Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas, Física
Departamento de Física

Estudos em Não-Comutatividade Via Formalismo Simplético

Mateus Vinicius Marcial

Dissertação de Mestrado

Orientador: **Prof. Dr. Wilson Oliveira**

Co-orientador: **Prof. Dr. Clifford Neves Pinto**

30 de julho de 2009

Juiz de Fora - MG

Monografia apresentada ao Departamento de Física, ICE, **UFJF**, como requisito parcial para obtenção do Título de **mestre em Física**.

Marcial, Mateus Vinicius   Estudos em Não-comutatividade Via Formalismo Simplético

Mateus Vinicius – Juiz de Fora, [M.G.:s.n.], 2009.

Orientador: Wilson Oliveira

Co-Orientador: Clifford Neves Pinto

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Departamento de Física

Banca examinadora: 1. Dr. Wilson Oliveira (Orientador-UFJF)

2. Dr. Clifford Neves Pinto (Co-orientador - UERJ)

3. Dr. Clóvis José Wotzasek (UFRJ)

4. Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu (UFRRJ)

4. Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes (UFJF) (UFJF)

Data da defesa: 30/07/2009

Dedico este trabalho a minha família

e aos meus amigos.

Agradecimentos

Agradeço primeiro a Deus que é o criador de todas as coisas.

A meus pais, minha irmã, a Química Bruna Luana Marcial; e o meu irmão, o Matemático Marcos Roberto Marcial; pelo apoio, pela compreensão e pelas orações.

Aos professores Dr. Wilson Oliveira (orientador) e Dr. Clifford Neves Pinto (Co-orientador - UERJ, pela paciência, pela competência e confiança.

Aos professores da banca, Dr. Clóvis José Wotzasek (UFRJ), Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu (UFRRJ), Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes (UFJF), por aceitarem participar da minha banca.

À Coordenação da pósgraduação, ao secretário da pósgraduação Domingos e aos demais professores do departamento de física por toda ajuda prestada no decorrer do meu curso.

Aos meus colegas de curso, em especialmente José Amâncio dos Santos, e a todos que participaram diretamente ou indiretamente desta minha caminhada na UFJF.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo bolsa concedida durante realização deste trabalho.

Resumo

Nesta tese, inicialmente, realizamos um estudo introdutório sobre sistemas vinculados, onde os formalismos de Dirac e Faddeev-Jackiw-Barcelos Neto-Wotzasek (este também chamado de formalismo simplético) são apresentados. O formalismo simplético tem uma peculiaridade, que é a de usar os vínculos para deformar a estrutura geométrica do espaço de configuração. O objetivo principal de ambos os métodos é o de se chegar aos parênteses de Dirac, que se constituem na ponte para os comutadores da mecânica quântica. Também apresentamos uma breve revisão de teorias não-comutativas e dinâmica de fluidos. Com base no formalismo simplético, apresentamos um método que permite obter versões não-comutativas de sistemas comutativos. Este método foi ilustrado em um sistema mecânico arbitrário não-degenerado e em um oscilador quiral. Os resultados encontrados estão em acordo com os resultados já apresentados na literatura. O trabalho original desta tese consiste na utilização do formalismo simplético de indução de não-comutatividade (FSINC) em mecânica de fluidos, mais especificamente, nos modelos para fluidos irrotacionais e rotacionais. As versões não-comutativas de tais modelos apresentaram interessantes resultados, como o comportamento quiral do fluido e a possibilidade de relacionar a viscosidade do fluido com o parâmetro de não-comutatividade.

Palavras chaves: Não-Comutatividade, Formalismo Simpletico, Fluidos.

Abstract

In this thesis, initially, we present a introductory study about constrained systems. It was based on Fadeev-Jackiw-Barcelos Neto-Wotsasek and Dirac formalisms. The former is also called symplectic formalism. The symplectic formalism has a peculiarity, it uses the constraints to deform the structure geometric of the space. The main objective both formalisms is to get the Dirac brackets among the variables. Which are the bridge to construct the commutators of the Quantum Mechanic. Further, we have done a brief review about Noncommutative theories and dynamic of fluids. We have used the simplectic formalism to construct a method that allows to get non-commutative versions of the commutative systems. This method was exemplified in two systems, Nondegenered Mechanic System and Quiral Oscilator. The results carryed out are in agreement with the results that exist in the literature. The original work of this thesis consist in the application of the simplectic formalism of induction of the Noncommutativity (SFIN) in Fluid Mechanic, more especifcly, in the irrotational and rotational fluid model. The noncommutative versions of this models revealed interesting results, for example, the chiral behavior of the fluid and a possibility of to turn on the viscosity of fluid with the parameters of the noncommutativity of the models.

Keywords: Noncommutativity, Simplectic Formalism, Fluids

Sumário

Introdução

Neste trabalho buscamos desenvolver a versão não-comutativa de alguns sistemas físicos, iremos fazê-la através de um método sistemático de contruir lagrangianas não-comutativas. Esse método é baseado no formalismo simplético. Previamente, faremos estudos básicos, porém importantes para nosso propósito, de sistema vinculados, fluidos e espaços não-comutativos.

No capítulo 1, vamos apresentar um tratamento básico de sistemas vinculados. Esse foi, primeiramente, realizado por Dirac em méados do século xx, [1], e é chamado *método de Dirac* , cujo objetivo principal é obter os parênteses generalizados ou parênteses de Dirac. Recentemente em alguns trabalhos, Faddeev e Jackiw [2], apresentou uma forma distinta de se obter os parênteses de Dirac, através de um tratamento geométrico, baseado em estruturas simpléticas. Esse formalismo é chamado quantização de Faddeev-Jackiw. É importante ressaltar que alguns sistemas vinculados quando tratados pelo método simplético usado por Faddeev-Jackiw apresentam menor número de vínculo em relação ao tratemento do mesma sistema através dode Dirac [3], representando uma certa simplificação. No entanto, o método de Dirac é extremamente eficiente por ser realizado de forma iterativa, sendo de grande valia para tratar sistemas com muitos vínculos.

No capítulo 2, apresentaremos um estudo simplificado de espaços não-comutativos. Esses são caracterizados pela relação de comutação entre os operadores coordenadas

$$[X^i, X^j] = i\hbar\theta^{ij}. \tag{1}$$

Onde θ^{ij} é constante, real, antissimétrico e tem unidade de [time/massa].

Apresentaremos o desenvolvimento do produto Moyal e algumas de suas propriedades. Dado que, analisando de forma simples, podemos apontar a susbstituição do produto usual entre campos pelo produto Moyal como elemento crucial para se obter versões não-comutativas de teorias de campos.

No capítulo 3 faremos uma revisão básica de fluidos, em que apresentamos as principais equações da hidrodinâmica. Esse capítulo será importante visto que aplicaremos o método desenvolvido no capítulo 4 em um sistema de fluidos.

No capítulo 4, vamos analisar como não-comutatividade pode ser introduzida em uma teoria via formalismo simplético. Esse trabalha com lagrangianas de primeira ordem. As quantizações por deformações [4] podem ser generalizadas assumindo a existência de uma estrutura simplética clássica genérica, tais quantizações realizadas em uma linguagem simpléticas nos dará indícios de como não-comutatividade pode ser introduzida na teoria, que é nosso principal objetivo.

Finalmente, no capítulo 5, apresentaremos algumas aplicações do formalismo desenvolvido no capítulo 4. Nesse capítulo, também onstruiremos uma versão não-comutativa para ambos os modelos de fluido irrotacional e rotacional, donde somos induzidos a relacionar a viscosidade do fluido com a não-comutatividade entre a densidades e velocidade.

Por fim, discutiremos os nossos resultados e objetivos futuros com relação ao trabalho desenvolvido.

Capítulo 1

Métodos do Dirac e Formalismo Simplético

1.1 Introdução

Apresentaremos neste capítulo o desenvolvimento do método de Dirac, que é um tratamento consistente com sistema vinculados, e a quantização de Faddeev e Jackiw, buscando, na medida do possível, compará-los . Dado que tanto o formalismo de Dirac quanto o formalismos simplético usado por Faddeev e Jackiw buscam de formas diferentes a obtenção dos parênteses generalizados -parênteses de Dirac- que possibilitam uma ponte direta da mecânica clássica para a mecânica quântica. Ainda, dentro do formalismo simplético, vamos detalhar um pouco sobre sistemas sem vínculos e sistemas com vínculos.

1.2 Método de Dirac

A necessidade de estudar sistema vinculados em física surge muito naturalmente, mas para tratar esses sistema, muitos das vezes, é necessário desenvolver formalismos bem distintos dos usuais. Um exemplo disso ocorreu quando tentou-se realizar a passagem da mecânica clássica para mecânica quântica, tratando-se de sistemas vinculados, via o proceso de quantização canônico, que corresponde fundamentalmente a fazer a seguinte mudança

$$[P.Poisson] \rightarrow \frac{i}{ih}[comutador]. \tag{1.1}$$

É bom ressaltar a motivação para se escrever o processo de quantização canônico, descrito acima, advém da equação que descreve a evoluçao temporal de um operador quântico $\hat{B}$ -equação de Heisenberg-

$$\frac{d\hat{B}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{B}, \hat{H}] + \frac{\partial \hat{B}}{\partial t}, \tag{1.2}$$

comparada com a evolução temporal de uma quantidade clássica $B(q, p)$ correspondente ao operador quântico $\hat{B}$,

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= \frac{\partial B}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial B}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial B}{\partial t} \\ &= \frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial B}{\partial t} \\ &= \{B, H\} + \frac{\partial B}{\partial t}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Onde usamos as equações canônicas de Hamilton e a definição de parênteses de Poisson. A partir da comparação proposta anteriormente, fica claro a motivação que conduz ao processso descrito em (1.1).

No entanto, o processo de quantização canônico gera inconsistências quando tratamos com sistemas vinculados. Podemos exemplicar de forma simples essa inconsistência. Consideremos um sistema que possua um vínculo, $p_i = 0$. O parênteses de Poisson entre q_i e p_i é dado por

$$\{q_i, p_i\} = 1. \tag{1.4}$$

Entretanto, a relação de comutação entre os operadores $\hat{q}_i$ e $\hat{p}_i$, consistente com o vínculo $\hat{p}_i = 0$, é igual a zero,

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_i] = \hat{q}_i\hat{p}_i - \hat{p}_i\hat{q}_i = 0. \tag{1.5}$$

Portanto, para esse sistema que possui vínculo o processo de quantização canônica acarreta inconsistências.

Agora, fica claro o porquê do desenvolvimento do método de Dirac e, também, simplético, que buscam, como tínhamos dito anteriormente, desenvolver parênteses de

Poisson modificados, atualmente chamados parênteses de Dirac. Esses seriam capazes de contornar inconsistências como a observada no exemplo anterior. Dado um sitema com os vínculos $\phi_i(q,p) = 0$, o processo de quantização (1.1) será consistente desde que no lugar dos parênteses de Poisson coloquemos novos parênteses generalizados, tais que

$$\{\phi_i(q,p), A\}_{DB} = 0 \tag{1.6}$$

Onde A denota qualquer quantidade da teoria.

Seja um sistema com K vínculos,

$$\phi_i(q,p) \approx 0, \tag{1.7}$$

com $i = 1, 2, ...k < 2N$. Em que o símbolo $\approx$ faz referência ao fato de o parênteses de Poisson desse vínculo com qualquer outra quantidade da teoria poder ser não nulo. A partir da definição da hamiltoniana canônica,

$$H_c(q,p) = p_i q_i - L(q, \dot{q}). \tag{1.8}$$

Vamos calcular as equações de movimento no espaço das fase. Usando o princípio de Hamilton, juntamente com equação (1.8), na presença de vínculos, temos

$$\delta \int (p_i \dot{q}_i - H_c) dt = 0,$$

logo

$$\delta \int (p_i \delta \dot{q^i} + \delta p_i \dot{q}_i - \delta H_c) dt = 0. \tag{1.9}$$

Essa equação afirma que mesmo na presença de vínculos podemos escrever

$$\delta H_c = \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i. \tag{1.10}$$

Isto sugere que δH_c pode ser escrito, de uma forma geral, como

$$\delta H_c = \frac{\partial H_c}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial H_c}{\partial p_i} \delta p_i. \tag{1.11}$$

Agora, levando esse resultado em $(1, 9)$, obtemos

$$\int \big[(-\dot{p}_i - \frac{\partial H_c}{\partial q_i})\delta q_i + (\dot{q}_i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i})\delta p_i\big] dt = 0 \tag{1.12}$$

Dado que os δq_i e δp_i são funções arbitrárias do tempo, a equação acima será satisfeita se

$$(-\dot{p}_i - \frac{\partial H_c}{\partial q_i})\delta q_i + (\dot{q}_i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i})\delta p_i = 0. \tag{1.13}$$

A existência das K relações de vínculos faz , até o momento, a equação acima ser inconclusiva. No entanto, da equação (1.7), temos

$$\delta\phi = \frac{\partial \phi}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial \phi}{\partial p_i}\delta p_i \approx 0. \tag{1.14}$$

Assim, temos K equações. Multiplicando cada uma por $-\lambda_l$ com $l = 1, 2, .., k$ que, geralmente são funções de q e p, e somando o resultado obtido com (1.13), econtramos uma equação que nos propiciará conclusões,

$$(-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} - \lambda_l \frac{\partial \phi_l}{\partial q_i})\delta q_i + (\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} - \lambda_l \frac{\partial \phi_l}{\partial p_i})\delta p_i \approx 0. \tag{1.15}$$

Dessa equação otemos as equações de Hamilton para sistemas vinculados:

$$\dot{p}_i \approx -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \lambda_l \frac{\partial \phi_l}{\partial q_i} \tag{1.16}$$

$$\dot{q}_i \approx \frac{\partial H}{\partial p_i} + \lambda_l \frac{\partial \phi_l}{\partial p_i}. \tag{1.17}$$

É interessante notar que as equações de Hamilton obtidas acima, seriam facilmente econtradas caso tivéssemos definido uma nova hamiltoniana no lugar de H_c dada por

$$H' = H_c + \lambda_l \phi_l. \tag{1.18}$$

Dessa hamiltoniana obtemos diretamente as equações de Hamilton, (1.16) e (1.17)

$$\dot{q}_i = \{q_i, H'\}$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H'\}. \tag{1.19}$$

Quando supomos que o sistema possuia K relações de vínculos, que eram primários,[1] não excluímos a hipótese de existir vinculos secundários. Analogamente a que foi feito na construção de H', que incorpora os vínculos primários, podemos contruir uma hamiltoniana total que incorpora na teoria, além dos K vínculos primários, os M vínculos secundários, da seguinte forma

$$H = H_c + \lambda_a \phi_a \qquad a = 1, 2, ..., M + K < 2N. \tag{1.20}$$

Agora, para determinar os vínculos secundários lançamos mão de uma condição de consistência dos próprios vínculos ϕ_i, isto é, os vínculos não evoluem com o tempo. Devemos impor essa condição de consistência a todos os vínculos, inclusive os vínculos secundários, até determinarmos todos os vínculos secundários e multiplicadores de Lagrange da teoria. No entanto, nem sempre que impomos que um vínculo não evolua com o tempo, encontramos um novo vinculo secundário, podemos tanto encontrar um vínculo já obtido ou, geralmente, obter uma relação entre multiplicadores de Lagrange, que estão presentes na Hamiltoniana total H e representam, na prática, o preço pago pela existência de vinculos no sistema.

Analogamente a introduçao dos parênteses de Poisson para descrever a evolução temporal de uma quantidade qualquer da teoria, tratando-se de sistemas sem vínculos, realizado no início do capítulo. Vamos escrever a evolução temporal de uma quantidade qualquer $B(q, p)$ utilizando as equações de Hamilton para sistema vinculados, isto é,

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial B}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &\approx \frac{\partial B}{\partial q_i}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i} + \lambda_a \frac{\partial \phi_a}{\partial p_i}\right) + \frac{\partial B}{\partial p_i}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} - \lambda_a \frac{\partial \phi_a}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial B}{\partial t} \\ &\approx \{B, H\} + \lambda_a \{B, \phi_a\} + \frac{\partial B}{\partial t}, \end{aligned} \tag{1.21}$$

Onde o índice a é relativo a todos os vínculos da teoria, incluindo, caso existam, vínculos decorrentes da fixação de gauge.

[1]Vínculos são consideros primários quando surgem, diretamente, da expressão de momento $P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, caso contrário, são ditos secundários.

Dado que $B(q,p)$ é uma quantidade qualquer da teoria, vamos substitui-lo por um dos vínculos da teoria, logo

$$\frac{d\phi_b}{dt} \approx \{\phi_b, H\} + \lambda_a\{\phi_b, \phi_a\} \approx 0. \tag{1.22}$$

Introduzindo uma matriz C, tais que seus elementos são os parênteses de Poisson dos vínculos, ou seja,

$$C_{ab} = \{\phi_a, \phi_b\} = -C_{ba} \tag{1.23}$$

e segue-se que

$$\lambda_a C_{ab} \approx \{\phi_b, H\}, \tag{1.24}$$

onde usamos que a matriz C é antissimétrica (vínculos bosônicos). Quando todos os vínculos da teoria são considerados, foi mostrado por Dirac que a matriz C é não- singular. Então da última equação podemos determinar os multilicadores de Lagrange

$$\lambda_a \approx -C^{-1}_{ab}\{\phi_b, H\}, \tag{1.25}$$

usando esse resultado em (1.21), finalmente encontramos

$$\begin{aligned}\frac{dB}{dt} &\approx \{B, H\} - \{B, \phi_a\}C^{-1}_{ab}\{\phi_b, H\} + \frac{\partial B}{\partial t} \\ &\approx \{B, H\}_{DB} + \frac{\partial B}{\partial t},\end{aligned} \tag{1.26}$$

onde

$$\{B, H\}_{DB} = \{B, H\} - \{B, \phi_a\}C^{-1}_{ab}\{\phi_b, H\} \tag{1.27}$$

é definido como parênteses de Dirac entre as quantidades B e H.

Neste momento, somos levados, por analogia ao caso dos parênteses de Poisson tratando-se de sistemas sem vínculos, a comparar a equação (1.26) com a equação quântica de Heisenberg. Isso nos levará a propor um processo de quantização para sistemas vinculados da seguinte maneira

$$\{P.Dirac\} \rightarrow \frac{1}{ih}[comutador]. \tag{1.28}$$

É oportuno comentar que os processos de quantizações são realizados de forma direta, somente, se não houver problemas de ordenamento de operadores.

Essa proposta que foi realizada possui fortes evidências para estar correta. Sem dúvida, a mais contundente é o fato de relações de vínculos que, que só valiam fracamente em termos dos parênteses de Poisson, valerem fortemente dentro dos parênteses de Dirac, ou seja, o parênteses de Dirac de um vínculo ϕ_b com qualquer outra quantidade da teoria é sempre zero

$$\begin{aligned}\{B,\phi_c\}_{DB} &= \{B,\phi_c\} - \{B,\phi_a\}C^{-1}_{ab}\{\phi_b,\phi_c\} \\ &= \{B,\phi_c\} - \{B,\phi_a\}C^{-1}_{ab}C_{bc},\end{aligned}$$

logo

$$\{B,\phi_c\}_{DB} = \{B,\phi_c\} - \{B,\phi_a\}\delta_{ac} = 0. \tag{1.29}$$

É importante lembrarmos do exemplo citado no início do capítulo, onde mostramos que para sistemas vinculados o processo de quantização canônico era incosistente. Agora, caso coloquemos os parêntese de Dirac no lugar dos parênteses de Poisson, em virtude de da equação acima, o processo de quantização não acarreta nenhuma inconsistência.

1.3 Método simplético

1.3.1 Introdução à notação simplética

Seja um dado sistema descrito no espaço de fases por 2N variáveis q_i e p_i. É Possível escrever convenientemente os parênteses de Poisson entre duas quantidades quaisquer, por exemplo $A(q,p)$ e $B(q,p)$, do seguinte modo

$$\{A(q,p),B(q,p)\} = \frac{\partial A}{\partial q_i}\{q_i,q_j\}\frac{\partial B}{\partial q_j} + \frac{\partial A}{\partial q_i}\{q_i,p_j\}\frac{\partial B}{\partial p_j} + \frac{\partial A}{\partial p_i}\{p_i,q_j\}\frac{\partial B}{\partial q_j} + \frac{\partial A}{\partial p_i}\{p_i,p_j\}\frac{\partial B}{\partial p_j}. \tag{1.30}$$

Agora, vamos introduzir uma notação muito interessante e concisa, notação simplética. Para isso, denotaremos o conjunto de coordenadas e momentos, apenas por ξ^α $(\alpha =$

$1, 2, ..., 2N)$, tal que

$$\xi^i = q_i$$
$$\xi^{i+N} = p_i. \tag{1.31}$$

Utilizando essa nova notação, podemos reescrever os parênteses anteriores como

$$\{A(q,p), B(q,p)\} = \frac{\partial A}{\partial \xi^\alpha}\{\xi^\alpha, \xi^\beta\}\frac{\partial B,}{\partial \xi^\beta} \tag{1.32}$$

onde usamos os parênteses fundamentais de Poisson, que em notação simplética são

$$\{\xi^\alpha, \xi^\beta\} = \epsilon^{\alpha\beta} \tag{1.33}$$

com $\epsilon^{\alpha\beta}$ dado por

$$\epsilon^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0_{NxN} & I_{NxN} \\ -I_{NxN} & 0_{NxN} \end{pmatrix}, \tag{1.34}$$

que é um tensor simplético no caso de sistemas sem vínculos, e funciona como a métrica do espaço simplético.

1.3.2 Formalismo simplético com vínculos e sem vínculos

Como foi dito anteriormente, o método simplético trabalha com lagrangianas de primeira ordem. Algo nem tão restritivo, já que maioria das lagrangianas quadráticas de interesse podem ser transformadas em lagrangianas de primeira ordem, estendo-se o espaço de configuração com introdução de campos auxiliares. Estes são geralmente os momenta. Além disso, algumas lagrangianas só possuem formulação em primeira ordem, por exemplo, lagrangianas para campos de Dirac e lagrangiana de Klein Gordon.

Seja um sistema dinâmico descrito por uma lagrangiana de primeira ordem da forma

$$L = a_j\dot{\xi}^j - H(\xi^k). \tag{1.35}$$

Em que $H(\xi)$ é a hamiltoniana do sistema e ξ^j são as variáveis simpléticas. Da equação de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial \xi^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^i} = 0 \tag{1.36}$$

temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a_j}{\partial \xi^i}\dot{\xi}^j - \frac{\partial H(\xi^k)}{\partial \xi^i} - \frac{d}{dt}\big(a_i(\xi^k)\big) = 0 \\
\frac{\partial a_j}{\partial \xi^i}\dot{\xi}^j - \frac{\partial H(\xi^k)}{\partial \xi^i} - \frac{\partial a_i}{\partial \xi^j}\dot{\xi}^j = 0 \\
\left(\frac{\partial a_j}{\partial \xi^i} - \frac{\partial a_i}{\partial \xi^j}\right)\dot{\xi}^j = \frac{\partial H(\xi^k)}{\partial \xi^i}.
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Sendo assim,

$$f_{ij}\dot{\xi}^j = \frac{\partial H(\xi^k)}{\partial \xi^i}, \tag{1.38}$$

em que

$$f_{ij} = \frac{\partial a_j(\xi^k)}{\partial \xi^i} - \frac{\partial a_i(\xi^k)}{\partial \xi^j} \tag{1.39}$$

Se os coeficientes $a_j(\xi^k)$ são tais que f_{ij} é não-singular, então f_{ij} possui inversa e iremos indica-la por f^{ij}. E da equação (1.38) encontramos

$$\dot{\xi}^j = f^{ij}\frac{\partial H(\xi^k)}{\partial \xi^i}. \tag{1.40}$$

Por outro lado, podemos obter a equação acima utilizando-se a formulação hamiltoniana. Então façamos

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}^j = \{\xi^j, H(\xi^k)\} \\
\dot{\xi}^j = \{\xi^j, \xi^i\}\frac{\partial H(\xi^k)}{\partial \xi^i}.
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Comparando as equações (1.40) e (1.41), encontramos

$$f^{ij} = \{\xi^j, \xi^i\}. \tag{1.42}$$

Caso a matriz $f^{ij} = \{\xi^j, \xi^i\}$ seja singular o sistema apresenta vínculos ou tem simetria de gauge. E $f^{ij} = \{\xi^j, \xi^i\}$ não pode ser identificado como tensor simplético, já que, fazendo o papel da métrica do espaço simplético, ele deveria possuir inversa. Portanto, não iremos conseguir, à princípio, determinar os parênteses da teoria. O método simplético com vínculos busca solucionar esse problema, por meio de deformação da estrutura geométrica do espaço simplético, ou seja, usa-se os vínculos para se obter uma novo tensor, que seja não-singular e que possa ser identificado como métrica do espaço.

Consideremos que exista uma quantidade qualquer $C(\xi^k)$, não-nula, que possua os parênteses de Poisson com as variáveis simpléticas ξ^i todos nulos,

$$\{\xi^i, C(\xi^k)\} = f^{ij}\frac{\partial C(\xi^k)}{\partial \xi^j}$$

$$f^{ij}\frac{\partial C(\xi^k)}{\partial \xi^j} = 0 \tag{1.43}$$

Dessa equação, notamos que $\frac{\partial C(\xi^k)}{\partial \xi^j}$, é um modo zero de f^{ij} , que logo não possui inversa.

Vamos denotar a matriz singular e o modo zero por $f_{ij}^{(0)}$ e $w_j^{(0)}$, respectivamente. E consideremos que existam $w_l^{(0)}$, com $(l < 2N)$, modos zeros. Ou seja,

$$f_{lm}^{(0)} w_m^{(0)} = 0 \tag{1.44}$$

Substituindo essa equação na lagrangiana de primeira ordem, descrita anteriormente, em que consideremos que sua parte cinética não depende das ξ^k, temos

$$w_l^{(0)}\frac{\partial V(\xi^k)}{\partial \xi^l} = 0, \tag{1.45}$$

onde $V(\xi^k)$ denota energia potencial. Geralmente, essa equação representa vínculos. Esses podem ser introduzidos na lagrangiana por meio de multiplicadores de Lagrange. Vamos tomar a derivada temporal do vínculo obtido acima e introduzi-lo na parte cinética da lagrangiana. Isso levará à deformação do tensor $f_{ij}^{(0)}$, como veremos a seguir.

A introdução dos multiplicadores de Lagrange $\lambda_l^{(0)}$ extendem o espaço de configuração. Realizando esse procedimento, temos

$$L^{(1)} = a_i(\xi^k)^{(0)}\dot{\xi}^i - V^{(0)}(\xi^k) + \lambda_l \frac{d}{dt}\big(\Omega_l^{(0)}(\xi^i)\big),$$

$$L^{(1)} = \big(a_i^{(0)} + \lambda_l \frac{\partial \Omega_l^{(0)}}{\partial \xi^i}\big)\dot{\xi}^i - V(\xi^k). \tag{1.46}$$

Donde podemos identificar novos vetores,

$$a_i^{(1)} = a_i^{(0)} + \lambda_l \frac{\partial \Omega_l^{(0)}}{\partial \xi^i}$$

$$a_l^{(1)} = 0 \tag{1.47}$$

onde $\Omega_l^{(0)}$ são os vínculos decorrentes de (1.45). Dessa forma obtemos novos tensores,

$$f_{ij}^{(1)} = \partial_i a_j^{(1)} - \partial_j a_i^{(1)}$$

$$f_{il}^{(1)} = \partial_i a_l^{(1)} - \partial_l a_i^{(1)} = -\partial_l a_i^{(1)}$$

$$f_{lm}^{(1)} = \partial_l a_m^{(1)} - \partial_m a_{(l)}^{(1)} = 0 \tag{1.48}$$

Onde $\partial_i = \frac{\partial}{\partial \xi^i}$ e $\partial_l = \frac{\partial}{\partial \xi^l}$. Caso $det f^{(1)} \neq 0$, conseguimos eliminar os vínculos da teoria, e calcular o tensor simplético adequado, que funcionará como métrica do espaço e, também, fornecerá os parênteses de Dirac. Por outro lado, se o tensor $f_{ij}^{(1)}$ ainda for singular, devemos encontrar seus modos zeros, que, geralmente, fornecerão novos vínculos. Os quais introduzidos na lagrangiana de primeira iteração $L^{(1)}$, através de multiplicadores de Lagrange, provocaram uma deformação do espaço, possibilitando a obtenção de um novo tensor simplético. Se $det f^{(2)} \neq 0$ encerramos o processo, chegamos ao nosso objetivo. Caso contrário, devemos repetir o processo, acima realizado, até obtermos um tensor não-singular que possibite obter o tensor simplético.

É importante ressaltarmos uma situação particular desse processo . Ela acontece quando encontramos um matriz singular, cujos modos zeros corespondentes não fornecem novos vínculos. Essa situação esta presente em teorias de gauge. Nesse caso, a fim de definir o tensor simplético, devemos introduzir as condições de gauge.

Capítulo 2

Elementos de espaços não-comutativos

2.1 Introdução a Espaços-Não-comutativos

O estudo de espaços não-comutativos em física não é algo novo. A algumas décadas esse assunto foi muito descutido por H. S. Snyder [5]. Entretanto, naquele momento seus estudos não foram nada providencial com o momento em que vivia a física. Esse marcado pelo sucesso da teoria da eletrodinâmica quântica.

Recentemente tem aflorado o interesse de estudar espaços não-comutativos, que são caracterizados pela relação de comutação entre os operadores coordenadas

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\hbar\theta_{ij}, \tag{2.1}$$

onde o parâmetro de não-comutatividade $\hbar\theta_{ij}$ tem dimensão de área. Esse interesse surgiu devido a busca de descrever fenômenos físicos como teoria de cordas [6] ,D_p-branas, efeito Hall quântico [7] e matéria condensada [17]. Buscando introduzir estudos em não-comutividade trataremos um pouco de geometria não-comutativa e de um novo produto, *Produto Moyal*. Visto que, matematicamente é possível construir uma teoria de campos não-comutativos trocando o produto usual entre campos pelo produto Moyal,

$$(f * g)(x) = \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{lj}(\partial_l^x)(\partial_j^y)\right) f(x)g(y)|_{x=y}, \tag{2.2}$$

com f e g funções infinitamente diferenciáveis. Por meio de uma simples análise dimensional, percebemos que a matriz θ_{ij} tem dimensão de [tempo/massa]. Dado que a unidade do parâmetro θ_{ij} envolve a massa e que temos apenas duas constantes fundamentais em física c e G, para determinar essa unidade, somos induzidos a fazer uma analogia entre o parâmetro θ_{ij} e um campo similar a gravidade.

2.2 Geometria Não-Comutativa

A geometria não-comutativa teve seus trabalhos pioneiros realizados, há muitos anos, por A. Cones, [23]. Esses estavam, basicamente, dentro de uma ótica mátemática. No decorrer do tempo, esses estudos foram sendo incorporados em física. Primeiramente, na busca, simplesmente, de entender algumas interações fundamentais em física dentro de um mundo não-comutativo.

A geometria não-comutativa, de forma simplificada, é um princípio variacional dos fundamentos de geometria, extendidos a espaços não-comutativos. A fim de realizar essa extensão é necessário desenvolver alguns conceitos básicos de geometria, dentro do espaço não-comutativo.

Definição: Uma $*$-álgebra A é um espaço complexo que possui operação de multiplicação, que é associativa e distributiva, juntamente com uma involução $a \to a^*$. Uma involução, em uma Álgebra β, é uma aplicação

$$* : \beta \to \beta$$

$$A \to A^* \tag{2.3}$$

com as seguintes propriedades:

$$i)(A + B)^* = A^* + B^*,$$

$$
\begin{aligned}
ii)(\alpha A)^* &= \bar{\alpha} A^*, \\
iii)(AB)^* &= B^* A^*, \\
iv) A^{**} &= A, \\
v) \|A^*\| &= \|A\|.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Onde $A, B \in \beta$, e $\alpha \in C$.

Uma $*$-álgebra β, com A e $B \in \beta$, que satisfaz

$$
AB = BA \tag{2.5}
$$

é dita ser uma Álgebra comutativa.

Definição: Uma C^*-Álgebra é uma álgebra tal que sua norma verifica as condições:

$$
\begin{aligned}
i) \|AB\| &\leq \|A\| \|B\| \\
ii) \|A^* A\| &= \|A\|^2.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Essa C^*-Álgebra é de grande importância, pois os conceitos de curva, superfície e espaço em geometria podem ser compreendidos por meio dela .

2.3 Produto Moyal

A fim de estudar espaços não-comutativos faz-se necessário introduzir um novo produto entre campos que seja consistente com a geometria do espaço não-comutativo. Esse produto será denominadado *Produto Moyal*. Vamos procurar, de forma simplificada, apresentar seu desenvolvimento. Para isso, consideremos uma álgebra comutativa de funções em $\Re^D$, munido do produto usual

$$
(f.g)(x) = f(x)g(x). \tag{2.7}
$$

Onde supomos que todos os campos são funções de decrescimento rápido no infinito. Sendo que, uma função $f : \Re^D \to C$ é dita de descrescimento rápido no infinito, se ela for infinitamente derivável, ou seja, $f \in C^{\infty}(\Re)$, e se

$$\lim_{\|x\| \to \infty} x^m d^n f(x) = 0, \tag{2.8}$$

onde d indica o operador derivada e m e n são naturais. Indicaremos o conjunto de funções de decrescimento rápido no infinito por $\underline{D}$. Toda função $\phi \in \underline{D}$ pode ser escrita pela sua transformada de Fourier, façamos

$$\widetilde{\phi}(k) = \int d^D x e^{-ik_j x^j} \phi(x) \tag{2.9}$$

É fácil notar que $\widetilde{\phi}(-k) = \overline{\widetilde{\phi}(k)}$, desde que $\phi(x) \in \Re$.

Um espaço não-comutativo pode ser construído por meio da substituição das coordenadas $x^j \in \Re^D$ por operadores hermitianos $\widehat{x^j}$, que satisfazem a relação de comutação definida em (1) . Os operadores hermitianos $\widehat{x^j}$ geram uma álgebra não comutativa. A correspondêcia entre a álgebra de campos em $\Re^D$ e a álgebra de operadores pode ser perfeiramente realizada através da quantização de Weyl.

Dada uma função $\phi \in \underline{D}$, juntamente com sua transformada de Fourier , o símbolo de Weyl é introzido por

$$\widehat{W}[\phi] \equiv \widehat{\Phi} = \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D k \widetilde{\phi}(k) \exp{(ik_j x^j)}. \tag{2.10}$$

Nessa equação adotamos o ordenamento simétrico de operadores proposto por Weyl. Obserevemos que $\widehat{W}[\phi]$ é hermitiano sempre que ϕ é real. A última equação, (2.10), pode ser reescrita em função do operador

$$\widehat{T}(k) = \exp{(ik_j \widehat{x}^j)} \tag{2.11}$$

da seguinte forma

$$\widehat{\Phi} = \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D k \widehat{T}(k) \widetilde{\phi}(k). \tag{2.12}$$

Como os $\widehat{x}^i{}^{,}s$ são operadores hermitianos, é óbvio que,

$$\widehat{T}^T(k) = \widehat{T}(-k). \tag{2.13}$$

Neste contexto, vamos encontrar algumas relações algébricas que serão úteis . Usando fórmula de Glauber,

$$e^A e^B = e^{(A+B)} e^{\frac{1}{2}[A,B]}, \tag{2.14}$$

para duas funcões $[\widehat{x}^i, [\widehat{x}^m, \widehat{x}^n]] = \widehat{o}$, obtemos, [1]

$$\begin{aligned}
\widehat{T}(k)\widehat{T}(k') &= \exp(ik_j\widehat{x}^j)\exp(ik'_l\widehat{x}^l) \\
&= \exp(i(k+k')_j\widehat{x}^j)\exp(\frac{i}{2}\theta^{jl}k_jk'_l) \\
&= \widehat{T}(k+k')\exp(\frac{i}{2}\theta^{jl}k_jk'_l).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

E ainda

$$Tr(\widehat{T}(k)) = \int d^Dx \left\langle x_j|\widehat{T}(k)|x_j\right\rangle, \tag{2.16}$$

onde $|x_j\rangle$ são auto funções dos operadores $\widehat{x}^j$.

Dado um operador arbitrário A, sua função $F(A)$ pode ser escrita por

$$F(A) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n A^n$$

$$A|\psi\rangle = \alpha|\psi\rangle .$$

Aplicando o operador A n vezes, sucessivamente, obtemos

$$A^n|\psi\rangle = \alpha^n|\psi\rangle$$

logo

$$F(\alpha)|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\alpha^n|\psi\rangle = F(A)|\psi\rangle , \tag{2.17}$$

[1]Para simplificar a notação consideramos $\hbar$ igual a um

usando este resultado, podemos reescrever a equação (2.16),

$$Tr(\widehat{T}(k)) = \int d^D x e^{ik_j x^j},$$

$$Tr(\widehat{T}(k)) = (2\pi)^D \prod_i \delta(k_i). \tag{2.18}$$

Usando as propriedades (2.15) e (2.18), podemos obter

$$Tr(\widehat{\Phi}\widehat{T}^T(k)) = Tr\{\frac{1}{(2\pi)^{2D}} \int d^D k' \widehat{T}(k')\widetilde{\phi}(k')\widehat{T}(-k)\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{2D}} \int d^D k' \widetilde{\phi}(k') Tr[\widehat{T}(k')\widehat{T}(-k)]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{2D}} \int d^D k' \widetilde{\phi}(k') Tr\{\widehat{T}(k-k') \exp{(\frac{i}{2}\theta^{jl} k_j k'_l)}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{2D}} \int d^D k' \widetilde{\phi}(k') \exp{(\frac{i}{2}\theta^{jl} k_j k'_l)} (2\pi)^D \prod_i (\delta(k-k')_i),$$

visto que a matriz θ^{jl} é anti-simétrica o fator exponencial, acima, reduz-se a um. Portanto

$$Tr(\widehat{\Phi}\widehat{T}^T(k)) = \frac{1}{(2\pi)^D}\widetilde{\phi}(k). \tag{2.19}$$

Essa equação servirá de motivação para contrução do produto Moyal. Se operador $\widehat{\Phi}$ for substituido pelo produto de dois operadores $\widehat{\phi}_1\widehat{\phi}_2$, onde os operadores $\widehat{\phi}_1$ e $\widehat{\phi}_2$ são definidos de forma análoga a $\widehat{\Phi}$, o novo campo $\widetilde{\phi}$ estará relacionado aos campos $\widetilde{\Phi}_1$ $\widetilde{\Phi}_2$ através de um produto diferente do usual

$$(\widetilde{\phi_1 * \phi_2})(k) \equiv (2\pi)^D Tr\{\widehat{\Phi}_1\widehat{\Phi}_2\widehat{T}^T(k)\}$$

$$= (2\pi)^D Tr\Big\{\Big(\frac{1}{(2\pi)^D}\int d^D k' \widehat{T}(k')\widetilde{\Phi_1}(k')\Big)\Big(\frac{1}{(2\pi)^D}\int d^D k'' \widehat{T}(k'')\widetilde{\Phi_2}(k'')\Big)\widehat{T}(-k)\Big\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^D}\int d^D k' d^D k'' \widetilde{\phi}_1(k')\widetilde{\phi}_2(k'') Tr\{\widehat{T}(k')\widehat{T}(k'')\widehat{T}(k)\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^D}\int d^D k' d^D k'' \widetilde{\phi}_1(k')\widetilde{\phi}_2(k'') Tr\{\widehat{T}(k')\widehat{T}(k''-k)\} \exp{(\frac{i}{2}\theta^{jl} k''_j k_l)}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^D}\int d^D k' d^D k'' \widetilde{\phi}_1(k')\widetilde{\phi}_2(k'') \exp{(\frac{i}{2}\theta^{jl} k''_j k_l)} Tr\{\widehat{T}(k'+(k''-k)) \exp{(\frac{i}{2}k'_m(k''-k)_n\theta^{mn}}\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^D}\int d^Dk' d^Dk'' \widetilde{\phi}_1(k')\widetilde{\phi}_2(k'')\exp{(\frac{i}{2}\theta^{jl}k''_jk_l)}\exp{(\frac{i}{2}k'_m(k''-k)_n\theta^{mn})}(2\pi)^D\prod_i\Bigg(\delta(k'+k''-k)_i\Bigg)$$

$$= \int d^Dk'\widetilde{\phi}_1(k')\widetilde{\phi}_2(k-k')\exp{(\frac{i}{2}\theta^{jl}(k-k')_jk_l)}\exp{(\frac{i}{2}k'_ik'_j\theta^{ij})}$$

$$(\widetilde{\phi_1 * \phi_2})(k) \equiv \int d^Dk'\widetilde{\phi}_1(k')\widetilde{\phi}_2(k-k')\exp{(-\frac{i}{2}k'_jk_l\theta^{jl})}. \tag{2.20}$$

Sendo que, na última expressão usamos o fato de θ^{ij} ser uma matriz anti-simétrica , logo

$$\exp{(-\frac{i}{2}k'_ik'_j\theta^{ij})} = \exp{(\frac{i}{2}k_ik_j\theta^{ij})} = 1.$$

Onde $(\widetilde{\phi_1 * \phi_2})(k)$ indica transformada de Fourier de $(\phi_1 * \phi_2)(k)$.

A equação (2.20) pode ser escrita de uma forma mais amigável, usando as seguintes notações

$$\widehat{k_i}|k>= k_i|k> \qquad <k|\phi>= \widetilde{\phi}_i(k), \tag{2.21}$$

$$\widehat{x_i}|x = x_i|x> \qquad <x|\phi>= \widetilde{\phi}_i(x), \tag{2.22}$$

$$<k|x>= \frac{\exp(-ik_jx^j)}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}}, \tag{2.23}$$

juntamente com a noção de produto tensorial, temos

$$(\widetilde{\phi_i * \phi_2})(k) = \int d^Dk'(<k-k'|\otimes<k'|)(|\phi_1>\otimes|\phi_2>)\exp{(-\frac{i}{2}k_lk'_j\theta^{lj})}$$

$$= \int d^Dk'(<k-k'|\otimes<k'|)\exp{(-\frac{i}{2}\widehat{k}_l\otimes\widehat{k}'_j\theta^{lj})}(|\phi_1>\otimes|\phi_2>)$$

$$= \int d^Dk'd^Dxd^Dy(<k-k'|\otimes<k'|)(|x>\otimes|y>)(<x|\otimes<y|)\exp{(-\frac{i}{2}\widehat{k}_l\otimes\widehat{k}'_j\theta^{lj})}(|\phi_1>\otimes|\phi_2>).$$

Onde introduzimos uma identidade, relação de fechamento, na expressão acima, dada por

$$\int d^Dxd^Dy(|x>\otimes|y>)(<x|\otimes<y|) = 1.$$

Com isso, segue-se

$$(\widetilde{\phi_1 * \phi_2})(k) = \frac{1}{(2\pi)^{2D}}\int d^Dk'd^Dxd^Dy\exp\Bigg(-i(k-k')_jx^j - ik'_jy^j\Bigg)\times \tag{2.24}$$

$$\times\exp\Bigg(-\frac{i}{2}\theta^{lj}(-i\partial_l^x)(-i\partial_j^y)\Bigg)\phi_1(x)\phi_2(y). \tag{2.25}$$

Mas, sabemos que

$$(\phi_1 * \phi_2)(x) = \int d^D k \exp{(ik_j x^j)} (\widetilde{\phi_1 * \phi_2})(k). \tag{2.26}$$

Portanto, estamos quase prontos para determinar o novo produto entre campos,

$$(\phi_1 {*} \phi_2)(x) = \int d^D k \exp\Bigg(ik_j x^j\Bigg) \frac{1}{(2\pi)^{2D}} \int d^D k^{,} d^D x^{,} d^D y \exp\Bigg(- i(k - k^{,})_j x^{,j} - ik^{,}_j y^j\Bigg) \times$$

$$\times (\exp\left(\frac{i}{2}\theta^{lj}(\partial^{x^{,}}_l)(\partial^y_j)\right)\phi_1(x^{,})\phi_2(y) \tag{2.27}$$

$$= \int d^D x^{,} d^D y \Bigg(\frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D k \exp -ik_j(x^{,j} - x^j) \Bigg) \times \tag{2.28}$$

$$\times \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D k^{,} \exp\Bigg(-ik^{,}_j(y^{,j} - x^{,j})\Bigg) \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{lj}(\partial^{x^{,}}_l)(\partial^y_j)\right)\phi_1(x^{,})\phi_2(y) \tag{2.29}$$

$$= \int d^D y \delta^D(x^{,} - x)\delta^D(y - x) \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{lj}(\partial^{x^{,}}_l)(\partial^y_j)\right)\phi_1(x^{,})\phi_2(y) \tag{2.30}$$

$$= \int d^D x^{,} d^D y \delta^D(y - x) \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{lj}(\partial^x_l)(\partial^y_j)\right)\phi_1(x)\phi_2(y) \tag{2.31}$$

$$= \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{lj}(\partial^x_l)(\partial^y_j)\right)\phi_1(x)\phi_2(y)|_{x=y}.$$

Depois desses muitos trabalhos algébricos, encontramos a seguinte expressão,

$$(\phi_1 * \phi_2)(x) = \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{lj}(\partial^x_l)(\partial^y_j)\right)\phi_1(x)\phi_2(y)|_{x=y}, \tag{2.32}$$

que é vista como a definição do produto Moyal.

Podemos escrever o produto Moyal de uma outra forma, escrita como

$$(\phi_1 * \phi_2)(x) = \phi_1(x) \exp\left(\frac{1}{2} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^\mu} \theta^{\mu\nu} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^\nu}\right)\phi_2(x) \tag{2.33}$$

$$(\phi_1 * \phi_2)(x) = \phi_1(x)\phi_2(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n \frac{1}{n!}\Big\{\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}...\partial_{\mu_n}\phi_1(x)\Big\}\theta^{\mu_1\nu_1}\times$$

$$\times\theta^{\mu_2\nu_2}...\theta^{\mu_n\nu_n}\Big\{\partial_{\nu_1}\partial_{\nu_2}...\partial_{\nu_n}\phi_2(x)\Big\}. \tag{2.34}$$

A equação (2.34) exprime a não localidade do produto Moyal, dado que a mesma possui um número infinito de derivadas.

A partir deste momento, discutiremos algumas das propriedades mais importantes do produto Moyal. Usando a expansão

$$e^x = \sum_{x=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \qquad \forall x \in \mathbf{R}, \tag{2.35}$$

podemos escrever o produto Moyal da seguinte maneira

$$(\phi_1 * \phi_2)(x) = \phi_1(x)\phi_2(x) + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi_1(x)\partial_\nu\phi_2(x)+$$
$$+\frac{1}{2!}\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\frac{i}{2}\theta^{\rho\lambda}\partial_\mu\partial_\rho\phi_1(x)\partial_\nu\partial_\lambda\phi_2(x)+$$
$$+\frac{1}{3!}\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\frac{i}{2}\theta^{\rho\lambda}\frac{i}{2}\theta^{\xi\eta}\partial_\mu\partial_\rho\partial_\xi\phi_1(x)\partial_\nu\partial_\lambda\partial_\eta\phi_2(x)+ \tag{2.36}$$
$$+O(\theta^4).$$

É importante notar que ao realizarmos o produto Moyal entre dois campos iguais, tem-se uma particularidade: os termos ímpares em θ, isto é, os quais contenham produto de n matrizes θ anti-simétricas, com n ímpar, serão nulos.

A partir da expansão acima, é fácil encontrar a regra de derivação para o produto Moyal, mediante simples cálculos, porém, extensos. Como iremos aplicar as regras de derivação usual aos termos da expansão, é intuitivo que, a regra de derivação do produto Moyal seja dada por

$$\partial_\mu(\phi_1 * \phi_2) = (\partial\mu\phi_1) * \phi_2 + \phi_1 * (\partial\mu\phi_2). \tag{2.37}$$

que é semelhante a regra de derivação usual.

Uma situação interessante, mas esperada, surge ao realizarmos o produto Moyal entre duas funções ϕ_1 e ϕ_2 definidas por: $\phi_1 = x^\mu$ e $\phi_2 = x^\nu$.

$$X^\mu * X^\nu = X^\mu X^\nu + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu X^\mu \partial_\nu X^\nu,$$

$$X^\mu * X^\nu = X^\mu X^\nu + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}. \tag{2.38}$$

É fácil percebermos que o lado direito da (2.38), tem uma parte simétrica e outra antissimétrica, respectivamente. Deste modo o comutador Moyal de X^μ com X^ν é dado por:

$$[X^\mu, X^\nu]_* = X^\mu * X^\nu - X^\nu * X^\mu = X^\mu X^\nu + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} - X^\nu X^\mu - \frac{i}{2}\theta^{\nu\mu} = i\theta^{\mu\nu}.$$

Buscando clarear idéias, discutiremos um exemplo bem simples para o produto Moyal entre dois campos. Considere um espaço bidimensional (θ^{12}) e seja $\phi_1 = x^1$ e $\phi_2 = x^2$, logo

$$\phi_1 * \phi_2 == x^2 x^1 + \frac{i}{2}\theta^{12}\partial_1 x^1 \partial_2 x^2 \tag{2.39}$$

assim, consequentemente,

$$[x^1, x^2]_* = i\theta^{12}, \tag{2.40}$$

onde usamos o fato de que a matriz θ é antissimétrica.

Ainda que o produto Moyal é não-local, devido a existência de um número infinito de derivadas em sua definição, esta não localidade não aparece em termos quadráticos da ação, de fato

$$\int d^D x \phi_1(x) * \phi_2(x) = \int d^D k_1 d^D k_2 \widetilde{\phi_1}(k_1)\widetilde{\phi_2}(k_2) \int d^D x e^{ik_i x} * e^{ik_2 x}.$$

Utilizando a definição de produto Moyal, e considerando que,

$$\phi_i(x) = \int d^D k e^{ik_j x^j}\widetilde{\phi_i}(k_i) \tag{2.41}$$

podemos resolver,

$$\int d^D x \left\{ e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu{}^x \partial_\nu{}^y} e^{ik_1 x} e^{ik_2 x} \right\}$$

$$= \int d^Dx\Big\{e^{i(k_1+k_2)} + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}k_{1\mu}k_{2\nu}e^{i(k_1+k_2)}\Big\}$$
$$= \int d^Dx e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}k_{1\mu}k_{2\nu}}e^{i(k_1+k_2)}.$$

Sendo assim

$$\int d^Dx\phi_1(x) * \phi_2(x) = \int d^Dk_1 d^Dk_2 (2\pi)^D \delta(K_1 + k_2)\widetilde{\phi}_1(k_1)\widetilde{\phi}_2(k_2)e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}k_{1\mu}k_{2\nu}}$$
$$= \int d^Dk_1 d^Dk_2 d^Dx(e^{i(k_1+k_2)}\widetilde{\phi}_1(k_1)\widetilde{\phi}_2(k_2)$$
$$= \int d^Dx\Big\{\int d^Dk_1 e^{ik_1x}\widetilde{\phi}_1(k_1)\Big\}\Big\{\int d^Dk_2 e^{ik_2x}\widetilde{\phi}_1(k_1)\}\Big\}.$$

segue que

$$\int d^Dx\phi_1(x) * \phi_2(x) = \int d^Dx\phi_1(x)\phi_2(x) = \int d^Dx\phi_2(x) * \phi_1(x). \tag{2.42}$$

Que é o resultado desejado. Agora, outras propriedades do produto Moyal que seguem diretamente da definição são:

$$F(x) * \delta(x-y) = \delta(x-y)F(y) \tag{2.43}$$

$$\big(\phi_1(x) * \phi_2(x)\big) * \phi_3 = \phi_1 * \big(\phi_2(x) * \phi_3(x)\big) = \phi_1(x) * \phi_2(x) * \phi_3. \tag{2.44}$$

Finalmente, temos mostrado algumas das propriedades importantes do produto Moyal, este será utilizado, de forma direta, na obtenção de versões não-comutativas de muitas modelos físicos de interesse.

2.4 Introdução à Mecânica Clássica Não-Comutativa

Os espaços não-comutativos são caracterizados pela relação de comutação entre os operadores coordenadas (1). E como já foi dito, podemos construir uma teoria de campos não-comutativos por meio da substituição do produto usual entre campos pelo Moyal, que é consistente com as regras de comutação, as quais serão supostas a seguir, para construir uma mecânica quântica não-comutativa,

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\hbar\theta_{ij},$$

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij},$$

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0. \tag{2.45}$$

Essa nova mecânica fornece muitos fenômenos físicos de interesse, [9]. Buscando investigar se no limite clássico essas regras de comutações tem algum interesse físico, vamos definir uma estrutura simplética consistente com as regras de comutação (2.45), dada por

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij},$$

$$\{x^i, x^j\} = \theta_{ij}, \tag{2.46}$$

$$\{p_i, p_j\} = 0.$$

A partir das quais podemos estudar e desenvolver estudos de mecânica clássica dentro de um espaço não-comutativo.

Considerando um conjunto de variáveis simpléticas ξ^i, com $i = 1, 2, ...2N$, e uma matriz antissimétrica $\Sigma^{ij} = \{\xi^i, \xi^j\}$; e dadas duas funções arbitrárias $A = A(x_i, p_j)$ e $B = B(x_i, p_j)$, podemos construir uma estrutura simplética usando (1.32).

Seja uma Hamiltoniana $H = H(\xi^i)$, podemos otter a equações de movimento em termos dessa estrutura simplética,

$$\dot{\xi}^i = \{\xi^i, H(\xi^j)\}. \tag{2.47}$$

Em geral, para uma função F qualquer, definida nesse espaço, temos

$$\dot{F}^i = \{F^i, H(\xi^j)\}. \tag{2.48}$$

Agora, consideremos um espaço de fase dado por $\xi_i = (x^i, p_j)$, com $i = 1, 2, 3$; uma estrutura simplética (2.46), e dadas duas quantidades quaisquer da teoria, podemos escrever de forma conveniente os parênteses de Poisson entre elas, por

$$\{F,G\} = \{x_i,x_j\}\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial G}{\partial x_j} + \{x_i,p_j\}\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial G}{\partial p_j}$$
$$+\{p_i,x_j\}\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial x_j}$$
$$= \theta_{ij}\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial G}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial x^j}\right). \tag{2.49}$$

Consideremos, também, uma hamiltoniana clássica na forma

$$H = \frac{p_i p^i}{2m} + V(x), \tag{2.50}$$

e utilizando (2.48) e (2.49), nos encontramos as equações de Hamilton,

$$\dot{x}_i = \big\{x_i, H\big\} = \left\{x_i, \frac{p_j p^j}{2m} + V(x_j)\right\} = \frac{p_i}{m} + \ \theta_{ij}\frac{\partial V}{\partial x_j} \tag{2.51}$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}. \tag{2.52}$$

Derivando a equação (2.51) em relação ao tempo, usando (2.52) e multiplicando-a por m, obtemos

$$m\ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + m\theta^{ij}\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_j}\dot{x}_k. \tag{2.53}$$

Essa é uma reformulação da segunda lei de Newton, que depende de parâmetros não-comutativos, e também, da variação do potencial externo. É bom ressaltar que podemos obter equações mais gerais que (2.53) [9]. Isso pode ser feito tomando uma estrututa simplética deformada, mais geral, que possua mais parâmetros não-comutativos e, posteriormente, os cálculos são análogos.

Capítulo 3

Revisão Básica de Fluidos

3.1 Algumas equações de fluidos

As equações de fluidos mais importantes são: equação da continuidade, equação de Euler e equação de energia. As mesmas podem ser escritas utilizando notação tensorial, que além de compacta e elegante possui uma enorme facilitação no tratamento de fluidos reais onde a viscosidade não pode ser desprezada.

3.1.1 Equação de continuidade

A equação da continuidade exprime a conservação de massa e geralmente é escrita na forma

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\bigtriangledown}.(\rho\vec{v}) = 0. \tag{3.1}$$

Que em notação tensorial cartesiana fica

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0. \tag{3.2}$$

Usando regra do produto de derivadas parciais, a equação acima pode ser escrita

$$\frac{\partial(\rho v_i v_k)}{\partial x_k} = \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - v_i \frac{\partial\rho}{\partial t}. \tag{3.3}$$

Em um movimento isentrópico a entropia é constante em cada ponto do fluido e podemos calcular, analogamente à equação de continuidade de massa (3.1), a equação da continuidade para entropia.

Para um movimento isentrópico,

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla} s = 0. \tag{3.4}$$

Usando a equação da continuidade de massa (3.1), mais precisamente, fazendo s vezes (3.1) mais ρ vezes (3.4) e agrupando os termos, obtemos

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\rho s \vec{v}) = 0. \tag{3.5}$$

Onde o termo $\rho s \vec{v}$ representa a densidade de fluxo de entropia. Logo a equação (3.5) é conhecida como a equação de continuidade para entropia.

3.1.2 Equação de Euler

O deslocamento de um elemento de volume em um fluido é composto pelos movimentos de rotação, translação e deformação ou cisalhamento. Consideremos o caso mais simples de fluidos irrotacionais, em que a velocidade angular do elemento de volume considerado é nula, e sem viscosidade, onde são desprezadas as forças de tensão horizontais devido movimento relativo das camadas do fluido. Dessa forma, para um certo volume V do fluido, a força sofrida por esse volume é dada por

$$\vec{f} = -\oint P d\vec{s}. \tag{3.6}$$

Onde o sinal menos é convencionado. Usando teorema do gradiente na relação acima, podemos escrever

$$-\oint P d\vec{S} = \int \vec{\nabla} P dV. \tag{3.7}$$

Logo a força por unidade de volume exercida pelo restante do fluido no elemento de volume dV é apenas $-\vec{\nabla} P$. Sendo assim, a conservação da quantidade de movimento pode ser expressa do seguinte modo

$$\rho \times \vec{a} = -\vec{\nabla} P, \tag{3.8}$$

onde $\vec{a}$ é a aceleração do fluido. No entanto, a variação de velocidade em fluido pode ser escrita usando a noção de derivada total,

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}, \tag{3.9}$$

onde o primeiro termo do lado direito mede a variação da velocidade em um ponto fixo do espaço, ou seja, com $\vec{r}$ constante, em um intervalo dt; enquanto o segundo termo mede a variação da velocidade num mesmo instante de tempo entre dois pontos distintos no espaço.

A partir das equações (3.8) e (3.9), otemos a equação de Euler

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P, \tag{3.10}$$

essa equação foi obtida em méados do século dezoito.

A equação de Euler pode ser generalizada para o caso em que o fluido está sujeito a um campo de forças externas $\vec{\mathcal{F}}$, ou seja, $\vec{\mathcal{F}}$é a força que atua em um volume unitário, do seguinte modo

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \frac{1}{\rho}\vec{\mathcal{F}}. \tag{3.11}$$

Um caso interessante de campo de forças externas é o campo gravitacional, em que cada volume unitario está sujeito a uma força $\rho\vec{g}$.

A fim de obter uma equação, semelhante a equação da continuidade, que seja equivalente à equação de conservação de quantidade de movimento, vamos combinar a equação da continuidade com a equação de Euler, na ausência de forças externas; na forma tensorial

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i}. \tag{3.12}$$

Levando a relação

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = \rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i\frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{3.13}$$

e a equação (3.3) na relação (3.12), encontramos

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = -\left(\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial(\rho v_k v_i)}{\partial x_k}\right). \tag{3.14}$$

Podemos simplificar a equação (3.14) definindo um tensor simétrico Π_{ij} como

$$\Pi_{ij} = P\delta_{ij} + \rho v_i v_j. \tag{3.15}$$

É fácil ver que Π_{ij} tem dimensão de quantidade movimento por unidade de e volume. Derivando o tensor acima definido e levando em (3.14), obtemos

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = -\frac{\Pi_{ij}}{\partial x_j}. \tag{3.16}$$

Como já tínhamos falado anteriormente, essa equação é semelhante a equação da continuidade e exprime conservação de quantidade de movimento. Para podermos analisá-la melhor, temos que clarear o significado do tensor Π_{ij}.

Dado que a quantidade de movimento de um elemento de volume dV que se desloca com velocidade $\vec{v}$ é igual à $\rho\vec{v}dV$, o primeiro termo da equação (3.16) tem significado da taxa de variação com o tempo da quantidade de movimento do fluido, por unidade de volume. Integrando a equação (3.16) sobre todo volume V e usando o teorema da divergência na forma tensorial, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho v_i dV = -\oint \Pi_{ij} n_j dS \tag{3.17}$$

Esta equação mostra claramente que Π_{ij} remete-se à taxa de variação com o tempo da quantidade de movimento $\rho\vec{v_i}dV$ do elemento de volume. Portanto, é natural ele ser chamado "'fluxo de quantidade de movimento".

Mediante o conhecimento do significado físico do tensor Π_{ij} a equação (3.16) tem uma fácil interpretação. Como (3.16) é uma equação local, ela garante que a variação da quantidade de movimento de um ponto do espaço está associado como fluxo de quantidade de movimento através de um volume ao redor do ponto considerado.

A equação de Euler na ausência de forças externas escrita na forma (3.16) pode ser generalizada facilmente para o caso de existir um campo de forças externas, e pode ser expressada por

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j}. + F_i \tag{3.18}$$

Vamos analisar a equação de Euler, (3.10), para o caso de um movimento isentrópico, em que a entropia por unidade de massa é constante. Esse tipo de movimento acontece em escoamentos de fluidos ideais, em que não existe trocas de energia entre diferentes partes do fluido. Portanto, o movimento é adiabático e a entropia é constante em cada ponto do fluido. A partir da primeira lei da termodinãmica

$$dq = Tds = de + PdV^\star, \tag{3.19}$$

onde dq é a quantidade de calor absorvida por unidade de massa em um processo infinitesimal e ($v^\star = \frac{1}{\rho}$) é volume específico. Usando a equação da entalpia específica, que pode ser obtida pela transformação de Legendre da energia interna,

$$h = e + PV^\star = e + \frac{P}{\rho}, \tag{3.20}$$

chegamos à

$$dh = de + PdV^\star + V^\star dP = Tds + V^\star dP. \tag{3.21}$$

Num processo isentrópico $ds = 0$. Então da equação acima, a pressão só é função da densidade, ou seja,

$$\vec{\nabla} h = \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} P. \tag{3.22}$$

Levando esse resultado na equação (3.12), temos

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla} h. \tag{3.23}$$

Que é a equação de Euler para o movimento isentrópico, ou adiabático, de um fluido. Escrevendo a entalpia específica h igual à $V'(\rho)$, a pressão pode ser escrita por meio da transformação de Legendre de $V(\rho)$,

$$P(\rho) = \rho V'(\rho) - V(\rho). \tag{3.24}$$

Donde

$$P'(\rho) = \rho V''(\rho). \tag{3.25}$$

Para analisarmos posteriormente se os parênteses de ρ e $\vec{v}$ com o Hamiltoniano do sistema

$$H = \int d\vec{r}[\frac{1}{2}\rho v^2 + V(\rho)]. \tag{3.26}$$

geram as equações de movimento (3.1) e (3.23) precisamos contruir, primeiramente, os parênteses entre ρ e $\vec{v}$. Para isso, será necessário lançar mão do parêntese canônico da formulação lagrangiana,

$$\{\dot{X}^i(\vec{x}), X^j(\vec{x}')\} = \frac{1}{\rho_0}\delta^{ij}\delta(\vec{x} - \vec{x}') \tag{3.27}$$

e da definição de ρ e $\vec{j}$ em função de $\vec{X}$, $\dot{\vec{X}}$ e da função delta,

$$\rho(t, \vec{r}) = \rho_0 \int dr \delta(\vec{X}(t, \vec{x}) - \vec{r}) \tag{3.28}$$

$$\vec{j}(t, \vec{r}) = \vec{v}(t, \vec{r})\rho(t, \vec{r}) = \rho_0 \int dr \dot{X}(t, \vec{X})\delta(\vec{X}(t, \vec{x}) - \vec{r}). \tag{3.29}$$

Onde as integrações anteriores são realizadas sob todo volume de interesse e consideramos que partículas proxima no fluido possuem aproximadamente as mesmas velocidades, logo a função discreta $\dot{\vec{X}}(t, \vec{X}_n)$ pode ser considerada uma função contínua $\dot{\vec{X}}(t, \vec{r}) = \vec{v}(t, \vec{r})$. Contudo, podemos obter diretamente os parênteses

$$\{\rho(\vec{r}), \rho(\vec{r}')\} = 0 \tag{3.30}$$

$$\{j^i(\vec{r}), \rho(\vec{r}')\} = \rho(\vec{r})\partial_i\delta(\vec{r} - \vec{r}') \tag{3.31}$$

$$\{j^i(\vec{r}), j^j(\vec{r}')\} = j^j(\vec{r})\partial_i\delta(\vec{r} - \vec{r'}) + J^i(\vec{r}')\partial_j\delta(\vec{r} - \vec{r}'). \tag{3.32}$$

Visto que $\vec{j} = \rho\vec{v}$, dos parênteses acima, temos

$$\{j^i(\vec{r}), \rho(\vec{r}')\} = \rho(\vec{r})\{v^i(\vec{r}), \rho(\vec{r}')\} = \rho(\vec{r})\partial_i\delta(\vec{r} - \vec{r}') \tag{3.33}$$

e

$$\begin{aligned}\{j^i(\vec{r}), j^j(\vec{r}')\} &= \rho(\vec{r})\rho(\vec{r'})\{v^i(\vec{r}), v^j(\vec{r}')\} + \rho(\vec{r})[\partial_i(\delta(\vec{r} - \vec{r}')]v^j(\vec{r'}) + \rho(\vec{r'})[\partial_j(\delta(\vec{r} - \vec{r}')]v^i(\vec{r}) \\ &= \rho(\vec{r})\rho(\vec{r'})\{v^i(\vec{r}), v^j(\vec{r}')\} + \rho(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{r}')\Big(\partial_i v^j(\vec{r}) - \partial_j v^i(\vec{r}')\Big) + j^j(\vec{r'})\partial_i(\delta(\vec{r} - \vec{r}')) + j^i(\vec{r})\partial_j(\delta(\vec{r} - \vec{r}')).\end{aligned} \tag{3.34}$$

Das duas últimas equações, comparando (3.32) e (3.34), obtemos os parênteses entre ρ e $\vec{v}$,

$$\begin{aligned}\{v^i(\vec{r}), \rho(\vec{r}')\} &= \partial_i \delta(\vec{r} - \vec{r}') \\ \{v^i(\vec{r}), v^j(\vec{r}')\} &= -\frac{\omega_{ij}(\vec{r})}{\rho(\vec{r})}\delta(\vec{r} - \vec{r}').\end{aligned} \tag{3.35}$$

Onde

$$\omega_{ij} = \partial_i v^j - \partial_j v^i, \tag{3.36}$$

é conhecida como vorticidade do fluido. Um caso interessante surge quando temos a vorticidade nula. Em três dimensões, podemos reescrever a vorticidade como

$$\omega_{ij} = \epsilon^{ijk}(\vec{\nabla} \times \vec{v})_k. \tag{3.37}$$

Dado que na vorticidade aparece um termo referente a componente do ratacional de $\vec{v}$, é direto que na ausência de vorticidade, podemos escrever a velocidade em termos do gradiente de um potencial θ,

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\theta. \tag{3.38}$$

Levando (3.38) em (3.23), temos

$$\partial_t \partial_i \theta + \partial_j \partial_j(\partial_i \theta) = -\partial_i V'(\rho)$$

$$\partial_i \left(\partial_t \theta + \frac{1}{2}(\partial_j \theta)(\partial_j \theta) \right) = -\partial_i V'(\rho)$$

e

$$\partial_t \theta + \frac{1}{2}(\partial_j \theta)(\partial_j \theta) = -V'(\rho). \tag{3.39}$$

Em que ∂_j e ∂_t denotam a derivada com relação as componentes do vetor posição $\vec{r}$ e o tempo, respectivamente.

Podemos reescrever (3.39) usando (3.38),

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{v^2}{2} = -V'(\rho), \tag{3.40}$$

que é a equação de Bernoulli.

A equação que acabamos de obter continua válida em outra dimensões. No entando, a vorticidade assume formas distintas em diferentes dimensões. Em três dimensões a vorticidade pode ser vista como um pseudovetor,

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}, \tag{3.41}$$

pois ωij é antissimétrico na troca de índices. Neste caso, possui apenas três componentes independentes, similar a um vetor no espaço tridimensional considerado. Já em duas dimensões, a vorticidade pode ser vista como um escalar, ou seja, ela é um pseudo escalar,

$$\omega = \epsilon^{ij}\partial_i v^j. \tag{3.42}$$

Finalmente no caso unidimensional, não existe vorticidade e a velocidade pode ser escrita também como a derivada de um potencial.

A dinâmica de um sistema pode ser elegantemente apresentada quando se consegue exibir uma formulação canônica. Como já nos preparamos anteriormente para mostrar, os parênteses de ρ e $\vec{v}$ com Hamiltoniano do sistema,

$$H = \int d\vec{r}[\frac{1}{2}\rho v^2 + V(\rho)], \tag{3.43}$$

podem gerar diretamente as equações de movimento,

$$\dot{\rho} = \{H, \rho\} = -\vec{\nabla}(\vec{v}\rho) \tag{3.44}$$

$$\dot{\vec{v}} = \{H, v\} = -(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} - \vec{\nabla}V'(\rho) \tag{3.45}$$

desde que a equação (3.35) seja satisfeita. Uma versão da álgebra (3.35) é contruída definindo a densidade de momento por

$$\vec{P} = \rho\vec{v}. \tag{3.46}$$

Consequentemente de (3.35), temos

$$\{P^i(\vec{r}), \rho(\vec{r'})\} = \rho(\vec{r})\partial_i\delta(\vec{r} - \vec{r'})$$

$$\{P^i(\vec{r}), P^j(\vec{r'}\} = P^j(\vec{r})\partial_i\delta(\vec{r} - \vec{r'}) + P^i(\vec{r'})\partial_j\delta(\vec{r} - \vec{r'}). \tag{3.47}$$

Que é a álgebra dos operadores densidade de momento. A questão é se conseguimos obter uma lagrangiana cujas variáveis canônicas satisfaçam os parênteses (3.35) e (3.47). Ou, numa linguagem matemática, será que coseguimos a obter 1-forma canônica e 2-forma simplética que conduzem à algebra (3.35) ou (3.47).

3.2 Equação de Navier-Stokes

3.2.1 Fluidos Viscosos

A viscosidade é uma propriedade dos fluidos que descreve a resistência de um fluido ao escoamento. Num fluido real e notável a resistênica imposta a um objeto que nele se movimenta, assim como é perceptível a resistência ao movimento de diferentes camadas do próprio fluido. A viscosidade poder vista como uma manisfestação de processos dissipativos irreversíveis de energia. Uma maneira interessante de imaginar o fluxo de um fluido viscoso e considerá-lo como uma superposição de camadas muitas finas, como se fosse uma pilhas de panos. Neste caso, a viscosidade é equivalente à força de atrito entre as camadas.

Dessa idéia simplícita e intuitiva de viscosidade que apresentamos, é facil compreender que a equação de continuidade anteriormente descrita continua válida para fluidos viscosos, visto que essa expressa simplesmente a conservação de massa do fluido. Já a equação de Euler, dado seu significado anteriormente descrito, sofrerá com certeza alterações notáveis. A fim de analisar essas mudanças, vamos considerar a ação da viscosidade como uma força $\vec{\mathcal{F}}$ na equação de Euler, logo

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j}. + \mathcal{F}_i \tag{3.48}$$

Nesse, momento, é conveniente definirmos o tensor viscosidade σ_{ij}, em que

$$\mathcal{F}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}. \tag{3.49}$$

E a equação de Euler torna-se

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = -\frac{\partial(\Pi_{ij} - \sigma_i j)}{\partial x_j}. \tag{3.50}$$

Para um volume V do fluido delimitado por uma superfície S, a variação temporal da quantidade de movimento total do fluido pode ser expressa por

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho v_i dV = -\oint \Pi_{ij} n_j dS + \oint \sigma_{ij} n_j dS, \tag{3.51}$$

onde usamos o teorema da divergência na forma tensorial. Analogamente à análise da equação (3.17), o primeiro termo do lado esquerdo da equação acima corresponde à variação da quantidade de movimento produzidas pelas forças de pressão e pelo movimento do fluido através da superfície, enquanto o segundo termo esta relacionado correspondentemente com as forças de viscosidades que atuam no fluido.

Para investigarmos mais sobre a viscosidade em fluidos, vamos contruir intuitivamente a forma do tensor viscosidades σ_{ij}. Nos sabemos intuitivamente que as forças de viscosidade só atuaram quando houver no fluido alguma velocidade relativa entre pontos diferentes do fluido. Logo se espera que o tensor viscosidade seja proporcional a variação da velocidade com a posição e não a velocidade em si. Outro dado importante é que as forças de viscosidade não atuam se o fluido estiver em rotação uniforme, isto é, se a velocidade pode ser escrita como

$$\vec{v} = \vec{r} \times \vec{\omega} \tag{3.52}$$

Lembrando que o produto vetorial é anticomutativo e considerando desprezível a dependência de derivadas não lineares em σ_{ij}, as condições relativo à σ_{ij} serão satisfeitas se o mesmo for proporcional à

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

e

$$\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\delta_{il}.$$

Contudo, o tensor viscosidade pode ser escrito na forma

$$\sigma_{ij} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \lambda\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\delta_{ij}. \tag{3.53}$$

Em que η e λ são coeficientes de viscosidade dinâmico, geralmente dependentes da posição no fluido. Agora, substituindo (3.53) em (3.50) e usando a definição do tensor fluxo de quantidade de movimento, obtemos

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(P_0\delta_{ij} + \rho v_i v_j - \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) - \lambda\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\delta_{ij}\right). \tag{3.54}$$

Onde P_o é a pressão em um ponto qualquer do fluido. Podemos simplificar essa equação se definirmos um tensor τ_{ij} por

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij} - P_0\delta ij \tag{3.55}$$

Em termos da derivada total e usando o tensor que acabamos de definir, a equação (3.50) pode ser escrita simplesmente na forma

$$\rho\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}. \tag{3.56}$$

Onde τ_{ij} foi definido de modo que $\tau_{ij}n_j$ é a componente da força que atua num elemento de área j. Ao introduzirmos os tensores

$$d_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{3.57}$$

e

$$d_{ll} = \frac{\partial v_l}{\partial x_l}, \tag{3.58}$$

o tensor τ_{ij} pode escrito como

$$\tau_{lj} = P_0\delta ij + 2\eta d_{ij} + \lambda\delta ij d_{ll}. \tag{3.59}$$

Em que o tensor d_{ll} é tensor da taxa de deformação. Essa última equação mostra claramente que a tensão num fluido é proporcional à taxa de variação da deformação que o fluido está sujeito. Dado a forma que $\tau_{ij}n_j$ foi definido, podemos definir também a pressão média da seguinte forma

$$P = -\frac{1}{3}\tau_{ii}. \tag{3.60}$$

E ainda, o tensor τ_{ij} é isotrópico e

$$\tau_{ii} = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}. \tag{3.61}$$

Usando as propriedades de $\tau_{ij}n_j$, podemos reescrever a pressão média do seguinte modo

$$P = P_0 - \left(\lambda + \frac{2}{3}\eta\right)\vec{\nabla}.\vec{v}. \tag{3.62}$$

Em que usamos a definição de d_{ll} dada em (3.58). É fácil notar que se $\vec{v} = 0$ ou se a velocidade poder ser escrita como em (3.52), isto é, se $\vec{\nabla}.\vec{v} = 0$; teremos $P = P_0$. É importante lembrar que $p_o\delta_{ij}$ é o valor estático do tensor τ_{ij} e recebe o nome de tensor das tensões.

Em fluidos viscosos em que a condição $\vec{\nabla}.\vec{v} = 0$ não for satisfeita, devemos ter uma relação entre os coeficientes de viscosidade dinâmicos, a fim de que a pressão definida em (3.60) continue sendo uma variável termodinâmica verdadeira. Essa relação é obtida da equação (3.62) fazendo $P = P_0$,

$$\lambda = -\frac{2}{3}\eta. \tag{3.63}$$

Essa relação pode ser introduzida no tensor de viscosidade e nas equações de movimento (3.54). Neste último caso, obtemos

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\delta_{ij}\right)\right). \tag{3.64}$$

Que é a equação de movimento para um fluido viscoso na ausência de forças não-viscosas externas. A mesma pode ser generalizada para o caso de existir um campo de força externo $\vec{F}$, que é força por unidade de volume, da seguinte forma

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\delta_{ij}\right)\right) + F_i. \tag{3.65}$$

3.2.2 A Equação de Navier-Stokes

Para fluidos incompressíveis, a densidade é considerada constante, logo a equação de continuidade (3.1) fica

$$\vec{\nabla}.\vec{v} = 0. \tag{3.66}$$

Usando a condição (3.66), o tensor viscosidade é simplificado, e a equação (3.65) pode ser reescrita como

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} + \eta\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + F_i. \tag{3.67}$$

Que pode ser reescrita usando a equação (3.3), juntamente com a noção de derivada total, como

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial (P\delta_{ij})}{\partial x_j} + \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + F_i. \tag{3.68}$$

As duas últimas equações são formas tensoriais da equação de Navier-Stokes. E representam a aplicação das equações de movimento de Newton a fluidos compressíveis, viscosos e sujeito a um campo de força não-viscosa externo.

A equação de Navier-Stokes para fluidos compressíveis pode ser obtida de forma análoga, em que não poderemos usar a condição expressa em (3.66). Contudo, ela fica

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial (P\delta_{ij})}{\partial x_j} + \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \eta \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{2}{3}\eta \frac{\partial^2 v_l}{\partial x_j \partial x_l} + F_i. \tag{3.69}$$

Onde utilizamos a hipótese (1.63), que relaciona os coeficientes de viscosidade.

Capítulo 4

Indução de Não-comutatividade via Formalismo Simplético

Neste capítulo, vamos estudar uma maneira alternativa de introduzir não-comutativa em sistemas comutativos e não perturbativos, para isso vamos lançar mão do produto Moyal entre campos e de aproximação simplética. Posteriormente, iremos ilustrar o método, obtendo uma descrição lagrangiana não-comutativa para sistemas comutativos. Essa reproduzirá resultados bem conhecidos da literatura.

4.1 Introdução ao Formalismo Simplético de Indução de Não-comutatividade

Uma quantização por deformação [10] equivale a substituição do processo de quantização canônico por uma álgebra $\mathcal{A}_\hbar$ de observáveis quânticos construídos a partir dos observáveis clássicos correspondentes, respeitando um novo produto entre campos, o produto Moyal.

O processo de quantização canônica

$$\{h, g\} = \frac{\partial h}{\partial \zeta_a}\{\zeta_a, \zeta_b\}\frac{\partial g}{\partial \zeta_b} \rightarrow \frac{1}{i\hbar}[\hat{h}, \hat{g}], \tag{4.1}$$

onde $\zeta = (q_i, p_i)$, é substituído por uma deformação $\hbar - star$ da álgebra $\mathcal{A}_0$, definida por

$$\{h, g\}_{\hbar} = h *_{\hbar} g - g *_{\hbar} . \tag{4.2}$$

Onde

$$(h *_{\hbar} g)(\zeta) = exp[\frac{i}{2}\hbar\omega_{ab}\partial^a_{(\zeta_1)}\partial^b_{(\zeta_2)}]h\zeta_1)g\zeta_2)|_{\zeta_1=\zeta_2=\zeta}, \tag{4.3}$$

em que $a, b = 1, 2, ..., 2N$, e com uma estrutura simplética clássica, dada por

$$\omega_{\mathbf{ab}} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

com $i, j = 1, 2, ..., 2N$, que sastisfaz a relação

$$\omega^{ab}\omega_{bc} = \delta^a_c \ . \tag{4.5}$$

A quantização por deformação pode ser generalizada considerando uma estrututra simplética Σ^{ab} mais geral, que possa conter, além de $\hbar$, outros parâmetros de deformação. Consequentemente, uma deformação $\Sigma - star$ da álgebra de $\mathcal{A}_0$ generaliza o produto descrito em (4.3), do seguinte modo

$$(h *_{\hbar\Sigma} g)(\zeta) \ = \ \exp\{\frac{\imath}{2}\hbar\Sigma_{ab}\partial^a_{(\zeta_1)}\partial^b_{(\zeta_2)}\}h(\zeta_1)g(\zeta_2)|_{\zeta_1=\zeta_2=\zeta} \tag{4.6}$$

com $a, b \ = \ 1, 2, \ldots, 2N$. E, este novo produto generaliza a álgebra entre as variáveis simpléticas,

$$\{h, g\}_{\hbar\Sigma} = \imath\hbar\Sigma_{ab}. \tag{4.7}$$

Foi proposto a passagem da mecânica clássica não-comutativa para mecânica quântica não-comutativa por meio da quantização de Dirac generalizada, ver [9] e [11],

$$\{h, g\}_{\Sigma} = \frac{\partial h}{\partial \zeta_a}\Sigma_{ab}\frac{\partial g}{\partial \zeta_b} \longrightarrow \frac{1}{\imath\hbar}[\mathcal{O}_h, \mathcal{O}_g]_{\Sigma}. \tag{4.8}$$

Essa relação, acima descrita, pode ser obtida por meio de uma transformação particular sobre o espaço de fase clássico usual, dado por

$$\zeta'_a = T_{ab}\zeta^b, \tag{4.9}$$

em que a matriz de transformação é

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \delta_{ij} & -\frac{1}{2}\theta_{ij} \\ \frac{1}{2}\beta_{ij} & \delta_{ij} \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

onde θ_{ij} e β_{ij} são matrizes antissimétricas. Devido a transformação (4.9), a hamiltoniana original torna-se

$$\mathcal{H}(\zeta_a) \longrightarrow \mathcal{H}(\zeta'_a) \ , \tag{4.11}$$

Onde a estrutura simplética correspondente é

$$\mathbf{\Sigma_{ab}} = \begin{pmatrix} \theta_{ij} & \delta_{ij} + \sigma_{ij} \\ -\delta_{ij} - \sigma_{ij} & \beta_{ij} \end{pmatrix}, \tag{4.12}$$

com $\sigma_{ij} = -\frac{1}{8}[\theta_{ik}\beta_{kj} + \beta_{ik}\theta_{kj}]$. Consequentemente, as relações de comutação serão

$$\begin{aligned} [q'_i, q'_j] &= \imath\hbar\theta_{ij} \ , \\ [q'_i, p'_j] &= \imath\hbar(\delta_{ij} + \sigma_{ij}) \ , \\ [p'_i, p'_j] &= \imath\hbar\beta_{ij} \ . \end{aligned} \tag{4.13}$$

4.2 Formalismo Simpletico de Indução de Não-Comutatividad

Neste momento, é importante perceber que ainda não tínhamos construído uma formulação lagrangiana para sistema não-comutativos, que é nosso principal objetivo. Para chegar ao nosso objetivo realizaremos um processo sistemático. Primeiramente, fixamos a matriz Σ_{ab} e, posteriormente, calculamos sua inversa. No entanto, nesse processo podem surgir alguns problemas devido a possibilidade de a matriz Σ_{ab}, que foi fixada, ser não inversível. Um caso a ser mencionado refere-se a sistemas que possuem algumas grandezas da teoria constantes, denominadas *Invariantes de Cassimir*, cujos gradientes são modos zeros da matriz Σ_{ab}, isto é,

$$\Sigma_{ab}\frac{\partial C_i}{\partial \zeta^b} = 0. \tag{4.14}$$

Essa equação, (4.14), revela que Σ_{ab} é singular e não podemos, à princípio, seguir o processo a fim de obter uma formulação lagrangiana não-comutativa.

Entretanto, esse problema já foi resolvido em outro trabalho [12]. Por outro lado, se Σ_{ab} é não-singular, podemos prosseguir o processo e obter sua inversa através da seguinte relação

$$\int \Sigma_{ab}(x,y)\Sigma^{bc}(y,z)dy = \delta_a^c \delta(x-z) \quad . \tag{4.15}$$

A equação (4.15) gera um conjunto de equações, onde Σ^{ab} é um tensor simplético de segunda forma que se relaciona com a lagrangiana de primeira ordem,

$$\mathcal{L} = A_{\zeta'_a}\dot{\zeta}'^a - V(\zeta'_a) \quad , \tag{4.16}$$

como foi mostrado no capítulo 1, equação (1.39); através da seguinte relação

$$\Sigma^{ab}(x,y) = \frac{\delta A_{\zeta'_b}(x)}{\delta \zeta'_a(y)} - \frac{\delta A_{\zeta'_a}(x)}{\delta \zeta'_b(y)} \quad . \tag{4.17}$$

Conhecendo a matriz Σ^{ab} podemos obter o tensor simplético de primeira forma, $A_{\zeta'_a}(x)$, e, consequentemente, somos capazes de obter a descrição lagrangiana, (4.16). A fim de obter Σ^{ab} e, posteriormente, $A_{\zeta'_a}(x)$, usaremos a equação (4.15) e (4.17), essas geram um conjunto de equações diferenciais

$$\begin{aligned}
\theta_{ij}B_{jk}(x,y) + (\delta_{ij}+\sigma_{ij})\,A_{jk}(x,y) &= \delta_{ik}\delta(x-y) \quad , \\
A_{jk}(x,y)\theta_{ji} + (\delta_{ij}+\sigma_{ij})\,C_{jk}(x,y) &= 0 \quad , \\
-(\delta_{ij}+\sigma_{ij})\,B_{jk}(x,y) + \beta_{ij}A_{jk}(x,y) &= 0 \quad , \\
A_{kj}(x,y)\,(\delta_{ji}+\sigma_{ji}) + \beta_{ij}C_{jk}(x,y) &= \delta_{ik}\delta(x-y) \quad , \\
&\quad ,
\end{aligned} \tag{4.18}$$

onde

$$\begin{aligned}
B_{jk}(x,y) &= \left(\frac{\delta A_{q'_j}(x)}{\delta q'_k(y)} - \frac{\delta A_{q'_k}(x)}{\delta q'_j(y)}\right) \quad , \\
A_{jk}(x,y) &= \left(\frac{\delta A_{p'_j}(x)}{\delta q'_k(y)} - \frac{\delta A_{q'_k}(x)}{\delta p'_j(y)}\right) \quad , \\
C_{jk}(x,y) &= \left(\frac{\delta A_{p'_j}(x)}{\delta p'_k(y)} - \frac{\delta A_{p'_k}(x)}{\delta p'_j(y)}\right)
\end{aligned} \tag{4.19}$$

e Σ_{ab} considerado é dado por (4.12).

A resolução do sistema de equações (4.18) nos permite calcular Σ^{ab}, levando este resultado em (4.17), determinamos a 1-forma $A_{\zeta'_a}(x)$ e, consequentemente, determinamos a lagrangiana de primeira ordem $\mathcal{L}$.

4.3 Aplicações Ilustrativas do Formalismo

4.3.1 Oscilador Quiral

Agora, aplicaremos o formalismo anteriormente desenvolvido para um sistema bidimensional, em que espaço de fase é reduzido. Para tal, as coordenadas simpléticas são dadas por $\zeta'_a = (q'_i)$, com $a = i = 1, 2$, e os momentos canônicos conjugados às coordenadas q'_i não estão presentes. Para aplicarmos nosso formalismo, primeiramente, devemos fixar a matriz Σ_{ab}, esta que foi definida em (4.12). Entretanto, para o sistema que propomos analisar a matriz Σ_{ab} possui apenas um elemento. Então a estrutura simplética correspondente a ser considerada é dada por

$$\Sigma_{ij} = \theta_{ij} = \epsilon_{ij}. \tag{4.20}$$

Substituindo essa matriz no conjunto de equações diferenciais descrito na equação (4.19), o mesmo é reduzido para

$$\frac{\delta A_{q'_j}(x)}{\delta q'_k(y)} - \frac{\delta A_{q'_k}(x)}{\delta q'_j(y)} = \theta^{-1}_{ij} = -\,\epsilon_{ij} \quad . \tag{4.21}$$

È fácil ver que a equação acima tem a seguinte solução

$$A_{q'_i} = -\,\frac{1}{2}\,\epsilon_{ij} q'_j \quad . \tag{4.22}$$

Levando (4.22) em (4.16), a lagrangiana de primeira ordem torna-se

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\,\epsilon_{ij}\,\dot{q}'_i\,q'_j - V(q'_j) \quad . \tag{4.23}$$

Neste ponto, se considerarmos o potencial simplético,

$$V(q'_j) = \frac{k{q'}^2_j}{2} \quad . \tag{4.24}$$

em (4.23), encontramos a versão mecânica do Bóson Quiral, isto é,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\ \dot{q}'_i \epsilon_{ij} q'_j - \frac{k{q'_j}^2}{2} \quad . \tag{4.25}$$

Onde o parâmetro não-comutativo, θ_{ij}, introduzido em (4.25) é equivalente à matriz ϵ_{ij}, como foi definido em (4.20). A fim de fazer uma analogia do resultado do modelo realizado com o modelo do Bóson Quiral ($k = 1$) , que é bem conhecido na literatura, vamos realizar o mapeamento seguinte, usando as relações descritas em [13],

$$\begin{aligned} \partial_t \phi &\leftrightarrow \partial_t q'_j \\ \partial_x \phi &\leftrightarrow \epsilon_{ij} q'_j, \end{aligned} \tag{4.26}$$

na lagrangiana (4.25). Esse mapeamento mostra que nosso modelo obteve resultados consistentes com o modelo do Bóson Quiral, [13].

4.3.2 Sistema Mecânico Arbitrário Não-Degenerado

Após a ilustração do método para um sistema simplificado, iremos aplicar o formalismo já desenvolvido para atacar um sistema mecânico não-degenerado, o procedimento será idêntico ao realizado anteriormente, no entanto, a matriz Σ_{ab} é mais complexa, possui mais termos que no caso anterior. Em [14] foi desenvolvido uma versão não-comutativa de um sistema mecânico não-degenerado arbitrário. Cuja ação pode ser escrita por

$$S = \int dt L(q^A, \dot{q}^A), \tag{4.27}$$

em que o espaço de configuração é descrito pelas variáveis q^A, com $A = 1, 2, ...n$, dentro de um formalismo Hamiltoniano sem vínculos.

Agora, consideremos a seguinte estrutura simplética

$$\mathbf{\Sigma_{ab}} = \begin{pmatrix} -2\theta_{ij} & \delta_{ij} \\ -\delta_{ij} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.28}$$

onde, tomamos $\sigma_{ij} = \beta_{ij} = 0$ em (4.12). Usando (4.15), obtemos o seguinte sistema matricial

$$\begin{pmatrix} -2\theta_{il} & \delta_{il} \\ -\delta_{il} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Sigma^{q_l q_j} & \Sigma^{q_l p_j} \\ \Sigma^{p_l q_j} & \Sigma^{p_l p_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_i^j & 0 \\ 0 & \delta_i^j \end{pmatrix}, \tag{4.29}$$

logo

$$\begin{aligned} -2\,\theta_{il}\Sigma^{q_l\,q_j} + \delta_{il}\,\Sigma^{p_l\,q_j} &= \delta_i^{\,j} \ , \\ \delta_{il}\,\Sigma^{q_l\,q_j} &= 0 \ , \\ -2\,\theta_{il}\Sigma^{q_l\,p_j} + \delta_{il}\,\Sigma^{p_l\,p_j} &= 0 \ , \\ -\delta_{il}\,\Sigma^{q_l\,p_j} &= \delta_i^{\,j} \ . \end{aligned} \tag{4.30}$$

Resolvendo essas equações, encontramos que

$$\begin{aligned} \Sigma^{q_i\,q_j} &= 0 \ , \\ \Sigma^{p_i\,q_j} &= \delta_{ij} \ , \\ \Sigma^{p_i\,p_j} &= -2\,\theta_{ij} \ . \end{aligned} \tag{4.31}$$

Levando (4.31) em (4.19), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\delta A_{q_j}(x)}{\delta q_i(y)} - \frac{\delta A_{q_i}(x)}{\delta q_j(y)} &= 0 \ , \\ \frac{\delta A_{q_j}(x)}{\delta p_i(y)} - \frac{\delta A_{p_i}(x)}{\delta q_j(y)} &= \delta_{ij} \ , \\ \frac{\delta A_{p_j}(x)}{\delta p_i(y)} - \frac{\delta A_{p_i}(x)}{\delta p_j(y)} &= -2\,\theta_{ij} \ . \end{aligned} \tag{4.32}$$

Uma solução menos complicada, e consequentemente, muito conveniente deste sistema é

$$\begin{aligned} A_{q_i} &= p_i - \frac{1}{2}\,q_i \ , \\ A_{p_i} &= \theta_{im}\,p_m \ . \end{aligned} \tag{4.33}$$

Finalmente chegamos a desejada Lagrangiana de primeira ordem,

$$\begin{aligned} L &= \left(p_i - \frac{1}{2} q_i \right) \dot{q}_i + (\,\theta_{im}\,p_m\,)\,\dot{p}_i \\ &- V\,(q) \end{aligned} \tag{4.34}$$

.

É bom ressaltar que o conjunto de equações (4.32) admite outras soluções, como por exemplo,

$$\begin{aligned} A_{q_i} &= p_i, \\ A_{p_i} &= \theta_{im}\, p_m. \end{aligned} \tag{4.35}$$

No entanto, levando essa nova solução na lagrangiana de primeira ordem , encontramos uma nova lagrangiana L',

$$L' = p_i\dot{q}_i + \dot{p}_i\theta_{ij}p_j - V(q), \tag{4.36}$$

ou

$$L' = L + \frac{1}{2}q_i\dot{q}_i. \tag{4.37}$$

Dado que

$$L' - L = \frac{d}{dt}(q_i q_i), \tag{4.38}$$

as lagrangianas L e L' são equivalentes, pois diferem apenas por uma derivada total. Esse resultado assegura que o método realizado, construção da descrição lagrangiana, não apresenta ambiguidades.

A lagrangiana L, obtida em (4.34), é também equivalente à lagrangiana encontrada em [14]. Pois a mesma é uma versão não-comutativa de um sistema mecânico não-degenerado descrito pela lagrangiana $L = L(q_i, \dot{q}_i)$ ([14]).

Capítulo 5

Modelos Não-Comutativos de Fluidos

5.1 Versão Não-Comutativa para o Modelo de Fluido Irrotacional

O modelo dinâmico de fluidos[15] descrito pela seguinte densidade de lagrangiana em um espaço d-dimensional:

$$\mathcal{L} = -\rho\dot{\eta} - \tilde{V}(\rho, \eta), \tag{5.1}$$

onde

$$\tilde{V}(\rho, \eta) = V(\rho) + \frac{\rho(\partial_i \eta)^2}{2}. \tag{5.2}$$

Que é a forma hidrodinâmica da teoria de Schorödinger [16, 17]. Os parênteses de Dirac entre as variáveis, calculados após análise simplética , são

$$\begin{aligned} \{\rho(\vec{r}), \rho(\vec{r}')\} &= 0 \\ \{\rho(\vec{r}), \eta(\vec{r}')\} &= \delta(\vec{r} - \vec{r}') \\ \{\eta(\vec{r}), \eta(\vec{r}')\} &= 0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Agora, é interessante observar que existe uma interação não fudamental mesmo na ausência de $\tilde{V}$. Esse resultado pode também ser obtido de uma formulaçao de fixação de gauge de uma menbrana dentro do espaço de Minkowsky [18]. Isso é feito utilizando campos dependentes da mudança de variável, para um caso especial $d = 2$, bidimensional, com o seguinte potencial

$$V(\rho) = \frac{g}{\rho}. \tag{5.4}$$

O mesmo resultado foi obtido de uma redução dimensional dentro de uma teoria de campos relativística local [19]. Depois desses comentários, é claro que o modelo de fluido descrito pela lagrangiana, equação (5.1), com algumas restrições para $V(\rho)$, possui simetria galileana. Foi analisado por Bazeia [24], que a conexão entre o modelo de fluidos e a membrana no espaço de Minkowski e esta generalização para sistema de d-membranas somente aparece para potenciais de interação dependentes da densidade bem específicos $V = \frac{g}{\rho}$. A fim de descrever uma versão não-comutativa de um modelo de fluidos, iniciaremos propondo novos parênteses de Poisson entre as coordenadas e momento. Fazendo isso em linguagem simplética, temos

$$\xi = (\rho, \eta)$$

$$f^{-1}(\vec{r}', \vec{r}'') = \begin{pmatrix} \theta(\vec{r}', \vec{r}'') & \delta(\vec{r}' - \vec{r}'') \\ -\delta(\vec{r}' - \vec{r}'') & \beta(\vec{r}', \vec{r}'') \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

em que $\theta(\vec{r}', \vec{r}'')$ e $\beta(\vec{r}', \vec{r}'')$ são funções arbitrárias, que defineremos de forma conveniente. No entanto, essa conveniência busca descrever a natureza não-comutativa do sistema. Definido a matriz f^{-1}, que está relacionado à natureza não-comutativa do modelo, podemos buscar a matriz simplética f. Isso pode ser feito diretamente da relação

$$\int d^3\vec{r}' f_{ij}(\vec{r}, \vec{r}') f^{-1}_{jk}(\vec{r}', \vec{r}'') = \delta_{ik}\delta(\vec{r} - \vec{r}''). \tag{5.6}$$

Sendo que $f(x, y)$ é dada por

$$f(\vec{r}, \vec{r}') = \begin{pmatrix} A(\vec{r}, \vec{r}') & C(\vec{r}, \vec{r}') \\ -C(\vec{r}, \vec{r}') & B(\vec{r}, \vec{r}') \end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

em que $A(\vec{r},\vec{r}')$, $B(\vec{r},\vec{r}')$ e $C(\vec{r},\vec{r}')$ são funções arbitrárias. Da relação (5.6) segue que

$$\int d^3\vec{r}'\big[A(\vec{r},\vec{r}')\theta(\vec{r}',\vec{r}'') - C(\vec{r},\vec{r}')\delta(\vec{r}',\vec{r}'')\big] = \delta(\vec{r}-\vec{r}''), \tag{5.8}$$

$$\int d^3\vec{r}'\big[A(\vec{r},\vec{r}')\delta(\vec{r}',\vec{r}'') + C(\vec{r},\vec{r}')\beta(\vec{r}',\vec{r}'')\big] = 0, \tag{5.9}$$

$$\int d^3\vec{r}'\big[C(\vec{r},\vec{r}')\theta(\vec{r}',\vec{r}'') + B(\vec{r},\vec{r}')\delta(\vec{r}',\vec{r}'')\big] = 0, \tag{5.10}$$

$$\int d^3\vec{r}'\big[-C(\vec{r},\vec{r}')\delta(\vec{r}',\vec{r}'') + B(\vec{r},\vec{r}')\beta(\vec{r}',\vec{r}'')\big] = \delta(\vec{r}-\vec{r}''). \tag{5.11}$$

A fim de determinar a versão não-comutativa do modelo de fluidos, definimos, convenientemente, as funções $\theta(\vec{r}',\vec{r}'')$ e $\beta(\vec{r}',\vec{r}'')$ da seguinte forma

$$\theta(\vec{r}',\vec{r}'') = -\frac{\nu}{2}\partial_{(r'')}\delta(\vec{r}'-\vec{r}''),$$

$\partial_{r''} \equiv \partial_{x''}\partial_{y''}\partial_{z''}$;

$$\beta(\vec{r}',\vec{r}'') = 2\alpha\Theta(\vec{r}'-\vec{r}''), \tag{5.12}$$

em que

$$\Theta(\vec{r}'-\vec{r}'') \equiv \Theta(x'-x'')\Theta(y'-y'')\Theta(z'-z'');$$

e $\Theta(x'-x'')$ é a função sinal usual. Já ν e α são parâmetros positivos associados à não comutatividade da descrição.

Dessa forma, podemos reeescrever o sistema de equações anteriores, da seguinte forma

$$-\frac{\nu}{2}\partial_{r''}A(\vec{r},\vec{r}'') - C(\vec{r},\vec{r}'') = \delta(\vec{r}-\vec{r}''), \tag{5.13}$$

$$A(\vec{r},\vec{r}'') + \int C(\vec{r},\vec{r}')[2\alpha\Theta(\vec{r}'-\vec{r}'')]d^3\vec{r}' = 0, \tag{5.14}$$

$$-\frac{\nu}{2}\partial_{r''}C(\vec{r},\vec{r}'') + B(\vec{r},\vec{r}'') = 0, \tag{5.15}$$

$$-C(\vec{r},\vec{r}'') + \int B(\vec{r},\vec{r}')[2\alpha\Theta(\vec{r}'-\vec{r}'')]d^3\vec{r}' = \delta(\vec{r}-\vec{r}''). \tag{5.16}$$

Derivando parcialmente (5.14) em relação à variável r, ∂_r; e substituindo o resultado em (5.13)

$$-\frac{\nu}{2}[4\alpha C(\vec{r},\vec{r}'')] - C(\vec{r},\vec{r}'') = \delta(\vec{r}-\vec{r}'')$$

$$C(\vec{r},\vec{r}'') = -\frac{1}{2\alpha\nu+1}\delta(\vec{r}-\vec{r}''). \tag{5.17}$$

Onde usamos que

$$\partial_{r''}\Theta(\vec{r}''-\vec{r}') = 2\delta(\vec{r}''-\vec{r}') = 2\delta(x''-x')\delta(y''-y')\delta(z''-z').$$

Levando o valor de $C(\vec{r},\vec{r}'')$ em (5.15), temos

$$B(\vec{r},\vec{r}'') = -\frac{\nu}{2}\partial_{r''}[\frac{\delta(\vec{r}-\vec{r}'')}{2\nu\alpha+1}]$$

$$B(\vec{r},\vec{r}') = -\frac{\nu}{2(2\alpha\nu+1)}\partial_{r'}\delta(\vec{r}-\vec{r}'), \tag{5.18}$$

e em (5.14), obtemos

$$A(\vec{r},\vec{r}'') = -\int[-\frac{\delta(\vec{r}-\vec{r}')}{2\nu\alpha+1}][2\alpha\Theta(\vec{r}'-\vec{r}'')]d^3\vec{r}'$$

$$A(\vec{r},\vec{r}'') = \frac{2\alpha}{2\alpha\nu+1}\Theta(\vec{r}-\vec{r}''). \tag{5.19}$$

Portanto, a relação dada em (5.7) se torna

$$f(\vec{r},\vec{r}') = \begin{pmatrix} \frac{2\alpha}{2\alpha\nu+1}\Theta(\vec{r}-\vec{r}') & -\frac{1}{2\alpha\nu+1}\delta(\vec{r}-\vec{r}') \\ \frac{1}{2\alpha\nu+1}\delta(\vec{r}-\vec{r}') & -\frac{\nu}{2(2\alpha\nu+1)}\partial_{r'}\delta(\vec{r}-\vec{r}') \end{pmatrix}. \tag{5.20}$$

E como a matriz simplética é definida por

$$f_{\xi_i\xi_j}(\vec{r},\vec{r}') = \frac{\delta A_{\xi_j}(\vec{r})}{\delta\xi_i(\vec{r}')} - \frac{\delta A_{\xi_j}(\vec{r}')}{\delta\xi_i(\vec{r})}, \tag{5.21}$$

obtemos um conjunto de equações diferenciais,

$$\frac{2\alpha}{2\alpha\nu+1}\Theta(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{\delta A_{\rho(\vec{r})}(\vec{r})}{\delta\rho(\vec{r}')} - \frac{\delta A_{\rho(\vec{r}')}(\vec{r}')}{\delta\rho(\vec{r})}, \tag{5.22}$$

$$-\frac{1}{2\alpha\nu+1}\delta(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{\delta A_{\eta(\vec{r})}(\vec{r})}{\delta\rho(\vec{r}')} - \frac{\delta A_{\rho(\vec{r}')}(\vec{r}')}{\delta\eta(\vec{r})}, \tag{5.23}$$

$$-\frac{\nu}{2(2\alpha\nu+1)}\partial_{r'}\delta(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{\delta A_{\eta(\vec{r})}(\vec{r})}{\delta\eta(\vec{r}')} - \frac{\delta A_{\eta(\vec{r}')}(\vec{r}')}{\delta\eta(\vec{r})}. \tag{5.24}$$

Após cálculos diretos, ver apêndice B, obtemos

$$\begin{aligned} A_\rho(\vec{r}') &= -\int d^3\vec{r}\frac{\alpha\Theta(\vec{r}-\vec{r}')}{2\alpha\nu+1}\rho(\vec{r}), \\ A_\eta(\vec{r}') &= -\frac{1}{2\alpha\nu+1}\rho(\vec{r}')+\frac{1}{4}\frac{\nu}{2\alpha\nu+1}\partial_{r'}\eta(\vec{r}'). \end{aligned} \tag{5.25}$$

Consequentemente, a densidade de lagrangiana que governa a dinâmica do fluido não-comutativo é dada por

$$\mathcal{L} = -\{\frac{1}{2\alpha\nu+1}\rho(\vec{r})-\frac{1}{4}\frac{\nu}{2\alpha\nu+1}\partial_r\eta(\vec{r})\}\dot{\eta}-\left\{\int d^3\vec{r}'\frac{\alpha\Theta(\vec{r}'-\vec{r})}{2\alpha\nu+1}\rho(\vec{r}')\right\}\dot{\rho}-V(\rho,\eta), \tag{5.26}$$

em que $V(\rho,\eta)$ é, *a priori*, um potencial desconhecido . Note que surge um termo quiral na lagrangiana, segundo termo entre chaves, o qual controla a dinâmica do fluido de maneira não usual. Este surgiu devido aos parênteses entre os potenciais velocidades e as densidades (5.5). Notável também, é a presença na parte cinética dessa lagrangiana do fator $\frac{1}{(2\alpha\nu+1)}$, menor que um; e do termo $\frac{1}{4}\frac{\nu}{2\alpha\nu+1}(\partial_r\eta)\dot{\eta}$, este relacionado às velocidades $v_i = \partial_i\eta$. Ambos os termos estão associados à redução da energia cinética do fluido. Logo o fluido apresenta dissipação, algo contraditório, pois um fluido irrotacional usual não apresenta dissipação. Portanto, o fluido, do ponto de vista não-comutativo, deixa de ser irrotacional, possuindo dissipação, esta relacionada à velocidade e aos parâmetros referentes à não-comutividade, ν e α. Agora, se relacionarmos essa dissipação à viscosidade, podemos associar, então, viscosidade à não-comutatividade.

Neste momento, é notável observar que a versão comutativa do modelo de fluido irrotacional pode ser restaurada. De fato, considerando $\alpha,\nu \to 0$, a lagrangiana, (5.26), se reduz à forma original

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\rho\dot{\eta}-\tilde{V}(\rho,\eta), \tag{5.27}$$

Enquanto a inversa da equação (5.20) é

$$f^{-1}(\vec{r},\vec{r}') = \begin{pmatrix} 0 & \delta(\vec{r}-\vec{r}') \\ -\delta(\vec{r}-\vec{r}') & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.28}$$

Dessa podemos identificar diretamente os parênteses de Dirac entre as variáveis como sendo

$$
\begin{aligned}
\{\rho(\vec{r}), \rho(\vec{r}')\} &= 0, \\
\{\rho(\vec{r}), \eta(\vec{r}')\} &= \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \\
\{\eta(\vec{r}), \eta(\vec{r}')\} &= 0,
\end{aligned} \tag{5.29}
$$

que são os mesmos dados por (5.3). Portanto o modelo original do fluido comutativo irrotacional é reproduzido.

Uma interessante observação que podemos fazer durante o método utilizado para descrever o fluido não-comutativo irrotacional, reside no fato de que diferentes definições dos parênteses de Dirac conduzem a diferentes descrições lagrangianas, com potenciais simpléticos similares, consequentemente, diferentes equações de movimennto serão obtidas. Isso mostra que a escolha de diferentes parênteses de Dirac conduz a descrições dinamicamente não-equivalentes para o fluido.

5.2 Versão Não-Comutativa para um Modelo de Fluido Rotacional

Nesta seção, buscamos construir uma versão não-comutativa do modelo dinâmico de um fluido rotacional. Inicialmente apresentamos e analisamos a dinâmica de um fluido rotacional do ponto de vista simplético. No entanto, sabe-se que em fluidos com vorticidade e/ou viscosidade surge invariantes de Cassimir, que são quantidades que comutam com todas quantidades da teoria e obstruem a construção da formulação canônica para o fluido. Essa obstrução foi demonstrada em [20]. No entanto, tal obstrução foi eliminada com a introdução da parametrização de Clebsh para a velocidade do fluido, como mostrado por Lin[23] e Neves[22]. Sendo assim, a introdução dos parâmetros Clebsh permite a construção de uma densidade de lagrangiana que governa a dinâmica do modelo de fluido rotacional com dissipação no espaço tridimensional, da seguinte forma

$$\mathcal{L} = -\rho\dot{\theta} - \rho\alpha\dot{\beta} - \mathcal{V}. \tag{5.30}$$

Onde o potencial simplético é dado por

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2}(1-k)\rho(\partial_i\theta + \alpha\partial_i\beta)(\partial_i\theta + \alpha\partial_i\beta) + V(\rho). \tag{5.31}$$

Nessas equações α e β são parâmetros de Clebsch, k é um parâmetro de dissipação e o termo entre parênteses é a velocidade do fluido. As variáveis simpléticas são

$$\xi_i = (\rho, \theta, \alpha, \beta). \tag{5.32}$$

A fim de introduzir não-comutatividade no modelo, vamos escolher os seguintes parênteses entre as coordenadas,

$$\{\rho(\vec{r}), \rho(\vec{r}')\} = -\frac{\nu}{2}\partial_{r'}\delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$\{\theta(\vec{r}), \theta(\vec{r}')\} = 2\gamma\Theta(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$\{\theta(\vec{r}), \rho(\vec{r}')\} = -\delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$\{\theta(\vec{r}), \alpha(\vec{r}')\} = \frac{\alpha(\vec{r})}{\rho}\delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$\{\alpha(\vec{r}), \beta(\vec{r}')\} = \frac{1}{\rho(\vec{r})}\delta(\vec{r}-\vec{r}'),$$

os parênteses restantes são nulos. Essa escolha é baseada na análise simplética do modelo, ou seja, da lagrangiana (5.30).

Então a inversa da matriz simplética é dada por

$$\mathbf{f^{-1}}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{r}}') = \begin{pmatrix} -\frac{\nu}{2}\partial_{r'}\delta(\vec{r}-\vec{r}') & \delta(\vec{r}-\vec{r}') & 0 & 0 \\ -\delta(\vec{r}-\vec{r}') & 2\gamma\Theta(\vec{r}-\vec{r}') & \frac{\alpha(\vec{r})}{\rho}\delta(\vec{r}-\vec{r}') & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha(\vec{r})}{\rho}\delta(\vec{r}-\vec{r}') & 0 & \frac{1}{\rho}\delta(\vec{r}-\vec{r}') \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho}\delta(\vec{r}-\vec{r}') & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.33}$$

A matriz simplética

$$\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{r}}'',\tilde{\mathbf{r}}) = \begin{pmatrix} A(\vec{r}'',\vec{r}) & B(\vec{r}'',\vec{r}) & C(\vec{r}'',\vec{r}) & D(\vec{r}'',\vec{r}) \\ E(\vec{r}'',\vec{r}) & F(\vec{r}'',\vec{r}) & G(\vec{r}'',\vec{r}) & H(\vec{r}'',\vec{r}) \\ I(\vec{r}'',\vec{r}) & J(\vec{r}'',\vec{r}) & L(\vec{r}'',\vec{r}) & M(\vec{r}'',\vec{r}) \\ N(\vec{r}'',\vec{r}) & O(\vec{r}'',\vec{r}) & P(\vec{r}'',\vec{r}) & Q(\vec{r}'',\vec{r}) \end{pmatrix} \tag{5.34}$$

pode ser calculada, desde que

$$\int d^3\vec{r}[f(\vec{r}'',\vec{r})f^{-1}(\vec{r},\vec{r}')] = \delta(\vec{r}''-\vec{r}'). \tag{5.35}$$

Sendo assim, temos um conjunto de equações que define as entradas da matriz simplética,(ver apêndice A). Depois disso, a matriz simplética $\mathbf{f}(\vec{r}'',\vec{r})$, é tal que $\mathbf{g}(\vec{r}'',\vec{r}) = \mathbf{f}(\vec{r}'',\vec{r})[1{+}2\gamma\nu]$. Onde

$$\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{r}}'',\tilde{\mathbf{r}}) = \begin{pmatrix} 2\gamma\Theta(\vec{r}''-\vec{r}) & -\delta(\vec{r}''-\vec{r}) & 0 & -\alpha(\vec{r})\delta(\vec{r}''-\vec{r}) \\ \delta(\vec{r}''-\vec{r}) & -\frac{\nu}{2}\partial_r\delta(\vec{r}''-\vec{r}) & 0 & -\frac{\nu}{2}\alpha(\vec{r})\partial_r\delta(\vec{r}''-\vec{r}) \\ 0 & 0 & 0 & -(1+2\gamma\nu)\rho\delta(\vec{r}''-\vec{r}) \\ \alpha(\vec{r})\delta(\vec{r}''-\vec{r}) & -\frac{\nu}{2}\partial_r\big(\alpha(\vec{r}'')\delta(\vec{r}''-\vec{r})\big) & (1+2\gamma\nu)\rho\delta(\vec{r}''-\vec{r}) & -\frac{\nu}{2}(\alpha(\vec{r}))\partial_r\big(\alpha(\vec{r}'')\delta(\vec{r}''-\vec{r})\big) \end{pmatrix} \tag{5.36}$$

Desde que a matriz simplética é definida, neste caso, como

$$f_{\xi_i\xi_j}(\vec{r}'',\vec{r}) = \frac{\delta A_{(\xi_j(\vec{r}''))}(\vec{r}'')}{\partial\xi_i(\vec{r})} - \frac{\delta A_{(\xi_i(\vec{r}))}(\vec{r})}{\partial\xi_j(\vec{r}'')}, \tag{5.37}$$

nos obtemos um conjunto de equações variacionais parciais, que podem ser resolvidas a fim de obter os A_{ξ_i}. A seguir resolvemos essas equações. A primeira equação

$$2\gamma\Big(\frac{1}{1+2\gamma\nu}\Big)\Theta(\vec{r}''-\vec{r}) = \frac{\delta A_{\rho(\vec{r}'')}(\vec{r}'')}{\delta\rho(\vec{r})} - \frac{\delta A_{\rho(\vec{r})}(\vec{r})}{\delta\rho(\vec{r}'')}, \tag{5.38}$$

admite a seguinte solução, ver apêndice B,

$$A_{\rho(\vec{r})}(\vec{r}) = -\int d^3\vec{r}''\Big(\frac{1}{1+2\gamma\nu}\Big)\gamma\Theta(\vec{r}''-\vec{r})\rho(\vec{r}''). \tag{5.39}$$

Enquanto as equações

$$-\Big(\frac{1}{1+2\gamma\nu}\Big)\delta(\vec{r}''-\vec{r}) = \frac{\delta A_{\theta(\vec{r}'')}(\vec{r}'')}{\delta\rho(\vec{r})} - \frac{\delta A_{\rho(\vec{r})}(\vec{r})}{\delta\theta(\vec{r}'')} \tag{5.40}$$

e

$$\Big(-\frac{1}{1+2\gamma\nu}\Big)\frac{\nu}{2}\partial_r\delta(\vec{r}''-\vec{r})=\frac{\delta A_{\theta(\vec{r}'')}(\vec{r}'')}{\delta\theta(\vec{r})}-\frac{\delta A_{\theta(\vec{r})}(\vec{r})}{\delta\theta(\vec{r}'')} \tag{5.41}$$

têm como solução

$$A_{\theta(\vec{r})}(\vec{r})=-\Big(\frac{1}{1+2\gamma\nu}\Big)(\rho(\vec{r})-\frac{\nu}{4}\partial_r\theta(\vec{r})). \tag{5.42}$$

Agora,

$$\Big(\frac{1}{1+2\gamma\nu}\Big)\alpha(\vec{r})\delta(\vec{r}''-\vec{r})=\frac{\delta A_{\rho(\vec{r}'')}(\vec{r}'')}{\delta\beta(\vec{r})}-\frac{\delta A_{\beta(\vec{r})}}{\delta\rho(\vec{r}'')} \tag{5.43}$$

$$-\frac{\nu}{2}(\alpha(\vec{r}))\Big(\frac{1}{1+2\gamma\nu}\Big)\partial_r(\alpha(\vec{r}'')\delta(\vec{r}''-\vec{r}))=\frac{\delta A_{\beta(\vec{r}'')}(\vec{r}'')}{\delta\beta(\vec{r})}-\frac{\delta A_{\beta(\vec{r})}(\vec{r})}{\delta\beta(\vec{r}'')}, \tag{5.44}$$

E as duas últimas equações diferenciais variacionais possuem uma solução na forma

$$A_{\beta(\vec{r})}(\vec{r})=-\Big(\frac{1}{1+2\gamma\nu}\Big)\big[\rho(\vec{r})\alpha(\vec{r})-\frac{\nu}{4}(\alpha(\vec{r}))\partial_r(\alpha(\vec{r})\beta(\vec{r}))\big]. \tag{5.45}$$

Já, para as equações

$$-\frac{\nu}{2}\Big(\frac{1}{1+2\gamma\nu}\Big)(\partial_r\alpha(\vec{r}'')\delta(\vec{r}''-\vec{r}))=\frac{\delta A_{\theta(\vec{r}'')}(\vec{r}'')}{\delta\beta(\vec{r})}-\frac{\delta A_{\beta(\vec{r})}(\vec{r})}{\delta\theta(\vec{r}'')}, \tag{5.46}$$

$$-\frac{\nu}{2}\Big(\frac{1}{1+2\gamma\nu}\Big)\alpha(\vec{r})\partial_r\delta(\vec{r}''-\vec{r})=\frac{\delta A_{\beta(\vec{r}'')}(\vec{r}'')}{\delta\theta(\vec{r})}-\frac{\delta A_{\theta(\vec{r})}(\vec{r})}{\delta\beta(\vec{r}'')}, \tag{5.47}$$

uma solução conveniente, visto as soluções anteriores, é obtida considerando $A_{\beta(\vec{r})}(\vec{r})$ independente de $\theta(\vec{r})$,

$$A_{\theta(\vec{r})}(\vec{r})=\int d^3\vec{r}''\beta(\vec{r}'')\frac{\nu}{2}\Big(\frac{1}{1+2\gamma\nu}\Big)\alpha(\vec{r})\partial_r\delta(\vec{r}''-\vec{r}),$$

$$A_{\theta(\vec{r})}(\vec{r})=\frac{\nu}{2}\Big(\frac{1}{1+2\gamma\nu}\Big)\alpha(\vec{r})\partial_r\beta(\vec{r}). \tag{5.48}$$

Finalmente, a última equação,

$$-\rho\delta(\vec{r}''-\vec{r})=\frac{\delta A_{\beta(\vec{r}'')}(r'')}{\delta\alpha(\vec{r})}-\frac{\delta A_{\alpha(\vec{r})}(\vec{r})}{\delta\beta(\vec{r}'')}, \tag{5.49}$$

é facilmente resolvida usando os valores de $A_{\beta(\vec{r}'')}(\vec{r}'')$ obtidos anteriormente,

$$-\frac{\delta A_{\alpha(\vec{r})}(\vec{r})}{\delta\beta(\vec{r})}=\Big(\frac{1}{1+2\gamma\nu}\Big)\big[\rho(\vec{r}'')\delta(\vec{r}''-\vec{r})-\frac{\nu}{2}\alpha(\vec{r}'')\delta(\vec{r}''-\vec{r})\partial_{r''}\beta(\vec{r}'')\big]+\rho(\vec{r}'',\vec{r})\delta(\vec{r}''-\vec{r}),$$

logo

$$A_{\alpha(\vec{r})}(\vec{r}) = -\big(\frac{1}{1+2\gamma\nu}\big)\big[\rho(\vec{r})\beta(\vec{r}) - \frac{\nu}{2}\alpha(\vec{r})\beta(\vec{r})\partial_r\beta(\vec{r})\big] + \rho(\vec{r})\beta(\vec{r}). \tag{5.50}$$

Sumarizando nossos resultados, temos

$$A_{\rho(\vec{r})}(\vec{r}) = -\int d^3\vec{r}''\big(\frac{1}{1+2\gamma\nu}\big)\gamma\Theta(\vec{r}'' - \vec{r})\rho(\vec{r}''), \tag{5.51}$$

$$A_{\theta(\vec{r})}(\vec{r}) = -\big(\frac{1}{1+2\gamma\nu}\big)\big[(\rho(\vec{r}) - \frac{\nu}{4}\partial_r\theta(\vec{r})) - \frac{\nu}{2}\alpha(\vec{r})\partial_r\beta(\vec{r})\big], \tag{5.52}$$

$$A_{\alpha(\vec{r})}(\vec{r}) = -\big(\frac{1}{1+2\gamma\nu}\big)\big[\rho(\vec{r})\beta(\vec{r}) - \frac{\nu}{2}\alpha(\vec{r})\beta(\vec{r})\partial_r\beta(\vec{r})\big] + \rho(\vec{r})\beta(\vec{r}), \tag{5.53}$$

$$A_{\beta(\vec{r})}(\vec{r}) = -\big(\frac{1}{1+2\gamma\nu}\big)\big[\rho(\vec{r})\alpha(\vec{r}) - \frac{\nu}{4}(\alpha(\vec{r}))\partial_r(\alpha(\vec{r})\beta(\vec{r}))\big]. \tag{5.54}$$

Desde que a densidade de lagrangiana de primeira ordem é definida por

$$\mathcal{L} = A_\rho\dot{\rho} + A_\theta\dot{\theta} + A_\alpha\dot{\alpha} + A_\beta\dot{\beta} - V, \tag{5.55}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &\Big\{-\int d^3\vec{r}'\big(\frac{1}{1+2\gamma\nu}\big)\gamma\Theta(\vec{r}'-\vec{r})\rho(\vec{r})\Big\}\dot{\rho} + \Big(-\big(\frac{1}{1+2\gamma\nu}\big)\big[(\rho(\vec{r}) - \frac{\nu}{4}\partial_r\theta(\vec{r})) - \frac{\nu}{2}\alpha(\vec{r})\partial_r\beta(\vec{r})\big]\Big)\dot{\theta}\\ &+\Big(-\big(\frac{1}{1+2\gamma\nu}\big)\big[\rho(\vec{r})\beta(\vec{r}) - \frac{\nu}{2}\alpha(\vec{r})\beta(\vec{r})\partial_r\beta(\vec{r})\big] + \rho(\vec{r})\beta(\vec{r})\Big)\dot{\alpha}\\ &+\Big(-\big(\frac{1}{1+2\gamma\nu}\big)\big[\rho(\vec{r})\alpha(\vec{r}) - \frac{\nu}{4}(\alpha(\vec{r}))\partial_r(\alpha(\vec{r})\beta(\vec{r}))\big]\Big)\dot{\beta}-\\ &-\frac{1}{2}(1-k)\rho(\partial_i\theta + \alpha\partial_i\beta)(\partial_i\theta + \alpha\partial_i\beta) + V(\rho).\end{aligned} \tag{5.56}$$

Que representa a densidade de lagrangiana que governa a dinâmica de um fluido rotacional dissipativo não-comutativo. É importante ressaltarmos que termos na lagrangiana na forma $f(\theta)\dot{\theta}$ não causam influência alguma nas equações de movimento do fluido. Como $\big(\frac{1}{1+2\gamma\nu}\big)\frac{\nu}{4}\partial_r(\theta(\vec{r}))\dot{\theta}$, por exemplo. Analogamente às análises para o fluido irrotacional, essa lagrangiana apresenta em sua parte cinética um termo quiral, entre chaves. Além da notável presença do fator $\frac{1}{1+2\gamma\nu}$, em que ν e γ são os parâmetros positivos associadas à não-comutatividade da descrição. Claramente esse fator é menor que um, logo reflete uma decréscimo na energia cinética do fluido.

Esse resultado era esperado baseado no fato do fluido rotacional descrito ser dissipativo e dos resultados obtidos anteriormente para o fluido irrotacional. Portanto, a energia cinética do fluido diminui quando a não-comutatividade é levada em conta. Isso nos leva a relacionar a viscosidade, considerada o determinante na redução de energia do fluido, com a não-comutatividade. E, consequentemente, uma descrição não-comutativa do modelo de fluido rotacional traz informações adicionais, logo é mais completa e digna de mais investigações. Neste momento, é interessante observar que (5.57) se reduz à (5.30) quando tomamos γ e ν nulos, ou seja, a versão comutativa do modelo dinâmico do fluido rotacional é retomada.

Capítulo 6

Conclusão e Perspectivas Futuras

Nesta tese, apresentamos um formalismo que permite obter versões não-comutativas de sistemas comutativos, baseando-se no chamado formalismo simplético. Este método foi aplicado em um sistema mecânico arbitrário não-degenerado e em um oscilador quiral, obtendo-se resultados em acordo com os encontrados na literatura. O trabalho original desta tese consistiu na utilização do formalismo simplético de indução de não-comutatividade (FSINC) em mecânica de fluidos, mais especificamente, nos modelos para fluidos irrotacionais e rotacionais. As versões não-comutativas de tais modelos apresentaram interessantes resultados, como o comportamento quiral do fluido e a possibilidade de relacionar a viscosidade do fluido com o parâmetro de não-comutatividade. O que nos levou a concluir que o modelo de fluido com viscosidade tem uma melhor descrição quando levamos em consideração a idéia de não-comutatividade. Como perspectiva imediata às idéias aqui desenvolvidas, pretendemos aplicar o FSINC em sistemas que apresentam vínculos como, por exemplo, o modelo de Skyrme e o modelo sigma não-linear O(N). E, assim, investigar que propriedades adicionais as versões não-comutativas de tais modelos podem trazer para uma melhor compreensão dos mesmos.

Apêndice A

Obtenção da Matriz Simplética (5.34)

Da equação (5.35), mediante as equações (5.34) e (5.33), temos o seguinte sistema de equação

$$\int \Big(- A(\vec{r}'', \vec{r}) \frac{\nu}{2} \partial_{r'} \delta(\vec{r} - \vec{r}') - B(\vec{r}'', \vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}') \Big) d^3\vec{r} = \delta(\vec{r}'' - \vec{r}) \tag{A.1}$$

$$\int \Big(A(\vec{r}'', \vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}') + B(\vec{r}'', \vec{r}) 2\gamma \Theta(\vec{r} - \vec{r}') - C(\vec{r}'', \vec{r}) \frac{\alpha(\vec{r})}{\rho} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \Big) d^3\vec{r} = 0 \tag{A.2}$$

$$\int \Big(B(\vec{r}'', \vec{r}) \frac{\alpha(\vec{r})}{\rho} \delta(\vec{r} - \vec{r}') - D(\vec{r}'', \vec{r}) \frac{1}{\rho} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \Big) d^3\vec{r} = 0 \tag{A.3}$$

$$\int \Big(C(\vec{r}'', \vec{r}) \frac{1}{\rho} \delta(\vec{r} - \vec{r}')) \Big) d^3\vec{r} = 0. \tag{A.4}$$

Da última equação, encontramos diretamente

$$C(\vec{r}'', \vec{r}) = 0. \tag{A.5}$$

Reescrevendo $(A.1)$ e substituindo $(A.5)$ em $(A.2)$ encontramos, respectivamente,

$$-\frac{\nu}{2} \partial_{r'} A(\vec{r}'', \vec{r}') = \delta(\vec{r}'' - \vec{r}') + B(\vec{r}'', \vec{r}'), \tag{A.6}$$

$$A(\vec{r}'', \vec{r}') = -2\gamma \int \Theta(\vec{r} - \vec{r}') B(\vec{r}'', \vec{r}) d^3\vec{r}. \tag{A.7}$$

Onde usamos, na última relação, a definição

$$\int A(\vec{r}'', \vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}') d^3\vec{r} = A(\vec{r}'', \vec{r}'). \tag{A.8}$$

Derivando parcialmente a equação $(A.7)$ em relação à coordenada r',

$$-\frac{\nu}{2}\partial_{r'}A(\vec{r}'',\vec{r}') = 2\gamma\nu B(\vec{r}'',\vec{r}'),$$

e comparando esse resultado com $(A.6)$, identificamos finalmente

$$B(\vec{r}'',\vec{r}') = -\left(\frac{1}{1+2\gamma\nu}\right)\delta(\vec{r}''-\vec{r}'). \tag{A.9}$$

Levando esse resultado em $(A.7)$,

$$A(\vec{r}'',\vec{r}') = 2\gamma\left(\frac{1}{1+2\gamma\nu}\right)\Theta(\vec{r}''-\vec{r}'). \tag{A.10}$$

Finalmente, usando o valor de $B(\vec{r}'',\vec{r})$ em $(A.3)$,

$$D(\vec{r}'',\vec{r}') = \int -\left(\frac{1}{1+2\gamma\nu}\right)\alpha(\vec{r})\delta(\vec{r}''-\vec{r}')d^3\vec{r}$$

$$D(\vec{r}'',\vec{r}') = -\left(\frac{1}{1+2\gamma\nu}\right)\alpha(\vec{r}')\delta(\vec{r}''-\vec{r}'). \tag{A.11}$$

Portanto, a primeira linha da matriz simplética está determinada.

De forma análoga, para segunda linha da matriz simplética, temos o seguinte sistema de equação

$$\int\left(-E(\vec{r}'',\vec{r})\frac{\nu}{2}\partial_{r'}\delta(\vec{r}-\vec{r}') - F(\vec{r}'',\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}')\right)d^3\vec{r} = 0 \tag{A.12}$$

$$\int\left(E(\vec{r}'',\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}')+F(\vec{r}'',\vec{r})2\gamma\Theta(\vec{r}-\vec{r}')-G(\vec{r}'',\vec{r})\frac{\alpha(\vec{r})}{\rho}\delta(\vec{r}-\vec{r}')\right)d^3\vec{r} = \delta(\vec{r}''-\vec{r}') \tag{A.13}$$

$$\int\left(F(\vec{r}'',\vec{r})\frac{\alpha(\vec{r})}{\rho}\delta(\vec{r}-\vec{r}') - H(\vec{r}'',\vec{r})\frac{1}{\rho}\delta(\vec{r}-\vec{r}')\right)d^3\vec{r} = 0 \tag{A.14}$$

$$\int\left(G(\vec{r}'',\vec{r})\frac{1}{\rho}\delta(\vec{r}-\vec{r}'))\right)d^3\vec{r} = 0. \tag{A.15}$$

Da última equação, encontramos diretamente

$$G(\vec{r}'',\vec{r}) = 0. \tag{A.16}$$

Usando o valor de $G(\vec{r}'',\vec{r})$ em $(A.12)$ e $(A.13)$, temos

$$F(\vec{r}'',\vec{r}') = -\frac{\nu}{2}\partial_{r'}E(\vec{r}'',\vec{r}') = \frac{\nu}{2}\partial_{r'}\int F(\vec{r}'',\vec{r})2\gamma\Theta(\vec{r}-\vec{r}')d^3\vec{r} - \frac{\nu}{2}\delta(\vec{r}''-\vec{r}')$$

$$= -4\gamma\frac{\nu}{2}F(\vec{r}'',\vec{r}') - \frac{\nu}{2}\delta(\vec{r}''-\vec{r}'),$$

logo

$$F(\vec{r}'',\vec{r}') = -\left(\frac{1}{1+2\gamma\nu}\right)\frac{\nu}{2}\partial_{r'}\delta(\vec{r}''-\vec{r}'). \tag{A.17}$$

Reescrevendo $(A.12)$,

$$F(\vec{r}'',\vec{r}') = -\frac{\nu}{2}\partial_{r'}E(\vec{r}'',\vec{r}'),$$

e comparando o resultado com $(A.17)$, obtemos

$$E(\vec{r}'',\vec{r}') = \left(\frac{1}{1+2\gamma\nu}\right)\delta(\vec{r}''-\vec{r}'). \tag{A.18}$$

Por fim, da equação $(A.14)$

$$F(\vec{r}'',\vec{r}')\alpha(\vec{r}') = H(\vec{r}'',\vec{r}')$$

ou

$$H(\vec{r}'',\vec{r}') = -\left(\frac{1}{1+2\gamma\nu}\right)\frac{\nu}{2}\partial_{r'}\delta(\vec{r}''-\vec{r}'). \tag{A.19}$$

Completando assim a segunda linha da matriz simplética.

Agora, para terceira linha,

$$\int\left(-I(\vec{r}'',\vec{r})\frac{\nu}{2}\partial_{r'}\delta(\vec{r}-\vec{r}') - J(\vec{r}'',\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}')\right)d^3\vec{r} = 0 \tag{A.20}$$

$$\int\left(I(\vec{r}'',\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}') + J(\vec{r}'',\vec{r})2\gamma\Theta(\vec{r}-\vec{r}') - L(\vec{r}'',\vec{r})\frac{\alpha(\vec{r})}{\rho}\delta(\vec{r}-\vec{r}')\right)d^3\vec{r} = 0 \tag{A.21}$$

$$\int\left(J(\vec{r}'',\vec{r})\frac{\alpha(\vec{r})}{\rho}\delta(\vec{r}-\vec{r}') - M(\vec{r}'',\vec{r})\frac{1}{\rho}\delta(\vec{r}-\vec{r}')\right)d^3\vec{r} = \delta(\vec{r}''-\vec{r}') \tag{A.22}$$

$$\int\left(L(\vec{r}'',\vec{r})\frac{1}{\rho}\delta(\vec{r}-\vec{r}')\right)d^3\vec{r} = 0. \tag{A.23}$$

Da última equação,

$$L(\vec{r}'',\vec{r}) = 0. \tag{A.24}$$

E ainda, podemos reescrever respectivamente, usando o valor de $C(\vec{r}'',\vec{r})$ em $(A.21)$, as equações $(A.20)$ e $(A.21)$,

$$I(\vec{r}'',\vec{r}') = -\int J(\vec{r}'',\vec{r})2\gamma\Theta(\vec{r}-\vec{r}')d^3\vec{r} \tag{A.25}$$

$$J(\vec{r}'',\vec{r}') = -\frac{\nu}{2}\partial_{r'} I(\vec{r}'',\vec{r}'). \tag{A.26}$$

Levando $I(\vec{r}'',\vec{r})$ na equação para $J(\vec{r}'',\vec{r})$,

$$J(\vec{r}'',\vec{r}') = \partial_{r'}\left(\frac{\nu}{2}\int J(\vec{r}'',\vec{r})2\gamma\Theta(\vec{r}-\vec{r}')d^3\vec{r}\right)$$
$$J(\vec{r}'',\vec{r}') = -2\gamma\nu J(\vec{r}'',\vec{r}'). \tag{A.27}$$

No entanto, soluções mais simples e, logo, convenientes para $(A.26)$ e $(A.27)$ são

$$J(\vec{r}'',\vec{r}') = I(\vec{r}'',\vec{r}') = 0 \tag{A.28}$$

Finalmente, substituindo $(A28)$ em $(A.22)$,

$$M(\vec{r}'',\vec{r}') = -\rho\delta(\vec{r}''-\vec{r}'). \tag{A.29}$$

Que era a última entrada da terceira linha da matriz simplética a ser determinada.

De forma completamente análoga aos cálculos anteriores, para última linha, temos

$$\int\left(-N(\vec{r}'',\vec{r})\frac{\nu}{2}\partial_{r'}\delta(\vec{r}-\vec{r}') - O(\vec{r}'',\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}')\right)d^3\vec{r} = 0 \tag{A.30}$$

$$\int\left(N(\vec{r}'',\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}') + O(\vec{r}'',\vec{r})2\gamma\Theta(\vec{r}-\vec{r}') - P(\vec{r}'',\vec{r})\frac{\alpha(\vec{r})}{\rho}\delta(\vec{r}-\vec{r}')\right)d^3\vec{r} = 0 \tag{A.31}$$

$$\int\left(O(\vec{r}'',\vec{r})\frac{\alpha(\vec{r})}{\rho}\delta(\vec{r}-\vec{r}') - Q(\vec{r}'',\vec{r})\frac{1}{\rho}\delta(\vec{r}-\vec{r}')\right)d^3\vec{r} = 0 \tag{A.32}$$

$$\int\left(P(\vec{r}'',\vec{r})\frac{1}{\rho}\delta(\vec{r}-\vec{r}'')\right)d^3\vec{r} = \delta(\vec{r}''-\vec{r}'). \tag{A.33}$$

Da última equação,

$$P(\vec{r}'',\vec{r}') = \rho\delta(\vec{r}''-\vec{r}'). \tag{A.34}$$

Substituindo o valor de $P(x,z)$ na derivada em relação à r' de $(A.31)$, temos

$$\partial_{r'}N(\vec{r}'',\vec{r}') = 4\gamma O(\vec{r}'',\vec{r}') + \partial_{r'}\left(\alpha(\vec{r}'')\delta(\vec{r}''-\vec{r}')\right).$$

Comparando essa equação com $(A.30)$, escrita na forma,

$$-\frac{\nu}{2}\partial_{r'}N(\vec{r}'',\vec{r}') = O(\vec{r}'',\vec{r}'),$$

encontramos que

$$-\frac{\nu}{2}\partial_{r'}\Big(\alpha(\vec{r}'')\delta(\vec{r}''-\vec{r}')\Big)-2\gamma\nu O(\vec{r}'',\vec{r}')=O(\vec{r}'',\vec{r}'),$$

ou

$$O(\vec{r}'',\vec{r}')=-\left(\frac{1}{1+2\gamma\nu}\right)\frac{\nu}{2}\partial_{r'}\Big(\alpha(\vec{r}'')\delta(\vec{r}''-\vec{r}')\Big). \tag{A.35}$$

Levando esse resultado em $(A.30)$,

$$N(\vec{r}'',\vec{r}')=\left(\frac{1}{1+2\gamma\nu}\right)\alpha(\vec{r}'')\delta(\vec{r}''-\vec{r}'). \tag{A.36}$$

Enquanto, a equação $(A.32)$ implica que

$$Q(\vec{r}'',\vec{r})=\alpha(\vec{r}')O(\vec{r}'',\vec{r}'). \tag{A.37}$$

Desde que o valor de $O(\vec{r}'',\vec{r}')$ já foi determinado em $(A.35)$,

$$Q(\vec{r}'',\vec{r}')=-\alpha(\vec{r}')\left(\frac{1}{1+2\gamma\nu}\right)\frac{\nu}{2}\partial_{r'}\Big(\alpha(\vec{r}'')\delta(\vec{r}''-\vec{r}')\Big), \tag{A.38}$$

acabamos de determinar o último elemento da matriz simplética. Portanto, a matriz simplética $\mathbf{f}(x,y)$ é tal que $\mathbf{g}(x,y)=\mathbf{f}(x,y)[1+2\gamma\nu]$. Onde

$$\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{r}}'',\tilde{\mathbf{r}})=\begin{pmatrix} 2\gamma\Theta(\vec{r}''-\vec{r}) & -\delta(\vec{r}''-\vec{r}) & 0 & -\alpha(\vec{r})\delta(\vec{r}''-\vec{r}) \\ \delta(\vec{r}''-\vec{r}) & -\frac{\nu}{2}\partial_r\delta(\vec{r}''-\vec{r}) & 0 & -\frac{\nu}{2}\alpha(\vec{r})\partial_r\delta(\vec{r}''-\vec{r}) \\ 0 & 0 & 0 & -(1+2\gamma\nu)\rho\delta(\vec{r}''-\vec{r}) \\ \alpha(\vec{r})\delta(\vec{r}''-\vec{r}) & -\frac{\nu}{2}\partial_r\big(\alpha(\vec{r}'')\delta(\vec{r}''-\vec{r})\big) & (1+2\gamma\nu)\rho\delta(\vec{r}''-\vec{r}) & -\frac{\nu}{2}\alpha(\vec{r})\partial_r\big(\alpha(\vec{r}'')\delta(\vec{r}''-\vec{r})\big) \end{pmatrix} \tag{A.39}$$

Apêndice B

Equação Diferencial Variacional Parcial

Para um funcional escrito na forma

$$A_\rho(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}' f\big(\rho(\vec{r}', \vec{r})\big). \tag{B.1}$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned}\delta\big(A_\rho(\vec{r})\big) &= A_{\rho+\delta\rho}(\vec{r}) - A_\rho(\vec{r})\\ &= \int d^3\vec{r}' \Big(f\big(\rho(\vec{r}', \vec{r}) + \delta\rho(\vec{r}', \vec{r})\big) - f\big(\rho(\vec{r}', \vec{r})\big)\Big).\end{aligned}$$

Portanto

$$\delta\big(A_\rho(\vec{r})\big) = \int d^3\vec{r}' f'\big(\rho(\vec{r}', \vec{r})\big)\delta\rho(\vec{r}'). \tag{B.2}$$

Donde identificamos

$$\frac{A_\rho(\vec{r})}{\delta\rho(\vec{r}')} = f'\big(\rho(\vec{r}', \vec{r})\big). \tag{B.3}$$

No caso particular,

$$A_\rho(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}' \frac{\alpha\Theta(\vec{r} - \vec{r}')}{2}\rho(\vec{r}'), \tag{B.4}$$

ou seja,

$$f\big(\rho(\vec{r}'', \vec{r})\big) = \frac{\alpha\Theta(\vec{r} - \vec{r}')}{2}\rho(\vec{r}'),$$

temos que

$$\frac{A_\rho(\vec{r})}{\delta\rho(\vec{r}')} = \frac{\alpha}{2}\Theta(\vec{r}-\vec{r}'). \tag{B.5}$$

Analogamente,

$$\frac{A_\rho(\vec{r}')}{\delta\rho(\vec{r})} = \frac{\alpha}{2}\Theta(\vec{r}'-\vec{r}). \tag{B.6}$$

Das duas últimas equações, temos que

$$\frac{\delta A_{\rho(\vec{r}')}(\vec{r}')}{\delta\rho(\vec{r})} - \frac{\delta A_{\rho(\vec{r})}(\vec{r})}{\delta\rho(\vec{r}')} = \frac{\alpha}{2}\bigg(\Theta(\vec{r}'-\vec{r}) - \Theta(\vec{r}-\vec{r})\bigg). \tag{B.7}$$

Usando que $\Theta(x-y)$ é antissimétrico, obtemos finalmente

$$\frac{\delta A_{\rho(\vec{r}')}(\vec{r}')}{\delta\rho(\vec{r})} - \frac{\delta A_{\rho(\vec{r})}(\vec{r})}{\delta\rho(\vec{r}')} = \alpha\bigg(\Theta(\vec{r}'-\vec{r})\bigg). \tag{B.8}$$

Analogamente, a equação

$$-\frac{2\alpha}{2\alpha\nu+1}\Theta(\vec{r}'-\vec{r}) = \frac{\delta A_{\rho(\vec{r}')}(\vec{r}')}{\delta\rho(\vec{r})} - \frac{\delta A_{\rho(\vec{r})}(\vec{r})}{\delta\rho(\vec{r}')}, \tag{B.9}$$

tem como solução

$$A_\rho(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}'\,\frac{\alpha\Theta(\vec{r}-\vec{r}')}{2\alpha\nu+1}\rho(\vec{r}'). \tag{B.10}$$

Referências Bibliográficas

[1] P. A. M. Dirac, Can. J. Math. 2,129 (1950).

[2] L. Fadeev e R. Jackiw, phys. Rev. Lett. *60*, 1692 (1988).

[3] M. E. V. Costa e H. O. Girotti, Phys.Rev. Lett. *60*, 1771 (1988).

[4] J. E. Moyal, Proc. Camb. Phil. Soc. 45 (1949)99; J. Vey. *Commentari Mathematic Helvetici* 50(1975) 421; M. Flato *et al*, Commentari Mathematici Helvetici 31 (1975) 47; M. Falto *et al*, J. Math. Phys. 17 (1976) 1754; F. Bayen *et al*, J. Math. Phys. 11 (1978) 61.

[5] H. S. Snyder, Phys. Rev.*71*, (1947).

[6] N. Siberg and E. Witten, *String Theory and Noncommutative Geometry*, JHEP 9909 (1999) 032, hep-th/9908142.

[7] S. Girvin, *The Quantum Hall Efect: novel excitations and broken simmetries*, Co-mat/9907002.

[8] Z. F. Ezawa, *Quantun Hall Efect: Field Theorical Approach and Related Topics* (World Scientifics, 2000).

[9] A. E. F. Djemai and Smail, Commun Theor. Phys. 41 (2004) 837; *On noncommutative classical mechanics*, hep-th/0309034.

[10] J. E. Moyal, Proc. Camb.Phil. Soc. 45 (1949) 99; J. Vey. Commentari Mathematici Helvetici 50 (1975) 421; M. Flato *et al*, Commentary Mathematical Helvetici 31 (1975) 47; M. Flato *et al* J. Math. Phys. 17 (1976) 1754; F. Bayen *et al*, Ann. of Phys. 11 (1978) 61.

[11] A. E. F. Djemai, Int. J. Theor. Phys.35 (1996)519.

[12] C. Neves and Oliveira, Phys. Lett. A 321 (2004)267.

[13] D. Bazeia, Mod. Phys. Lett. A 6 (1991) 1147.

[14] A. A. Deriglazov, *Noncommutative version of an arbitrary nondegenerated mechanics*, hep-th/0208072.

[15] L. Landau and E. Lifschitz,*Fluid Mechanics*, 2nd ed. (Pergamon, Oxford UK, 1987).

[16] E. Madelung, Z. Phys. **40**, 322 (1926).

[17] E. Merzbacher,*Quantum Mechanics*, 3rd ed.(Wiley, New York, 1998)

[18] M. Bodemann and J. Hoppe, Phys. Lett. **B317**, 315(1993).

[19] A. Jevicki, Phys. Rev. D**57**, 595 (1998).

[20] R. Jackiw, V. P. Nair. S. Y. Pi. A.P.*Polychronakos.* MIT-CTP-3509, J. Phys. A37;R327-R432.2004. e-print: hep-ph/0407101

[21] C. C. Lin. Int. School of physics E. Fermi (XXI, G. Careri, ed. (Academic Press, New York, 1963)

[22] C. Neves, W. Oliveira, Phys. Lett.A321:267-272.2004.e-Print: hep-th/0310064

[23] A. Connes *Noncommutative Geometry* (Academic Press, 1994); *Noncommutative geometry and reality*, J. Math. phys. 36(1995) 6194;
A. Connes R. Douglas and A. Schwarz, JHEP 9802 (1998) 003[hep-th/9711162].

[24] D. Bazeia, Phys.Rev.**D59**(1999) 085007.