Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas – Departamento de Física

Transformação Foldy-Wouthuytsen exata para campo de Dirac interagindo com uma onda gravitacional

Dissertação de Mestrado

Bruno Gonçalves

Orientador: Prof. Dr. Ilya L. Shapiro

Juiz de Fora-MG
Janeiro de 2007

Dedico este trabalho à memória de meu pai.

Agradecimentos

- À minha mãe e ao meu irmão por todo apoio e carinho;
- À Michelle, por estar a meu lado em todos os momentos;
- Ao professor Ilya L. Shapiro, pela oportunidade de trabalho, pela orientação e pelos ensinamentos durantes esses anos;
- Ao professor Yuri N. Obukhov, pela ajuda no desenvolvimeto deste trabalho;
- Aos professores do Departamento de Física da Universidade Federal de Juiz de Fora, por todo conhecimento transmitido e pela convivência sempre muito boa;
- Aos grandes amigos que fiz durante a graduação e o mestrado;
- À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

No início desta tese apresentamos uma breve revisão dos elementos básicos da Relatividade Geral, inclusive a informação necessária sobre ondas gravitacionais fracas. Serão introduzidas as formulações dos campos de Klein-Gordon e Dirac num campo gravitacional externo. Na parte original da tese, uma partícula de Dirac será considerada numa região onde há ondas gravitacionais e também um campo magnético. Para extrair informações físicas da hamiltoniana, é necessário fazer uma transformação Foldy-Wouthuysen nela. A transformação Foldy-Wouthuysen padrão não é exata, ela representa uma expansão em séries de potências em campos externos. Nesta tese será desenvolvida uma maneira de se fazer a transformação Foldy-Wouthuysen exata com os campos acima mencionados. Além disso, o formalismo desenvolvido permite tratar várias versões da transformação Foldy-Wouthuysen exata, estudados anteriormente, como casos particulares. Estas contas servem como uma forte verificação do resultado geral para a transformação Foldy-Wouthuysen exata. O limite não relativístico mostra uma correspondência perfeita com o resultado da trasformação Foldy-Wouthuysen exata e, também, entre o resultado sem as ondas gravitacionais e a equação de Pauli, inclusive para caso (especialmente calculado) de ondas gravitacionais. Finalmente, usando a hamiltoniana elaborada pelo método Foldy-Wouthuysen, construímos as equações de movimento não relativístico para uma partícula com spin 1/2.

Abstract

At the beginning of this thesis, we present a brief review of the basic elements of General Relativity, including necessary information about weak gravitational waves. The Klein-Gordon and Dirac fields will be formulated in an external gravitational field. In the original part of the work, we consider a particle described by Dirac equation in presence of a constant magnetic field, in a region where there are also gravitational waves. In order to extract some physical information from the Hamiltonian, it is necessary to make a Foldy-Wouthuysen transformation on it. The standard Foldy-Wouthuysen transformation is not exact, it represents an expansion in power series in external fields. In the present thesis, we introduce a method for performing an exact transformation Foldy-Wouthuysen for the given case. The formalism is general in a sense it enables one to treat many versions of exact Foldy-Wouthuysen transformation, studied before, as particular cases. The corresponding calculations may be used as a strong verification of the general result of exact Foldy-Wouthuysen transformation. The non relativistic limit shows perfect correspondence between the result of the exact Foldy-Wouthuysen transformation and Pauli equation, including the (specially derived) case with gravitational waves. Finally, using the Hamiltonian derived within the Foldy-Wouthuysen method, we write the non relativistic equations of motion for a particle with spin 1/2.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A Relatividade Geral é uma teoria de gravitação que apresenta bastante sucesso em aplicações aos fenômenos gravitacionais e à área de cosmologia. Suas predições se ajustam bem à maioria dos testes e ela é extremamente condizente com quase todos os dados existentes (veja, por exemplo, [4, 5]). Os limites de validade da Relatividade Geral são notórios apenas quando se consideram alguns efeitos quânticos.

Com o surgimento da Relatividade Geral, previsões não contidas na Mecânica Clássica se mostraram presentes na teoria de Einstein, como, por exemplo, a precessão do periélio de Mercúrio, o desvio gravitacional para o vermelho e a deflexão da luz devido à presença de um campo gravitacional. Uma teoria completa das interações fundamentais deve conter tanto a Relatividade Geral como a Mecânica Quântica. Por volta do século XX surge a Teoria Quântica de Campos, incluindo várias abordagens em busca da Teoria Quântica da Gravitação.

Uma conseqüência importante das equações da Relatividade Geral são as ondas gravitacionais, que podem ser entendidas de uma maneira simples como perturbações no espaço-tempo, propagando-se segundo uma equação de onda. As questões que são levantadas nesta tese estão relacionadas a essas perturbações. A situação que será considerada é a de um férmion de Dirac interagindo com ondas gravitacionais na presença de um campo magnético constante. Uma maneira útil de tratar o campo de Dirac interagindo com alguns campos de fundo é a transformação Foldy-Wouthuysen que nos permite uma separação de componentes "grandes" e "pequenas" do bi-spinor de Dirac. Podemos distinguir duas versões destas transformações: a transformação Foldy-Wouthuysen exata e a transformação Foldy-Wouthuysen aproximada, na qual a solução é obtida em forma de séries de potências em campos externos.

A solução aproximada não é muito complicada de se obter, mas neste caso existe um certo risco de se perder termos relevantes [14]. Aqui, nós concentramos nossa atenção sobre a solução exata que é mais complicada e mais interessante do ponto de vista matemático. De posse da solução, será possível ver pelos termos da hamiltoniana de campo de spin 1/2, se alguns deles apresentam uma mistura entre o campo magnético e o campo da onda gravitacional.

Para se chegar a esses resultados, será apresentada nesta tese uma breve revisão sobre os conceitos básicos de Relatividade Geral, assim como o que motivou a introdução dos campos de Klein-Gordon e de Dirac para descrever partículas quânticas. Será apresentada também uma maneira de descrever esses campos numa região que possua campo gravitacional externo, através da tetrada e da generalização mínima. Com esse método serão introduzidas as ondas gravitacionais na ação de Dirac. Então, será desenvolvida uma maneira de se fazer uma transformação canônica na hamiltoniana da qual poderá se inferir os resultados desejados quando aplicada ao problema em questão. Antes, será feita uma breve revisão sobre a transformação Foldy-Wouthuysen.

Nesse ponto, será feito o desenvolvimento do método de obtenção do resultado desejado, que será chamado de transformação Foldy-Wouthuysen exata. Esta transformação trará as informações relevantes para as questões levantadas nesta tese. Será estudado o caso em que se consideram ondas gravitacionais fracas (aproximação de primeira ordem). Entretanto, a hamiltoniana obtida após a transformação engloba vários casos particulares que também terão destaque neste trabalho. Por fim, serão apresentadas as equações de movimento para a partícula nos campos externos da onda gravitacional fraca e magnético constante.

Capítulo 2

Elementos básicos de Relatividade Geral

2.1 Notação relativística

Antes de começarmos a discutir a teoria “em si” é necessário definir notações. Quando as notações não são as mais claras quanto possíveis, as equações perdem um pouco de seu sentido, pela possibilidade de não expressarem exatamente o significado de cada ente matemático presente nelas. Vamos então definir as grandezas básicas da teoria, entretanto sem explicações minuciosas sobre cada uma, pois este não é o objetivo desta tese.

Será generalizada a noção de distância entre dois pontos do espaço como o intervalo entre dois pontos no espaço-tempo, para que ele seja invariante perante as transformações de Lorentz. O intervalo é dado por

$$dx^{\mu}dx_{\mu} = ds^2 = c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)\,, \tag{2.1}$$

onde

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)\,. \tag{2.2}$$

Para os operadores diferenciais, definimos

$$\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \Big(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\Big) = \Big(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\Big)\,,$$

$$\partial^{\mu} = g^{\mu\nu}\partial_{\nu} = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla) \qquad , \qquad \partial^{\mu}\partial_{\mu} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\,. \tag{2.3}$$

O quadrivetor energia-momento de uma partícula tem a forma

$$p^{\mu} = \left(\frac{E}{c},\, \overrightarrow{P}\right), \qquad p_{\mu} = \left(\frac{E}{c},\, -\overrightarrow{P}\right). \tag{2.4}$$

A relação entre o momento e energia da partícula tem a forma

$$p^2 = p^{\mu} p_{\mu} = \frac{E^2}{c^2} - P^2 = m^2 c^2 .$$

Nas unidades em que $c = 1$, temos

$$p^2 = p^{\mu} p_{\mu} = E^2 - P^2 = m^2 . \tag{2.5}$$

2.2 Grandezas básicas de Relatividade Geral

A Relatividade Geral é fundamentada no princípio da equivalência de Einstein, que diz: "em qualquer ponto do espaço-tempo, em qualquer campo gravitacional, pode-se escolher um sistema de coordenadas 'localmente inerciais' tal que numa vizinhança suficientemente pequena desse ponto as leis da natureza terão a mesma forma como num sistema de coordenadas cartesianas não aceleradas".

Para se definir grandezas nessa teoria é necessário usar uma ferramenta matemática que seja condizente com o princípio da equivalência. Utilizam-se os tensores, pois se sabe que um tensor quando muda de sistema de coordenadas continua sendo um tensor, pela própria definição [7]. Um tensor de rank três, por exemplo, é definido como

$$T'^{\alpha}_{\ \beta\gamma}\,(x') = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\gamma}}\; T^{\lambda}_{\mu\nu}\,(x)\,. \tag{2.6}$$

Uma definição importante da Relatividade Geral é que o campo gravitacional não é como os outros campos, mas uma característica geométrica fundamental do espaço-tempo. Para se medir distâncias nesse espaço, utiliza-se o tensor métrica, pois o intervalo é escrito da seguinte maneira

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}\,, \tag{2.7}$$

onde temos que as componentes da métrica $g_{\mu\nu}$ descrevem o campo gravitacional.

Matematicamente, a descrição de campo gravitacional exige o uso da noção de variedade. No caso em que a única característica do campo gravitacional é a métrica, a construção se chama "espaço de Riemann". Não será exibida aqui uma revisão sobre variedades, pois essa discussão foge ao objetivo deste trabalho. Como referência podemos indicar, por exemplo, o livro [6].

2.3 Derivada covariante e conexão afim

A derivada parcial $\partial_\alpha \phi$ de um campo escalar ϕ é um vetor covariante. Entretanto, a derivada parcial de algum outro tensor não forma um tensor. Porém, podemos adicionar à derivada parcial alguns termos extras tal que a soma torna-se um tensor. Esta soma é chamada derivada covariante ∇_α. No caso de um vetor A^α sua derivada covariante tem a forma

$$\nabla_\beta A^\alpha = \partial_\beta A^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} A^\gamma \,. \tag{2.8}$$

A derivada covariante (2.8) é um tensor se, e somente se, a conexão afim transforma-se não tensorialmente

$$\Gamma'^\alpha_{\beta\gamma} \;=\; \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\gamma}\;\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\gamma}\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\,. \tag{2.9}$$

A regra para construir as derivadas covariantes de outros tensores vem do fato de o produto de vetores contra e covariantes A^α e B_α ter de ser um escalar,

$$\nabla_\beta (A^\alpha B_\alpha) = \partial_\beta (A^\alpha B_\alpha) \tag{2.10}$$

e conseqüentemente

$$\nabla_\beta B_\alpha = \partial_\beta B_\alpha - \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} B_\gamma \,. \tag{2.11}$$

Em geral os coeficientes $\Gamma^\alpha_{\beta\lambda}$, em Relatividade Geral, satisfazem duas condições
(i) Simetria

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}\,; \tag{2.12}$$

(ii) Metricidade da derivada covariante,

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} g_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\alpha} g_{\mu\lambda} = 0\,. \tag{2.13}$$

Se usarmos estas condições em uma equação como a (2.8), para um tensor com número de índices arbitrário, a única solução para $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ é

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\beta g_{\lambda\gamma} + \partial_\gamma g_{\lambda\beta} - \partial_\lambda g_{\beta\gamma})\,. \tag{2.14}$$

A expressão acima é chamada "símbolo de Cristoffel" que coincide, no caso de teoria sem torção e não-metricidade, com a conexão afim.

2.4 Tensor de curvatura e suas propriedades

Se tentarmos entender o princípio de equivalência usando as notações que estamos fixando, poderemos entendê-lo com um enunciado que diria que sempre se pode escolher coordenadas locais tais que num dado ponto x_0, $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}(x_0) = 0$. Portanto necessitamos de um tensor do espaço-tempo que nos diga se o transporte paralelo muda os componentes de um vetor. Se a conexão afim admite coordenadas globalmente planas, nessas coordenadas tem-se que para tensor qualquer

$$(\partial_\mu \partial_\alpha - \partial_\alpha \partial_\mu) T^{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} = 0 \,, \tag{2.15}$$

então, nestas coordenadas é válido que

$$[\nabla_\mu, \nabla_\alpha]\, T^{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} = 0 \,. \tag{2.16}$$

Contudo, num caso geral não se pode esperar que as derivadas covariantes sempre comutem, assim

$$\nabla_\mu \nabla_\nu T^\alpha = \partial_\mu \partial_\nu T^\alpha + \partial_\mu (\Gamma^\alpha_{\nu\lambda}) T^\lambda + \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \partial_\mu T^\lambda - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \partial_\lambda T^\alpha -$$

$$- \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \Gamma^\alpha_{\lambda\gamma} T^\gamma + \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} \partial_\nu T^\lambda + \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\gamma} T^\gamma \,, \tag{2.17}$$

$$\nabla_\nu \nabla_\mu T^\alpha = \partial_\nu \partial_\mu T^\alpha + \partial_\nu (\Gamma^\alpha_{\mu\lambda}) T^\lambda + \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} \partial_\nu T^\lambda - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \partial_\lambda T^\alpha -$$

$$- \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \Gamma^\alpha_{\lambda\gamma} T^\gamma + \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \partial_\mu T^\lambda + \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\gamma} T^\gamma \,, \tag{2.18}$$

pontanto

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\, T^\alpha = T^\lambda (\partial_\mu \Gamma^\alpha_{\lambda\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\lambda\mu}) + T^\tau (\Gamma^\alpha_{\lambda\mu} \Gamma^\lambda_{\tau\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\nu} \Gamma^\lambda_{\tau\mu}) = -R^\alpha_{\lambda\mu\nu} T^\lambda \,, \tag{2.19}$$

onde

$$R^\alpha_{\lambda\nu\mu} = \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} - \ \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\lambda\nu} + \Gamma^\tau_{\lambda\mu} \Gamma^\alpha_{\tau\nu} - \Gamma^\tau_{\lambda\nu} \Gamma^\alpha_{\tau\mu} \,. \tag{2.20}$$

O termo acima é chamado de “tensor de curvatura” ou “tensor de Riemann”. Da mesma forma temos que

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\, Z_\beta = R^\lambda_{\beta\nu\mu} Z_\lambda \,. \tag{2.21}$$

Juntamente com o tensor de Riemann há algumas contrações importantes. A primeira delas é o tensor de Ricci

$$R^\alpha_{\mu\alpha\nu} = R_{\mu\nu} \tag{2.22}$$

e seu traço $R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$ é chamado escalar de curvatura.

2.5 Equações de Einstein

As equações dinâmicas da Relatividade Geral podem ser formuladas através da ação de Einstein-Hilbert

$$S_{gr} = -\frac{1}{\gamma}\int d^4x\sqrt{-g}(R+2\Lambda), \tag{2.23}$$

onde γ e Λ são constantes. O termo Λ é chamado de constante cosmológica. O próximo passo é considerar a ação total, incluindo a parte da matéria S_m

$$S_t = S_{gr} + S_m \tag{2.24}$$

e achar as equações de movimento $\delta S_t/\delta g_{\mu\nu} = 0$. O tensor energia-momentum da matéria é definido como

$$T^{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}}\,. \tag{2.25}$$

A variação da ação total tem a forma (desconsiderando o termo com derivada total)

$$\delta S_t = \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{1}{\gamma}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R - g^{\mu\nu}\Lambda\right) - \frac{1}{2}T^{\mu\nu}\right\}h_{\mu\nu}\,. \tag{2.26}$$

Usando o princípio da ação mínima, as equações para a métrica tomam a forma

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{\gamma}{2}T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}\,. \tag{2.27}$$

Estas são as equações de Einstein com a constante cosmológica, onde o tensor $G_{\mu\nu}$ é convencionalmente chamado de tensor de Einstein [17].

2.6 Ondas gravitacionais

Nesta seção será feita uma breve revisão sobre ondas gravitacionais, em particular da métrica que as descreve. Outros aspectos sobre ondas gravitacionais não serão levados em conta. Eles podem ser encontrados em [3]. Vamos estudar uma métrica que descreve ondas gravitacionais fracas. Consideraremos propagações de perturbações da métrica no fundo da métrica de Minkowski. Vamos tomar

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \qquad , \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1\,. \tag{2.28}$$

A conexão afim, levando em conta apenas a primeira ordem em $h_{\mu\nu}$ será

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\varrho}(\partial_\mu h_{\varrho\nu} + \partial_\nu h_{\varrho\mu} - \partial_\varrho h_{\mu\nu}) \tag{2.29}$$

e o tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\lambda\partial_\nu h^{\lambda}_{\mu} + \partial_\lambda\partial_\mu h^{\lambda}_{\nu} - \partial^2 h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h) + O(h^2)\,. \tag{2.30}$$

As equações de movimento têm a forma

$$R_{\mu\nu}(h_{\alpha\beta}) = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T_{\lambda}{}^{\lambda})\,. \tag{2.31}$$

Levando em conta as condições de calibre $\partial_\mu h^{\mu}_{\nu} - 1/2\ \partial_\mu h = 0$ (veja por exemplo [4]), chegamos à seguinte relação

$$\nabla^2 h_{\mu\nu} = -16\pi G S_{\mu\nu}\,, \tag{2.32}$$

onde $S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T\eta_{\mu\nu}$. Consideramos que a fonte das ondas também é fraca. Tomando o caso especial quando o espaço está vazio, uma solução em forma de ondas planas é

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu}e^{ik_\lambda x^\lambda} + e^{*}_{\mu\nu}e^{-ik_\lambda x^\lambda}\,, \tag{2.33}$$

onde k_λ é o vetor de onda. Temos também o vínculo devido à invariância de gauge

$$k_\mu e^{\mu}_{\nu} = \frac{1}{2}k_\nu e^{\mu}_{\mu}\,. \tag{2.34}$$

Vamos considerar o caso de uma onda que se propaga na direção x, ou seja, o vetor de onda é tal que $k^3 = k^2 = 0$, $k^1 = k^0 \equiv k > 0$. A partir de (2.34), podemos escrever

$$e_{03} = -e_{13} \quad , \quad e_{01} = -\frac{1}{2}(e_{11} + e_{00})\,, \quad , \quad e_{02} = -e_{12} \quad , \quad e_{22} = -e_{33}\,. \tag{2.35}$$

Agora, vamos fazer a transformação $e'_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} + k_\mu\xi_\nu + k_\nu\xi_\mu$. Para isso vamos escrever $h_{\mu\nu}$ como em (2.33) e supomos $h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu\xi_\nu - \partial_\nu\xi_\mu$. Usamos então (2.34) e chegamos a

$$e'_{33} = e_{33} \quad , \quad e'_{32} = e_{32} \quad , \quad e'_{31} = e_{31} + k\xi_3\,,$$

$$e'_{21} = e_{21} + k\xi_2 \quad , \quad e'_{11} = e_{11} + 2k\xi_1\,. \tag{2.36}$$

Podemos escolher ξ_μ tal que todas as componentes exceto e_{33}, e_{22} e e_{32} sejam nulas. Já sabemos que $e_{33} = -e_{22}$.

Tomando $e_{33} = v'$ e $e_{32} = u'$, levando em conta que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, temos

$$h_{33} = v' e^{ikx+kt} + v' e^{-ikx+kt}\,, \qquad h_{32} = u' e^{ikx+kt} + u' e^{-ikx+kt}$$

$$h_{22} = -h_{33}\,, \quad \text{pois} \quad e_{22} = -e_{33}\,. \tag{2.37}$$

Para simplificar as notações vamos chamar $h_{33} = 2v$ e $h_{32} = 2u$. Essas são as componentes da métrica que serão utilizadas nesse trabalho para estudar ondas gravitacionais fracas [15]

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-2v & -2u \\ 0 & 0 & -2u & -1+2v \end{pmatrix}. \tag{2.38}$$

Capítulo 3

Campos de Klein-Gordon e de Dirac

Os campos que aparecem quando se trata da mecânica quântica relativística serão apresentados agora. Mais à frente será apresentada uma maneira de introduzir a interação desses campos com um campo gravitacional, no ramo da Relatividade Geral.

3.1 Equação de Klein- Gordon

Podemos escrever agora uma equação de onda para uma partícula sem spin que corresponda a um campo escalar. Já que não possui spin, ela tem apenas uma componente, que vamos denotar por Φ. A equação de onda é obtida a partir de (2.5) , substituindo os operadores diferenciais por E e P, como se faz na teoria quântica

$$E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,, \qquad , \qquad \overrightarrow{P} \rightarrow -i\hbar\nabla\,. \tag{3.1}$$

Podemos escrever então

$$(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2)\Phi + \frac{m^2c^2}{\hbar}\Phi = 0\,.$$

Usando $c = \hbar = 1$, temos

$$(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\Phi = 0\,. \tag{3.2}$$

Essa é conhecida como equação de Klein- Gordon. Nota-se que, substituindo (2.1) na aproximação não relativística de (2.5), $E = P^2/2m$, chegamos à equação de Schrödinger para uma partícula livre

$$(\nabla^2 + i\hbar\frac{\partial}{\partial t})\Phi = 0\,, \tag{3.3}$$

o que mostra que a equação de Schrödinger é uma aproximação não relativística da equação de Klein-Gordon. A densidade de probabilidade para a equação de Schrödinger e a corrente de probabilidade são as seguintes [16]

$$\rho = \Phi^* \Phi \,, \tag{3.4}$$

$$\overrightarrow{j} = -\frac{i\hbar}{2m} \left(\Phi^* \, \nabla \Phi - \Phi \, \nabla \Phi^* \right) . \tag{3.5}$$

Elas obedecem à equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \overrightarrow{j} = \frac{\partial}{\partial t} (\Phi^* \Phi) - \frac{i\hbar}{2m} (\Phi^* \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 \Phi^*) = 0 \,. \tag{3.6}$$

Na equação de Klein-Gordon, para ser propriamente relativístico, ρ não deve, como em (3.5) transformar-se como escalar, mas como a componente temporal de um quadrivetor, cuja componente espacial é $\overrightarrow{j}$, dado por (3.6). Então ρ é dado por

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m} (\Phi^* \frac{\partial}{\partial t} \Phi - \Phi \frac{\partial}{\partial t} \Phi^*) \tag{3.7}$$

e com

$$j^\mu = (\rho, \overrightarrow{j}) = \frac{i\hbar}{2m} \Big[\Phi^* (\partial_0 \Phi) - (\partial_0 \Phi^*) \Phi \ , \ \Phi^* (\nabla \Phi) - (\nabla \Phi^*) \Phi \Big] =$$

$$= \frac{i\hbar}{2m} \Big[\Phi^* (\partial^\mu \Phi) - (\partial^\mu \Phi^*) \Phi \Big] \,, \tag{3.8}$$

usando a equação da continuidade

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{i\hbar}{2m} (\Phi^* \partial_\mu \partial^\mu \Phi - \Phi^* \partial_\mu \partial^\mu \Phi) = 0 \,. \tag{3.9}$$

Neste momento, a equação de Klein-Gordon apresenta dois "problemas". Primeiro se nota que a densidade de probabilidade não é definida positivamente como na equação de Schrödinger. Outro problema é que ela fornece duas energias, uma positiva e outra negativa. Para uma partícula livre, cuja energia é constante, isso é difícil de se aceitar. Esses "problemas" do campo de Klein Gordon só podem ser solucionados no ramo da Teoria Quântica de Campos, onde Φ não é tratado com uma função de onda mas como um operador no espaço de Fock.

3.2 A Equação de Dirac

Para tentar resolver os problemas da equação de Klein-Gordon citados no final da seção anterior, vamos seguir o caminho tomado por Dirac em 1928, procurando por uma equação relativisticamente covariante com densidade de probabilidade positivamente definida. Para que isso aconteça, ela deve ser linear na derivada temporal e, por esse fato, deve ser linear nas derivadas espaciais também. Vamos assumir que essa equação deva ter a forma

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i}(\alpha^1\frac{\partial\psi}{\partial x^1} + \alpha^2\frac{\partial\psi}{\partial x^2} + \alpha^3\frac{\partial\psi}{\partial x^3}) + \beta mc^2\psi \equiv H\psi\,. \tag{3.10}$$

Entretanto os coeficientes α^i não podem ser simplesmente números, pois essa equação não seria invariante perante rotações espaciais. E ainda, para termos as leis da física iguais em todos os referenciais, ψ não pode ser um escalar. De fato, a densidade de probabilidade deve ser a componente temporal de um quadrivetor que, se integrado sobre todo o espaço, em um tempo fixo, deve ser invariante. Para resolver esse problema, Dirac propôs que deveria ser considerada uma equação matricial. A função de onda como uma matriz coluna com N componentes

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ . \\ . \\ \psi_N \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

e os coeficientes α^i e β são matrizes $N \times N$. Então a equação (3.10) deve ser substituída por N equações

$$i\hbar\frac{\partial\psi_\sigma}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i}\sum_{\tau=1}^{N}\Big(\alpha^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \alpha^2\frac{\partial}{\partial x^2} + \alpha^3\frac{\partial}{\partial x^3}\Big)_{\tau\sigma}\psi_\tau + \sum_{\tau=1}^{N}\beta_{\tau\sigma}mc^2\psi_\tau = \sum_{\tau=1}^{N}H_{\tau\sigma}\psi_\tau\,. \tag{3.12}$$

Quando adotamos a convenção de soma dos índices repetidos e a notação matricial, esta equação volta a ter a forma da (3.10).

Agora, apenas para simplificar a notação, introduzir as notações $\alpha^i = \beta\gamma^i$ e $\gamma^0 = \beta$. Com isso a equação (3.12), pode ser escrita como

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu + mc^2)\psi = 0\,. \tag{3.13}$$

As matrizes que aparecem nessa equação podem ser representadas explicitamente como

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \tag{3.14}$$

onde σ_i são as conhecidas matrizes de Pauli 2×2 e os blocos na matriz β são matrizes unitárias 2×2.

Escrevendo no espaço de momentos, temos

$$(\gamma^\mu P_\mu - mc^2)\psi(p) = 0\,, \tag{3.15}$$

que é a equação invariante perante transformações de Lorentz, que descreve partículas quânticas com spin $\frac{1}{2}$ e é conhecida como equação de Dirac. As matrizes γ são

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

e $\gamma^0 = \beta$. Elas stisfazem à álgebra de Clifford

$$\{\gamma^\mu\,,\,\gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} I\,, \tag{3.17}$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski e I a matriz identidade 4×4.

3.3 Antipartículas

Vamos definir o spinor adjunto de ψ. Ele será denotado por $\overline{\psi}$ e

$$\overline{\psi} = \psi^+ \gamma^0\,, \tag{3.18}$$

onde $\gamma^0 = \beta$, a partir dele podemos escrever a equação adjunta de Dirac

$$\overline{\psi}(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial_\mu} - m) = 0\,, \tag{3.19}$$

nota-se que $\overleftarrow{\partial_\mu}$ atua pela direita. Usando a equação adjunta e a equação de Dirac pode-se mostrar que a corrente $j^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ é conservada.

A densidade é, portanto,

$$j^0 = \overline{\psi}\gamma^0\psi = \psi^+\psi = \psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 + \psi_4^2\,, \tag{3.20}$$

que é positiva. Isso resolve um dos problemas apresentados pela equação de Klein-Gordon. O outro problema está associado aos estados de energia negativa. Tomando uma partícula parada, temos

$$\gamma^0 P_0 \psi = m\psi\,, \qquad \text{e} \qquad P_0\psi = m\gamma^0\psi\,.$$

Os autovalores de γ^0 são 1 e -1 (duas vezes cada). Os autovalores de energia são

$$E = +(m^2 + P^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{e} \qquad E = -(m^2 + P^2)^{\frac{1}{2}} \,. \tag{3.21}$$

Isso mostra que para cada valor de P, existem dois valores possíveis de energia para cada valor de spin. Dirac supôs que o vácuo está preenchido de partículas, cujos valores de energia seriam de sinal contrário das que lá estão. Assim, pelo princípio de exclusão, uma partícula não poderia ir para um possível valor negativo de energia e depois ir para $E = -\infty$. Entretanto, é possível supor um buraco no vácuo de onde poderia ter pulado um elétron. Esse buraco tem, então, carga $+e$ e é a antipartícula do elétron. A construção é chamada "mar de Dirac".

3.4 Correspondência não-relativística

Para um elétron livre, temos

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = [c\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{p} + \beta mc^2]\psi \,, \tag{3.22}$$

onde as matrizes β e $\overrightarrow{\sigma}$ foram introduzidas na equação (3.14).

Vamos tomar as componentes do spinor que estão relacionadas às energias positivas (as negativas estão ligadas à definição de antipartículas). Concentremo-nos nas primeiras para mostrar que há uma correspondência com a representação de Pauli de duas componentes de spin. Imaginemos então que este elétron está sujeito a um campo eletromagnético externo descrito pelo quadrivetor $A^\mu = (A^0, \overrightarrow{A})$.

Isso é mais facilmente introduzido usando a invariância de gauge [1], $p_\mu \to p_\mu - \frac{e}{c}A_\mu$. A equação de Dirac se torna

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = [c\overrightarrow{\alpha} \cdot (\overrightarrow{p} - \frac{e}{c}\overrightarrow{A}) + \beta mc^2 + eA_0]\psi \,. \tag{3.23}$$

Consideremos a representação em duas componentes de ψ

$$\psi(\overrightarrow{x}, t) = \begin{pmatrix} \varphi(\overrightarrow{x}, t) \\ \chi(\overrightarrow{x}, t) \end{pmatrix} \,. \tag{3.24}$$

A substituição direta de (3.24) na equação de Dirac fornece

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\overrightarrow{\sigma} \cdot (\overrightarrow{p} - \frac{e}{c}\overrightarrow{A})\chi \\ c\overrightarrow{\sigma} \cdot (\overrightarrow{p} - \frac{e}{c}\overrightarrow{A})\varphi \end{pmatrix} + eA_0\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + mc^2\begin{pmatrix} \varphi \\ -\chi \end{pmatrix} \,. \tag{3.25}$$

Se a energia de repouso mc^2 é maior que a derivada temporal e os termos de interção, a solução em duas componentes é aproximadamente

$$\begin{pmatrix} \varphi(\overrightarrow{x},t) \\ \chi(\overrightarrow{x},t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0(\overrightarrow{x},t) \\ \chi_0(\overrightarrow{x},t) \end{pmatrix} e^{\frac{-imc^2t}{\hbar}} \quad , \tag{3.26}$$

onde φ_0 e χ_0 são funções que mudam lentamente com o tempo. Substituindo (3.26) em (3.25) e omitindo o índice 0, para simplificar a notação, obtemos

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - eA_0)\varphi = [c\overrightarrow{\sigma}\cdot(\overrightarrow{p} - e\overrightarrow{A})]\chi \tag{3.27}$$

e

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\Phi + 2mc^2)\chi = [c\overrightarrow{\sigma}\cdot(\overrightarrow{p} - e\overrightarrow{A})]\varphi\,. \tag{3.28}$$

Em baixas energias, o termo $2mc^2$ é dominante no lado esquerdo da equação (3.28). A componente de baixo, χ, é algumas vezes chamada de componente "pequena" da função de onda, em relação à componente grande, ϕ. A componente pequena é aproximadamente v/c vezes menor que a componente grande no limite não relativístico. A equação (3.28) toma a forma

$$\chi = \frac{1}{2mc}[\overrightarrow{\sigma}\cdot(\overrightarrow{p} - e\overrightarrow{A})]\varphi \quad . \tag{3.29}$$

Substituindo (3.29) na equação (3.27), obtemos

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi = [eA_0 - \frac{e\hbar}{2mc}\overrightarrow{\sigma}\cdot\overrightarrow{B} + \frac{1}{2m}(\overrightarrow{p} - \frac{e}{c}\overrightarrow{A})^2]\varphi\,, \tag{3.30}$$

que é a equação de Pauli. A derivação da equação de Pauli como limite não-relativístico para a equação de Dirac é um fato muito importante. Historicamente, Pauli chegou à essa equação de uma maneira diferente e independente.

3.5 Generalização para o caso de campo gravitacional externo

Será suposto agora que os campos de Klein-Gordon e de Dirac possam estar sujeitos a um campo gravitacional externo. Uma maneira de estudá-los será descrita de forma simples. A introdução mais detalhada pode ser encontrada, por exemplo, no livro [8]. Será introduzido para isso o conceito de tetrada e conexão espinorial.

3.5.1 Tetrada

Já sabemos que o campo gravitacional externo é descrito pelo tensor métrica $g^{\mu\nu}$. Pelo princípio da Relatividade Geral, é sempre possível fazer uma mudança de coordenadas tal que as coordenadas finais sejam sempre localmente descritas pela métrica de Minkowiski. Queremos escrever as matrizes γ^μ de forma que $\gamma^\mu = e^\mu_a \gamma^a$, para podermos trabalhar com as matrizes γ^a usuais do espaço plano que já conhecemos. Para isso vamos introduzir a tetrada, definida pelas seguintes relações

$$e^\mu_a e_{b\mu} = \eta_{ab} \ , \ \ e^\mu_a e^{a\nu} = g^{\mu\nu} \ , \ \ e^a_\mu e_{a\nu} = g_{\mu\nu} \ , \ \ e^a_\mu e^{b\mu} = \eta^{ab} \,. \tag{3.31}$$

Assim, podemos introduzir o campo gravitacional nas nossas equações e trabalhar com as matrizes γ^a conhecidas. Devemos também trocar os operadores (generalização mínima), para que a equação se mantenha covariante

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} \qquad , \qquad \partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu \,.$$

Temos que escrever agora todas as grandezas importantes em Relatividade Geral em termos da tetrada. Depois de alguns cálculos, chega-se à nova conexão afim

$$\Gamma^\alpha_{\lambda\mu} = g^{\alpha\beta}(\partial_\lambda g_{\beta\mu} + \partial_\mu g_{\alpha\beta} - \partial_\beta g_{\lambda\mu}) =$$

$$= \frac{1}{2} e^\alpha_c e^{\beta c}(e_{d\mu}\partial_\lambda e^d_\beta + e_{d\lambda}\partial_\mu e^d_\beta - e_{d\mu}\partial_\beta e^d_\lambda - e^d_\lambda \partial_\beta e_{\mu d}) + \frac{1}{2} e^{\alpha d}(\partial_\lambda e_{d\mu} + \partial_\mu e_{d\lambda}) \,. \tag{3.32}$$

3.5.2 Conexão Espinorial

A derivada covariante de um spinor de Dirac, $\nabla_\alpha \psi$, deve ser definida de maneira consistente com a derivada covariante de tensores. Supomos que

$$\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{i}{2} w^{ab}_\mu \sigma_{ab} \psi \,, \tag{3.33}$$

onde w^{ab}_μ é um novo objeto chamado de conexão espinorial e

$$\sigma_{ab} = \frac{i}{2}(\gamma_a \gamma_b - \gamma_b \gamma_a) \,. \tag{3.34}$$

Consideramos então a derivada covariante do vetor $\overline{\psi}\gamma^\lambda\psi$ para encontrar o termo w^{ab}_μ

$$\nabla_\mu(\overline{\psi}\gamma^\lambda\psi) = \partial_\mu(\overline{\psi}\gamma^\lambda\psi) + \Gamma^\lambda_{\tau\mu}(\overline{\psi}\gamma^\tau\psi) \,. \tag{3.35}$$

Mas o importante é escrever todas as grandezas em termos da tetrada, logo

$$w_{\mu ab} = \frac{3}{8}(e^\alpha_b \partial_\mu e_{\alpha a} - e^\alpha_a \partial_\mu e_{\alpha b}) + \frac{1}{4}(e^\beta_a \partial_\beta e_{\mu\beta} - e^\beta_b \partial_\beta e_{\mu a}) + \frac{1}{4}(e^\alpha_a e^\beta_b - e^\alpha_b e^\beta_a) e_{\mu c} \partial_\alpha e^c_\beta \,. \tag{3.36}$$

Capítulo 4

Transformação Foldy-Wouthuysen

Este capítulo é dividido em três partes. Na primeira é mostrada a transformação Foldy-Wouthuysen comum, discutindo suas motivações e aplicações. Na segunda parte é apresentada a transformação exata. Já na última, é feita a explicação detalhada de como e em que casos se pode fazer a transformação exata.

4.1 Transformação Foldy-Wouthuysen

Pode-se descrever um férmion de Dirac em vários tipos de campos externos, usando uma função de onda de quatro componentes ψ, satisfazendo à equação de Dirac

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi = (H_0 + gH_1)\psi\,, \tag{4.1}$$

H_0 é o hamiltoniano da partícula livre

$$H_0 = \beta m + \overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{P}\,, \tag{4.2}$$

onde β e $\overrightarrow{\alpha}$ são as bem conhecidas matrizes de Dirac. Neste capítulo as unidades são escolhidas de tal forma que $\hbar = c = 1$.

A interação com o campo externo é feita pelo termo gH_1. Identifica-se g como a constante de acoplamento, por exemplo a carga elétrica do férmion no caso de campos eletromagnéticos externos.

No caso geral quando se coloca a interação de interesse na equação acima e se obtém a solução, há a mistura de estados φ e χ . De certa forma, esse fato dificulta a interpretação física do resultado. Vamos buscar uma maneira de resolver esse problema.

A solução aproximada é bem conhecida e faz parte de muitos livros textos. Entretanto, em alguns casos é possível escrever a solução exata. Primeiramente obteremos a solução aproximada comum e a usaremos como motivação para chegamos à solução exata, nos casos em que esta é admitida.

Faz-se necessário, para o desenvolvimento da teoria, estabelecer a distinção entre operadores pares e ímpares. Um operador ímpar na teoria de Dirac é uma matriz que contem elementos que conectam as componentes grandes e pequenas da função de onda, enquanto que o par é aquele que não possui esses elementos.

Pode-se mostrar que uma condição necessária e suficiente para uma matriz ser par (ímpar) é que ela comute (anticomute) com β. Isso permite que se escreva para um operador qualquer M

$$M = M^P + M^I \,, \tag{4.3}$$

onde M^P é a parte par e M^I a parte ímpar

$$M^P = \frac{1}{2}(M + \beta M \beta), \qquad M^I = \frac{1}{2}(M - \beta M \beta)\,. \tag{4.4}$$

As equações acima são simples de serem entendidas, basta substituir (4.4) em (4.3)

$$M = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}(\beta M \beta) + \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}(\beta M \beta)\,.$$

Algo natural de se pensar é que se o Hamiloniano fosse um operador par, poderíamos separar a equação de Dirac em duas, sem haver mistura de componentes. Há uma maneira de se fazer isso, utilizando-se de sucessivas transformações canônicas.

A hamiltoniana é colocada na forma

$$H = \beta m + \varepsilon + \vartheta \,, \tag{4.5}$$

onde ε são os operadores pares e ϑ são os ímpares (veja a equação(4.4)).

Faz-se a seguinte transformação canônica

$$\psi' = e^{iS}\psi\,. \tag{4.6}$$

Daí teremos

$$i\frac{\partial \psi'}{\partial t} = [e^{iS}(H - i\frac{\partial}{\partial t})e^{-iS}]\psi' = H'\psi' \,, \tag{4.7}$$

pois

$$i\frac{\partial}{\partial t}e^{-iS}\psi' = H\psi = He^{-iS}\psi' = e^{-iS}(i\frac{\partial\psi'}{\partial t}) + i(\frac{\partial}{\partial t}e^{-iS})\psi' \,. \tag{4.8}$$

Com o objetivo de obtermos uma solução aproximada para um sistema qualquer, vamos fazer a expansão do termo em que a hamiltoniana está presente na equação (4.7). Essa expansão é feita através de um parâmetro τ, introduzido da seguinte maneira

$$F(\tau) = e^{i\tau S}He^{-i\tau S} \,. \tag{4.9}$$

Depois de feita a expansão, tomamos $\tau = 1$. Calculando passo a passo

$$F(\tau) = e^{i\tau S}He^{-i\tau S} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau^n}{n!}(\frac{\partial^n F}{\partial \tau^n}) \,, \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = iSe^{i\tau S}He^{-i\tau S} + e^{i\tau S}H(-iS)e^{-i\tau S} = ie^{i\tau S}[S,H]e^{-i\tau S} \,.$$

Vemos então que

$$\frac{\partial^n F}{\partial \tau^n} = i^n e^{i\tau S}[S,[S,...,[S,H],...]e^{-i\tau S} \,. \tag{4.11}$$

No nosso caso como foi dito $\tau = 1$. Aplicando este resultado à equação (4.7),

$$H' = e^{iS}(H - i\frac{\partial}{\partial t})e^{-iS} + i\frac{\partial}{\partial t} = H + i[S, H - i\frac{\partial}{\partial t}] - \frac{1}{2}[S,[S, H - i\frac{\partial}{\partial t}]] + ... \,. \tag{4.12}$$

Podemos fazer isso, já que S é expandido em potências de $1/m$ e é portanto "pequeno" no limite não relativístico. Para começar construindo S, vamos tomar a primeira ordem em m

$$H' = \beta m + \varepsilon + \vartheta + i[S,\beta]m \,. \tag{4.13}$$

Podemos ver que para a partícula livre, se escolhermos $S = -i\beta\vartheta/2m$, em primeira ordem o termo ímpar ϑ desaparece e a hamiltoniana torna-se par. Nesse caso a transformação será exata.

Aplicando este S na equação (4.13), tem-se, para o caso geral

$$H' = \beta m + \varepsilon + \vartheta + i[(\frac{-i\beta\vartheta}{2m})\beta m - \beta m(\frac{-i\beta\vartheta}{2m})] =$$

$$= \beta m + \varepsilon + \vartheta - \frac{\vartheta}{2} - \frac{\vartheta}{2} = \beta m + \varepsilon \,, \tag{4.14}$$

lembrando que $\beta^2 = 1$ e β anticomuta com ϑ.

Então, fazendo uma seqüência de transformações, com o gerador de cada passo sendo $S = (-i\beta/2m) \times \{$termos ímpares na hamiltoniana de ordem mais baixa em $1/m\}$, a hamiltoniana será par em qualquer ordem desejada de $1/m$.

Se escrevermos a hamiltoniana transformada como $H_{FW} = U_{FW} H U^*_{FW}$, a transformação resultante será

$$U_{FW} = ...exp(iS_2)exp(iS_1)\,. \tag{4.15}$$

Como já conhecemos S_1, tomando a primeira ordem, temos que descobrir quem é S_2. Para isso como já foi dito, basta fazer a transformação com S_1 e ver quais são os termos ímpares que terão ordem $1/m$. Esses serão os termos utilizados para formar S_2. Conseqüentemente, para acharmos S_3, fazemos a transformação com S_2, identificamos os termos ímpares de ordem $1/m^2$ e assim sucessivamente. Vamos achar S_2, fazendo então a primeira transformação

$$H = \beta m + \varepsilon + \vartheta + i[\frac{-i\beta\vartheta}{2m}, \beta m + \varepsilon + \vartheta - i\frac{\partial}{\partial t}] =$$

$$= \beta m + \varepsilon + \vartheta - \frac{\vartheta}{2} - \frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{2}\beta\vartheta^2 + [\frac{\beta\vartheta}{2m}, \varepsilon - i\frac{\partial}{\partial t}] =$$

$$= \beta m + \varepsilon + \frac{1}{2}\beta\vartheta^2 + [\frac{\beta\vartheta}{2m}, \varepsilon - i\frac{\partial}{\partial t}]\,. \tag{4.16}$$

Podemos ver que o termo que será usado para construir S_2 será a última parcela do segundo termo da equação (4.16).

Então, S_2 será

$$S_2 = -\frac{i\beta}{2m}\frac{i\beta}{2m}[\vartheta, \varepsilon - i\frac{\partial}{\partial t}] = -\frac{i}{4m^2}[\vartheta, \varepsilon - i\frac{\partial}{\partial t}]\,. \tag{4.17}$$

Se quisermos encontrar S_3, bastaria repetir esse processo. A transformação não é complicada de ser feita. Na verdade, precisamos apenas calcular alguns comutadores.

Também é importante enfatizar que para a partícula livre, a transformação é feita de forma exata. Basta tomar H_0, e escolher U_0 e S da seguinte maneira

$$U_0 = e^{iS}\,,$$

de tal forma que

$$S = \frac{-i}{2p}\beta\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{p}\arctan\left(p/m\right). \tag{4.18}$$

Tem-se que a hamiltoniana transformada será

$$H_0^{tr} = \beta\sqrt{m^2 + p^2}\,. \tag{4.19}$$

Então, o algoritmo que se usa para se obter as informações físicas de uma hamiltoniana de uma partícula de Dirac com uma interação qualquer, através da transformação Foldy-Wouthuysen é

1) identifica-se termos ímpares e pares na hamiltoniana;

2) faz-se a primeira transformação. Tem-se um resultado par em primeira ordem em $1/m$;

3) faz-se a segunda transformação para se obter um resultado par de ordem $1/m^2$;

4) deve-se parar quando se obtiver a ordem de precisão desejada, que é definida analisando o problema em questão. Tipicamente, usa-se até a terceira ordem.

Ao mesmo tempo, existem algumas situações em que é possível fazer uma transformação canônica em que a hamiltoniana resultante será par em todas as ordens. Este é o caso da transformação Foldy-Wouthuysen exata.

4.2 Transformação Foldy-Wouthuysen exata

Vamos construir agora uma transformação canônica exata, fazendo a hamiltoniana par com campos externos. Já foi afirmado que isso é possível para alguns casos e durante a obtenção desse resultado, poderá se entender quais são esses casos. Até o final deste capítulo, vamos seguir o artigo [9], abrindo várias contas. Alguns detalhes também podem ser encontrados em [11] e [12]. Vamos supor que o spinor se transforme da seguinte maneira

$$\psi^{tr} = U\psi \qquad , \qquad \psi = U^*\psi^{tr}\,. \tag{4.20}$$

Se substituirmos (4.20) em $i\partial\psi/\partial t = H\psi$, supondo que $i\partial\psi^{tr}/\partial t = H\psi^{tr}$, teremos

$$H^{tr} = UHU^* - iU\dot{U}^*\,, \tag{4.21}$$

mas como $U^2 = 1$, (U é um operador unitário), sabemos que $U\dot{U} = 0$, pois supomos $[U^*\,,\,\dot{U}]$. Consideremos a equação

$$[\beta, H^{tr}] = [\beta, UHU^*] = 0\,, \tag{4.22}$$

que é uma condição necessária e suficiente para H ser par. Ela pode ser reescrita da seguinte maneira (multiplicando por U^* pela esquerda e U pela direita)

$$(U^*) \times (\beta U H U^* - U H U^* \beta) = 0\,,$$

$$(U^* \beta U H U^* - H U^* \beta) \times (U) = 0\,,$$

$$U^* \beta U H - H U^* \beta U = 0\,,$$

ou ainda,

$$[U^* \beta U, H] = 0\,. \tag{4.23}$$

Uma escolha possível para $U^* \beta U$ é

$$U^* \beta U = \frac{H}{\sqrt{H^2}} \equiv \lambda\,. \tag{4.24}$$

Neste caso $\sqrt{H^2}$ deve ser entendido da seguinte maneira: calcula-se H^2 na representação de coordenadas. Em seguida, escreve-se H^2 na representação de momentos e se extrai a raiz quadrada. Em todos os passos daqui para frente onde aparecerem raízes de operadores, essas grandezas serão entendidas dessa forma.

Da equação (4.24) pode-se escrever

$$\beta = U \lambda U^* = \frac{H^{tr}}{\sqrt{H^{tr2}}} \Rightarrow H^{tr} = \beta \sqrt{H^{2^{tr}}}\,, \tag{4.25}$$

que é um hamiltoniano par. Mas, na prática, para se fazer os passos das equações (4.25) é necessário conhecer o operador U como solução da equação (4.24). Vamos tomar

$$U = \sqrt{\beta \lambda}\,. \tag{4.26}$$

O operador U deve ter a propriedade $U\beta = U^*\beta$. Então, tomando um operador S par e hermitiano podemos escrever (U é unitátio)

$$U = exp(iS)\,, \tag{4.27}$$

que é diferente de U_{FW} da equação (4.15) da seção anterior que é o operador que faz as sucessivas transformações de Foldy-Wouthuysen. Essa discrepância acontece pelo fato de que

$$exp(A) \times exp(B) = exp(A + B + \frac{1}{2}[A, B] + ...)\,, \tag{4.28}$$

pois se tomarmos, por exemplo U_{FW}, em terceira ordem em $\frac{1}{m}$, teremos

$$U_{FW} = exp(iS_1 + iS_2 + iS_3 + \frac{1}{2}[S_1, S_2] + ...)\,, \tag{4.29}$$

e no caso geral $[S_1, S_2]$ não é zero. Portanto, a princípio não será possível escrever sucessivas transformações equivalendo a uma, como é o caso que estamos tomando agora quando escolhemos a solução da equação (4.26). Este ponto "sutil" é a primeira diferença entre a transformação Foldy-Wouthuysen e a Foldy-Wouthuysen exata.

Um caso particular para ilustrar o que foi dito até agora é quando o termo de interação é ímpar. Uma transformação com $\sqrt{\beta\lambda}$ fornece o resultado

$$H^{tr^2} = UHU^*UHU^* = UH^2U^* = H^2 = \beta^2 m^2 + \vartheta^2 + \beta m\vartheta + \vartheta\beta m\,.$$

Os dois últimos termos se cancelam. No segundo passo, U comutou com H pois é função de H. Então

$$H^{tr} = \beta\sqrt{m^2 + \vartheta^2}\,. \tag{4.30}$$

Para um campo magnético estático $\overrightarrow{B} = rot\overrightarrow{A}$ introduzido de maneira convencional na hamiltoniana por uma transformação de calibre no momento com o potencial vetor $\overrightarrow{A}$, tem-se

$$H^{tr} = \beta\sqrt{m^2 + (\overrightarrow{p} - e\overrightarrow{A})^2 - e\overrightarrow{\Sigma}\cdot\overrightarrow{B}}\,, \tag{4.31}$$

onde $\overrightarrow{\Sigma}$ é a matriz de spin $\overrightarrow{\Sigma} = -\gamma_5\overrightarrow{\alpha}$.

É importante enfatizar que a dificuldade toda deste método reside apenas na complexidade do entendimento de como ele atua em uma hamiltoniana, ou em que casos ele pode ser utilizado. Entretanto depois que se entende seu "funcionamento" ele não é muito complicado de ser utilizado. São poucos os cálculos necessários para se obter as informações físicas da hamiltoniana. No exemplo acima, apenas foi preciso elevar um operador ao quadrado.

Na próxima seção será descrito com detalhes como e em que casos a transformação Foldy-Wouthutsen exata atua.

4.3 Como fazer a transformação exata

Vamos analisar o caso agora em que o termo de interação não é só ímpar. Uma condição necessária e suficiente para a hamiltoniana ser par é

$$U\lambda U^* = \beta\,, \tag{4.32}$$

onde $UU^* = U^*U = 1$.

A solução para o operador U é $\sqrt{\beta\lambda}$. No caso geral, podemos fazer uma expansão de λ em potências da constante de acoplamento do campo de interação. Esta constante para o campo é elétrico é a carga elétrica (e); para o campo gravitacional, a massa (m); etc. Mas essa expansão na maioria dos casos fornece termos extremamente complicados na potências de g (constante de acoplamento).

Na verdade, o problema aqui é achar uma transformação que leva λ a β. Vamos fazer isso em dois (ou mais) passos, usando o operador intermediário f, que é tal que $f = f^* = f^{-1}$, ou seja, faremos

$$\lambda \to f \to \beta\,. \tag{4.33}$$

A primeira transformação será feita pela função transformação $\sqrt{f\lambda}$,

$$\sqrt{f\lambda}\;\lambda\sqrt{\lambda f} = f \tag{4.34}$$

e a segunda,

$$\sqrt{\beta f}\;f\sqrt{f\beta} = \beta\,. \tag{4.35}$$

A transformação resultante sendo, portanto, o produto das duas

$$U = \sqrt{\beta f}\sqrt{f\lambda}\,, \tag{4.36}$$

de onde se vê

$$U\lambda U^* = \sqrt{\beta f}\sqrt{f\lambda}\;\lambda\sqrt{\lambda f}\sqrt{f\beta} = \sqrt{\beta f}\;f\sqrt{f\beta} = \beta\,. \tag{4.37}$$

O método pode ser generalizado para qualquer número de transformações

$$U = \sqrt{\beta f_n}\sqrt{f_n f_{n-1}}...\sqrt{f_2 f_1}\sqrt{f_1\lambda}\,. \tag{4.38}$$

Vamos usar a seguinte definição de $\sqrt{f\lambda}$ (note que f é completamente arbitrário até aqui)

$$\sqrt{f\lambda} = (1 + f\lambda)(2 + f\lambda + \lambda f)^{-\frac{1}{2}} \,. \tag{4.39}$$

Para ver que isso é possível, vamos tomar a raiz de um operador unitário,

$$\sqrt{u} = (1 + u)(2 + u + u^*)^{-\frac{1}{2}} \,, \tag{4.40}$$

e fazer que ele atue

$$u|\delta >= exp(i\delta)|\delta > \,, \qquad u^*|\delta >= exp(-i\delta)|\delta > \,,$$

somando as duas equações e depois adicionando $2|\delta >$ a ambos os lados

$$(u + u^*)|\delta >= (e^{i\delta} + e^{-i\delta})|\delta > \,,$$

$$(2 + u + u^*)|\delta >= 2(1 + \cos\delta)|\delta > \,,$$

podemos ver que $(2+u+u^*)^{-\frac{1}{2}}$ é definido a não ser que $\cos\delta = -1$. Sabendo disso vamos calcular $\sqrt{u}\sqrt{u}$,

$$\sqrt{u}\sqrt{u} = (1 + u^2)(2 + u + u^*)^{-1} = (1 + 2u + u^2)(2 + u + u^*)^{-1} =$$

$$= u(u^* + 2 + u)(2 + u + u^*)^{-1} = u \,. \tag{4.41}$$

Daí, vemos que esta definição para $\sqrt{u}$ faz sentido, pois $\sqrt{u}\sqrt{u} = u$. O conjugado é

$$(\sqrt{u})^* = (1 + u^*)(2 + u^* + u)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{u^*} \,. \tag{4.42}$$

Uma expansão da equação (4.36) em potências de g (expressa em termos de λ_i pode ser obtida requerendo, por exemplo, que na ordem zero a raiz seja um número c, pois até agora, temos total liberdade no operador intermediário f. Tomando f para ser de ordem zero, teremos

$$f\lambda_0 + \lambda_0 f = c \,, \tag{4.43}$$

onde λ_0 é o λ que corresponde ao H_0 (hamiltoniano da partícula livre).

Neste ponto podemos resolver o problema da primeira transformação (lembrando que a transformação é feita em dois passos). Existe uma matriz η tal que $\eta = \eta^* = \eta^{-1}$, definida como $\eta = -i\beta\gamma_5 = -\beta\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, com a seguinte propriedade

$$\{\eta\,,\,\beta\} = -i\beta\gamma_5\beta + i\beta\beta\gamma_5 = -i\gamma_5 + i\gamma_5 = 0\,, \tag{4.44}$$

ou seja, $\{\eta\,,\,\lambda_0\} = 0$.

A correspondente transformação em dois passos será

$$U = \sqrt{\beta\eta}\sqrt{\eta\lambda}\,. \tag{4.45}$$

Usando (4.39) e (4.44), temos $\sqrt{\beta\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i\gamma_5)$. Então

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i\gamma_5)\sqrt{\eta\lambda}\,. \tag{4.46}$$

Quanto ao segundo termo não podemos fazer nada. No caso geral, devemos expandir λ em termos de g,

$$\lambda = \lambda_0 + g\lambda_1 + g^2\lambda_2 + ...\,, \tag{4.47}$$

onde $H = H_0 + gH_1$. Temos que $\lambda^2 = 1$, pois $\lambda = H/\sqrt{H^2}$ e

$$[\lambda, H_0 + gH_1] = 0\,. \tag{4.48}$$

Portanto

$$(\lambda_0 + g\lambda_1 + g^2\lambda_2 + ...)^2 = 1\,, \tag{4.49}$$

e, por igualdade de polinômios na ordens de g^n,

$$\lambda_0\lambda_1 + \lambda_1\lambda_0 = 0\,, \qquad , \qquad \lambda_0\lambda_2 + \lambda_1^2 + \lambda_2\lambda_0 = 0\,, \tag{4.50}$$

e assim sucessivamente. Usando essas relações, os λ_N podem ser escritos em função do λ_i de ordem mais baixa.

Vamos fazer $\lambda = \lambda^c + \lambda^a$, onde λ^c comuta com λ_0 e λ^a anticomuta. Daí

$$\lambda_1^c = 0\,,$$

$$\lambda_2^c = -\frac{1}{2}\lambda_0\lambda_1^2\,, \qquad \text{etc.} \tag{4.51}$$

Em geral,

$$\lambda_n^c = -\frac{1}{2}\lambda_0 \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \lambda_{n-k} \,. \tag{4.52}$$

A parte que anticomuta é determinada por (4.48). A parte anticomutativa de (4.48) é

$$[\lambda_n^a, H_0] + [\lambda_{n-1}, H_1]^a = 0 \,, \tag{4.53}$$

colocando $H_0 = \lambda_0 E_p$ e multiplicando por λ_0,

$$\{\lambda_n^a, E_p\} = b_n^a \quad , \quad b_n = \lambda_0[\lambda_{n-1}, H_1] \,. \tag{4.54}$$

A solução é não é complicada; é possível escrever λ_n^a da seguinte maneira

$$\lambda_n^a = \int_{-\infty}^{0} exp(E_p\tau) b_n^a exp(E_p\tau) d\tau \,. \tag{4.55}$$

Para ver isso, vamos assumir que

$$\{\lambda_n^a, E_p\} = b_n^a = \int_{-\infty}^{0} exp(E_p\tau)\{E_p \,, \, b_n^a\} exp(E_p\tau) d\tau \,. \tag{4.56}$$

Integrando (4.56) por partes, obtemos

$$\{\lambda_n^a, E_p\} = \int_{-\infty}^{0} d(exp(E_p\tau) b_n^a exp(E_p\tau)) = b_n^a \,. \tag{4.57}$$

A integral em 0 dá b_n^a e em $-\infty$ dá zero. Então, λ_n pode ser escrito como

$$\lambda_n = -\frac{1}{2}\lambda_0 \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \lambda_{n-k} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} exp(E_p\tau)[\lambda_0, [\lambda_{n-1}, H_1]\,] exp(E_p\tau) d\tau \,. \tag{4.58}$$

Essa equação define todos os λ_n em função dos λ_i de ordem mais baixa. Esta é a solução geral para uma hamiltoniana qualquer com a interação desejada. Vemos que este resultado não é exato.

Entretanto, vamos voltar à equação (4.46) e ver que em alguns casos é possível se obter o resultado exato. Antes, uma observação interessante a se fazer é quando tomamos a expansão em $1/m$, ou seja,

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{1}{m}\lambda_1 + (\frac{1}{m})^2 \lambda_2 + \dots \,. \tag{4.59}$$

Usando a mesma técnica,

$$\lambda^2 = 1 \quad , \quad [\lambda, H] = 0 \,,$$

agora, com $H = m\beta + h = m\beta + \varepsilon + \vartheta$. A parte ímpar de λ é

$$\lambda_n^{Ímpar} = -\frac{1}{2}\beta \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \lambda_{k-1}\,, \tag{4.60}$$

A parte par é determinada por $[\lambda, H] = 0$

$$[\lambda_n, \beta] + [\lambda_{n-1}, h] = 0\,,$$

$$\lambda_n^{par} = \frac{1}{2}\beta[\lambda_{n-1}, h]\,. \tag{4.61}$$

Portanto, os λ_n serão

$$\lambda_n = \lambda^{par} + \lambda^{Ímpar} = \frac{1}{2}\beta([\lambda_{n-1}, h] - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \lambda_{k-1})\,. \tag{4.62}$$

O fato interessante comentado aparece nesse ponto, pois os primeiros termos são

$$\lambda_1 = \vartheta \quad , \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\beta[\vartheta, \varepsilon] - \frac{1}{2}\beta\vartheta^2\,, \tag{4.63}$$

que vão nos fornecer a transformação Foldy-Wouthuysen. É o que realmente deveria acontecer, pois esta transformação é uma expansão em $1/m$, que é exatamente a constante de acoplamento escolhida neste exemplo. O que chama atenção é que o método empregado é totalmente diferente daquele da seção anterior.

Agora, vamos retornar à equação (4.46). Para resolver a primeira parte de U, procuramos por uma matriz que anticomutasse com β. Vamos agir da mesma maneira. Vamos tomar o caso em que H anticomuta com η. Neste caso $U = U_2 \times U_1$, onde

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \eta\lambda) \quad \text{e} \quad U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \beta\eta)\,. \tag{4.64}$$

Como $\{\eta, H\} = 0$, tem-se $H^2\eta = \eta H^2$. Vemos então

$$\eta\sqrt{H^2} = \sqrt{\eta^2}\sqrt{H^2} = \sqrt{\eta^2 H^2} = \sqrt{\eta H^2 \eta} = \sqrt{H^2\eta^2} = \sqrt{H^2}\sqrt{\eta^2} = \sqrt{H^2}\eta\,, \tag{4.65}$$

obtém-se $\eta\sqrt{H^2} = \sqrt{H^2}\eta$. Basta agora fazer a transformação

$$U_1 H U_1^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \eta\lambda)H\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \eta\lambda) = \frac{1}{2}(H + \eta\lambda H)(1 - \eta\lambda) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(H - H\eta\lambda + \eta\lambda H - \eta\lambda H\eta\lambda) = \frac{1}{2}(2\eta\lambda H) = \eta\sqrt{H^2}\,, \tag{4.66}$$

e, finalmente,

$$U_2\eta\sqrt{H^2}U_2^* = U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\beta\eta)\eta\sqrt{H^2}\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\beta\eta) =$$

$$= \frac{1}{2}(\eta\sqrt{H^2}+\beta\sqrt{H^2})(1-\beta\eta) = \frac{1}{2}(\eta\sqrt{H^2}-\eta\sqrt{H^2}\beta\eta+\beta\sqrt{H^2}-\beta\sqrt{H^2}\beta\eta) =$$

$$= \eta\frac{1}{2}(\sqrt{H^2}-\beta\sqrt{H^2}\beta)+\beta\frac{1}{2}(\sqrt{H^2}+\beta\sqrt{H^2}\beta)\,. \tag{4.67}$$

Portanto,

$$H^{tr} = UHU^* = \beta[\sqrt{H^2}]^{PAR}+\eta[\sqrt{H^2}]^{ÍMPAR}\,. \tag{4.68}$$

Esta transformação é exata. Como se pode ver, desde que H anticomute com η é possível fazer a transformação. Como já foi dito, a única dificuldade está em entender o método, pois aplicá-lo não é algo muito complexo do ponto de vista matemático.

Um pequeno algoritmo para se fazer essa transformação é

1) verificar se $\{\eta, H\} = 0$;

2) calcular H^2;

3) identificar os termos pares e ímpares e utilizar a equação (4.68).

Capítulo 5

Ondas gravitacionais e campo magnético

Neste capítulo serão utilizados todos os resultados que foram obtidos até agora. Será considerada a situação de um férmion numa região do espaço onde há ondas gravitacionais na presença de um campo magnético externo. O objetivo é obter a hamiltoniana que descreve a situação e depois fazer uma transformação Foldy-Wouyhuysen exata.

5.1 Descrição do método

Para se obter o resultado desejado, deve-se tomar a ação de Dirac e introduzir a métrica das ondas gravitacionais através da tetrada. Depois se introduz o campo magnético e é feita a transformação.

Vamos tomar

$$S_{\frac{1}{2}} = \int \sqrt{-g}\, \overline{\psi}(\gamma^{\mu}\nabla_{\mu} + im)\psi\,. \tag{5.1}$$

Já foi visto que

$$\nabla_{\mu}\psi = \partial_{\mu}\psi + \frac{i}{2}w_{\mu}^{ab}\sigma_{ab}\psi \quad , \quad \sigma_{ab} = \frac{i}{2}(\gamma_a\gamma_b - \gamma_b\gamma_a)\,,$$

$$w_{\mu ab} = \frac{1}{4}(e_{b\alpha}\partial_{\mu}e_a^{\alpha} - e_{a\alpha}\partial_{\mu}e_b^{\alpha}) + \frac{1}{4}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}(e_{b\alpha}e_a^{\lambda} - e_{a\alpha}e_b^{\lambda})\,. \tag{5.2}$$

Para tornar este capítulo o mais claro possível, os cálculos serão divididos em sete passos, descritos a seguir

1) tomar a métrica $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$;

2) calcular $e^a_\mu(h_{\mu\nu})$;

3) calcular $w_{\mu ab}(h_{\mu\nu})$;

4) introduzir as ondas gravitacionais;

5) introduzir o resultado na ação de Dirac;

6) trocar $i\hbar\partial_\mu \rightarrow i\hbar\partial_\mu - \frac{e}{c}A_\mu$ (introduzir o campo A_μ);

7) encontrar a hamiltoniana e fazer a transformação exata.

5.2 A métrica $g_{\mu\nu}$.

Será considerada a métrica $g_{\mu\nu}$ da seguinte maneira

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \,. \tag{5.3}$$

Nesta equação, $\eta_{\mu\nu}$ representa a métrica de Minkowiski e $h_{\mu\nu}$ uma pequena perturbação nessa métrica. Esta perturbação, a princípio, é totalmente arbitrária. Apenas no quarto passo serão introduzidas as ondas gravitacionais. Também é importante dizer que esta perturbação é tomada apenas em primeira ordem. Os termos de ordem quadrática ($O(h^2)$) serão considerados nulos.

5.3 Escrevendo a tetrada em função de $h_{\mu\nu}$

É importante escrever a tetrada em função da métrica do problema, $e^a_\mu(h_{\mu\nu})$, pois já temos a conexão espinorial em função da tetrada. Desejamos, então, obter e^a_μ. Temos que

$$e^a_\mu e_{\nu a} = g_{\mu\nu} \,, \tag{5.4}$$

portanto, vamos tomar a expansão em função da tetrada da métrica de Minkowski

$$e^a_\mu = \overline{e^a_\mu} + xh_{\mu\alpha}\overline{e^a_\mu} + ... , \tag{5.5}$$

$$e_{\nu a} = \overline{e_{\nu a}} + xh_{\beta\nu}\overline{e_{\beta a}} + ... \tag{5.6}$$

Tomando apenas a parte linear em $h_{\mu\nu}$, pois como já foi dito, representa um campo fraco,

$$e^a_\mu e_{\nu a} = \overline{e^a_\mu}\overline{e_{\nu a}} + xh_{\beta\nu}\delta^\beta_\mu + xh_{\alpha\nu}\delta^\alpha_\mu = \eta_{\mu\nu} + 2xh_{\mu\nu} , \tag{5.7}$$

mas como na equação (5.4) vamos tomar apenas a parte linear na métrica $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$,

$$\eta_{\mu\nu} + 2xh_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \Rightarrow x = \frac{1}{2} . \tag{5.8}$$

Então, voltando em (5.5) e (5.6),

$$e^a_\mu = \overline{e^a_\mu} + \frac{1}{2}h_{\mu\alpha}\overline{e^a_\mu} + ... , \tag{5.9}$$

$$e_{\nu a} = \overline{e_{\nu a}} - \frac{1}{2}h_{\beta\nu}\overline{e_{\beta a}} + ... \tag{5.10}$$

5.4 Escrevendo a conexão espinorial em função de $h_{\mu\nu}$

Com o resultado da seção anterior podemos escrever a conexão espinorial em função de $h_{\mu\nu}$. Para isso, basta substituir as equações (5.5) e (5.6) em (5.2). Calculando termo a termo,

$$e^\alpha_b \partial_\mu e_{\alpha a} = (\overline{e^\alpha_b} - \frac{1}{2}h^{\alpha\beta}\overline{e_{b\beta}})\partial_\mu(\overline{e_{\alpha a}}\frac{1}{2}h^{\alpha\beta}\overline{e^\alpha_a}) = \frac{1}{2}\overline{e^\alpha_b}\overline{e^\beta_a}\partial_\mu h_{\alpha\beta} , \tag{5.11}$$

$$e^\beta_a \partial_\beta e_{\mu b} = (\overline{e^\beta_a} - \frac{1}{2}h^{\lambda\beta}\overline{e_{a\lambda}})\partial_\beta(\overline{e_{\mu b}}\frac{1}{2}h^{\mu\lambda}\overline{e^\lambda_b}) = \frac{1}{2}\overline{e^\beta_a}\overline{e^\lambda_b}\partial_\beta h_{\mu\lambda} , \tag{5.12}$$

$$e^\alpha_a e^\beta_b = (\overline{e^\alpha_a} - \frac{1}{2}h^{\alpha\gamma}\overline{e_{\alpha\gamma}})(\overline{e^\beta_b} - \frac{1}{2}h^{\lambda\beta}e_{\lambda b}) = \overline{e^\alpha_a}\overline{e^\beta_b} - \frac{1}{2}h^{\alpha\gamma}\overline{e_{\alpha\gamma}} - \frac{1}{2}h^{\lambda\beta}\overline{e^\alpha_a}\overline{e_{\lambda b}} , \tag{5.13}$$

$$e^\alpha_a e^\beta_b e_{\mu c} = \overline{e_{\mu c}}(\overline{e^\alpha_a}\overline{e^\beta_b} - \frac{1}{2}h^{\alpha\gamma}\overline{e_{\alpha\gamma}}\overline{e^\beta_b} - \frac{1}{2}h^{\beta\lambda}\overline{e_{b\lambda}}\overline{e^\alpha_a}) + \frac{1}{2}h_{\mu\gamma}\overline{e^\gamma_c}\overline{e^\alpha_a}\overline{e^\beta_b} , \tag{5.14}$$

$$e^{\alpha}_{a}e^{\beta}_{b}e_{\mu c}\partial_{\alpha}e^{c}_{\beta}=\overline{e_{\mu c}}(\overline{e^{\alpha}_{a}}\overline{e^{\beta}_{b}}-\frac{1}{2}h^{\alpha\gamma}\overline{e_{\alpha\gamma}}\overline{e^{\beta}_{b}}-\frac{1}{2}h^{\beta\lambda}\overline{e_{b\lambda}}\overline{e^{\alpha}_{a}})+\frac{1}{2}h_{\mu\gamma}\overline{e^{\gamma}_{c}}\overline{e^{\alpha}_{a}}\overline{e^{\beta}_{b}}\partial_{\alpha}(\frac{1}{2}h_{\beta\chi}\overline{e^{\chi c}})=$$

$$=\frac{1}{2}\delta^{\chi}_{\mu}\overline{e^{\alpha}_{a}}\overline{e^{\beta}_{b}}\partial_{\alpha}h_{\beta\chi}+O(h^{2})=\frac{1}{2}\overline{e^{\alpha}_{a}}\overline{e^{\beta}_{b}}\partial_{\alpha}h_{\beta\chi}\,. \qquad (5.15)$$

Com esses resultados, pode-se escrever a conexão espinorial em termos da tetrada,

$$w_{\mu ab}=\frac{3}{8}\Big(\frac{1}{2}\overline{e^{\alpha}_{b}}\overline{e^{\beta}_{a}}\partial_{\mu}h_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\overline{e^{\alpha}_{a}}\overline{e^{\beta}_{b}}\partial_{\mu}h_{\alpha\beta}\Big)+\frac{1}{4}\Big(\frac{1}{2}\overline{e^{\beta}_{a}}\overline{e^{\lambda}_{b}}\partial_{\beta}h_{\mu\lambda}-\frac{1}{2}\overline{e^{\alpha}_{a}}\overline{e^{\beta}_{b}}\partial_{\beta}h_{\mu\lambda}\Big)+$$

$$+\frac{1}{4}\Big(\frac{1}{2}\overline{e^{\alpha}_{a}}\overline{e^{\beta}_{b}}\partial_{\alpha}h_{\mu\beta}-\frac{1}{2}\overline{e^{\alpha}_{b}}\overline{e^{\beta}_{a}}\partial_{\alpha}h_{\mu\beta}=$$

$$=\frac{3}{16}\overline{e^{\alpha}_{b}}\overline{e^{\beta}_{a}}\partial_{\mu}h_{\alpha\beta}-\frac{3}{16}\overline{e^{\alpha}_{a}}\overline{e^{\beta}_{b}}\partial_{\mu}h_{\alpha\beta}+\frac{1}{4}\overline{e^{\alpha}_{a}}\overline{e^{\beta}_{b}}\partial_{\alpha}h_{\mu\beta}-\frac{1}{4}\overline{e^{\alpha}_{b}}\overline{e^{\beta}_{a}}\partial_{\alpha}h_{\mu\beta}\,. \qquad (5.16)$$

5.5 Introduzindo as ondas gravitacionais

Como já foi dito, as ondas gravitacionais podem ser interpretadas como perturbações no espaço-tempo que se propagam satisfazendo uma equação de onda. É fato que elas possuem duas polarizações que aqui serão descritas por $v=v(ct-x)$ e $u=u(ct-x)$. A métrica que descreve essas perturbações pode ser escrita como

$$ds^{2}=c^{2}dt^{2}-dx^{2}-(1-2v)dy^{2}-(1-2v)dz^{2}-4udydz\,. \qquad (5.17)$$

Neste caso, as componentes da perturbação $h_{\mu\nu}$ são tomadas como $h_{00}=h_{11}=0$, $h_{33}=-h_{22}=2v$ e $h_{23}=-h_{32}=-2u$. Essas componentes serão substituídas nos resultados da conexão espinorial obtidos na seção anterior.

5.6 Introduzindo as ondas gravitacionais na ação de Dirac

Agora é possível escrever a equação de Dirac numa região onde existam ondas gravitacionais fracas. Para isso, basta substituir os resultados obtidos até agora no operador

$$\nabla_{\mu}\psi=\partial_{\mu}\psi+\frac{i}{2}w^{ab}_{\mu}\sigma_{ab}\psi\,. \qquad (5.18)$$

Mas ainda há na equação de Dirac a matriz γ^μ, multiplicando essa expressão pela direita. Sabendo que

$$\gamma^\mu \sigma^{ab} = e^\mu_d \gamma^d \sigma^{ab} = (\overline{e^\mu_d} - \frac{1}{2} h^{\mu\lambda} \overline{e_{\lambda d}}) \gamma^d \sigma^{ab} \,, \tag{5.19}$$

podemos calcular $\gamma^\mu W_{\mu ab} \sigma^{ab}$. Eliminando os termos de segunda ordem

$$\gamma^\mu w_{\mu ab} \sigma^{ab} = \frac{3}{16} \gamma^d \sigma^{ab} (\partial_d h_{ba} - \partial_d h_{ab}) + \frac{1}{4} \gamma^d \sigma^{ab} (\partial_a h_{db} - \partial_b h_{da}) \,. \tag{5.20}$$

A primeira parcela nessa expressão é nula, pois $h_{\mu\nu}$ é simétrico e σ^{ab} é antisimétrico. Já na segunda parcela, se definirmos $S^{dab} = \gamma^d \gamma^a \gamma^b - \gamma^d \gamma^b \gamma^a$ e o separarmos na parte simétrica e antisimétrica, termos

$$\gamma^c (\gamma^a \gamma^b - \gamma^b \gamma^a) = x \gamma_d (\eta^{ca} \eta^{bd} - \eta^{cb} \eta^{ad}) + y \gamma^5 \gamma_d \varepsilon^{abcd} \,. \tag{5.21}$$

Não precisamos buscar os coeficienes x e y. A parte antisimétrica sera nula visto que ela será multiplicada por $h_{\mu\nu}$ que é simétrico. Não é muito complicado se mostrar que a parte simétrica se anula levando em conta que $\partial_j h_{ij} = 0$ que vem da equação (2.37).

Portanto, não há contribuição da conexão espinorial para a ação neste caso. O outro termo na ação, é

$$\gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^a e^\mu_a \partial_\mu = \gamma^a (\overline{e^\mu_a} - \overline{e^\nu_a} h^\mu_\nu) \partial_\mu \,. \tag{5.22}$$

Calculando os termos

$$\overline{e^\nu_0} h^\mu_\nu = 0 \ , \ \overline{e^\nu_1} h^\mu_\nu = 0 \,,$$

$$\overline{e^\nu_a} h^\mu_\nu = \overline{e^y_2} h^x_y + \overline{e^z_2} h^a_3 = v \ , \ \overline{e^\nu_a} h^\mu_\nu = \overline{e^z_2} h^x_z + \overline{e^z_2} h^a_3 = u \,,$$

$$\overline{e^\nu_3} h^\mu_\nu = \overline{e^y_3} h^y_y + \overline{e^z_3} h^y_z = u \ , \ \overline{e^\nu_3} h^\mu_\nu = \overline{e^y_3} h^\mu_y + \overline{e^z_3} h^z_z = -v \,. \tag{5.23}$$

Portanto, os termos não nulos do operador da equação (5.18) serão

$$\gamma^a e^\mu_a \partial_\mu = \frac{1}{c} \gamma^0 \partial_t + \gamma^1 \partial_x + (\gamma^2 - v\gamma^2 - u\gamma^3) \partial_y + (\gamma^3 - u\gamma^2 - v\gamma^3) \partial_z \,. \tag{5.24}$$

Agora, para achar a hamiltoniana, basta escrever a equação de Dirac na forma da equação de Schrödinger [13]

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \,, \tag{5.25}$$

com o seguinte operador hamiltoniano

$$H = \beta m c^2 - i\hbar c [\alpha^1 \partial_x + (\alpha^1 - v\alpha^2 - u\alpha^3) \partial_y + (\alpha^3 - u\alpha^2 + u\alpha^3) \partial_z] \,. \tag{5.26}$$

5.7 Introduzindo o campo magnético na ação de Dirac

Para introduzir o campo magnético basta usar a transformação de calibre usual, com apenas o potencial vetor $\overrightarrow{A}$ diferente de zero. Teremos

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{e}{c}A_\mu\,. \tag{5.27}$$

A hamiltoniana tem a forma

$$H = \beta mc^2 - i\hbar c[\alpha^1(\partial_x + \frac{e}{i\hbar c}A_x) + (\alpha^2 - v\alpha^2 - u\alpha^3)(\partial_y + \frac{e}{i\hbar c}A_y) +$$

$$+(\alpha^3 - u\alpha^2 + u\alpha^3)(\partial_z + \frac{e}{i\hbar c}A_z)]\,. \tag{5.28}$$

5.8 Fazer a transformação exata

Antes de fazer a transformação exata é importante escrever a hamiltoniana obtida na seção anterior de forma mais conveniente

$$H = \beta mc^2 - i\hbar c[\alpha^1\partial_x + (\alpha^1 - v\alpha^2 - u\alpha^3)\partial_y + (\alpha^3 - u\alpha^2 + u\alpha^3)\partial_z] -$$

$$-e\,[\alpha^1 A_1 + \alpha^2(A_2 - vA_2 - uA_3) + \alpha^3(A_3 - uA_2 + vA_3)]\,. \tag{5.29}$$

Como será necessário calcular H^2, uma relação extremamente útil é

$$\alpha^i\alpha^j = \delta^{ij} + i\varepsilon^{ijk}\Sigma_k\,, \tag{5.30}$$

onde Σ_k é a já conhecida matriz de spin

$$\Sigma_k = -\gamma_5\alpha_k = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}\,. \tag{5.31}$$

Por isso, é importante escrever os termos da hamiltoniana em termos dessas matrizes. Introduzimos a seguinte notação

$$H = \beta mc^2 + \alpha^j K^i_j\partial_i + \alpha^i g_i\,, \tag{5.32}$$

$$K^i_j = -i\hbar c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - v - u\alpha^2\alpha^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + v - u\alpha^2\alpha^3 \end{pmatrix} \tag{5.33}$$

e também o termo com o portencial vetor

$$g_i = -e(A_1\,,\, A_2 - vA_2 - uA_3\,,\, A_3 - uA_2 + vA_3)\,. \tag{5.34}$$

O operador H^2 tem a forma

$$H^2 = \beta mc^2\alpha^i g_i + \alpha^i g_i \beta mc^2 + \beta mc^2 \alpha^j K^i_j \partial_i + \alpha^j K^i_j \partial_i \beta mc^2 +$$

$$+\alpha^j K^i_j \partial_i \alpha^l K^m_l \partial_m + \alpha^j K^i_j \partial_i \alpha^l g_l + \alpha^i g_i \alpha^j K^m_j \partial_m + \alpha^i g_i \alpha^j g_j + m^2c^4\,. \tag{5.35}$$

Os termos da primeira linha da equação acima se cancelam, pois $[\alpha^i, \beta] = 0$. Calculando os outros um a um

$$\alpha^i\alpha^j g_j g_i = (\delta^{ij} + i\epsilon^{ijk}\Sigma_k) g_j g_i = g_i g_i = g^2\,, \tag{5.36}$$

$$\alpha^i g_i \alpha^j K^m_j \partial_m = (\delta^{ij} + i\epsilon^{ijk}\Sigma_k)(\frac{1}{2}([g_i K^m_j \partial_m + g_j K^m_i \partial_m] + \frac{1}{2}\{g_i K^m_j \partial_m - g_j K^m_i \partial_m\}) =$$

$$= g_i K^m_j \partial_m + i\epsilon^{ijk}\Sigma_k g_i k^m_j \partial_m\,. \tag{5.37}$$

Para calcular os outros termos, é necessário analisar o comutador $[\alpha^l\,,\, k^i_j]$. Para $l = 1$ ou $l \neq 1$ e $i = j = 1$, tem-se $[\alpha^l\,,\, k^i_j] = 0$; nos outros casos isso não acontece. Com o objetivo de facilitar a derivação dos termos que faltam e a análise do resultado, é importante definir

$$\overline{k^i_j} = -i\hbar c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - v + u\alpha^2\alpha^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + v + u\alpha^2\alpha^3 \end{pmatrix}, \tag{5.38}$$

$$\overline{g_i} = (\alpha^1 A_1\,,\, \alpha^2 A_2\,,\, \alpha^3 A_3)\,, \qquad \text{e} \qquad \overline{\epsilon^{ijk}} = (\alpha_1\epsilon^{i1k}\,,\, \alpha_2\epsilon^{i2k}\,,\, \alpha_3\epsilon^{i3k})\,. \tag{5.39}$$

Com essas notações, temos

$$\alpha^j K^i_j \partial_i \alpha^l g_l = \alpha^j K^i_j \alpha^l g_l \partial_i + \alpha^j K^i_j \partial_i (g_l) =$$

$$= \overline{K^i_j} g^j \partial_i + \overline{K^i_j} \partial_i (g^j) + i\Sigma_k \overline{\epsilon^{jlk}} K^i_j \overline{g_l} \partial_i + i\Sigma_k \overline{\epsilon^{jlk}} K^i_j \partial_i (\overline{g_l}) \,. \quad (5.40)$$

O outro termo tem a forma

$$\alpha^j K^i_j \partial_i \alpha^l K^m_l \partial_m = \alpha^j K^i_j \alpha^l [\partial_i (K^m_l) \partial_m + K^m_l \partial_i \partial_m] =$$

$$= \overline{k^{il}} \partial_i (k^m_l) \partial_m + \overline{k^{il}} k^m_l \partial_i \partial_m + i\epsilon^{jlk} \overline{k^i_j} \partial_i (k^m_l) \partial_m \,. \quad (5.41)$$

Enfim, temos o operador H^2

$$H^2 = m^2 c^4 \; + \; \overline{K^{il}} K^m_l \partial_i \partial_m \; + \; \overline{K^i_j} g^j \partial_i + g^j K^i_j \partial_i \; + \; g^2 \; + \; \overline{K^{il}} \partial_i (K^m_l) \partial_m \; + \; i\epsilon^{jlk} \overline{K^i_j} \partial_i (K^m_l) \partial_m +$$

$$+ \Sigma_k i \overline{\epsilon^{jlk}} K^i_j \overline{g_l} \partial_i \; - \; i\epsilon^{jlk} \Sigma_k K^i_j g_l \partial_i \; + \; i\Sigma_k \overline{\epsilon^{jlk}} K^i_j \partial_i (\overline{g_l}) \; + \; \overline{K^i_j} \partial_i (g^j) \,. \quad (5.42)$$

É importante notar que K^i_j possui apenas termos da métrica e g_i possui termos da métrica e termos de interação como A_i. Este operador H^2 é exato. A única aproximação feita foi desconsiderar termos de ordem superior para as amplitudes das ondas gravitacionais, mas eles também podem ser levados em conta, se for preciso. O próximo passo seria utilizar a equação (4.68). Antes, porém, vamos considerar alguns casos particulares interessantes desse resultado.

5.9 Análise de casos particulares

O resultado obtido na seção anterior precisa ser testado de alguma maneira. Um forte indício de que ele está correto pode ser dado quando se faz o estudo de casos particulares. Algo interessante nesse resultado é que ele engloba vários sistemas. Esses sistemas são aqueles em que a hamiltoniana pode ser colocada na forma da equação (5.32).

5.9.1 Partícula livre

Este é o caso mais simples em que K^i_j se reduz a simplesmente a $-i\,\hbar\,c\,\delta^i_j$ e não há termos de interação, ou seja, $g_i = 0$, pois $u = v = 0$ e $A_i = 0$. Portanto,

$$H^2 = (-i\hbar c)^2 \delta^{il} \delta^m_l \partial_i \partial_m + m^2 c^4 = m^2 c^4 + c^2 P^2 \,, \quad (5.43)$$

ou ainda,

$$H = \beta \sqrt{m^2 c^4 + c^2 P^2} \,, \quad (5.44)$$

que é um resultado conhecido de livros textos, como [2].

5.9.2 Partícula na presença do campo magnético

Vamos tomar agora o caso de uma partícula de Dirac na presença de um campo magnético constante. Para termos um campo constante da forma

$$\overrightarrow{B} = B_1 \overrightarrow{i} + B_2 \overrightarrow{j} + B_3 \overrightarrow{k} \,, \tag{5.45}$$

sabendo que $\overrightarrow{B} = \text{rot}\,\overrightarrow{A}$, devemos ter

$$\overrightarrow{A} = \frac{1}{2}(B_2 z - B_3 y)\overrightarrow{i} + \frac{1}{2}(B_3 x - B_1 z)\overrightarrow{j} + \frac{1}{2}(B_1 y - B_2 x)\overrightarrow{k} \,. \tag{5.46}$$

Neste caso temos também $K^i_j = -i\,\hbar\,c\,\delta^i_j$, mas há agora o termo de interação $g_i = -eA_i$, pois $u = v = 0$. Teremos

$$H^2 = m^2c^4 - \hbar^2c^2\partial_i\partial_i + 2i\hbar ceA^i\partial_i - \hbar ce\varepsilon^{ijk}\Sigma_k\partial_i(A_j) + e^2A^2 =$$

$$= m^2c^4 + (c\overrightarrow{P} - e\overrightarrow{A})^2 - \hbar ce\overrightarrow{\Sigma}\cdot\overrightarrow{B} \,, \tag{5.47}$$

ou ainda,

$$H = \beta\sqrt{m^2c^4 + (c\overrightarrow{P} - e\overrightarrow{A})^2 - \hbar ce\overrightarrow{\Sigma}\cdot\overrightarrow{B}} \,. \tag{5.48}$$

Este resultado foi obtido por Eriksen e Kolsrud [9].

5.9.3 Partícula com momento magnético anômalo num campo magnetostático

Neste caso, vamos partir da hamiltoniana na qual $K^i_j = -i\,\hbar\,c\,\delta^i_j$ e $g_i = -eA_i + \alpha_i\mu_I\eta\overrightarrow{\Sigma}.\overrightarrow{B}$, pois $u = v = 0$. Foi feito isso para poder comparar com o resultado obtido por Eriksen e Kolsrud [9]. Deve-se levar em conta comutadores de g_i com α^j e β. Chega-se a um Hamiloniano um pouco diferente de (5.42), pois agora se deve tomar um pouco mais de cuidado, visto que g_i também é uma grandeza vetorial. Deve-se calcular os comutadores de g_i com α_j. Teremos no final

$$H^2 = m^2c^4 + (c\overrightarrow{P} - e\overrightarrow{A})^2 - 2\mu_I mc^2\overrightarrow{\Sigma}.\overrightarrow{B} + \mu_I^2B^2 +$$

$$+\mu_I\beta\overrightarrow{\Sigma}.(\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{P} - \overrightarrow{P}\times\overrightarrow{B}) \,, \tag{5.49}$$

que também é um resultado obtido por Eriksen e Kolsrud em [9].

Capítulo 6

Equações de movimento

Nosso objetivo agora é obter as equações de movimento para uma partícula sujeita à interação estudada no capítulo anterior. Vamos seguir a idéia usada na referência [10]. Todos os passos serão mostrados a seguir.

6.1 A hamiltoniana da partícula

Primeiramente, vamos tomar uma onda com apenas uma polarização. Para isso vamos fazer $u \equiv 0$. Com essa condição, as equações (5.33) e (5.34) têm a forma

$$K^i_j = -i\hbar c(\delta^i_j + T^i_j v) \ , \ \ g_j = -e(\delta^i_j + T^i_j v)A_i \ , \tag{6.1}$$

onde

$$T^i_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ . \tag{6.2}$$

Podemos ver também que $K^i_j = \overline{K^i_j}$. Além disso não há mais necessidade de escrever $\overline{g_j}$ nem $\overline{\epsilon^{ijk}}$, pois ambos comutam com K^i_j e agora também com $\overline{K^i_j}$. Sabemos também que $\partial_j h_{ij} = 0$. Isso pode ser visto diretamente da equação (2.37). Usando as novas notações temos que $\nabla_j T^{ij} v = 0$. Substituindo tudo isso em H^2, obtido no capítulo anterior, equação (5.42), teremos um resultado mais simples

$$H^2 = (\delta^{ij} + 2T^{ij}v)(cP_i - eA_i)(cP_j - eA_j) - \hbar c^2 P_i T^{ij}[\overrightarrow{\Sigma} \times \nabla v]_j +$$

$$+\hbar ce(\delta^{ij} + 2T^{ij}v)(\Sigma_i B_j) + m^2c^4 \ . \tag{6.3}$$

Mas o interesse físico não está em H^2 e sim na própria hamiltoniana. Para obtê-la, vamos escrever $H^2 = A^2 + B$, onde A são os termos que dependem de m e B os que não dependem. Esse caso é simples, pois $A = mc^2$. Vamos então procurar por um operador K na forma

$$K = A + \frac{1}{A}K_1 + K_1\frac{1}{A} + \vartheta(\frac{1}{A})^2 \quad , \tag{6.4}$$

de tal maneira que $K^2 = H^2$. Nesse caso $[K, A] = 0$, logo

$$K^2 = A^2 + 4K_1 \Rightarrow B = 4K_1 \Rightarrow K_1 = \frac{B}{4} \quad . \tag{6.5}$$

Podemos escrever então,

$$K = A + \frac{B}{2A} \quad . \tag{6.6}$$

Substituindo tudo em K,

$$\sqrt{H^2} \simeq \frac{1}{2mc^2}(\delta^{ij} + 2T^{ij}v)(cP_i - eA_i)(cP_j - eA_j) -$$

$$-\frac{\hbar}{2m}P_iT^{ij}[\overrightarrow{\Sigma} \times \nabla v]_j + \frac{\hbar e}{2mc}(\delta^{ij} + 2T^{ij}v)(\Sigma_i B_j) + mc^2 \quad . \tag{6.7}$$

Resta agora apenas aplicar a equação (4.68) para obter H. Como todos os termos em (6.7) são pares (comutam com β), basta multiplicá-la por β para obter H. Temos então uma hamiltoniana em blocos. Finalmente encontramos

$$H^{tr} \simeq \frac{1}{2mc^2}\beta(\delta^{ij} + 2T^{ij}v)[(cP_i - eA_i)(cP_j - eA_j) - e\hbar c\varepsilon_{lik}\Sigma^k\partial^l(A_j)] +$$

$$+\beta\frac{\hbar}{2mc}\varepsilon^{jlk}\partial_j(v)\Sigma_k T_l^m(cP_m - eA_m) + \beta mc^2 \, . \tag{6.8}$$

Agora vamos escrever o spinor em duas componentes, na forma

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} e^{\frac{-imc^2t}{\hbar}} \tag{6.9}$$

e usar o fato que $i\hbar\partial_t\psi = H\psi$ para acharmos a hamiltoniana para φ. Teremos, portanto,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = -mc^2\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + H\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad . \tag{6.10}$$

Usando o fato de a hamiltoniana ser par, a hamiltoniana para φ será

$$H = \frac{1}{2mc^2}(\delta^{ij} + 2T^{ij}v)[(cP_i - eA_i)(cP_j - eA_j) - e\hbar c\varepsilon_{lik}\sigma^k\partial^l(A_j)] +$$

$$+\frac{\hbar}{2mc}\varepsilon^{jlk}\partial_j(v)\sigma_k T_l^m(cP_m - eA_m) \quad . \tag{6.11}$$

A hamiltoniana acima descreve uma partícula na presença de um campo magnético constante, numa região onde há ondas gravitacionais. Todos os termos presentes nela possuem a massa na potência menos um. A equação de Pauli (3.30), a menos do termo A_0, que neste caso estamos assumindo nulo, também possui essa propriedade. Como a hamiltoniana acima é exata, logo surge a idéia de tentarmos obtê-la como um limite não relativístico para a hamiltoniana inicial, equação (5.32) (antes da transformação exata).

O cálculo é exatamente o mesmo feito na seção (4.4) para obter a equação de Pauli. Tomamos a hamiltoniana (5.32) e supomos a solução na forma (6.9). Substituímos em $i\hbar\partial_t\psi = H\psi$ e consideramos o limite de baixas energias, ou seja, que o termo mc^2 é dominante ($|mc^2\chi| \gg |i\hbar\partial_t\chi|$). Com essas considerações, chegamos a

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \frac{1}{2mc^2}(\sigma^j K_j^i\partial_i + \sigma^i g_i)(\sigma^l K_l^m\partial_m + \sigma^l g_l)\varphi\,. \tag{6.12}$$

Depois de alguns cálculos com o lado direito desta equação, chegamos a

$$H = \frac{1}{2mc^2}(\delta^{ij} + 2T^{ij}v)[(cP_i - eA_i)(cP_j - eA_j) - e\hbar c\varepsilon_{jmk}\Sigma^k\partial^j A^l] +$$

$$+\frac{\hbar}{2mc^2}\varepsilon^{jlk}\partial_j(v)\sigma_k T_l^m(cP_m - eA_m) \quad , \tag{6.13}$$

que é a mesma hamiltoniana (6.11). Este resultado já era esperado e é muito interessante, pois valida o método de transformações exatas.

Como caso particular dessa hamiltoniana podemos facilmente eliminar as ondas gravitacionais fazendo $v \equiv 0$. Teremos

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \frac{1}{2mc^2}[\overrightarrow{\sigma}(c\overrightarrow{p} - e\overrightarrow{A}) \cdot \overrightarrow{\sigma}(c\overrightarrow{p} - e\overrightarrow{A})]\varphi \quad , \tag{6.14}$$

que depois de alguns cálculos, nos fornece

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi = [\frac{1}{2m}(\overrightarrow{p} - \frac{e}{c}\overrightarrow{A})^2 - \frac{e\hbar}{2mc}\overrightarrow{\sigma} \cdot \overrightarrow{B}]\varphi \quad , \tag{6.15}$$

que é a equação de Pauli (3.30), com $A_0 = 0$.

6.2 Equações de movimento

Vamos agora fazer a quantização canônica da teoria não-relativística. Para isso, introduzimos os operadores de coordenada $\hat{x}_i$, momenta $\hat{p}_i$ e spin $\hat{\sigma}_i$ com as seguintes relações de comutação (satisfeitas para instantes de tempos iguais)

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad , \quad [\hat{x}_i, \hat{\sigma}_j] = [\hat{p}_i, \hat{\sigma}_j] = 0 \quad , \quad [\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k \ . \tag{6.16}$$

O operador hamiltoniano $\hat{H}$ que corresponde à energia (6.8) é construído em termo dos operadores $\hat{x}_i$, $\hat{p}_i$, $\hat{\sigma}_i$, e esses operadores fornecem as equações de movimento

$$i\hbar\frac{d\hat{x}_i}{dt} = [\hat{x}_i, H] \quad , \quad i\hbar\frac{d\hat{p}_i}{dt} = [\hat{p}_i, H] \quad , \quad i\hbar\frac{d\hat{\sigma}_i}{dt} = [\hat{\sigma}_i, H] \ . \tag{6.17}$$

Depois de calcular os comutadores em (6.17), chegamos à forma explícita das equações de movimento dos operadores. Agora podemos omitir todos os termos que se anulam quando $\hbar \to 0$. Obtemos, portanto, equações clássicas de movimento que podem ser interpretadas como as equações de movimento (quasi)clássicas para a partícula na presença de ondas gravitacionais fracas e campo magnético constante. Introduzindo $A'_i = T_{ij}A^j$, o cálculo direto nos fornece as equações

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{m}(\delta_{ij} + 2\,T_{ij}\,v)(P^j - \frac{e}{c}A^j) \quad ,$$

$$m\frac{d\dot{x}_i}{dt} = \frac{e}{c}\left\{\dot{\overrightarrow{x}} \times \left[\overrightarrow{B} + 2v \text{ rot } \overrightarrow{A}'\right]\right\}_i - \frac{e}{c}(\delta_{ij} + 2T_{ij}v)\frac{\partial A^j}{\partial t} +$$

$$+2mT_{ij}\frac{dv}{dt}\dot{x}^j - mT_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k(\nabla_i v)\,,$$

$$\frac{d\sigma_i}{dt} = \frac{e}{mc}\varepsilon_{ijk}\sigma^k[\overrightarrow{B} + 2v\,\text{rot}\,(\overrightarrow{A}')]^j + \frac{1}{mc}(cP^l - eA^l)\sigma^m[T_{ml}(\partial_i v) - T_{il}(\partial_m v)]\,. \tag{6.18}$$

As soluções destas equações podem mostrar o efeito das ondas gravitacionais para o movimento de uma partícula carregada com spin. A diferença dessas equações para as equações clássicas de uma partícula um campo magnético aparecem nos termos onde v está presente. A segunda equação, por exemplo, é a força de Lorentz mais alguns termos onde v, ou seja, a interação com as ondas gravitacionais, está presente. O termo $2v$ rot $\overrightarrow{A}'$ mostra a interação das ondas gravitacionais com o campo magnético.

Capítulo 7

Conclusões

Nesta tese, foram estudados alguns aspectos de transformação Foldy-Wouthuysen exata, inclusive na presença de campo externo da onda gravitacional e campo magnético e o limite não relativístico. Os principais resultados que nós apresentamos neste trabalho são os seguintes:

Na seção (4.4) foram considerados os critérios de transformação Foldy-Wouthuysen exata e apresentados alguns detalhes técnicos desta transformação. O resultado principal é a equação (4.68). Esta equação pode ser aplicada, em particular, a uma hamiltoniana que anticomute com a matriz η. No capítulo 5, foi obtido o operador H^2 para o problema físico deste trabalho. Logo depois, foi mostrado que a equação (5.42) engloba alguns casos particulares que foram explicitados nas equações (5.44), (5.48) e (5.49).

Para encontrar as equações de movimento no caso de campo de Dirac interagindo com uma onda gravitacional, elaboramos o caso em que a onda possui apenas uma polarização. Desta maneira, no capítulo 6, chegamos à hamiltoniana da partícula (6.11). Vimos também que essa hamiltoniana tem como caso particular o fato de gerar a equação de Pauli (6.15) quando $v \equiv 0$, ou seja, quando não há ondas gravitacionais. Além disso, foi mostrado que a equação (6.11) pode ser obtida fazendo o limite não-relativístico de (5.32). Esta correspondência entre os resultados calculados independentemente fornece uma confirmação particular das contas ligadas à transformação Foldy-Wouthuysen exata na presença da onda gravitacional.

Finalmente, usando as relações de comutação (6.17), chegamos às equações de movimento (6.18) para uma partícula não relativística de spin 1/2.

Podemos mencionar que, além dos cálculos apresentados neste trabalho, foram consideradas as versões da transformação Foldy-Wouthuysen exata para caso da torção e para outro tipo de onda gravitacional (solução exata da equação de Einstein), sugerido anteriormente pelo Prof. Yu. N. Obukhov.

Bibliografia

[1] L.D. Landau and E.M. Lifshits, Field Theory, (McGraw-Hill, USA, 1964).

[2] J.M. Bjorken and S.D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*. (McGraw-Hill Book Company – NY, 1964).

[3] C.W.Misner, K.S.Thorn and J.A.Wheeler, Gravitation. (Freeman, San Francisco, 1973).

[4] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology. (Wiley, New York, 1972).

[5] O. Bertolami, J. Paramos, S.G. Turyshev, *General theory of relativity: Will it survive the next decade?* Proceedings of International Conference on Lasers, Clocks, and Drag-Free Key Technologies for Future Exploration in Space, Bremen, Germany, 30 May - 1 Jun 2005, [gr-qc/0602016].

[6] B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko and S.P. Novikov, Modern Geometry-Methods and Applications, (Springer-Verlag, 1984).

[7] A.J. McConnell, Applications of Tensor Analysis. (Dover Publications, Inc., New York, 1957).

[8] I.L. Buchbinder, S.D. Odintsov and I.L. Shapiro, *Effective Action in Quantum Gravity* (IOP Publishing, Bristol, 1992).

[9] E. Eriksen and M. Kolsrud, Canonical Transfomations of Dirac´s Equations to Even Forms. Expansion in Terms of the External Fields. *Nuovo Cimento*, **vol 18, serie 10** (1-39) (1960).

[10] V.G. Bagrov, I.L. Buchibinder and I.L. Shapiro, On the possible experimental manifestations of the torsion field at low energies. *Izv. VUZov, Fisica (in Russian).* (English translation: Sov.J.Phys.) **35,n3** (1992) 5; HEO-TH 9406122 (modified);

L.H. Ryder and I.L. Shapiro, On the interaction of massive spinor particles with external eletromagnetic and torsion fields *Physics Letters* **247A** (1998) 21.

[11] K.M. Case, Some generalizations of Foldy-Wouthuysen Transformation. *Physical Review* **n 5 vol 95** (1323-1328)(1954).

[12] A.G. Nikitin, On the exact Foldy-Wouthutsen transformation. *J. Phys A: Math.*Gen **31**(1998) (3297-3300).

[13] C.G. de Oliveira and J.Tiomno, Representations of Dirac Equation in General Relativity. *Nuovo Cimento* **vol 25, N.4** (1876-1891) (1962).

[14] Yuri N. Obukhov, Spin, gravity and Inertia. *Physicak Review Letters* **N. 2, vol 86** (192-195); gr-qc/0012102 v1 (2001).

[15] A. Lightman, W. Press, R. Price, and S. Teukolski, Problem Book in Relativity and Gravitation Princeton University Press, Princeton (1975).

[16] L. H. Ryder, Quantum Field Theory Paperback, (1986).

[17] Diego F. Carneiro, Emanuel A. Freiras, Bruno Gonçalves, Andre G. de Lima and Ilya L. Shapiro, On Useful Conformal Tranformations In General Relativity. *Gravitation and Cosmology* **vol 10, N 4** (305-312) (2004).