

Universidade Federal de Juiz de Fora
Departamento de Matemática

Ceili Marcolino Moreira

*O Método de Sub e Supersoluções para
Soluções Fracas*

Juiz de Fora

2014

Ceili Marcolino Moreira

*O Método de Sub e Supersoluções para
Soluções Fracas*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Área de concentração: Equações Diferenciais Parciais, da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Luiz Fernando de Oliveira Faria

Juiz de Fora

2014

Marcolino Moreira, Ceilí.

O Método de Sub e Supersoluções para Soluções Fracas / Ceilí
Marcolino Moreira. - - 2014.

90f.

Orientador: Luiz Fernando de Oliveira Faria

Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de
Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-
Graduação em Matemática, 2014.

1. Método de sub e supersolução. 2. Soluções fracas. 3.
Teorema do ponto fixo de Schauder. 4. Problema elíptico
semilinear. I. de Oliveira Faria, Luiz Fernando, orient. II.
Título.

Ceili Marcolino Moreira

*O Método de Sub e Supersoluções para
Soluções Fracas*

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Acadêmico em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora.

Prof. Dr. Luiz Fernando de Oliveira Faria
(Orientador)
Mestrado Acadêmico em Matemática
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki
Mestrado Acadêmico em Matemática
UFJF

Prof. Dr. Paulo César Carrião
UFMG (aposentado)

Juiz de Fora, 27 de Março de 2014.

*Dedicado aos meus pais, Silvanio e Leuzeni, e minha irmã
Caroline.*

Agradecimentos

A Deus, por me mostrar que "Tudo tem o seu tempo determinado, e há tempo para todo propósito debaixo do céu: (...) tempo de buscar e tempo de perder"(Ec. 3, 1-6), mas também "(...) tempo de plantar e tempo de arrancar o que se plantou (...)"(Ec . 3, 2). Graças a Ti por guiar o meu caminho e pelas bênçãos recebidas. "Sei que tudo quanto Deus faz durará eternamente (...)"(Ec. 3, 14).

Aos meus pais, Silvanio e Leuzeni, e minha irmã Caroline. Meu refúgio, os responsáveis por quem sou e pelo que busco ser. Não há palavras pra descrever o meu amor por vocês! Não tenho a menor dúvida de que o apoio e amor de vocês é o que me faz seguir em frente.

Ao Eder. Minha caminhada na Matemática começou em 2007, seu apoio e dedicação desde o início nunca serão esquecidos.

Aos meus familiares e amigos que estiveram ao meu lado nessa caminhada, sempre me escutando quando eu precisava (e como me escutavam). Cleidiane sempre presente independente da distância, Tias Regina, Eliane e Adriana, vocês tem um lugar mais do que especial em meu coração. Ao meu primo Erick por ler as 80 páginas dessa dissertação. Aos que torceram de coração por mim, meu muito obrigado.

Aos colegas de mestrado. Aos que já estavam aqui. Aos que chegaram junto comigo, enfim conquistamos nosso objetivo, nos tornamos MESTRES! E aos que chegaram depois, agradeço a oportunidade de tê-los conhecido, muito sucesso nessa caminhada. Em especial, Douglas, Monalisa e Pedretti, obrigada por me escutarem, por estarem presente e me apoiarem nos momentos que mais precisei. Eliza, Yamashita, Marianna, Gisele, Rafael, Wilker, Gladston e Marina. Agradeço a todos vocês pelos momentos de aprendizado, de risadas incontáveis, de sufoco. Guardo em meu coração todas as lembranças. E Japonês sentirei falta dos seus abraços.

Às pessoas especiais que o destino colocou em meu caminho aqui em Juiz de Fora, em especial a Juliane. Eu levo um pedacinho de vocês comigo. Obrigado pelos momentos de aprendizado e diversão. Com certeza vocês ajudaram essa caminhada a ser mais prazerosa.

À Fernanda, com certeza a pessoa mais presente nesses dois anos de mestrado, com-

panheira de casa, amiga, terapeuta. Os momentos que dividimos juntas são inesquecíveis, nossos planos e metas serão concretizados. A distância não é nada comparada aos laços que criamos. Amo muito você!

Aos professores da graduação e do mestrado pelos ensinamentos. Especialmente ao meu orientador, Luiz Fernando de Oliveira Faria, pela paciência e dedicação ao me orientar. Ao professor Olímpio, pela disponibilidade de sempre tirar dúvidas, por ter aceitado o convite de participar da minha banca, obrigada pela atenção. Ao professor Carrião, por também ter aceitado o convite de fazer parte da minha banca. E ao Crocco, pelo carinho, atenção e conselhos.

Aos funcionários do departamento, especialmente a Laura, obrigado por sempre estarem dispostos a ajudar.

À CAPES e à UFJF pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos métodos envolvendo sub e supersolução para estudar a existência de solução, no sentido fraco, para três classes de problemas elípticos de segunda ordem com condição de fronteira de Dirichlet homogênea. Nos dois primeiros casos encontramos solução em $W_0^{1,2}(\Omega)$ e no terceiro caso encontramos solução em $L^1(\Omega)$ com algumas restrições.

Palavras-Chave: Método de sub e supersolução; Soluções fracas; Teorema do ponto fixo de Schauder; Problema elíptico semilinear.

Abstract

This paper presents methods involving sub and supersolution in order to learn the existence of weak solutions of three classes of second order elliptic problems with homogeneous Dirichlet boundary conditions. In the first two cases we find solution in $W_0^{1,2}(\Omega)$ and in the third case we find solution in $L^1(\Omega)$ with some restrictions.

Key-words: Method of sub and supersolution; Weak solutions; Schauder's fixed point theorem; Semilinear elliptic problems.

Sumário

Índice de Notações	p. 11
1 Introdução	p. 13
2 Matemática Preliminar	p. 18
2.1 Medida e Integral de Lebesgue	p. 18
2.1.1 Espaço Mensurável	p. 18
2.1.2 Função Mensurável	p. 19
2.1.3 Medida	p. 21
2.1.4 Teorema de Egorov	p. 22
2.1.5 A Integral	p. 25
2.1.6 Funções Integráveis	p. 27
2.2 O Espaço L^p	p. 29
2.2.1 Definição do Espaço L^p	p. 30
2.2.2 Propriedades Elementares	p. 30
2.2.3 Convergência Fraca	p. 31
2.2.4 Compacidade Fraca em L^1	p. 34
2.3 Espaços de Sobolev	p. 37
2.3.1 Derivada Fraca	p. 38
2.3.2 Definição do Espaço de Sobolev	p. 39
2.3.3 Propriedades Elementares	p. 40
2.4 Teorema do Ponto Fixo de Schauder	p. 40

3 O Método de Sub e Supersolução no Sentido Fraco	p. 42
3.1 Primeiro Caso	p. 42
3.2 Segundo Caso	p. 49
3.3 Terceiro Caso	p. 56
3.3.1 Definições Preliminares	p. 56
3.3.2 Limitação e Equi-Integrabilidade em $L^1_{\rho_0}$	p. 58
3.3.3 Existência, Compacidade e Comparação de Resultados	p. 64
3.3.4 Resultado Principal	p. 74
 Apêndice A – Resultados de Regularidade e Estimativas	 p. 81
 Apêndice B – Princípio do Máximo	 p. 83
 Apêndice C – Existência de Soluções Fracas	 p. 84
 Apêndice D – Diferenciabilidade	 p. 85
 Referências	 p. 87

Índice de Notações

- \rightarrow convergência forte;
- \rightharpoonup convergência fraca;
- q.t.p. quase todo ponto;
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$;
- $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$;
- $U \hookrightarrow \Omega$, denota que U está imerso em Ω compactamente;
- $U \subset\subset \Omega$ indica que o fecho do aberto U é compacto e $\bar{U} \subset \Omega$;
- $\partial\Omega$ é a fronteira de Ω ;
- $|E|$ é a medida de Lebesgue de um subconjunto E de \mathbb{R}^n ;
- $\bar{\Omega}$ é o fecho de Ω ;
- $C^k(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é continuamente } k \text{ vezes diferenciável}\}$;
- $C_c^k(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega); \text{supp}(u) \text{ é compacto}\}$;
- $C^\infty(\Omega) = \bigcap_k C^k(\Omega)$;
- $C_c^\infty(\Omega)$ o espaço das funções $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que possuem derivadas parciais contínuas de todas as ordens e suporte compacto em Ω ;
- $C_0^2(\bar{\Omega}) = \{\zeta \in C^2(\bar{\Omega}); \zeta = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}$;
- $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é mensurável e } \|u\|_{L^p} < \infty\}$;
- $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é mensurável e essencialmente limitada com } \|u\|_{L^\infty} < \infty\}$;
- $W^{k,p}(\Omega)$ é o espaço de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que para cada multi-índice α com $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ existe no sentido fraco e pertence a $L^p(\Omega)$;

- $\rho_0(x) = d(x, \partial\Omega)$, $\forall x \in \Omega$, em que $d(x, \partial\Omega) = \inf\{d(x, y); y \in \partial\Omega\}$;
- $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$;
- Uma sequência $(\phi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ com $\phi_j \in C_c^\infty(\Omega)$ converge ao valor ϕ , quando existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ com $\text{supp}(\phi_j) \subset K$ para todo j e

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} (\phi_j(x) - \phi(x)) \right| = 0,$$

para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$. O espaço $C_c^\infty(\Omega)$ juntamente com este critério de convergência define o espaço denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$;

- $\mathcal{D}'(\Omega)$ é o espaço das distribuições em Ω , e é topologicamente o dual de $\mathcal{D}(\Omega)$.

1 *Introdução*

O método de sub e supersolução tem desempenhado um papel importante no estudo de problemas de contorno para as equações diferenciais parciais elípticas não lineares. Scorza Dragoni [53] foi um dos primeiros a utilizar a existência de um par ordenado de soluções de uma inequação diferencial para determinar a existência de uma solução de um dado problema de valor de contorno de uma equação diferencial de segunda ordem não linear. Isto foi seguido por um trabalho fundamental de Nagumo ([45], [46]) que foi inspirado em problemas sujeitos as condições de contorno de Dirichlet para equações diferenciais parciais e ordinárias durante a década de sessenta (ver, por exemplo, [3], [4], [30], [49], [50]). Usando o método de Cesari, Knobloch [32] introduziu o método de sub e supersolução para estudar problemas de valor de contorno para equações diferenciais ordinárias de segunda ordem não lineares. Usando métodos um pouco diferentes, problemas semelhantes foram posteriormente estudados em ([48], [42], [25]), dentre outros.

Em todos os trabalhos citados acima as sub e supersoluções são consideradas suaves, isto é, são soluções no sentido clássico, de tal forma que foram utilizadas para estudar problemas de Dirichlet e/ou problemas de valor de fronteira de Neumann para problemas elípticos semilineares em ([5], [47]), em geral para problemas de valor de contorno não lineares em ([19], [23], [43]) e também para sistemas de equações diferenciais ordinárias não lineares em ([6], [28], [42]).

Deuel e Hess [18] e Hess [29] foram os primeiros a formular o conceito de sub e supersoluções fracas e obter existência de soluções fracas para problemas de Dirichlet elípticos semilineares. Posteriormente esse assunto foi abordado por vários outros autores ([14], [16], [35], [39], [40], [41], [36], [37], [38], [51]).

Neste trabalho, vamos considerar o seguinte problema semilinear:

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x, u), \text{ em } \Omega, \\ u &= 0, \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

em que Δu é o laplaciano de u , $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio suave e limitado e f satisfaz certas condições que explicitaremos posteriormente.

O método clássico de sub e supersolução (ver, por exemplo, [20]) afirma que se f é suave e se pode encontrar sub e supersolução suaves, digamos v_1 e v_2 de (1.1), tais que $v_1 \leq v_2$, então existe uma solução clássica u de (1.1) tal que $v_1 \leq u \leq v_2$.

A demonstração usual deste método é baseada na técnica de iteração monótona, o que requer que f seja Lipschitz (ou localmente Lipschitz). Tal argumento, nos mostra também que é possível encontrar uma solução menor e uma maior, digamos $u_1 \leq u_2$, no intervalo $[v_1, v_2]$. Uma outra demonstração, que pode ser encontrada em [3] é baseada no Teorema do Ponto Fixo de Schauder. Nesse caso, a existência de uma solução menor e uma maior é feita separadamente utilizando o método de Perron. Clément e Sweers [15] baseados na estratégia de Akô, implementaram o método de sub e supersolução quando $v_1, v_2 \in C(\overline{\Omega})$ e f uma função contínua. Outras versões também podem ser encontradas em Deuel-Hess [17], Dancer-Sweers [16] para soluções H^1 e Brezis-Marcus-Ponce [13] para soluções L^1 com f contínua e não-decrescente.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma:

No Capítulo 2, fornecemos a base Matemática, uma vez que tais resultados serão utilizados no capítulo posterior. Na primeira seção apresentamos a teoria básica de Medida e Integração de Lebesgue. Na segunda seção definimos o espaço L^p e listamos algumas de suas principais propriedades, bem como alguns resultados de convergência fraca e compacidade fraca em L^1 . Na terceira seção introduzimos o espaço de Sobolev e elencamos suas principais propriedades. Na quarta e última seção deste capítulo enunciamos duas versões do Teorema do Ponto Fixo de Schauder e demonstramos sua versão clássica, encontrada nas principais bibliografias de Equações Diferenciais Parciais. Neste capítulo utilizamos como referências base, Bartle [7], Brezis [11] e Evans [20], onde podem ser encontradas as demonstrações não feitas.

No Capítulo 3, utilizamos o método de sub e supersolução para estudar a existência de solução, no sentido fraco, para três classes de problemas elípticos de segunda ordem com condições de fronteira de Dirichlet homogênea. Na primeira seção, Ω é um subconjunto de \mathbb{R}^n limitado e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave com

$$|g'| \leq c,$$

para alguma constante c e $g(u) = f(x, u)$.

Dizemos que $\underline{u} \in W^{1,2}(\Omega)$ é uma subsolução fraca (ou no sentido fraco) de (1.1) se:

$$\int_{\Omega} D\underline{u} \cdot Dv \, dx \leq \int_{\Omega} g(\underline{u})v \, dx$$

para cada $v \in C_0^\infty(\Omega)$, $v \geq 0$ q.t.p.

Analogamente, $\bar{u} \in W^{1,2}(\Omega)$ é uma supersolução fraca (ou no sentido fraco) de (1.1) se:

$$\int_{\Omega} D\bar{u} \cdot Dv \, dx \geq \int_{\Omega} g(\bar{u})v \, dx$$

para cada $v \in C_0^\infty(\Omega)$, $v \geq 0$ q.t.p.

Finalmente, $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ é solução fraca de (1.1) se:

$$\int_{\Omega} Du \cdot Dv \, dx = \int_{\Omega} g(u)v \, dx$$

para cada $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

O resultado principal que pode ser visto em Evans [20], nos diz que:

Teorema 1.1. Suponha que exista uma subsolução fraca \underline{u} e uma supersolução fraca \bar{u} de (1.1), satisfazendo:

$$\underline{u} \leq 0 \text{ e } \bar{u} \geq 0 \text{ sobre } \partial\Omega \text{ no sentido do traço, } \underline{u} \leq \bar{u} \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Então existe u uma solução fraca de (1.1), tal que:

$$\underline{u} \leq u \leq \bar{u} \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Na segunda seção, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, é um domínio limitado e suave, $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory. (Veja no Capítulo 3).

Uma função $\underline{u} \in W^{1,2}(\Omega)$ é dita uma subsolução fraca do problema (1.1) se $u \leq 0$ sobre $\partial\Omega$ e

$$\int_{\Omega} \nabla \underline{u} \cdot \nabla v \, dx \leq \int_{\Omega} f(\cdot, \underline{u})v \, dx$$

para toda $v \in C_0^\infty(\Omega)$, $v \geq 0$.

Analogamente, uma função $\bar{u} \in W^{1,2}(\Omega)$ é dita uma supersolução fraca do problema (1.1) se $u \geq 0$ sobre $\partial\Omega$ e

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{u} \cdot \nabla v \, dx \geq \int_{\Omega} f(\cdot, \bar{u})v \, dx$$

para toda $v \in C_0^\infty(\Omega)$, $v \geq 0$.

E por fim, dizemos que $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ é solução fraca do problema (1.1) se:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f(\cdot, u)v \, dx$$

para toda $v \in C_0^\infty(\Omega)$, $v \geq 0$.

O resultado principal, que pode ser visto em Struwe [55], nos garante que:

Teorema 1.2. Suponha $\underline{u}, \bar{u} \in W^{1,2}(\Omega)$ sub e supersolução, respectivamente, do problema (1.1). Sejam $\underline{c}, \bar{c} \in \mathbb{R}$ tais que

$$-\infty \leq \underline{c} \leq \underline{u} \leq \bar{u} \leq \bar{c} \leq \infty, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Então existe $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ solução fraca de (3.18), satisfazendo a condição

$$\underline{u} \leq u \leq \bar{u} \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Na terceira seção, que é baseada no artigo de Montenegro e Ponce [44], consideramos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, é um domínio limitado e suave, $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory. Nesse caso, extendemos o método de sub e supersolução para estabelecer existência de solução u em $L^1(\Omega)$ de (1.1). Dizemos que tal u é solução se satisfaz:

(i) $u \in L^1(\Omega)$;

(ii) $f(\cdot, u)\rho_0 \in L^1(\Omega)$;

(iii)

$$-\int_{\Omega} u \Delta \zeta \, dx = \int_{\Omega} f(x, u)\zeta \, dx, \quad \forall \zeta \in C_0^2(\bar{\Omega}), \quad (1.2)$$

em que

$$\begin{aligned} \rho_0(x) &= d(x, \partial\Omega), \quad \forall x \in \Omega, \text{ em que } d(x, \partial\Omega) = \inf\{d(x, y); y \in \partial\Omega\}; \\ C_0^2(\bar{\Omega}) &= \{\zeta \in C^2(\bar{\Omega}); \zeta = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}. \end{aligned}$$

O resultado principal é:

Teorema 1.3. Sejam v_1 e v_2 uma sub e uma supersolução do problema (1.1), respectivamente. Suponha que $v_1 \leq v_2$ e

$$f(\cdot, v)\rho_0 \in L^1(\Omega), \quad \forall v \in L^1(\Omega) \text{ tal que } v_1 \leq v \leq v_2 \text{ q.t.p.}$$

Então, existem soluções $u_1 \leq u_2$ do problema (1.1) em $[v_1, v_2]$ de tal forma que qualquer solução u de (1.1) no intervalo $[v_1, v_2]$ satisfaz:

$$v_1 \leq u_1 \leq u \leq u_2 \leq v_2 \text{ q.t.p.}$$

Além disso, nessa seção estabelecemos alguns resultados que serão utilizados na demonstração do Teorema anterior, alguns resultados sobre existência, compacidade e comparação de resultados relacionados com a equação linear $-\Delta w = h$ em que $h\rho_0 \in L^1(\Omega)$.

No apêndice, listamos alguns resultados auxiliares utilizados ao longo deste trabalho.

2 Matemática Preliminar

Neste capítulo fornecemos resultados auxiliares da Matemática, que serão utilizados nos capítulos posteriores.

2.1 Medida e Integral de Lebesgue

Nessa seção introduzimos definições e propriedades básicas da Teoria de Medida e Integração de Lebesgue.

2.1.1 Espaço Mensurável

Definição 2.1. Uma família \mathcal{F} de subconjuntos de um conjunto X é chamada de σ -álgebra se satisfaz as seguintes condições:

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$;
- (ii) Se $A \in \mathcal{F}$, então o complementar $A^c = X \setminus A \in \mathcal{F}$;
- (iii) Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos em \mathcal{F} , então

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}.$$

Observação 2.1. Dada uma sequência $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em uma σ -álgebra \mathcal{F} de um conjunto X , segue que a interseção $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ também é um elemento de \mathcal{F} . Basta observar pelas relações de Morgan que:

- (i) $(\bigcup_{\alpha \in L} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha \in L} A_\alpha^c$;
- (ii) $(\bigcap_{\alpha \in L} A_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha \in L} A_\alpha^c$.

Em que L é uma família qualquer de índices.

Observação 2.2. Dada $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in L}$ uma coleção qualquer de σ -álgebras de um conjunto X , então a interseção $\bigcap_{\alpha \in L} \mathcal{F}_\alpha$ é uma σ -álgebra de X .

Definição 2.2. Seja A uma coleção não vazia de subconjuntos de um conjunto X , então existe a menor σ -álgebra de X que contém A . Que denotamos por $\mathcal{F}(A)$ e chamamos de σ -álgebra gerada por A .

Observação 2.3. Se \mathcal{F} é alguma σ -álgebra que contém A , então $\mathcal{F}(A) \subset \mathcal{F}$.

De fato, defina

$$\mathcal{F}(A) = \bigcap_{\alpha \in L} \mathcal{F}_\alpha,$$

em que $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in L}$ são todas as σ -álgebras de X que contém A .

Note que $\mathcal{F}(A)$ está bem definida, pois o conjunto das partes de X , $\mathbb{P}(X)$, é uma σ -álgebra que contém A . Além disso, pela Observação 2.2 segue que $\mathcal{F}(A)$ é uma σ -álgebra.

Exemplo 2.1. Seja $X = \mathbb{R}$. A σ -álgebra de Borel \mathbb{B} é a σ -álgebra de \mathbb{R} gerada pelos intervalos abertos. Um conjunto $A \in \mathbb{B}$ é chamado de conjunto de Borel ou boreliano.

Note que a σ -álgebra de Borel \mathbb{B} também pode ser gerada pelos intervalos fechados de \mathbb{R} .

Definição 2.3. Dizemos que o par (X, \mathcal{F}) , em que X é um conjunto qualquer e \mathcal{F} é uma σ -álgebra de X , é um espaço mensurável. Chamaremos os elementos de X de conjuntos \mathcal{F} -mensuráveis, ou, quando a σ -álgebra estiver implícita, de conjuntos mensuráveis.

2.1.2 Função Mensurável

Consideremos $X = (X, \mathcal{F})$ um espaço mensurável.

As demonstrações omitidas aqui podem ser vistas em [7].

Definição 2.4. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é \mathcal{F} -mensurável se, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$\{x \in X; f(x) > \alpha\}$$

está em \mathcal{F} , isto é, é mensurável.

Observação 2.4. Na definição de função mensurável poderíamos utilizar qualquer um dos conjuntos abaixo:

- (i) $\{x \in X; f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{F}$;
- (ii) $\{x \in X; f(x) < \alpha\} \in \mathcal{F}$;
- (iii) $\{x \in X; f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{F}$.

Vamos denotar por $\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ o espaço das funções \mathcal{F} -mensuráveis.

Observação 2.5. Sejam $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ e $c \in \mathbb{R}$. Então as funções:

- (a) cf
- (b) $f + g$
- (c) $f \cdot g$
- (d) $|f|$

são mensuráveis.

Definição 2.5. Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos as funções:

- (i) $f^+ : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f^+(x) = \max(f(x), 0)$;
- (ii) $f^- : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$.

Denominadas parte positiva e parte negativa de f , respectivamente.

Observação 2.6. Podemos observar que:

- $f = f^+ - f^-$;
- $|f| = f^+ + f^-$.

Logo,

- $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$;
- $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$.

De onde segue que f^+ e f^- são mensuráveis.

Lema 2.6. Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ e defina as funções:

$$(i) f(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x).$$

$$(ii) F(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x).$$

$$(iii) f^*(x) = \liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x).$$

$$(iv) F^*(x) = \limsup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x).$$

Então as funções acima definidas são mensuráveis. Além disso, se $f^* = F^*$, então $\lim_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ é uma função mensurável.

No Lema acima vimos que se uma sequência de funções mensuráveis converge pontualmente para uma função f , então f é mensurável. O Lema seguinte vai garantir que dada uma função $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F})$, mensurável e não negativa, é possível obter uma sequência monótona de funções mensuráveis não negativas e com imagem finita φ_n , tais que $f(x) = \lim_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n(x)$. A partir daí podemos definir a integral de Lebesgue.

Lema 2.7. Se $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ é uma função não negativa, então existe uma sequência $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ tal que:

$$(i) 0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x), \forall n \in \mathbb{N};$$

$$(ii) f(x) = \lim_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n(x) \text{ para cada } x \in X;$$

(iii) Cada φ_n tem um número finito de elementos na sua imagem.

2.1.3 Medida

Já conhecemos a ideia de espaço mensurável (X, \mathcal{F}) , em que X é um conjunto e \mathcal{F} uma σ -álgebra de X . Agora, vamos considerar as funções chamadas medidas, que estão definidas em \mathcal{F} e assumem valores no conjunto dos reais estendidos, a saber $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$. Intuitivamente estas funções podem ser interpretadas como a área, comprimento ou massa.

As demonstrações omitidas aqui podem ser vistas em [7].

Definição 2.8. Uma função $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, definida numa σ -álgebra de um conjunto X e que assume valores em $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$ é dita uma medida se satisfaz:

$$(i) \mu(\emptyset) = 0;$$

(ii) $\mu(E) \geq 0 \quad \forall E \in \mathcal{F}$;

(iii) Se $(E_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ é uma sequência de conjuntos disjuntos entre si, então

$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(E_i)$$

Observação 2.7. Como μ assume valores em $\overline{\mathbb{R}}$, permitimos que ela assuma o valor $+\infty$. O que significa que podemos ter $\mu(E_i) = +\infty$ para algum i ou a série de termos não-negativos $\sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(E_i)$ é divergente. Por outro lado, se a medida não assumir o valor $+\infty$ dizemos que ela é finita. Mais geralmente, se existir uma sequência $(E_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ tal que $\mu(E_i) \neq +\infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$, dizemos que a medida μ é σ -finita.

Exemplo 2.2. Seja $X = \mathbb{R}$ e $\mathcal{F} = \mathbb{B}$ a σ -álgebra de Borel. Então, existe uma única medida μ , chamada de medida de Lebesgue, definida em \mathbb{B} tal que, se $E = (a, b)$ então $\mu(E) = b - a$. Esta medida não é finita, mas é σ -finita.

Teorema 2.9. Seja μ uma medida definida na σ -álgebra \mathcal{F} .

(i) Se $E, F \in \mathcal{F}$ e $E \subseteq F$, então $\mu(E) \leq \mu(F)$. Se $\mu(E) < \infty$, então $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$;

(ii) Se $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente em \mathcal{F} , então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n);$$

(iii) Se $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente em \mathcal{F} e $\mu(F_1) < \infty$, então

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n).$$

Definição 2.10. Uma tripla (X, \mathcal{F}, μ) , em que X é um conjunto, \mathcal{F} é uma σ -álgebra e μ é uma medida, é chamada de espaço de medida.

2.1.4 Teorema de Egorov

Definição 2.11. Dizemos que duas funções f e g , definidas sobre um mesmo conjunto mensurável E , são equivalentes ($f \sim g$) se

$$\mu \{x; f(x) \neq g(x)\} = 0.$$

Dizemos que uma propriedade é verdadeira por *quase toda parte* (q.t.p.) em E , se os pontos de E em que esta não for verdadeira formarem um conjunto de medida nula.

Definição 2.12. Uma sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definidas sobre um espaço X , munido de uma medida, é dita convergente por quase toda parte para $f(x)$ se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

em quase todo ponto $x \in X$. Ou seja, os pontos $x \in X$ que não cumprem essa condição formam um conjunto de medida nula.

Teorema 2.13. Se uma sequência de funções mensuráveis $f_n(x)$ convergir em quase todo ponto em X para uma função $f(x)$, então $f(x)$ é mensurável.

Prova. Vide Kolmogorov [34, Teorema 4']. □

Teorema 2.14. (Teorema de Egorov) Seja E um conjunto de medida finita e seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis, convergindo em quase todo ponto em E para uma função $f(x)$. Então, dado qualquer $\delta > 0$, existe um conjunto mensurável $E_\delta \subset E$ tal que

(i) $\mu(E_\delta) > \mu(E) - \delta$;

(ii) sobre o conjunto E_δ , a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para $f(x)$.

Prova.

De acordo com o Teorema 2.13, a função $f(x)$ é mensurável. Tomemos

$$E_n^m = \bigcap_{i \geq n} \left\{ x : |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \right\}.$$

Isto é, dados m, n , E_n^m é o conjunto dos x tais que

$$|f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$$

para todo $i \geq n$. Seja

$$E^m = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^m.$$

Fixado m , pela definição do conjunto E_n^m temos que,

$$E_1^m \subset E_2^m \subset \dots \subset E_n^m \subset \dots$$

Dados m e $\delta > 0$, da continuidade de uma medida σ -aditiva, é possível encontrar $n_0(m)$ tal que

$$\mu(E^m \setminus E_{n_0(m)}^m) < \frac{\delta}{2^m}.$$

Defina

$$E_\delta = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{n_0(m)}^m.$$

Veamos que tal E_δ satisfaz as condições formuladas do teorema.

Primeiramente, vejamos que a sequência $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para $f(x)$ em E_δ . De fato, para todo $x \in E_\delta$ e qualquer m ,

$$|f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \quad \text{para } i > n_0(m).$$

Agora vamos estimar a medida do conjunto $E \setminus E_\delta$. Observe que dado m qualquer se $x_0 \in E \setminus E^m$, então, para todos os valores suficientemente grandes de i , se cumpre

$$|f_i(x_0) - f(x_0)| \geq \frac{1}{m},$$

ou seja, a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não converge pra $f(x)$ em x_0 . Por hipótese, temos que a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge por quase toda parte para $f(x)$, logo

$$\mu(E \setminus E^m) = 0.$$

Daí,

$$\mu(E \setminus E_{n_0(m)}^m) = \mu(E^m \setminus E_{n_0(m)}^m) < \frac{\delta}{2^m},$$

resultando em

$$\begin{aligned} \mu(E \setminus E_\delta) &= \mu\left(E \setminus \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{n_0(m)}^m\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} (E \setminus E_{n_0(m)}^m)\right) \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(E \setminus E_{n_0(m)}^m) \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^m} = \delta. \end{aligned}$$

O que demonstra o teorema. □

2.1.5 A Integral

Já apresentamos o conjunto de todas as funções \mathcal{F} -mensuráveis denotado por $\mathcal{M} = \mathcal{M}(X, \mathcal{F})$. Vamos considerar agora o conjunto das funções \mathcal{F} -mensuráveis não negativas que denotamos por $\mathcal{M}^+ = \mathcal{M}^+(X, \mathcal{F})$.

As demonstrações omitidas aqui podem ser vistas em [7].

Definição 2.15. Uma função $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ é simples quando seu conjunto imagem é finito.

Podemos representar uma função simples φ da seguinte forma:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{X}_{E_i},$$

em que $a_i \in \mathbb{R}$ e \mathcal{X}_{E_i} é a função característica do conjunto $E_i \in \mathcal{F}$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Além disso, se exigirmos que os a_i sejam distintos entre si e que os E_i sejam disjuntos, então esta representação é única e é chamada de Representação Padrão da função simples φ .

Definição 2.16. (Integral de uma função simples) Seja $\varphi \in \mathcal{M}^+$ uma função simples com representação padrão dada por:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{X}_{E_i}.$$

Então a integral de φ com respeito a medida μ é definida como:

$$\int \varphi d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i).$$

Temos que vale as propriedades elementares de integral:

Lema 2.17. Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{M}^+$ funções simples e $c \geq 0$, então

(i) $\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu;$

(ii) $\int c\varphi d\mu = c \int \varphi d\mu.$

Além disso, se λ é definida de E em \mathcal{F} por

$$\lambda(E) = \int \varphi \mathcal{X}_E d\mu$$

então λ é uma medida sobre \mathcal{F} .

Definição 2.18. (Integral de uma função mensurável não negativa) Seja $f \in \mathcal{M}^+$ e Φ o conjunto de todas as funções simples de \mathcal{M}^+ tais que $\varphi(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$. Definimos a integral de f com respeito a medida μ como:

$$\int f \, d\mu = \sup_{\varphi \in \Phi} \int \varphi \, d\mu.$$

Por outro lado, se $f \in \mathcal{M}^+$ e $E \in \mathcal{F}$ então temos que $f_{\mathcal{X}_E} \in \mathcal{M}^+$ e a integral de f sobre E é dada por:

$$\int_E f \, d\mu = \int f_{\mathcal{X}_E} \, d\mu.$$

Lema 2.19.

(i) Se $f, g \in \mathcal{M}^+$ e $f(x) \leq g(x) \, \forall x \in X$, então

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

(ii) Se $f \in \mathcal{M}^+$ e $E, F \in \mathcal{F}$ com $E \subset F$, então

$$\int_E f \, d\mu \leq \int_F f \, d\mu.$$

Teorema 2.20. (Teorema da Convergência Monótona) Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções em \mathcal{M}^+ tal que

(i) é monótona não-decrescente, isto é, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \, \forall x \in X$,

(ii) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pontualmente para uma função f .

Então, $f \in \mathcal{M}^+$ e

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Listamos agora, alguns resultados que seguem do Teorema da Convergência Monótona.

Corolário 2.21.

(i) Se $f \in \mathcal{M}^+$ e $c \geq 0$ então $cf \in \mathcal{M}^+$ e

$$\int cf \, d\mu = c \int f \, d\mu.$$

(ii) Se $f, g \in \mathcal{M}^+$ então $f + g \in \mathcal{M}^+$ e

$$\int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

Corolário 2.22. (Lema de Fatou) Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções em \mathcal{M}^+ . Então,

$$\int (\liminf_{n \rightarrow +\infty}) f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Corolário 2.23. Se $f \in \mathcal{M}^+$ e λ é definida em \mathcal{F} por

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\mu$$

então λ é uma medida sobre \mathcal{F} .

Corolário 2.24. Seja $f \in \mathcal{M}^+$. Então $f(x) = 0$ μ -q.t.p. se, e somente se, $\int f \, d\mu = 0$. (Dizemos μ -q.t.p se a propriedade vale em quase todo ponto de acordo com a medida μ .)

Corolário 2.25. Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções em \mathcal{M}^+ tal que

- (i) é monótona não-decrescente, isto é, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \, \forall x \in X$,
- (ii) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge μ -q.t.p. para uma função f .

Então, $f \in \mathcal{M}^+$ e

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Corolário 2.26. Seja $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em \mathcal{M}^+ . Então

$$\int \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} g_n \right) \, d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\int g_n \, d\mu \right).$$

2.1.6 Funções Integráveis

As demonstrações omitidas aqui podem ser vistas em [7].

Definição 2.27. O conjunto $L = L(X, \mathcal{F}, \mu)$ das funções integráveis a Lebesgue com respeito a medida μ consiste no conjunto de todas as funções mensuráveis $f \in M$, tais que a suas partes positiva e negativa possuem integral finita, isto é,

$$L = L(X, \mathcal{F}, \mu) = \left\{ f \in M(X, \mathcal{F}); \int f^+ \, d\mu < +\infty \text{ e } \int f^- \, d\mu < +\infty \right\}.$$

Se $f \in L$ então sua integral com respeito a medida μ é definida por:

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu.$$

Se $E \in \mathcal{F}$, então a integral de f sobre E é definida por:

$$\int_E f \, d\mu = \int f_{\mathcal{X}_E} \, d\mu = \int f_{\mathcal{X}_E}^+ \, d\mu - \int f_{\mathcal{X}_E}^- \, d\mu.$$

Lema 2.28. Seja $f \in \mathcal{M}$. Então $f \in L$ se, e somente se, $|f| \in L$. Neste caso,

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu.$$

Corolário 2.29. Se $f \in \mathcal{M}$, g é integrável e $|f| \leq |g|$, então f é integrável e

$$\int |f| \, d\mu \leq \int |g| \, d\mu.$$

Corolário 2.30. Se $f, g \in L$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $(f + g), \alpha f \in L$, e além disso vale

$$(i) \int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu;$$

$$(ii) \int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu.$$

Teorema 2.31. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L$ uma sequência de funções integráveis tal que,

(i) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ μ -q.t.p., em que f é uma função mensurável;

(ii) Existe $g \in L$ tal que para todo n ,

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \forall x \in X.$$

Então, f é integrável e além disso,

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Prova.

Considere

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

para todo $x \in M = X \setminus N$, em que N é um conjunto de medida nula.

Vamos considerar as funções f e f_n definidas em N como identicamente nulas, obtendo então a convergência pontual para todo o conjunto X , já que isso não altera o valor das integrais, pois N tem medida nula.

Dessa maneira, como $|f| \leq g$ em X , segue que f é integrável.

Vamos mostrar agora que:

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Sabemos que $g - f_n \geq 0$, daí pelo Lema de Fatou segue que

$$\int \liminf_{n \in \mathbb{N}} (g - f_n) \, d\mu \leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} \int (g - f_n) \, d\mu.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int g \, d\mu - \int f \, d\mu &= \int (g - f) \, d\mu \\ &\leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} \int (g - f_n) \, d\mu \\ &= \int g \, d\mu - \limsup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \, d\mu. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\limsup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu.$$

Por outro lado, temos que $g + f_n \geq 0$. Analogamente segue que

$$\begin{aligned} \int g \, d\mu + \int f \, d\mu &= \int (g + f) \, d\mu \\ &\leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} \int (g + f_n) \, d\mu \\ &= \liminf_{n \in \mathbb{N}} \left(\int g \, d\mu + \int f_n \, d\mu \right) \\ &= \int g \, d\mu + \liminf_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \, d\mu. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int f \, d\mu \leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \, d\mu.$$

Daí,

$$\int f \, d\mu \leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \, d\mu \leq \limsup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \, d\mu \leq \int f_n \, d\mu.$$

Portanto,

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \, d\mu.$$

□

2.2 O Espaço L^p

Nesta seção definimos o espaço L^p e listamos algumas propriedades elementares.

2.2.1 Definição do Espaço L^p

Definição 2.32. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável e $1 \leq p < \infty$. Definimos o espaço $L^p(\Omega)$ como sendo o espaço das (classes de equivalência de) funções reais p -integráveis no sentido de Lebesgue, isto é,

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \int_{\Omega} |f|^p d\mu < +\infty \right\},$$

dotado da norma

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

E o espaço $L^\infty(\Omega)$ como sendo o espaço das (classes de equivalência de) funções reais mensuráveis limitadas, isto é,

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \begin{array}{l} f \text{ é mensurável e existe uma constante } C \\ \text{tal que } |f(x)| \leq C \text{ q.t.p. sobre } \Omega \end{array} \right\}$$

dotado da norma

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C; |f| \leq C \text{ q.t.p. sobre } \Omega\}.$$

Admitimos que duas funções equivalentes entre si em Ω não se distinguem, ou seja, se identificam dentro do espaço $L^p(\Omega)$.

Exemplo 2.3. Denotamos por $L^1(\Omega)$ o espaço normado constituído pelas classes de funções integráveis equivalentes entre si, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Dotado da norma

$$\|f\|_{L^1} = \int_{\Omega} |f| d\mu.$$

2.2.2 Propriedades Elementares

Relembramos que um espaço normado completo é chamado espaço de Banach. E que um espaço normado N é dito reflexivo se $N^{**} = N$, em que N^{**} é o espaço bidual de N .

As demonstrações omitidas aqui podem ser vistas em [11].

Teorema 2.33.

1. $L^p(\Omega)$ é um espaço vetorial normado para $1 \leq p \leq \infty$;
2. $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$;
3. $L^p(\Omega)$ é um espaço reflexivo para $1 < p < \infty$.

- **Notação:** Se $1 \leq p \leq \infty$, denotamos por p' o conjugado de p , isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$,

Identificamos o dual de $L^p(\Omega)$ como sendo $(L^p(\Omega))' = L^{p'}(\Omega)$, para $1 < p < \infty$. E o dual de $L^1(\Omega)$ como sendo $(L^1(\Omega))' = L^\infty(\Omega)$.

Teorema 2.34. (Desigualdade de Hölder) Sejam $p, p' > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Suponha que $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p'}(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

2.2.3 Convergência Fraca

Esta subseção está baseada nas notas de aula de Karlsen [31].

As demonstrações omitidas aqui podem ser vistas em [21], [22], [30], [32] e [56].

Nela vamos considerar $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto, limitado e suave, com $n \geq 2$. Suponha $1 \leq p < \infty$ e seja p' o conjugado de p . Vamos assumir $p' := \infty$ quando $p = 1$.

Dizemos que Ω é um domínio suave se é um subconjunto aberto e conexo de \mathbb{R}^n , com $\partial\Omega$ suave, isto é, $\partial\Omega$ pode ser vista como o gráfico de uma função suave localmente.

A sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ converge fracamente para $u \in L^p(\Omega)$, e escrevemos

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } L^p(\Omega),$$

se

$$\int_{\Omega} u_n v \, dx = \int_{\Omega} uv \, dx, \quad \forall v \in L^{p'}(\Omega).$$

Quando $p = \infty$, dizemos que a sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ converge fracamente - \star para $u \in L^\infty(\Omega)$, e escrevemos

$$u_n \xrightarrow{\star} u \text{ em } L^\infty(\Omega),$$

se

$$\int_{\Omega} u_n v \, dx = \int_{\Omega} uv \, dx, \quad \forall v \in L^1(\Omega).$$

Observe que quando Ω é limitado a convergência fraca - \star de $u_n \in L^\infty(\Omega)$ para algum $u \in L^\infty(\Omega)$ implica em convergência fraca de u_n para u em qualquer $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Teorema 2.35. (Limitação de sequências fracamente convergentes) Sejam

$1 \leq p < \infty$ e

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } L^p(\Omega) \text{ (} \overset{\star}{\rightharpoonup} \text{ em } L^\infty(\Omega) \text{ se } p = \infty \text{)}.$$

Então,

$$u_n \text{ é limitada em } L^p(\Omega)$$

e

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \liminf_{n \uparrow \infty} \|u_n\|_{L^p(\Omega)}.$$

Temos o seguinte teorema de compacidade:

Teorema 2.36. (Convergência Fraca em $L^p(\Omega)$) Sejam $1 < p < \infty$ e a sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ limitada em $L^p(\Omega)$. Então existem uma subsequência, ainda denotada por $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, e uma função $u \in L^p(\Omega)$ tais que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } L^p(\Omega).$$

Se $p = \infty$, o resultado ainda se mantém substituindo \rightharpoonup por $\overset{\star}{\rightharpoonup}$.

Note que o Teorema 2.36 não é válido para $p = 1$, desde que $L^1(\Omega)$ não seja o dual de $L^\infty(\Omega)$. Mas um bom resultado substituto existe sobre $L^1(\Omega)$ como subconjunto do espaço das medidas de Radon sobre Ω com massa finita. Tal espaço é denotado por $\mathcal{M}(\Omega)$, e sobre ele é utilizada a convergência fraca - \star . Denote por $C_c(\Omega)$ o espaço das funções contínuas sobre Ω com suporte compacto. Lembramos que cada $u \in L^1(\Omega)$ define um funcional sobre $C_c(\Omega)$ via

$$v \mapsto \int_{\Omega} uv \, dx, \quad v \in C_c(\Omega).$$

Se $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, então

$$\langle \mu, v \rangle = \int_{\Omega} v \, d\mu, \quad \forall v \in C_c(\Omega).$$

Recordamos que $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ se, e somente se,

$$|\langle \mu, v \rangle| \leq C \|v\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \forall v \in C_0(\Omega).$$

Defina

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} := \sup \{ |\langle \mu, v \rangle|; v \in C_c(\Omega), \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \}.$$

O espaço $(\mathcal{M}(\Omega); \|\cdot\|_{\mathcal{M}(\Omega)})$ é um espaço de Banach e é isometricamente isomorfo ao espaço dual de $(C_c(\Omega), \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)})$.

A sequência $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(\Omega)$ converge fracamente - \star para $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, e nesse caso escrevemos

$$\mu_n \overset{\star}{\rightharpoonup} \mu \text{ em } \mathcal{M}(\Omega),$$

se

$$\int_{\Omega} v \, d\mu_n = \int_{\Omega} v \, d\mu, \quad \forall v \in C_c(\Omega).$$

Teorema 2.37. Suponha que

$$\mu_n \xrightarrow{*} \mu \text{ em } \mathcal{M}(\Omega).$$

Então

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(K) \leq \mu(K),$$

para cada compacto $K \subset \Omega$, e

$$\mu(O) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(O),$$

para cada conjunto aberto $O \subset \Omega$.

Temos o seguinte teorema de compacidade para medidas:

Teorema 2.38. (Compacidade Fraca em $\mathcal{M}(\Omega)$) Seja $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $\mathcal{M}(\Omega)$. Então existem uma subsequência, ainda denotada por $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$, e uma medida $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ tais que

$$\mu_n \xrightarrow{*} \mu \text{ em } \mathcal{M}(\Omega).$$

Teorema 2.39. (Caracterização da Convergência Fraca em L^p) Dada $u_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, sejam $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $u \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Suponha que tal sequência é equi-limitada em $L^p(\Omega)$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) $u_n \rightharpoonup u$ em $L^p(\Omega)$;
- (ii) $u_n \xrightarrow{*} u$ em $\mathcal{M}(\Omega)$;
- (iii) $u_n \rightarrow u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$;
- (iv) Para qualquer conjunto de Borel $E \subset \Omega$, $|E| > 0$,

$$(u_n)_E := \frac{1}{|E|} \int_E u_n \, dx \rightarrow (u)_E := \frac{1}{|E|} \int_E u \, dx.$$

Observação 2.8. Se $p = \infty$, (i) é válida substituindo convergência fraca por convergência fraca - \star em $L^\infty(\Omega)$.

O próximo lema é simples, mas bastante útil numa série de situações.

Lema 2.40. (Produtos de sequências convergentes fraco-forte) Sejam $1 < p < \infty$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $L^p(\Omega)$ com $u_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $u \in L^p(\Omega)$ e $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência

em $L^{p'}(\Omega)$ com $v_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Suponha

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } L^p(\Omega),$$

$$v_n \rightarrow v \text{ em } L^{p'}(\Omega).$$

Então

$$u_n v_n \rightharpoonup uv \text{ em } L^1(\Omega).$$

2.2.4 Compacidade Fraca em L^1

Esta subseção está baseada nas notas de aula de Karlsen [31].

As demonstrações omitidas aqui podem ser vistas em [21], [22], [30], [32] e [56].

Definição 2.41. (Equi-integrabilidade) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{U} \subset L^1(\Omega)$ uma família de funções integráveis. Dizemos que a família \mathcal{U} é equi-integrável se satisfaz duas condições:

(i) Para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um conjunto mensurável A com $|A| < \infty$ tal que

$$\int_{\Omega \setminus A} |u| \, dx < \varepsilon,$$

para toda $u \in \mathcal{U}$. (Esta condição é satisfeita se $|\Omega| < \infty$, basta tomar $\Omega = A$.)

(ii) Para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada conjunto E mensurável com $|E| < \delta$ então

$$\int_E |u| \, dx < \varepsilon,$$

para toda $u \in \mathcal{U}$.

O próximo lema exhibe três formulações equivalentes sobre equi-integrabilidade.

Lema 2.42. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{U} \subset L^1(\Omega)$ uma família de funções integráveis.

(i) Então, \mathcal{U} é equi-integrável se, e somente se, para qualquer sequência de conjuntos mensuráveis E_n com $E_n \rightarrow \emptyset$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{u \in \mathcal{U}} \int_{E_n} |u| \, dx = 0.$$

(ii) Se $|\Omega| < \infty$ e \mathcal{U} é limitada em $L^1(\Omega)$, então \mathcal{U} é equi-integrável se, e somente se,

$$\mathcal{U} \subset \left\{ u \in L^1(\Omega); \int_{\Omega} \Psi(|u|) \, dx \leq 1 \right\},$$

para alguma função crescente $\Psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ satisfazendo

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\Psi(\xi)}{\xi} \rightarrow \infty.$$

(iii) Se $|\Omega| < \infty$ e \mathcal{U} é limitada em $L^1(\Omega)$, então \mathcal{U} é equi-integrável se, e somente se,

$$\limsup_{\xi \rightarrow \infty} \int_{u \in \mathcal{U}} \int_{\{|u| > \xi\}} |u| \, dx = 0$$

O item (ii) pode ser reformulado da seguinte forma:

Se $|\Omega| < \infty$ e \mathcal{U} é limitada em $L^1(\Omega)$, então \mathcal{U} é equi-integrável se, e somente se,

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \int_{\Omega} \Psi(|u|) \, dx < \infty,$$

para alguma função crescente $\Psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ satisfazendo

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\Psi(\xi)}{\xi} \rightarrow \infty.$$

O seguinte exemplo ilustra como falar de equi-integrabilidade no contexto das sequências. Sejam $|\Omega| < \infty$ e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $u_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, uma sequência de funções equi-limitadas (uniformemente limitada) em $L^1(\Omega)$, isto é,

$$\int_{\Omega} |u_n| \, dx \leq C, \quad \forall n.$$

Uma condição suficiente para que a sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seja equi-integrável é que exista uma constante C , independente de n , tal que

$$\int_{\Omega} |u_n|^{1+\theta} \, dx \leq C,$$

para algum $\theta > 0$.

O próximo teorema dá uma condição necessária e suficiente para a compacidade com respeito a convergência fraca em L^1 .

Teorema 2.43. (Dunford-Pettis) Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $u_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$. Suponha que

(i) a sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é equi-limitada em $L^1(\Omega)$, isto é,

$$\sup_n \|u_n\|_{L^1(\Omega)} < \infty,$$

(ii) a sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é equi-integrável.

Então existe uma subsequência de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge fracamente em $L^1(\Omega)$. Reciprocamente, se $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fracamente em $L^1(\Omega)$, então (i) e (ii) são válidas.

O teorema seguinte é análogo ao Teorema (2.39)

Teorema 2.44. (Caracterização da Convergência Fraca em L^1) Dada $u_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, sejam $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $L^1(\Omega)$ e $u \in L^1(\Omega)$. Suponha que tal sequência é equi-limitada em $L^1(\Omega)$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) $u_n \rightharpoonup u$ em $L^1(\Omega)$;
- (ii) $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $\mathcal{M}(\Omega)$;
- (iii) $u_n \rightarrow u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$;
- (iv) Para qualquer conjunto de Borel $E \subset \Omega$, $|E| > 0$,

$$(u_n)_E := \frac{1}{|E|} \int_E u_n \, dx \rightarrow (u)_E := \frac{1}{|E|} \int_E u \, dx.$$

O próximo lema é simples, mas bastante útil.

Lema 2.45. (Produtos de sequências convergentes fraco-forte) Sejam, $u_n, u, v_n, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funções mensuráveis.

- (i) Se $u_n \rightarrow u$ q.t.p. em Ω , $\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$, para todo n , e $v_n \rightharpoonup v$ em $L^1(\Omega)$, então

$$u_n v_n \rightharpoonup uv \text{ em } L^1(\Omega).$$

- (ii) Se $u_n \rightarrow u$ em $L^1(\Omega)$, $\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$, para todo n , e $v_n \rightharpoonup v$ em $L^1(\Omega)$, então

$$u_n v_n \rightharpoonup uv \text{ em } L^1(\Omega).$$

O próximo lema bastante útil em muitas aplicações.

Lema 2.46. (Vitali) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $L^1(\Omega)$, com $u_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Suponha que

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$ existe e é finito para quase todo ponto $x \in \Omega$,
- (ii) a sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é equi-integrável.

Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n(x) \, dx = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) \, dx.$$

Uma aplicação do Lema de Vitali 2.46 é dada pelo seguinte lema.

Lema 2.47. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $L^1(\Omega)$, com $u_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Suponha que

- (i) $u_n \rightarrow u$ q.t.p. em Ω ,
- (ii) a sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^p(\Omega)$ para algum $p > 1$.

Então, $u_n \rightarrow u$ em $L^r(\Omega)$ para todo $1 \leq r < p$.

Prova. Pelo Teorema 2.36

$$u \in L^p(\Omega) \text{ (e também } u_n \rightharpoonup u \text{ em } L^p(\Omega)).$$

Defina:

$$v_n = |u - u_n|^r, \quad r < p.$$

Então,

$$v_n \rightarrow 0 \text{ q.t.p. em } \Omega$$

e

$$v_n \text{ é limitada em } L^{\frac{p}{r}}(\Omega) \text{ e } \frac{p}{r} > 1.$$

Daí, pelo Lema 2.42 a sequência $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é equi-integrável. E pelo lema de Vitali

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int v_n \, dx = 0,$$

isto é, $u_n \rightarrow u$ em $L^r(\Omega)$. □

2.3 Espaços de Sobolev

Nesta seção definimos o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ e listamos algumas propriedades elementares desse espaço.

As demonstrações omitidas nesta seção podem ser vistas em [11] e [20].

2.3.1 Derivada Fraca

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto.

Denotamos por $C_c^\infty(\Omega)$ o espaço das funções $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que possuem derivadas parciais contínuas de todas as ordens e suporte compacto em Ω . Denominamos a função $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ de função teste.

Dado $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ um multi-índice, define-se a ordem de α por $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$. Por D^α denota-se o operador de derivação de ordem α definido por

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Em particular, define-se $D^0 u = u$, $D^1 u = \nabla u = \text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$, em que $D_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ com $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ representa a derivação parcial e u é uma função qualquer.

Suponha $u \in C^1(\Omega)$, uma função real continuamente diferenciável. Se $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ é uma função suave com suporte compacto em Ω , segue da fórmula de integração por partes

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v = \int_{\partial\Omega} uv \eta_i - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

que

$$\int_{\Omega} u \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \varphi \quad (2.1)$$

para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ e η_i é a derivada normal exterior. Observamos que não há termos de fronteira pois φ tem suporte compacto em Ω .

Mais geralmente, se k é um inteiro positivo, $u \in C^k(\Omega)$, dado $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ com $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = k$, então

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u \varphi$$

esta igualdade mantém-se desde que

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \varphi$$

e pode-se aplicar a fórmula (2.1) $|\alpha|$ vezes.

Definição 2.48. Sejam $u, v \in L_{loc}^1(\Omega)$, e α um multi-índice. Dizemos que v é a α -ésima derivada fraca de u , e escrevemos

$$D^\alpha u = v$$

se

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi$$

para toda função teste $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$.

Dizemos que u é fracamente diferenciável se todas as derivadas parciais fracas de primeira ordem de u existirem.

Lema 2.49. A α -ésima derivada fraca de u , se existir, é unicamente determinada a menos de conjuntos de medida nula.

2.3.2 Definição do Espaço de Sobolev

Fixe $1 \leq p \leq \infty$ e seja k um inteiro não negativo.

Definição 2.50. O Espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ é o espaço de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que para cada multi-índice α com $|\alpha| \leq k$, $D^{\alpha}u$ existe no sentido fraco e pertence a $L^p(\Omega)$.

$W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço normado com as seguintes normas:

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}u\|_{L^p(\Omega)}, & \text{se } 1 \leq p < \infty; \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}u\|_{L^{\infty}(\Omega)}, & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

Observação 2.9.

- (i) Se $p = 2$, escrevemos $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$, com $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$;
- (ii) Denotamos por $W_0^{k,p}(\Omega)$ o fecho de $C_c^{\infty}(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$;
- (iii) $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$;
- (iv) $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$;
- (v) $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \text{ para } i \in \{1, \dots, n\} \right\}$.

Em particular, o Espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

2.3.3 Propriedades Elementares

Teorema 2.51. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domínio limitado, $n \geq 1$, $k \geq 1$. Então

1. $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$;
2. $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo para $1 < p < \infty$.

Teorema 2.52. (Desigualdade de Poincaré) Sejam $1 \leq p < \infty$ e Ω um conjunto aberto e limitado. Então existe uma constante C tal que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Em particular, $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ é uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$, e é equivalente a norma $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

2.4 Teorema do Ponto Fixo de Schauder

A influência do Teorema do Ponto Fixo de Schauder na análise matemática moderna é enorme. Nesta seção, enunciamos e apresentamos a prova de tal teorema em sua versão encontrada nas principais bibliografias. Além disso, o enunciamos baseado em sua versão original de acordo com [27].

Teorema 2.53. Seja X um espaço vetorial topológico localmente convexo e seja $K \subset X$ um conjunto não-vazio, compacto e convexo. Então, dada qualquer função contínua $f : K \rightarrow K$, existe $x \in K$ tal que $f(x) = x$.

Prova.

Suponhamos que X é um espaço de Banach.

A idéia da prova é reduzir o problema para o caso de dimensão finita.

Dado $\varepsilon > 0$, a família de conjuntos abertos

$$\{B_\varepsilon(x); x \in K\}$$

é uma cobertura aberta de K .

Sendo K compacto, existe uma subcobertura finita, isto é, existem n pontos de K digamos p_1, p_2, \dots, p_n tais que as bolas $B_\varepsilon(p_i)$ cobrem K .

Sejam K_ε a envoltória convexa de p_1, p_2, \dots, p_n e V_ε o espaço $(n-1)$ -dimensional que contém esses pontos de modo que $K_\varepsilon \subset V_\varepsilon$.

Agora, considere a projeção

$$\pi_\varepsilon : X \longrightarrow V_\varepsilon$$

tal que

$$\|\pi_\varepsilon(x) - \pi_\varepsilon(y)\| \leq \|x - y\|.$$

Defina

$$f_\varepsilon : K_\varepsilon \longrightarrow K_\varepsilon$$

por

$$f_\varepsilon(x) = \pi_\varepsilon(f(x)).$$

Esta é uma função contínua definida num conjunto compacto e convexo K_ε de um espaço vetorial V_ε de dimensão finita. Então, pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, fixado x_ε

$$f_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon.$$

Como K é sequencialmente compacto, podemos encontrar uma sequência ε_k tal que $x_k = x_{\varepsilon_k}$ converge para algum ponto $\bar{x} \in K$.

Temos que $f(\bar{x}) = \bar{x}$ e $f_{\varepsilon_k}(x_k) = x_k \rightarrow \bar{x}$. De fato, basta ver que

$$f_{\varepsilon_k}(x_k) \rightarrow f(\bar{x}),$$

isto é,

$$\|f_{\varepsilon_k}(x_k) - f(\bar{x})\| \rightarrow 0.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \|f_{\varepsilon_k}(x_k) - f(\bar{x})\| &= \|\pi_{\varepsilon_k}(f(x_k)) - f(\bar{x})\| \\ &\leq \|\pi_{\varepsilon_k}(f(x_k)) - f(x_k)\| + \|f(x_k) - f(\bar{x})\| \\ &\leq \varepsilon_k + \|f(x_k) - f(\bar{x})\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

pois $\|\pi_\varepsilon(x) - x\| \leq \varepsilon$ dado $x \in K$ contido em alguma bola B_ε centrada sobre k_ε . \square

De acordo com [27] enunciamos a seguinte versão do Teorema do Ponto Fixo de Schauder:

Teorema 2.54. Seja $K \subset X$, um subconjunto de um espaço de Banach, convexo e fechado. Se $f : K \rightarrow K$ define um funcional contínuo e compacto, então f possui ponto fixo.

3 O Método de Sub e Supersolução no Sentido Fraco

Neste capítulo apresentamos métodos envolvendo sub e supersolução, para estudar a existência de solução, no sentido fraco, para três classes de problemas diferentes. No primeiro, consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, isto é, que possui derivada de todas as ordens, com solução $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. No segundo e terceiro, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado e suave, e $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory. No segundo caso consideramos a solução $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, já no terceiro $u \in L^1(\Omega)$.

3.1 Primeiro Caso

Nesta seção estudamos a existência de solução em $W_0^{1,2}(\Omega)$ quando f é uma função suave, baseado em [20].

Suponha Ω um domínio limitado de \mathbb{R}^n , e considere o problema de Dirichlet homogêneo:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

em que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é suave, com

$$|f'| \leq c \quad (3.2)$$

para alguma constante c .

Definição 3.1.

(i) Uma função $\underline{u} \in C^2(\Omega)$ é dita subsolução de (3.1) se:

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} \leq f(\underline{u}), & \text{em } \Omega \\ \underline{u} \leq 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

(ii) Analogamente, uma função $\bar{u} \in C^2(\Omega)$ é dita supersolução de (3.1) se:

$$\begin{cases} -\Delta \bar{u} \geq f(\bar{u}), & \text{em } \Omega \\ \bar{u} \geq 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Definição 3.2. Neste caso, vamos considerar a medida de Lebesgue dos conjuntos borelianos. Assim, utilizamos $\int_{\Omega} f \, dx$ ao invés de $\int_{\Omega} f \, d\mu$.

(i) Dizemos que $\underline{u} \in W^{1,2}(\Omega)$ é uma subsolução fraca (ou no sentido fraco) de (3.1) se:

$$\int_{\Omega} D\underline{u} \cdot Dv \, dx \leq \int_{\Omega} f(\underline{u})v \, dx \quad (3.3)$$

para cada $v \in C_0^\infty(\Omega)$, $v \geq 0$ q.t.p.

(ii) Analogamente, $\bar{u} \in W^{1,2}(\Omega)$ é uma supersolução fraca (ou no sentido fraco) de (3.1) se:

$$\int_{\Omega} D\bar{u} \cdot Dv \, dx \geq \int_{\Omega} f(\bar{u})v \, dx \quad (3.4)$$

para cada $v \in C_0^\infty(\Omega)$, $v \geq 0$ q.t.p.

(iii) Finalmente, $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ é solução fraca de (3.1) se:

$$\int_{\Omega} Du \cdot Dv \, dx = \int_{\Omega} f(u)v \, dx$$

para cada $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

O método de sub e supersolução nos diz que, se existe uma subsolução \underline{u} e uma supersolução \bar{u} para o problema (3.1) e, além disso, $\underline{u} \leq \bar{u}$, então existe de fato uma solução satisfazendo:

$$\underline{u} \leq u \leq \bar{u}.$$

O resultado seguinte nos garante a existência de uma solução fraca entre uma sub e uma supersolução fraca do problema (3.1).

Teorema 3.3. Suponha que exista uma subsolução fraca \underline{u} e uma supersolução fraca \bar{u} de (3.1), satisfazendo:

$$\underline{u} \leq 0 \text{ e } \bar{u} \geq 0 \text{ sobre } \partial\Omega \text{ no sentido do traço, } \underline{u} \leq \bar{u} \text{ q.t.p. em } \Omega. \quad (3.5)$$

Então existe u uma solução fraca de (3.1), tal que:

$$\underline{u} \leq u \leq \bar{u} \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Prova.

Dividiremos a demonstração em cinco passos.

Passo 1.

Fixe $\lambda > 0$ suficientemente grande tal que

$$z \mapsto f(z) + \lambda z \tag{3.6}$$

é não-decrescente. Isto é possível já que $|f'| \leq c$.

Agora, escreva $u_0 = \underline{u}$, e então dada u_k com $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ indutivamente defina $u_{k+1} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ como a única solução fraca do problema:

$$\begin{cases} -\Delta u_{k+1} + \lambda u_{k+1} &= f(u_k) + \lambda u_k, \text{ em } \Omega, \\ u_{k+1} &= 0, \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.7}$$

(Ver Teorema C.1)

Passo 2.• **Afirmação:**

$$\underline{u} = u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_k \leq \dots \quad \text{q.t.p. em } \Omega. \tag{3.8}$$

Fazendo $k = 0$ em (3.7) temos que:

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + \lambda u_1 &= f(u_0) + \lambda u_0, \text{ em } \Omega, \\ u_1 &= 0, \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Daí,

$$\int_{\Omega} (Du_1 \cdot Dv + \lambda u_1 v) dx = \int_{\Omega} (f(u_0) + \lambda(u_0))v dx \tag{3.9}$$

para cada $v \in C_0^{\infty}(\Omega)$.

Subtraindo (3.9) de (3.4) temos que:

$$\int_{\Omega} (Du_0 \cdot Dv) dx - \int_{\Omega} (Du_1 \cdot Dv + \lambda u_1 v) dx \leq \int_{\Omega} f(u_0)v dx - \int_{\Omega} (f(u_0) + \lambda(u_0))v dx.$$

Então,

$$\int_{\Omega} (D(u_0 - u_1) \cdot Dv + \lambda(u_0 - u_1)v) dx \leq 0.$$

Defina $v := (u_0 - u_1)^+ \in C_0^{\infty}(\Omega)$, $v \geq 0$ q.t.p.

Assim,

$$\int_{\Omega} D(u_0 - u_1) \cdot D(u_0 - u_1)^+ + \lambda(u_0 - u_1)(u_0 - u_1)^+ dx \leq 0. \quad (3.10)$$

Mas, (Ver [26, Lema 7.6])

$$D(u_0 - u_1)^+ = \begin{cases} D(u_0 - u_1) & \text{q.t.p. sobre } \{u_0 \geq u_1\}, \\ 0 & \text{q.t.p. sobre } \{u_0 \leq u_1\}. \end{cases}$$

Consequentemente,

$$\int_{\{u_0 \geq u_1\}} |D(u_0 - u_1)^+|^2 + \lambda((u_0 - u_1)^+)^2 dx \leq 0.$$

Dessa forma, devemos ter $(u_0 - u_1)^+ = 0$ então $u_0 \leq u_1$ q.t.p. em Ω .

Agora, suponha que

$$u_{k-1} \leq u_k \text{ q.t.p. em } \Omega, \text{ para algum } k \in \mathbb{N}. \quad (3.11)$$

De (3.7) encontramos:

$$\int_{\Omega} (Du_{k+1} \cdot Dv + \lambda u_{k+1}v) dx = \int_{\Omega} (f(u_k) + \lambda(u_k))v dx \quad (3.12)$$

e

$$\int_{\Omega} (Du_k \cdot Dv + \lambda u_k v) dx = \int_{\Omega} (f(u_{k-1}) + \lambda(u_{k-1}))v dx$$

para cada $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Defina $v := (u_k - u_{k+1})^+$, subtraindo as desigualdades acima, segue que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (Du_k \cdot Dv + \lambda u_k v) dx - \int_{\Omega} (Du_{k+1} \cdot Dv + \lambda u_{k+1}v) dx \\ &= \int_{\Omega} (f(u_{k-1}) + \lambda(u_{k-1}))v dx - \int_{\Omega} (f(u_k) + \lambda(u_k))v dx. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} D(u_k - u_{k+1}) \cdot D(u_k - u_{k+1})^+ + \lambda(u_k - u_{k+1})(u_k - u_{k+1})^+ dx \\ &= \int_{\Omega} [(f(u_{k-1}) + \lambda u_{k-1}) - (f(u_k) + \lambda u_k)](u_k - u_{k+1})^+ dx. \end{aligned}$$

Mas,

$$D(u_k - u_{k+1})^+ = \begin{cases} D(u_k - u_{k+1}) & \text{q.t.p. sobre } \{u_k \geq u_{k+1}\}, \\ 0 & \text{q.t.p. sobre } \{u_k \leq u_{k+1}\}. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \int_{\{u_k \geq u_{k+1}\}} |D(u_k - u_{k+1})^+|^2 + \lambda((u_k - u_{k+1})^+)^2 dx \\ &= \int_{\Omega} [(f(u_{k-1}) + \lambda u_{k-1}) - (f(u_k) + \lambda u_k)](u_k - u_{k+1})^+ dx \leq 0 \end{aligned}$$

por (3.11) e (3.6).

Portanto, $u_k \leq u_{k+1}$ q.t.p. em Ω .

Passo 3.

Vamos mostrar que

$$u_k \leq \bar{u} \text{ q.t.p. em } \Omega, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (3.13)$$

Temos que (3.13) é válida para $k = 0$, pois $\underline{u} = u_0 \leq \bar{u}$, pela hipótese (3.5).

Suponha que

$$u_k \leq \bar{u} \text{ q.t.p. em } \Omega, \text{ para algum } k \in \mathbb{N}. \quad (3.14)$$

Então subtraindo (3.4) de (3.12) temos

$$\int_{\Omega} (Du_{k+1} \cdot Dv + \lambda u_{k+1}v) dx - \int_{\Omega} D\bar{u} \cdot Dv dx \leq \int_{\Omega} (f(u_k) + \lambda(u_k))v dx - \int_{\Omega} f(\bar{u})v dx.$$

Logo,

$$\int_{\Omega} (D(u_{k+1} - \bar{u}) \cdot Dv + \lambda(u_{k+1} - \bar{u})v) dx \leq \int_{\Omega} [(f(u_k) + \lambda u_k) - (f(\bar{u}) + \lambda \bar{u})]v dx.$$

Defina $v := (u_{k+1} - \bar{u})^+$, segue que

$$\begin{aligned} & \int_{\{u_{k+1} \geq \bar{u}\}} (|D(u_{k+1} - \bar{u})^+|^2 + \lambda((u_{k+1} - \bar{u})^+)^2) dx \\ & \leq \int_{\Omega} [(f(u_k) + \lambda u_k) - (f(\bar{u}) + \lambda \bar{u})](u_{k+1} - \bar{u})^+ dx \leq 0 \end{aligned}$$

por (3.14) e (3.6).

Assim, $u_{k+1} \leq \bar{u}$ q.t.p. em Ω .

Passo 4.

De acordo com (3.8) e (3.13), temos que:

$$\underline{u} \leq \dots \leq u_k \leq u_{k+1} \leq \dots \leq \bar{u} \text{ q.t.p. em } \Omega. \quad (3.15)$$

Defina,

$$u(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x)$$

que existe q.t.p. para x .

• **Afirmação:**

$$u_k \rightarrow u \text{ em } L^2(\Omega). \quad (3.16)$$

De fato, como

$$\underline{u} \leq \dots \leq u_k \leq u_{k+1} \leq \dots \leq \bar{u}, \quad \text{com } \bar{u} \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

temos que

$$|u_k(x)| \leq \max\{\bar{u}, -\underline{u}\} = g \in W_0^{1,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega).$$

Então,

$$|u_k(x)|^2 \leq g^2, \quad g \in L^2(\Omega).$$

Ou seja, $g^2 \in L^1(\Omega)$. Além disso, por definição

$$u_k(x) \rightarrow u(x) \text{ q.t.p.}$$

Daí, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_{\Omega} u^2(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_k^2(x) dx.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (u_k - u) dx \right| &\leq \int_{\Omega} |u_k - u| dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |u_k - u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Então,

$$\int_{\Omega} u(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_k(x) dx.$$

Por outro lado, sabemos que $|f'(u_k)| \leq c$. Isto nos diz que,

$$|f(u_k)| \leq cu_k + a \Rightarrow |f(u_k)|^2 \leq c^2 u_k^2 + 2cau_k + a^2, \quad (3.17)$$

em que $a, c \in \mathbb{R}$. Daí,

$$\begin{aligned} \|f(u_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} |f(u_k)|^2 dx \\ &\leq c^2 \int_{\Omega} |u_k|^2 dx + \int_{\Omega} a^2 dx + 2ac \int_{\Omega} u_k dx \\ &\leq c_1 \|u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_2 + c_3 \|u_k\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Esta última desigualdade segue de

$$\int_{\Omega} u_k dx = \int_{\Omega} u_k \cdot 1 dx \leq \left(\int_{\Omega} |u_k|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} 1^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \alpha \|u_k\|_{L^2(\Omega)}.$$

Já que Ω é limitado, e c_1, c_2, c_3, α são constantes.

Então,

$$\begin{aligned} \|f(u_k)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \left(c_1 \|u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_2 + c_3 \|u_k\|_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(c_1 \|u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_2 + \frac{1}{2} c_3^2 + \frac{1}{2} \|u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c_4 \|u_k\|_{L^2(\Omega)} + c_5 \\ &\leq c' (\|u_k\|_{L^2(\Omega)} + 1), \end{aligned}$$

em que $c' = \max\{c_4, c_5\}$ e $c_4, c_5 \in \mathbb{R}$. Na penúltima desigualdade usamos o fato de que $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$.

De (3.7) temos que,

$$-\Delta u_{k+1} + \lambda u_{k+1} = f(u_k) + \lambda u_k \quad (\text{no sentido fraco}).$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} \nabla u_{k+1} \nabla u_{k+1} dx + \int_{\Omega} \lambda (u_{k+1})^2 dx = \int_{\Omega} (u_{k+1} f(u_k) + \lambda u_k u_{k+1}) dx.$$

Então,

$$\begin{aligned} \|u_{k+1}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 &\leq \int_{\Omega} (|\nabla u_{k+1}|^2 + \lambda u_{k+1}^2) dx \\ &= \int_{\Omega} (u_{k+1} f(u_k) + \lambda u_k u_{k+1}) dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} f^2(u_k) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} u_{k+1}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \lambda \left(\int_{\Omega} u_k^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} u_{k+1}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f(u_k)\|_{L^2(\Omega)} \|u_{k+1}\|_{L^2(\Omega)} + \lambda \|u_k\|_{L^2(\Omega)} \|u_{k+1}\|_{L^2(\Omega)} \leq K. \end{aligned}$$

Logo, $\sup \|u_k\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 < \infty$.

Portanto, existe uma subsequência $(u_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ que converge fracamente em $W_0^{1,2}(\Omega)$ para $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. (Ver [8, Teorema 5.25]).

Passo 5.

Finalmente falta verificar que u é uma solução fraca de (3.1). Para isso, fixe $v \in C_0^\infty(\Omega)$. De (3.7) temos que

$$\int_{\Omega} Du_{k+1} \cdot Dv + \lambda u_{k+1} v \, dx = \int_{\Omega} (f(u_k) + \lambda u_k) v \, dx.$$

Observação 3.1. Sabemos que $u_k \rightarrow u$ q.t.p. em Ω , então

$$f(u_k) \rightarrow f(u) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Além disso, $|f(u_k(x))|^2 \leq h^2$, $h \in L^2(\Omega)$, por (3.17). Assim, $h^2 \in L^1(\Omega)$ e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_{\Omega} f(u(x)) \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(u_k(x)) \, dx.$$

Dessa forma, podemos fazer $k \rightarrow \infty$ no Passo 5.

Fazendo $k \rightarrow \infty$, segue que

$$\int_{\Omega} Du \cdot Dv + \lambda uv \, dx = \int_{\Omega} (f(u) + \lambda u) v \, dx.$$

Eliminando os termos com λ concluímos que

$$\int_{\Omega} Du \cdot Dv \, dx = \int_{\Omega} f(u) v \, dx.$$

□

3.2 Segundo Caso

Nesta seção estudamos a existência de solução em $W_0^{1,2}(\Omega)$ quando f é uma função de Carathéodory, baseado em [55].

Definição 3.4. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ um conjunto mensurável não-vazio, e $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $m \geq 1$. Dizemos que f é uma função de Carathéodory se satisfaz:

- (i) $x \mapsto f(x, s)$ é mensurável em Ω para todo $s \in \mathbb{R}^m$;
- (ii) $s \mapsto f(x, s)$ é contínua em \mathbb{R}^m , q.t.p. em Ω .

Definição 3.5. Sejam V um espaço de Banach reflexivo com norma $\|\cdot\|$, e $M \subset V$ um subconjunto fracamente fechado de V . Dizemos que $E : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é:

- (i) coercivo se $E(u) \rightarrow \infty$ quando $\|u\| \rightarrow \infty, u \in M$;
- (ii) fracamente semicontínuo inferiormente se para todo $u \in M$, qualquer sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em M tal que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em V então:

$$E(u) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} E(u_n).$$

Teorema 3.6. Sejam V um espaço de Banach reflexivo com norma $\|\cdot\|$, e $M \subset V$ um subconjunto fracamente fechado de V . Suponha $E : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ coercivo e fracamente semicontínuo inferiormente em M com respeito a V . Então E é limitado inferiormente, e atinge seu ínfimo em M .

Prova. Ver [55, Teorema 1.2]. □

Considere o problema de Dirichlet homogêneo:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(\cdot, u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.18)$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, é um domínio limitado e suave, $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory.

Definição 3.7.

- (i) Uma função $\underline{u} \in W^{1,2}(\Omega)$ é dita uma subsolução fraca do problema (3.18) se $u \leq 0$ sobre $\partial\Omega$ e

$$\int_{\Omega} \nabla \underline{u} \cdot \nabla v \, dx \leq \int_{\Omega} f(\cdot, \underline{u}) v \, dx$$

para toda $v \in C_0^\infty(\Omega)$, $v \geq 0$.

- (ii) Analogamente, uma função $\bar{u} \in W^{1,2}(\Omega)$ é dita uma supersolução fraca do problema (3.18) se $u \geq 0$ sobre $\partial\Omega$ e

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{u} \cdot \nabla v \, dx \geq \int_{\Omega} f(\cdot, \bar{u}) v \, dx$$

para toda $v \in C_0^\infty(\Omega)$, $v \geq 0$.

(iii) E por fim, dizemos que $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ é solução fraca do problema (3.18) se:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f(\cdot, u)v \, dx$$

para toda $v \in C_0^\infty(\Omega)$, $v \geq 0$.

Teorema 3.8. Suponha $\underline{u}, \bar{u} \in W^{1,2}(\Omega)$ sub e supersolução, respectivamente, do problema (3.18). Sejam $\underline{c}, \bar{c} \in \mathbb{R}$ tais que

$$-\infty \leq \underline{c} \leq \underline{u} \leq \bar{u} \leq \bar{c} \leq \infty, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Então existe $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ solução fraca de (3.18), satisfazendo a condição

$$\underline{u} \leq u \leq \bar{u} \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Prova.

Denote por

$$F(x, u) = \int_0^u f(x, v) \, dv$$

a primitiva de f . Note que a equação (3.18) tem o seguinte funcional associado

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\Omega} F(x, u) \, dx.$$

Como F é a primitiva de f e esta é uma função de Carathéodory, segue que F também é uma função de Carathéodory. Dessa maneira, não temos informações suficientes para garantir que o funcional E seja limitado ou até mesmo diferenciável em $V := W_0^{1,2}(\Omega)$. Para garantir a coercividade de E vamos restringi-lo ao conjunto

$$M = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega) : \underline{u} \leq u \leq \bar{u} \text{ q.t.p.}\}.$$

Como $\underline{u}, \bar{u} \in L^\infty(\Omega)$, temos que se $u \in M$ então $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$, logo $u \in L^\infty(\Omega)$. Portanto, $M \subset L^\infty(\Omega)$. Além disso, como F é função de Carathéodory, ou seja, contínua na segunda coordenada, e o intervalo $[\underline{c}, \bar{c}]$ é compacto

$$\{F(x, u(x)); x \in \Omega\} \subset \{F(x, z); \underline{c} \leq z \leq \bar{c}, x \in \Omega\},$$

e daí

$$|F(x, u(x))| \leq c(x) \quad \forall u \in M \text{ e para quase todo } x \in \Omega, \quad (3.19)$$

em que $c(x)$ é uma função mensurável.

Agora, vamos verificar as hipóteses do Teorema 3.6. Temos que,

1^a) $V := W_0^{1,2}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo (Ver [11]).

2^a) O conjunto M é fechado e convexo.

De fato, seja $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ uma sequência em M tal que $u_m \rightarrow u$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$, temos que $u_m \rightarrow u$ q.t.p. e $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, pois este é Banach. Como $u_m \in M$ então

$$\underline{u}(x) \leq u_m(x) \leq \bar{u}(x).$$

Passando o limite quando $m \rightarrow \infty$, encontramos

$$\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \bar{u}(x).$$

Portanto, $u \in M$ de onde segue que M é fechado.

Agora, dadas $u, \tilde{u} \in M$ então

$$\underline{u} \leq u \leq \bar{u},$$

$$\underline{u} \leq \tilde{u} \leq \bar{u}.$$

Dado $t \in [0, 1]$, segue que

$$(1-t)\underline{u} \leq (1-t)u \leq (1-t)\bar{u}$$

e

$$t\underline{u} \leq t\tilde{u} \leq t\bar{u}.$$

Então,

$$\underline{u} = (1-t)\underline{u} + t\underline{u} \leq (1-t)u + t\tilde{u} \leq (1-t)\bar{u} + t\bar{u} = \bar{u}.$$

Portanto, M é convexo.

Como M é fechado e convexo então M é fracamente fechado (Ver [11, Teorema 3.7]).

3^a) Da desigualdade de Poincaré temos que $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ é uma norma em $W_0^{1,2}(\Omega)$, que é equivalente a $\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$. Por (3.19), temos

$$\begin{aligned} E(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\Omega} F(x, u) \, dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - c \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 - c. \end{aligned}$$

Daí, se $\|u\| \rightarrow \infty$ então $E(u) \rightarrow \infty$, isto é, o funcional E é coercivo em M .

4^a) Finalmente, falta verificar que E é fracamente semicontínuo inferiormente em M . Isto é, dadas $u_m, u \in M$ tais que $u_m \rightharpoonup u$ (fracamente) em $W_0^{1,2}(\Omega)$ então

$$E(u) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} E(u_m).$$

De fato, como $u_m \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$ então ([11, Proposição 3.5])

$$\|u\| \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|u_m\|.$$

Logo, para ver que E é fracamente semicontínuo inferiormente em M falta mostrar que

$$\int_{\Omega} F(x, u_m) dx \rightarrow \int_{\Omega} F(x, u) dx.$$

Mas (passando a uma subsequência se necessário), podemos assumir que

$$u_m \rightarrow u$$

pontualmente em quase toda parte. Como F é contínua na segunda coordenada

$$F(x, u_m) \rightarrow F(x, u)$$

pontualmente em quase toda parte. E ainda,

$$|F(x, u_m(x))| \leq c(x)$$

uniformemente. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_{\Omega} F(x, u) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F(x, u_m) dx.$$

Como todas as condições do Teorema 3.6 são satisfeitas, podemos garantir a existência de um minimizador relativo $u \in M$.

Para ver que u é solução fraca de (3.18), para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$ seja

$$v_\varepsilon = \min\{\bar{u}, \max\{\underline{u}, u + \varepsilon\}\} = u + \varepsilon\varphi - \varphi^\varepsilon + \varphi_\varepsilon \in M$$

com

$$\varphi^\varepsilon = \max\{0, u + \varepsilon\varphi - \bar{u}\} \geq 0,$$

$$\varphi_\varepsilon = -\min\{0, u + \varepsilon\varphi - \underline{u}\} \geq 0.$$

Observe que $\varphi^\varepsilon, \varphi_\varepsilon \in W_0^{1,2} \cap L^\infty(\Omega)$.

Como M é convexo, então $(1-t)u + tv_\varepsilon \in M$. Além disso, como u minimiza E em

M , temos que

$$E(u + t(v_\varepsilon - u)) - E(u) = E((1-t)u + tv_\varepsilon) - E(u) \geq 0.$$

Daí, E é diferenciável na direção de $v_\varepsilon - u$, e tomando $t > 0$

$$\begin{aligned} DE(u) \cdot (v_\varepsilon - u) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{E(u + t(v_\varepsilon - u)) - E(u)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{E((1-t)u + tv_\varepsilon) - E(u)}{t} \geq 0, \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle (v_\varepsilon - u), DE(u) \rangle &= \langle (v_\varepsilon - u), DE(u) - DE(u) + DE(u) \rangle \\ &= \varepsilon \langle \varphi, DE(u) \rangle - \langle \varphi^\varepsilon, DE(u) \rangle + \langle \varphi_\varepsilon, DE(u) \rangle, \end{aligned}$$

de modo que,

$$\langle \varphi, DE(u) \rangle \geq \frac{1}{\varepsilon} [\langle \varphi^\varepsilon, DE(u) \rangle - \langle \varphi_\varepsilon, DE(u) \rangle].$$

Agora, já que \bar{u} é uma supersolução para (3.18), segue que

$$\begin{aligned} \langle \varphi^\varepsilon, DE(u) \rangle &= \langle \varphi^\varepsilon, DE(\bar{u}) + DE(u) - DE(\bar{u}) \rangle \\ &= \langle \varphi^\varepsilon, DE(\bar{u}) \rangle + \langle \varphi^\varepsilon, DE(u) - DE(\bar{u}) \rangle \\ &\geq \langle \varphi^\varepsilon, DE(u) - DE(\bar{u}) \rangle \\ &= \int_{\Omega} [\nabla(u - \bar{u}) \nabla(\varphi^\varepsilon) - (f(x, u) - f(x, \bar{u})) \varphi^\varepsilon] dx \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} [\nabla(u - \bar{u}) \nabla(u + \varepsilon\varphi - \bar{u})] dx - \\ &\quad \int_{\Omega_\varepsilon} [(f(x, u) - f(x, \bar{u})) (u + \varepsilon\varphi - \bar{u})] dx \\ &\geq \int_{\Omega_\varepsilon} [\nabla(u - \bar{u}) \nabla(\varepsilon\varphi) + \nabla^2(u - \bar{u})] dx - \\ &\quad \int_{\Omega_\varepsilon} [|f(x, u) - f(x, \bar{u})| |\varepsilon\varphi| - |f(x, u) - f(x, \bar{u})| |u - \bar{u}|] dx \\ &\geq \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla(u - \bar{u}) \nabla\varphi dx - \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} |f(x, u) - f(x, \bar{u})| |\varphi| dx, \end{aligned}$$

em que $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega; u(x) + \varepsilon\varphi(x) \geq \bar{u}(x) > u(x)\}$.

Note que $|\Omega_\varepsilon| \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Então, pela continuidade absoluta da integral de Lebesgue, obtemos que

$$\langle \varphi^\varepsilon, DE(u) \rangle \geq o(\varepsilon),$$

em que $\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Analogamente, obtemos

$$\langle \varphi_\varepsilon, DE(u) \rangle \leq o(\varepsilon).$$

Daí,

$$\langle \varphi, DE(u) \rangle \geq 0$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Como φ é arbitrária, invertendo o seu sinal temos que

$$\langle -\varphi, DE(u) \rangle = -\langle \varphi, DE(u) \rangle \leq 0.$$

Então,

$$\langle \varphi, DE(u) \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Como $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W_0^{1,2}(\Omega)$, finalmente vemos que

$$DE(u) = 0,$$

como queríamos. □

Observação 3.2. O resultado anterior pode ser demonstrado para

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(\cdot, u), \text{ em } \Omega, \\ u &= u_0, \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, é um domínio limitado e suave, $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory e $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Exemplo 3.1.

$$\begin{cases} -\Delta u &= k(x)u - u|u|^{p-2}, \text{ em } \Omega \\ u &= u_0, \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.20)$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, é um domínio limitado e regular, $p = \frac{2n}{n-2}$, e k é uma função contínua tal que

$$1 \leq k(x) \leq K < \infty$$

uniformemente em Ω . Suponha $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ satisfazendo $u_0 \geq 1$ sobre $\partial\Omega$.

Então, $\underline{u} = 1$ é uma subsolução. De fato, temos que

$$-\Delta \underline{u} = 0.$$

Logo,

$$\int_{\Omega} 0 \cdot Dv \, dx - \int_{\Omega} (k(x) - 1)v \, dx \leq 0$$

já que $k(x) \geq 1$ e $v \geq 0$ q.t.p.

Analogamente, temos que $\bar{u} = c$, c constante suficientemente grande, com $c > 1$ é uma supersolução. Temos que,

$$\int_{\Omega} 0 \cdot Dv \, dx - \int_{\Omega} (k(x) \cdot c - c^{p-1})v \, dx \geq 0$$

daí,

$$-c \int_{\Omega} (k(x) - c^{p-2})v \, dx \geq 0$$

já que $k(x) \leq c^{p-2}$, pois $k(x) \leq K$ e $v \geq 0$ q.t.p.

Consequentemente, pelo teorema (3.8) segue que o problema (3.20) admite uma solução fraca $u \geq 1$.

3.3 Terceiro Caso

Nesta seção mostraremos os resultados provados por Montenegro e Ponce em [44]. Neste trabalho, eles estendem o método de sub e supersolução a fim de estabelecer a existência de soluções L^1 de (3.23) no sentido da Definição 3.9 que veremos abaixo. É seguida a estratégia de [3], [15] e [16] baseada no Teorema do Ponto Fixo de Schauder, mas alguns detalhes foram modificados substancialmente. Mostraremos e provaremos alguns resultados utilizados na demonstração do Teorema 3.16, resultados de existência, compacidade e comparação relacionados com a equação linear $-\Delta w = h$ em que $h\rho_0 \in L^1(\Omega)$, além de exibir a prova do Teorema 3.16.

Ao longo desta seção vamos supor:

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ domínio suave e limitado;} \tag{3.21}$$

$$f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ função de Carathéodory.} \tag{3.22}$$

3.3.1 Definições Preliminares

Considere o problema de Dirichlet homogêneo

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.23)$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio suave e limitado, $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory e Δu é o Laplaciano de u .

A seguir explicitamos a noção de definição que vamos utilizar.

Definição 3.9. Dizemos que u é uma solução $L^1(\Omega)$ de (3.23) se satisfaz:

(i) $u \in L^1(\Omega)$;

(ii) $f(\cdot, u)\rho_0 \in L^1(\Omega)$;

(iii)

$$-\int_{\Omega} u \Delta \zeta \, dx = \int_{\Omega} f(x, u) \zeta \, dx, \quad \forall \zeta \in C_0^2(\overline{\Omega}), \quad (3.24)$$

em que

$$\begin{aligned} \rho_0(x) &= d(x, \partial\Omega), \quad \forall x \in \Omega, \quad \text{em que } d(x, \partial\Omega) = \inf\{d(x, y); y \in \partial\Omega\}; \\ C_0^2(\overline{\Omega}) &= \{\zeta \in C^2(\overline{\Omega}); \zeta = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}. \end{aligned}$$

Observação 3.3. Note que (iii) está bem definida de acordo com (i) e (ii) da Definição 3.9. Com efeito, como $\zeta \in C_0^2(\overline{\Omega})$ então $\nabla \zeta$ e $\Delta \zeta$ estão bem definidos e são limitados até a fronteira. Além disso, por (i) temos que $u \in L^1(\Omega)$. Daí,

$$\left| \int_{\Omega} u \Delta \zeta \, dx \right| \leq \int_{\Omega} |u \Delta \zeta| \, dx \leq \alpha \int_{\Omega} |u| \, dx < \infty,$$

com $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Portanto, o lado esquerdo da equação (3.24) está bem definido.

Por outro lado, pela Observação D.1, temos que $\left\| \frac{\zeta}{\rho_0} \right\|_{L^\infty(\Omega)}$ é limitada. Como $f(\cdot, u)\rho_0 \in L^1(\Omega)$, segue que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f(x, u) \zeta \, dx \right| &\leq \int_{\Omega} |f(x, u) \zeta| \, dx \\ &= \int_{\Omega} \left| f(x, u) \rho_0 \frac{\zeta}{\rho_0} \right| \, dx \\ &\leq \left\| \frac{\zeta}{\rho_0} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |f(x, u)| \rho_0 \, dx < \infty. \end{aligned}$$

Portanto, o lado direito da equação (3.24) está bem definido.

Dizemos que \underline{u} é uma subsolução de (3.23) se satisfaz:

- (i) $\underline{u} \in L^1(\Omega)$;
- (ii) $f(\cdot, \underline{u})\rho_0 \in L^1(\Omega)$;
- (iii) $-\int_{\Omega} \underline{u}\Delta\zeta \, dx \leq \int_{\Omega} f(x, \underline{u})\zeta \, dx, \quad \forall \zeta \in C_0^2(\overline{\Omega})$.

Analogamente, \bar{u} é uma supersolução de (3.23) se satisfaz:

- (i) $\bar{u} \in L^1(\Omega)$;
- (ii) $f(\cdot, \bar{u})\rho_0 \in L^1(\Omega)$;
- (iii) $-\int_{\Omega} \bar{u}\Delta\zeta \, dx \geq \int_{\Omega} f(x, \bar{u})\zeta \, dx, \quad \forall \zeta \in C_0^2(\overline{\Omega})$.

3.3.2 Limitação e Equi-Integrabilidade em $L^1_{\rho_0}$

Começamos esta subseção com o seguinte resultado sobre não equi-integrabilidade. Um lema de concentração.

Lema 3.10. Sejam $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$ e $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de subconjuntos mensuráveis de Ω tal que

$$|E_n| \rightarrow 0 \text{ e } \int_{E_n} |w_n| \, dx \geq 1, \quad \forall n \geq 1. \quad (3.25)$$

Então, existem uma subsequência $(w_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ e uma sequência disjunta de conjuntos mensuráveis $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tais que

$$F_k \subset E_{n_k} \text{ e } \int_{F_k} |w_{n_k}| \, dx \geq \frac{1}{2}, \quad \forall k \geq 1. \quad (3.26)$$

Prova.

Vamos construir por indução uma sequência crescente de inteiros $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e de conjuntos mensuráveis $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ como segue. Utilizaremos o fato de que uma família finita de funções L^1 são equi-integráveis.

Faça $n_1 := 1$ e $A_1 := E_{n_1}$. Tome $k \geq 2$.

- Se $k = 2$ a condição é vazia;

- Se $k = 3, j = 1$. Como $\{w_{n_1}\}$ é equi-integrável, escolha $n_2 > n_1$ tal que

$$\int_{A_2} |w_{n_1}| dx \leq \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}.$$

em que $A_2 \subset E_{n_2}$.

- Se $k = 4, j \in \{1, 2\}$. Como $\{w_{n_1}, w_{n_2}\}$ é equi-integrável, escolha $n_3 > n_2$ tal que

$$\int_{A_3} |w_{n_i}| dx \leq \frac{1}{2^3}, \quad \forall i \in \{1, 2\}.$$

em que $A_3 \subset E_{n_3}$. Daí,

$$\int_{A_2 \cup A_3} |w_{n_1}| dx \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3}$$

e

$$\int_{A_3} |w_{n_2}| dx \leq \frac{1}{2^3} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3}.$$

- Se $k = 5, j \in \{1, 2, 3\}$. Como $\{w_{n_1}, w_{n_2}, w_{n_3}\}$ é equi-integrável, escolha $n_4 > n_3$ tal que

$$\int_{A_4} |w_{n_i}| dx \leq \frac{1}{2^4}, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

em que $A_4 \subset E_{n_4}$. Daí,

$$\int_{A_2 \cup A_3 \cup A_4} |w_{n_1}| dx \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^4},$$

$$\int_{A_3 \cup A_4} |w_{n_2}| dx \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^4}$$

e

$$\int_{A_4} |w_{n_3}| dx \leq \frac{1}{2^4} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2^4}.$$

Continuando com o processo de indução encontramos inteiros $n_1 < \dots < n_{k-1}$ e conjuntos A_1, \dots, A_{k-1} (não necessariamente disjuntos) tais que $A_j \subset E_j$ e

$$\int_{A_{j+1} \cup \dots \cup A_{k-1}} |w_{n_j}| dx \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{k-1}}, \quad \forall j \in \{1, \dots, k-2\}.$$

Como $\{w_{n_1}, w_{n_2}, \dots, w_{n_{k-1}}\}$ é equi-integrável, existe $n_k > n_{k-1}$ tal que

$$\int_{E_{n_k}} |w_{n_j}| dx \leq \frac{1}{2^k}, \quad \forall j \in \{1, \dots, k-1\}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_{A_{j+1} \cup \dots \cup A_k} |w_{n_j}| dx &= \int_{A_{j+1} \cup \dots \cup A_{k-1}} |w_{n_j}| dx + \int_{A_k} |w_{n_j}| dx \\ &\leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^k} \quad \forall j \in \{1, \dots, k-1\}. \end{aligned}$$

Continuando com essa construção obtemos as seqüências $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Agora defina:

$$F_k := A_k \setminus \bigcup_{i=k+1}^{\infty} A_i.$$

Então, os conjuntos F_k são disjuntos e

$$\begin{aligned} \int_{F_k} |w_{n_k}| dx &= \int_{A_k \setminus \bigcup_{i=k+1}^{\infty} A_i} |w_{n_k}| dx \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{A_k \setminus (A_{k+1} \cup \dots \cup A_i)} |w_{n_k}| dx \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\int_{A_k} |w_{n_k}| dx - \int_{A_{k+1} \cup \dots \cup A_i} |w_{n_k}| dx \right) \\ &\geq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^i} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^i} \\ &\geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

Como consequência do Lema 3.26 apresentamos a seguinte Proposição:

Proposição 3.11. Sejam $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory e $v_1, v_2 \in L^1(\Omega)$ tais que $v_1 \leq v_2$ q.t.p. Suponha que

$$g(\cdot, v)\rho_0 \in L^1(\Omega) \text{ para todo } v \in L^1(\Omega) \text{ tal que } v_1 \leq v \leq v_2 \text{ q.t.p.} \quad (3.27)$$

Então, o conjunto

$$\mathcal{B} = \{g(\cdot, v) \in L^1(\Omega; \rho_0 dx); v \in L^1(\Omega) \text{ e } v_1 \leq v \leq v_2 \text{ q.t.p.}\} \quad (3.28)$$

é limitado e equi-integrável em $L^1(\Omega; \rho_0 dx)$.

Prova.

Inicialmente vamos mostrar que \mathcal{B} é equi-integrável. Para isso, suponhamos que \mathcal{B} não seja equi-integrável. Isto é, existem $\varepsilon > 0$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$ com $v_1 \leq u_n \leq v_2$ q.t.p. e $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ uma seqüência de conjuntos mensuráveis, tais que

$$|E_n| \rightarrow 0 \text{ e } \int_{E_n} |g(x, u_n)| \rho_0 dx \geq \varepsilon, \quad \forall n \geq 1.$$

Que podemos reescrever como:

$$\int_{E_n} |g(x, u_n)| \frac{\rho_0}{\varepsilon} dx \geq 1.$$

Daí, fazendo $w_n = g(\cdot, u_n) \frac{\rho_0}{\varepsilon}$ podemos aplicar o Lema 3.10, de onde segue que existem uma subsequência $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ e uma seqüência $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de conjuntos mensuráveis disjuntos em Ω , tais que

$$F_k \subset E_{n_k} \text{ e } \int_{F_k} |g(x, u_{n_k})| \rho_0 dx \geq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall k \geq 1. \quad (3.29)$$

Defina

$$v(x) = \begin{cases} u_{n_k}(x), & \text{se } x \in F_k, \text{ para algum } k > 1, \\ v_1(x), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Sabemos que $v_1 \leq u_{n_k} \leq v_2$ e $v_1 \leq v_2$ q.t.p. Logo, $v_1 \leq v \leq v_2$ q.t.p. e portanto $v \in L^1(\Omega)$.

Além disso, $(F_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ é uma seqüência de conjuntos mensuráveis disjuntos, dessa

forma podemos escrever $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k \cup \dots \subset \Omega$. Daí,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |g(x, v)| \rho_0 \, dx &\geq \int_{F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k \cup \dots} |g(x, v)| \rho_0 \, dx \\
&= \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^i \int_{F_k} |g(x, v)| \rho_0 \, dx \\
&= \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^i \int_{F_k} |g(x, u_{n_k})| \rho_0 \, dx \\
&\geq \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^i \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{i\varepsilon}{2} \\
&= \infty,
\end{aligned}$$

o que contradiz (3.27), já que $\int_{\Omega} |g(x, v)| \rho_0 \, dx < \infty$. Portanto, \mathcal{B} é equi-integrável em $L^1(\Omega; \rho_0 \, dx)$.

Por hipótese, Ω é um subconjunto limitado de \mathbb{R}^n , portanto $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ é compacto. Assim a cobertura aberta $(B_x)_{x \in \overline{\Omega}}$ como segue

$$\overline{\Omega} \subset \bigcup_{x \in \overline{\Omega}} B(x, \varepsilon) \text{ tal que } \int_{B(x, \varepsilon)} dx \leq \delta,$$

possui subcobertura finita

$$\overline{\Omega} \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \varepsilon).$$

Logo,

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \varepsilon) \cap \Omega.$$

Faça $E_k = B(x_k, \varepsilon) \cap \Omega$. Daí, podemos escrever $\Omega = \bigcup_{k=1}^n E_k$ tal que $|E_k| < \delta$, $\delta > 0$.

Como \mathcal{B} é equi-integrável

$$\int_{\Omega} |g(x, v)| \rho_0 \, dx = \sum_{i=1}^n \int_{E_i} |g(x, v)| \rho_0 \, dx < n\varepsilon.$$

De onde segue que o conjunto \mathcal{B} é limitado em $L^1(\Omega; \rho_0 \, dx)$. \square

Teorema 3.12. Seja $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory tal que

$$g(\cdot, v)\rho_0 \in L^1(\Omega), \quad \forall v \in L^1(\Omega). \quad (3.30)$$

Então, o operador Nemytskii

$$\begin{aligned} G : L^1(\Omega) &\longrightarrow L^1(\Omega; \rho_0 dx) \\ v &\longmapsto g(\cdot, v) \end{aligned}$$

é contínuo.

Prova.

Suponhamos que $v_n \rightarrow v$ em $L^1(\Omega)$.

Seja $(v_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ uma subsequência tal que

$$v_{n_k} \rightarrow v \text{ q.t.p. e } |v_{n_k}| \leq V,$$

para alguma função $V \in L^1(\Omega)$. (Ver [24, Lema A.1.1].)

Em particular, como g é uma função de Carathéodory é contínua na segunda variável, logo

$$g(\cdot, v_{n_k}) \rightarrow g(\cdot, v) \text{ q.t.p.}$$

Fazendo $v_1 = -V$ e $v_2 = V$ podemos aplicar a Proposição 3.11, de onde segue que a sequência

$$(g(\cdot, v_{n_k}))$$

é equi-integrável, ou seja, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$$E \subset \Omega \text{ e } |E| < \delta \Rightarrow \int_E |g(\cdot, v_{n_k})| \rho_0 dx < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.31)$$

Pelo Teorema de Egorov para $(g(\cdot, v_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$, dado $\delta > 0$ existe o conjunto E_δ tal que

$$\mu(\Omega) < \mu(E_\delta) + \delta.$$

Logo,

$$\mu(\Omega \setminus E_\delta) = \mu(\Omega) - \mu(E_\delta) < \delta. \quad (3.32)$$

Daí,

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} |g(\cdot, v_{n_k}) - g(\cdot, v)| \rho_0 dx = \\ &\underbrace{\int_{\Omega \setminus E_\delta} |g(\cdot, v_{n_k}) - g(\cdot, v)| \rho_0 dx}_{(I)} + \underbrace{\int_{E_\delta} |g(\cdot, v_{n_k}) - g(\cdot, v)| \rho_0 dx}_{(II)} \end{aligned}$$

Por (3.31) e por (3.32)

$$(I) \leq \int_{\Omega \setminus E_\delta} |g(\cdot, v_{n_k})| \rho_0 \, dx + \int_{\Omega \setminus E_\delta} |-g(\cdot, v)| \rho_0 \, dx < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Pelo Teorema de Egorov, para $n > n_0$

$$|g(\cdot, v_{n_k}) - g(\cdot, v)| < \frac{\varepsilon}{3|E_\delta|}.$$

Integrando,

$$(II) = \int_{E_\delta} |g(\cdot, v_{n_k}) - g(\cdot, v)| \rho_0 \, dx \leq \frac{\varepsilon}{3|E_\delta|} \int_{E_\delta} dx = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} |g(\cdot, v_{n_k}) - g(\cdot, v)| \rho_0 \, dx < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Dessa forma,

$$g(\cdot, v_{n_k}) \rightarrow g(\cdot, v) \text{ em } L^1(\Omega; \rho_0 \, dx).$$

Como o limite independe da subsequência tomada segue que

$$G(v_n) \rightarrow G(v) \text{ em } L^1(\Omega; \rho_0 \, dx),$$

de onde podemos concluir que o operador G é contínuo. De fato, suponhamos que

$$G(v_n) \not\rightarrow G(v) \text{ em } L^1(\Omega; \rho_0 \, dx).$$

Então, existe uma subsequência $(v_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que não converge para v , o que contradiz nossa hipótese.

□

3.3.3 Existência, Compacidade e Comparação de Resultados

Nesta subseção, apresentamos resultados relacionados a soluções fracas do problema linear:

$$\begin{cases} -\Delta w &= h, \text{ em } \Omega, \\ w &= 0, \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.33)$$

Começamos com um resultado de existência e compacidade de soluções fracas de (3.33).

Teorema 3.13. Dada $h \in L^1(\Omega; \rho_0 dx)$, existe uma única $w \in L^1(\Omega)$ tal que

$$-\int_{\Omega} w \Delta \zeta dx = \int_{\Omega} h \zeta dx \quad \forall \zeta \in C_0^2(\overline{\Omega}). \quad (3.34)$$

Além disso,

(i) Para cada $1 \leq p < \frac{N}{N-1}$, $w \in L^p(\Omega)$ e

$$\|w\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p \|h\rho_0\|_{L^1(\Omega)}. \quad (3.35)$$

(ii) Dada $h_n \in L^1(\Omega; \rho_0 dx)$, $n \geq 1$, seja w_n solução de (3.34) associada a h_n . Se $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^1(\Omega; \rho_0 dx)$, então $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é relativamente compacta em $L^p(\Omega)$, para todo $1 \leq p < \frac{N}{N-1}$.

Observação 3.4. Denotamos por N a dimensão de \mathbb{R}^n . Não utilizamos o próprio n para não confundir com a notação dos índices das sequências.

Prova.

Dividiremos a demonstração em quatro passos.

Passo 1. (Unicidade de w)

Sejam w_1 e w_2 duas soluções de (3.33). Logo satisfazem

$$-\int_{\Omega} w_1 \Delta \zeta dx = \int_{\Omega} h \zeta dx \quad \forall \zeta \in C_0^2(\overline{\Omega}),$$

e

$$-\int_{\Omega} w_2 \Delta \zeta dx = \int_{\Omega} h \zeta dx \quad \forall \zeta \in C_0^2(\overline{\Omega}).$$

Faça $w = w_1 - w_2$. Daí,

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} w \Delta \zeta dx &= -\int_{\Omega} (w_1 - w_2) \Delta \zeta dx \\ &= -\int_{\Omega} w_1 \Delta \zeta dx + \int_{\Omega} w_2 \Delta \zeta dx \\ &= \int_{\Omega} h \zeta dx - \int_{\Omega} h \zeta dx = 0 \quad \forall \zeta \in C_0^2(\overline{\Omega}). \end{aligned}$$

Dada alguma $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, então $\varphi \in L^2(\Omega)$ e pelo Teorema C.2 seja ζ solução de

$$\begin{cases} \Delta\zeta = \varphi, & \text{em } \Omega, \\ \zeta = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Logo,

$$0 = \int_{\Omega} w \Delta\zeta \, dx = \int_{\Omega} w \varphi \, dx.$$

Como φ é arbitrária, segue que $w = 0$, isto é, $w_1 = w_2$.

Passo 2. (Existência de w)

Vamos supor $h \geq 0$ (caso contrário, escreva $h = h^+ - h^-$).

Dado um inteiro $k \geq 0$, defina

$$h_k(x) = \min\{h(x), k\}.$$

Por definição, $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência monótona não-decrescente ($h_k \leq h_{k+1}$).

Quando $k \rightarrow +\infty$ temos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} h_k(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \min\{h(x), k\} = h(x).$$

Logo, $h_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} h$ pontualmente.

Pelo Teorema da Convergência Monótona segue que

$$h_k \rightarrow h \text{ em } L^1(\Omega; \rho_0 \, dx).$$

Por definição temos que $h_k \in L^\infty(\Omega)$, pois $|h_k| \leq k$, daí $h_k \in L^2(\Omega)$ e pelo Teorema C.2 seja w_k solução de

$$\begin{cases} -\Delta w_k = h_k, & \text{em } \Omega, \\ w_k = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.36)$$

Temos que

$$\begin{aligned} 0 \leq h_{k+1} - h_k &= -\Delta(w_{k+1} - w_k) \\ &= -\Delta w_{k+1} + \Delta w_k \quad \forall x \in \Omega. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{cases} -\Delta(w_{k+1} - w_k) \geq 0, & \text{em } \Omega, \\ w_{k+1} - w_k = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Do Princípio do Máximo B.2 segue que

$$w_{k+1} - w_k \geq 0.$$

Ou seja, $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência monótona não-decrescente.

Sabemos que

$$-\Delta(w_k - w_l)\zeta_0 = (h_k - h_l)\zeta_0.$$

Integrando ambos os lados,

$$-\int_{\Omega} \Delta(w_k - w_l)\zeta_0 \, dx = \int_{\Omega} (h_k - h_l)\zeta_0 \, dx.$$

Por Green,

$$\int_{\Omega} \nabla(w_k - w_l)\nabla\zeta_0 \, dx = \int_{\Omega} (h_k - h_l)\zeta_0 \, dx.$$

Novamente por Green,

$$-\int_{\Omega} (w_k - w_l)\Delta\zeta_0 \, dx = \int_{\Omega} (h_k - h_l)\zeta_0 \, dx.$$

Tome ζ_0 definida por

$$\begin{cases} -\Delta\zeta_0 = 1, & \text{em } \Omega, \\ \zeta_0 = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então,

$$\int_{\Omega} (w_k - w_l) \, dx = \int_{\Omega} (h_k - h_l)\zeta_0 \, dx.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |(w_k - w_l)| \, dx &= \int_{\Omega} |(h_k - h_l)|\zeta_0 \, dx \\ &= \int_{\Omega} |(h_k - h_l)|\rho_0 \frac{\zeta_0}{\rho_0} \, dx \\ &\leq \left\| \frac{\zeta_0}{\rho_0} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |(h_k - h_l)|\rho_0 \, dx \\ &\leq C \int_{\Omega} |(h_k - h_l)|\rho_0 \, dx. \end{aligned}$$

Como h_k é convergente em $L^1(\Omega; \rho_0 \, dx)$ da desigualdade anterior, segue que $\|w_k\|_{L^1(\Omega)}$ é uma sequência de Cauchy.

Agora, multiplicando (3.36) por ζ ,

$$-\Delta w_k \zeta = h_k \zeta.$$

Integrando ambos os lados,

$$-\int_{\Omega} \Delta w_k \zeta \, dx = \int_{\Omega} h_k \zeta \, dx.$$

Por Green,

$$-\int_{\Omega} w_k \Delta \zeta \, dx = \int_{\Omega} h_k \zeta \, dx.$$

Passando o limite,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[-\int_{\Omega} w_k \Delta \zeta \, dx \right] = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\int_{\Omega} h_k \zeta \, dx \right].$$

Temos que $|w_k \Delta \zeta| \leq C\theta \in L^1(\Omega)$, $C, \theta \in \mathbb{R}$, então

$$-\int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} w_k \Delta \zeta \, dx = \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} h_k \zeta \, dx,$$

daí,

$$-\int_{\Omega} w \Delta \zeta \, dx = \int_{\Omega} h \zeta \, dx.$$

Passo 3. (Prova de (i))

Note que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} w \Delta \zeta \, dx \right| &= \left| \int_{\Omega} h \zeta \, dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |h \zeta| \, dx \\ &= \int_{\Omega} \left| h \rho_0 \frac{\zeta}{\rho_0} \right| \, dx \\ &\leq \|h \rho_0\|_{L^1(\Omega)} \left\| \frac{\zeta}{\rho_0} \right\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

Portanto, w satisfaz

$$\left| \int_{\Omega} w \Delta \zeta \, dx \right| \leq \|h \rho_0\|_{L^1(\Omega)} \left\| \frac{\zeta}{\rho_0} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \forall \zeta \in C_0^2(\overline{\Omega}). \quad (3.37)$$

Dada $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, seja $\zeta \in C_0^2(\overline{\Omega})$ solução de

$$\begin{cases} \Delta \zeta = f, & \text{em } \Omega, \\ \zeta = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Do Teorema A.3, como $\zeta \in W_0^{1,p'}(\Omega)$ temos que

$$\|\zeta\|_{W^{2,p'}(\Omega)} \leq C_1(\|\zeta\|_{L^{p'}(\Omega)} + \|f\|_{L^{p'}(\Omega)}) \quad (3.38)$$

em que C_1 é uma constante.

Agora,

$$-\Delta\zeta = f.$$

Multiplicando ambos os lados por ζ ,

$$-\zeta\Delta\zeta = f\zeta.$$

Integrando ambos os lados,

$$-\int_{\Omega} \zeta\Delta\zeta \, dx = \int_{\Omega} f\zeta \, dx.$$

Por Green,

$$\int_{\Omega} |\nabla\zeta|^2 \, dx = \int_{\Omega} f\zeta \, dx \leq \int_{\Omega} |f\zeta| \, dx.$$

Por outro lado, pelas desigualdades de Hölder e Poincaré,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla\zeta|^2 \, dx &= \int_{\Omega} |f\zeta| \, dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\zeta|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_2 \left(\int_{\Omega} |f|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\nabla\zeta|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\left(\int_{\Omega} |\nabla\zeta|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_2 \left(\int_{\Omega} |f|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

em que C_2 é uma constante. Ainda utilizando a desigualdade de Hölder temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f|^2 \, dx &\leq \left(\int_{\Omega} |f|^{\frac{2p'}{2}} \, dx \right)^{\frac{2}{p'}} \left(\int_{\Omega} 1^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C_3 \left(\int_{\Omega} |f|^{p'} \, dx \right)^{\frac{2}{p'}}. \end{aligned}$$

em que $q = \frac{p'}{p' - 2}$, e C_3 é uma constante. Elevando a $\frac{1}{2}$ temos que

$$\left(\int_{\Omega} |f|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_3 \left(\int_{\Omega} |f|^{p'} \, dx \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Juntando as informações temos que,

$$\left(\int_{\Omega} |\nabla\zeta|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_2 \left(\int_{\Omega} |f|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_2 C_3 \left(\int_{\Omega} |f|^{p'} \, dx \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Daí, podemos observar pelo Teorema de Imersão de Sobolev A.4 que

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} |\zeta|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} &\leq C_2 \left(\int_{\Omega} |\nabla \zeta|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_2 C_3 \left(\int_{\Omega} |f|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Dessa forma, por (3.38) e por (3.39) podemos concluir que

$$\|\zeta\|_{W^{2,p'}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^{p'}(\Omega)}. \quad (3.40)$$

Tome $p' > n$. Da Observação D.1 e por Sobolev-Morrey A.2 segue que

$$\left\| \frac{\zeta}{\rho_0} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C (\|\zeta\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla \zeta\|_{L^\infty(\Omega)}) \leq C \|\zeta\|_{W^{2,p'}(\Omega)}. \quad (3.41)$$

Combinando (3.37) - (3.41), temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} wf dx \right| &= \left| \int_{\Omega} w \Delta \zeta dx \right| \\ &\leq \|h\rho_0\|_{L^1(\Omega)} \left\| \frac{\zeta}{\rho_0} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq \|h\rho_0\|_{L^1(\Omega)} C \|\zeta\|_{W^{2,p'}(\Omega)} \\ &\leq \|h\rho_0\|_{L^1(\Omega)} C C \|f\|_{L^{p'}(\Omega)} \\ &= C_p \|h\rho_0\|_{L^1(\Omega)} \|f\|_{L^{p'}(\Omega)} \quad \forall f \in C^\infty(\bar{\Omega}). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\left| \int_{\Omega} wf dx \right| \leq C_p \|h\rho_0\|_{L^1(\Omega)} \|f\|_{L^{p'}(\Omega)} \quad \forall f \in C^\infty(\bar{\Omega}). \quad (3.42)$$

Por dualidade temos que

$$\|w\|_{L^p(\Omega)} = \sup_{f \in L^{p'}(\Omega)} \frac{\left| \int_{\Omega} wf dx \right|}{\|f\|_{L^{p'}(\Omega)}} \leq C_p \|h\rho_0\|_{L^1(\Omega)}, \quad (3.43)$$

de onde concluímos que $w \in L^p(\Omega)$ e (3.35) é satisfeita.

Passo 4. (Prova de (ii))

Dado um domínio regular $U \subset\subset \Omega$, seja $v_n \in L^1(U)$ solução de

$$\begin{cases} \Delta v_n = h_n, & \text{em } U, \\ v_n = 0, & \text{sobre } \partial U. \end{cases}$$

Podemos observar que

$$\begin{aligned}
\|h_n\|_{L^1(U)} &= \left\| \frac{h_n \rho_0}{\rho_0} \right\|_{L^1(U)} \\
&= \int_U \left| \frac{h_n \rho_0}{\rho_0} \right| dx \\
&\leq K \int_U |h_n \rho_0| dx \\
&\leq K \int_{\Omega} |h_n \rho_0| dx \leq C.
\end{aligned}$$

De fato, como $\rho_0 > 0$ em $U \subset\subset \Omega$ compacto, então existe $\delta > 0$ tal que $\rho_0 > \delta > 0$. Logo, $\frac{1}{\rho_0} < \frac{1}{\delta} = K$ é limitado. Além disso, por hipótese temos que h_n é limitada em $L^1(\Omega; \rho_0 dx)$.

Daí, por estimativas elípticas [54] podemos escrever

$$\|v_n\|_{W^{1,p}(U)} \leq C_p \|h_n\|_{L^1(U)} \leq C_p \quad (3.44)$$

para cada $1 \leq p < \frac{N}{N-1}$.

Observação 3.5. Note que o raciocínio para obter a estimativa em (3.44) não seria válida para a equação (3.33), pois, nesse caso, não poderíamos garantir a limitação de $\frac{1}{\rho_0}$ perto da fronteira de Ω .

Por outro lado, note que $w_n - v_n$ é harmônica em U . Pelo Teorema A.1, temos que

$$(w_n - v_n) \in W_{loc}^{k+2,1}(U).$$

E por definição, para todo $\omega \subset\subset U$

$$(w_n - v_n) \in W^{k+2,1}(\omega).$$

E além disso, tomando $k_0 = k + 2$ ainda pelo Teorema A.1

$$\|(w_n - v_n)\|_{W^{k_0,1}(\omega)} \leq C_1 \|(w_n - v_n)\|_{L^1(U)}.$$

Pelo Teorema A.2 temos que

$$W^{k_0,1}(\omega) \hookrightarrow C^{1,0}(\bar{\omega}).$$

Daí,

$$\|(w_n - v_n)\|_{C^1(\bar{\omega})} \leq C_1 \|(w_n - v_n)\|_{W^{k_0,1}(\omega)} \leq C_1 C_2 \|(w_n - v_n)\|_{L^1(U)}. \quad (3.45)$$

Por (3.43) temos que

$$\|(w_n - v_n)\|_{L^1(U)} \leq C \|h_n \rho_0\|_{L^1(U)}. \quad (3.46)$$

Por hipótese, h_n é limitada em $L^1(\Omega; \rho_0 dx)$, e, por (3.45) e (3.46) podemos concluir que

$$\|(w_n - v_n)\|_{C^1(\bar{\omega})} \leq C_\omega \|(w_n - v_n)\|_{L^1(U)} \leq C_\omega \|h_n \rho_0\|_{L^1(\Omega)} \leq C_\omega. \quad (3.47)$$

Por (3.47),

$$\|(w_n - v_n)\|_{W^{1,p}(\bar{\omega})} = \left(\int_{\bar{\omega}} |\nabla(w_n - v_n)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\bar{\omega}} |(w_n - v_n)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq K.$$

Logo, $(w_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência $(w_{n_k} - v_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

$$(w_{n_k} - v_{n_k}) \rightarrow h \text{ q.t.p. em } \bar{\omega}.$$

Por outro lado, por (3.44) $(v_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência $(v_{n_{\tilde{k}}})_{\tilde{k} \in \mathbb{N}}$ tal que

$$v_{n_{\tilde{k}}} \rightarrow v \text{ q.t.p. em } \bar{\omega}.$$

Daí,

$$(w_{n_{\tilde{k}}} - v_{n_{\tilde{k}}}) + v_{n_{\tilde{k}}} \rightarrow h + v \text{ q.t.p. em } \bar{\omega}.$$

Então,

$$w_{n_{\tilde{k}}} \rightarrow h + v \text{ q.t.p. em } \bar{\omega}.$$

De acordo com a construção feita anteriormente, dados os conjuntos $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots$ tais que $\Omega_n \subset \subset \Omega$, observe o diagrama:

$$\left(\begin{array}{l} w_{n_1} \in \Omega_1 : w_{11} \quad w_{12} \quad \dots \quad w_{1n} \quad \dots \\ w_{n_2} \in \Omega_2 : w_{21} \quad w_{22} \quad \dots \quad w_{2n} \quad \dots \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad w_{3n} \quad \dots \\ w_{n_n} \in \Omega_n : w_{n1} \quad w_{n2} \quad \dots \quad w_{nn} \quad \dots \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \dots \quad w_{3n} \quad \dots \end{array} \right)$$

Daí, pelo argumento de diagonalização existe uma subsequência $(w_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

$$w_{n_k} \rightarrow w \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Por outro lado, por (i) temos que a sequência $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p < \frac{N}{N-1}$. A conclusão segue do Lema 2.47. \square

A seguir apresentamos a seguinte versão da Desigualdade de Kato (Ver [13, Proposição B.5]).

Proposição 3.14. Seja $w \in L^1(\Omega)$ e $h \in L^1(\Omega; \rho_0 dx)$ tais que

$$-\int_{\Omega} w \Delta \zeta dx \leq \int_{\Omega} h \zeta dx \quad \forall \zeta \in C_0^2(\overline{\Omega}), \zeta \geq 0 \text{ em } \Omega.$$

Então,

$$-\int_{\Omega} w^+ \Delta \zeta dx \leq \int_{[w \geq 0]} h \zeta dx \quad \forall \zeta \in C_0^2(\overline{\Omega}), \zeta \geq 0 \text{ em } \Omega.$$

Corolário 3.15. Se u e v são soluções do problema (3.23), então o $\max\{u, v\}$ é uma subsolução.

Prova.

Se u e v são soluções do problema (3.23), então satisfazem (i) – (iii) da Definição 3.9.

Fazendo $w = v - u$ e $h = f(\cdot, v) - f(\cdot, u)$ podemos aplicar a Proposição 3.14 e obtemos que

$$-\int_{\Omega} (v - u)^+ \Delta \zeta dx \leq \int_{[v \geq u]} [f(x, v) - f(x, u)] \zeta dx \quad \forall \zeta \in C_0^2(\overline{\Omega}), \zeta \geq 0 \text{ em } \Omega.$$

Tome $\max\{u, v\} = u + (v - u)^+$, segue que

- (i) $\max\{u, v\} = u + (v - u)^+ \in L^1(\Omega)$, pois é soma de funções em $L^1(\Omega)$;
- (ii) Temos que

$$|f(x, \max\{u, v\}) \rho_0| \leq |f(x, u) \rho_0| + |f(x, v) \rho_0| \in L^1(\Omega).$$

Logo, $f(\cdot, \max\{u, v\}) \rho_0 \in L^1(\Omega)$;

- (iii) Além disso,

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} [u + (v - u)^+] \Delta \zeta dx &= -\int_{\Omega} u \Delta \zeta dx - \int_{\Omega} (v - u)^+ \Delta \zeta dx \\ &\leq \int_{\Omega} f(x, u) \zeta dx + \int_{[v \geq u]} [f(x, v) - f(x, u)] \zeta dx \\ &= \int_{[v < u]} f(x, u) \zeta dx + \int_{[v \geq u]} f(x, v) \zeta dx \\ &= \int_{[v < u]} f(x, \max\{u, v\}) \zeta dx + \int_{[v \geq u]} f(x, \max\{u, v\}) \zeta dx \\ &= \int_{\Omega} f(x, \max\{u, v\}) \zeta dx \quad \forall \zeta \in C_0^2(\overline{\Omega}). \end{aligned}$$

Portanto, $\max\{u, v\}$ é uma subsolução de (3.23).

□

3.3.4 Resultado Principal

A seguir o enunciado do resultado principal:

Teorema 3.16. Sejam v_1 e v_2 uma sub e uma supersolução do problema (3.23), respectivamente. Suponha que $v_1 \leq v_2$ e

$$f(\cdot, v)\rho_0 \in L^1(\Omega), \quad \forall v \in L^1(\Omega) \text{ tal que } v_1 \leq v \leq v_2 \text{ q.t.p.} \quad (3.48)$$

Então, existem soluções $u_1 \leq u_2$ do problema (3.23) em $[v_1, v_2]$ de tal forma que qualquer solução u de (3.23) no intervalo $[v_1, v_2]$ satisfaz:

$$v_1 \leq u_1 \leq u \leq u_2 \leq v_2 \text{ q.t.p.}$$

Prova.

Vamos dividir a demonstração em dois passos.

Passo 1.

O problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.49)$$

possui solução u tal que $v_1 \leq u \leq v_2$ q.t.p.

Dado $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$, defina

$$g(x, t) = \begin{cases} v_1(x), & \text{se } t < v_1(x), \\ t, & \text{se } v_1(x) \leq t \leq v_2(x), \\ v_2(x), & \text{se } v_2(x) < t. \end{cases}$$

Então, $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory. De fato,

(i) A função g é mensurável na primeira coordenada.

Fixe t e defina:

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega; v_1(x) > t\},$$

$$\Omega_2 = \{x \in \Omega; v_2(x) < t\},$$

$$\Omega_3 = \{x \in \Omega; v_1(x) \leq t\} \cap \{x \in \Omega; v_2(x) \geq t\}.$$

Temos que

$$g(x, t) = v_1(x)\mathcal{X}_{\Omega_1} + v_2(x)\mathcal{X}_{\Omega_2} + t\mathcal{X}_{\Omega_3}$$

em que \mathcal{X}_{Ω_1} , \mathcal{X}_{Ω_2} e \mathcal{X}_{Ω_3} são as funções características em relação a Ω_1, Ω_2 e Ω_3 , respectivamente. Como os espaços definidos são mensuráveis segue que as funções características, neles definidas, também o são. Além disso, $v_1(x)$, $v_2(x)$ e $t \in L^1(\Omega)$, logo são mensuráveis. Portanto, $g(x, t)$ é mensurável.

(ii) A função g é contínua na segunda coordenada.

Sejam $v_1(x)$ e $v_2(x)$ fixados.

- Se $t < v_1(x)$ então $g(x, t) = v_1(x)$. Logo constante e portanto contínua;
- Se $t > v_2(x)$ então $g(x, t) = v_2(x)$. Logo constante e portanto contínua;
- Se $v_1(x) < t < v_2(x)$ então $g(x, t) = t$, que é uma função contínua;

Basta agora observar o comportamento de $g(x, t)$ nos pontos $t = v_1(x)$ e $t = v_2(x)$.

Se $t = v_1(x)$ temos

$$\lim_{t \rightarrow v_1^+(x)} g(x, t) = \lim_{t \rightarrow v_1^+(x)} t = v_1(x)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow v_1^-(x)} g(x, t) = \lim_{t \rightarrow v_1^-(x)} v_1(x) = v_1(x).$$

Portanto, em $t = v_1(x)$, $g(x, t)$ é contínua. Se $t = v_2(x)$ é análogo.

Além disso, por (3.48) segue que

$$g(\cdot, v)\rho_0 \in L^1(\Omega) \text{ para cada } v \in L^1(\Omega).$$

Agora considere o operador

$$\begin{aligned} G : L^1(\Omega) &\longrightarrow L^1(\Omega; \rho_0 dx) \\ v &\longmapsto g(\cdot, v) \end{aligned}$$

que é contínuo pelo Teorema 3.12.

Considere ainda o operador

$$\begin{aligned} K : L^1(\Omega; \rho_0 dx) &\longrightarrow L^1(\Omega) \\ h &\longmapsto w \end{aligned}$$

em que w é solução única de

$$\begin{cases} -\Delta w = h, & \text{em } \Omega, \\ w = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.50)$$

Sejam $h_n, h \in L^1(\Omega, \rho_0 dx)$ com $h_n \rightarrow h$ em $L^1(\Omega, \rho_0 dx)$. Pelo Teorema 3.13 existem únicas $w_n, w \in L^1(\Omega)$ tais que

$$-\int_{\Omega} w_n \Delta \zeta dx = \int_{\Omega} h_n \zeta dx \quad \forall \zeta \in C_0^2(\bar{\Omega}) \quad (3.51)$$

$$-\int_{\Omega} w \Delta \zeta dx = \int_{\Omega} h \zeta dx \quad \forall \zeta \in C_0^2(\bar{\Omega}) \quad (3.52)$$

Subtraindo (3.51) de (3.52) temos que

$$-\int_{\Omega} (w_n - w) \Delta \zeta dx = \int_{\Omega} (h_n - h) \zeta dx \quad \forall \zeta \in C_0^2(\bar{\Omega}).$$

Daí, novamente pelo Teorema 3.13, segue que

$$\|w_n - w\|_{L^1(\Omega)} \leq C_p \|(h_n - h)\rho_0\|_{L^1(\Omega)},$$

já que $h_n \rightarrow h$ em $L^1(\Omega, \rho_0 dx)$, existe n_0 tal que $n > n_0$ e

$$\|(h_n - h)\rho_0\|_{L^1(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{C_p}.$$

De onde segue que o operador K é contínuo. Logo a composição $KG : L^1(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega)$ é contínua.

Além disso, pela Proposição 3.30 aplicada a f , defina:

$$g(x, t) = \begin{cases} f(x, v_1(x)), & \text{se } t < v_1(x), \\ f(x, t), & \text{se } v_1(x) \leq t \leq v_2(x), \\ f(x, v_2(x)), & \text{se } v_2(x) < t. \end{cases}$$

Temos que, $G(L^1(\Omega)) = \{g(\cdot, v) \in L^1(\Omega; \rho_0 dx); v \in L^1(\Omega)\}$ e

$$v_1 \leq g(\cdot, v) \leq v_2$$

então

$$\int_{\Omega} |g(\cdot, v)| \rho_0 dx \leq \int_{\Omega} |v_1| \rho_0 dx + \int_{\Omega} |v_2| \rho_0 dx < K,$$

em que K é uma constante.

Dessa forma, pelo Teorema 3.13 temos que KG é compacto e existe uma constante

$C > 0$ tal que

$$\|K(G(v))\|_{L^1(\Omega)} \leq C_1 \|G(v)\rho_0\|_{L^1(\Omega)} \leq C \quad \forall v \in L^1(\Omega).$$

Podemos observar então que o operador $KG : B_C(0) \rightarrow B_C(0)$ é limitado, pois

$$\|K(G(v))\|_{L^1(\Omega)} \leq C,$$

com $B_C(0) =: \{v \in L^1(\Omega); \|v\|_{L^1(\Omega)} \leq C\}$. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Schauder temos que KG possui um ponto fixo $u \in L^1(\Omega)$. Em outras palavras, u satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x, u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.53)$$

• **Afirmção:** u é solução de (3.23) e

$$v_1 \leq u \leq v_2 \text{ q.t.p.} \quad (3.54)$$

É suficiente mostrar que (3.54) é satisfeita. Vamos mostrar que $u \leq v_2$ q.t.p.; a prova da inequação $v_1 \leq u$ q.t.p. é análoga. Note que

$$g(\cdot, u) = g(\cdot, v_2) \text{ q.t.p. sobre o conjunto } [u \geq v_2].$$

Aplicando a Proposição 3.14 para $w = u - v_2$ temos que

$$-\int_{\Omega} (u - v_2)^+ \Delta \zeta \, dx \leq \int_{[u-v_2 \geq 0]} (g(x, u) - g(x, v_2)) \zeta \, dx,$$

então

$$-\int_{\Omega} w^+ \Delta \zeta \, dx \leq \int_{[u \geq v_2]} (g(x, u) - g(x, v_2)) \zeta \, dx = 0 \quad \forall \zeta \in C_0^2(\bar{\Omega}), \zeta \geq 0 \text{ em } \Omega.$$

Ou seja, $\int_{\Omega} w^+ \Delta \zeta \, dx \leq 0$, o que significa que $w^+ \leq 0$ q.t.p.; então $w^+ = 0$ q.t.p. O que nos diz que $u \leq v_2$ q.t.p.

Passo 2.

Existe uma menor e uma maior solução $u_1 \leq u_2$ de (3.23) no intervalo $[v_1, v_2]$.

Vamos mostrar a existência da solução maior u_2 , a existência de u_1 (solução menor) é análoga. Defina

$$A = \sup \left\{ \int_{\Omega} w \, dx; v_1 \leq w \leq v_2 \text{ q.t.p. e } w \text{ é solução de (3.23)} \right\}.$$

Note que,

$$v_1 \leq w \leq v_2,$$

então,

$$|w| \leq |v_1| + |v_2|$$

Integrando em ambos os lados

$$\left| \int_{\Omega} w \, dx \right| \leq \int_{\Omega} |w| \, dx \leq \int_{\Omega} |v_1| \, dx + \int_{\Omega} |v_2| \, dx \leq c_1 < \infty,$$

já que $v_1, v_2 \in L^1(\Omega)$. Portanto, $A < \infty$.

- **Afirmção:** Se w_1, w_2 são duas soluções de (3.23) tais que $v_1 \leq w_1, w_2 \leq v_2$ q.t.p., então (3.23) possui uma solução w tal que

$$v_1 \leq \max\{w_1, w_2\} \leq w \leq v_2 \text{ q.t.p.} \quad (3.55)$$

Com efeito, como w_1, w_2 são soluções de (3.23) pelo Corolário 3.15, $\max\{w_1, w_2\}$ é uma subsolução de (3.23). Sendo $\max\{w_1, w_2\} \leq v_2$ uma subsolução e v_2 uma supersolução de (3.23), podemos aplicar o Passo 1. De onde segue que podemos encontrar w solução de (3.23) satisfazendo (3.55).

Sejam ϕ_k soluções de (3.23) tais que $\left| \int_{\Omega} (\phi_k - A) \, dx \right| < \frac{1}{k}$.

- Faça $w_1 = \phi_1$.
- Seja w_2 tal que

$$v_1 \leq \max\{w_1, \phi_2\} \leq w_2 \leq v_2 \text{ q.t.p., } w_2 \text{ solução.}$$

Temos que

$$w_2 \geq w_1 \text{ q.t.p.};$$

$$w_2 \geq \phi_2 \Rightarrow \int_{\Omega} w_2 \, dx \geq \int_{\Omega} \phi_2 \, dx \Rightarrow \left| \int_{\Omega} (w_2 - A) \, dx \right| < \frac{1}{2}.$$

- Seja w_3 tal que

$$v_1 \leq \max\{w_2, \phi_3\} \leq w_3 \leq v_2 \text{ q.t.p., } w_3 \text{ solução.}$$

Temos que

$$w_3 \geq w_2 \text{ q.t.p.};$$

$$w_3 \geq \phi_3 \Rightarrow \int_{\Omega} w_3 \, dx \geq \int_{\Omega} \phi_3 \, dx \Rightarrow \left| \int_{\Omega} (w_3 - A) \, dx \right| < \frac{1}{3}.$$

- Seja w_4 tal que

$$v_1 \leq \max\{w_4, \phi_3\} \leq w_4 \leq v_2 \text{ q.t.p., } w_4 \text{ solução.}$$

Temos que

$$w_4 \geq w_3 \text{ q.t.p.;}$$

$$w_4 \geq \phi_4 \Rightarrow \int_{\Omega} w_4 dx \geq \int_{\Omega} \phi_4 dx \Rightarrow \left| \int_{\Omega} (w_4 - A) dx \right| < \frac{1}{4},$$

e assim sucessivamente.

Isto é, de acordo com a afirmação anterior, podemos construir uma sequência não-decrescente de soluções $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de (3.23) tal que

$$v_1 \leq w_n \leq v_2 \text{ q.t.p. e } \int_{\Omega} w_n dx \rightarrow A. \quad (3.56)$$

Pelo Teorema da Convergência Monótona, existe $w_0 \in L^1(\Omega)$ tal que $w_n \rightarrow w_0$ q.t.p.,

$$v_1 \leq w_0 \leq v_2 \text{ q.t.p. e } \int_{\Omega} w_n dx \rightarrow \int_{\Omega} w_0 dx = A.$$

Por outro lado, pela Proposição 3.11, a sequência $(f(\cdot, w_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é equi-integrável em $L^1(\Omega; \rho_0 dx)$. Ou seja, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$$E \subset \Omega \text{ e } |E| < \delta \Rightarrow \int_E |f(\cdot, w_n)| \rho_0 dx < \varepsilon. \quad (3.57)$$

Pelo Teorema de Egorov dado $\delta > 0$ existe o conjunto E_δ tal que

$$\mu(\Omega) < \mu(E_\delta) + \delta.$$

Logo,

$$\mu(\Omega \setminus E_\delta) = \mu(\Omega) - \mu(E_\delta) < \delta. \quad (3.58)$$

Daí,

$$\int_{\Omega} |f(\cdot, w_n) - f(\cdot, w_0)| \rho_0 dx =$$

$$\underbrace{\int_{\Omega \setminus E_\delta} |f(\cdot, w_n) - f(\cdot, w_0)| \rho_0 dx}_{(I)} + \underbrace{\int_{E_\delta} |f(\cdot, w_n) - f(\cdot, w_0)| \rho_0 dx}_{(II)}.$$

Por (3.58) e (3.57)

$$(I) \leq \int_{\Omega \setminus E_\delta} |f(\cdot, w_n)| \rho_0 dx + \int_{\Omega \setminus E_\delta} |-f(\cdot, w_0)| \rho_0 dx < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Pelo Teorema de Egorov, para $n > n_0$

$$|f(\cdot, w_n) - f(\cdot, w_0)| < \frac{\varepsilon}{3|E_\delta|}.$$

Integrando,

$$(II) = \int_{E_\delta} |f(\cdot, w_n) - f(\cdot, w_0)| \rho_0 \, dx \leq \frac{\varepsilon}{3|E_\delta|} \int_{E_\delta} dx = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} |f(\cdot, w_n) - f(\cdot, w_0)| \rho_0 \, dx < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Dessa forma,

$$f(\cdot, w_n) \rightarrow f(\cdot, w_0) \text{ em } L^1(\Omega; \rho_0 \, dx).$$

Então, w_0 é solução de (3.23) e

$$\int_{\Omega} w_0 \, dx = A.$$

De onde concluímos que w_0 é a maior solução de (3.23) no intervalo $[v_1, v_2]$. De fato, seja $w_1 \leq v_2$ uma solução de (3.23). Então, pelo Corolário 3.15 $\max\{w_1, w_0\} \leq v_2$ é uma subsolução de (3.23). Pelo Passo 1 existe w' solução de (3.23) tal que $\max\{w_1, w_0\} \leq w' \leq v_2$. Daí, $A > \int_{\Omega} w' \, dx > \int_{\Omega} w_0 \, dx = A$, contradição.

□

APÊNDICE A – Resultados de Regularidade e Estimativas

Sobre o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $u \in C^2(\Omega)$, considere os operadores diferenciais elípticos de segunda ordem da forma

$$Lu = -a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} u + b_i \frac{\partial}{\partial x_i} u + cu, \quad (\text{A.1})$$

ou na forma

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u \right) + cu, \quad (\text{A.2})$$

com coeficientes limitados $a_{ij} = a_{ji}$, b_i , e c satisfazendo a condição de elipticidade

$$a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2$$

com uma constante uniforme $\lambda > 0$, para toda $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Teorema A.1. Suponhamos que $h \in W_{loc}^{k,p}(\Omega)$, $k \geq 0$, $1 < p < \infty$, L operador da forma (A.1) e que $u \in H^1(\Omega)$ seja uma solução fraca do problema

$$L^*u = h(x) \text{ em } \Omega$$

no seguinte sentido

$$\int_{\Omega} uLv \, dx = \int_{\Omega} hv \, dx, \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega).$$

Então,

$$u \in W_{loc}^{k+2,p}(\Omega),$$

e, além disso

$$\|u\|_{W^{k,p}(\omega)} \leq \left(\sum_{i=1}^n \|h_i\|_{W^{k_i,p}(U)} + \|u\|_{L^p(U)} \right).$$

(Neste caso, consideramos L^* o operador adjunto.)

Prova.

Vide Agmon [2, Teorema 7.1']. □

Teorema A.2. (Sobolev-Morrey) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira Lipschitz, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$. Se $0 \leq m < k - \frac{n}{p} < m + 1$, então

$$W^{k,p} \hookrightarrow C^{m,\alpha}(\bar{\Omega}), \quad \text{para } 0 \leq \alpha \leq k - m - \frac{n}{p}.$$

Prova.

Vide Struwe [55, Teorema A.5]. □

Observação A.1. Dado $p \geq q$ se $|\mu| < \infty$, então

$$L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega).$$

Teorema A.3. Seja L operador elíptico do tipo (A.1) com coeficientes contínuos a_{ij} . Suponha que $u \in W_{loc}^{2,p}(\Omega)$ satisfazendo $Lu = f$ em Ω com $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Então para qualquer $\Omega' \subset\subset \Omega$ temos

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega')} \leq C (\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}).$$

Se Ω é de classe $C^{1,1}$, e se existe uma função $u_0 \in W^{2,p}(\Omega)$ tal que $u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega')} \leq C (\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|u_0\|_{W^{2,p}(\Omega)}).$$

Prova.

Vide Struwe [55, Teorema B.2]. □

Teorema A.4. (Imersão de Sobolev) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto de classe C^1 com $\partial\Omega$ limitada. As seguintes inclusões são contínuas.

(i) se $1 \leq p < n$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$,

(ii) se $p = n$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$,

(iii) se $p > n$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$,

$$\forall q \in [p, +\infty) \text{ e } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}.$$

Prova.

Vide Brezis [11, Corolário 9.14]. □

APÊNDICE B - Princípio do Máximo

Teorema B.1. Sejam L operador elíptico da forma (A.1) e $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ satisfazendo

$$Lu \geq 0 \text{ em } \Omega, \text{ e } u \geq 0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Além disso, suponha que exista $h \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ tal que

$$Lh \geq 0 \text{ em } \Omega, \text{ e } h > 0 \text{ sobre } \Omega.$$

Então $u > 0$ em Ω , ou $u = \beta h$ para algum $\beta \leq 0$.

Prova.

Vide Struwe [55, Teorema B.4]. □

Para soluções fracas de equações elípticas temos o seguinte teorema análogo:

Teorema B.2. Sejam L operador elíptico da forma (A.2) e \mathcal{L} operador de Dirichlet definido positivo sobre $W_0^{1,2}(\Omega)$ de forma que

$$\mathcal{L}(u, u) > 0 \text{ para toda } u \in W_0^{1,2}(\Omega), u \neq 0.$$

Então, se $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ satisfaz fracamente $Lu \geq 0$ de forma que

$$\mathcal{L}(u, \varphi) \geq 0 \text{ para toda } \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega), \varphi \geq 0,$$

e $u \geq 0$ sobre ∂B , em que $B = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ segue-se que $u \geq 0$ em Ω .

Prova.

Vide Struwe [55, Teorema B.6]. □

APÊNDICE C - Existência de Soluções Fracas

Teorema C.1. Existe $\gamma \geq 0$ tal que

$$\mu \geq \gamma$$

e para cada função

$$f \in L^2(\Omega),$$

existe uma única solução fraca $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ do problema

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Prova.

Vide Evans [20, Teorema 3, Capítulo 6]. □

Teorema C.2. Para cada função $f \in L^2(\Omega)$ existe uma única solução fraca $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ do problema

$$\begin{cases} Lu = f, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Prova.

Vide Evans [20, Teorema 4, Capítulo 6]. □

APÊNDICE D – Diferenciabilidade

Definição D.1. Dado U um abeto do espaço de Banach X seja $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$. O funcional φ é Gateaux diferenciável em $u \in U$ se existe $f \in X'$, tal que para todo $h \in X$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(u + th) - \varphi(u) - \langle f, th \rangle}{t} = 0.$$

Se o limite acima existir, ele é único e a derivada de Gateaux em u será denotada por $\varphi'(u)$, e dada por

$$\langle \varphi'(u), h \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(u + th) - \varphi(u)}{t}.$$

O funcional φ é diferenciável a Fréchet em u se existe $f \in X'$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(u + h) - \varphi(u) - \langle f, h \rangle}{\|h\|} = 0.$$

Se φ é diferenciável a Fréchet e é contínua em U então $\varphi \in C(U, \mathbb{R})$.

Observação D.1. Vamos estimar $\left| \frac{\zeta(x)}{\rho_0(x)} \right|$.

Defina o conjunto

$$\Omega_\delta := \{x \in \Omega; \rho_0(x) < \delta\}.$$

Consideremos dois casos:

1º Caso) Se $x \in \Omega \setminus \Omega_\delta$ existem constantes K_1, K_2 tais que

$$K_1 \leq \rho_0(x) \leq K_2.$$

Então,

$$\frac{\zeta(x)}{K_2} \leq \frac{\zeta(x)}{\rho_0(x)} \leq \frac{\zeta(x)}{K_1}.$$

De onde segue que $\left| \frac{\zeta(x)}{\rho_0(x)} \right| \leq K \|\zeta(x)\|_{L^\infty(\Omega \setminus \Omega_\delta)}$, com K constante.

2º Caso) Dado $x_0 \in \partial\Omega$, seja γ um caminho diferenciável tal que $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma'(0) = v$,

com $v \neq 0$. Daí,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{\zeta(x)}{\rho_0(x)} \right| &= \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{[\zeta(\gamma(t))]' }{d(\gamma(t), x_0)'} \right| \\
&= \left| \frac{\nabla \zeta(x_0)v}{\nabla \rho_0(x_0)v} \right| \\
&= \frac{\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{\zeta(x_0 + tv) - \zeta(x_0)}{t} \right|}{\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{d(x_0 + tv, x_0)}{t} \right|} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{\zeta(x_0 + tv) - \zeta(x_0)}{|tv|} \right| \\
&\leq K' \frac{|\nabla \zeta(x_0)||v|}{|v|} = K' |\nabla \zeta(x_0)|.
\end{aligned}$$

Isto é, para cada $x \in \Omega_\delta$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{\zeta(x)}{\rho_0(x)} \right| \leq K' \|\nabla \zeta(x)\|_{L^\infty(\Omega_\delta)}.$$

Pela compacidade de $\partial\Omega$, esta pode ser coberta pela cobertura finita

$$\bigcup_{i=1}^n B(x_i, \delta_i), \quad x_i \in \Omega_\delta.$$

Dessa forma, para cada $x_i \in \Omega_\delta$

$$\left| \frac{\zeta(x_i)}{\rho_0(x_i)} \right| \leq |\nabla \zeta(x_i)| + \varepsilon.$$

Portanto,

$$\left| \frac{\zeta(x)}{\rho_0(x)} \right| \leq \|\nabla \zeta(x)\|_{L^\infty(\Omega_\delta)} + \varepsilon.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\zeta(x)}{\rho_0(x)} \right| &\leq C (\|\zeta(x)\|_{L^\infty(\Omega \setminus \Omega_\delta)} + \|\nabla \zeta(x)\|_{L^\infty(\Omega_\delta)}) \\
&\leq (\|\zeta(x)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla \zeta(x)\|_{L^\infty(\Omega)}),
\end{aligned}$$

em que $C = \max \left\{ 1, K, \frac{\varepsilon}{\|\zeta(x)\|_{L^\infty(\Omega \setminus \Omega_\delta)}} \right\}$.

Referências

- [1] Adams, R. A. *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, (1975).
- [2] Agmon, S. *The L_p approach to the Dirichlet problem. I. Regularity theorems*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 13 (1959) 405-448.
- [3] Akô, K. *On the Dirichlet problem for quasi-linear elliptic differential equations of the second order*. J. Math. Soc. Japan 13 (1961), 45–62.
- [4] Akô, K. *Subfunctions for ordinary differential equations*. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 16 (1969), 149–156.
- [5] Amann, H.; Crandall M. *On some existence theorems for semilinear elliptic equations*. Indiana Univ. Math. J. 27 (1978), 779–790.
- [6] Bebernes, J.; Schmitt, K. *Periodic boundary value problems for systems of second order differential equations*. J. Differential Equations 13(1973), 32–47.
- [7] Bartle, R.G. *The Elements of Integration*. John Wiley Sons; 1966.
- [8] Biezuner, J. *Análise funcional*. Notas de aula do curso Análise Funcional UFMG, Brasil, 2009.
- [9] Billingsley, P. *Convergence of probability measures*. Wiley, New York, 1968.
- [10] Billingsley, P. *Weak convergence of measures: Applications in probability*. SIAM, New York, 1971.
- [11] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer; 1st Edition (2010).
- [12] Brezis, H.; Cazenave, T.; Martel, Y.; Ramiandrisoa, A. *Blow up for $u_t - \Delta u = g(u)$ revisited*. Adv. Differential Equations 1 (1996), 73-90.
- [13] Brezis, H.; Marcus M.; Ponce A. C. *Nonlinear elliptic equations with measures revisited*. In: Mathematical Aspects of Nonlinear Dispersive Equations (J. Bourgain, C. Kenig, and S. Klainerman, eds.), Annals of Mathematics Studies, 163, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2007. Part of the results were announced in a note by the same authors: *A new concept of reduced measure for nonlinear elliptic equations*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004), 169–174.
- [14] Carl, S.; Le, V. K.; Motreanu D. *The sub-supersolution method and extremal solutions for quasilinear hemivariational inequalities*. Differential and Integral Equations 17 (2004), 165–178.

- [15] Clément, P.; Sweers, G. *Getting a solution between sub- and supersolutions without monotone iteration*. Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste 19 (1987), 189–194.
- [16] Dancer, E. N.; Sweers, G. *On the existence of a maximal weak solution for a semilinear elliptic equation*. Differential Integral Equations 2 (1989), 533–540.
- [17] Deuel, J.; Hess, P. *A criterion for the existence of solutions of non-linear elliptic boundary value problems*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 74A (1974/75), 49–54.
- [18] Deuel J.; Hess P. *Inéquations variationnelles elliptiques non coercives*. C. R. Acad. Sci. Paris 279 (1974), 719–722.
- [19] Erbe, L. *Nonlinear boundary value problems for second order differential equations*. J. Differential Equations 7 (1970), 459–472.
- [20] Evans, L. C. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, 19. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
- [21] Evans, L. C. *Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations*. Volume 74 of CBMS Regional Conference Series in Mathematics. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1990.
- [22] Evans, L. C.; Gariepy, R. E. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC. Press. (1992).
- [23] Erbe, L. *Existence of solutions to boundary value problems for second order differential equations*. Nonlinear Analysis, TMA 6 (1982), 1155–1162.
- [24] Faria, L. F. O. *Equações Elípticas com dependência não linear do gradiente*. Tese de Doutorado em Matemática Pura pela Universidade Federal de Minas Gerais, 2008.
- [25] Faria, L. F. O. ; Miyagaki, O. H.; Motreanu, D.; Tanaka, M. *Existence results for nonlinear elliptic equations with Leray-Lions operator and dependence on the gradient*. Nonlinear Analysis, v. 96, p. 154-166, 2014.
- [26] Gilbarg, D.; Trudinger, N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 224, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [27] Górniewicz, L.; Andres, J. *From de Schauder fixed point theorem to the applied multivalued Nielsen Theory*. Topol. Meth. Nonlin Anal. 14, 2 (1999), 228-238.
- [28] Habets, P.; Schmitt, K. *Boundary value problems for systems of nonlinear differential equations*. Arch. Math. 40 (1983), 441–446.
- [29] Hess, P. *On the solvability of nonlinear elliptic boundary value problems*. Indiana Univ. Math. J. 25 (1976), 461–466.
- [30] Jackson, L.; Schrader K. *Comparison principles for nonlinear differential equations*. J. Differential Equations 3 (1967), 248–255.
- [31] Karlsen, H. K. *Notes on weak convergence*. MAT4380 - Spring 2006.

- [32] Knobloch, H. *Eine neue Methode zur Approximation periodischer Lösungen nicht linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung*. Math. Z. 82(1963), 177–197.
- [33] Knobloch, H.; Schmitt, K. *Nonlinear boundary value problems for systems of second order differential equations*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh 78A(1977), 139–159.
- [34] Fomin, S.V.; Kolmogorov, A.N. *Elementos da Teoria das Funções e de Análise Funcional*. Mir. (1982).
- [35] Kura, T. *The weak supersolution-subsolution method for second order quasilinear elliptic equations*. Hiroshima Math. J. 19 (1989), 1–36.
- [36] Le, V. K. *On some equivalent properties of sub- and supersolutions in second order quasilinear elliptic equations*. Hiroshima Math. J. 28 (1998), 373–380.
- [37] Le, V. K. *Subsolution-supersolution method in variational inequalities*. Nonlinear Analysis 45 (2001), 775–800.
- [38] Le, V. K. *Subsolution-supersolutions and the existence of extremal solutions in non-coercive variational inequalities*. JIPAM J. Inequal. Pure Appl. Math. (electronic) 2 (2001), 1–16.
- [39] Le, V. K.; Schmitt, K. *On boundary value problems for degenerate quasilinear elliptic equations and inequalities*. J. Differential Equations 144 (1998), 170–218.
- [40] Le, V. K.; Schmitt, K. *Sub-supersolution theorems for quasilinear elliptic problems: A variational approach*. Electron. J. Differential Equations 2004 (2004), No. 118, 1–7.
- [41] Le, V. K.; Schmitt, K. *Some general concepts of sub- and supersolutions for nonlinear elliptic problems*. Topological Methods in Nonlinear Analysis 28 (2006), 87–103.
- [42] Mawhin, J. *Nonlinear functional analysis and periodic solutions of ordinary differential equations, Summer school on ordinary differential equations*. 37–60, Star’a Lesn’a, High Tatras, 1974.
- [43] Mawhin, J.; Schmitt, K. *Upper and lower solutions and semilinear second order elliptic equations with non-linear boundary conditions*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh 97A (1984), 199–207. Ibid. 100A, 361.
- [44] Montenegro, M.; Ponce, A. *The sub-supersolution method for weak solutions*. Proceedings of the American Mathematical Society, v. 136, p. 2429–2438, 2008.
- [45] Nagumo, M. *Über die Differentialgleichung $y'' = f(x, y, y')$* . Proc. Phys. Math. Soc. Japan 19 (1937), 861–866.
- [46] Nagumo, M. *Über das Randwertproblem der nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung*. Proc. Phys. Math. Soc. Japan 24 (1942), 845–851.
- [47] Sattinger, D. *Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems*. Indiana Univ. Math. J. 21 (1972), 979–1000.
- [48] Schmitt, K. *Periodic solutions of nonlinear second order differential equations*. Math. Z. 98 (1967), 200–207.

- [49] Schmitt, K. *Boundary value problems for nonlinear second order differential equations*. Monatshefte Math. 72 (1968), 347–354.
- [50] Schmitt, K. *Boundary value problems for quasilinear second order elliptic partial differential equations*. Nonlinear Analysis, TMA 2 (1978), 263–309.
- [51] Schmitt, K. *Periodic solutions of second order equations—a variational approach, The first 60 years of nonlinear analysis of Jean Mawhin*. 213–220, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2004.
- [52] Schmitt, K. *Revisiting the method of sub and supersolutions for nonlinear elliptic problems*. Proceedings of the Sixth Mississippi StateUBA Conference on Differential Equations and Computational Simulations, Electron. J. of Differ. Equ. Conf., 15, Southwest Texas State Univ., 377–385, 2007.
- [53] Scorza Dragoni, G. *Il problema dei valori ai limiti studiato in grande per le equazioni differenziali del secondo ordine*. Math. Ann. 105 (1931), 133–143.
- [54] Stampacchia, G. *Équations Elliptiques du Second Ordre à Coefficients Discontinus*. Séminaire de Mathématiques Supérieures, no. 16 (Été, 1965), Les Presses de l’Université de Montréal, Montréal, Québec, 1966. MR0251373 (40:4603)
- [55] Struwe, M. *Variational Methods: applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems*. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
- [56] Yosida, K. *Functional analysis*. (6th ed.), Springer-Verlag, Berlin and New York, 1980.