Universidade Federal de Juiz de Fora
Pós-Graduação em Ciências Exatas
Mestrado em Física

Poliane de Morais Teixeira

OBTENÇÃO COVARIANTE DO OPERADOR DE PANEITZ E SUA IMPORTÂNCIA NO ESTUDO DA ANOMALIA CONFORME

Juiz de Fora
2012

POLIANE DE MORAIS TEIXEIRA

OBTENÇÃO COVARIANTE DO OPERADOR DE PANEITZ E SUA IMPORTÂNCIA NO ESTUDO DA ANOMALIA CONFORME

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro

Juiz de Fora
2012

Pensamento

"O aumento do conhecimento é como uma esfera dilatando-se no espaço: quanto maior a nossa compreensão, maior o nosso contato com o desconhecido."
Blaise Pascal

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por dia após dia me cingir de força e aperfeiçoar o meu caminho.

Agradeço à minha família pela confiança depositada em mim, mesmo quando tudo parecia dar errado.

Agradeço ao Alison por me ajudar com os detalhes técnicos.

Agradeço ao meu orientador, o Professor Ilya L. Shapiro, pela sugestão do problema a ser abordado e pela sua orientação.

Agradeço ainda aos meus mestres, por tornarem o aprendizado das disciplinas significativo.

Agradeço também ao secretário da Pós - Graduação, o Senhor Domingos, por cuidar de toda a parte burocrática com excelência.

Agradeço a todos os meus amigos pelo apoio, em especial a Sebastião e Dante.

Agradeço à CAPES, FAPEMIG e ao CNPq, pelo apoio e suporte ao meu projeto de mestrado.

Resumo

Investigamos nesse trabalho alguns aspectos de teoria quântica de campos em espaço-tempo curvo. Na parte original da dissertação, estudamos o operador hermitiano de quarta ordem, conhecido como operador de Paneitz. Conseguimos sua obtenção via parametrização conforme conhecida anteriormente e também por um caminho alternativo via formulação covariante. O operador de Paneitz torna - se útil, para obtenção da ação efetiva através da anomalia conforme. Uma vez que queremos manter a covariância da teoria, precisamos deste operador na forma covariante.

PALAVRAS-CHAVE: Teoria Conforme, Operador de Paneitz, Anomalia Conforme.

Abstract

Some aspects of Quantum Field Theory in curved space-time are explored and revised. In the original part of the work, we study the Hermitian operator of fourth order, known as Paneitz operator. We obtaining it via conformal parametrization as previously known and also by an alternative route via the covariant formulation. Paneitz operator is useful for deriving covariant form of effective action induced by conformal anomaly, as for as we want to keep the covariance of the theory, we need the covariant form of the operator.

KEYWORDS: Corformal Theory, Paneitz Operator, Corformal Anomaly.

Conteúdo

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Desde o surgimento da Relatividade Geral (para uma introdução ao tema veja: [1, 2]) até a década de 50, a gravitação era vista sob o ponto de vista da interpretação geométrica. Sua aplicabilidade compreendia os fenômenos onde se pode desprezar os efeitos da Teoria Quântica de Campos. Por outro lado, os efeitos da gravitação são ordens de grandeza menores do que os fenômenos de Teoria Quântica de Campos na escala subatômica até escala de Planck. Deste modo, estas duas vertentes da física teórica tiveram por muito tempo domínios totalmente distintos.

O sucesso do modelo padrão [3] que descreve interações fortes, fracas e eletromagnéticas, reunindo - as num formalismo único, serviu como estímulo aos relativistas a considerarem a natureza quântica como uma possibilidade a ser explorada na gravitação. E ainda, de modo mais decisivo, os próprios progressos da Cosmologia e da física de buracos negros tornaram a gravitação quântica um projeto de grande relevância científica.

No entanto apesar de muitas tentativas, até hoje não existe uma teoria satisfatória da gravitação quântica. Avanços na compreensão da quantização de teorias de gauge, por exemplo, tornaram possível a tentativa de se quantizar a gravitação.

Nessa dissertação vamos usar o formalismo da teoria conforme e seus invariantes para discutir alguns aspectos interessantes da simetria conforme e sua violação a nível quântico. Veremos que esta violação é conhecida como anomalia conforme e a existência desta nos mostra que a nível quântico não há preservação das simetrias da teoria.

Anomalia Conforme [4] é um meio útil de fazer a avaliação de efeitos quânticos de vácuo [5] .

A apresentação compacta da ação efetiva de vácuo induzida por anomalia foi feita, na primeira vez em artigos, na forma covariante [6] . Esta apresentação utiliza o chamado operador de Paneitz [7], que possui um papel importante na Teoria Quântica de Campos em espaço-tempo curvo. Este operador foi obtido e estudado de diversas maneiras [7, 6, 8] .

Neste trabalho, apresentamos um novo método de obter o operador de Paneitz. O nosso método é completamente covariante e está baseado nas propriedades conformes do termo topológico de Gauss-Bonnet. Além desta parte original, a dissertação inclui uma revisão de material relacionado.

Em particular, este trabalho se divide da seguinte maneira:
No capítulo 2, faremos uma breve revisão de teoria conforme, dando atenção especial à quatro exemplos convencionais de campos conformes, sendo eles: Campo Escalar, Campo Fermiônico e Campo Vetorial, Gravidade de Weyl e Teoria Conforme com derivadas superiores. Este último foge um pouco do convencional, mas é este exemplo que conduz todo o nosso trabalho.

Já no capítulo 3, começaremos revisando a obtenção do operador de Paneitz via parametrização conforme local, em seguida vamos fazer um estudo do termo topológico de Gauss-Bonnet em espaço-tempo de diferentes dimensões a fim de obtermos alguns resultados preliminares a respeito do papel deste termo em gravitação. Continuando, partimos para a parte original deste trabalho que foi obter o mesmo operador de Paneitz, mas agora usando a formulação covariante, veremos que tanto por parametrização conforme quanto por formulação covariante obtemos o mesmo resultado, de onde vemos que os dois métodos são equivalentes. Ainda neste capítulo analisamos o nosso método para obtenção do operador conforme de segunda ordem, uma vez que via parametrização conforme já conhecemos o resultado [9] e vimos que o formalismo covariante, mantendo o campo escalar φ invariante, funciona sem haver necessidade de modificações apenas para dois casos muito especiais, o que nos levou a um estudo mais profundo por meio da Identidade de Noether.

No capítulo 4, basicamente veremos a importância deste operador de quarta ordem em Teoria de Campos. Partiremos da anomalia conforme para encontrar a ação efetiva e a partir daí calcular o traço do tensor momento-energia e a ação induzida pela anomalia, onde ficará evidente que o operador de Paneitz é que permite tal desenvolvimento.

E por fim no capítulo 5 apresentamos as conclusões deste trabalho e possíveis perspectivas de continuação da pesquisa nessa mesma linha.

Capítulo 2

TEORIAS CONFORMES

A simetria conforme local de campos de matéria em espaço-tempo curvo sempre atraiu um grande interesse. Neste capítulo, vamos nos concentrar nos aspectos da teoria conforme em quatro dimensões, que tem muitas aplicações, especialmente em Cosmologia e vamos usar como referência principalmente [10]. Neste trabalho daremos atenção especial à Teoria Quântica e à discussão da anomalia conforme e a ação da gravidade induzida pela anomalia.

Uma teoria de campos conforme é aquela na qual o campo envolvido é invariante perante uma transformação conforme e esta por sua vez nada mais é do que uma forma alternativa de parametrização da métrica $g_{\mu\nu}$ por meio de novas variáveis $\overline{g}_{\mu\nu}(x)$ e $\sigma(x)$ onde $g_{\mu\nu}(x) = \overline{g}_{\mu\nu}(x)e^{2\sigma(x)}$ e onde σ é um campo quântico.

A teoria de campos conforme possui inúmeras aplicações além do seu uso em gravitação, como por exemplo em mecânica estatística, no modelo de Ising, ou ainda na teoria de cordas, que é a teoria candidata a unificar todas as interações incluindo a gravidade. Geometricamente, transformações conformes são transformações que preservam ângulos entre curvas.

A característica chave em teoria de campos conforme clássica em qualquer dimensão é o fato do tensor momento-energia ter traço nulo, entretanto a nível quântico esse apresenta comportamento anômalo devido aos efeitos quânticos da matéria. Em geral, as divergências de 1-loop ainda preservam a simetria, mas nas teorias conformes com quantização da métrica, as divergências nem sempre são conformalmente invariantes.

Para uma compreensão clara da razão pela qual introduzimos uma simetria conforme local, vamos começar com um exemplo muito simples [11]. Considere o campo escalar massivo no espaço-tempo curvo. A ação mínima tem a forma

$$S[g_{\mu\nu}, \varphi] = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(g^{\mu\nu} \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi + m^2 \varphi^2 + \xi R \varphi^2 \right) \ , \qquad (2.1)$$

onde ξ é o parâmetro não mínimo e na teoria mínima vale zero e ∇_μ é a derivada covariante no espaço de Riemann.

À nível quântico, a teoria mínima se torna inconsistente ao introduzirmos interações com outros campos ou uma auto-interação com o campo escalar. A princípio, tem de se manter o parâmetro não-mínimo ξ arbitrário para fornecer a renormalizabilidade multiplicativa da teoria com interação. Quando $\xi = \frac{1}{6}$ e $m = 0$, temos o caso especial que corresponde à simetria conforme local

$$S[g_{\mu\nu}, \varphi] = S[g'_{\mu\nu}, \varphi'] \qquad (2.2)$$

$$g_{\mu\nu} \to g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \ e^{\ 2\sigma(x)} \quad ; \quad \varphi \to \varphi' = \varphi \ e^{\ -\sigma(x)} \ . \qquad (2.3)$$

Para partículas clássicas, o limite $m \to 0$ corresponde ao desaparecimento do traço do tensor momento-energia

$$T^\mu_\mu = 0 \ . \qquad (2.4)$$

Isso mostra que somente uma teoria conforme pode fornecer a correspondência correta entre campo e partícula nesse limite. A formulação conforme é importante porque é a dependência de σ que controla o traço do tensor momento-energia que por sua vez vai permitir o estudo da anomalia conforme como veremos adiante. A questão então é se é possível manter o parâmetro conforme $\xi = \frac{1}{6}$ e a simetria conforme local a nível quântico.

2.1 Campo Escalar

Considere uma ação generalizada para o campo escalar φ

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[A(\varphi)(\nabla\varphi)^2 + B(\varphi) R + C(\varphi) \right] \ . \qquad (2.5)$$

Por simplicidade, considere inicialmente a ação (2.5) sem o termo de energia cinética para o campo escalar

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\,[R'(\Phi) + V(\Phi)] \ , \tag{2.6}$$

onde usamos as parametrizações: $g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\ e^{\ 2\sigma(\varphi)}$ e $\Phi = \Phi(\varphi)$.

Um cálculo simples nos leva à relação

$$A(\varphi) = 6\ e^{\ 2\sigma(\varphi)}\,[\Phi\sigma_1 + \Phi]\,\sigma_1 \quad ; \quad B(\varphi) = \Phi(\varphi)\ e^{\ 2\sigma(\varphi)} \ . \tag{2.7}$$

Podemos ver que a ausência do termo cinético na ação (2.6) não significa que o campo não é dinâmico. A dinâmica do campo escalar é devido à interação com o modo escalar da métrica. A simetria conforme da ação corresponde à Relatividade Geral pura, ou seja, $\Phi = constante$. Então

$$A = \frac{3B_1}{2B^2} \quad ; \quad C = \lambda B^2 \tag{2.8}$$

onde $B = B(\varphi)$, $C = C(\varphi)$, $B_1 = \frac{dB}{d\varphi}$ e $\sigma_1 = \frac{d\sigma}{d\varphi}$.

Um caso particular já bastante conhecido da teoria, que satisfaça às restrições (2.1) e (2.8) com $m = 0$, $\xi = \frac{1}{6}$ e com um termo adicional de auto-interação, pode ser escrito como

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\left(-\varphi\Delta_2\varphi + \frac{\lambda}{12}\varphi^4\right) \ , \tag{2.9}$$

onde $\Delta_2 = \Box - \frac{1}{6}R$.

Todos os modelos que satisfazem (2.8) são ligados pela transformação conforme da métrica mais uma parametrização escalar [12, 13].

2.2 Campo Fermiônico e Campo Vetorial

Outros exemplos convencionais de campos conformes, incluem espinor e vetor sem massa.

Para espinores nós temos

$$S_{\frac{1}{2}} = \frac{i}{2}\int d^4x\sqrt{g}\ [\ \overline{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - \nabla_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\ ] \ , \tag{2.10}$$

onde, γ^μ e ∇_μ são as matrizes gama e a derivada covariante do espinor no espaço-tempo curvo.

Já para os vetores, nós temos

$$S_1 = -\frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{g}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{2.11}$$

cujas regras de transformação são

$$g_{\mu\nu}\to g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\ e^{2\sigma}; \qquad A_\mu \to A'_\mu = A_\mu\ ; \tag{2.12}$$

$$\psi \to \psi' = \psi\ e^{-3\sigma/2}; \qquad \overline{\psi} \to \overline{\psi}' = \overline{\psi}\ e^{-3\sigma/2}\ . \tag{2.13}$$

Note que há uma relação direta entre simetria conforme local e global e que já foi prevista na definição de campo vetorial em espaço-tempo curvo

$$A_\mu = A_b\ e^b_\mu; \tag{2.14}$$

$$e^b_\mu\ e^a_\nu\ \eta_{ab} = g_{\mu\nu}; \tag{2.15}$$

$$e^b_\mu\ e^a_\nu\ g^{\mu\nu} = \eta^{ab}. \tag{2.16}$$

A interação entre vetores, escalares e férmions será sempre conforme se a constante de acoplamento tiver dimensão de massa igual a zero.

2.3 Gravidade de Weyl

O último exemplo convencional é a gravidade conforme ou gravidade de Weyl, que inclui somente campos dependentes da métrica

$$S_W = \int d^4x\sqrt{g}\ C^2_{(4)}\ ; \tag{2.17}$$

onde

$$C^2_{(N)} = R^2_{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{4R^2_{\mu\nu}}{(N-2)} + \frac{R^2}{(N-1)(N-2)}\ . \tag{2.18}$$

A diferença entre esse modelo e a Relatividade Geral, é que o primeiro não produz corretamente o limite Newtoniano, devido ao fato da constante de acoplamento nessa teoria ser adimensional.

Para que se possa então, com essa teoria, se chegar ao limite Newtoniano correto, o mais natural é considerar a gravidade de Weyl junto com o campo escalar conforme, apesar de que neste caso os efeitos quânticos levam à potenciais efetivos complicados para o campo escalar.

A principal diferença entre as teorias conformes apresentadas anteriormente e a gravidade de Weyl, é que essa última é uma teoria com derivadas de quarta ordem, enquanto que os casos de campos de matéria são descritos por derivadas de ordens inferiores.

2.4 Teoria Conforme com Derivadas Superiores

Agora, um exemplo muito importante, que foge do convencional, mas em torno do qual se foca todo o nosso trabalho, seria construir exemplos de teoria conforme com derivadas superiores.

Vamos começar com o campo escalar com derivada de quarta ordem do primeiro tipo cuja ação se escreve como se segue [7, 6, 14] :

$$S_4 = \int d^4x\sqrt{g}\ \varphi\ \Delta_4\ \varphi\ , \tag{2.19}$$

onde,

$$\Box^2 + 2R^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu - \frac{2}{3}R\Box + \frac{1}{3}(\nabla_\lambda R)\nabla^\lambda = \Delta_4\ , \tag{2.20}$$

A lei de transformação para esse escalar é $\varphi \to \varphi'$. A importância do modelo (2.19) é baseado no seu uso para integração da anomalia conforme (que será discutida no capítulo 4). Note que o modelo (2.19), pode ser generalizado para uma dimensão arbitrária, esse procedimento foi feito em detalhes em [9].

O próximo exemplo, é um campo espinorial de derivadas de terceira ordem. Neste caso, novamente, a invariância conforme é providenciada por introdução de derivadas superiores.

A ação deste modelo é

$$S_3 = \frac{i}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\ [\ \overline{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - D_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\ ]\ , \tag{2.21}$$

onde D_μ é o operador auto-adjunto de terceira ordem dado por (ver[14, 15])

$$D_\mu = \nabla_\mu\Box + R_{\mu\nu}\nabla^\nu - \frac{5}{12}R\nabla_\mu - \frac{1}{12}(\nabla_\mu R)$$

A lei de transformação para o espinor ψ é

$$\psi\to\ \psi' = \psi\ e^{-\sigma/2}, \tag{2.22}$$

$$\overline{\psi}\to\ \overline{\psi}' = \overline{\psi}\ e^{-\sigma/2}\ , \tag{2.23}$$

$$\sigma = \sigma(x)\ . \tag{2.24}$$

Assim a questão natural, é se é possível construir mais exemplos de campos conformes. A resposta é sim, uma vez que até campos de spin $\frac{3}{2}$ podem ser escritos em função de derivadas superiores. Para maiores detalhes de trabalhos nessa direção ver [16, 17, 18, 19, 20] .

Capítulo 3

O OPERADOR DE PANEITZ

3.1 Obtenção do Operador de Paneitz via Transformação Conforme

Muitas propriedades fisicamente interessantes da métrica tornam-se mais evidentes e de fácil demonstração se nós usarmos a chamada transformação conforme local

$$g_{\mu\nu}(x) = \overline{g}_{\mu\nu}(x) e^{2\sigma(x)} \ . \tag{3.1}$$

A equação acima não é uma transformação de coordenadas, mas pode ser vista como uma forma alternativa de parametrização da métrica, por meio das novas variáveis $\overline{g}_{\mu\nu}(x)$ e $\sigma(x)$. Aqui, vamos usar a transformação conforme para estabelecer relações entre os invariantes topológicos em espaços bidimensionais e quadridimensionais, onde tais relações serão úteis para um estudo mais avançado dos aspectos da teoria gravitacional. A proposta então é derivarmos dessa nova parametrização, quantidades relevantes, como a curvatura. Por conveniência, vamos usar as notações condensadas, $(\nabla\sigma)^2 = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\sigma\nabla_\nu\sigma$ e $(\nabla^2\sigma) = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\sigma$.

A lei de transformação conforme para a métrica inversa e o determinante da métrica têm a forma

$$g^{\mu\nu} = \overline{g}^{\mu\nu} e^{-2\sigma} \quad ; \quad g = \overline{g} e^{2N\sigma} \ . \tag{3.2}$$

Com a lei de transformação acima é possível derivar a transformação para o tensor de Riemann

$$R^{\alpha}_{\cdot\beta\mu\nu} = \overline{R}^{\alpha}_{\cdot\beta\mu\nu} + \delta^{\alpha}_{\nu}(\overline{\nabla}_{\mu}\overline{\nabla}_{\beta}\sigma) - \delta^{\alpha}_{\mu}(\overline{\nabla}_{\nu}\overline{\nabla}_{\beta}\sigma) + \overline{g}_{\mu\beta}(\overline{\nabla}_{\nu}\overline{\nabla}_{\alpha}\sigma) - \overline{g}_{\nu\beta}(\overline{\nabla}_{\mu}\overline{\nabla}^{\alpha}\sigma) + \\ + \delta^{\alpha}_{\nu}\overline{g}_{\mu\beta}(\overline{\nabla}\sigma)^2 - \delta^{\alpha}_{\mu}\overline{g}_{\nu\beta}(\overline{\nabla}\sigma)^2 + \delta^{\alpha}_{\mu}(\overline{\nabla}_{\nu}\sigma)(\overline{\nabla}_{\beta}\sigma) - \\ - \delta^{\alpha}_{\nu}(\overline{\nabla}_{\mu}\sigma)(\overline{\nabla}_{\beta}\sigma) + \overline{g}_{\nu\beta}(\overline{\nabla}_{\mu}\sigma)(\overline{\nabla}^{\alpha}\sigma) - \overline{g}_{\mu\beta}(\overline{\nabla}_{\nu}\sigma)(\overline{\nabla}^{\alpha}\sigma) \ , \quad (3.3)$$

e consequentemente

$$R_{\mu\nu} = \overline{R}_{\mu\nu} - \overline{g}_{\mu\nu}(\overline{\nabla}^2\sigma) + (N-2)\left[(\overline{\nabla}_{\mu}\sigma)(\overline{\nabla}_{\nu}\sigma) - (\overline{\nabla}_{\mu}\overline{\nabla}_{\nu}\sigma) - \overline{g}_{\mu\nu}(\overline{\nabla}\sigma^2)\right] \ , \quad (3.4)$$

$$R = e^{-2\sigma}\left[\ \overline{R} - 2(N-1)(\overline{\nabla}^2\sigma) - (N-1)(N-2)(\overline{\nabla}\sigma)^2\right] \ . \quad (3.5)$$

Usando as equações acima mostra-se facilmente que a transformação para o tensor de Weyl será

$$C^{\alpha}_{\cdot\beta\mu\nu} = \overline{C}\ ^{\alpha}_{\ \beta\mu\nu} \ \Rightarrow C_{\alpha\beta\mu\nu} = e^{2\sigma}\ \overline{C}_{\alpha\beta\mu\nu} \ . \quad (3.6)$$

E para o quadrado do tensor de Weyl, a transformação será

$$\sqrt{-g}\ C^2_{\mu\nu\alpha\beta} = \sqrt{-\overline{g}}\ e^{(N-4)\sigma}\ \overline{C}\ ^2_{\mu\nu\alpha\beta} \ . \quad (3.7)$$

Para maiores detalhes, ver [21].

Outra combinação importante dos invariantes quadráticos da curvatura é

$$E = R^{\alpha\beta\mu\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu} - 4R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + R^2 \ . \quad (3.8)$$

Para N = 4, a expressão acima é o integrando do termo topológico de Gauss-Bonnet, ou seja

$$\int d^4x\sqrt{-g}\ E \ . \quad (3.9)$$

Assim, a transformação conforme do integrando de Gauss-Bonnet é

$$\sqrt{-g}\ E = \sqrt{-\overline{g}}\ e^{(N-4)\sigma}\{\overline{E} + 8(N-3)\overline{R}\ ^{\mu\nu}(\overline{\nabla}_{\mu}\sigma\overline{\nabla}_{\nu}\sigma - \overline{\nabla}_{\mu}\overline{\nabla}_{\nu}\sigma) - 2(N-3)(N-4)\overline{R}(\overline{\nabla}\sigma)^2 + \\ + 2(N-2)(N-3)^2(\overline{\nabla}\ ^2\sigma)(\overline{\nabla}\sigma)^2 - 4(N-2)(N-3)\left[(\overline{\nabla}_{\mu}\overline{\nabla}_{\nu}\sigma)^2 + (\overline{\nabla}\ ^2\sigma)^2\right] + \\ + 4(N-3)\left[2(N-2)(\overline{\nabla}_{\mu}\sigma\overline{\nabla}_{\nu}\sigma)(\overline{\nabla}\ ^{\mu}\overline{\nabla}\ ^{\nu}\sigma) - R(\overline{\nabla}\ ^2\sigma)\right] + \\ + (N-1)(N-2)(N-3)(N-4)(\overline{\nabla}\sigma)^4\} \ , \quad (3.10)$$

e o último termo invariante é o termo superficial $\sqrt{-g}(\nabla^2 R)$, cuja regra de transformação foi obtida em detalhes em [21] e onde usou-se para isso a transformação do operador ∇^2 atuando em escalares, que é dada por

$$\nabla^2 = e^{-2\sigma} \left[\overline{\nabla}^{\,2} + (N-2)(\overline{\nabla}^{\mu}\sigma)\overline{\nabla}_{\mu} \right] \ .$$

Para N=4, destacamos aqui uma relação simples e útil, dada por

$$\sqrt{-g}\left(E - \frac{2}{3}\nabla^2 R\right) \equiv \sqrt{-g}\left(E - \frac{2}{3}\Box R\right) = \sqrt{-g}\left(\overline{E} - \frac{2}{3}\,\overline{\Box}\,\overline{R} + 4\overline{\Delta}_4\sigma\right) \ , \quad (3.11)$$

onde Δ_4 é o operador conforme hermitiano de quarta ordem, conhecido como operador de Paneitz (em N = 4), escrito como

$$\Delta_4 = \Box^2 + 2R^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu - \frac{2}{3}R\Box + \frac{1}{3}(\nabla_\lambda R)\nabla^\lambda \ . \quad (3.12)$$

3.2 Termo de Gauss-Bonnet em espaço-tempo de diferentes dimensões

Vamos mostrar alguns resultados técnicos preliminares a respeito do termo topológico de Gauss-Bonnet em gravitação. Previamente, o problema foi discutido em alguns artigos a nível quântico [22]. Para ver o papel do termo topológico de Gauss-Bonnet a nível clássico explicitamente, nós vamos derivar as equações de movimento para esse termo e mostrar que sua estrutura não é completamente trivial. A equação identicamente zero é alcançada somente em alguns casos especiais, incluindo o traço e a métrica especial tipo de Sitter. Se N=2 é a dimensão do espaço-tempo, a ação topológica é

$$S_2 = \int d^2x\sqrt{-g}R \ . \quad (3.13)$$

A equação de movimento correspondente é

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_2}{\delta g_{\mu\nu}} = -R^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 0 \ . \quad (3.14)$$

No entanto, em N = 2, nós temos

$$R^{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \ , \quad (3.15)$$

o que implica que a equação (3.14) é uma identidade. A questão é se algo similar acontece em N = 4. Se N = 4 é a dimensão do espaço-tempo, a ação topológica tem a forma

$$S_4 = \int d^4x\sqrt{-g}E \ , \tag{3.16}$$

onde

$$E = R^{\alpha\beta\mu\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu} - 4R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + R^2 \ . \tag{3.17}$$

Vamos encontrar as equações de movimento correspondentes. Considere perturbações numa aproximação em primeira ordem

$$g_{\mu\nu} \to g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{3.18}$$

e

$$\sqrt{-g'} = \sqrt{-g}\left(1 + \frac{h}{2}\right) \ . \tag{3.19}$$

Então

$$R' = R + \nabla_\mu\nabla_\nu h^{\mu\nu} - \Box h - R_{\mu\nu}h^{\mu\nu} \ , \tag{3.20}$$

$$R'_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\nabla_\lambda\nabla_\mu h^\lambda_\nu + \nabla_\lambda\nabla_\nu h^\lambda_\mu - \nabla_\mu\nabla_\nu h - \Box h_{\mu\nu}\right) \ , \tag{3.21}$$

$$R'^\alpha_{\beta\mu\nu} = R^\alpha_{\beta\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\nabla_\mu\nabla_\nu h^\alpha_\nu - \nabla_\nu\nabla_\beta h^\alpha_\mu + \nabla_\nu\nabla^\alpha h_{\mu\beta} - \nabla_\mu\nabla^\alpha h_{\nu\beta}\right) \ . \tag{3.22}$$

Agora, podemos calcular as equações de movimento para os termos

$$I_1 = \int d^4x\sqrt{-g}R^2_{\mu\nu\alpha\beta} \ , \quad I_2 = \int d^4x\sqrt{-g}R^2_{\mu\nu} \ , \quad I_3 = \int d^4x\sqrt{-g}R^2 \ . \tag{3.23}$$

Variando as ações acima, nós chegamos à

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta I_1}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R^2_{\rho\sigma\alpha\beta} - 2R^{\mu\sigma\alpha\beta}R^\nu_{\sigma\alpha\beta} - 4R^{\mu\alpha\nu\beta}R_{\alpha\beta} + 4R^\mu_\alpha R^{\nu\alpha} + 2\nabla^\mu\nabla^\nu R - 4\Box R^{\mu\nu} \ , \tag{3.24}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta I_2}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R^2_{\rho\sigma} - 2R^{\mu\alpha\nu\beta}R_{\alpha\beta} + \nabla^\mu\nabla^\nu R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\Box R - \Box R^{\mu\nu} \ , \tag{3.25}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta I_3}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R^2 + 2\nabla^\mu\nabla^\nu R - 2g^{\mu\nu}\Box R - 2RR^{\mu\nu} \ . \tag{3.26}$$

Verificando o traço dessas equações, encontramos

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}g_{\mu\nu}\frac{\delta I_1}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{\sqrt{-g}}g_{\mu\nu}\frac{\delta I_2}{\delta g_{\mu\nu}} = -2\Box R \ , \tag{3.27}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta I_3}{\delta g_{\mu\nu}} = -6\Box R \ . \tag{3.28}$$

É fácil ver que o traço desaparece para a combinação que descreve o quadrado do tensor de Weyl: $C^2 = R^2_{\mu\nu\alpha\beta} - 2R^2_{\mu\nu} + \frac{1}{3}R^2$, lembrando que este possui as mesmas simetrias do tensor de Riemann e mais uma adicional, que é exatamente o que nos permite verificar se todo o trabalho desenvolvido até agora está correto. Esta simetria adicional nos diz que: $C^{\mu}_{\cdot\nu\alpha\beta} = 0$, que significa que o tensor de Weyl é livre de traço, ou seja, possui traço nulo para qualquer par de índices contraídos. Usando as fórmulas (3.27) e (3.28), chegamos à

$$g_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \int d^4x \sqrt{-g} C^2 = 0 \ . \tag{3.29}$$

Agora, vamos considerar a equação para o termo de Gauss - Bonnet

$$E = R^{\alpha\beta\mu\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu} - 4R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + R^2 \ , \tag{3.30}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \int d^4x \sqrt{-g} E = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} E - 2R^{\mu\sigma\alpha\beta} R^{\nu}_{\sigma\alpha\beta} + 4R_{\alpha\beta} R^{\alpha\mu\beta\nu} + 4R^{\mu}_{\alpha} R^{\nu\alpha} - 2RR^{\mu\nu} \ . \tag{3.31}$$

Note que todas as derivadas quárticas se cancelam, mas o quadrado dos tensores de curvatura não. Na verdade, não é óbvio que a última equação é identicamente zero, então vamos considerar alguns casos particulares. Se calcularmos o traço da equação (3.31) em quatro dimensões, chegamos facilmente à

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \int d^4x \sqrt{-g} E = 0 \ . \tag{3.32}$$

Já para um espaço-tempo de N dimensões, nós temos um resultado diferente

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \int d^4x \sqrt{-g} E = \frac{(N-4)}{2} E \ . \tag{3.33}$$

O próximo passo é verificar se a equação de movimento para a integral

$$I_E = \int d^N x \sqrt{-g} E$$

é identicamente zero para N = 4 no espaço *de Sitter*. É importante relembrar que no espaço *de Sitter*, os tensores de Riemann e Ricci ficam escritos como

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{R(g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha})}{N(N-1)} \quad , R_{\mu\nu} = \frac{R g_{\mu\nu}}{N} \ , \tag{3.34}$$

onde: $R = \Lambda$ que é a constante cosmológica.

Usando a equação (3.34) nas equações (3.24), (3.25) e (3.26), nós obtemos

$$\left.\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta I_1}{\delta g_{\mu\nu}}\right|_{dS} = \frac{N-4}{N^2(N-1)}\Lambda^2 g^{\mu\nu} \ , \tag{3.35}$$

$$\left.\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta I_2}{\delta g_{\mu\nu}}\right|_{dS} = \frac{N-4}{2N^2}\Lambda^2 g^{\mu\nu} \ , \tag{3.36}$$

$$\left.\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta I_3}{\delta g_{\mu\nu}}\right|_{dS} = \frac{N-4}{2N}\Lambda^2 g^{\mu\nu} \ . \tag{3.37}$$

E finalmente para o termo de Gauss - Bonnet nós encontramos

$$\left.\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta I_E}{\delta g_{\mu\nu}}\right|_{dS} = \frac{(N-2)(N-3)(N-4)}{2N^2(N-1)}\Lambda^2 g^{\mu\nu} \ . \tag{3.38}$$

Note que a equação de nosso interesse, equação (3.38) dá zero não somente em N=4, mas também em N=3 e N=2, onde o termo de Gauss-Bonnet não é topológico. Também é interessante notar que as equações (3.35), (3.36) e (3.37), dão zero somente em N=4.

3.3 Obtenção Alternativa e Covariante do Operador de Paneitz

Agora, vamos mostrar que também é possível obter o mesmo operador Δ_4 da seção 3.1, por um caminho alternativo, mantendo a covariância da teoria, ou seja, mantendo todos os termos expressos em função da métrica original $g_{\mu\nu}$. Para isso comecemos considerando as ações seguintes

$$S_1 = \int d^4x\sqrt{-g}\varphi R^2 \ , \quad S_2 = \int d^4x\sqrt{-g}\varphi R^2_{\mu\nu} \ , \tag{3.39}$$

$$S_3 = \int d^4x\sqrt{-g}\varphi R^2_{\mu\nu\alpha\beta} \ , \quad S_4 = \int d^4x\sqrt{-g}\varphi\Box R \ , \tag{3.40}$$

onde, φ é um campo escalar, cuja lei de transformação conforme é

$$\varphi \to \varphi' = \varphi \ ,$$

ou seja, não vamos considerar aqui, de fato, uma transformação no campo φ, este permanecerá constante. Encontrando as equações de movimento correspondentes

Considerando ainda perturbações numa aproximação de primeira ordem e usando as relações (3.18 - 3.22), podemos variar as ações acima e chegarmos à

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_1}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R^2\varphi + 2\nabla^\nu\nabla^\mu(R\varphi) - 2g^{\mu\nu}\Box(R\varphi) - 2R^{\mu\nu}(R\varphi) \ , \tag{3.41}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_2}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R^2_{\rho\sigma}\varphi - 2R^{\nu\alpha}R^\mu_\alpha\varphi + 2\nabla_\lambda\nabla_\mu(R^\lambda_\nu\varphi) - \\ - g^{\mu\nu}\nabla_\beta\nabla_\alpha(R^{\alpha\beta}\varphi) - \Box(R^{\mu\nu}\varphi) \ , \tag{3.42}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_3}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R^2_{\alpha\beta\rho\sigma}\varphi + 4\nabla_\beta\nabla_\alpha(R^{\mu\beta\alpha\nu}\varphi) - 2(R^\mu_{.\beta\alpha\rho}R^{\nu\beta\alpha\rho}\varphi) \ , \tag{3.43}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_4}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\Box\varphi + \nabla^\mu\nabla^\nu\Box\varphi - g^{\mu\nu}\Box^2\varphi - R^{\mu\nu}\Box\varphi - R\nabla^\mu\nabla^\nu\varphi + \\ + \nabla_\lambda(Rg^{\lambda(\mu}\nabla^{\nu)}\varphi) - \frac{1}{2}\nabla_\lambda(g^{\mu\nu}R\nabla^\lambda\varphi) \ . \tag{3.44}$$

Verificando o traço das derivadas variacionais acima, teremos

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}g_{\mu\nu}\frac{\delta S_1}{\delta g_{\mu\nu}} = -6\Box(R\varphi) \ , \tag{3.45}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}g_{\mu\nu}\frac{\delta S_2}{\delta g_{\mu\nu}} = -2\nabla_\mu\nabla_\nu(R^{\mu\nu}\varphi) - \Box(R\varphi) \ , \tag{3.46}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}g_{\mu\nu}\frac{\delta S_3}{\delta g_{\mu\nu}} = -4\nabla_\mu\nabla_\nu(R^{\mu\nu}\varphi) \ , \tag{3.47}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}g_{\mu\nu}\frac{\delta S_4}{\delta g_{\mu\nu}} = -3\Box^2\varphi - R\Box\varphi - (\nabla_\lambda R)(\nabla^\lambda\varphi) \ . \tag{3.48}$$

Assim como foi desenvolvido na seção (3.2), vamos usar novamente o fato que o tensor de Weyl é livre de traço, como uma forma útil e segura de verificarmos se o cálculo dos traços e derivadas variacionais acima, num espaço-tempo quadridimensional, está correto. Usando as equações (3.45 - 3.48), chegamos à

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}g_{\mu\nu}\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}}\int d^4x\sqrt{-g}\varphi\, C^2 = -4\nabla_\mu\nabla_\nu(\varphi R^{\mu\nu}) - 2[-2\nabla_\mu\nabla_\nu(\varphi R^{\mu\nu}) - \Box(\varphi R)] + \frac{1}{3}[-6\Box(\varphi R)] = \\ = -4\nabla_\mu\nabla_\nu(\varphi R^{\mu\nu}) + 4\nabla_\mu\nabla_\nu(\varphi R^{\mu\nu}) + 2\Box(\varphi R)] - 2\Box(\varphi R) = 0 \ . \tag{3.49}$$

Agora, assim como antes, vamos considerar a equação para o termo de Gauss-Bonnet. Usando novamente as equações (3.45 - 3.48), chegamos à

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \int d^4x \sqrt{-g} \varphi E = -4\nabla_\mu \nabla_\nu (\varphi R^{\mu\nu}) - 4[-2\nabla_\mu \nabla_\nu (\varphi R^{\mu\nu}) - \Box(\varphi R)] + [-6\Box(\varphi R)] =$$

$$= 4\nabla_\mu \nabla_\nu (\varphi R^{\mu\nu}) - 2\Box(\varphi R)] \ . \quad (3.50)$$

Vamos por conveniência, explicitar os termos com derivadas

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \int d^4x \sqrt{-g} \varphi E = 4(\nabla_\mu \varphi)(\nabla_\nu R^{\mu\nu}) + 4\varphi(\nabla_\mu \nabla_\nu R^{\mu\nu}) + 4(\nabla_\mu R^{\mu\nu})(\nabla_\nu \varphi) +$$

$$+ 4R^{\mu\nu}(\nabla_\mu \nabla_\nu \varphi) - 2R\Box\varphi - 2\varphi\Box R - 4(\nabla_\lambda \varphi)(\nabla^\lambda R) =$$

$$= 4R^{\mu\nu}(\nabla_\mu \nabla_\nu \varphi) - 2R\Box\varphi \ . \quad (3.51)$$

Agrupando então todos os termos encontramos

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \left[\int d^4x \sqrt{-g} (\varphi E) - \frac{2}{3} \int d^4x \sqrt{-g} (\varphi \Box R) \right] =$$

$$= 4R^{\mu\nu}(\nabla_\mu \nabla_\nu \varphi) - 2R\Box\varphi + 2\Box^2\varphi + \frac{2}{3} R\Box\varphi + \frac{2}{3}(\nabla_\lambda R)(\nabla^\lambda \varphi) =$$

$$= 2\left[\Box^2 + 2R^{\mu\nu}\nabla_\mu \nabla_\nu - \frac{2}{3} R\Box + \frac{1}{3}(\nabla_\lambda R)\nabla^\lambda \right] \varphi \ , \quad (3.52)$$

onde

$$\Box^2 + 2R^{\mu\nu}\nabla_\mu \nabla_\nu - \frac{2}{3} R\Box + \frac{1}{3}(\nabla_\lambda R)\nabla^\lambda = \Delta_4 \ ,$$

é o operador de Paneitz que queríamos obter. Assim, vemos que tanto a formulação conforme, quanto a formulação covariante, nos leva ao mesmo resultado, ou seja, os dois métodos são equivalentes.

3.3.1 Análise da Formulação Covariante para o Operador conforme de segunda ordem

Um outro resultado já bastante conhecido é o operador conforme de segunda ordem, Δ_2. Este operador, quando obtido pelo formalismo conforme, tem o seguinte formato: Em um espaço-tempo quadridimensional:

$$\Delta_2^{(4)} = \Box - \frac{1}{6} R \ .$$

Em um espaço-tempo N-dimensional:

$$\Delta_2^{(N)} = \Box + \frac{N-2}{4(N-1)} R \; .$$

Para maiores detalhes, ver [9]. Vamos então verificar se a nossa formulação covariante nos fornecerá o já conhecido operador conforme de segunda ordem, uma vez que tal formulação funciona para o operador conforme de quarta ordem, como vimos anteriormente. Comecemos por um espaço-tempo bidimensional. Considere a ação abaixo

$$S_5 = \int d^2x \sqrt{-g} R\varphi \; . \tag{3.53}$$

Cuja derivada variacional nos fornece

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_5}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2} R\varphi g^{\mu\nu} + \nabla^\nu \nabla^\mu \varphi - g^{\mu\nu} \Box\varphi - R^{\mu\nu}\varphi \; . \tag{3.54}$$

E o cálculo do traço nos dará

$$\frac{-2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta S_5}{\delta g_{\mu\nu}} = (-2)\left(R\varphi - R\varphi + \Box\varphi - 2\Box\varphi\right) = 2\Box\varphi \equiv 2\Delta_2\varphi \; , \tag{3.55}$$

onde multiplicamos por (-2) por conveniência. Agora, generalizaremos este resultado para um espaço-tempo N-dimensional, para tal não há mudança no cálculo da derivada variacional acima, só haverá mudança no cálculo do traço, logo

$$\begin{aligned} \frac{-2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta S_5}{\delta g_{\mu\nu}} &= (-2)\left[R\varphi\left(\frac{N-2}{2}\right) - \Box\varphi(N-1)\right] = \\ &= 2(N-1)\left[\Box - \frac{(N-2)R}{2(N-1)}\right]\varphi \; . \end{aligned} \tag{3.56}$$

Assim, vemos que o formalismo covariante, mantendo o campo φ invariante, funciona sem haver necessidade de modificações, apenas para o cálculo de Δ_2 em duas dimensões e Δ_4 em quatro dimensões, para os demais casos, há a necessidade de se parametrizar o campo φ, para manter o campo satisfeito e para as simetrias da teoria serem as mesmas, como visto em [15] onde usa - se para tal estudo o método conforme. Como partimos da proposta de mantermos o campo φ invariante, vamos usar a Identidade de Noether em $N = 2$ ou $N{\neq}2$, para obtermos o fator, que aqui chamaremos de Θ, que calibra o nosso método, ou seja, um parâmetro adicional que faz a seguinte transformação na Teoria:

NÃO-CONFORME $\Rightarrow$ CONFORME .

A ação conforme pode ser escrita como

$$S_{CONF} = \int d^N x \sqrt{-g} \varphi \Delta_2 \varphi \ . \tag{3.57}$$

Usando as já conhecidas transformações conforme

$$g_{\mu\nu} \to \overline{g}_{\mu\nu} e^{2\sigma} \ , \quad \varphi \to e^{\left(1-\frac{N}{2}\right)\sigma} \overline{\varphi} \ ,$$
$$\varphi^2 \to e^{(2-N)\sigma} \overline{\varphi} \ , \quad \sqrt{-g} \to \sqrt{-\overline{g}} e^{N\sigma} \ ;$$

nos leva à

$$\Delta_2 \to e^{-2\sigma} \overline{\Delta_2} \ .$$

E consequentemente a Identidade de Noether N-dimensional será dada por

$$\frac{-2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta S_{CONF}}{\delta g_{\mu\nu}} + \left(\frac{N}{2} - 1\right) \frac{\varphi}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{CONF}}{\delta \varphi} = 0 \ , \tag{3.58}$$

onde, $\left(\frac{N}{2} - 1\right)$ é o termo que calibra a Identidade de Noether.

Uma idéia que funciona em N=4 e N=2

$$\frac{-2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta \left[S^N_{TOP} \varphi\right]}{\delta g_{\mu\nu}} = \Delta^{(N)}_{CONF} \varphi \ , \tag{3.59}$$

onde

$$S^2_{TOP} \varphi = \int d^2 x \sqrt{-g} R \varphi,$$

$$S^4_{TOP} \varphi = \int d^4 x \sqrt{-g} \left(E - \frac{2}{3} \Box R\right) \varphi.$$

Reescrevendo a Identidade de Noether

$$\left[\frac{-2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} + \Theta \frac{1}{\sqrt{-g}} \varphi \frac{\delta}{\delta \varphi}\right] \left[S^N_{TOP} \varphi\right] = 0 \ . \tag{3.60}$$

Usando a equação (3.56), teremos

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left[-2 g_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} + \Theta \varphi \frac{\delta}{\delta \varphi}\right] \int d^N x \sqrt{-g} R \varphi = 2(N-1) \left[\Box - \frac{(N-2)}{4(N-1)} R\right] \varphi \ ,$$

$$2(N-1) \left[\Box - \frac{(N-2)}{2(N-1)} R\right] \varphi + \Theta R \varphi = 2(N-1) \left[\Box - \frac{(N-2)}{4(N-1)} R\right] \varphi \ ,$$

$$\Theta = \frac{N-2}{2} = \frac{N}{2} - 1 \ . \tag{3.61}$$

Note que o fator Θ que calibra a Teoria, coincide com o termo que calibra a Identidade de Noether na equação (3.58).

Capítulo 4

ANOMALIA CONFORME E AÇÃO EFETIVA

Vimos nos capítulos anteriores, que a simetria conforme é uma base útil e com aproximações interessantes para investigação de correções quânticas na gravitação, apesar de a nível quântico esta ser sempre violada.

Esta violação que nada mais é do que a quebra de simetria da teoria a nível quântico, é conhecida como anomalia conforme.

Entendemos que esta violação pode se dar por dois caminhos:
i) Pela existência de partículas com massa diferente de zero, mesmo que esta massa seja quase desprezível, uma vez que isto faz com que o traço do tensor momento-energia não seja nulo;
ii) Pela interação de partículas absolutamente sem massa, entre elas mesmas, ou pela interação dessas partículas com algum campo externo.

A existência da anomalia nos permite derivar uma parte importante da ação efetiva do vácuo e ainda obter ou melhor compreender a origem das mais importantes aplicações em Teoria Quântica de Campos em espaço-tempo curvo, tal como a radiação de Hawking [23] . Para tal estudo, estamos assumindo que a teoria inclui a métrica $g_{\mu\nu}$ como campo de fundo e também campos de matéria quantizados.

Como a motivação para o nosso trabalho foi obter o operador de Paneitz por uma formulação covariante, neste capítulo vamos voltar nossa atenção especialmente para o uso e aplicação desse operador no estudo da anomalia conforme. Veremos que a anomalia conforme associada às teorias conformes correspondem à ação do campo escalar com derivadas quárticas

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\varphi\ \Delta_4\ \varphi\ , \tag{4.1}$$

de onde confirmamos a importância do operador conforme de quarta ordem.

4.1 O traço do tensor momento-energia e a obtenção da ação induzida pela anomalia.

Agora vamos considerar a violação da simetria conforme local no caso de campos quânticos de matéria em espaço-tempo curvo. Essa teoria é conhecida como gravidade semi-clássica, uma vez que possui muitas características semelhantes à da gravitação quântica e além disso é uma teoria importante pois pode ser considerada como uma aproximação desta.

Para começar, devemos formular de maneira consistente a ação clássica num campo de fundo curvo e para isso devemos obedecer aos critérios que se seguem

- localidade da ação de vácuo;
- renormalizabilidade;
- não existência de parâmetros de ordem $[m^{-1}]$.

A ação que satisfaz às condições acima tem a forma $S_{vacuo} = S_{EH} + S_{HD}$, onde

$$S_{EH} = \frac{1}{k^2}\int d^4x\sqrt{-g}(R + 2\Lambda), \tag{4.2}$$

é a ação de Einstein-Hilbert com constante cosmológica.

$$S_{HD} = \int d^4x\sqrt{-g}\ [\ a_1C^2 + a_2E + a_3\Box R + a_4R^2\ ], \tag{4.3}$$

é a ação com derivadas superiores, k^2 é a constante de acoplamento, C^2 é o quadrado do tensor de Weyl e E é o termo de Gauss-Bonnet.

Como vamos estudar a teoria conforme a nível de 1-loop, é suficiente considerar a ação simplificada

$$S_{conf.vac.} = \int d^4x\sqrt{-g}\ [\ a_1C^2 + a_2E + a_3\Box R\ ], \tag{4.4}$$

uma vez que os termos da ação de Einstein-Hilbert, com constante cosmológica não são necessários aqui.

Construída a ação, nós podemos agora considerar a anomalia conforme. Vamos assumir que a teoria inclui a métrica $g_{\mu\nu}$ como campo de fundo e também campos de matéria quantizados Φ e ainda que K_Φ seja o peso conforme do campo.

A identidade de Noether para a simetria conforme local é

$$\left[-2g_{\mu\nu}\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} + K_\Phi \Phi \frac{\delta}{\delta\Phi}\right] S(g_{\mu\nu}, \Phi) = 0. \tag{4.5}$$

A nível quântico, $S_{vac}(g_{\mu\nu})$, deve ser substituída pela ação efetiva de vácuo $\Gamma_{vac}(g_{\mu\nu})$. A nível de 1-loop teremos [24]

$$\Gamma_{div} = \frac{1}{\epsilon}\int d^4x\sqrt{g}\ [\ \beta_1 C^2 + \beta_2 E + \beta_3 \Box R\ ], \tag{4.6}$$

onde $\epsilon = \mu^{N-4}/(N-4)$ é o parâmetro de regularização dimensional. E chegamos à

$$< T^\mu_\mu >= [\ \beta_1 C^2 + \beta_2 E + a'\Box R\ ], \tag{4.7}$$

que é o traço do tensor momento-energia envolvendo puramente o setor gravitacional da teoria semi-clássica e $a' = \beta_3$, $a_1 = \beta_1$, $a_2 = \beta_2$, são funções beta correspondentes à carga efetiva.

Pode-se derivar a anomalia conforme de diferentes maneiras, que se diferem pela escolha da regularização. Aqui vamos considerar a derivação da anomalia conforme pelo método da regularização dimensional [25]. Para uma revisão histórica e introdução à técnica ver [5, 10].

Usando resultados já conhecidos [5, 10], nós chegamos às expressões para as divergências com

$$\beta_1 = \frac{-1}{(4\pi)^2}\left(\frac{N_0}{120} + \frac{N_{1/2}}{20} + \frac{N_1}{10}\right), \tag{4.8}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{(4\pi)^2}\left(\frac{N_0}{360} + 11\frac{N_{1/2}}{360} + 31\frac{N_1}{180}\right), \tag{4.9}$$

$$\beta_3 = \frac{-1}{(4\pi)^2}\left(\frac{N_0}{180} + \frac{N_{1/2}}{30} - \frac{N_1}{10}\right), \tag{4.10}$$

onde N_0 se refere ao campo escalar (spin 0), N_1 se refere ao campo vetorial abeliano (spin 1), $N_{1/2}$ se refere ao campo espinorial (Dirac, spin 1/2).

A ação efetiva renormalizada de 1-loop tem a forma

$$\Gamma_R = S + \overline{\Gamma} + \Delta S \ , \tag{4.11}$$

onde $\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma}_{div} + \overline{\Gamma}_{fin}$ é uma pequena correção quântica à ação clássica S e ΔS é o contratermo.

A ação clássica é dada por $S = S_{matter} + S_{vacuo}$, onde S_{vacuo} tem a forma $S_{vacuo} = S_{EH} + S_{HD}$. Entretanto somente a parte invariante conforme da ação de vácuo deve ser considerada em (4.11). ΔS em (4.11) é um contratermo infinito local que depende essencialmente do campo gravitacional externo e é adicionado para cancelar a parte divergente da ação efetiva $\overline{\Gamma}$.

O traço anômalo é igual a

$$T =< T^{\mu}_{\mu} >= \frac{-2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta \Gamma_R}{\delta g_{\mu\nu}}\bigg|_{D=4} = \frac{-2}{\sqrt{-g}}_{\mu\nu} \frac{\delta \Delta S}{\delta g_{\mu\nu}}\bigg|_{D=4} \ , \tag{4.12}$$

onde o contratermo ΔS é não invariante, uma vez que este é local e também porque deve ser formulado em espaço-tempo de N dimensões.

A equação acima é exatamente a definição de anomalia conforme, uma vez que $\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma}_R - \Delta S$ deve ser conformalmente simétrica.

Os coeficientes da anomalia conforme são os mesmos coeficientes das divergências de 1-loop na ação de vácuo.

O cálculo da anomalia conforme possui uma relevância especial por ser uma quantidade que traz efeitos puramente quânticos.

O cálculo da expressão (4.12) pode ser feito como se segue.

Permita-nos mudar a parametrização da métrica para

$$g_{\mu\nu} = \overline{g}_{\mu\nu} e^{2\sigma}.$$

Uma relação útil seria

$$\frac{-2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta A[g_{\mu\nu}]}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{-1}{\sqrt{-g}} \ e^{-4\sigma} \frac{\delta A[\overline{g}_{\mu\nu} \ e^{2\sigma}]}{\delta \sigma} \ , \tag{4.13}$$

assumindo que $\overline{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ e que σ tende a zero .

Todas as expressões de nosso interesse têm o mesmo fator $e^{(N-4)\sigma}$ e algumas outras possuem ainda termos extras com derivadas de $\sigma(x)$. Se o fator conforme global $\sigma = \lambda = constante$, nós imediatamente chegamos à expressão (4.7) com $a' = \beta_3$

É possível usar a anomalia conforme para construir a equação da parte finita na correção de 1-loop da ação efetiva

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta \Gamma_{ind}}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{4\pi}(aC^2 + bE + c\,\Box R) \ , \tag{4.14}$$

onde mudamos a notação do termo entre parênteses por conveniência. A solução desta equação pode ser encontrada em detalhes em [6, 14], o que nos permitirá chegar à solução para a ação efetiva, que é

$$\overline{\Gamma} = S_c[\overline{g}_{\mu\nu}] + \frac{1}{(4\pi)^2}\int d^4x\sqrt{-g}\left[a\sigma\overline{C}^2 + b\sigma\left(\overline{E} - \frac{2}{3}\overline{\Box}\ \overline{R}\right) + 2b\sigma\overline{\Delta}_4\sigma - \right.$$
$$\left. -12\left(c + \frac{2b}{3}\right)\left(\overline{R} - 6(\overline{\nabla}\sigma)^2 - (\overline{\Box}\sigma)\right)^2\right] \ , \tag{4.15}$$

onde $S_c[\overline{g}_{\mu\nu}] = S_c[g_{\mu\nu}]$ é o funcional invariante conforme da métrica e serve como uma constante de integração para a equação (4.14).

A solução (4.15) é simples, mas possui a desvantagem de não ser covariante. Então para obter uma solução covariante não-local e depois representá - la na forma local usando campos auxiliares, nós devemos seguir [14, 6, 26] . Então o resultado final na forma não-local, ficará expresso em termos da função de Green para o operador Δ_4 .

$$\Delta_{4,x} G(x,y) = \delta(x,y) \ .$$

Assim nós encontramos para qualquer $A(g_{\mu\nu}) = A(\overline{g}_{\mu\nu}, \sigma)$ a relação

$$\frac{\delta}{\delta\sigma(y)}\int d^4x\sqrt{-g(x)}\ A\left(E - \frac{2}{3}\Box R\right) = 4\sqrt{-g}\ \overline{\Delta}_4\ A = 4\sqrt{-g}\Delta_4\ A \ , \tag{4.16}$$

onde usamos novamente a relação

$$\frac{-2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta A[g_{\mu\nu}]}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{-1}{\sqrt{-g}}\ e^{-4\sigma}\frac{\delta A[\overline{g}_{\mu\nu}\ e^{2\sigma}]}{\delta\sigma} \ , \tag{4.17}$$

assumindo ainda que $\overline{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ e que σ tende a zero .

Em particular nós obtemos $\Gamma_{ind} = \Gamma_a + \Gamma_b + \Gamma_c$, onde

$$\Gamma_a = \int d^4x\sqrt{-g(x)}\int d^4y\sqrt{-g(y)}\frac{1}{4}\, aC^2(x)\; G(x,y)\left(E - \frac{2}{3}\Box R\right)_y \tag{4.18}$$

$$\Gamma_b = \frac{b}{8}\int d^4x\sqrt{-g(x)}\int d^4y\sqrt{-g(y)}\left(E - \frac{2}{3}\Box R\right)_x G(x,y)\left(E - \frac{2}{3}\Box R\right)_y \tag{4.19}$$

$$\Gamma_c = -\frac{c + \frac{2}{3}b}{12(4\pi)^2}\int d^4x\sqrt{-g(x)}R^2. \tag{4.20}$$

A solução covariante da equação (4.15) é a soma de Γ_a, Γ_b e Γ_c. Assim a expressão não-local para a ação efetiva induzida por anomalia pode ser representada na forma local usando dois campos escalares auxiliares φ e ψ [26]. E como resultado final teremos

$$\begin{aligned}\Gamma = S_c[g_{\mu\nu}] \;-\; \frac{3c+2b}{36(4\pi)^2} \;+\; &\int d^4x\sqrt{-g(x)}R^2(x) \;+\\ +\int d^4x\sqrt{-g(x)}&\left[\frac{1}{2}\varphi\;\Delta_4\;\varphi - \frac{1}{2}\psi\;\Delta_4\;\psi + \frac{1}{8\pi\sqrt{b}}\;\psi(a\;C^2)\right] +\\ &+\int d^4x\sqrt{-g(x)}\varphi\left[\frac{\sqrt{b}}{8\pi}\left(E - \frac{2}{3}\Box R\right) - \frac{1}{8\pi\sqrt{b}}(a\;C^2)\right]\;.\end{aligned} \tag{4.21}$$

Assim algumas considerações tornam-se relevantes

1. A forma covariante local (4.21) é dinamicamente equivalente à forma covariante não local.

2. O termo cinético para o campo auxiliar φ é positivo, enquanto que para σ foi negativo. Para ψ o termo cinético também foi negativo. Esse erro de sinal não acarreta nenhum problema aqui, pois ambos os campos são auxiliares e não se propagam independentemente.

3. A ação induzida por anomalia tem importantes aplicações, como por exemplo no estudo do modelo modificado de Starobinski, no estudo da radiação Hawking, em Q.E.D., entre outros.

4. É a introdução de campos com derivadas superiores nas teorias convencionais (campo escalar, campo fermiônico, etc) que proporciona o cancelamento da anomalia.

5. A dependência de σ controla o traço do tensor momento-energia $< T_{\mu}^{\mu} >$ e este controla $\overline{\Gamma}_{div}^{(1)}$, o que significa que esta dependência nos dá toda a informação sobre o limite ultra violeta (UV) em teoria quântica.

Capítulo 5

CONCLUSÃO

Após uma breve revisão sobre transformação conforme Local a fim de mostrarmos algumas propriedades interessantes da métrica, partimos para o objetivo principal de nosso trabalho.

Começamos por analisar qual seria o papel do termo topológico de Gauss-Bonnet em gravitação e vimos que ao calcularmos a derivada variacional deste termo em quatro dimensões, as derivadas quárticas se cancelam, mas o quadrado dos tensores de curvatura não. Esperávamos que esse resultado fosse identicamente zero, mas como não era óbvio fizemos alguns exemplos particulares e vimos após o cálculo do traço em N dimensões, que este dá zero não somente em N=4, mas também em N=3 e N=2, onde o termo de Gauss-Bonnet não é topológico.

Posteriormente, usando o formalismo covariante, obtivemos com sucesso o operador hermitiano de quarta ordem (operador de Paneitz) e concluímos que o já conhecido método conforme e o nosso método covariante, são equivalentes. A vantagem da nossa abordagem é que chegamos ao mesmo operador, mas garantindo a covariância da teoria. Então, como uma forma de confirmar sua validade, usamos a formulação covariante para obter o operador conforme de segunda ordem, uma vez que este já é bem conhecido e chegamos a um resultado importante: nosso método funciona sem haver necessidade de mudanças apenas para Δ_2 em duas dimensões e Δ_4 em quatro dimensões. Sendo assim, foi necessário um estudo mais detalhado de tal consequência e para isso utilizamos a Identidade de Noether em N=2 ou $N\neq 2$, pois acreditávamos existir um fator que calibrasse nosso método o tornando mais geral e que ainda fizesse a seguinte transformação:

$$\text{NÃO-CONFORME} \Rightarrow \text{CONFORME} .$$

Usando idéias que já sabíamos funcionar para duas e quatro dimensões, reescrevemos a Identidade de Noether para esses casos, comparamos com a Identidade de Noether para o caso geral e vimos que o fator que calibra nosso método (que aqui chamamos de parâmetro Θ) coincide exatamente com o fator que calibra a Identidade de Noether no caso geral: $\Theta = \frac{N}{2} - 1$.

Assim, acreditamos o mesmo ser válido para operadores de ordem superior à do operador de Paneitz. Então nosso trabalho nesse sentido continua com o propósito de encontrarmos ou não um padrão para esse parâmetro Θ, que não só calibra a teoria, mas faz a importante função de transformá-la numa teoria conforme.

Bibliografia

[1] in Gravitation S. Weinberg and Cosmology. *John Wiley and Sons, New York*, (1972).

[2] K. S. Thorne C. W. Misner and in Gravitation J. A. Wheeler. *Freeman, San francisco*, (1973).

[3] in The Quantum Theory of Fields: Foudations S. Weinberg. *Cambridge Univ. Press*, (1995).

[4] M. J. Duff. *Nucl. Phys.* ***B 125***, 334 (1977).

[5] M. J. Duff. *Class. Quant. Grav.* ***11***, 1387 (1994).

[6] R. J. Riegert. *Phys. Lett.* ***B 134***, 56 (1984).

[7] S. Paneitz. *MIT PREPRINT*, (1983).

[8] T. P. Branson and B. Orsted. *Proceedings of the American Mathematical Society* ***3***, 113 (1991).

[9] J. A. Barros and I. L. Shapiro. *Phys. Lett.* ***B 412***, 242 (1997).

[10] I. L. Shapiro. *PoS - JHEP 03* ***030***, IC (2006).

[11] A. M. Pelinson J. C. Fabris and I. L. Shapiro. *Nucl. Phys.* ***B 597***, 539 (2001).

[12] I. L. Shapiro and H. Takata. *Phys. Lett.* ***B 361***, 31 (1995).

[13] I. L. Shapiro and H. Takata. *Phys. Rev.* ***D 52***, 2162 (1995).

[14] E. S. Fradkin and A. A. Tseytlin. *Phys. Lett.* ***B 134***, 137 (1984).

[15] I. L. Shapiro. *PoS - JHEP*, (2008).

[16] G. B. Peixoto and I. L. Shapiro. *Phys. Lett.* ***B 514***, 377 (2001).

[17] J. Erdmenger. *Class. Quant. Grav.* ***14***, 2061 (1997).

[18] J. Erdmenger and H. Osborn. *Class. Quant. Grav.* ***15***, 273 (1998).

[19] T. P. Branson. *Comm. Part. Diff. Eq.* ***7***, 393 (1982).

[20] T. P. Branson. *Comm. Math. Phys.* ***178***, 301 (1996).

[21] B. Gonçalves A. G. de Lima D. F. Carneiro, E. A. Freitas and I. L. Shapiro. *Gravitation and Cosmology* ***4 (40)***, 10 (2004).

[22] D. M. Capper and D. Kimber. *J. Phys.* ***A 13***, 3671 (1980).

[23] S. W. Hawking. *Commun. Math. Phys. 43 (1975), 199, Erratum-ibid* ***46***, 206 (1976).

[24] S.D.Odinstov I. L. Buchbinder and I.L.Shapiro. *IOP PUBLISHING, BRISTOL*, (1992).

[25] G. Leibbrandt. *Rev. of Modern Phys.* ***4***, 47 (1975).

[26] I. L. Shapiro and A. G. Jacksenaev. *Phys. Lett.* ***B 324***, 284 (1994).