Universidade Federal de Juiz de Fora

Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Marianna Resende Oliveira

Existência, unicidade e decaimento exponencial da solução da equação de onda com amortecimento friccional.

Juiz de Fora

2014

Marianna Resende Oliveira

Existência, unicidade e decaimento exponencial da solução da equação de onda com amortecimento friccional.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito para obtenção do grau de Mestre, na área de matemática aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha

Juiz de Fora

2014

Oliveira, Marianna Resende.

Existência, unicidade e decaimento exponencial da solução da equação de onda com amortecimento friccional. / Marianna Resende Oliveira. - 2014.
64f. : il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2014.

1. Matemática. 2. Semigrupos 3. Sistema Dissipativo
4. Decaimento Exponencial I. Título.

Marianna Resende Oliveira

Existência, unicidade e decaimento exponencial da solução da equação de onda com amortecimento friccional.

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Acadêmico em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora.

Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha
(Orientador)
Mestrado Acadêmico em Matemática
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki
Mestrado Acadêmico em Matemática
UFJF

Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello
UNIFEI

Juiz de Fora, 06 de março de 2014.

Dedicado a Regina

Agradecimentos

- Em primeiro lugar a Deus. Sem a intercessão Dele nada disso seria possível.
- Ao meu orientador Carlos Alberto Raposo da Cunha pela paciência e pelas explicações sempre tão esclarecedoras.
- Ao meu querido professor Silvio Salgado, exemplo de dedicação e profissionalismo, que sempre esteve disponível para me ajudar e me incentivar durante a graduação na UFSJ e que me apresentou, juntamente com o Raposo, a possibilidade do mestrado na UFJF.
- A CAPES pelo apoio financeiro, o qual permitiu que eu me dedicasse exclusivamente aos meus estudos.
- A minha mãe, Regina, que se sacrificou, sozinha, para garantir a mim e a meu irmão, desde sempre, as melhores oportunidades de estudo. Junto com meu irmão Pablo, me deu toda força necessária para que eu continuasse firme no meu próposito de fazer um bom trabalho.
- Ao Felipe, meu namorado, que me deu apoio incondicional e ânimo nos momentos mais difíceis e que, por nenhum instante, me deixou sequer pensar em desistir. Muito obrigada por tudo!
- Aos professores do Departamento de Matemática na UFJF que, sempre solícitos, em muito contribuíram para meu crescimento intelectual e pessoal.
- Aos meus amigos do mestrado, com quem passei os melhores momentos durante essa caminhada. Muito obrigada pelo companheirismo, apoio e carinho.
- Aos amigos que fiz durante o tempo em que morei em Juiz de Fora e que também contribuíram para tornar meus dias mais agradáveis, mesmo diante dos problemas e dificuldades.

Resumo

Neste trabalho estudaremos o problema de ondas com amortecimento friccional. Consideraremos o caso em que a dissipação provocada pelo atrito, representado por αu_t (onde α é uma constante real positiva), atua em todo o domínio. Estudaremos a existência e unicidade da solução via Método de Galerkin e via Teoria dos Semigrupos. Para o estudo da estabilidade de solução empregaremos o Método de Energia e a técnica de Semigrupos aplicada a sistemas dissipativos. Ao final do trabalho vamos comparar os métodos utilizados para garantir a existência, unicidade e comportamento assintótico da solução. Usaremos a notação usual dos espaços de Sobolev.

Palavras-Chave: 1. Semigrupos 2. Sistema Dissipativo 3. Decaimento Exponencial

Abstract

In this work we will study the problem of waves with frictional damping. We will consider the case in which dissipation caused by the friction, represented by αu_t (where α is a positive real constant), operates throughout all the domain. We will study the existence and uniqueness of the solution through the Galerkin Method and the Semigroups Theory. To study the stability of the solution we will employ the Energy Method and the Semigroups technique applied to dissipative systems. At the end of the paper we will compare the methods used to ensure the existence, uniqueness and asymptotic behavior of the solution. We will use the usual notation of Sobolev spaces.

Key-words: 1. Semigroups 2. Dissipative system 3. Exponential Decay

Sumário

INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste trabalho fundamenta-se no estudo do seguinte modelo dissipativo:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} \ + \ \alpha \, u_t &= 0, \ x \in (0,L), \ t \geq 0 \\ u(x,0) &= u_0(x) \in H_0^1(0,L) \\ u_t(x,0) &= u_1(x) \in L^2(0,L) \\ u(0,t) &= u(L,t) = 0, \ t \geq 0. \end{aligned}$$

O atrito é representado por αu_t, com α uma constante real positiva. Representamos por $u(x,t)$ o deslocamento transversal de cada ponto $x \in (0,L)$ da corda no instante $t \geq 0$, a partir de sua posição de equilíbrio. Neste sentido, estudaremos a existência, unicidade e estabilidade de solução para o modelo que descreve as pequenas vibrações verticais de uma corda elástica de comprimento finito L e presa nas extremidades.

Apresentamos duas formas distintas de se garantir a existência, unicidade e decaimento exponencial da solução do modelo acima. Num primeiro momento provaremos a existência e unicidade de solução através do método de Faedo-Galerkin. Esse método se divide em 4 etapas que são apresentadas de forma sucinta e aplicadas no modelo em questão.

Já o decaimento exponencial da solução é obtido via Método de Energia. Definimos um funcional de Lyapunov adequado, equivalente ao funcional de energia $E(t)$, e a partir daí obtemos o resultado pretendido.

Em seguida apresentamos a teoria dos Semigrupos, com os importantes teoremas de Hille-Yosida, Lummer-Phillips e Gearhart. Através dessa teoria mostramos outra maneira de garantir a existência, unicidade e decaimento exponencial da solução do modelo.

Por fim, apresentamos um comentário final a respeito dos métodos adotados.
Ao longo do texto, quando utilizarmos a notação $f_n \to f$ estaremos considerando que a sequência de funções f_n converge para f quando $n \to \infty$.

1 *RESULTADOS PRELIMINARES*

Neste capítulo apresentamos importantes resultados que utilizaremos ao longo de nosso trabalho.

1.1 DISTRIBUIÇÕES

Vamos introduzir uma classe de objetos, que denominamos de distribuições, e nesta classe definimos uma derivada "generalizada" de tal forma que, quando restrita ao cálculo, permanecem válidas as regras usuais.

Seja $L^2(\mathbb{R})$ o espaço das funções $f(x)$ que são de quadrado integrável, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Considere $\mathcal{D}(\Omega)$ o espaço das funções infinitamente diferenciáveis que possuem suporte compacto em Ω, onde o suporte de uma função $\phi : \Omega \to \Omega$ é o conjunto

$$\overline{\{x \in \Omega / \phi(x) \neq 0\}}.$$

$\mathcal{D}(\mathbb{R})$ é um conjunto denso em $L^2(\mathbb{R})$. Sendo $L^2(\mathbb{R})$ um espaço de Hilbert considere o produto interno

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)dx, \quad \phi \in \mathcal{D}.$$

Agora vamos supor que f é continuamente diferenciável com derivada f'. Integrando por partes obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\phi(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)dx. \tag{1.1}$$

Agora observamos que o lado direito de (1.1) não envolve as derivadas de f. Também notamos que as operações

$$\phi \to \int_{\mathbb{R}} f'(x)\phi(x) \quad \text{e} \quad \phi \to -\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)dx$$

são lineares em $\mathcal{D}$. Dessa forma, se nós pudermos definir uma topologia em $\mathcal{D}$ que torna estas operações contínuas, então podemos definir f como um funcional linear contínuo em $\mathcal{D}$ e definir a derivada f' utilizando o lado direito de (1.1) mesmo quando f não é diferenciável. Empregaremos essa idéia a seguir.

Para nosso objetivo, nesta topologia, necessitamos apenas da noção de convergência de sequências em $\mathcal{D}$.

Definição 1.1. Uma sequência de funções $\phi_n \to 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$ se existe um conjunto compacto fixado $K \subset \Omega$ tal que o suporte de $\{\phi_n\}$ esteja contido em K para todo ϕ_n e além disto todas as derivadas convergem uniformemente a 0 em K.

Definição 1.2. Um funcional linear T em $\mathcal{D}(\Omega)$ é denominado uma distribuição em Ω quando

$$\phi_n \to 0 \text{ em } \mathcal{D}(\Omega) \;\Rightarrow\; T(\phi_n) \to 0.$$

Uma distribuição fundamental é obtida quando f é uma função localmente integrável e definimos $T_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$T_f(\phi) = \langle f , \phi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx.$$

Neste sentido dizemos, por exemplo, que duas funções f e g são iguais no sentido das distribuições quando

$$\langle f , \phi \rangle = \langle g , \phi \rangle, \quad \text{para toda} \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

1.2 ESPAÇOS DE SOBOLEV

Vamos introduzir uma classe de espaços de funções conhecidos como espaços de Sobolev que reúnem as propriedades necessárias ao estudo das equações diferenciais parciais (ver [1]).

Definição 1.3. Seja $m > 0$ um inteiro e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos por $W^{m,p}(\Omega)$ a coleção de todas as funções em $L^p(\Omega)$ tais que todas as derivadas de f no sentido das distribuições, até a ordem m, também estejam em $L^p(\Omega)$.

De acordo com a definição podemos escrever

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \ / \ D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo } \alpha \text{ com } |\alpha| \leq m\}.$$

$W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço vetorial e neste espaço introduzimos uma norma da seguinte maneira

$$||u||_{m,p} = \sum_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||_{L^p}.$$

O caso $p = 2$ tem um importante papel nos problemas de EDP e é frequentemente denotado por $H^m(\Omega)$ e sua norma denotada simplesmente por $|| \cdot ||$, isto é,

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

Neste trabalho estaremos interessados especialmente no caso $\Omega = (0, L)$, $p = 2$ e $m = 1$, que resulta em

$$H^1(0, L) = \{u \in L^2(0, L) / \, |u_x| \in L^2(0, L)\}$$

cuja norma é

$$||u|| = \int_0^L (|u|^2 + |u_x|^2) dx.$$

Quando as funções se anulam nos extremos do domínio, isto é, $u(0) = u(L) = 0$ denotamos o correspondente espaço de Sobolev por

$$H_0^1(0, L).$$

Outro caso em que estaremos interessados neste trabalho é quando $\Omega = (0, L)$, $p = 2$ e $m = 2$, que resulta em

$$H^2(0, L) = \{u \in L^2(0, L) / \, |u_x| \in L^2(0, L) \text{ e } |u_{xx}| \in L^2(0, L)\}$$

cuja norma é

$$||u|| = \int_0^L (|u|^2 + |u_x|^2 + |u_{xx}|^2) dx.$$

1.3 PROBLEMA DE AUTOVALORES

Para o problema

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \lambda u, \quad \text{em} \quad (0, L), \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, \end{aligned}$$

temos

Teorema 1.4. Existe uma base ortonormal $\{u_n\}$ de funções em $L^2(0,L)$ e uma sequência $\{\lambda_n\}$ de números reais positivos com

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty,$$

tais que

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots$$

e

$$u_{n,xx} = \lambda_n u_n, \quad \text{em} \quad (0,L),$$

$$u_n \in H_0^1(0,L) \cap C^\infty(0,L).$$

Demonstração. Ver [5], página 147. □

1.4 LAPLACIANO

Vamos denotar por $\Delta u = u_{xx}$. Este operador é denominado Laplaciano.

Considere

$$\Delta : L^2(0,L) \to L^2(0,L)$$

com domínio $D(\Delta) = H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)$.

Δ é densamente definido. Vamos mostrar que também é ilimitado.

Considere $\{u_n\}$ a sequência de autofunções de Δ. Então

$$||\Delta|| = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta u_n}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty.$$

1.5 REGULARIDADE ELÍTICA

Considere o seguinte problema elítico:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, \quad \text{em} \quad (0,L), \\ u(0,t) &= u(L,t) = 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Uma solução clássica para este problema é uma função $u \in C^2[0,L]$ que satisfaz (1.2) ponto a ponto.

Suponha, então, que u é uma solução clássica. Multiplicando (1.2) por $\phi \in \mathcal{D}(0,L)$ e integrando obtemos
$$-\int_0^L \Delta u\phi \, dx = \int_0^L f\phi \, dx.$$
Agora integrando por partes obtemos
$$\int_0^L u_x \phi_x dx = \int_0^L f\phi dx. \tag{1.3}$$
Sendo $u \in C^2[0,L]$ e $u(0,t) = u(L,t) = 0$ então $u \in H_0^1(0,L)$. Além disto, $\mathcal{D}(0,L)$ é denso em $H_0^1(0,L)$ e ambos os lados de (1.3) são funções contínuas de ϕ com respeito a topologia de $H_0^1(0,L)$. Por densidade segue que
$$\int_0^L u_x v dx = \int_0^L f v dx \quad \text{para todo} \quad v \in H_0^1(0,L). \tag{1.4}$$
Note que (1.4) não necessita de nenhuma informação sobre a segunda derivada de u e neste sentido dizemos que u é uma solução fraca de (1.2). Verificamos, dessa forma, que toda solução clássica é uma solução fraca. O próximo teorema garante a existência de soluções fracas para uma certa classe de funções f.

Teorema 1.5. Se $f \in L^2(0,L)$ então existe uma única solução fraca $u \in H_0^1(0,L)$ satisfazendo (1.4).

Demonstração. Ver [5], página 118. □

A questão interessante é saber quando uma solução fraca ainda é uma solução suave, ou seja, possui segunda derivada. Neste sentido se $f \in L^2(0,L)$ então $u \in H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)$. Ver [5], seção 3.3.

1.6 OUTROS RESULTADOS IMPORTANTES

Teorema 1.6. (Desigualdade de Poincaré) Suponha que I é um intervalo limitado. Então existe uma constante C (dependente de $|I| < \infty$) tal que

$$||u||_{W^{1,p}(I)} \leq C \; ||u'||_{L^p(I)}, \; \forall \; u \in W_0^{1,p}(I).$$

Com esta desigualdade é possível mostrar que em $W_0^{1,p}$, a norma $||u'||_{L^p}$ é uma norma equivalente a norma $||u||_{W^{1,p}}$ em $W^{1,p}$.

Demonstração. Ver [2], página 134. $\square$

Teorema 1.7. $H_0^1(0,L)$ é separável.

Demonstração. Ver [2], página 133. $\square$

Definição 1.8. Definimos $L^p(0,T;L^q(\Omega))$ como o conjunto das funções $f:[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}$, tal que para quase todo $t\in[0,T]$, $f(x,t)\in L^q(\Omega)$ e além disso

$$\int_0^T |f|_{L^q}^p \, dt < \infty.$$

2 EXISTÊNCIA E UNICIDADE VIA GALERKIN

Neste capítulo provaremos a existência e unicidade da solução da equação de onda com amortecimento friccional utilizando o Método de Faedo-Galerkin (ver [12]).

O MÉTODO

O método de Faedo-Galerkin consiste em obter a solução de um problema através de soluções aproximadas. A busca da solução em um espaço V de dimensão infinita - V dotado de norma, produto interno e uma base enumerável ortonormal $\{w_1,\ w_2,\ \dots\ ,\ w_n,\ \dots\}$ - é realizada utilizando, para cada n, o espaço gerado

$$V_n = [w_1,\ w_2,\ \dots\ ,\ w_n].$$

Neste sentido o método é completado em quatro etapas:

Etapa 1: Provar a existência de solução $u^n \in V_n$ para o problema aproximado.

Etapa 2: Mostrar que as soluções u^n são limitadas em V, independentemente de n. Isto é feito via estimativas a priori.

Etapa 3: Da etapa 2 segue que existe uma subsequência de u^n (que se denota pelo mesmo índice) que converge fracamente. Mostrar que esse limite fraco é solução do problema.

Etapa 4: Provar a unicidade de solução do problema original. Daí se deduz que toda subsequência de u^n tem o mesmo limite e, então, a sequência inteira converge para o limite fraco.

2.1 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO

Vamos aplicar o método na solução do problema:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} + \alpha u_t &= 0, \;\; t \geq 0, \; x \in [0, L] & (2.1)\\ u(0,t) = u(L,t) &= 0, \; t \geq 0 & (2.2)\\ u(x,0) &= u_0(x), \; x \in [0, L] & (2.3)\\ u_t(x,0) &= u_1(x), \; x \in [0, L]. & (2.4) \end{aligned}$$

Vamos considerar

$$u_0(x) \in H_0^1(0, L) \; e \; u_1(x) \in L^2(0, L). \tag{2.5}$$

De agora em diante utilizaremos a notação e definições dos espaços de Sobolev como em [1].

Definição 2.1. Uma função $u : (0, L) \times (0, T) \to \mathbb{R}$ com

$$u \in L^\infty(0, T; H_0^1(0, L)) \; e \; u_t \in L^\infty(0, T; L^2(0, L))$$

é denominada solução fraca do problema (2.1)-(2.4) quando, para toda função $v \in H_0^1(0, L)$ temos

$$\frac{d}{dt}(u_t, v) + ((u, v)) + \alpha(u_t, v) = 0 \tag{2.6}$$

em $D'(0, T)$ e ainda $u(x, 0) = u_0(x)$ e $u_t(x, 0) = u_1(x)$.

Observação 2.1. Estamos representando por $(.,.)$ e $((.,.))$ os produtos internos em $L^2(0, L)$ e $H_0^1(0, L)$, respectivamente.

Identificando $L^2(0, L)$ com seu dual temos a seguinte inclusão

$$H_0^1(0, L) \subset L^2(0, L) \subset H^{-1}(0, L),$$

onde $H^{-1}(0, L)$ é o dual de $H_0^1(0, L)$.

Devido a (2.6) temos que

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha u_t = 0 \; em \; D'((0,L) \times (0,T)).$$

Assim consideramos as inclusões $u_t \in L^\infty(0,T,H^{-1}(0,L))$ e $u_{xx} \in L^\infty(0,T,H^{-1}(0,L))$.

Dessa forma

$$u_{tt} \in L^\infty(0,T,H^{-1}(0,L)) \subset L^2(0,T,H^{-1}(0,L)) \tag{2.7}$$

e como consequência $u(x,0)$ e $u_t(x,0)$ estão bem definidos, ver [6], Cap. 1, Lema 1.2.

Teorema 2.2. O problema (2.1)-(2.4) admite uma única solução fraca u, tal que u satisfaz (2.5).

Demonstração. Para provar este teorema vamos utilizar o método de Galerkin.

Etapa 1: Problema Aproximado.

Sendo $H_0^1(0,L)$ separável, seja $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma base para $H_0^1(0,L)$.

Vamos considerar a base especial constituída de autovetores do problema elíptico

$$\begin{cases} -w_{j,xx} = \lambda_j w_j, \\ w_j(0) = w_j(L) = 0. \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos $V_n = [w_1, w_2, ..., w_n]$ o subespaço de dimensão finita de $H_0^1(0,L)$ gerado pelos n primeiros vetores da base especial.

Vamos definir a sequência

$$u^n(x,t) := \sum_{j=1}^{n} g_j(t) w_j(x),$$

onde as funções $g_j(t)$ são escolhidas de modo que (u^n) seja solução do problema aproximado

$$(u_{tt}^n, w_j) + ((u^n, w_j)) + \alpha\,(u_t^n, w_j) = 0, \tag{2.8}$$

com $j = \{1, 2, ..., n\}$ e com as condições

$$\begin{aligned} u^n(x,0) &= u_0^n(x) \to u_0(x) \in H_0^1(0,L) && (2.9)\\ u_t^n(x,0) &= u_1^n(x) \to u_1(x) \in L^2(0,L). && (2.10) \end{aligned}$$

De (2.8) segue que

$$\int_0^L u_{tt}^n w_j \, dx + \int_0^L u_x^n w_{j,x} \, dx + \alpha \int_0^L u_t^n w_j \, dx = 0$$

o que equivale a

$$\int_0^L u_{tt}^n w_j \, dx - \int_0^L u_{xx}^n w_j \, dx + \alpha \int_0^L u_t^n w_j \, dx = 0. \qquad (2.11)$$

Lembrando que, por definição, $u^n(x,t) := \sum_{j=1}^{n} g_j(t) w_j(x)$ temos:

$$u_{tt}^n(x,t) = \sum_{j=1}^{n} g_j''(t) w_j(x) \; e \; u_{xx}^n(x,t) = \sum_{j=1}^{n} g_j(t) w_{j,xx}(x).$$

Dessa forma, voltando a (2.11) segue que:

$$\begin{aligned} \int_0^L \left[\sum_{j=1}^{n} g_j''(t) w_j(x) \right] w_i(x) \, dx \; &- \; \int_0^L \left[\sum_{j=1}^{n} g_j(t) w_{j,xx}(x) \right] w_i(x) \, dx \\ &+ \alpha \int_0^L \left[\sum_{j=1}^{n} g_j'(t) w_j(x) \right] w_i(x) \, dx \; = 0. \end{aligned}$$

Considerando que $-w_{j,xx} = \lambda_j w_j$ chegamos a

$$\begin{aligned} \int_0^L \left[\sum_{j=1}^{n} g_j''(t) w_j(x) \right] w_i(x) \, dx \; &+ \; \int_0^L \left[\sum_{j=1}^{n} g_j(t) \lambda_j w_j(x) \right] w_i(x) \, dx \\ &+ \alpha \int_0^L \left[\sum_{j=1}^{n} g_j'(t) w_j(x) \right] w_i(x) \, dx \; = 0. \end{aligned}$$

Desenvolvendo os somatórios e lembrando que a base especial é ortonormal chegamos na equação

$$g_j''(t) \ + \ \alpha g_j'(t) + \lambda_j g_j(t) = 0,$$

que é uma EDO linear de segunda ordem e, portanto, tem solução.

Dessa forma as funções $g_j(t)$ estão definidas e existe uma solução da forma $u^n(x,t) = \sum_{j=1}^{n} g_j(t)w_j(x)$, para o problema aproximado, em um intervalo $[0,T_n)$.

A ideia agora é estender a solução ao intervalo $[0,T)$. Faremos isto por meio de estimativas a priori.

Etapa 2: Estimativas a priori.

Do problema aproximado (2.8) havíamos chegado na equação

$$\int_0^L u_{tt}^n w_j \ dx + \int_0^L u_x^n w_{j,x} \ dx + \alpha \int_0^L u_t^n w_j \ dx = 0.$$

Multiplicando essa equação por $g_j'(t)$ e tomando o somatório com j variando de 1 a n obtemos

$$\int_0^L u_{tt}^n \sum_{j=1}^{n} g_j'(t)w_j(x) \ dx + \int_0^L u_x^n \sum_{j=1}^{n} g_j'(t)w_{j,x} \ dx + \alpha \int_0^L u_t^n \sum_{j=1}^{n} g_j'(t)w_j(x) \ dx = 0,$$

o que implica que

$$\int_0^L u_{tt}^n u_t^n \ dx + \int_0^L u_x^n u_{xt}^n \ dx + \alpha \int_0^L |u_t^n|^2 \ dx = 0,$$

que é equivalente a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |u_t^n|^2 \ dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |u_x^n|^2 \ dx + \alpha \int_0^L |u_t^n|^2 \ dx = 0.$$

Integrando em $(0,t)$ temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^L |u_t^n(x,t)|^2 \ dx + \frac{1}{2}\int_0^L |u_x^n(x,t)|^2 \ dx + \alpha \int_0^t \int_0^L |u_t^n(x,t)|^2 \ dx \ dt \\ = \frac{1}{2}\int_0^L |u_t^n(x,0)|^2 \ dx + \ \frac{1}{2}\int_0^L |u_x^n(x,0)|^2 \ dx,\end{aligned}$$

o que implica

$$|u_t^n|_{L^2}^2 + ||u^n||_{H_0^1}^2 + 2\alpha \int_0^t \int_0^L |u_t^n|^2 \, dx \, dt = |u_1^n|_{L^2}^2 + ||u_0^n||_{H_0^1}^2,$$

de onde segue que

$$|u_t^n|^2 + ||u^n||^2 \leq |u_1^n|^2 + ||u_0^n||^2.$$

Lembremos que

$$\begin{aligned} u^n(x,0) &= u_0^n(x) \to u_0(x) \in H_0^1(0,L) \\ u_t^n(x,0) &= u_1^n(x) \to u_1(x) \in L^2(0,L). \end{aligned}$$

Logo $||u_0^n|| \leq C_0$ e $||u_1^n|| \leq C_1$ com C_0 e C_1 independentes de n.

Então para $\frac{C}{2} = max\{C_0, C_1\}$ temos

$$|u_t^n|^2 + ||u^n||^2 \leq C$$

com C independente de n, ou seja,

$$|u_t^n|^2 + ||u^n||^2 \leq C, \ \forall \, t \in [0,t).$$

Daí podemos concluir que

- u^n é limitada em $L^\infty(0,T;H_0^1(0,L))$,
- u_t^n é limitada em $L^\infty(0,T;L^2(0,L))$.

Por resultados de compacidade dos espaços de Sobolev existe uma subsequência, a qual denotaremos da mesma forma (u^n), tal que

$$u^n \rightharpoonup u \ em \ L^\infty(0,T;H_0^1(0,L)), \tag{2.12}$$

$$u_t^n \rightharpoonup u_t \ em \ L^\infty(0,T;L^2(0,L)). \tag{2.13}$$

Agora vamos à passagem do limite, que corresponde à etapa 3.

Etapa 3: Passagem do Limite.

Multiplicando a equação (2.8) por $\theta \in D(0,T)$ e integrando de 0 a t obtemos:

$$\int_0^t (u_{tt}^n, w_j)\,\theta(t)\,dt \;+\; \int_0^t ((u^n, w_j))\,\theta(t)\,dt \;+\; \alpha \int_0^t (u_t^n, w_j)\,\theta(t)\,dt = 0.$$

Integrando por partes temos:

$$-\int_0^t (u_t^n, w_j)\,\theta'(t)\,dt \;+\; \int_0^t ((u^n, w_j))\,\theta(t)\,dt \;+\; \alpha \int_0^t (u_t^n, w_j)\,\theta(t)\,dt = 0. \tag{2.14}$$

Devido as convergências obtidas em (2.12) e (2.13) podemos passar o limite em (2.14) e obter:

$$-\int_0^t (u_t, w_j)\,\theta'(t)\,dt \;+ \int_0^t ((u, w_j))\,\theta(t)\,dt \;+\; \alpha \int_0^t (u_t, w_j)\,\theta(t)\,dt = 0.$$

Pela densidade das combinações lineares finitas dos elementos da base $\{w_j\}$ em $H_0^1(0,L)$ segue que

$$-\int_0^t (u_t, v)\,\theta'(t)\,dt \;+ \int_0^t ((u, v))\,\theta(t)\,dt \;+\; \alpha \int_0^t (u_t, v)\,\theta(t)\,dt = 0, \tag{2.15}$$

para todo $v \in H_0^1(0,L)$.

Agora observamos que

$$-\int_0^t (u_t, v)\,\theta'(t)\,dt = -(u_t, v)\,\theta|_0^t \;+\; \int_0^t \frac{d}{dt}(u_t, v)\,\theta\,dt.$$

Usando essa igualdade em (2.15) obtemos

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\,(u_t, v)\,\theta(t)\,dt \;+ \int_0^t ((u, v))\,\theta(t)\,dt \;+\; \alpha \int_0^t (u_t, v)\,\theta(t)\,dt = 0,$$

para todo $v \in H_0^1(0,L)$ e para todo $\theta \in D(0,T)$, isto é, na dualidade $\langle .,. \rangle_{D' \times D}$:

$$\left\langle \frac{d}{dt}\,(u_t, v) \;+\; ((u, v)) \;+\; \alpha(u_t, v)\;,\; \theta \right\rangle = 0.$$

Daí concluímos que, no sentido das distribuições,

$$\frac{d}{dt}(u_t, v) \ + \ ((u,v)) \ + \ \alpha(u_t, v) = 0 \ em \ D'(0,T). \tag{2.16}$$

Verificação dos dados iniciais

Inicialmente observamos que, como consequência de [7], Capítulo 3, Lema 8.1., as convergências obtidas em (2.12) e (2.13) juntamente com (2.7), implicam que

$$u \in C(\,[0,T]; L^2(0,L)\,),$$
$$u_t \in C(\,[0,T]; H^{-1}(0,L)\,).$$

Provaremos agora que $u(x,0) = u_0(x)$. Considere $\theta \in C^1([0,T])$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$.

Sabemos que

$$\int_0^T (u_t^n, w_j)\,\theta(t)\,dt \to \int_0^T (u_t, w_j)\,\theta(t)\,dt.$$

Integrando por partes obtemos

$$-(u^n(x,0), w_j) - \int_0^T (u^n, w_j)\,\theta'(t)\,dt \to -(u(x,0), w_j) - \int_0^T (u, w_j)\,\theta'(t)\,dt.$$

Como $u^n \rightharpoonup u$ em $L^\infty(0,T,L^2(0,L))$ temos que

$$\int_0^T (u^n, w_j)\,\theta'(t)\,dt \to \int_0^T (u, w_j)\,\theta'(t)\,dt,$$

o que implica que

$$(u^n(x,0), w_j) \to (u(x,0), w_j), \forall\, w_j \in H_0^1(0,L) \subset L^2(0,L).$$

Logo $u^n(x,0) \to u(x,0)$ em $L^2(0,L)$.

Mas, do problema aproximado, temos que $u^n(x,0) \to u_0(x)$ em $H_0^1(0,L) \subset L^2(0,L)$. Pela unicidade do limite segue que

$$u(x,0) = u_0(x) \; em \; L^2(0,L) \Rightarrow u(x,0) = u_0(x) \; em \; H_0^1(0,L). \tag{2.17}$$

Vamos agora provar que $u_t(x,0) = u_1(x)$.

Para $0 < \delta < T$, definimos em $H_0^1(0,T)$, a seguinte função

$$\theta_\delta(t) = \begin{cases} -\dfrac{t}{\delta} + 1, & 0 \leq t \leq \delta, \\ 0, & \delta < t \leq T. \end{cases}$$

Multiplicando a equação (2.8) por θ_δ e integrando de 0 a T obtemos:

$$\int_0^\delta (u_{tt}^n, w_j)\, \theta_\delta(t)\, dt \;+\; \int_0^\delta ((u^n, w_j))\, \theta_\delta(t)\, dt \;+\; \alpha \int_0^\delta (u_t^n, w_j)\, \theta_\delta(t)\, dt = 0.$$

Integrando por partes obtemos

$$-(u_t^n(x,0), w_j) + \frac{1}{\delta}\int_0^\delta (u_t^n, w_j)\, dt \;+\; \int_0^\delta ((u^n, w_j))\, \theta_\delta(t)\, dt \;+\; \alpha \int_0^\delta (u_t^n, w_j)\, \theta_\delta(t)\, dt = 0.$$

Fazendo $n \to \infty$ e considerando a densidade da base $\{w_j\}$ em $H_0^1(0,L)$, temos que, para todo $v \in H_0^1(0,L)$,

$$-(u_1(x), v) + \frac{1}{\delta}\int_0^\delta (u_t, v)\, dt \;+\; \int_0^\delta ((u^n, v))\, \theta_\delta(t)\, dt \;+\; \alpha \int_0^\delta (u_t^n, v)\, \theta_\delta(t)\, dt = 0.$$

Pelo teorema do valor médio para integrais, da última expressão segue que existe $c \in (0,\delta)$ tal que

$$-(u_1(x), v) + (u_t(x,c), v) \;+\; \int_0^\delta ((u^n, v))\, \theta_\delta(t)\, dt \;+\; \alpha \int_0^\delta (u_t^n, v)\, \theta_\delta(t)\, dt = 0.$$

Agora fazendo $\delta \to 0$, obtemos

$$-(u_1(x), v) + (u_t(x,0), v) = 0, \quad \text{para todo} \quad v \in H_0^1(0,L),$$

de onde concluímos que

$$u_t(x,0) = u_1(x), \tag{2.18}$$

conforme queríamos.

Dessa forma, considerando (2.16), (2.17) e (2.18) segue que u é solução fraca de (2.1)-(2.4).

Por fim, provaremos a unicidade da solução.

2.2 UNICIDADE

Etapa 4: Unicidade.

Suponhamos que o problema (2.1)-(2.4) admita duas soluções, u e v, e considere $w = u - v$. Temos então que

$$w \in L^\infty(0,T;H_0^1(0,L)) \tag{2.19}$$

$$w_t \in L^\infty(0,T;L^2(0,L)) \tag{2.20}$$

$$w_{tt} \in L^2(0,T;H^{-1}(0,L))$$

e

$$\begin{aligned} w_{tt} - w_{xx} + \alpha w_t &= 0 \; em \; L^2(0,T;H^{-1}(0,L)) && (2.21)\\ w(x,0) &= 0 && (2.22)\\ w_t(x,0) &= 0. && (2.23) \end{aligned}$$

Vamos utilizar o método de Visik-Ladyzhenskaia (ver [13]).

Fixado $s \in [0,T]$ definimos

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} -\displaystyle\int_t^s w(x,\xi)\, d\xi;\ 0 \le t < s \\ 0;\ t \ge s. \end{cases}$$

Temos que:

$$\Psi_t(x,t) = \begin{cases} w(x,t);\ 0 \le t < s \\ 0;\ t \ge s. \end{cases}$$

Segue de (2.19) e (2.20) que Ψ e Ψ_t pertencem a $L^\infty(0,T,H_0^1(0,L))$.

Vamos então multiplicar (2.21) por Ψ e integrar em $[0,L]$ obtendo:

$$\int_0^L w_{tt}\Psi\, dx \ - \ \int_0^L w_{xx}\Psi\, dx \ + \ \alpha \int_0^L w_t\Psi\, dx = 0,$$

isto é,

$$(w_{tt},\Psi) \ + \ ((w,\Psi)) \ + \ \alpha(w_t,\Psi) = 0.$$

Integrando em $[0,s]$ e lembrando que $\Psi \equiv 0$ em $[s,T]$ obtemos:

$$\int_0^s (w_{tt},\Psi)\, dt \ + \ \int_0^s ((w,\Psi))\, dt \ + \ \alpha \int_0^s (w_t,\Psi)\, dt = 0.$$

Como

$$\Psi(x,t) = \int_0^t w(x,\xi)\, d\xi - \int_0^s w(x,\xi)\, d\xi,$$

temos $\Psi(x,s) = 0$.

Agora integrando por partes e utilizando $\Psi(x,s) = 0$ juntamente com $w_t(x,0) = 0$, obtemos

$$-\int_0^s (w_t,w)\, dt \ + \ \int_0^s ((\Psi_t,\Psi))\, dt \ + \ \alpha \int_0^s (w_t,\Psi)\, dt = 0.$$

Dessa forma

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^s |w|^2\ dt\ +\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^s ||\Psi||^2\ dt\ +\ \alpha\int_0^s (w_t,\Psi)\ dt = 0,$$

o que equivale a

$$-\frac{d}{dt}\int_0^s |w|^2\ dt\ +\ \frac{d}{dt}\int_0^s ||\Psi||^2\ dt\ +\ 2\alpha\int_0^s (w_t,\Psi)\ dt = 0.$$

Daí segue que

$$|w(x,s)|^2\ +\ ||\Psi(x,0)||^2\ -\ 2\alpha\int_0^s (w_t,\Psi)\ dt = 0. \tag{2.24}$$

Fazendo a integração por partes temos:

$$|w(x,s)|^2\ +\ ||\Psi(x,0)||^2\ +\ 2\alpha\int_0^s |w|^2\ dt = 0\ \forall\ s;\ 0 \leq s \leq T.$$

Logo $w(s) = 0$ $q.s.$ em $[0,T]$. Daí concluímos que:

$$u(x,s) = v(x,s)\ q.s.\ em\ [0,T],\ \forall x \in (0,L).$$

□

3 DECAIMENTO EXPONENCIAL VIA MÉTODO DE ENERGIA

Neste capítulo provaremos que a solução da equação de onda com amortecimento friccional possui decaimento exponencial. Para isso, utilizaremos o Método de Energia.

3.1 EQUAÇÃO DA ONDA

Nesta seção vamos utilizar técnicas multiplicativas no problema da equação de ondas. Essas técnicas consistem em multiplicar a equação de onda por funções adequadas e integrá-la ao longo do intervalo $[0, L]$. Para esta finalidade precisamos da continuidade das funções

$$u = u(x, t) \text{ e } u_t = u_t(x, t).$$

Neste sentido se tomarmos o dado inicial

$$u_0(x) \in H_0^1(0, L)$$

então temos que $u \in H_0^1(0, L)$ e pelo Teorema de Relilich-Kondrachov - ver [1], página 144 - para o caso $j = 0, m = 1, p = 2$ e $n = 1$ segue que

$$u \in C([0, L]).$$

Agora se

$$u_1(x) \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L),$$

então, novamente pelo Teorema de Relilich-Kondrachov, além da continuidade de u_t em $[0, L]$, temos ainda

$$u_t \in L^2(0, L) \text{ e } u_{tx} \in L^2(0, L).$$

Para calcular a Energia do Sistema associado a nosso problema principal, vamos inicialmente considerar o seguinte modelo:

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - u_{xx} &= 0 && (3.1)\\
u(0,t) &= u(L,t) = 0 && (3.2)\\
u(x,0) &= u_0(x) \in H_0^1(0,L) && (3.3)\\
u_t(x,0) &= u_1(x) \in L^2(0,L). && (3.4)
\end{aligned}
$$

Multiplicando (3.1) por u_t e integrando em $(0, L)$ obtemos:

$$\int_0^L (u_{tt}u_t - u_{xx}u_t)\, dx = 0. \tag{3.5}$$

Vamos, então, calcular separadamente cada parte da integral acima.

$$\int_0^L u_{tt}u_t\, dx = \int_0^L \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_t|^2\, dx = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^L |u_t|^2\, dx. \tag{3.6}$$

$$\int_0^L u_{xx}u_t\, dx = (u_x u_t)_0^L - \int_0^L u_x u_{xt}\, dx = -\int_0^L \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_x|^2\, dx = -\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^L |u_x|^2\, dx. \tag{3.7}$$

Note que a integral em (3.6) faz sentido devido a localização do dados iniciais, o que garante $u_t \in L^2(0, L)$.

Por outro lado a integral em (3.7) também faz sentido pois $u \in L^2(0, L)$ e $u_{tx} \in L^2(0, L)$.

Com estas integrais devidamente justificadas, podemos definir a energia do sistema.

Definição 3.1. A energia cinética associada ao modelo (3.1)-(3.4) é dada por:

$$E_1(t) = \frac{1}{2}\int_0^L |u_t|^2 dx.$$

Definição 3.2. A energia potencial associada ao modelo (3.1)-(3.4) é dada por:

$$E_2(t) = \frac{1}{2}\int_0^L |u_x|^2 dx.$$

Definição 3.3. Somando as energias cinética e potencial obtemos a Energia Total $E(t)$

do modelo, ou seja

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) = \frac{1}{2} \int_0^L |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L |u_x|^2 dx.$$

A partir das definições anteriores podemos reescrever (3.6) e (3.7) como

$$\int_0^L u_{tt} u_t \, dx = \frac{d}{dt} \, E_1(t), \tag{3.8}$$

$$\int_0^L u_{xx} u_t \, dx = -\frac{d}{dt} \, E_2(t), \tag{3.9}$$

respectivamente.

Utilizando (3.5), (3.8) e (3.9) obtemos:

$$\frac{d}{dt} \, [E_1(t) \; + \; E_2(t)] = \frac{d}{dt} \, [E(t)] = 0. \tag{3.10}$$

Dessa forma concluímos que a energia total, nesse caso, é constante o que significa que nosso modelo está em movimento retilíneo uniforme (MRU).

Vamos agora integrar (3.10) em $(0, t)$ com $t > 0$:

$$\int_0^t \frac{d}{dt} \, [E(t)] \, dt = \int_0^t \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^L |u_t|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_0^L |u_x|^2 dx \right\} \, dt = 0.$$

Obtemos então

$$\frac{1}{2} \int_0^L |u_t(x,t)|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_0^L |u_x(x,t)|^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_0^L |u_t(x,0)|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_0^L |u_x(x,0)|^2 \, dx.$$

Dessa forma, utilizando os dados iniciais do problema, e denotando $u_x(x,0) = u_2(x)$ concluímos que

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L |u_1(x)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L |u_2(x)|^2 dx. \tag{3.11}$$

De (3.11) observamos que o cálculo da energia $E(t)$ só é possível se $|u_1(x)|^2$ e $|u_2(x)|^2$ forem integráveis.

Nesse contexto, faz sentido aplicar o Método de Energia e estudar o problema (3.1)-(3.4) na seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0,\ x \in (0, L),\ t \geq 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) \in H_0^1(0, L) \\ u_t(x, 0) &= u_1(x) \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L) \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0,\ t \geq 0. \end{aligned}$$

Vamos, a partir de agora, portanto, considerar o caso em que o sistema é amortecido por uma força externa denominada atrito (representada por αu_t, com $\alpha > 0$).

3.2 EQUAÇÃO DA ONDA COM ATRITO

A partir de agora vamos trabalhar com o seguinte problema:

$$u_{tt} - u_{xx} = -\alpha\, u_t,\ x \in (0, L),\ t \geq 0 \tag{3.12}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \in H_0^1(0, L) \tag{3.13}$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x) \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L) \tag{3.14}$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0,\ t \geq 0. \tag{3.15}$$

Multiplicando (3.12) por u_t e integrando em $(0, L)$ obtemos:

$$\int_0^L (u_{tt} u_t - u_{xx} u_t)\, dx = -\alpha \int_0^L |u_t|^2\, dx.$$

Dessa forma:

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\alpha \int_0^L |u_t|^2 dx < 0. \tag{3.16}$$

De (3.16) temos que $E(t)$ é uma função decrescente e como $E(t) \geq 0$ por definição segue que

$$E(t) \to 0 \ \ quando \ \ t \to \infty.$$

Isto significa que, com o passar do tempo, o sistema pára pois toda a energia é gasta.

Da desigualdade de Poincaré temos que:

$$\int_0^L |u|^2 dx \leq C \int_0^L |u_x|^2 \, dx, \ \forall u \in H_0^1(0, L).$$

Agora observe que, da equação anterior obtemos:

$$\frac{1}{2C} \int_0^L |u|^2 \, dx \leq \frac{1}{2} \int_0^L |u_x|^2 \, dx \leq \frac{1}{2} \int_0^L |u_x|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_0^L |u_t|^2 \, dx = E(t).$$

Logo, quando $t \to \infty$ temos que $E(t) \to 0$ o que implica que

$$\int_0^L |u(x,t)|^2 \, dx \to 0.$$

Dessa forma temos que $u \to 0$ em $L^2(0, L)$. Ou seja, quando a energia no sistema diminui, a variação no deslocamento transversal também diminui.

Agora a questão importante é a seguinte: Qual é a taxa de decaimento da solução quando $t \to \infty$?

3.3 DECAIMENTO EXPONENCIAL

Definição 3.4. Decaimento exponencial

Dizemos que a energia do sistema possui decaimento exponencial quando

$$E(t) \leq CE(0)e^{-wt}, \ onde \ C, \ w \ > 0$$

Resumindo, para garantirmos o decaimento exponencial da solução de nosso modelo com atrito procuramos estimativas da forma

$$E(t) \leq CE(0)e^{-wt}, \ \forall t \geq 0$$

3.4 O MÉTODO DE ENERGIA

O Método de Energia utilizado para provar o decaimento exponencial consiste em construir um funcional de Lyapunov, $\mathcal{L}(t)$, que é um funcional equivalente ao funcional de energia $E(t)$ e, a partir dessa equivalência, obter a estimativa desejada.

Entendemos por equivalência entre $\mathcal{L}(t)$ e $E(t)$ a existência de constantes reais e positivas C_0 e C_1 tais que

$$C_0\, E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq C_1\, E(t),\ \forall t \geq 0$$

Voltando ao problema inicial, multiplicando (3.12) por u e integrando em $(0, L)$ obtemos

$$\int_0^L u_{tt} u \, dx - \int_0^L u_{xx} u \, dx = -\alpha \int_0^L u_t u \, dx,$$

o que implica que

$$\int_0^L \frac{d}{dt}\,(u_t u)\, dx - \int_0^L |u_t|^2 \, dx + \int_0^L |u_x|^2 \, dx = -\alpha \int_0^L \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,|u|^2 \, dx. \tag{3.17}$$

Vamos definir então:

$$\mathcal{L}_1(t) = \int_0^L \left(u_t u + \frac{\alpha}{2}|u|^2 \right)\, dx.$$

Assim, utilizando (3.17) obtemos:

$$\frac{d}{dt}\,\mathcal{L}_1(t) = -\int_0^L |u_x|^2 \, dx + \int_0^L |u_t|^2 \, dx. \tag{3.18}$$

Lembremos que:

$$\frac{d}{dt}\,E(t) = -\alpha \int_0^L |u_t|^2 \, dx.$$

Multiplicando (3.18) por $\dfrac{\alpha}{2}$ temos

$$\frac{\alpha}{2}\,\frac{d}{dt}\,\mathcal{L}_1(t) = -\frac{\alpha}{2}\int_0^L |u_x|^2 \, dx + \frac{\alpha}{2}\int_0^L |u_t|^2 \, dx.$$

Agora definimos $\mathcal{L}(t) = \dfrac{\alpha}{2}\,\mathcal{L}_1(t) + E(t)$ e daí temos que:

$$\frac{d}{dt}\,\mathcal{L}(t) = -\frac{\alpha}{2}\int_0^L |u_x|^2 dx + \frac{\alpha}{2}\int_0^L |u_t|^2 dx - \alpha\int_0^L |u_t|^2 dx = -\frac{\alpha}{2}\int_0^L |u_x|^2 dx - \frac{\alpha}{2}\int_0^L |u_t|^2 dx.$$

Assim

$$\frac{d}{dt}\,\mathcal{L}(t) = -C_2\,E(t),$$

onde $C_2 = \alpha$.

Como existem C_0 e C_1 tais que $C_0 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq C_1 E(t)$ então

$$C_0 E(t) \leq C_1 E(t) \;\Rightarrow\; \frac{C_0}{C_1} \leq 1.$$

Daí temos que:

$$\frac{d}{dt}\,C_0\,E(t) \leq \frac{d}{dt}\,\mathcal{L}(t) = -C_2\,E(t) = (-1)\,C_2\,E(t) \leq -\frac{C_0}{C_1}\,C_2 E(t).$$

Logo

$$\frac{d}{dt}\,E(t) \leq -\frac{C_2}{C_1}\,E(t),$$

o que implica que

$$E'(t) \leq -w\,E(t)\;onde\;w \;=\; \frac{C_2}{C_1}.$$

Dessa forma chegamos a $E'(t) + wE(t) \leq 0$.

Usando o fator integrante e^{wt} teremos

$$e^{wt}E'(t) + e^{wt}wE(t) \leq 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\,(e^{wt}E(t)) \leq 0.$$

Integrando em $(0, t)$ obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{d}{dt}\left(e^{wt}E(t)\right) dt \leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad e^{wt}\, E(t) - e^{w0}E(0) \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad e^{wt}E(t) \leq E(0) \\
&\Leftrightarrow \quad E(t) \leq E(0)e^{-wt}.
\end{aligned}$$

Provamos, portanto, o decaimento exponencial da solução para o problema (3.12)-(3.15), como queríamos.

4 SEMIGRUPOS

Neste capítulo apresentamos a Teoria de Semigrupos e os importantes Teoremas de Hille-Yosida (ver [9]), Lummer-Phillips (ver [9]) e de Gearhart (ver [3]).

4.1 ASPECTOS BÁSICOS

A função exponencial e^{tA}, onde A é um número real e t uma variável real, pode ser definida pela fórmula

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}. \tag{4.1}$$

A série que figura no segundo membro da equação anterior converge para todos os valores reais de t e define uma função em $\mathbb{R}$.

Sem dificuldade alguma, mostra-se que esta definição se estende ao caso em que A é um operador linear limitado de um Espaço de Banach X.

Neste caso, a série que aparece em (4.1) converge na topologia uniforme de $\mathcal{L}(X)$, a *álgebra dos operadores lineares limitados de* X, e portanto, para cada $t \in \mathbb{R}$, sua soma é um operador limitado deste espaço.

Problema bastante delicado, porém, é definir a "função exponencial" quando A é não limitado. Uma das razões de interesse em tal função é que, formalmente, ela é solução do seguinte problema de Cauchy:

Dado um operador linear não limitado A, de um Espaço de Banach X, determinar uma função $\mathbf{U}(t) = e^{tA}$, definida em $\mathbb{R}^+$, com domínio $D(A)$ e que satisfaça as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_t - A\mathbf{U} &= 0 \\ \mathbf{U}(0) &= \mathbf{U}_0. \end{aligned}$$

Neste sentido temos as seguintes definições:

Definição 4.1. Seja X um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados de X. Dizemos que uma aplicação $\mathbf{S} : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados de X, quando:

1. $\mathbf{S}(0) = I$, onde I é o operador identidade de X;
2. $\mathbf{S}(t+s) = \mathbf{S}(t)\mathbf{S}(s)$, para todo par $s, t \in \mathbb{R}^+$.

Definição 4.2. Denotamos $||\cdot||$ a norma do espaço X e dizemos que o semigupo $\mathbf{S}$ é fortemente contínuo - e o denominamos $\mathcal{C}_0$-Semigrupo - se:

$$\lim_{t\to 0^+} ||(\mathbf{S}(t) - I)x|| = 0, \ \forall x \in X.$$

Definição 4.3. Dizemos que o $\mathcal{C}_0$-Semigrupo $\mathbf{S}$ é de contração, quando $||\mathbf{S}|| < 1$.

Definição 4.4. O operador $A : D(A) \longrightarrow X$, definido por

$$A(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{S}(h) - I}{h} x, \ \text{ para todo } x \in D(A),$$

onde $D(A)$, o domínio de A, é dado por:

$$D(A) = \left\{ x \in X : \text{ existe o limite } \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{S}(h) - I}{h} x \right\},$$

é dito o gerador infinitesimal do $\mathcal{C}_0$-Semigrupo $\mathbf{S}$.

Quando A é o gerador infinitesimal de um $\mathcal{C}_0$-Semigrupo $\mathbf{S}$, denotamos $\mathbf{S} = e^{At}$.

Da definição acima, podemos reescrever o domínio do operador como

$$D(A) = \{w \in X / Aw \in X\}.$$

Temos a seguinte propriedade:

Propriedade 4.5. O conjunto $D(A)$ é um subespaço vetorial de X e A é um operador linear.

Demonstração. Consequência imediata da Definição 4.4. $\square$

Uma estimativa para o $\mathcal{C}_0$-Semigrupo $\mathbf{S}(t)$ é dada pela propriedade abaixo.

Propriedade 4.6. Existe $M \geq 1$ tal que

$$||\mathbf{S}(t)|| \leq M\, e^{w\,t} \;\text{ para todo }\; t \geq 0 \;\text{ sendo } w \text{ uma constante positiva.}$$

Demonstração. Existe $\delta > 0$ tal que $||\mathbf{S}(t)||$ é limitada em $[0, \delta]$, posto que, do contrário, existiria uma sequência $t_n \to 0^+$ tal que $||\mathbf{S}(t_n)|| \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, do teorema da Limitação Uniforme, existiria ao menos um $x \in X$ tal que $||\mathbf{S}(t_n)\, x|| \geq n$ e isto contraria a definição de $\mathbf{S}(t)$ ser um C_0-Semigrupo. Logo $||\mathbf{S}(t)|| \leq M$ para todo $t \in [0, \delta]$ e como $||\mathbf{S}(0)|| = 1$, segue que $M \geq 1$.

Agora note que, dado $t > 0$, pelo Algorítimo de Euclides existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $t = n\delta + r$ onde $0 \leq r < \delta$. Temos então,

$$\begin{aligned} ||\mathbf{S}(t)|| &= ||\mathbf{S}(n\delta + r)|| \\ &= ||\mathbf{S}(n\delta)||\, ||\mathbf{S}(r)|| \\ &= ||\mathbf{S}(\delta)||^n\, ||\mathbf{S}(r)|| \\ &\leq M^n\, M. \end{aligned}$$

Observamos que $t = n\delta + r$ implica que $n \leq \frac{t}{\delta}$ e portanto

$$||\mathbf{S}(t)|| \;\leq\; M^{\frac{t}{\delta}}\, M = e^{\frac{t}{\delta}\ln M}\, M = M\, e^{tw}, \;\text{ onde }\; w = \frac{1}{\delta} \ln M.$$

$\square$

Considere agora a seguinte propriedade,

Propriedade 4.7. Seja A o gerador infinitesimal de um $\mathcal{C}_0$-Semigrupo $\mathbf{S}(t)$. Se $x \in D(A)$ então:

(i) $\mathbf{S}'(t)x = A\,\mathbf{S}(t)x$,

(ii) $\mathbf{S}(t)x \in C^0([0, \infty) : D(A)) \cap C^1([0, \infty) : X)$

Demonstração. Prova de (i): Para $x \in D(A)$, temos por um lado

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}_{+}^{'}(t) &= \lim_{h \to 0^{+}} \frac{\mathbf{S}(t+h)x - \mathbf{S}(t)x}{h} \\
&= \mathbf{S}(t) \lim_{h \to 0^{+}} \frac{\mathbf{S}(h)x - x}{h} = \mathbf{S}(t)\, Ax = A\, \mathbf{S}(t)x.
\end{aligned}
$$

e por outro lado

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}_{-}^{'}(t) &= \lim_{h \to 0^{+}} \frac{\mathbf{S}(t-h)x - \mathbf{S}(t)x}{-h} \\
&= \lim_{h \to 0^{+}} \frac{\mathbf{S}(t-h)x - \mathbf{S}(t-h+h)x}{-h} \\
&= \lim_{h \to 0^{+}} \mathbf{S}(t-h) \lim_{h \to 0^{+}} \frac{\mathbf{S}(h)x - x}{h} \\
&= \mathbf{S}(t)\, Ax = A\, \mathbf{S}(t)x.
\end{aligned}
$$

de onde segue $\mathbf{S}^{'}(t)x = A\, \mathbf{S}(t)x$.

Prova de (ii): É fácil ver que as aplicações

$$t \to \mathbf{S}(t)x \in C^{0}([0, \infty) : X)$$

e

$$t \to \mathbf{S}^{'}(t)x \in C^{0}([0, \infty) : X),$$

logo

$$t \to \mathbf{S}(t)x \in C^{1}([0, \infty) : X).$$

Note que $\mathbf{S}(t)x \in D(A)$ e, portanto, $\mathbf{S}(t)x \in C^{0}([0, \infty) : D(A))$. Então

$$\mathbf{S}(t)x \in C^{0}([0, \infty) : D(A)) \cap C^{1}([0, \infty) : X).$$

□

Considere agora a seguinte propriedade sobre o gerador infinitesimal.

Propriedade 4.8. Se $\mathbf{S}_1(t)$ e $\mathbf{S}_2(t)$ possuem o mesmo gerador infinitesimal A, então $\mathbf{S}_1(t) = \mathbf{S}_2(t)$.

Demonstração. Considere a função $F(s) = \mathbf{S}_1(t-s)\mathbf{S}_2(s)$. Então

$$
\begin{aligned}
F^{'}(s) &= -A\, \mathbf{S}_1(t-s)\mathbf{S}_2(s) + \mathbf{S}_1(t-s)\, A\, \mathbf{S}_2(s) \\
&= -\mathbf{S}_1(t-s)\, A\, \mathbf{S}_2(s) + \mathbf{S}_1(t-s)\, A\, \mathbf{S}_2(s) = 0,
\end{aligned}
$$

logo $F(s)$ é uma função constante. Agora note que

$$\begin{aligned} F(0) &= \mathbf{S}_1(t)\mathbf{S}_2(0) = \mathbf{S}_1(t) \\ F(t) &= \mathbf{S}_1(0)\mathbf{S}_2(s) = \mathbf{S}_2(t), \end{aligned}$$

de onde segue $\mathbf{S}_1(t) = \mathbf{S}_2(t)$. □

Observe que definindo $U(t) = \mathbf{S}(t)U_0$, segue da Propriedade 4.7 que $U'(t) = AU(t)$ e que $U(0) = U_0$, logo $U(t) = \mathbf{S}(t)U_0$ é solução do seguinte problema de evolução:

$$\begin{cases} U_t - AU = 0 \\ U(0) = U_0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Além disto esta solução satisfaz $U \in C^0([0,\infty) : D(A)) \cap C^1([0,\infty) : X)$.

Observe também que da Propriedade 4.8, sendo A o gerador infinitesimal de $\mathbf{S}(t)$, podemos afirmar que $U(t) = \mathbf{S}(t)U_0$ é a única solução de (4.2).

Neste momento é fundamental entender que, na tentativa de resolver o problema (4.2), nossa meta agora é obter as condições necessárias e suficientes para que o operador linear A seja gerador infinitesimal de um $\mathcal{C}_0$-Semigrupo $\mathbf{S}(t)$. Neste sentido iremos demonstrar nas próximas seções os importantes teoremas de Hille-Yosida e Lummer-Phillips.

4.2 TEOREMA DE HILLE-YOSIDA

Para simplificar a notação, vamos escrever $A \in G(M,\omega)$ para exprimir que A é o gerador infinitesimal de um $\mathcal{C}_0$-Semigrupo que satisfaz a condição

$$||\mathbf{S}(t)|| \leq Me^{\omega t},\ t \geq 0.$$

Com esta notação A é gerador infinitesimal de um $\mathcal{C}_0$-Semigrupo de contrações

$$\mathbf{S}(t) = e^{At}$$

quando $A \in G(1,0)$.

Uma condição necessária e suficiente para $A \in G(1,0)$ é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 4.9. (Hille - Yosida) Um operador linear A sobre X satisfaz:

- A é fechado e densamente definido,

- $\exists\ (\lambda I - A)^{-1}\ \forall\lambda\ ; \lambda > 0$ e $||(\lambda I - A)^{-1}|| \leq \frac{1}{\lambda}$ onde I é o operador identidade,

se, e somente se,

A é gerador infinitesimal de um $\mathcal{C}_0$-Semigrupo de contrações $\mathbf{S}(t)$.

Demonstração. Para a primeira parte, faremos a demonstração do seguinte modo:

(i) Seja $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ e $A_\lambda = \lambda A R(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I$ então

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda\, x = A\, x.$$

(ii) Seja $\mathbf{S}_\lambda(t)\, x = e^{tA_\lambda}$. Então $||\mathbf{S}_\lambda(t)|| \leq 1$.

(iii) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \mathbf{S}_\lambda(t)\, x = \mathbf{S}(t)\, x$.

(iv) $\{\mathbf{S}(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-Semigrupo.

(v) A é gerador infinitesimal de $\{\mathbf{S}(t)\}_{t\geq 0}$.

Prova de (i):

$$\begin{aligned} R(\lambda, A)\,(\lambda I - A) &= I \\ \lambda R(\lambda, A) - A R(\lambda, A) &= I \\ \lambda R(\lambda, A) - I &= A R(\lambda, A) \\ ||\lambda R(\lambda, A) x - x|| &\leq ||R(\lambda, A)||\, ||Ax|| \leq \frac{1}{\lambda} ||Ax||, \end{aligned}$$

logo $\lambda R(\lambda, A)\, x \to x\ \forall\ x \in D(A)$ e por densidade $\forall\ x \in X$.

Dessa forma temos que

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda A\, R(\lambda, A)x = A \lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda, A)x \to x.$$

Prova de (ii)

Seja

$$\mathbf{S}_\lambda(t) = e^{t\,A_\lambda} = e^{t\,\lambda^2 R(\lambda,A)-\lambda\,t}.$$

$$\begin{aligned} ||\mathbf{S}_\lambda(t)|| = ||e^{t\,\lambda^2 R(\lambda,A)-\lambda\,t}|| &= e^{-\lambda t}||e^{t\,\lambda^2 R(\lambda,A)}|| \\ &= e^{-\lambda t}||\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t\,\lambda^2 R(\lambda, A))^j}{j!}|| \\ &\le e^{-\lambda t}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t\lambda^2)^j}{j!}\frac{1}{\lambda^j} = e^{-\lambda\,t}e^{\lambda\,t} = 1. \end{aligned}$$

Prova de (iii)

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_\lambda(t) - \mathbf{S}_\mu(t) = \int_0^1 \frac{d}{d\tau}\mathbf{S}_\mu(t(1-\tau))\mathbf{S}_\lambda(t\tau)\,d\tau &= \int_0^1 \frac{d}{d\tau} e^{t(1-\tau)A_\mu}e^{t\tau\,A_\lambda}d\tau \\ &= \int_0^1 e^{t\,A_\mu}\frac{d}{d\tau}e^{t\tau(A_\lambda - A_\mu)}d\tau \\ &= \int_0^1 e^{t\,A_\mu}e^{t\tau(A_\lambda - A_\mu)}t\tau(A_\lambda - A_\mu)d\tau \\ &= \int_0^1 \mathbf{S}_\mu(t(1-\tau))\mathbf{S}_\lambda(\tau\,t)t(A_\lambda - A_\mu)\,d\tau. \end{aligned}$$

Logo $||\mathbf{S}_\lambda(t)x - \mathbf{S}_\mu(t)x|| \le t||A_\lambda - A_\mu||$ e como $A_\lambda \to A$, $(\mathbf{S}_\lambda)$ é convergente para todo $x \in D(A)$ e por densidade para todo $x \in X$, sendo a convergência uniforme nos limitados $[0, T]$. Portanto, pelo teorema de Banach-Steinhaus, existe um operador linear $\mathbf{S}(t)$ tal que $\mathbf{S}_\lambda(t) \to \mathbf{S}(t)$.

Prova de (iv)

$$\mathbf{S}(0) = \lim_{\lambda\to\infty} \mathbf{S}_\lambda(0) = \lim_{\lambda\to\infty} e^{0\,A_\lambda} = 1 \quad \text{portanto} \quad \mathbf{S}(0) = I.$$

$$\mathbf{S}(t+s) = \lim_{\lambda\to\infty} e^{(t+s)\,A_\lambda} = \lim_{\lambda\to\infty} e^{(t)\,A_\lambda} \lim_{\lambda\to\infty} e^{(s)\,A_\lambda} = \mathbf{S}(t)\mathbf{S}(s).$$

$$\begin{aligned}
||\mathbf{S}(t)x - x|| &\leq ||\mathbf{S}(t)x - \mathbf{S}_\lambda(t)x + \mathbf{S}_\lambda(t)x - x|| \\
&\leq ||\mathbf{S}(t)x - \mathbf{S}_\lambda(t)x|| + ||\mathbf{S}_\lambda(t)x - x|| \\
&= ||\mathbf{S}(t)x - \mathbf{S}_\lambda(t)x|| + ||e^{tA_\lambda}x - x|| \to 0 \text{ para } \lambda \to \infty \text{ e } t \to 0^+.
\end{aligned}$$

Prova de (v)

$$\begin{aligned}
||\mathbf{S}_\lambda(t)A_\lambda x - \mathbf{S}(t)Ax|| &= ||\mathbf{S}_\lambda(t)A_\lambda x - \mathbf{S}_\lambda(t)Ax + \mathbf{S}_\lambda(t)Ax - \mathbf{S}(t)Ax|| \\
&\leq ||\mathbf{S}_\lambda(t)||\,||A_\lambda x - Ax|| + ||Ax||\,||\mathbf{S}_\lambda(t) - \mathbf{S}(t)||,
\end{aligned}$$

e fazendo $\lambda \to \infty$ segue que $\mathbf{S}_\lambda(t)A_\lambda x \to \mathbf{S}(t)Ax$. Esta convergência será usada logo abaixo. Considere

$$\frac{d}{dt}\mathbf{S}_\lambda(t)x = A_\lambda \mathbf{S}_\lambda(t)x.$$

Integrando em $(0, \mathrm{t})$ obtemos

$$\mathbf{S}_\lambda(t)x - x = \int_0^t \mathbf{S}_\lambda(t)A_\lambda x\, dt,$$

e fazendo $\lambda \to \infty$ obtemos

$$\mathbf{S}(t)x - x = \int_0^t \mathbf{S}(t)Ax\, dt,$$

de onde segue

$$\frac{\mathbf{S}(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t \mathbf{S}(t)Ax\, dt,$$

o que implica

$$\lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{S}(t)x - x}{t} = Ax.$$

A demonstração da primeira parte do teorema está completa.

Agora iremos provar a recíproca.

Consideremos $x_h = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h \mathbf{S}(t)x\, dt \in D(A)$ para $x \in X$.

Temos então que $x_h \to x$ quando $h \to 0$, $\forall\, x \in X$, logo $\overline{D(A)} = X$.

Vamos mostrar que A é fechado. Seja $x_\nu \to x$ e $Ax_\nu \to \chi$ em X. Temos então:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{S}(t)x_\nu = A\mathbf{S}(t)x_\nu,$$

Integrando em $(0, t)$ e passando o limite obtemos

$$\frac{\mathbf{S}(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t \mathbf{S}(t)\chi\, dt = \mathbf{S}(c)\chi,\ com\ 0 < c < t.$$

Fazendo $t \to 0^+$ segue que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\mathbf{S}(t)x - x}{t} = \chi, \text{ logo } Ax = \chi.$$

Dessa forma mostramos que A é um operador fechado.

A aplicação $t \to \mathbf{S}(t)x$ é contínua e uniformemente limitada nos limitados $[0, T]$, portanto a integral abaixo é bem definida:

$$R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{S}(t)x\, dt.$$

Temos que

$$||R(\lambda)|| \leq ||x|| \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dt = \lim_{s\to\infty}[\frac{-1}{\lambda}e^{-\lambda s} + \frac{1}{\lambda}] = \frac{1}{\lambda}\ \forall\ \lambda > 0. \tag{4.3}$$

Logo temos

$$\frac{\mathbf{S}(h) - 1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{S}(t)x\, dt = \frac{e^{\lambda h} - 1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{S}(t)x\, dt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}\mathbf{S}(t)x\, dt,$$

e fazendo $h \to 0$, segue que $AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x$, isto é, $R(\lambda)(\lambda - A)x = x\ \forall\ x \in D(A)$.

Por outro lado, em $D(A)$, $R(\lambda)$ e A comutam e então $(\lambda - A)R(\lambda)x = x\ \forall\ x \in D(A)$.

Finalmente, por densidade $R(\lambda)(\lambda - A)x = (\lambda - A)R(\lambda)x = x\ \forall\ x \in X$ e, portanto, existe $(\lambda I - A)^{-1}$ e de (4.3) concluímos que

$$||(\lambda I - A)^{-1}|| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

□

4.3 TEOREMA DE LUMMER-PHILLIPS

A seguir apresentamos outra caracterização dos geradores infinitesimais dos $\mathcal{C}_0$-Semigrupos de contrações, o teorema de Lummer-Phillips, o qual será utilizado neste trabalho para obtermos a existência e unicidade de solução para o modelo dissipativo que representa as pequenas vibrações transversais de uma corda elástica, fina e fixa nas extremidades.

Definição 4.10. Dizemos que o operador linear $A : X \longrightarrow X$ é dissipativo, quando

$$Re\langle Ax, x\rangle \leq 0,$$

para todo $x \in D(A)$.

Lema 4.11. Um operador A é dissipativo se, e somente se

$$||(\lambda I - A)x|| \geq \lambda||x||, \text{ para todo } x \in D(A),\ \lambda > 0.$$

Demonstração. Se A é dissipativo então para todo $\lambda > 0$ e para $x \in D(A)$ teremos:

$$||\lambda x - Ax||\,||x|| \geq |\langle \lambda x - Ax, x\rangle| \geq Re\,\langle \lambda x - Ax, x\rangle \geq \lambda||x||^2,$$

de onde segue a primeira parte da demonstração.

Reciprocamente, tomemos $x \in D(A)$ e suponhamos que $\lambda||x|| \leq ||\lambda x - Ax||$ para todo $\lambda > 0$. Daí temos que:

$$\lambda^2||x||^2 \leq ||\lambda x - Ax||^2 = \lambda^2||x||^2 - 2Re\,\langle \lambda x, Ax\rangle + ||Ax||^2,$$

de onde segue que

$$Re\,\langle x, Ax\rangle \leq \frac{1}{2\lambda}||Ax||^2,\ \forall\lambda > 0.$$

Fazendo $\lambda \to \infty$ chegamos em:

$$Re\,\langle x, Ax\rangle \leq 0.$$

Portanto A é dissipativo.

□

Definição 4.12. Seja A o gerador infinitesimal de um $\mathcal{C}_0$-semigrupo em um espaço de Hilbert H. Definimos o conjunto resolvente de A, $\rho(A)$, como:

$$\rho(A) = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}; (\lambda I - A) \text{ é inversível}\Big\} \text{ onde } I : H \to H \text{ é o operador identidade.}$$

Proposição 4.13. Se A é operador dissipativo e $Im(\lambda_0 I - A) = X$, $\lambda_0 > 0$ então:

$$\lambda_0 \in \rho(A) \text{ e } A \text{ é } fechado.$$

Demonstração. Por hipótese temos que $Im(\lambda_0 I - A) = X$, $\lambda_0 > 0$ e como pelo Lema (4.11) $(\lambda_0 I - A)$ é injetiva temos que $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ existe. Ainda pelo lema, $\forall x \in X$

$$||x|| = ||(\lambda_0 I - A)(\lambda_0 I - A)^{-1}\, x|| \geq \lambda_0 ||(\lambda_0 I - A)^{-1}\, x||,$$

i.e., $(\lambda_0 I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(x)$. Logo $\lambda_0 \in \rho(A)$ e A é fechado.

□

Vamos considerar H um espaço de Hilbert. O seguinte teorema diz que a condição $Im(\lambda I - A) = H$, $\forall \lambda > 0$, pode ser enfraquecida para $Im(\lambda_0 I - A) = H$ para algum $\lambda_0 > 0$.

Teorema 4.14. (Lummer-Phillips)

(i) Seja A dissipativo e $\lambda_0 > 0$ tal que a $Im(\lambda_0 I - A) = H$, então $A \in G(1, 0)$.

(ii) Se $A \in G(1, 0)$, então A é dissipativo e para todo $\lambda > 0$ temos que

$$Im(\lambda I - A) = H.$$

Demonstração. Iniciamos demonstrando (i). Provaremos primeiro que se existe $\lambda_0 > 0$ tal que $Im(\lambda_0 I - A) = H$, então teremos $Im(\lambda I - A) = H$ para todo $\lambda > 0$.

Temos, por hipótese, que $\lambda_0 > 0$. Logo, pela Proposição (4.13), $\lambda_0 \in \rho(A)$. Portanto, o conjunto

$$\Lambda = \rho(A) \cap (0, \infty)$$

é não vazio e como $\rho(A)$ é aberto, Λ é aberto em $(0, \infty)$. Provaremos que Λ é fechado em $(0, \infty)$.

Seja $\lambda_\mu \in \Lambda$ e $\lambda_\mu \to \lambda$, $\lambda \in (0, \infty)$. Como $\lambda_\mu \in \Lambda$ temos que

$$Im(\lambda_\mu I - A) = X, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, se $y \in X$, existe para cada $\mu \in \mathbb{N}$, x_μ tal que $(\lambda_\mu I - A)x_\mu = y$. Pelo Lema (4.11) temos que

$$||x_\mu|| \leq \lambda_\mu^{-1}||(\lambda_\mu I - A)x_\mu|| = \lambda_\mu^{-1}||y|| < C \tag{4.4}$$

e

$$\lambda_\mu||x_\mu - x_\nu|| \leq ||\lambda_\mu(x_\mu - x_\nu) - A(x_\mu - x_\nu)||. \tag{4.5}$$

Da definição de x_μ segue que

$$\lambda_\mu x_\mu - \lambda_\nu x_\nu - A(x_\mu - x_\nu) = 0$$

e, consequentemente,

$$\lambda_\mu x_\mu - \lambda_\mu x_\nu + \lambda_\mu x_\nu - \lambda_\nu x_\nu - A(x_\mu - x_\nu) = 0,$$

o que implica que

$$\lambda_\mu(x_\mu - x_\nu) + (\lambda_\mu - \lambda_\nu)x_\nu - A(x_\mu - x_\nu) = 0.$$

Daí

$$\lambda_\mu(x_\mu - x_\nu) - A(x_\mu - x_\nu) = (\lambda_\nu - \lambda_\mu)x_\nu. \tag{4.6}$$

De (4.5) e (4.6) obtemos

$$\lambda_\mu||x_\mu - x_\nu|| \leq ||(\lambda_\nu - \lambda_\mu)x_\nu|| \leq |\lambda_\nu - \lambda_\mu|||x_\nu|| \leq |\lambda_\nu - \lambda_\mu|\, C.$$

Como $\lambda_\mu \to \lambda > 0$ temos que x_μ é uma sequência de Cauchy. Seja $x_\mu \to x$. Sendo A

um operador fechado, teremos $\lambda x - Ax = y$. Como y é um elemento arbitrário de X segue que $Im(\lambda I - A) = X$. Lembrando que $\lambda > 0$ e utilizando a Proposição (4.13) concluímos que $\lambda \in \rho(A)$.

Portanto $\lambda \in \Lambda$ o que implica que Λ é fechado em $(0, \infty)$. Logo,

$$\Lambda = (0, \infty) \Rightarrow (0, \infty) \subset \rho(A).$$

Dessa forma, mostramos que $\forall \lambda > 0$ temos que $\lambda \in \rho(A)$.

Utilizando o Lema (4.11) temos que

$$||\lambda x - Ax|| \geq \lambda ||x||, \text{ para todo } x \in D(A),$$

de onde segue que para todo $\lambda > 0$ o operador $(\lambda I - A)^{-1}$ é contínuo e satisfaz

$$||(\lambda I - A)^{-1}|| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Como consequência do teorema de Hille-Yosida segue o resultado.

Agora vamos demonstrar (ii). Para mostrar que A é dissipativo, seja $x \in D(A)$. Então

$$|\langle \mathbf{S}(t)x, x \rangle| \leq ||\mathbf{S}(t)x||\,||x|| \leq ||x||^2,$$

e portanto

$$Re\,\langle \mathbf{S}(t)x - x, x \rangle = Re\,\langle \mathbf{S}(t)x, x \rangle - ||x||^2 \leq 0.$$

Dividindo a expressão acima por t e fazendo $t \to 0^+$ segue que

$$Re\,\langle Ax, x \rangle \leq 0,$$

como queríamos demonstrar.

Para concluir a prova de (ii) observamos que $Im(\lambda I - A) = H$ é uma consequência imediata do teorema de Hille-Yosida. □

A seguir provaremos um importante corolário do Teorema de Lummer-Phillips.

Corolário 4.15. Seja A um operador com domínio denso $D(A)$ em um espaço de Hilbert H. Se A é dissipativo e $0 \in \rho(A)$, o conjunto resolvente de A, então A é gerador infinitesimal de um C_0-Semigrupo de contrações.

Demonstração. Se $0 \in \rho(A)$ então o operador A é inversível e A^{-1} é um operador linear limitado. Usando o teorema da aplicação contração (ver [5], Teorema 5.2.1, página 215) podemos mostrar que o operador $\lambda I - A$ é inversível para $0 < \lambda < ||A^{-1}||$. Logo segue pelo teorema de Lummer-Phillips que A gera um C_0-Semigrupo de contrações em H. $\square$

4.4 TEOREMA DE GEARHART

Esta seção é relacionada com os resultados que estabelecem as condições necessárias e suficientes para um C_0-Semigrupo ser exponencialmente estável. Inicialmente considere as seguintes definições.

Definição 4.16. O C_0-semigrupo de contrações $\mathbf{S}(t) = e^{At}$, gerado pelo operador A, é exponencialmente estável quando existem constantes positivas M e w tais que

$$||\mathbf{S}(t)|| \leq Me^{-wt}.$$

Definição 4.17. Seja A o gerador infinitesimal de um C_0-Semigrupo em um Espaço de Hilbert H. Definimos o espectro de A, $\sigma(A)$, e o conjunto resolvente de A, $\rho(A)$, como abaixo:

$\sigma(A) = \{\, \lambda \in \mathbb{C}\,; (\lambda I - A) \text{ não é inversível} \}$ onde $I : H \to H$ é o operador identidade.

$\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$, o complementar de $\sigma(A)$ em $\mathbb{C}$.

Considere agora o seguinte teorema devido a Huang [4].

Teorema 4.18. Seja $\mathbf{S}(t) = e^{At}$ um C_0-Semigrupo em um Espaço de Hilbert. Então $\mathbf{S}(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se,

$$\sup\{Re\lambda; \lambda \in \sigma(A)\} \leq 0$$

e

$$\sup_{Re\lambda \geq 0} \|(\lambda I - A)^{-1}\| < \infty.$$

O seguinte resultado foi obtido por Gearhart (ver [14]).

Teorema 4.19. Seja $\mathbf{S}(t) = e^{At}$ um $\mathcal{C}_0$-Semigrupo de contrações em um Espaço de Hilbert. Então $\mathbf{S}(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se,

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta, \beta \in \mathbb{R}\} \tag{4.7}$$

e

$$\limsup_{|\beta| \to \infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\| < \infty. \tag{4.8}$$

Demonstração. Ver [3], [4] e [10]. □

4.5 SEMIGRUPOS APLICADOS A SISTEMAS DISSIPATIVOS

Quando se considera o estudo do decaimento exponencial da solução de um modelo dissipativo governado por equações diferenciais parciais, o problema é estabelecer uma estimativa para a energia total do sistema, $E(t)$, da forma

$$E(t) \leq CE(0)e^{-wt}, \quad \forall t \geq 0.$$

Para semigrupos, na análise do comportamento assintótico a estimativa abaixo

$$\|S(t)\| \leq Ce^{-wt}, \quad \forall t \geq 0,$$

indica a estabilidade exponencial do Semigrupo dissipativo $S(t)$ gerado pelo sistema.

Por muito tempo permaneceu em aberto se o decaimento exponencial da energia total do sistema e a estabilidade exponencial do semigrupo gerado pelo modelo dissipativo eram equivalentes.

Hoje é conhecido (ver S. Zheng [15]) que estas duas estimativas são equivalentes.

Neste sentido, iremos provar o decaimento exponencial explorando as propriedades dissipativas do semigrupo associado ao sistema.

Neste contexto, iremos utilizar uma variante dos teoremas de Huang e Gearhart, cuja equivalência foi demonstrada por Z. Liu e S. Zheng [8] para o caso em que $\mathbf{S}(t) = e^{At}$ é um $\mathcal{C}_0$-semigrupo de contrações em um Espaço de Hilbert.

Utilizando estes teoremas, combinados com argumentos de contradição e técnicas de EDP, os autores mostraram a estabilidade exponencial de e^{At}, ou em outras palavras, o decaimento exponencial de vários modelos dissipativos em EDP.

Neste trabalho utilizaremos o teorema de Gearhart e a essência do método que empregaremos consiste em supor por contradição que as hipóteses do teorema são falsas, isto é, na primeira etapa, ao supormos que a condição (4.7) é falsa, teremos a garantia que existe ao menos um $\beta > 0$ tal que

$$i\beta \in \sigma(A),$$

onde $\sigma(A)$ é o espectro do operador A.

Estaremos utilizando adequados espaços de Hilbert, e da teoria geral dos espaços de Sobolev, iremos obter imersões compactas o que garantirá, via teoria espectral, que $\sigma(A)$ é constituído apenas de autovalores de A. Em seguida utilizando adequados multiplicadores e técnicas conhecidas do estudo de EDP, iremos gerar uma contradição. Deste modo provaremos a primeira condição do teorema de Gearhart.

Na segunda etapa, quando supomos que (4.8) é falsa, obtemos a seguinte informação:

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} \|(i\beta - A)^{-1}\| = \infty,$$

o que nos permite obter uma sequência de vetores

$$U_n \in D(A) \text{ satisfazendo } ||U_n|| = 1.$$

Neste momento usamos o fato do operador A ser dissipativo e após um raciocínio razoável de análise matemática, conseguimos obter uma contradição sobre a sequência de vetores U_n. Deste modo provaremos a segunda condição do teorema de Gearhart e por consequência a estabilidade exponencial do modelo em questão.

O grau de dificuldade em seguir as idéias apresentadas nas etapas acimas mencionadas está diretamente relacionado com o modelo em estudo. Esperamos que ao compreender a técnica, o leitor possa aplicar o método com sucesso a outros modelos em EDP.

Cabe ainda destacar que podemos utilizar os teoremas de Gearhart e Huang para provar o "blow up" em tempo finito de modelos governados por EDP, por exemplo, ver Raposo [11].

Para finalizarmos esta seção lembramos que o ponto alto deste trabalho é apresentar este método, aplicando-o ao modelo da corda vibrante com amortecimento friccional.

5 *EXISTÊNCIA, UNICIDADE E ESTABILIDADE EXPONENCIAL DA SOLUÇÃO VIA SEMIGRUPOS*

Neste capítulo provaremos a existência, unicidade e decaimento exponencial da solução da equação de onda com amortecimento friccional utilizando a Teoria de Semigrupos.

5.1 SISTEMA ELÁSTICO

Nesta seção retomamos o problema estudado anteriormente onde a dissipação provocada pelo atrito foi representada por αu_t onde α é uma constante real positiva. Neste sentido, estudaremos a existência, unicidade e estabilidade de solução para o modelo que descreve as pequenas vibrações verticais da corda elástica de comprimento finito L e presa nas extremidades, utilizando outro método, isto é, utilizando a Teoria de Semigrupos.

Representamos por $u(x,t)$ o deslocamento transversal de cada ponto $x \in (0,L)$ da corda no instante $t \geq 0$, a partir de sua posição de equilíbrio. Neste sentido temos o seguinte modelo dissipativo:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} + \alpha u_t &= 0, \ (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty), &(5.1)\\ u(x,0) &= u_0(x), \ \ x \in (0,L), &(5.2)\\ u_t(x,0) &= u_1(x), \ \ x \in (0,L), &(5.3)\\ u(0,t) &= u(L,t) = 0, \ t \geq 0. &(5.4) \end{aligned}$$

5.2 EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO

Teorema 5.1. O modelo (5.1)–(5.4) possui uma única solução $u(x,t)$ na classe

$$u \in C^0\left((0,\infty), H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L)\right)\cap C^1\left((0,\infty), H^2(0,L)\right)\cap C^2\left((0,\infty), L^2(0,L)\right).$$

Demonstração. Inicialmente vamos escrever o modelo da forma

$$\mathbf{U}_t - A\mathbf{U} = 0 \tag{5.5}$$

$$\mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0. \tag{5.6}$$

Nosso objetivo é mostrar que A é o gerador infinitesimal do $\mathcal{C}_0$ - semigrupo associado a (5.1)–(5.4).

Utilizando (5.1), denotando $v = u_t$ e

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

podemos escrever

$$\mathbf{U}_t = \begin{bmatrix} u_t \\ v_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ u_{xx} - \alpha v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \Delta & -\alpha\mathbf{I} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = A\mathbf{U}.$$

Seja $H = H_0^1(0,L)\times L^2(0,L)$. Definimos o domínio do operador A por

$$D(A) = [H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L)]\times H_0^1(0,L).$$

Das propriedades dos espaços de Sobolev, segue que $D(A)$ é denso em H. Vamos agora definir em H um produto interno. Para

$$\mathbf{U^1} = \begin{bmatrix} u^1 \\ v^1 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{U^2} = \begin{bmatrix} u^2 \\ v^2 \end{bmatrix},$$

definimos

$$\langle \mathbf{U^1}, \mathbf{U^2}\rangle_H = \int_0^L (u_x^1\, u_x^2 + v^1\, v^2)\, dx.$$

Utilizando este produto interno temos

$$\begin{aligned}
\langle AU, U\rangle_H &= \left\langle \begin{bmatrix} v \\ u_{xx} - \alpha v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\rangle \\
&= \int_0^L (v_x u_x + u_{xx} v - \alpha v^2)\, dx \\
&= \int_0^L v_x u_x dx + \int_0^L (u_{xx} - \alpha v) v \, dx \ .
\end{aligned}$$

Integrando por partes e usando as condições de contorno, obemos

$$\langle AU, U\rangle_H = \int_0^L (v_x u_x + u_{xx} v - \alpha v^2)\, dx = -\alpha \int_0^L |v|^2 \, dx, \tag{5.7}$$

de onde segue que $Re \langle AU, U\rangle_H \leq 0$ e, portanto, A é dissipativo.

Vamos mostrar agora que $0 \in \rho(A)$.

Sabemos da definição (4.4) que o domínio do operador A é

$$D(A) = \{U \in X / AU \in X\},$$

onde X deve ser tomado o mais simples possível.

No nosso caso $X = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)$. Neste sentido para $F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \in H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)$ temos $U = A^{-1}F$, (ver [5], seção 3.2.1), e daí existe uma única $U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)$ tal que $AU = F$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} v \\ u_{xx} - \alpha v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}.$$

Queremos mostrar que $U \in D(A) = (H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)) \times H_0^1(0, L)$. Temos:

$$\begin{aligned}
&v = f_1 \\
&u_{xx} - \alpha v = f_2 \ ,
\end{aligned}$$

de onde segue

$$u_{xx} = f_2 + \alpha f_1.$$

Como
$$f_1 \in H_0^1(0,L) \subset L^2(0,L),$$
temos que
$$f_2 + \alpha f_1 \in L^2(0,L).$$
Para o problema $u_{xx} = f_2 + \alpha f_1$, com $f_2 + \alpha f_1 \in L^2(0,L)$, sabemos que existe uma solução $u \in H_0^1(0,L)$ e por regularidade elíptica, $u \in H^2(0,L)$. Logo, temos que $u \in H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)$.

Como $v = f_1$ e $f_1 \in H_0^1(0,L)$, podemos afirmar que $v \in H_0^1(0,L)$.

Dessa forma mostramos que:
$$U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L) \times H_0^1(0,L) = D(A),$$
e que,
$$AU = F, \quad \forall F \in H_0^1(0,L) \times L^2(0,L),$$
de onde segue que $0 \in \rho(A)$. Dessa forma, pelo Corolário (4.15) temos que A é gerador infinitesimal de um $\mathcal{C}_0-$ semigrupo de contrações $\{\mathbf{S}(t)\}$ e $U(t) = \mathbf{S}(t)U(0)$ é solução do problema (5.5)-(5.6).

Da teoria de semigrupos, sabemos que U é solução única e que
$$U \in \mathcal{C}^0(\ (0,\infty), D(A)\ ) \cap \mathcal{C}^1(\ (0,\infty), X\ ).$$

Assim
$$\begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} \in \mathcal{C}^0(\ (0,\infty), (H_0^1 \cap H^2) \times H_0^1\ ) \cap \mathcal{C}^1(\ (0,\infty), H_0^1 \times L^2\ ),$$
isto é:
$$u \in \mathcal{C}^0(\ (0,\infty), H_0^1 \cap H^2\ ) \cap \mathcal{C}^1(\ (0,\infty), H_0^1\ ). \tag{5.8}$$
$$u_t \in \mathcal{C}^1(\ (0,\infty), L^2\ ) \Rightarrow u \in \mathcal{C}^2(\ (0,\infty), L^2\ ). \tag{5.9}$$

De (5.8) e (5.9), temos:
$$u \in \mathcal{C}^0(\ (0,\infty), H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)\ )\ \cap\ \mathcal{C}^1(\ (0,\infty), H_0^1(0,L)\ )\ \cap\ \mathcal{C}^2(\ (0,\infty), L^2(0,L)\ ).$$

$\square$

5.3 ESTABILIDADE EXPONENCIAL

Usaremos o teorema de Gearhart, Teorema (4.19), para mostrarmos que o modelo

$$
\begin{aligned}
& u_{tt} - u_{xx} + \alpha u_t = 0, \ (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty) \\
& u(x,0) = u_0(x), \ \ x \in (0,L), \\
& u_t(x,0) = u_1(x), \ \ x \in (0,L), \\
& u(0,t) = u(L,t) = 0, \ t \geq 0,
\end{aligned}
$$

é exponencialmente estável.

Do mesmo modo que fizemos para obtermos o resultado de existência, consideramos $u_t = v$ e $U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$. Então

$$
U_t = \begin{bmatrix} u_t \\ v_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ u_{xx} - \alpha v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \Delta & -\alpha I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = AU \ ,
$$

de onde segue que $U_t - AU = 0$ e, portanto,

$$
A := \begin{bmatrix} 0 & I \\ \Delta & -\alpha I \ . \end{bmatrix}
$$

Neste sentido temos o seguinte teorema:

Teorema 5.2. O $\mathcal{C}_0$-semigrupo de contrações ($\mathbf{S}(t) = e^{At}$), gerado pelo operador A, é exponencialmente estável, i. e., existem constantes positivas M e w tais que

$$
||\mathbf{S}(t)|| \leq M e^{-wt}.
$$

Demonstração. Para este operador definimos $H = H_0^1(0,L) \times L^2(0,L)$ e $D(A) = (H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)) \times H_0^1(0,L)$. Vamos agora verificar as condições do teorema de Gearhart:

$$
\rho(A) \supseteq \{i\beta, \beta \in \mathbb{R}\}
$$

e

$$
\limsup_{|\beta| \to \infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\|_H < \infty.
$$

Faremos a prova por contradição. Na primeira etapa, iremos supor que a inclusão abaixo é falsa

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Com esta hipótese existe ao menos um $\beta > 0$ tal que $i\beta \in \sigma(A)$. Como $D(A)$ tem imersão compacta em H, segue da teoria espectral que $i\beta$ é um autovalor de A, logo existe pelo menos uma função vetorial $U \in D(A)$, $||U|| = 1$, tal que

$$i\beta U - AU = 0.$$

Desta última equação obtemos

$$i\beta u - v = 0, \tag{5.10}$$

$$i\beta v - \Delta u + \alpha v = 0. \tag{5.11}$$

Fazendo o produto interno de $i\beta U - AU$ com U obtemos

$$i\beta||U||^2 - \langle AU, U\rangle = 0.$$

Tomando a parte real e utilizando a propriedade dissipativa do modelo, a qual provamos em (5.7), obtemos

$$\alpha \int_0^L |v|^2 dx = 0,$$

de onde segue que $v = 0$ em $L^2(0, L)$. Utilizando (5.11) segue que $\Delta u = 0$ em $L^2(0, L)$. Agora lembramos que o problema elítico $u_{xx} = 0$ admite uma única solução localizada em $H_0^1(0, L)$. Como $u = 0$ é solução do problema, então $u = 0$ em $H_0^1(0, L)$. Mostramos então que $U = 0$ em H e isto é uma contradição pois, por hipótese, $||U|| = 1$.

Agora iremos para a segunda parte da demonstração. Vamos supor que

$$\limsup_{|\lambda|\to\infty} ||(\lambda I - A)^{-1}||_H = \infty, \quad \text{onde} \quad \lambda = i\beta.$$

Nesta condição existe $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\frac{||(\lambda_n I - A)^{-1} V_n||_H}{||V_n||_H} \geq n,$$

de onde segue que

$$||(\lambda_n I - A)^{-1} V_n||_H \geq n||V_n||_H. \tag{5.12}$$

Uma vez que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H$ e que $\lambda_n \in \rho(A)$, existe uma única sequência

$$(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(A),$$

tal que,

$$\lambda_n U_n - AU_n = V_n, \quad \text{com} \quad ||U_n||_H = 1.$$

Utilizando (5.12), observamos que

$$||U_n||_H \geq n||\lambda_n U_n - AU_n||_H$$

e denotando $f_n = \lambda_n U_n - AU_n$, segue que

$$||f_n||_H \leq \frac{1}{n}$$

e daí,

$$f_n \to 0 \text{ (forte) em } H.$$

Fazendo o produto interno de f_n por U_n, obtemos

$$\lambda_n \langle U_n, U_n\rangle - \langle AU_n, U_n\rangle = \langle f_n, U_n\rangle.$$

Tomando a parte real e utilizando (5.7), obtemos

$$\lambda_n ||U_n||_H^2 + \alpha \int_0^L |v_n|^2 dx = \langle f_n, U_n\rangle,$$

e daí,

$$\alpha \int_0^L |v_n|^2 dx \leq \langle f_n, U_n\rangle \to 0.$$

Portanto,

$$v_n \to 0 \quad \text{em} \quad L^2(0,L). \tag{5.13}$$

Considere agora $\lambda_n U_n - AU_n = f_n$, isto é:

$$\lambda_n \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_n \\ u_{n,xx} - \alpha v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_n^1 \\ f_n^2 \end{bmatrix}$$

de onde segue que

$$\lambda_n u_n - v_n = f_n^1 \tag{5.14}$$

$$\lambda_n v_n - u_{n,xx} + \alpha v_n = f_n^2. \tag{5.15}$$

Utilizando (5.13) temos:

$$\lambda_n u_n \to 0 \quad \text{em} \quad L^2(0, L). \tag{5.16}$$

Observando que $\lambda_n \to +\infty$, segue de (5.16) que $u_n \to 0 \quad \text{em} \quad L^2(0, L)$ o que é uma contradição pois $||U_n||_H = 1$. Sendo verificadas as condições do teorema de Gearhart, fica então provada a estabilidade de solução. $\square$

6 COMENTÁRIO FINAL

Neste trabalho aplicamos ao sistema dissipativo da corda vibrante em domínio limitado e presa nas extremidades dois métodos distintos.

No primeiro momento introduzimos alguns resultados dos Espaços de Sobolev e mostramos a existência e unicidade de solução para o problema de ondas com amortecimento friccional pelo Método de Faedo-Galerkin e em seguida provamos o decaimento exponencial utilizando o Método de Energia. Para o método de Energia foi necessário utilizar adequados multiplicadores e para isto precisamos da continuidade destes multiplicadores o que nos obrigou a escolher dados iniciais mais regulares. Esta situação mostra que a solução fraca obtida pelo método de Faedo-Galerkin não é suficiente para o estudo do comportamento assintótico.

No segundo momento, introduzimos os conceitos da Teoria de Semigrupos e estudamos a existência, unicidade e estabilidade exponencial do Semigrupo dissipativo do sistema gerado pelo problema de ondas com amortecimento friccional. Com a Teoria de Semigrupos, observamos que a regularidade da solução, necessária ao estudo da estabilidade exponencial, fica estabelecida já no teorema de existência de solução.

Por fim, esclarecemos que a abordagem que fizemos explica os dois métodos mais utilizados na atualidade no estudo de sistemas dissipativos governados por Equações Diferenciais Parciais.

Referências

[1] Adams, R. A. **Sobolev spaces**. New York: Academic Press, 1975.

[2] Brézis, H. **Análisis funcional teoria y aplicaciones**. Madri: Alianza Editora, 1984.

[3] Gearhart, L. Spectral theory for the contractions semigroups on Hilbert spaces. **Trans. of American Mathematical Society** (1), v.236, p. 385-394, 1978.

[4] Huang, F. L. Characteristic condition for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces. **Ann. of Diff. Eqs**, 1: p. 43-56, 1985.

[5] Kesavan, S. **Topics in functional analysis and applications**. New York: John Wiley and Sons, 1989.

[6] Lions, J. L. **Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires**. Paris: Dunod-Gauthier-Villars, 1969.

[7] Lions, J. C.; Magenes E. **Problèmes aux limites non homogènes et applications**. Paris: Dunod, 1968. v.1.

[8] Liu, Z.; Zheng, S. **Semigroups associated with dissipative systems.** London: Chapman & Hall/CRC, 1999.

[9] Pazy, A. **Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.** New York: Springer, 1983.

[10] Pruss, J. On the spectrum of C_0-semigroups. **Trans. of the American Mathematical Society** (2), 1984. v.284, p. 847-857.

[11] Raposo, C. A. ; Bastos, W. D. ; Alves, B. F. Loss of exponential stability for a thermoelastic system with memory. **Electron. J. Diff. Equ.**, v.2010 (2010), n.132, página 1-05.

[12] Rezende, Veridiana. **O método de Galerkin**. 2005. 42f. Dissertação. (Programa de Pós-Graduação em Matemática) Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2005.

[13] Visik, M.I; Ladyzhenskaia, O. A. Boundary value problems for partial differential equations and certain classes of operator equations. **A.M.S. Translations Series** 2, 10, 1958, 223-281.

[14] Wyler, A. Stability of wave equations with dissipative boundary condition in a bounded domain. **Differencial and Integral Equations**. 7; 1994, página 345-366.

[15] Zheng, S. Nonlinear parabolic equations and hiperbolic-parabolic coupled systems. New York: **Pitman series Monographs and Survey in Pure and Applied Mathematics**, 1995, v.76.