\exp[\lambda \ln|z|] \exp[i\lambda Arg(z)]$ para todo $z \in \mathbb{C} - \{z = a + ib \in \mathbb{C}; a \leqslant 0 \; e \; b = 0\}$. Assim, para $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} |z^\lambda| &= |z|^\lambda \\ z^\lambda &= |z|^\lambda \cos[\lambda Arg(z)] + i|z|^\lambda \sin[\lambda Arg(z)] \end{aligned} \tag{2.23}$$

Se $x^2 \leqslant 0$, então temos $Arg(-x^2 + 2x^0\delta i + \delta^2) \in (-\pi/2, \pi/2)$ e portanto $\frac{1}{2}Arg(-x^2 + 2x^0\delta i + \delta^2) \in (-\pi/4, \pi/4)$ para todo $\delta > 0$. Logo, temos

$$\cos\left[\frac{1}{2}Arg(-x^2 + 2x^0\delta i + \delta^2)\right] > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

para todo $\delta > 0$, desde que $x^2 \leqslant 0$. Disto segue que

$$\begin{aligned} \left| e^{-m\sqrt{-x^2+2x^0\delta i+\delta^2}} \right| &= e^{-m\left|-x^2+2x^0\delta i+\delta^2\right|^{\frac{1}{2}} \cos\left[\frac{1}{2}Arg(-x^2+2x^0\delta i+\delta^2)\right]} \leqslant \\ &\leqslant e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}m\left|-x^2+2x^0\delta i+\delta^2\right|^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \tag{2.24}$$

E levando em conta que $\left|-x^2 + 2x^0\delta i + \delta^2\right| \geqslant |-x^2 + \delta^2| = -x^2 + \delta^2 > -x^2$, com $x^2 \leqslant 0$, obtemos

$$\left| e^{-m\sqrt{-x^2+2x^0\delta i+\delta^2}} \right| \leqslant e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}m\sqrt{|x^2|}} \tag{2.25}$$

para todo $\delta > 0$, desde que $x^2 \leqslant 0$. Além disso, para $\lambda > 0$, temos

$$\begin{aligned} |(-x^2 + 2x^0\delta i + \delta^2)^\lambda| = |-x^2 + 2x^0\delta i + \delta^2|^\lambda > |x^2|^\lambda \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{|(-x^2 + 2x^0\delta i + \delta^2)^\lambda|} < \frac{1}{|x^2|^\lambda} \end{aligned} \tag{2.26}$$

para todo $\delta > 0$, desde que $x^2 < 0$. Portanto, para $\lambda, \delta > 0$, temos

$$\left| \frac{e^{-m\sqrt{-x^2+2x^0\varepsilon i+\varepsilon^2}}}{(-x^2 + 2x^0\delta i + \delta^2)^\lambda} \right| \leqslant \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}m\sqrt{|x^2|}}}{|x^2|^\lambda} \quad \text{se} \quad x^2 < 0 \tag{2.27}$$

Lema 2.1. *Dados $A, B, C \in \mathbb{R}$, consideremos a função $f : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, com $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$, definida por $f(s,t) = As^2 + 2Bst + Ct^2$ para todo $(s,t) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$. Então, existem $M, N > 0$ tais que $f(s,t) \geqslant 0$ para todo $(s,t) \in (\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ - [0,M] \times [0,N])$ se, e somente se, $A, C \geqslant 0$ e $B \geqslant -\sqrt{AC}$.*

Demonstração. Suponhamos que existam $M, N > 0$ tais que $f(s,t) \geqslant 0$ para todo $(s,t) \in (\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ - [0,M] \times [0,N])$. Afirmamos que $A, C \geqslant 0$. Com efeito, se fosse $A < 0$ (ou $C < 0$), então teríamos $f(2M, 0) = A(2M)^2 < 0$ ($f(0, 2N) = C(2N)^2 < 0$) com $(2M, 0) \in (\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ -$

$[0,M]\times[0,N]$) $((0,2N)\in(\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}_0^+-[0,M]\times[0,N]))$, contradizendo a hipótese. Portanto, devemos ter $A\geqslant 0$ e $C\geqslant 0$. Assim, temos dois casos, a saber, $A=0$ ou $A>0$. Se for $A=0$, então teremos $B\geqslant 0\Rightarrow B\geqslant -\sqrt{AC}$. De fato, se fosse $B<0$, então teríamos $f(2M-\frac{C}{2B},1)=2B(2M-\frac{C}{2B})+C=4BM-2B\frac{C}{2B}+C=4BM<0$, com $2M-\frac{C}{2B}\geqslant 2M>M$, o que contradiz a hipótese. Consideremos agora o caso $A>0$. Se $B\geqslant 0\Rightarrow B\geqslant -\sqrt{AC}$ e não temos mais nada a mostrar. Assim, suponhamos que $B<0$. Como $f(s,t)=As^2+2Bst+Ct^2=A\left[s^2+2\frac{B}{A}st\right]+Ct^2=A\left[\left(s+\frac{B}{A}t\right)^2-\frac{B^2}{A^2}t^2\right]+Ct^2=A\left(s+\frac{B}{A}t\right)^2-\frac{B^2}{A}t^2+Ct^2=A\left(s+\frac{B}{A}t\right)^2+\left(C-\frac{B^2}{A}\right)t^2$, afirmamos que $C-\frac{B^2}{A}\geqslant 0$. De fato, se fosse $C-\frac{B^2}{A}<0$, então teríamos $f(-\frac{B}{A}2N,2N)=\left(C-\frac{B^2}{A}\right)(2N)^2<0$ com $(-\frac{B}{A}2N,2N)\in(\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}_0^+-[0,M]\times[0,N])$, o que é um absurdo. Logo, temos $C-\frac{B^2}{A}\geqslant 0\Rightarrow AC\geqslant B^2\Rightarrow |B|\leqslant\sqrt{AC}\Rightarrow B\geqslant -\sqrt{AC}$.

Suponhamos agora que $A,C\geqslant 0$ e $B\geqslant -\sqrt{AC}$. Consideremos as duas possibilidades $A=0$ e $A>0$, separadamente. Se $A=0$, então teremos $B\geqslant -\sqrt{AC}=0$, e portanto $f(s,t)=As^2+2Bst+Ct^2\geqslant 0$ para todo $(s,t)\in\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}_0^+$. E em particular, vale $f(s,t)\geqslant 0$ para todo $(s,t)\in(\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}_0^+-[0,M]\times[0,N])$, quaisquer que sejam $M,N>0$. Seja agora $A>0$. Se tivermos $B\geqslant 0$, então segue que $f(s,t)\geqslant 0$ para todo $(s,t)\in\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}_0^+$. Já se for $B\leqslant 0$, procedemos como segue. Como vimos acima, temos $f(s,t)=A\left(s+\frac{B}{A}t\right)^2+\left(C-\frac{B^2}{A}\right)t^2$. Assim, como $B\geqslant -\sqrt{AC}$ e $B\leqslant 0$, temos $0\leqslant -B\leqslant\sqrt{AC}\Rightarrow B^2\leqslant AC\Rightarrow\frac{B^2}{A}\leqslant C\Rightarrow C-\frac{B^2}{A}\geqslant 0$. Logo, $f(s,t)=A\left(s+\frac{B}{A}t\right)^2+\left(C-\frac{B^2}{A}\right)t^2\geqslant 0$ para todo $(s,t)\in\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}_0^+$. E em particular, temos $f(s,t)\geqslant 0$ para todo $(s,t)\in(\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}_0^+-[0,M]\times[0,N])$, quaisquer que sejam $M,N>0$. □

Proposição 2.2. *Seja $f:\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}$ definida por $f(s,t)=As^2+2Bst+Ct^2$, onde $A,B,C\in\mathbb{R}$. Dados $a,c>0$, então, existem $M,N>0$ tais que $f(s,t)\geqslant as^2+ct^2$ para todo $(s,t)\in(\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}_0^+-[0,M]\times[0,N])$ se, e somente se, $A\geqslant a$, $C\geqslant c$ e $B\geqslant -\sqrt{(A-a)(C-c)}$.*

Demonstração. Seja $g:\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}$ definida por $g(s,t)=f(s,t)-as^2-ct^2=(A-a)s^2+2Bst+(C-c)t^2$. Dizer que existem $M,N>0$ tais que $f(s,t)\geqslant as^2+ct^2$ para todo $(s,t)\in(\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}_0^+-[0,M]\times[0,N])$ equivale a dizer que existem $M,N>0$ tais que $g(s,t)\geqslant 0$ para todo $(s,t)\in(\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}_0^+-[0,M]\times[0,N])$. E pelo lema (2.1), isto equivale a dizer que $A-a\geqslant 0$, $C-c\geqslant 0$ e $B\geqslant -\sqrt{(A-a)(C-c)}$. □

Corolário 2.3. *Seja $f:\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}$ definida por $f(s,t)=As^2+2Bst+Ct^2$, onde $A,B,C\in\mathbb{R}$. Então, existem $a,c,M,N>0$ tais que $f(s,t)\geqslant as^2+ct^2$ para todo $(s,t)\in(\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}_0^+-[0,M]\times[0,N])$ se, e somente se, $A,C>0$, e $B>-\sqrt{AC}$.*

Demonstração. Sejam $a,c,M,N>0$ tais que $f(s,t)\geqslant as^2+ct^2$ para todo $(s,t)\in(\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}_0^+-[0,M]\times[0,N])$. Então temos $A\geqslant a>0$, $C\geqslant c>0$ e $B\geqslant -\sqrt{(A-a)(C-c)}$. Assim, temos $0<\frac{a}{A},\frac{c}{C}\leqslant 1\Rightarrow 0\leqslant(1-\frac{a}{A}),(1-\frac{a}{A})<1$. Logo, $\sqrt{(A-a)(C-c)}=\sqrt{A(1-\frac{a}{A})C(1-\frac{c}{C})}=$

$\sqrt{AC}\sqrt{(1-\frac{a}{A})(1-\frac{c}{C})} < \sqrt{AC} \Rightarrow B \geqslant -\sqrt{(A-a)(C-c)} > -\sqrt{AC}$. Agora, suponhamos que $A, C > 0$, e $B > -\sqrt{AC}$. Caso $B < 0$, então $-\sqrt{AC} < B < 0 \Rightarrow 0 < -B < \sqrt{AC}$, e assim teremos $0 < \frac{-B}{\sqrt{AC}} < 1$. Já quando for $B \geqslant 0$ teremos $\frac{-B}{\sqrt{AC}} \leqslant 0$. Assim, pondo $R = \max\left\{0, \frac{-B}{\sqrt{AC}}\right\}$, vemos que $0 \leqslant R < 1$ e $R \geqslant \frac{-B}{\sqrt{AC}}$. Tendo isto em mente, escolhamos λ satisfazendo $R \leqslant \lambda < 1$, donde $0 < (1-\lambda) \leqslant 1$. Sejam $a = (1-\lambda)A$ e $c = (1-\lambda)C$, então temos $0 < a \leqslant A$ e $0 < c \leqslant C$. Além disso, como $A - a = \lambda A$ e $C - c = \lambda C$, segue que $\sqrt{(A-a)(C-c)} = \sqrt{\lambda^2 AC} = \lambda\sqrt{AC} \geqslant R\sqrt{AC} \geqslant -B$, ou seja, $B \geqslant -\sqrt{(A-a)(C-c)}$. Portanto, existem $M, N > 0$ tais que $f(s,t) \geqslant as^2 + ct^2$ para todo $(s,t) \in (\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ - [0,M] \times [0,N])$. □

Corolário 2.4. *Consideremos*

$$-(x - x' + s\,e - s'e')^2 = -y^2 - 2s\,e \cdot y + 2s'e' \cdot y - s^2\,e^2 + 2ss'e \cdot e' - (s')^2(e')^2$$

onde $y = x - x'$ *e* $e^2, (e')^2 < 0$. *Assim, existem* $a, c, M, N > 0$ *tais que*

$$-s^2\,e^2 + 2ss'e \cdot e' - (s')^2(e')^2 \geqslant a\,s^2 + c\,(s')^2$$

para todo $(s,s') \in (\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ - [0,M] \times [0,N])$ *se, e somente se,* $e \cdot e' > -\sqrt{e^2\,(e')^2}$. *Para* $e = (0,e)$, $e' = (0,e')$, *temos* $e \cdot e' = -e \cdot e'$, $e^2 = -e^2$ *e* $(e')^2 = -e'^2$. *E assim,* $-e \cdot e' = e \cdot e' > -\sqrt{e^2\,(e')^2} = -\sqrt{e^2}\sqrt{e'^2} = -\|e\|\|e'\| \Leftrightarrow e \cdot e' < \|e\|\|e'\|$, *ou seja, não existem números* $a, c, M, N > 0$ *com a propriedade acima quando, e só quando* $e' = \lambda\,e$ *e com* $\lambda > 0$.

Logo, para $e = (0,e)$ e $e' = (0,e')$ tais que $e \cdot e' < \|e\|\|e'\|$, existem $a, c, M, N > 0$ tais que

$$-s^2\,e^2 + 2ss'e \cdot e' - (s')^2(e')^2 \geqslant a\,s^2 + c\,(s')^2$$

para todo $(s,s') \in (\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ - [0,M] \times [0,N])$. Portanto, teremos

$$-(x - x' + s\,e - s'e')^2 \geqslant -y^2 - 2s\,e \cdot y + 2s'e' \cdot y + a\,s^2 + c\,(s')^2$$

desde que $s > M$ ou $s' > N$. Além disso, a partir da expressão acima, podemos obter $A, B, R > 0$ tais que

$$-(x - x' + s\,e - s'e')^2 \geqslant \begin{cases} A\,s^2 + B\,(s')^2 & \text{se} \quad s, s' \geqslant R \\ A\,s^2 & \text{se} \quad s \geqslant R \\ B\,(s')^2 & \text{se} \quad s' \geqslant R \end{cases} \tag{2.28}$$

Vemos, a partir das expressões (2.27),(2.28) e (2.17), que na região $(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+) - \{(s,s') \in (\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+)\,;\, s, s' < R\}$ o integrando possui uma majorante integrável, devido ao caimento exponencial. Assim, só temos que analisar a integral no compacto $[0,R] \times [0,R] \subset (\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+)$. Fica claro também que só temos que analisar integral em uma vizinhança $V \subset [0,R] \times [0,R] \subset (\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+)$ do conjunto dos pontos $(s,s') \in (\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+)$ com $(x - x' + s\,e - s'e')^2 = 0$, já que no conjunto $([0,R]\times[0,R]-V)\subset(\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}_0^+)$ o integrando possui uma majorante constante.

Vamos considerar o caso em que $e\cdot e'=0$, $e\cdot e=-e\cdot e=-1$, $e'\cdot e'=e'\cdot e'=-1$ e $y^0>0$. E com isto mostrar como se trata o caso UV. Para ser mais preciso, vamos considerar o caso ilustrado na figura abaixo.

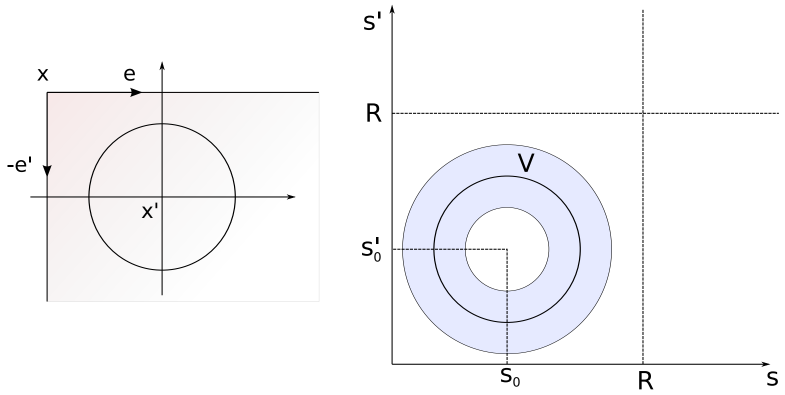

Figura 2.2: Caso UV.

Considerando a função $h:(0,\infty)\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$, dada por $h(r,\theta)=(s_0+r\cos\theta,s_0'+r\sin\theta)$, notemos que $h|_{(0,\infty)\times(0,2\pi)}:(0,\infty)\times(0,2\pi)\to h((0,\infty)\times(0,2\pi))$ é um difeomorfismo, temos

$$\int_{h([r_1,r_2]\times[0,2\pi])} ds\,ds'\,w_\delta(x-x'+s\,e-s'e')\,e^{-\varepsilon(s+s')}=$$

$$=\int_{[r_1,r_2]\times[0,2\pi]} dr\,d\theta\,r\,\frac{e^{-m\sqrt{r^2-(y^0-i\delta)^2}}}{4\pi\sqrt{r^2-(y^0-i\delta)^2}}e^{-\varepsilon(s_0+r\cos\theta+s_0'+r\sin\theta)}=$$

$$=\int_{[0,2\pi]} d\theta\int_{[r_1,r_2]} dr\,r\,\frac{e^{-m\sqrt{r^2-(y^0-i\delta)^2}}}{4\pi\sqrt{r^2-(y^0-i\delta)^2}}e^{-\varepsilon(s_0+r\cos\theta+s_0'+r\sin\theta)}$$

onde $y^0=x^0-x'^0$. Dado $z=a+ib\in\mathbb{C}$, temos $z^2=(a^2-b^2)+i(2ab)$ e assim $z^2-(y^0-i\delta)^2=(a^2-b^2-(y^0)^2+\delta^2)+i(2ab+2y^0\delta)$. Disto, segue que, quaisquer que sejam $\delta,\varepsilon>0$ e $\theta\in\mathbb{R}$, a função $Z_{\delta,\varepsilon,\theta}:D_{\delta,\varepsilon,\theta}\to\mathbb{C}$, onde $D_{\delta,\varepsilon,\theta}=\{z=a+ib\in\mathbb{C};\,a>0\text{ e }b>-\frac{y^0\delta}{a}\}$, definida por

$$Z_{\delta,\varepsilon,\theta}(z)=z\,\frac{e^{-m\sqrt{z^2-(y^0-i\delta)^2}}}{4\pi\sqrt{z^2-(y^0-i\delta)^2}}e^{-\varepsilon(s_0+z\cos\theta+s_0'+z\sin\theta)} \tag{2.29}$$

é holomorfa. Assim temos

$$\int_{[r_1,r_2]} dr\, r\, \frac{e^{-m\sqrt{r^2-(y^0-i\,\delta)^2}}}{4\pi\sqrt{r^2-(y^0-i\,\delta)^2}} e^{-\varepsilon(s_0+r\cos\theta+s_0'+r\sin\theta)} =$$

$$= -\int_{[0,\pi]} dt\, \gamma'(t)\, \gamma(t)\, \frac{e^{-m\sqrt{[\gamma(t)]^2-(y^0-i\,\delta)^2}}}{4\pi\sqrt{[\gamma(t)]^2-(y^0-i\,\delta)^2}} e^{-\varepsilon(s_0+\gamma(t)\cos\theta+s_0'+\gamma(t)\sin\theta)} \tag{2.30}$$

onde $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ é definido por $\gamma(t) = y^0 + r_0\, e^{it}$.

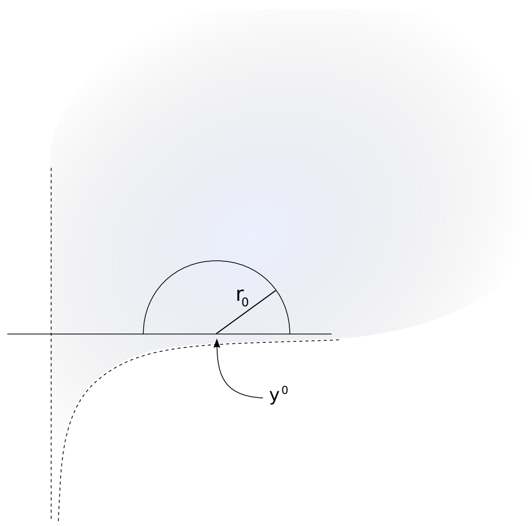

Figura 2.3: $D_{\delta,\varepsilon,\theta} = \{a + i\, b \in \mathbb{C}\, ; a > 0$ e $b > -\frac{y^0\delta}{a}\}$, $r_1 = y^0 - r_0$ e $r_2 = y^0 + r_0$.

Assim podemos escrever

$$\int_{h([r_1,r_2]\times[0,2\pi])} ds\, ds'\, w_\delta(x - x' + s\, e - s' e')\, e^{-\varepsilon(s+s')} =$$

$$= -\int_{[0,2\pi]} d\theta \int_{[0,\pi]} dt\, \gamma'(t)\, \gamma(t)\, \frac{e^{-m\sqrt{[\gamma(t)]^2-(y^0-i\,\delta)^2}}}{4\pi\sqrt{[\gamma(t)]^2-(y^0-i\,\delta)^2}} e^{-\varepsilon(s_0+\gamma(t)\cos\theta+s_0'+\gamma(t)\sin\theta)} =$$

$$= -\int_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} d\theta\, dt\, \gamma'(t)\, \gamma(t)\, \frac{e^{-m\sqrt{[\gamma(t)]^2-(y^0-i\,\delta)^2}}}{4\pi\sqrt{[\gamma(t)]^2-(y^0-i\,\delta)^2}} e^{-\varepsilon(s_0+\gamma(t)\cos\theta+s_0'+\gamma(t)\sin\theta)} \tag{2.31}$$

Agora vamos mostrar que o integrando em (2.31) possui uma majorante integrável, a saber, uma constante, independente de $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$, desde que sejam suficientemente pequenos. Como $\gamma(t) = y^0 + r_0\, e^{it}$, $\forall t \in [0,\pi]$, temos

$$\begin{aligned} [\gamma(t)]^2 - (y^0 - i\,\delta)^2 &= [\gamma(t) - y^0 + i\,\delta][\gamma(t) + y^0 - i\,\delta] = \\ &= [r_0\, e^{it} + i\,\delta][2y^0 + r_0\, e^{it} - i\,\delta] \end{aligned}$$

e assim

$$|\,[\gamma(t)]^2-(y^0-i\,\delta)^2|=|\,r_0\,e^{it}+i\,\delta\,|\,|2\,y^0+r_0\,e^{it}-i\,\delta\,|$$

Agora, levando em conta que $0<r_0<y^0$ e tomando $0<\delta<\frac{r_0}{2}$, obtemos

$$\begin{aligned} r_0=|\,r_0\,e^{it}+i\,\delta-i\,\delta\,|\leqslant|\,r_0\,e^{it}+i\,\delta|+|i\,\delta\,|<|\,r_0\,e^{it}+i\,\delta|+\tfrac{r_0}{2}\Rightarrow \\ \Rightarrow\tfrac{r_0}{2}<|\,r_0\,e^{it}+i\,\delta|\leqslant r_0+\delta<2\,r_0 \end{aligned} \tag{2.32}$$

e também

$$\begin{aligned} 2\,y^0=|2\,y^0+r_0\,e^{it}-i\,\delta-r_0\,e^{it}+i\,\delta\,|\leqslant \\ \leqslant|2\,y^0+r_0\,e^{it}-i\,\delta|+r_0+\delta<|2\,y^0+r_0\,e^{it}-i\,\delta|+y^0+\tfrac{r_0}{2} \\ <|2\,y^0+r_0\,e^{it}-i\,\delta|+y^0+\tfrac{y^0}{2}\Rightarrow \\ \Rightarrow\tfrac{y^0}{2}<|2\,y^0+r_0\,e^{it}-i\,\delta|\leqslant 2\,y^0+r_0+\delta<4\,y^0 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Logo, se $0<\delta<\frac{r_0}{2}$, temos

$$\frac{1}{4}\,y^0 r_0<|\,[\gamma(t)]^2-(y^0-i\,\delta)^2|<8\,y^0 r_0 \tag{2.34}$$

para todo $t\in[0,\pi]$. Agora, de $\gamma(t)=y^0+r_0\,e^{it}$ segue que $\gamma'(t)=i\,r_0\,e^{it}$, e portanto temos

$$|\gamma(t)|\leqslant y^0+r_0<2\,y^0\quad \text{e}\quad |\gamma'(t)|=r_0 \tag{2.35}$$

para todo $t\in[0,\pi]$. E por fim, tomando $0<\varepsilon<1$, obtemos

$$\begin{aligned} |-\varepsilon(s_0+\gamma(t)\cos\theta+s'_0+\gamma(t)\sin\theta)|\leqslant \\ \leqslant\varepsilon\left(s_0+|\gamma(t)|\,|\cos\theta|+s'_0+|\gamma(t)|\,|\sin\theta|\right)< \\ <\varepsilon\left(s_0+2\,y^0+s'_0+2\,y^0\right)<s_0+s'_0+4\,y^0 \end{aligned} \tag{2.36}$$

quaisquer que sejam $t\in[0,\pi]$ e $\theta\in[0,2\,\pi]$. A partir das desigualdades obtidas acima, e das propriedades das funções potência e exponencial, conclui-se que o integrando em (2.31) possui majorante constante, desde que $0<\delta<\frac{r_0}{2}$ e $0<\varepsilon<1$. Os outros casos se trata de forma análoga. Isto é, para a vizinhança $V\subset[0,R]\times[0,R]\subset(\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}_0^+)$ do conjunto dos pontos $(s,s')\in(\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}_0^+)$ com $(x-x'+s\,e-s'\,e')^2=0$, escolhemos coordenadas apropriadas e então encontramos uma majorante integrável, por exemplo uma constante. Observando que isto pode ser feito desde que o evento x não esteja no cone de luz de x' ou quando a string $S_{x,e}$ (respectivamente $S_{x',e'}$) não tocar o cone de luz de x' (respectivamente x) tangencialmente.

2.2 Wave Front Set

Uma vez obtido o suporte singular de w, o qual nos fornece os pontos singulares da função de dois pontos w, a próxima tarefa é determinar o *wave front set* de w, que, por sua vez, nos dá a informação a respeito das direções em que w possui comportamento singular. O fato importante é que a partir do suporte singular de w e das propriedades da função de dois pontos w relacionadas com invariância de Lorentz determina-se o *wave front set* de w. Comecemos com a transformada de Fourier de w,

$$\hat{w}(k,\xi,\xi') = \int dx\,de\,de'\,e^{i(k\cdot x+\xi\cdot e+\xi'\cdot e')}\,w(x,e,e') =$$
$$= \frac{(2\pi)^6}{m^2}\,\delta(k\cdot k-m^2)\theta(k_0)\,\delta\big(\xi-\frac{(k\cdot\xi)}{m^2}k\big)\theta(k\cdot\xi)\delta\big(\xi'-\frac{(k\cdot\xi')}{m^2}k\big)\theta(-k\cdot\xi')$$

O suporte de $\hat{w}$ é

$$\big\{(k,\xi,\xi')\,;\,k\cdot k=m^2, k_0>0,\ \xi=\lambda k,\ \xi'=-\lambda' k,\ \lambda,\lambda'\geq 0\big\}$$

Isso implica que *wave front set* de w, $WF(w)$, satisfaz

$$WF(w)\subset(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)\times\big\{(k,\xi,\xi')\in\overline{V_+}\times\overline{V_+}\times\overline{V_-}\,;\,\xi,\xi'\,\|\,k\big\}. \tag{2.37}$$

onde $\overline{V_+}=\{k\in\mathbb{R}^3\,;\,k^2\geqslant 0 \text{ e } k^0\geqslant 0\}$ e $\overline{V_-}=\{k\in\mathbb{R}^3\,;\,k^2\geqslant 0 \text{ e } k^0\leqslant 0\}$.

Seja $(x,e,e',k,\xi,\xi')\in WF(w)\cap(\mathbb{R}^3\times H_s^2\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)$, com $H_s^2=\{(e,e')\in\ E\times E\,;\,e^0=(e')^0=0\}$, então, fazemos a seguinte conjectura[1],

$$k=0,\ \xi+\frac{e\cdot e'}{e^2}\,\xi'=0,\ \xi\cdot e=0=\xi'\cdot e'\,, \qquad \text{se } (x,e,e')\in O, \tag{2.38}$$

já para M,N,N' e N'' temos $k^2=0, k_0>0,\ \xi=\lambda k,\ \xi'=-\lambda' k,\ \lambda,\lambda'\geq 0$ e

$$k||x, \qquad \xi=0=\xi', \qquad \text{se } (x,e,e')\in M, \tag{2.39}$$
$$k||P_e^{\perp}x, \quad \lambda=-\frac{e\cdot x}{e^2}, \quad \lambda'=0, \qquad \text{se } (x,e,e')\in N-N', \tag{2.40}$$
$$k||P_{e'}^{\perp}x, \quad \lambda=0, \quad \lambda'=\frac{e'\cdot x}{(e')^2}, \qquad \text{se } (x,e,e')\in N'-N, \tag{2.41}$$
$$\text{uma das duas possibilidades acima} \qquad \text{se } (x,e,e')\in N\cap N', \tag{2.42}$$
$$k||P_e^{\perp}x, \quad \lambda-\frac{e\cdot e'}{e^2}\lambda'+\frac{e\cdot x}{e^2}=0, \qquad \text{se } (x,e,e')\in N''. \tag{2.43}$$

[1]A demonstração desta conjectura vai ser apresentada no artigo a ser publicado em breve.

3 Conclusão e perspectivas futuras

Em contraste com o estudo usual feito na TQC, aqui buscamos analisar campos quânticos com localização do tipo-string. Mais especificamente, e ainda no contexto geral, estamos interessados na estrutura de singularidades das funções de dois pontos de campos livres com localização do tipo-string. E temos duas razões para isso. A primeira, é que modelos livres de tais campos já foram obtidos para vários tipos de partícula. Em segundo, a obtenção de modelos interagentes a partir dos campos livres correspondentes, através da abordagem perturbativa, exige a análise das singularidades das funções de dois pontos dos campos livres. Tendo em mente esse objetivo geral, consideramos, no caso de $d = 2+1$ dimensões, um modelo de campo escalar livre com localização do tipo-string para uma partícula massiva de spin zero, buscando analisar a estrutura de singularidades da função de dois pontos correspondente. Obtemos seu suporte singular, dando na medida do possível uma interpretação em termos de strings. Além disso, observamos que o *wave front set* da função de dois pontos é determinado essencialmente pelo suporte singular. Ressaltamos que tais resultados são parte de um artigo a ser publicado em breve.

Uma vez obtido o *wave front set* podemos saber quando é possível determinar *scaling degree*, que descreve o grau de singularidade da função de dois pontos. Assim, a futura tarefa consiste em determinar o *scaling degree*. Esta análise da função de dois pontos no caso de $d = 2+1$ dimensões nos serve como ponto de partida para tratar futuramente o caso de $d = 3+1$ dimensões. Além, é claro, de termos assim um resultado concreto a respeito de campos com localização do tipo-string.

APÊNDICE A – Topologia e Seminormas

Estabeleceremos aqui alguns resultados de natureza topológica. Para tanto, precisamos relembrar alguns conceitos. Seja X um conjunto qualquer, escrevemos $\mathscr{P}(X)$ para denotar o conjunto de todos os subconjuntos de X. Dados dois conjuntos X e L, uma família de elementos de X com índices em L é uma função $f : L \to X$. Escrevemos $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$, onde $x_\lambda = f(\lambda)\,, \forall\, \lambda \in L$, para denotar uma família de elementos de X com índices em L, ou simplesmente família de elementos de X. Dada uma família $f : L \to X$, ou $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$, uma subfamília desta família é uma restrição $g = f|_F : L \to X$ de f à um subconjunto $F \subset L$, ou seja, $g(\lambda) = f(\lambda)\,, \forall\, \lambda \in F$, e escrevemos $(x_\lambda)_{\lambda \in F}$ para denotar a subfamília $g = f|_F : L \to X$. Quando L é finito, dizemos que $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família finita. Caso $L = \mathbb{N}$, a família $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ é denominada sequência de elementos de X.

A.1 Espaço Topológico

Definição A.1. *Uma topologia sobre X é uma coleção $\tau \subset \mathscr{P}(X)$ de subconjuntos de X, os quais são denominados conjuntos abertos de X, que satisfaz às seguintes condições:*

1) *O conjunto X e o conjunto vazio $\varnothing$ são abertos, ou seja, $\varnothing, X \in \tau$.*

2) *Qualquer que seja a família $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de elementos (abertos) de τ, sua união também é um aberto, ou seja, $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \tau$.*

3) *Qualquer que seja a família $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ finita (L é finito) de elementos de τ, sua interseção também é um aberto, ou seja, $\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda \in \tau$.*

Como exemplos de topologia sobre um conjunto arbitrário X, temos a topologia caótica $\{\varnothing, X\}$, cujos únicos abertos são o conjunto vazio e o próprio X, e a topologia discreta $\mathscr{P}(X)$, na qual todos os subconjuntos de X são abertos.

Definição A.2. *Dado um conjunto X e uma topologia τ sobre este conjunto, dizemos que o par (X,τ) é um espaço topológico. E quando se diz que um conjunto X é um espaço topológico, fica subentendido que sobre X está definida uma topologia τ.*

Definição A.3. *Diz-se que um subconjunto $F \subset X$ de um espaço topológico X é fechado quando seu complementar $X - F = \{x \in X\,;\, x \notin F\}$ é aberto.*

Proposição A.4. *Dado um espaço topológico X, temos*

1) O conjunto X e o conjunto vazio $\varnothing$ são fechados.

2) Qualquer que seja a família $(F_\lambda)_{\lambda\in L}$ de subconjuntos fechados de X, sua interseção $\bigcap_{\lambda\in L} F_\lambda$ também é um subconjunto fechado de X.

3) Qualquer que seja a família $(F_\lambda)_{\lambda\in L}$ finita subconjuntos fechados de X, sua união $\bigcup_{\lambda\in L} F_\lambda$ também é subconjunto fechado de X.

Demonstração. (1) Como $X - \varnothing = X$ e $X - X = \varnothing$, segue-se que $\varnothing$ e X são fechados.
(2) Temos

$$X - \left(\bigcap_{\lambda\in L} F_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in L} (X - F_\lambda)$$

para uma família qualquer $(F_\lambda)_{\lambda\in L}$ de subconjuntos de X. Assim, se $(F_\lambda)_{\lambda\in L}$ for uma família arbitrária de subconjuntos fechados de X, então $X - (\bigcap_{\lambda\in L} F_\lambda)$ será a união de uma família arbitrária de abertos e portanto um aberto de X. Logo, a interseção $\bigcap_{\lambda\in L} F_\lambda$ também é um subconjunto fechado de X.
(3) Agora, temos

$$X - \left(\bigcup_{\lambda\in L} F_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in L} (X - F_\lambda)$$

para uma família qualquer $(F_\lambda)_{\lambda\in L}$ de subconjuntos de X. Logo, se $(F_\lambda)_{\lambda\in L}$ é uma família finita de subconjuntos fechados, conclui-se que $X - (\bigcup_{\lambda\in L} F_\lambda)$ é a interseção de uma família finita de abertos e portanto é um aberto de X. Isto significa que a união $\bigcup_{\lambda\in L} F_\lambda$ é um subconjunto fechado de X. $\square$

A.2 Subespaço topológico

Dado um espaço topológico X e um subconjunto $Y \subset X$, há um modo natural de construir um novo espaço topológico (Y, τ_Y), em que a topologia τ_Y sobre Y é dada por $\tau_Y = \{B \in$

$\mathscr{P}(Y)\,;\exists A\in\tau : B = Y\cap A\}$. Em outras palavras, os abertos de Y são interseções de abertos de X com Y, isto é, um subconjunto $B\subset Y$ é aberto relativamente ao espaço Y se, e somente se, existe um aberto $A\subset X$, relativamente ao espaço topológico X, tal que $B = Y\cap A$. Isto é o que mostra o resultado seguinte.

Proposição A.5. *Seja (X,τ) um espaço topológico. Dado um subconjunto $Y\subset X$ qualquer, então $\tau_Y = \{B\in\mathscr{P}(Y)\,;\exists A\in\tau : B = Y\cap A\}$ é uma topologia sobre Y.*

Demonstração. (1) Temos $\varnothing = Y\cap\varnothing$ e $Y = Y\cap X$, e portanto $\varnothing, Y\in\tau_Y$ pois $\varnothing, X\in\tau$.
(2) Tomemos uma família qualquer $(B_\lambda)_{\lambda\in L}$ de elementos de τ_Y. Obtemos, para cada $\lambda\in L$, um aberto $A_\lambda\in\tau$ tal que $B_\lambda = Y\cap A_\lambda$. Temos $\bigcup_{\lambda\in L}B_\lambda = \bigcup_{\lambda\in L}(Y\cap A_\lambda) = Y\cap(\bigcup_{\lambda\in L}A_\lambda)$, e como $\bigcup_{\lambda\in L}A_\lambda\in\tau$, concluímos que a união $\bigcup_{\lambda\in L}B_\lambda\in\tau_Y$.
(3) Consideremos agora uma família $(B_\lambda)_{\lambda\in L}$ finita qualquer de elementos de τ_Y. Existem abertos $A_\lambda\in\tau$ tais que $B_\lambda = Y\cap A_\lambda$. Assim, temos $\bigcap_{\lambda\in L}B_\lambda = \bigcap_{\lambda\in L}(Y\cap A_\lambda) = Y\cap(\bigcap_{\lambda\in L}A_\lambda)$, e como $\bigcap_{\lambda\in L}A_\lambda\in\tau$, segue que a interseção $\bigcup_{\lambda\in L}B_\lambda\in\tau_Y$. $\square$

Definição A.6. *Sejam (X,τ) um espaço topológico e $Y\subset X$. O espaço topológico (Y,τ_Y) é denominado subespaço topológico de X.*

A.3 Interior e fecho

Definição A.7. *Seja X um espaço topológico. Dado um subconjunto $Y\subset X$, diz-se que $x\in X$ é um ponto interior de Y se, e somente se, existe um aberto A tal que $x\in A\subset Y$.*

Proposição A.8. *Seja $Y\subset X$ um subconjunto de um espaço topológico X. Então, Y é aberto se, e somente se, todos os pontos de Y são interiores.*

Demonstração. Suponhamos inicialmente que $Y\subset X$ seja aberto. Assim, qualquer que seja $x\in Y$, temos $x\in Y\subset Y$. E como Y é aberto, vemos que todo $x\in Y$ é ponto interior de Y. Reciprocamente, suponhamos agora que todo $x\in Y$ seja ponto interior de Y. Logo, para cada $x\in Y$, existe um aberto $A_x\subset X$ tal que $x\in A_x\subset Y$. Disto, conclui-se que $Y\subset\bigcup_{x\in Y}A_x$ e $\bigcup_{x\in Y}A_x\subset Y$, donde $Y = \bigcup_{x\in Y}A_x$. Com isto, vemos que Y é a união de uma família arbitrária $(A_x)_{x\in Y}$ de abertos de X, e portanto é um aberto. $\square$

Definição A.9. *Dado um subconjunto $Y\subset X$ de um espaço topológico X, seu interior , denotado ou $\operatorname{int}Y$, é o subconjunto aberto tal que $\operatorname{int}Y\subset Y$ e se $A\subset X$ é um subconjunto aberto com $A\subset Y$, então $A\subset\operatorname{int}Y$.*

Definição A.10. *Dado um subconjunto $A \subset X$ de um espaço topológico X, seu fecho, denotado $cl_X A$, é o subconjunto fechado tal que $A \subset cl_X A$ e se $F \subset X$ é um subconjunto fechado com $A \subset F$, então $cl_X A \subset F$. Quando não houver ambiguidade quanto ao espaço topológico em relação ao qual o fecho é tomado, indica-se o fecho de A simplesmente por clA ou $\overline{A}$.*

Proposição A.11. *Seja X um espaço topológico. Então*

1) *$A \subset X$ é fechado se, e somente se, $A = \overline{A}$.*

2) *$\overline{A} \subset \overline{B}$, se $A \subset B$.*

3) *$cl\left(\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in L} \overline{A}_\lambda$, qualquer que seja a família finita $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ de subconjuntos de X.*

4) *$cl\left(\bigcap_{\lambda\in L} A_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda\in L} \overline{A}_\lambda$, qualquer que seja a família $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ de subconjuntos de X.*

Demonstração. (1) Suponhamos que A seja fechado. Temos $A \subset \overline{A}$, e como A é um subconjunto fechado tal que $A \subset A$, devemos ter $\overline{A} \subset A$. Logo $\overline{A} = A$. Por outro lado, se $\overline{A} = A$ então A é fechado pela definição de fecho.
(2) Se $A \subset B$, temos $A \subset B \subset \overline{B}$ e como $\overline{B}$ é um subconjunto fechado que contém A, conclui-se que $\overline{A} \subset \overline{B}$.
(3) Já que $A_\lambda \subset \overline{A}_\lambda$ para todo $\lambda \in L$, segue que $\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda \subset \bigcup_{\lambda\in L} \overline{A}_\lambda$. Assim, como a união finita de fechados é fechado, $\bigcup_{\lambda\in L} \overline{A}_\lambda$ é um subconjunto fechado contendo $\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$. Seja $F \subset X$ um subconjunto fechado tal que $\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda \subset F$. Como $A_\lambda \subset \bigcup_{\mu\in L} A_\mu$, $\forall \lambda \in L$, segue que $A_\lambda \subset F$, $\forall \lambda \in L$. Logo, temos $\overline{A}_\lambda \subset F$, $\forall \lambda \in L$, e portanto $\bigcup_{\lambda\in L} \overline{A}_\lambda \subset F$. Isto mostra que $\bigcup_{\lambda\in L} \overline{A}_\lambda$ é o fecho de $\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$.
(4) Uma vez que temos $A_\lambda \subset \overline{A}_\lambda$ para todo $\lambda \in L$, segue-se que $\bigcap_{\lambda\in L} A_\lambda \subset \bigcap_{\lambda\in L} \overline{A}_\lambda$. E como a interseção de uma família qualquer de fechados é fechado, então $cl\left(\bigcap_{\lambda\in L} A_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda\in L} \overline{A}_\lambda$. □

A.4 Limite

Seja X um espaço topológico. Dado um ponto $x \in X$, dizemos que um conjunto $V \subset X$ é uma vizinhança de $x \in X$ quando existe um aberto A tal que $x \in A \subset V$, ou seja, quando $x \in X$ é ponto interior de V.

Definição A.12. *Seja X um espaço topológico. Diz-se que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X converge para um ponto $x \in X$ se, e somente se, para toda vizinhança V de $x \in X$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in V$. O ponto $x \in X$ é chamado limite da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e escrevemos $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.*

Definição A.13. *Seja $Y \subset X$, em que X um espaço topológico. Dizemos que $a \in X$ um ponto de acumulação de $Y \subset X$ se, e somente se, toda vizinhança V de $a \in X$ possui um ponto de Y distinto de $a \in X$, ou seja, $(V - \{a\}) \cap Y \neq \varnothing$. O conjunto de todos os pontos de acumulação de Y é denominado derivado de Y, e indicado por Y'.*

Definição A.14. *Sejam X e Y espaços topológicos. Consideremos um subconjunto $A \subset X$, uma função $f : A \to Y$ e um ponto de acumulação a de A, isto é, $a \in A'$. Diz-se $y \in Y$ é limite da função $f : A \to Y$ quando x tende para $a \in X$, e escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = y$, se, e somente se, para toda vizinhança V de $y \in Y$ existe uma vizinhança U de $a \in A'$ tal que $x \in A \cap (U - \{a\}) \Rightarrow f(x) \in V$, ou seja, $f(A \cap (U - \{a\})) \subset V$.*

A.5 Espaço de Hausdorff

Definição A.15. *Um espaço topológico X é dito Hausdorff se, e somente se, quaisquer que sejam os pontos $x, y \in X$, com $x \neq y$, existem abertos $A, B \subset X$, tais que $x \in A$, $y \in B$ e $A \cap B = \varnothing$. Ou de forma equivalente, quaisquer dois pontos distintos $x, y \in X$ possuem vizinhanças disjuntas.*

Proposição A.16. *Seja X um espaço topológico de Hausdorff. Se uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X é convergente, então seu limite é único.*

Demonstração. Suponhamos que $x \in X$ e $y \in X$ sejam limites da sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, afirmamos que $x = y$. De fato, suponhamos que $x \neq y$, como X é um espaço topológico de Hausdorff, existem vizinhanças disjuntas V e U de $x \in X$ e $y \in X$, respectivamente. Como $x \in X$ e $y \in X$ são limites da sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_1 \Rightarrow x_n \in V$ e $n > n_2 \Rightarrow x_n \in U$. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, assim $n > n_0 \Rightarrow n > n_1$ e $n > n_2$, e portanto $n > n_0$ implica que $x_n \in V$ e $x_n \in U$. Ou seja, $x_n \in V \cap U$ para todo $n > n_0$. No entanto, isto é uma contradição pois $V \cap U = \varnothing$. Logo, devemos ter necessariamente $x = y$, o que mostra a unicidade do limite da sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. $\square$

Proposição A.17. *Sejam X, Y espaços topológicos e $f : A \to Y$ uma função definida em $A \subset X$. Se Y é um espaço topológico de Hausdorff e existe o limite da função $f : A \to Y$ quando x tende para $a \in A' \subset X$, então o limite é único.*

Demonstração. Sejam $y, z \in Y$ limites da função $f : A \to Y$ quando x tende para $a \in A' \subset X$. Mostraremos que $y = z$. Com efeito, suponhamos que $y \neq z$, assim, como Y é um espaço topológico de Hausdorff, existem vizinhanças disjuntas V e U de $y \in Y$ e $z \in Y$, respectivamente.

Já que $y = \lim_{x \to a} f(x)$ e $z = \lim_{x \to a} f(x)$, existem vizinhanças V_0, U_0 de $a \in A'$ tais que $x \in A \cap (V_0 - \{a\}) \Rightarrow f(x) \in V$ e $x \in A \cap (U_0 - \{a\}) \Rightarrow f(x) \in U$. Seja $W = V_0 \cap U_0$, assim W é uma vizinhança de $a \in A'$, e $x \in A \cap (W - \{a\})$ acarreta que $x \in A \cap (V_0 - \{a\})$ e $x \in A \cap (U_0 - \{a\})$. Portanto, para todo $x \in A \cap (W - \{a\})$ temos $f(x) \in V$ e $f(x) \in U$, ou seja, $f(x) \in V \cap U$, $\forall x \in A \cap (W - \{a\})$. Mas isso é um absurdo, pois $A \cap (W - \{a\}) \neq \varnothing$ e $V \cap U = \varnothing$. Logo, deve ser $y = z$, mostrando a unicidade do limite $\lim_{x \to a} f(x)$. □

A.6 Funções contínuas

Definição A.18. *Sejam X e Y espaços topológicos. Diz-se que uma função $f : X \to Y$ é contínua em um ponto $x \in X$ se, e somente se, para toda vizinhança V de $f(x) \in Y$ existe uma vizinhança U de $x \in X$ tal que $z \in U \Rightarrow f(z) \in V$, ou seja, $f(U) \subset V$. Quando f é contínua em todos os pontos de X, dizemos que a função $f : X \to Y$ é contínua.*

A.7 Espaços métricos

Definição A.19. *Dado um conjunto X, uma pseudométrica sobre X é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

1) $d(x,y) \geq 0\,, \forall x,y \in X$

2) $d(x,x) = 0\,, \forall x \in X$

3) $d(x,y) = d(y,x)\,, \forall x,y \in X$ (simetria)

4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)\,, \forall x,y,z \in X$ (desigualdade triangular)

Quando $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$, dizemos que $d : X \times X \to \mathbb{R}$ é uma métrica sobre X. Um conjunto X munido de uma métrica é denominado espaço métrico.

Notemos que se pode ter $d(x,y) = 0$ mesmo quando $x \neq y$. Dado um conjunto X com uma pseudométrica $d : X \times X \to \mathbb{R}$, sendo um espaço métrico um caso particular, há uma maneira natural de construir uma topologia sobre X a partir da pseudométrica $d : X \times X \to \mathbb{R}$, como veremos logo abaixo. Por este motivo, ela é denominada topologia induzida pela pela pseudométrica $d : X \times X \to \mathbb{R}$, e no caso de um espaço métrico, topologia induzida pela pela métrica d ou simplesmente topologia métrica.

Proposição A.20. *Seja um conjunto X com uma pseudométrica $d : X \times X \to \mathbb{R}$, definamos a* *bola aberta de centro $a \in X$ e raio $r > 0$ por $B(a,r) = \{x \in X\,;\, d(a,x) < r\}$. Então, a coleção*

$$\tau_d = \{A \subset X\,;\, \forall a \in A\,,\, \exists r > 0\,:\, B(a,r) \subset A\}$$

é uma topologia sobre X.

Demonstração. Vejamos que τ_d é de fato uma topologia. Temos $X \in \tau_d$, pois quaisquer que sejam $a \in X$ e $r > 0$ tem-se $B(a,r) \subset X$. Já se fosse $\varnothing \notin \tau_d$, existiria $a \in \varnothing$ para o qual não teríamos $B(a,r) \subset \varnothing$, qualquer que fosse $r > 0$. O que é um absurdo. Consideremos agora uma família qualquer $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de elementos de τ_d. Seja $a \in \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ arbitrário, então $a \in A_\mu$ para algum $\mu \in L$. Logo, existe $r > 0$ tal que $B(a,r) \subset A_\mu$, pois $A_\mu \in \tau_d$. Disto, concluímos que $B(a,r) \subset A_\mu \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Portanto, temos $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \tau_d$. Por fim, tomemos uma família $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ finita de elementos de τ_d. Seja $a \in \bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda$ arbitrário, então $a \in A_\lambda\,,\, \forall \lambda \in L$. Logo, como cada A_λ pertence a τ_d, existem $r_\lambda > 0$ tais que $B(a,r_\lambda) \subset A_\lambda\,,\, \forall \lambda \in L$. Seja $r = \min\{r_\lambda\,;\, \lambda \in L\} > 0$, o qual existe pois L é finito. Assim, se $x \in B(a,r) \Rightarrow d(a,x) < r \leq r_\lambda\,,\, \forall \lambda \in L$, donde $B(a,r) \subset B(a,r_\lambda)\,,\, \forall \lambda \in L$. Portanto, temos $B(a,r) \subset \bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda$, e vemos que $\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda \in \tau_d$. Logo, τ_d é uma topologia sobre X. $\square$

Observemos que o fato de $d : X \times X \to \mathbb{R}$ ser uma pseudométrica não tem influência alguma sobre o fato de $\tau_d = \{A \subset X\,;\, \forall a \in A\,,\, \exists r > 0\,:\, B(a,r) \subset A\}$ resultar ser uma topologia sobre X.

Proposição A.21. *Seja X um conjunto qualquer e D uma coleção de funções $d : X \times X \to \mathbb{R}$. Dados $a \in X$, $r > 0$ e $F \subset D$ arbitrariamente, ponhamos $B_F(a,r) = \{x \in X\,;\, d(a,x) < r\,,\, \forall d \in F\}$. Então,*

$$\tau_D = \{A \subset X\,;\, \forall a \in A\,,\, \textit{existem}\, r > 0 \textit{ e } F \subset D \textit{ (finito)}\,:\, B_F(a,r) \subset A\}$$

é uma topologia sobre X.

Demonstração. (1) Temos $X \in \tau_D$, pois quaisquer que sejam $a \in X$, $r > 0$ e $F \subset D$, tem-se $B_F(a,r) \subset X$. Suponhamos que $\varnothing \notin \tau_D$, então existe $a \in \varnothing$ para o qual não vale $B_F(a,r) \subset \varnothing$, quaisquer que sejam $r > 0$ e $F \subset D$ finito. Mas isto é um absurdo e portanto $\varnothing \in \tau_D$.
(2) Consideremos agora uma família qualquer $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de elementos de τ_D. Seja $a \in \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ arbitrário, então $a \in A_\mu$ para algum $\mu \in L$. Logo, como $A_\mu \in \tau_D$, existem $r > 0$ e $F \subset D$, finito, tais que $B_F(a,r) \subset A_\mu$. Disto, concluímos que $B_F(a,r) \subset A_\mu \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Portanto, temos $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \tau_D$.
(3) Por fim, tomemos uma família $(A_i)_{i \in L}$ finita de elementos de τ_D. Seja $a \in \bigcap_{i \in L} A_i$ arbitrário,

então $a \in A_i\,, \forall i \in L$. Logo, como $A_i \in \tau_D\,, \forall i \in L$, para cada $i \in L$, existem $r_i > 0$ e $F_i \subset D$, em que F_i é finito, tais que $B_{F_i}(a, r_i) \subset A_i$. Ponhamos $r = \min\{r_i\,;\, i \in L\} > 0$, o qual existe pois L é finito, e $F = \bigcup_{i \in L} F_i$. Já que L é finito e todos os subconjuntos F_i são finitos, segue que F é finito, além de ser não vazio. Seja $x \in B_F(a, r)$ arbitrário, temos então $d(a, x) < r\,, \forall d \in F$. Assim, dado $i \in L$, temos $d(a, x) < r\,, \forall d \in F_i$, pois $F_i \subset F = \bigcup_{j \in L} F_j$. Ou ainda, $d(a, x) < r \le r_i\,, \forall d \in F_i$, o que significa o seguinte $x \in B_{F_i}(a, r_i)$. Como $i \in L$ e $x \in B_F(a, r)$ são arbitrários, concluímos que $B_F(a, r) \subset B_{F_i}(a, r_i)$ para todo $i \in L$. Logo, temos $B_F(a, r) \subset \bigcap_{i \in L} B_{F_i}(a, r_i) \subset \bigcap_{i \in L} A_i$, e vemos que $\bigcap_{i \in L} A_i \in \tau_D$. □

A.8 Seminorma e espaços normados

Definição A.22. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Uma seminorma sobre V é uma função $s : V \to \mathbb{R}$ tal que*

1) $s(x) \ge 0\,, \forall x \in V$

2) $s(\alpha x) = |\alpha|\, s(x)\,, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in V$

3) $s(x + y) \le s(x) + s(y)\,, \forall x, y \in V$ (desigualdade triangular)

O par (V, s) é chamado espaço vetorial seminormado. Observemos que pode ocorrer $s(x) = 0$ com $x \ne 0$. No caso em que $s(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, diz-se que $s : V \to \mathbb{R}$ é uma norma sobre V, e neste caso diz-se que (V, s) é um espaço vetorial normado.

De (2) decorre que $s(0) = s(0 \cdot x) = |0|\, s(x) = 0$ e $s(-x) = |-1|\, s(x) = s(x)\,, \forall x \in V$. Dado um espaço vetorial V e uma seminorma $s : V \to \mathbb{R}$, então a função $d : V \times V \to \mathbb{R}$, definida por $d(x, y) = s(x - y)\,, \forall x, y \in V$, é uma pseudométrica sobre V. Além disso, se $s : V \to \mathbb{R}$ é uma norma então $d : V \times V \to \mathbb{R}$ é uma métrica sobre V. Com efeito, temos $d(x, y) = s(x - y) \ge 0\,, \forall x, y \in V$. Como $s(0) = 0$ e $s(-x) = s(x)\,, \forall x \in V$, temos $d(x, x) = s(x - x) = s(0) = 0\,, \forall x \in V$ e $d(x, y) = s(x - y) = s(y - x) = d(y, x)\,, \forall x, y \in V$. Agora, $d(x, y) = s(x - y) = s(x - z + z - y) \le s(x - z) + s(z - y) = d(x, z) + d(z, y)\,, \forall x, y, z \in V$, isto é, vale a desigualdade triangular. Com isto mostramos que d é uma pseudométrica. Consideremos agora o caso em que $s : V \to \mathbb{R}$ é uma norma, assim se $x, y \in V$ e $d(x, y) = 0 \Rightarrow d(x, y) = s(x - y) = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$. Ou seja, $d : V \times V \to \mathbb{R}$ é uma métrica.

A.9 Compactos

Uma cobertura de um conjunto X é uma família de conjuntos $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ tal que $X \subset \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$. Dada uma cobertura $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ de um conjunto X, uma subcobertura desta cobertura é uma subfamília de $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ que também é uma cobertura de X. Sejam X um espaço topológico e $A \subset X$, uma cobertura aberta $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ de A é uma cobertura de A por subconjuntos abertos de X, ou seja, todos os elementos da família $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ são subconjuntos abertos de X e $A \subset \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$.

Definição A.23. *Seja X um espaço topológico. Diz-se que um subconjunto $A \subset X$ é compacto se, e somente se, toda cobertura aberta $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ de A possui uma subcobertura finita, ou seja, existe um subconjunto $F \subset L$ finito tal que $A \subset \bigcup_{\lambda\in F} A_\lambda$.*

Proposição A.24. *Seja $K \subset X$ um subconjunto compacto de um espaço topológico X. Se $F \subset K$ é fechado, então F é compacto.*

Demonstração. Notemos que $X - F$ é um aberto de X, pois $F \subset K$ é fechado. Consideremos uma cobertura $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ qualquer de F por abertos de X. Dado $x \in X$ arbitrariamente, temos $x \in F$ ou $x \notin F$, ou seja, $x \in F \subset \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$ ou $x \in (X - F)$. Isto significa que $X \subset (\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda) \cup (X - F)$, e como $K \subset X$, temos em particular $K \subset (\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda) \cup (X - F)$. Vemos assim que os subconjuntos abertos A_λ e $(X - F)$ cobrem o subconjunto compacto K. Em outras palavras, a família $f : L \cup \{\lambda_0\} \to \mathscr{P}(X)$, dada por $f(\lambda) = A_\lambda$, $\forall \lambda \in L$ e $f(\lambda_0) = (X - F) = A_{\lambda_0}$, em que $\lambda_0 \notin L$ [1], é uma cobertura de K. Logo, existe $J \subset L \cup \{\lambda_0\}$ finito tal que $K \subset \bigcup_{\lambda\in J} A_\lambda$, e portanto temos $K \subset \bigcup_{\lambda\in J} A_\lambda \subset (\bigcup_{\lambda\in J_0} A_\lambda) \cup (X - F)$, onde $J_0 = J$ se $\lambda_0 \notin J$ e $J_0 = J - \{\lambda_0\}$ se $\lambda_0 \in J$. Notemos que $J_0 \subset L$ e $J_0 \subset J$ é finito, qualquer que seja o caso. Como $F \subset K$, segue que $F \subset (\bigcup_{\lambda\in J_0} A_\lambda) \cup (X - F)$, donde obtemos $F \subset \bigcup_{\lambda\in J_0} A_\lambda$. Ou seja, $(A_\lambda)_{\lambda\in J_0}$ é uma subcobertura finita da cobertura aberta $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ de F. Portanto, $F \subset K$ é compacto. $\square$

Proposição A.25. *Seja X um espaço topológico de Hausdorff. Se $K \subset X$ é compacto, então K é fechado.*

Demonstração. Se $K = X$, então o resultado é imediato. Consideremos então $K \neq X$, neste caso $(X - K) \neq \varnothing$. Seja $y \in (X - K)$ arbitrário, portanto, para todo $x \in K$, temos $x \neq y$, pois $y \notin K$. E já que X é um espaço topológico de Hausdorff, para todo $x \in K$ existem abertos A_x, B_x tais que $y \in B_x$, $x \in A_x$ e $A_x \cap B_x = \varnothing$. Disto, temos que $K \subset \bigcup_{x\in K} A_x$, ou seja, $(A_x)_{x\in K}$ é uma cobertura

[1] Notemos que isto sempre é possível, para ser mais preciso, dado qualquer conjunto L, existe um objeto que não está em L. Para observar este fato, consideremos $E = \{x \in L; x \notin x\}$. Temos $E \subset L$, mas não vale $E \in L$. De fato, suponhamos que se tenha $E \in L$ e analisemos as consequências desta hipótese. Temos duas possibilidades mutualmente excludentes, a saber, $E \in E$ ou $E \notin E$. Se $E \notin E$ então temos $E \in E$, e se $E \in E$ então temos $E \notin E$. Assim, em qualquer caso, chegamos a uma contradição.

aberta de K. Como $K \subset X$ é compacto, existe um subconjunto finito $F \subset K$ tal que $K \subset \bigcup_{x \in F} A_x$. Além disso, como K é finito, segue que $\bigcap_{x \in F} B_x$ é aberto, e $y \in \bigcap_{x \in F} B_x$. Notemos também que $\bigcap_{x \in F} B_x \subset (X - K)$. De fato, se assim não fosse, existiria $z \in \bigcap_{x \in F} B_x$ tal que $z \notin (X - K)$, e portanto $z \in K \subset \bigcup_{x \in F} A_x$. Logo $z \in A_x$ para algum $x \in F$, e como $z \in \bigcap_{x \in F} B_x$, teríamos então $z \in A_x \cap B_x$ para algum $x \in F$. Mas isto é uma contradição, pois $A_x \cap B_x = \varnothing$, $\forall x \in K$. Logo, temos $\bigcap_{x \in F} B_x \subset (X - K)$. Portanto, temos $y \in \bigcap_{x \in F} B_x \subset (X - K)$ com $\bigcap_{x \in F} B_x$ aberto, ou seja, $y \in (X - K)$ é ponto interior de $X - K$. E uma vez que $y \in (X - K)$ arbitrário, concluímos que todos os pontos de $X - K$ são interiores e portanto $X - K$ é aberto. Logo, $K \subset X$ é fechado. $\square$

Proposição A.26. *Dado um subconjunto $K \subset Y \subset X$ de um espaço topológico X, então K é compacto em relação ao espaço topológico X se, e somente se, é compacto com respeito ao subespaço topológico Y.*

Demonstração. Suponhamos que K seja compacto em relação ao espaço topológico X. Seja $(B_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma cobertura de K por abertos de Y, isto é, $B_\lambda \in \tau_Y$, $\forall \lambda \in L$. Assim, para cada $\lambda \in L$, existe um aberto $A_\lambda \in \tau$ tal que $B_\lambda = Y \cap A_\lambda$. Logo,

$$K \subset \bigcup_{\lambda \in L} B_\lambda = \bigcup_{\lambda \in L} (Y \cap A_\lambda) \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$$

ou seja, $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma cobertura de K por abertos de X, e da compacidade de K relativamente ao espaço topológico X, segue-se que existe um subconjunto finito $F \subset L$ tal que $K \subset \bigcup_{\lambda \in F \subset L} A_\lambda$. Mas, como $K \subset Y$, temos

$$K \subset \bigcup_{\lambda \in F \subset L} (Y \cap A_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in F \subset L} B_\lambda$$

ou seja, $(B_\lambda)_{\lambda \in F \subset L}$ é uma cobertura finita de K por abertos de Y. Portanto, K é compacto em relação ao subespaço topológico Y.

Agora, suponhamos que $K \subset Y \subset X$ seja compacto em relação ao subespaço topológico Y. Seja $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma cobertura de K por abertos de X, isto é, $A_\lambda \in \tau$, $\forall \lambda \in L$. Assim, para cada $\lambda \in L$, temos $B_\lambda = Y \cap A_\lambda \in \tau_Y$. Além disso, como $K \subset Y$ e $K \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, temos

$$K \subset \bigcup_{\lambda \in L} (Y \cap A_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in L} B_\lambda$$

mostrando que $(B_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma cobertura de K por abertos de Y. Portanto, pela compacidade de K relativamente ao subespaço topológico Y, existe $F \subset L$ finito tal que $K \subset \bigcup_{\lambda \in F} (Y \cap A_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in F} B_\lambda$ e assim,

$$K \subset \bigcup_{\lambda \in F} (Y \cap A_\lambda) \subset \bigcup_{\lambda \in F} A_\lambda$$

em outras palavras, $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ possui uma subcobertura finita, a saber, $(A_\lambda)_{\lambda \in F}$. Com isto mostramos que K é compacto em relação ao espaço topológico X. $\square$

Bibliografia

[1] J. Mund, B. Schroer, and J. Yngvason, String-localized quantum fields from Wigner representations, Phys. Lett. B 596 (2004), 156-162.

[2] J. Mund, B. Schroer, and J. Yngvason, String-localized quantum fields and modular localization, Commun. Math. Phys. 268 (2006), 621-672.

[3] M. Reed and B. Simon, Methods of Math. Physics I, Academic Press, New York,1975.

[4] M. Reed and B. Simon, Methods of Math. Physics II, Academic Press, New York,1980.

[5] Hörmander, Lars - The Analysis of Linear Partial Differential Operators I, Distribution Theory and Fourier Analysis, Springer-Verlag, Lund, 1990.

[6] Lima, Elon Lages - Curso de Análise Volume 1, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2004.

[7] Lima, Elon Lages - Curso de Análise Volume 2, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2008.

[8] Soares, Márcio G. - Cálculo em uma variável complexa, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2006.

[9] Lins Neto, Alcides - Funções de uma variável complexa, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.