

LUIS EDUARDO REYES PÉREZ

**FUNCIÓN EXPONENCIAL EN EL AULA: PRAXEOLOGÍAS
MATEMATICAS EN ENSEÑANZA MEDIA**

JUIZ DE FORA (MG)

2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MESTRADO PROFISSIONAL EM
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

LUIS EDUARDO REYES PÉREZ

**FUNCIÓN EXPONENCIAL EN EL AULA: PRAXEOLOGÍAS
MATEMATICAS EN ENSEÑANZA MEDIA.**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dra: Chang Kuo Rodrigues

JUIZ DE FORA (MG)

2015

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca
Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Reyes Pérez, Luis Eduardo. Função exponencial na aula:
Praxeologias matemáticas no ensino médio / Luis Eduardo
Reyes Pérez. -- 2015. 115 f.

Orientadora: Chang Kuo Rodrigues Dissertação (mestrado
profissional) - Universidade Federal de Juiz de Fora,
ICE/Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Educação
Matemática, 2015.

1. Educação matemática. 2. Praxeologias matemáticas. 3. Teoria
Antropológica do Didático. 4. Função exponencial. 5. Engenharia
Didática. I. Rodrigues, Chang Kuo, orient. II.
Título.

Luis Eduardo Reyes Perez

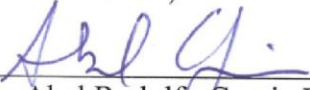
“Función Exponencial en el Aula: Praxeologías Matemáticas en Enseñanza Media.”

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.


Comissão Examinadora



Prof. Dra. Chang Kuo Rodrigues
(Colaboradora UFJF)



Prof. Dr. Abel Rodolfo Garcia Lozano
(UERJ/Unigranrio)



Prof. Dr. Amarildo Melchiades da Silva
(UFJF)

Aprovada em 26/11/2015

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios, por la oportunidad de alcanzar esta nueva etapa de mi vida.

Mis sinceros agradecimientos a mi orientadora y profesora Chang Kuo Rodrigues, por la paciencia y dedicación prestadas que permitieron la realización de este trabajo.

A la banca participante de la cualificación y de la defensa, compuestas por los profesores Abel Rodolfo Garcia Lozano y Amarildo Melchades Da silva, ya que gracias a sus sugerencias convirtieron este trabajo mas agradable y coherente.

Agradezco a todos los profesores del programa de Maestria en Educación Matemática de la Universidad Federal de Juiz de Fora, en especial a las profesoras Liamara Scortegagna, Maria Cristina Araujo y Cristiane Mendes de Andrade por la excelentes clases durante el curso.

A la Universidad Federal de Juiz de Fora por la oportunidad de estudiar en su institución.

Al programa de becas de la organización de estados americanos (OEA) y al grupo Coimbra de Universidades Brasileñas (GCUB) por la oportunidad que me concedió al realizar esta maestria.

A mi querida familia, por el apoyo incondicional durante esta ardua tarea que permitio la elaboración de este trabajo.

Y a las personas que indirectamente me acompañaron en el proceso de preparación de esta disertación tornándola mas rica y provechosa.

“No pienso auténticamente si los otros tampoco piensan. Simplemente, no puedo pensar por los otros ni para los otros, ni sin los otros. La investigación del pensar del pueblo no puede ser hecha sin el pueblo, sino con él, como sujeto de su pensar”

Paulo Freire

RESUMEN

Este trabajo es el resultado de una investigación sobre las praxeologías matemáticas realizadas por alumnos de enseñanza media, sobre el concepto matemático de función exponencial, en la Institución Educativa Técnica de Tunia en el Departamento del Cauca, Colombia. En este documento las reflexiones fueron enfocadas hacia adolescentes colombianos de enseñanza media en Colombia y la propuesta fue investigar qué tipos de praxeologías puntuales surgen en el momento de realizar actividades acerca de función exponencial. Buscando responder esta pregunta, orientamos esta disertación mediante la metodología de Ingeniería Didáctica, con la intención de direccionar el trabajo del investigador. En ese sentido se cuenta también con los procedimientos metodológicos los cuales permitieron verificar si a partir de la intención de conocer e identificar las potencialidades de las praxeologías puntuales estas sean idóneas a fin de transformarlas en praxeologías contextualizadas para una cierta institución de enseñanza I desarrollada por el profesor titular y en consecuencia ésta sea apropiada e interiorizada convirtiéndose en una herramienta potencialmente válida para el profesor. Por tanto, surgen preguntas en el contexto educativo, sobre la forma y construcción de lo que se enseña, en particular el concepto de función exponencial. La construcción de las praxeologías puntuales, así como su formulación, serán enfocadas a través de la teoría antropológica de lo didáctico que además de identificar, ayudará a orientar la construcción de secuencias didácticas relacionadas con la función exponencial que formarán parte del producto educacional de esta disertación y en especial a la contribución de nuevas investigaciones.

Palabras-clave: Educación matemática. Praxeologías matemáticas. Teoría Antropológica de lo Didáctico. Función exponencial. Ingeniería Didáctica.

ABSTRACT

This work is the result of the research about the mathematic praxeologies made by students the middle education about the mathematic concept of exponential function, in the Technical Educational Institution from Tunia located in the department of Cauca. On this document the considerations were directed to colombians youngers on the middle education in Colombia and the proposal is to research which types of punctual praxeologies arise in the moment of effect questions about of exponential fuction. In order to answer this question, we focused this dissertation through the methodology of didactic engineering, with the intention of focussed of work de researcher. also included the methodological procedures, which allowed to assess whether, based on the intention to know and identify the potential of specific praxeologies in order to turn them into praxeologies contextualized in an educational institution I and developed by the main professor and as a consequence, that praxeology turn into an educational concept, about the form and construction itself of what we teach, in particular,the concept of exponential fuction. The construction of the puctual praxeologies as their formulation, will be focused by through the anthropological theory of didactic. That in addition to identifying, will help to guide the construction of teaching sequences relating with the exponential fuction that will take part on the educational product of this dissertation and in special the contribution of new researches.

Keywords: Mathematic education. mathematic praxeology. Anthropological theory of the didactic. Exponential function. Didactic engineering.

RESUMO

Este trabalho é o resultado da pesquisa sobre as praxeologias matemáticas realizadas por alunos do Ensino Médio, sobre o conceito matemático de função exponencial, na Institucion Educativa Tecnico de Tunia, no estado de Cauca, Colômbia. Neste trabalho, as reflexões foram direcionadas para adolescentes colombianos do ensino médio e a proposta foi de pesquisar que tipos de praxeologias pontuais surgem quando lhes foram solicitados a realizar atividades relacionadas à função exponencial. Buscando desenvolver esta pesquisa, recorreu-se à metodologia da Engenharia Didática, com o intuito de direcionar o trabalho do pesquisador. Nesse sentido, contou também com os procedimentos metodológicos, os quais permitiram avaliar se a partir da intenção de conhecer e identificar as potencialidades das praxeologias pontuais de modo a transformá-las em praxeologias contextualizadas, em uma instituição de ensino I, desenvolvida pelo professor titular e que, conseqüentemente, esteja apropriada e aprofundada, tornando-se uma ferramenta potencialmente válida para o professor. Portanto, surgem perguntas no contexto educativo, sobre a maneira e construção do que se ensina, em particular, o conceito de função exponencial. A construção dessas praxeologias pontuais, assim como a sua formulação, será norteadada pela Teoria Antropológica do Didático que além de identificar, ajudará a orientar à construção de seqüências didáticas relacionadas com a função exponencial que formarão parte do produto educacional desta dissertação e em especial à contribuição de novas investigações.

Palavras-chave: Educação matemática. Praxeologías matemáticas. Teoria Antropológica do Didático. Função exponencial. Engenharia Didática.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1- Institución educativa técnica de tunía en el departamento del cauca.....	41
FIGURA 2 - Grupo décimo	43
FIGURA 3 - Función exponencial.....	60
FIGURA 4 Tareas.....	69
FIGURA 5 - Estudiante 1	71
FIGURA 6 - Estudiante 1.....	72
FIGURA 7 - Estudiante 1.....	73
FIGURA 8 - Estudiante 2.....	75
FIGURA 9 - Estudiante 2.....	76
FIGURA 10 Estudiante 2.....	77
FIGURA 11 Estudiante 2.....	78
FIGURA 12- Estudiante 2.....	79
FIGURA 13- Estudiante 2.....	79
FIGURA 14- Estudiante 3.....	80
FIGURA 15- Estudiante 3.....	82
FIGURA 16- Estudiante 3.....	83
FIGURA 17- Trabajando con deslizadores	104

LISTA DE DIAGRAMAS

DIAGRAMA 1 -	$[T_1 / t_y / E_1]$	69
DIAGRAMA 2 -	$[T_2 / t_y / E_1]$	70
DIAGRAMA 3 -	$[T_3 / t_y / E_1]$	71
DIAGRAMA 4 -	$[T_4 / t_y / E_1]$	72
DIAGRAMA 5 -	$[T_5 / t_y / E_1]$	73
DIAGRAMA 6 -	$[T_1 / t_y / E_2]$	74
DIAGRAMA 7 -	$[T_2 / t_y / E_2]$	74
DIAGRAMA 8 -	$[T_3 / t_y / E_2]$	75
DIAGRAMA 9 -	$[T_4 / t_y / E_2]$	76
DIAGRAMA 10-	$[T_5 / t_y / E_2]$	77
DIAGRAMA 11-	$[T_1 / t_y / E_3]$	80
DIAGRAMA 12-	$[T_3 / t_y / E_3]$	81
DIAGRAMA 13-	$[T_4 / t_y / E_3]$	82
DIAGRAMA 14 -	$[T_5 / t_y / E_3]$	83
DIAGRAMA 15-	Tecnologías θ de tarea 1 en el estudiante 1.....	84
DIAGRAMA 16-	Tecnologías α de tarea 2 en el estudiante 1.....	85
DIAGRAMA 17-	Tecnologías β de tarea 3 en el estudiante 1.....	86
DIAGRAMA 18-	Tecnologías γ de tarea 4 en el estudiante 1.....	87
DIAGRAMA 19-	Tecnologías δ de tarea 5 en el estudiante 1.....	88
DIAGRAMA 20-	Tecnologías θ^\triangleright de tarea 1 en el estudiante	89
DIAGRAMA 21-	Tecnologías α^\triangleright de tarea 2 en el estudiante 2.....	90
DIAGRAMA 22-	Tecnologías β^\triangleright de tarea 3 en el estudiante 2.....	91
DIAGRAMA 23-	Tecnologías γ^\triangleright de tarea 4 en el estudiante	92
DIAGRAMA 24-	Tecnologías δ^\triangleright de tarea 5 en el estudiante 2.....	93
DIAGRAMA 25-	Tecnologías $\theta^{\triangleright\triangleright}$ de tarea 1 en el estudiante 3.....	94
DIAGRAMA 26-	Tecnologías $\beta^{\triangleright\triangleright}$ de tarea 3 en el estudiante 3.....	95
DIAGRAMA 27-	Tecnologías $\gamma^{\triangleright\triangleright}$ de tarea 4 en el estudiante 3.....	96
DIAGRAMA 28-	Tecnologías $\delta^{\triangleright\triangleright}$ de tarea 5 en el estudiante 3.....	97

LISTA DE CUADROS

CUADRO 1 - Niveles de escolaridad: Preescolar.....	24
CUADRO 2 - Niveles de escolaridad: Primaria.....	24
CUADRO 3 - Niveles de escolaridad: Basica secundaria.....	25
CUADRO 4 - Niveles de escolaridad: Alta secundaria.....	25
CUADRO 5 - Niveles de escolaridad: Educación superior.....	26
CUADRO 6 - Tarea 1.....	98
CUADRO 7 - Tarea 2.....	99
CUADRO 8 - Tarea 3.....	100
CUADRO 9 - Tarea 4.....	101
CUADRO 10 - Tarea 5.....	102

SUMÁRIO

1	INTRODUCCIÓN	14
2	ANÁLISIS PRELIMINARES	19
2.1	INGENIERIA DIDACTICA	19
2.2	CURRICULO EDUCATIVO EN COLOMBIA Y CURRICULO EDUCATIVO EN EL BRASIL.....	23
2.2.1	EL SISTEMA EDUCATIVO EN COLOMBIA.....	23
2.2.1.1	PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS.....	29
2.2.1.2	PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS.....	30
2.2.1.3	PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS.....	30
2.2.1.4	EL PENSAMIENTO ALEATORIO Y LOS SISTEMAS DE DATOS.....	31
2.2.1.5	PENSAMIENTO VARIACIONAL Y DE SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS.....	33
2.2.2	EL SISTEMA EDUCATIVO EN EL BRASIL.....	34
2.2.2.1	EDUCACIÓN PRE-ESCOLAR.....	36
2.2.2.2	EDUCACIÓN PRIMARIA Y PRIMER CICLO DE SECUNDARIA.....	36
2.2.2.3	EDUCACIÓN SECUNDARIA SUPERIOR.....	37
2.2.2.4	EDUCACIÓN ESPECIAL.....	38
2.2.2.5	LA EDUCACIÓN SUPERIOR.....	39
2.3	SITIO DE LA PESQUISA.....	40
2.4	LOS SUJETOS DE PESQUISA.....	42
2.5	TEORIA ANTROPOLOGICA DE LO DIDACTICO.....	43
2.6	REVISIÓN DE LITERATURA	53
2.7	EL SABER MATEMATICO: FUNCIÓN EXPONENCIAL.....	58
2.7.1	EL NÚMERO e	58
2.7.2	DEFINICIÓN DE FUNCIÓN EXPONENCIAL.....	59
3	CONCEPCIÓN Y ANÁLISIS A PRIORI	62
3.1	CONCEPCIONES.....	62
3.2	ANÁLISIS A PRIORI.....	64
4	EXPERIMENTACIÓN	68
4.1	APLICACIÓN DE LAS ACTIVIDADES.....	68
4.2	MARCOS INTERPRETATIVOS.....	104
5	VALIDACION Y ANÁLISIS A POSTERIORI	106
6	CONSIDERACIONES FINALES	111
	REFERENCIAS	113

1 INTRODUCCIÓN

La práctica pedagógica y el saber pedagógico son de suma importancia para el desarrollo de una comunidad pensante, reflexiva y crítica de la sociedad, por lo que debemos como maestros del área de matemáticas, forjar una buena formación docente que permita el desarrollo de un pensamiento re-contextualizado de ella, es decir, describir un determinado proceso mental matemático en el que las personas reorienten su concentración de un canal de información a otro lo más rápido posible, o cambia el curso de sus acciones, manteniendo un rendimiento preciso. La práctica debe ser autodescubrimiento personal, el tomar conciencia por sí mismo, es decir, se trata del desarrollo de la personalidad mediada por un contexto. El docente tiene que desarrollar su sabiduría experiencial y su creatividad para afrontar las situaciones únicas, ambiguas, inciertas y conflictivas que configuran la vida en el aula.

Es por esto, que el concepto matemático de función exponencial permite, entre otras cosas, organizar información que se obtiene a través de datos numéricos tomados de algún fenómeno y estudiar la manera en que éstos se relacionan entre sí. Este tipo de funciones tienen mucho valor y utilidad para resolver problemas de la vida diaria, problemas de finanzas, de economía, de estadística, de ingeniería, de medicina, de química, de física, de astronomía, de geología, y de cualquier área social donde haya que relacionar variables. Por ejemplo: el crecimiento poblacional (Demografía) de una región o población en años, parece estar sobre una curva de característica exponencial que sugiere el modelo matemático dado por $N = N_0 e^{kt}$, donde N_0 es la población inicial, t es el tiempo transcurrido en años y k es una constante. Cuyo caso en 1798, el economista inglés Thomas Malthus observó que la relación $N = N_0 e^{kt}$ era válida para determinar el crecimiento de la población mundial y estableció, además, que como la cantidad de alimentos crecía de manera lineal, el mundo no podía resolver el problema del hambre. Esta lúgubre predicción ha tenido un impacto tan importante en el pensamiento económico, que el modelo exponencial de crecimiento poblacional se conoce con el nombre de modelo Malthusiano.

En la medicina, muchos medicamentos son utilizados para el cuerpo humano, de manera que la cantidad presente sigue una ley exponencial de disminución y sirve para describir cualquier proceso que evolucione de modo que el aumento (o disminución) en un pequeño intervalo de tiempo sea proporcional a lo que había al

comienzo del mismo. Además, cuando se va al mercado o a cualquier centro comercial, siempre se relaciona un conjunto de determinados objetos o productos alimenticios, con su costo, para así saber cuánto podemos comprar; si lo llevamos al plano, podemos escribir esta correspondencia en una ecuación de función "X" como el precio y la cantidad de producto como "Y".

La función exponencial debe generar un pensamiento reflexivo que sea construido por los actores principales en el proceso de enseñanza y en el proceso de aprendizaje, ya que no solo permitirá entender los procesos que involucran los sistemas económicos globales, sino también nuestra naturaleza circundante. El estudiante debe ser capaz de poner en práctica praxeologías matemáticas que le permitan generar y deducir fenómenos que lo involucran y convertirse en un sujeto pensante y capacitado para nuestro mundo. Y es por ello que nosotros como profesores, los formadores de ese sujeto pensante, los creadores de las bases para la construcción de su pensamiento, es decir, de construir praxeologías que motiven la actividad humana y matemática del alumno, debemos ayudar a los estudiantes para que existan avances importantes en el desarrollo de una sociedad pensante.

Por lo tanto es de vital importancia como maestros, la reflexión de nuestra práctica y ejercicio profesional con el fin de obtener una metodología eficaz en el aula de clase, y en consecuencia, debemos preguntarnos por las diversas formas de producir resultados eficaces, como por ejemplo la implementación acertada de distintas estrategias o técnicas utilizadas en el aula de clase, resolución de problemas, software interactivos entre otros.

Esta investigación de campo se realizó en la Institución Educativa Técnica de Tunía, Corregimiento del Municipio de Piendamó que se haya ubicado en el Departamento del Cauca, Colombia. El Departamento del Cauca es una de las regiones más pobres de Colombia, es multiétnico y multicultural, con grandes recursos naturales y afligido por problemas de orden público, de conflicto armado y de abandono gubernamental. La Institución Educativa Técnica de Tunía, es de carácter oficial y ofrece los niveles de Preescolar, Educación Básica Primaria, Secundaria y Media Técnica Comercial y Agropecuaria. La comunidad educativa está comprometida con el respeto y fortalecimiento de valores éticos, religiosos, espirituales, sociales, culturales, políticos y estéticos, apropiándose adecuadamente de contenidos, ciencia y tecnología que le puedan permitir al estudiante desempeñarse con efectividad, calidad y competitividad en la sociedad.

Para alcanzar estas metas, el plan de estudios de la Institución Educativa Técnica de Tunía-**Colombia** y de cualquier institución, debe valorar los distintos factores implícitos y explícitos de la micro-sociedad y macro-sociedad de la educación, como lo son el contexto y el maestro, con el propósito de lograr el objetivo de alcanzar el aprendizaje eficaz de las matemáticas.

En cualquier institución educativa el estudiante juega un papel muy importante y el profesor es un guía de su aprendizaje, pero se debe pretender que el alumno aprenda con sentido unas matemáticas que se han convertido en un área llena de monotonía y rigurosidad, a través de herramientas pedagógicas y con el mejoramiento de organizaciones didácticas y matemáticas.

Valorizando el aprendizaje eficaz en el estudiante, el objetivo principal de esta investigación es formular praxeologías a partir del estudio de función exponencial a la luz de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, sirviendo como recurso didáctico para la enseñanza de la Matemática. La noción principal del referente teórico es la de praxeología, noción que hace parte de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), que basa su construcción conceptual en la acción humana del sujeto, y en ella se admite en efecto que toda actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo único que se denomina praxeología.

Tomando en cuenta lo mencionado anteriormente, además de mencionar que la investigación esta orientada a estudiantes adolescentes colombianos; es necesario identificar praxeologías, como lo son la identificación de técnicas a partir de un cierto tipo de tareas, las tecnologías que dan cuenta de las técnicas presentadas y por último las teorías que tienen un carácter de justificación y producción de la tecnología basada en la técnica establecida. Por tanto en esta investigación nos preguntaremos ¿Que tipos de praxeologías puntuales surgen en el momento de realizar actividades acerca de la función exponencial?

De esta forma, el trabajo establecerá esta composición praxeológica, en la que se identificarán los bloques de la praxeología tanto el saber-hacer como el saber sabio que permitirá tener una relevancia en el trabajo y praxis del profesor, como también en el estudiante y en su pensamiento.

Es por tanto que a partir de la intención de conocer e identificar las praxeologías puntuales es conveniente potencializarlas y transformarlas en praxeologías contextualizadas para una cierta institución de enseñanza I desarrollada por el profesor titular y a su vez esta praxeología sea apropiada e

interiorizada además de convertirse en una herramienta cotidiana para el profesor, logrando así una mejora de la educación matemática.

Asimismo se pretende buscar que el estudiante dinamice los conocimientos que adquiere en un determinado contexto educativo, así como también contribuir en la formación de docentes reflexivos, pensantes, generadores de estrategias, comprometidos con nuestros alumnos en su proceso de formar generaciones de pensamiento y de buenas virtudes.

Por último, tomando en cuenta las necesidades de generar herramientas que permitan que los docentes sean actores de su praxis pedagógica y a partir de la intención de conocer esas praxeologías, estas se esquematizarán según lo mencionado en la teoría antropológica de lo didáctico que está encaminado hacia el discurso praxeológico definido en esta teoría como la tarea, la técnica, la tecnología y la teoría, por lo tanto la praxeología puntual, que permitirá la observación de la estructura praxeológica enfocada a la función exponencial lo cual conllevará a que se de una ampliación del libro del saber del profesor concatenado a su praxis pedagógica. Esta esquematización propondrá modelos matemáticos enfocados a la función exponencial que dependerá de un contexto determinado, por consiguiente, la propuesta de producto educativo, es construir secuencias didácticas para el estudio del concepto de función exponencial dirigido a los profesores del Brasil y de Colombia, usando estas ayudas didácticas en el grado curricular acorde a este concepto matemático.

El presente trabajo está dividido en 6 partes, la primera parte se introduce al tema específico del campo de investigación, como también al objeto matemático función exponencial, en la segunda parte se presentan los análisis preliminares haciendo uso de la metodología de investigación llamada ingeniería didáctica, además de la presentación de conceptos importantes en esta metodología. Tomando en cuenta las diferencias educacionales en los países Brasil y Colombia, se muestran los currículos correspondientes de estos dos países y el significado de enseñanza media en Colombia, asimismo mostramos el sitio de investigación y los sujetos de investigación de la Institución Educativa Técnica de Tunia-Colombia; continuando con el aporte teórico para esta investigación, se presentan los conceptos y definiciones de la teoría antropológica de lo didáctico, referente teórico en esta investigación, dividida en los segmentos más relevantes que componen la praxeología, como lo son la tarea, la técnica, la tecnología y la teoría y los diferentes

documentos que hicieron aportes importantes en el desarrollo de este trabajo, por último mostramos el saber matemático: función exponencial, sus definiciones, además de un breve comentario del número de Euler. En la tercera parte, se exhiben las concepciones y análisis a priori que se tomaron en cuenta a la hora de nuestra experimentación, recalcando las variables micro-didácticas y las variables macro-didácticas involucradas para esta investigación. Una cuarta parte presenta los datos recolectados en la fase de experimentación que se llevaron a cabo en la Institución Educativa Técnica de Tunía-Cauca-Colombia, además en este fragmento, se muestra la identificación de las técnicas y las tecnologías a partir del desarrollo de un tipo de tareas realizadas por los estudiantes, la aplicación de las actividades y los diferentes marcos interpretativos posibles en el contexto educacional. En una quinta parte se presenta un breve análisis a posteriori que da cuenta de las confrontaciones con el análisis a priori que fundamenta la validación de la hipótesis formulada para esta pesquisa, y que refleja los conocimientos previos de los alumnos durante la investigación de las tareas identificadas por el autor, en la sexta y última parte se muestran las consideraciones finales para este documento y de ese modo daremos por concluido este trabajo.

2 ANALISIS PRELIMINARES

A continuación daremos a conocer los componentes de la metodología que orienta esta disertación, en la que se explica detalladamente las etapas que son seguidas en la estructuración de este trabajo. En seguida tomando en cuenta que la investigación fue realizada en Colombia, con estudiantes colombianos, se tomara en cuenta los aspectos educativos y curriculares tanto de Colombia como en el Brasil, con el fin evidenciar las diferencias en cada nivel de estudios. Por ultimo tomaremos aspectos relevantes acerca del sitio de investigación, el grupo de estudiantes y elementos básicos del objeto matemático, función exponencial.

2.1 LA INGENIERIA DIDACTICA

La noción de Ingeniería Didáctica se introdujo en la didáctica de la matemática francesa a comienzos de la década de los 80 para describir una manera de abordar el trabajo didáctico comparable al trabajo del ingeniero. Para realizar un proyecto, el ingeniero se apoya en los conocimientos científicos de su dominio, acepta someterse a un control científico, pero al mismo tiempo, está obligado a trabajar sobre objetos mucho más complejos que los de la ciencia y por tanto puede abordar problemas que la ciencia no puede tomar a su cargo todavía

La Ingeniería Didáctica desde su origen está fundamentalmente ligada a las intervenciones didácticas (experimentaciones) en las clases, tomando la forma de secuencias de lecciones; “estas realizaciones se entienden como la encarnación o puesta a prueba de un trabajo teórico” (ARTIGUE, 1995, p. 20). Esto es, se trata del diseño y evaluación de secuencias de enseñanza de las matemáticas teóricamente fundamentadas, con la intención de provocar la emergencia de determinados fenómenos didácticos, al tiempo que se logra elaborar recursos para la enseñanza científicamente experimentados. Como características principales de la Ingeniería Didáctica en su sentido originario se destacan:

La validación es esencialmente interna, fundada en la confrontación entre el análisis apriori y a posteriori y no en la validación externa, basada en la comparación de rendimientos de grupos experimentales y de control

Perrin-Glorian (1995, p. 59) considera que la Ingeniería Didáctica desde los primeros trabajos "es más que una metodología de investigación: se pretende también una transposición didáctica viable en la enseñanza ordinaria". Es decir, que la Ingeniería Didáctica como producto es tan importante como la del método. Posiblemente esto no es así en el caso de las investigaciones de Brousseau a pesar de que tales investigaciones tenían lugar en un contexto de clases reales como las que diseñaba y experimentaba en la escuela Jules Michélet de Burdeos, pero sí lo era en Douady y Perrin-Glorian que trataban, en primer lugar, de indagar una progresión que permitiera mejorar la enseñanza, estando por tanto relacionadas con observaciones naturalistas.

El uso de la ingeniería didáctica como metodología de investigación es analizada por Artigue (1995) "como un esquema experimental basado sobre la realizaciones didacticas en sala de aula, es decir, sobre la concepción, la realización, la observación y el análisis de secuencias didacticas".

La Ingeniería Didáctica aborda estudios de casos en los que se distinguen las siguientes fases (ARTIGUE, 1995):

- a) Análisis preliminares;
- b) Concepción y análisis a priori de situaciones didácticas;
- c) Experimentación;
- d) Análisis a posteriori y validación

En seguida, será detallado cada una de las fases que involucran el contexto técnico y científico de la ingeniería didáctica.

Para trabajar en una Ingeniería Didáctica son necesarios Análisis Preliminares respecto al cuadro teórico didáctico general y sobre los conocimientos didácticos adquiridos y relacionados con el tema. Los Análisis Preliminares más frecuentes son:

- ✓ El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.
- ✓ El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.
- ✓ El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.
- ✓ El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización de la Ingeniería Didáctica.
- ✓ Todo lo anterior se realiza teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación. (ARTIGUE, 1995, p. 38).

Tradicionalmente, este análisis a priori comprende una parte descriptiva y una predictiva; se centra en las características de una situación a-didáctica que se ha diseñado y se va a proponer a los alumnos:

- ✓ Se describen las elecciones locales (relacionándolas con las globales) y las características de la situación didáctica que de ellas se desprenden.
- ✓ Se analiza qué podría aprender en esta situación un estudiante en función de las posibilidades de acción, decisión, control y validación de las que dispone, una vez puesta en práctica, cuando trabaja independientemente del profesor.
- ✓ Se prevén los comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, que, si se producen los comportamientos esperados, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento pretendido por el aprendizaje.

Este análisis a priori se debe concebir como un análisis del control del sentido. De forma muy esquemática, si la teoría constructivista sienta el principio de la participación del estudiante en la construcción de sus conocimientos a través de la interacción con un medio determinado, la teoría de las situaciones didácticas, que sirve de referencia a la metodología de la Ingeniería Didáctica, ha pretendido, desde su origen, constituirse en una teoría del control de las relaciones entre el sentido y las situaciones.

Los análisis a priori son hechas principalmente para fundamentar la concepción de ingeniería didáctica, sin embargo ellas son retomadas y profundizadas durante todo el transcurso del trabajo.

Además en esta fase se deben tener en consideración las variables micro-didácticas y macro-didácticas involucradas en la pesquisa. En este caso las variables micro-didácticas según Artigue son las variables concernientes a la organización local de la ingeniería, es decir, la organización de una secuencia de fase y en lo referido a las variables macro-didácticas son las concernientes a la organización global a la ingeniería.

Ambas variables pueden ser generales o bien dependientes del contenido didáctico en el que se enfoca la enseñanza. Es importante resaltar que las elecciones globales, aunque se presenten separadas de las selecciones locales, no son independientes de ella.

El objetivo de un experimento de diseño no es demostrar que la trayectoria prevista de aprendizaje funciona, sino mejorarla mediante contraste y revisión de

conjeturas sobre el proceso de aprendizaje previsto y los medios específicos para apoyarlo. El fin global es contrastar y probar la trayectoria de aprendizaje formulada en la fase de preparación.

La experimentación es la fase de la realización de la ingeniería con una cierta población de estudiantes. Esa etapa se inicia en el momento en que se da el contacto investigador/profesor/observador con la población de los estudiantes objeto de la investigación.

La experimentación supone:

- ✓ La explicitación de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación.
- ✓ El establecimiento del contrato didáctico.
- ✓ La aplicación de los instrumentos de investigación.
- ✓ El registro de observaciones realizadas durante la experimentación.

Es recomendable, cuando la experimentación tarda más de una sesión, hacer un análisis a posteriori local, confrontando con los análisis a priori, con el fin de hacer las correcciones necesarias. Durante la experimentación se busca respetar las selecciones y deliberaciones hechas en los análisis a priori.

A la fase de experimentación sigue la de análisis a posteriori que se basa en el conjunto de datos recogidos a lo largo de la experimentación, que incluyen las observaciones de las secuencias de enseñanza, y las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella. Estos datos se completan con frecuencia con otros obtenidos mediante cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, aplicados en distintos momentos de la enseñanza o durante su transcurso y, como ya se ha indicado, en la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori, se fundamenta la validación de las hipótesis formuladas en la investigación.

La evolución de la Ingeniería Didáctica está ligada a la evolución de la propia teoría de situaciones, o a la aplicación de otros modelos teóricos más o menos derivados de la Teoría de Situaciones Didáctica (TSD), como es el caso de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1992), o de los trabajos realizados sobre las prácticas de los profesores.

2.2 CURRÍCULO EDUCATIVO EN EL BRASIL Y CURRÍCULO EDUCATIVO EN COLOMBIA

Teniendo en cuenta las diferencias de currículo en Brasil y Colombia, de donde el autor de esta disertación es originario, además de los niveles de enseñanza, es conveniente aclarar e informarse acerca de estos conceptos e igualmente esclarecer que la enseñanza media mencionada en esta investigación, está relacionada con el currículo colombiano y es importante tener en cuenta que la investigación fue realizada en una pequeña división territorial y en un contexto colombiano. A continuación se dará un breve resumen de los currículos de enseñanza y los niveles de escolaridad tanto en Colombia como en el Brasil que permitirán un aclaramiento de los términos utilizados y desconocidos.

2.2.1 El Sistema educativo en Colombia

La educación en Colombia está conformada por los niveles de educación preescolar, educación básica, educación media y de nivel superior. La entidad encargada de la administración tanto académica como económica, es el Ministerio de Educación Nacional, que delega en las 78 secretarías de educación la gestión y organización según las regiones. La educación estatal es generalmente más económica que la educación privada. La educación está reglamentada por la ley 115 de 1994 o Ley General de Educación. La política pública en educación se define a través del plan decenal de educación y los planes sectoriales de educación en los niveles nacional, departamental, distrital y municipal.

La educación formal en Colombia tiene los niveles de educación preescolar, básica (primaria y secundaria o bachillerato), media vocacional y educación superior. La educación que la mayoría de la población cursa comprende preescolar, básica (primaria y secundaria o bachillerato) y media vocacional que suman en total 11 años o más.

Cuadro 1 - Niveles de escolaridad: Preescolar

EDAD (Años)	GRADO	NIVEL INSTITUCIONAL
PREESCOLAR		
1-2	Prejardín	Jardín Infantil / Educación Preescolar
2-3	Jardín	
3-4	Preescolar	
4-5	Kínder	
5-6	Transición	

Este nivel de escolaridad presentado en el cuadro 1, representa el primer contacto de los niños con un entorno ajeno al hogar, siendo la primera oportunidad de socialización. Los lugares donde se lleva a cabo este proceso se conocen como jardines infantiles y, al igual que en los demás niveles, son subsidiados por fondos estatales (Instituto Colombiano de Bienestar Familiar) o privados. La edad de ingreso incluye a bebés de menos de un año de edad.

Los dos últimos años de esta etapa de educación inicial se denominan, usualmente, kínder (a los 3 o 4 años) y transición (a los 4 o 5 años). En muchas instituciones, principalmente en todas las privadas, se espera que el niño aprenda a leer y escribir (en español) en la etapa de transición, previa al primer año de la educación básica primaria.

Cuadro 2 -Niveles de escolaridad: Primaria

EDAD (Años)	GRADO	NIVEL INSTITUCIONAL
PRIMARIA		
6-7	1	Escuela Primaria / Educación Básica Primaria
7-8	2	
8-9	3	
9-10	4	
10-11	5	

Este nivel de escolaridad presentado en el cuadro 2 consta de cinco grados, cada uno de un año de duración, nombrados de primero a quinto grado, ingresando a los 5 ó 6 años de edad.

Anualmente se ha venido promoviendo la aprobación por decreto 230 de 2002, el cual indica que máximo el 5% de los estudiantes de una institución pueden reprobar el año, lo que ha incidido en un decaimiento de la calidad de la educación. La motivación para hacer la promoción automática es que un estudiante no debe tardar más años de los presupuestados, porque es costoso para el país, y públicamente se indica que la pérdida de un año va en contra de la autoestima de los estudiantes.

Cuadro 3 - Niveles de escolaridad: Basica secundaria

EDAD (Años)	GRADO	NIVEL INSTITUCIONAL
BÁSICA SECUNDARIA		
11-12	6	Básica / Educación Básica Secundaria
12-13	7	
13-14	8	
14-15	9	

Este nivel de escolaridad presentado en el cuadro 3, consta de cuatro grados, cada uno de un año de duración, nombrados de sexto a noveno.

Cuadro 4 - Niveles de escolaridad: Alta secundaria

EDAD (Años)	GRADO	NIVEL INSTITUCIONAL
ALTA SECUNDARIA		
15-16	10	Bachillerato / Educación Media
16-17	11	

En el cuadro 4 se presenta los niveles que comprenden los grados décimo y undécimo; en el caso de algunos colegios privados está reglamentado el grado duodécimo.

Cuadro 5 - Niveles de escolaridad: Educación superior

EDAD (Años)	GRADO	NIVEL INSTITUCIONAL
EDUCACIÓN SUPERIOR		
Mayor a 18	Universidad	Universidad / Educación Superior

En el cuadro número 5 es presentado la educación impartida en universidades y en otras instituciones de educación superior esta se divide en varios niveles distribuidos entre pregrado y postgrado.

En el nivel de pregrado se encuentran las carreras técnicas profesionales, tecnológica profesionales y las profesionales, donde las técnicas profesionales pueden variar entre 1,5 a 2 años, las tecnológicas profesionales entre 2,5 a 3,5 años y las profesionales usualmente de 5 años, las licenciaturas suelen durar 5 años.

En el nivel de postgrado se reconocen las especializaciones, las maestrías y los doctorados. Hay adicionalmente una serie de diplomados, seminarios y otros cursos de educación continua y educación para el trabajo y el desarrollo humano que en pocas semanas o meses permiten al profesional conocer nuevas técnicas o mantenerse actualizado, pero este tipo de diplomados están considerados dentro de la formación no formal o en algunos casos educación continuada.

La educación para optar por un título de maestría y especialización va enfocada a potenciar habilidades de gestión y profundización y actualización encaminadas a garantizar el crecimiento del sector productivo. Es usual que en los cargos altos de las organizaciones se exija este tipo de títulos de acuerdo al perfil organizacional.

Finalmente está el nivel de doctorado, que pocas universidades están acreditadas para ofrecer, y el cual busca la formación de investigadores y la creación de conocimiento nuevo.

La Comisión Internacional sobre Educación, Equidad y Competitividad Económica en América Latina y el Caribe, en su último informe, "Quedándonos atrás" publicado en 2001, al referirse a los problemas fundamentales que generan brechas en la educación en América Latina, ubicó en primer lugar la ausencia de estándares curriculares, ningún país del hemisferio ha establecido, divulgado o implementado estándares nacionales comprensivos, lo que impide que los países

cuenten con una percepción clara de dónde están, a dónde quieren ir y cuán lejos se encuentran de la meta deseada.

Por esta razón, y con base en los resultados de las diversas evaluaciones, el Ministerio de Educación Nacional colombiano decidió desarrollar una propuesta de estándares curriculares, inicialmente para las áreas de matemáticas, lengua castellana, y ciencias naturales y educación ambiental que precisan, para cada área del conocimiento y grado, los desempeños que todos los estudiantes del país deben alcanzar.

El MEN (Ministerio de Educación Nacional- Colombia) reunió a un grupo de profesores de las áreas, coordinados, en el caso de lengua castellana y ciencias naturales y educación ambiental, por Corpoeducación y en el de matemáticas por el MEN para trabajar con maestros en ejercicio de las respectivas áreas de colegios públicos y privados, con el fin de formular la propuesta, la cual se traduce en tres documentos de estudio.

Cada uno de ellos presenta, grado por grado, unos estándares, es decir, las expectativas de lo que se aspira los estudiantes sepan y puedan hacer con lo que saben en cada una de esas áreas, en preescolar, básica y media.

Colombia ha estado trabajando para mejorar la calidad de su educación, lo que significa que todos, independientemente de sus condiciones socioeconómicas, ingresen, permanezcan y aprendan en la escuela lo que tienen que aprender en el momento que tienen que hacerlo. Para ello, se han adelantado reformas que se consignan en la Ley General de Educación colombiano y en varios decretos posteriores.

Sin embargo, de acuerdo con las evaluaciones realizadas en los últimos años, hay aún camino por recorrer: la evaluación de competencias realizadas por el Sistema SABER del MEN encontró que sólo 11% de los estudiantes es capaz de resolver problemas matemáticos adecuadamente, y sólo 20% logra comprender bien lo que lee.

Aunque estos resultados dependen de una suma de factores sociales, económicos y culturales, se ha podido establecer que hay falta de claridad de muchas instituciones educativas, directivos, docentes, padres de familia, estudiantes y de la comunidad en general, sobre lo que se debe aprender en cada área y en cada grado, y por lo tanto, es imposible determinar si los estudiantes están adquiriendo las competencias que requieren para desempeñarse adecuadamente en

la sociedad. Si no está claro el punto de llegada, no se puede determinar si se está avanzando, ni se pueden diseñar estrategias de mejoramiento de la calidad.

Teniendo en cuenta hasta ahora lo mencionado anteriormente, daremos a conocer que son los estándares según el ministerio de educación colombiano. Un estándar en educación especifica lo mínimo que el estudiante debe saber y ser capaz de hacer para el ejercicio de la ciudadanía, el trabajo y la realización personal. El estándar es una meta y una medida; es una descripción de lo que el estudiante debe lograr en una determinada área, grado o nivel; expresa lo que debe hacerse y lo bien que debe hacerse.

La finalidad del ministerio de educación colombiano implica el mejoramiento de la calidad de la educación que debe partir del supuesto de que todos los niños y las niñas pueden aprender con niveles muy altos de logros o resultados. El solo hecho de elevar las expectativas de aprendizaje, puede mejorar el desempeño de los estudiantes.

La necesidad de garantizar la equidad. Los estándares son el marco a partir del cual las instituciones escolares, las autoridades educativas locales o regionales y el nivel central, representado por el Ministerio o las Secretarías de Educación, deben organizar y definir sus planes, programas y actividades en función de lograr que todos los estudiantes aprendan lo que tienen que aprender, con alto nivel de calidad.

La democratización de la educación, pues el contar con estándares claros, precisos, transparentes y conocidos por docentes, directivos, decisores de política, padres de familia y estudiantes, permite que sepan hacia dónde deben dirigir sus esfuerzos y facilita el proceso de rendición de cuentas sobre los resultados alcanzados.

Estos estándares, son el punto de partida para que las instituciones escolares, los municipios, las localidades y regiones definan su propio marco de trabajo curricular.

Aseguran que todas las escuelas ofrezcan educación similar y de alta calidad, lo que permite la igualdad de oportunidades educativas para todos los estudiantes.

Permiten especificar requisitos para la promoción a grados y niveles siguientes, así como para la graduación a la finalización de la educación básica o media. Además de Contribuir al diseño de pruebas de logros académicos estandarizadas y comparables.

Son la base para diseñar estrategias y programas de formación y capacitación de docentes, a partir de criterios y expectativas compartidas.

El currículo a todo lo largo de la educación básica y media se compone de los siguientes elementos: pensamiento numérico y sistemas numéricos; pensamiento espacial y sistemas geométricos; pensamiento métrico y sistemas de medidas; pensamiento aleatorio y sistemas de datos; pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos; y procesos matemáticos.

En seguida, detallaremos los cinco elementos o pensamientos utilizados en los estándares matemáticos durante toda la educación básica y media que orienta el trabajo del profesor, además del currículo escolar.

2.2.1.1 Pensamiento numérico y sistemas numéricos

En esta propuesta vamos a hablar del pensamiento numérico como un concepto más general de sentido numérico, el cual incluye no sólo éste, sino el sentido operacional, las habilidades y destrezas numéricas, las comparaciones, las estimaciones, los órdenes de magnitud, etcétera.

En los Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática sentido numérico es “una intuición sobre los números que surge de todos los diversos significados del número” Los autores de estos estándares afirman que los niños con sentido numérico comprenden los números y sus múltiples relaciones, reconocen las magnitudes relativas de los números y el efecto de las operaciones entre ellos, y han desarrollado puntos de referencia para cantidades y medidas.

Ampliando este concepto se afirma que el pensamiento numérico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones. Así se refleja una inclinación y una habilidad para usar números y métodos cuantitativos como medios para comunicar, procesar e interpretar información, y se crea la expectativa de que los números son útiles y de que las matemáticas tienen una cierta regularidad.

2.2.1.2 Pensamiento espacial y sistemas geométricos

En los sistemas geométricos se hace énfasis en el desarrollo del pensamiento espacial, el cual es considerado como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales.

Los sistemas geométricos se construyen a través de la exploración activa y modelación del espacio tanto para la situación de los objetos en reposo como para el movimiento. Esta construcción se entiende como un proceso cognitivo de interacciones, que avanza desde un espacio intuitivo o sensorio-motor que se relaciona con la capacidad práctica de actuar en el espacio, manipulando objetos, localizando situaciones en el entorno y efectuando desplazamientos, medidas, cálculos espaciales, etc., a un espacio conceptual o abstracto relacionado con la capacidad de representar internamente el espacio, reflexionando y razonando sobre propiedades geométricas abstractas, tomando sistemas de referencia y prediciendo los resultados de manipulaciones mentales.

Este proceso de construcción del espacio está condicionado e influenciado tanto por las características cognitivas individuales como por la influencia del entorno físico, cultural, social e histórico. Por tanto, el estudio de la geometría en la escuela debe favorecer estas interacciones. Se trata de actuar y argumentar sobre el espacio ayudándose con modelos y figuras, con palabras del lenguaje ordinario, con gestos y movimientos corporales.

Son las orientaciones epistemológicas, pedagógicas y curriculares que define el Ministerio de Educación Nacional, con el apoyo de la comunidad académica educativa para apoyar el proceso de fundamentación y planeación de las áreas obligatorias y fundamentales.

2.2.1.3 Pensamiento métrico y sistemas de medidas

La interacción dinámica que genera el proceso de medir entre el entorno y los estudiantes, hace que éstos encuentren situaciones de utilidad y aplicaciones prácticas donde una vez más cobran sentido las matemáticas.

Actividades de la vida diaria relacionadas con las compras en el supermercado, con la cocina, con los deportes, con la lectura de mapas, con la construcción, etc., acercan a los estudiantes a la medición y les permiten desarrollar muchos conceptos y destrezas matemáticas.

La desatención de la geometría como materia de estudio en las aulas y el tratamiento de los sistemas métricos desde concepciones epistemológicas y didácticas sesgadas, descuida por un lado el desarrollo histórico de la medición y por otro reduce el proceso de medir a la mera asignación numérica.

No es extraño, en nuestro medio, introducir a los niños y a las niñas en el mundo de la medida con instrumentos refinados y complejos descuidando la construcción de la magnitud objeto de la medición y la comprensión y el desarrollo de procesos de medición cuya culminación sería precisamente aquello que hemos denunciado como prematuro.

No se les ha permitido conocer el desarrollo histórico de la medida, lo que conlleva a que no se den cuenta de la necesidad misma de medir, ni de cómo la medida surgió de una “noción de igualdad socialmente aceptada” al comparar el tamaño, la importancia, el valor, etc., en situaciones comerciales o de trueque.

Algunos investigadores afirman que los niños no tienen conciencia de las sutilezas de la noción de replicación de la unidad, es decir, la repetición de una única unidad de medida, a partir de lo cual el hombre ha llegado al número y al recuento; y que de este hecho nació la necesidad de patrones de medida fijos. Las experiencias de los niños con las medidas comienzan normalmente con el número, y están a menudo restringidas a él, con pocas posibilidades de explorar los principios en los cuales se apoya la medición.

2.2.1.4 El pensamiento aleatorio y los sistemas de datos

Una tendencia actual en los currículos de matemáticas es la de favorecer el desarrollo del pensamiento aleatorio, el cual ha estado presente a lo largo de este siglo, en la ciencia, en la cultura y aún en la forma de pensar cotidiana. La teoría de la probabilidad y su aplicación a los fenómenos aleatorios, han construido un andamiaje matemático que de alguna manera logra dominar y manejar acertadamente la incertidumbre. Fenómenos que en un comienzo parecen caóticos, regidos por el azar, son ordenados por la estadística mediante leyes aleatorias de

una manera semejante a como actúan las leyes determinísticas sobre otros fenómenos de las ciencias. Los dominios de la estadística han favorecido el tratamiento de la incertidumbre en ciencias como la biología, la medicina, la economía, la psicología, la antropología, la lingüística y a ún más, han permitido desarrollos al interior de la misma matemática.

Las indagaciones de Shanghnessy (1985) le han llevado a establecer que en las matemáticas escolares el desarrollo del pensamiento aleatorio, mediante contenidos de la probabilidad y la estadística debe estar imbuido de un espíritu de exploración y de investigación tanto por parte de los estudiantes como de los docentes. Debe integrar la construcción de modelos de fenómenos físicos y del desarrollo de estrategias como las de simulación de experimentos y de conteos.

También han de estar presentes la comparación y evaluación de diferentes formas de aproximación a los problemas con el objeto de monitorear posibles concepciones y representaciones erradas. De esta manera el desarrollo del pensamiento aleatorio significa resolución de problemas.

La búsqueda de respuestas a preguntas que sobre el mundo físico se hacen los niños resulta ser una actividad rica y llena de sentido si se hace a través de recolección y análisis de datos. Decidir la pertinencia de la información necesaria, la forma de recogerla, de representarla y de interpretarla para obtener las respuestas lleva a nuevas hipótesis y a exploraciones muy enriquecedoras para los estudiantes. Estas actividades permiten además encontrar relaciones con otras áreas del currículo y poner en práctica conocimientos sobre los números, las mediciones, la estimación y estrategias de resolución de problemas.

En la tarea de buscar y recoger datos es importante mantener claros los objetivos, las actitudes, los intereses que la indujeron, prever qué tipos de respuestas se pueden encontrar, las dificultades que podrían presentarse, las distintas fuentes como consultas, entrevistas, encuestas, observaciones, la evaluación de su veracidad, distorsiones, sesgos, lagunas, omisiones y la evaluación de la actitud ética de quien recoge los datos y su responsabilidad social.

Cuando se habla de datos, es importante una reflexión sobre su naturaleza. Ellos no serían comprensibles sin considerar que tienen un mínimo de estructura, el formato y seguramente un orden, por ejemplo el estar unos a continuación de otros, el orden alfabético si son palabras, el orden aditivo si se trata de números. En este sentido podría considerarse que no hay datos sino sistemas de datos.

La enseñanza de las matemáticas convencionales ha enfatizado la búsqueda de la respuesta correcta única y los métodos deductivos. La introducción de la estadística y la probabilidad en el currículo de matemáticas crea la necesidad de un mayor uso del pensamiento inductivo al permitir, sobre un conjunto de datos, proponer diferentes inferencias, las cuales a su vez van a tener diferentes posibilidades de ser ciertas.

2.2.1.5 Pensamiento variacional y de sistemas algebraicos y analíticos

Esta naturaleza involucra al pensamiento numérico en la comprensión del significado de los números, de sus diferentes representaciones, en el reconocimiento del valor absoluto y relativo de los números, en la comprensión de las diferentes operaciones y en la utilización de las operaciones y los números en la formulación y solución de problemas y la comprensión de la estrecha relación entre el contexto del problema y el cálculo necesario para su resolución.

Hecha esta aproximación teórica a la naturaleza del pensamiento numérico, se requiere estudiar la naturaleza del pensamiento variacional para luego plantear sus posibles articulaciones didácticas.

Se propone abordar el estudio del pensamiento variacional desde la educación básica. Lo plantea como una posibilidad para superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentra como sustento de ellas.

Así pues, el pensamiento variacional se ocupa del desarrollo matemático de la variación y el cambio, involucrando cantidades y magnitudes. Es una forma dinámica de pensar que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de las mismas o distintas magnitudes en los procesos recortados de la realidad

2.2.2 El Sistema Educativo en Brasil

El sistema educativo brasileño se estructura en que la educación preescolar (Educação Infantil): se considera parte del programa de educación básica, pero no es obligatoria hasta el último curso (a partir de los 6 años y en la llamada 'clase de alfabetização'). Se ofrece en dos tipos de instituciones: en centros de día o instituciones similares hasta la edad de tres años (educación maternal); y en escuelas de educación preescolar entre las edades de 4 a 6 años.

La Educación Fundamental (Ensino Fundamental): para todos los alumnos de edades comprendidas entre los 7 y los 14 años. Se divide en dos ciclos de ocho cursos cada uno: ciclo inicial de educación fundamental (de 7 a los 11 años) y ciclo final de educación fundamental (de los 12 a los 14 años).

La Educación Secundaria (Ensino Medio) comprende la edad de los 15 a los 17 años. Tiene una duración de tres cursos (de 1º a 3º grado), mientras la educación secundaria técnica tiene una duración de tres o cuatro años (dependiendo de la certificación profesional).

La Educación universitaria (Ensino Superior): se organiza en grados y postgrados

Las metas y objetivos generales del sistema educativo brasileño están representados en las leyes estatutarias específicas. En concreto, la Ley de las Directrices y Bases de la Educación Nacional aprobada en 1961 y modificada posteriormente por otras leyes, sirve como instrumento que regula las metas y objetivos educativos, así como los medios y los poderes de las acciones educativas.

De acuerdo con la Constitución en lo que respecta al sistema educativo brasileño, la legislación que define las metas y objetivos de la educación se aplica a todas las escuelas, siempre y cuando no vaya en contra de la Constitución. Según la Ley de Bases y Directrices aún en vigor, el sistema educativo nacional, concebido en los principios de libertad y en los ideales de la solidaridad humana, tiene como propósito:

La comprensión de los derechos y responsabilidades individuales, así como los de los ciudadanos, el Estado y otros grupos comunitarios. Los individuos deben respetar la dignidad del ser humano y las libertades fundamentales Además de fortalecer la unidad nacional y la solidaridad internacional y por ultimo tener en cuenta el desarrollo integral de la personalidad humana y su participación para conseguir el bien común.

Preparar a las personas y a la sociedad para dominar los recursos científicos y tecnológicos, que les permitan utilizar las posibilidades existentes para facilitar el bienestar común.

La protección, difusión y expansión del patrimonio cultural.

Condenar cualquier trato desigual que resulte de una creencia filosófica, política o religiosa, así como las clases sociales o prejuicios raciales.

Naturalmente, estas metas y objetivos se aplican según el grado de madurez y edad de los alumnos. Como resultado, la legislación actual define objetivos distintos para los diversos grados educativos.

Educación infantil en Brasil es obligatoria para todos los niños en edades comprendidas entre seis y catorce años y gratuita en todas las instituciones públicas, incluso las instituciones de adultos, para aquellos que no tuvieron acceso a la escuela durante la edad apropiada. La Constitución no establece expresamente límites de edad, sino que determina que la educación es obligatoria, cuyo objetivo es proporcionar la estructura necesaria para el desarrollo del potencial de los alumnos como un elemento de satisfacción propia, de formación para el trabajo, y de ejercicio consciente de ciudadanía.

La educación intermedia, también conocida como la educación secundaria superior, también es gratuita en todas las escuelas públicas, aunque no es obligatoria. Este nivel de educación tiene por objeto el pleno desarrollo de los adolescentes, así como los elementos que constituyen el objetivo de la educación fundamental, y la formación para el empleo, en función de la elección / enfoque específico de cada institución educativa.

En cuanto a la educación superior, el sistema vigente tiene por objeto el desarrollo de las ciencias, las artes, la capacitación de profesionales en el ámbito universitario, la investigación y la especialización. La educación superior también es gratuita para los estudiantes en las escuelas y universidades públicas de Brasil.

El sistema educativo en Brasil se divide entre 5 niveles o etapas distintas: la educación pre-primaria o preescolar, educación primaria, educación secundaria, educación secundaria superior y la educación terciaria o superior. De estos cinco niveles, sólo la educación primaria y la educación secundaria son obligatorias.

2.2.2.1 Educación Pre-escolar

La educación preescolar en Brasil, conocido localmente como Educação Infantil, es totalmente opcional. El sistema ofrece a los padres dos opciones: Maternal o guarderías de públicas para niños de 2-5 años de edad, y Jardim, para niños de tres a seis años de edad.

La única diferencia clave entre Maternal y el Jardim es que el primero es básicamente un grupo de juego, donde los niños aprenden a socializar colectivamente en un ambiente muy informal. Jardim, por otro lado, tiene un enfoque más académico para los niños pequeños.

Para determinar la mejor opción para un niño en edad preescolar, las escuelas brasileñas se reúnen con los padres y el niño antes de la inscripción y, en función de las habilidades académicas y sociales del niño, la escuela aconseja a los padres donde creen que el niño tendrá más éxito. Todos los centros preescolares y guarderías estatales son gratuitos para todos los padres, independientemente de su nivel de ingresos.

2.2.2.2 Educación primaria y primer ciclo de secundaria

La escolarización es obligatoria en Brasil para todos los niños en edades comprendidas entre seis y catorce años. Los niños menores de seis años pueden inscribirse en el nivel primario de educación, siempre y cuando cumplan seis años en el primer semestre.

El periodo de escolarización obligatoria, de ocho años, se conoce como Educación Fundamental, o Ensino Fundamental. Se divide en dos etapas distintas de cuatro años:

- Educación Fundamental I (Ensino Fundamental I) Edades de 6 a 10
- Educación Fundamental II (Ensino Fundamental II) Edades de 11 a 14

El plan de estudios básico en las dos etapas de la educación fundamental es fijado por el Consejo Nacional de Educación e implementado a nivel local. Los alumnos en la primera etapa de la Educación Fundamental reciben la enseñanza de un solo maestro, mientras que los del segundo nivel tienen tantos maestros cada día como materias.

Durante la Educación Fundamental I (Ensino Fundamental I) los niños reciben enseñanza de acuerdo con su edad, diseñada para mejorar sus habilidades en matemáticas, portugués (el idioma oficial de Brasil), ciencias, artes, historia, geografía y educación física. Durante Educación Fundamental II (Ensino Fundamental II), los alumnos estudian las mismas materias, aunque a un nivel más avanzado. También tienen que estudiar obligatoriamente por lo menos otra lengua, que normalmente es español, inglés o francés.

La práctica usual en las escuelas brasileñas, tanto públicas como privadas, es agrupar a los alumnos según su edad. Sin embargo, los estudiantes que demuestren una capacidad académica avanzada pueden ser colocados en un nivel más alto donde serán más estimulados académicamente. En el sistema de educación estatal brasileña, todos los estudiantes al final de cada año escolar tienen que pasar un examen completo para determinar si pasan al siguiente curso, o si tendrán que repetir el actual. El repetir curso es común en Brasil, lo que a menudo causa que los alumnos de una misma clase sean de edades muy variadas.

Dependiendo de la filosofía educativa de cada escuela privada, se puede obligar a los niños a repetir curso, aunque la práctica no sea tan común como lo es en las escuelas estatales públicas. Si se ve que un niño no logra mantenerse al día y avanzar en los niveles de aprendizaje como sus compañeros de clase, la escuela suele hablar con los padres acerca de otras opciones en el sistema académico, unas opciones que pueden ser más adecuadas a las necesidades del niño.

Hay algunas escuelas privadas en Brasil, incluyendo las administradas por la Iglesia Católica, que dividen el año académico en niveles de capacidad académica por clases, en línea con el modelo de enseñanza pública británica, por ejemplo. Sin embargo, esta práctica, se está volviendo menos común, pues cada vez más escuelas privadas adoptan modelos pedagógicos más controlables.

2.2.2.3 Educación secundaria superior

La educación secundaria superior en Brasil, conocida localmente como la Escuela Intermedia o Ensino Medio es de cuatro años de duración y está diseñada para alumnos de edades entre 15 y 18 años. La asistencia a este nivel opcional de la educación varía según la región y el nivel socioeconómico, donde las ciudades más

grandes tienen la tasa más alta de asistencia, sobre todo entre los niños de familias acomodadas.

El plan de estudios básico en la escuela intermedia también ha sido diseñado por la Consejería de Educación. Incluye matemáticas, idiomas extranjeros, portugués, historia / gobierno, geografía, ciencia, tecnología, artes, música, educación física, filosofía y sociología.

Las tareas de los estudiantes en la escuela intermedia están esencialmente diseñadas para prepararlos para la admisión a la universidad (generalmente pública). Los cursos se imparten, ya sea en la escuela privada a la que los estudiantes han estado asistiendo, o en centros concretos donde se prepara a los adolescentes para las pruebas de acceso a universidades concretas, unas pruebas establecidas por dicha universidad. Los estudiantes también pueden optar por la formación profesional cursándola al mismo tiempo que sus estudios académicos; una formación que les ayudará a prepararse para un oficio o carrera específica.

2.2.2.4 Educación Especial

La educación especial en Brasil se ofrece desde la preescolar hasta el nivel secundario superior. El Ministerio de Educación, el estado, algunas secretarías municipales, así como organizaciones no gubernamentales (normalmente las iglesias y otras organizaciones sin fines de lucro) son fuentes de apoyo para los programas de educación especial. Dependiendo del tipo de programa, la escuela o institución pueden incluir centros de rehabilitación, clínicas, hospitales y más. Según las últimas estadísticas, el 63 por ciento de la población de educación especial en Brasil sufre algún tipo de retraso mental (retrasos de aprendizaje, etc.), el 15 por ciento sufre problemas de audición, el 9 por ciento son discapacitados físicos, y el 5 por ciento tiene deficiencias visuales¹⁸. Hay muchos programas existentes en Brasil diseñados para ayudar a la población de educación especial, donde existe un interés creciente en ayudar a los estudiantes ciegos o con visión insuficiente a aumentar su rendimiento académico, a una edad temprana, con el fin de que alcancen su máximo potencial.

2.2.2.5 La Educación Superior

La tradición de la educación superior en Brasil se remonta a mediados del siglo XVIII con la fundación de colegios jesuitas y a principios del siglo XIX con la fundación de las primeras escuelas profesionales. Hoy Brasil tiene decenas de universidades de primera categoría, dos de las cuales fueron incluidas en el Ranking Académico Mundial de Universidades de 2010 (Universidad de Sao Paulo y la Universidad de Campinas).

El último censo de Brasil (Ministerio de educación Brasil) enumeró 1.900 instituciones de educación superior, de las cuales 163 eran universidades. Casi la mitad de estas universidades son públicas, aunque el 70 por ciento del mercado total de la educación superior es privado, pues el número de instituciones privadas se ha incrementado en los últimos años con el fin de mantener el ritmo de la demanda de educación superior y de formación profesional. La admisión a las universidades públicas de Brasil es extremadamente competitiva, dado el hecho de que los estudiantes no pagan las cuotas de admisión y debido a la percepción del público de mayor calidad de la enseñanza en estas universidades. Las universidades públicas sobresalen en las ciencias agrarias y humanas, como son la medicina, la formación del profesorado y la psicología, mientras que las instituciones privadas se distinguen por las ciencias sociales aplicadas, como la legislación, la administración y la economía.

El sistema de educación superior en Brasil está compuesto por tres tipos de instituciones: Universidades, Federações de Escolas y Faculdades.

Universidades son instituciones multidisciplinarias que deben incluir la capacitación del personal profesional en la educación superior, la investigación y la creación del conocimiento humano. Aproximadamente el 35 por ciento de los instructores en Universidades deben tener una maestría o un doctorado. Las universidades son más autónomas, con la capacidad independiente para abrir nuevos programas de estudio y establecer el número de alumnos matriculados.

Federações de Escolas también son instituciones multidisciplinarias, pero no tienen el mismo número de disciplinas como las Universidades. Son algo menos autónomas en sus ofertas de cursos y colocación del estudiante, y no están obligadas a invertir en la investigación, como lo están las Universidades.

Facultades, aunque son casi tan autónomas como las Federações de Escolas, estas instituciones por lo general sólo se especializan en una o dos disciplinas, como el derecho o empresariales.

Mientras que los centros privados de educación superior tienen la capacidad de determinar sus propios niveles de dotación de personal y tomar decisiones respecto al mismo, no así en las instituciones públicas donde todas las decisiones de recursos humanos están vinculadas a la función pública y a las normas del sector público respecto a la remuneración y las condiciones de trabajo. El nombramiento de un presidente o rector de la Universidad, sin embargo, es una decisión otorgado a la institución y por lo general se decide con una considerable participación del profesorado.

2.3 IDENTIFICACIÓN DEL SITIO DE LA INVESTIGACIÓN.

Al hacer un recuento histórico del sitio de investigación, se encontró que la Institución Educativa Técnica de Tunía-Cauca-Colombia fue creada el 22 de junio de 1956 en Piendamó Cauca (Colombia) en la zona rural de Tunía (Cauca) llamada en un principio como Escuela Vocacional Agrícola de Tunía, por Decreto 1725, siendo Ministro de Educación el Dr. Aurelio Caicedo Eyerbe. En febrero comenzó a funcionar con 22 estudiantes.

En 1965, se integra la Enseñanza Vocacional al Bachillerato mediante Decreto 045 y Resolución 2006, Título otorgado PRÁCTICO AGROPECUARIO que antes se denominó GRANJERO VOCACIONAL.

En 1974, a través del decreto 080 de enero 22 y Resolución 2926 de mayo 2, se reglamenta el tipo de enseñanza agropecuaria. Sin embargo el 15 de julio mediante Decreto 1480, se cambia de Escuela Agropecuaria a Instituto de Promoción Social, medida que se logra derogar gracias a la organización y acción comunitaria.

En 1978, mediante Resolución número 5357 de mayo 3, se aprueban los estudios de Bachillerato Agrícola y se gradúa la Primera Promoción de Bachilleres Agrícolas.

En 1980, Por Resolución 12546 de agosto 1, se autorizó abrir la Modalidad Comercial denominándose Bachillerato Técnica Comercial Nocturno.

En 2001, por Resolución 233 de marzo 22, se integran las dos Modalidades bajo el nombre de Instituto Técnica de Tunía.

En 2004, mediante Resolución 0443 de abril 24, se cambia la denominación a Institución Educativa Técnica Tunía y se fusionan las Escuelas Santa Teresita, Antonio Nariño y Farallones, nombre que aún conserva.

La Institución Educativa Técnica de Tunía, Cauca, Figura 1, es de carácter oficial ofrece los Niveles de: Preescolar, Educación Básica: Primaria, Secundaria y Media Técnica: Comercial y Agropecuaria. Esta Comunidad Educativa se compromete con el respeto y fortalecimiento de valores éticos, religiosos, espirituales, sociales, culturales, políticos y estéticos; apropiándose adecuadamente de contenidos, ciencia y tecnología que permitan al estudiante desempeñarse con efectividad, calidad y competitividad en la sociedad.

A continuación, en la Figura 1, podemos observar la infraestructura de la institución educativa y sus diferentes salones de clase.

Figura 1 - Institución Educativa Técnica de Tunía en el Departamento del Cauca (Colombia).



Fuente: datos de pesquisa

La visión de la Institución Educativa Técnica de Tunía, Cauca es la formación integral de personas capaces de construir y transformar su entorno. Regida por unos componentes relevantes en todo proceso educativo, como lo son la autonomía, que respeta a la vida y los derechos humanos, el sentido crítico y toma de decisiones, otra componente es la apertura, referenciándose a la proyección de la comunidad, también la autenticidad, regida en la formación de la autoestima, la singularidad,

notada en la formación técnica agropecuaria y comercial, apropiación de tecnologías, fomento de la investigación, la lúdica, la recreación y el deporte, sentido de pertenencia y como última componente la trascendencia que busca la excelencia respecto al medio ambiente, la formación religiosa espiritual y misionera.

El estudiante de la Institución Educativa Técnica de Tunía, Cauca, es y debe ser una persona crítica, analítica y con conocimientos básicos que le permitan apropiarse de las diferentes tecnologías y saberes para la búsqueda de solución a problemas que se le presenten. Con capacidad para aplicar sus conocimientos adecuadamente, con habilidades y destrezas adquiridas y/o fortalecidas en el desempeño de las diferentes actividades.

Además del estudiante, el educador es el orientador en los establecimientos educativos de un proceso de formación, enseñanza y aprendizaje de los educandos, acorde con las expectativas sociales, culturales, éticas y morales de la familia y la sociedad como factor fundamental del proceso educativo.

El educador de la Institución Educativa Técnica de Tunía, Cauca, además debe ser creativo, analítico, investigador del saber para interactuar con el estudiante como guía y orientador, mediador, concertador y amigo. Comprometido con el desarrollo comunitario que le permita liderar acciones desde su quehacer en beneficio social y económico de la región tuniana.

Dichas acciones deben estar encaminadas bajo los principios éticos, morales participativos, democráticos, culturales teniendo presente que como ser social debe educar y formar a través del ejemplo.

2.4 LOS SUJETOS DE INVESTIGACIÓN

El grupo (Figura 2) en que se aplicaron las diferentes tareas, está constituido por 23 estudiantes de décimo grado, (enseñanza media) con una media de edad de 15 años. El autor de este trabajo no había trabajado con este grupo de estudiantes, por lo que se debió proceder a realizar una indagación acerca de si los alumnos habían trabajado el concepto de función exponencial en el grado 9, debido a que según el currículo de noveno grado es donde realiza e introduce el concepto de función exponencial.

Figura 2: grupo decimo



Fuente: datos de pesquisa

Por lo tanto, se procedió a realizar un resumen del objeto matemático: función exponencial, realizando actividades que permitiesen recordar los conceptos aprendidos en el año anterior, debido a que su implementación se realizó al inicio del nuevo curso escolar, como también a través de preguntas que surgieron por parte de los estudiantes hacia el profesor durante esta síntesis.

2.5 TEORIA ANTROPOLOGICA DE LO DIDACTICO

En esta parte del documento se institucionalizaran los conceptos utilizados en la teoría antropológica de lo didáctico usados en esta investigación y el concepto de praxeología que se presenta como un discurso sobre una práctica particular, intencionada y significativa, construido después de una seria reflexión como un procedimiento de objetivación científica de la práctica o de la acción, como una teoría de ésta. Por el tipo de análisis que se realiza, pretende que dicha práctica sea más consciente de su lenguaje, de su funcionamiento y de lo que en ella está en juego, sobre todo del proceso social en el cual el practicante está implicado y del proyecto de intervención que construye para modificar dicho proceso. Todo esto con el fin de acrecentar su pertinencia y su eficacia liberadora.

En la Teoría Antropológica de lo didáctico (TAD) se parte del principio de que: el **saber matemático** aparece así organizado en dos niveles:

El primer nivel es el que remite a la práctica que se realiza, la praxis o saber-hacer, es decir, los tipos de problemas o **tareas** que se estudian y las **técnicas** que se construyen y utilizan para abordarlos.

[...]

El segundo nivel recoge la parte descriptiva, organizadora y justificadora de la actividad, que llamaremos logos o, simplemente saber. Incluye las descripciones y explicaciones que se elaboran para hacer inteligibles las técnicas, esto es, el discurso **tecnológico** (la razón, logoi, de la técnica y, en última instancia, el fundamento de la producción de nuevas técnicas) y la **teoría** que da sentido a los problemas planteados, permite interpretar las técnicas y fundamentar las descripciones o demostraciones tecnológicas.. (CHEVALLARD, 1999, p 221)

De ahí proviene la noción de praxeología, que resulta de la unión de los dos términos praxis y logoi. Tipos de tareas, técnicas, tecnología y teoría son pues las cuatro categorías de elementos que componen una organización o praxeología matemática. Es de vital importancia tener en cuenta que la praxeología es referida a cualquier estructura posible de actividad y conocimiento. En esta teoría se parte del postulado que toda actividad humana se puede describir como la activación de praxeologías, asumiendo así que, en la perspectiva antropológica adoptada, toda práctica o “saber-hacer” aparece siempre acompañada de un discurso o “saber” (un logoi), es decir una descripción, explicación o racionalidad mínima sobre lo que se hace, el cómo se hace y el porqué de lo que se hace.

Es decir, que el concepto de saber matemático para Yves chevallard es contruido a partir de situaciones o problemas presentes en el ambiente educativo y social del estudiante emergiendo como el resultado de un proceso de estudio que pretende que el estudiante construya su propia idea de matemáticas y la utilice en su contexto. En esta teoría se considera que todo lo:

Relativo al **estudio**, tomando la palabra “estudio” en un sentido muy amplio que engloba las nociones de enseñanza y aprendizaje comúnmente utilizadas en la cultura pedagógica y que se refiere a todo aquello que se hace en una determinada institución para aportar respuestas a las cuestiones o para llevar a cabo las tareas problemáticas que se plantean. (CHEVALLARD, 1999, p 221)

Esta es una noción integradora que permite analizar bajo un mismo prisma el trabajo que realiza el matemático investigador, Cuando el profesor enseña matemática o del alumno que las aprende en la escuela: el investigador plantea y estudia problemas con el objetivo de construir matemáticas nuevas que aporten una solución a dichos problemas: el profesor y sus alumnos estudian matemáticas

conocidas que permitan aportar respuestas a cuestiones problemáticas consideradas importantes en determinadas instituciones de la sociedad.

Puede sonar romántico, pero una praxeología se trata, como lo podemos deducir del conjunto de obras de Paulo Freire, de ligar la razón, es decir, la búsqueda del sentido, el saber teórico y la dimensión epistemológica, con las manos, la exploración de la funcionalidad y la eficacia, el saber hacer competente y la práctica o experiencia además del corazón, la búsqueda de lo humano en la humanidad, el saber ser y la afectividad.

Chevallard¹ (1999) propone la noción de **organización praxeológica matemática** o praxeología matemática (o simplemente organización matemática) como modelo básico para describir el conocimiento matemático. La noción de praxeología matemática corresponde a la concepción del **trabajo matemático**:

Como estudio de tipos de problemas o tareas problemáticas. Pero éste no es el único aspecto del trabajo matemático. En efecto, el matemático no aspira únicamente a plantearse buenos problemas y resolverlos, sino que pretende, además, caracterizar, delimitar e incluso clasificar los problemas en “tipos de problemas”, entender, describir y caracterizar las técnicas que utiliza para resolverlos hasta el punto de controlar y normalizar su uso, se propone establecer las condiciones bajo las cuales éstas funcionan o dejan de ser aplicables y, en última instancia aspira a construir argumentos sólidos y eficaces que sostengan la validez de sus maneras de proceder. (CHEVALLARD, 1999, p. 222)

La praxeología se entiende entonces como un ejercicio de construcción del discurso sobre la práctica, y más que sobre la mera práctica, sobre el actuar consciente. Eso es precisamente la principal intención de la praxeología: hacer que el actuar, mediante la autorreflexión sea más asertivo a la hora de intervenir las realidades en las que desea brindar su aporte.

Es necesario educar conscientemente para una vida conciente y partir siempre de la vida misma. Y ello nunca se lograra sino generamos en la educación procesos reflexivos, críticos, significativos y pertinentes. La praxeología busca contribuir a ello.

Por tanto, que para construir una identidad reflexiva, el profesional debe seguir un enfoque praxeológico, basado en una reflexión crítica de lo que hace y buscando la optimización de sus practicas socio-profesionales.

¹ CHEVALLARD Yves (Francia, 1946) es un escritor, licenciado en matemáticas, investigador de la transposición didáctica en el campo de la Didáctica y profesor en la Universidad IUFM d’Aix-Marseille, en Marsella, Francia.

La praxeología es, al fin y al cabo, un modelo que rompe con la estructura teoría-praxis para pasar a uno praxis-teoría. Sin embargo, aquí se debe hacer un matiz para evitar un grave error al tratar de comprender la praxeología. La clave de lectura praxis-teoría no es un acercamiento a la realidad así sin más. Si bien el primer momento del proceso es el desarrollo de una práctica que poco a poco se hace consciente, esto no implica la ausencia de herramientas o conocimientos previos. Podría refutarse que la necesidad de recurrir a elementos teóricos o metodológicos previos a la teoría ya desvirtúa la pretensión de la praxeología. Sin embargo, aquí es preciso hacer otro matiz y es que, si bien es necesario un conjunto de elementos previos a la teoría, la plataforma teórica final es resultado de esa reflexión seria sobre la práctica desarrollada en un primer momento. Los elementos previos no son más que “pines de arranque” o “pinzas” para poder aprehender la realidad. Valerse de estos elementos no implica que la construcción teórica dependa de ellos en su totalidad o simplemente sea una extensión de los mismos.

Además, es pertinente recordar las aclaraciones sobre lo que significa la práctica: Entendemos por “práctica” una actividad intencionada, que se sustenta en un conocimiento previo y que se propone lograr objetivos de transformación. Son acciones desarrolladas por sujetos que, a partir de determinada lectura de la realidad, identifican algunos problemas sobre los cuales están en condiciones de actuar con los recursos que cuentan. En este sentido comprendemos que la práctica es una acción que se orienta por una clara intención, pero pretende ser el insumo para generar espacios de reflexión que permitan elaborar un sustento teórico que soporte la producción de soluciones a las necesidades identificadas en las prácticas

Las praxeologías matemáticas no surgen de forma instantánea, ni aparecen acabadas de una vez por todas. Son, al contrario, el resultado de un trabajo complejo y continuado que se realiza durante largo tiempo (incluso siglos) en el caso de las matemáticas nuevas, pero también en el caso de los alumnos aprendiendo matemática. Podemos mencionar a los números negativos, cuyo desarrollo ocupó varios siglos, desde su utilización como recursos para resolver problemas, en la Edad Media, hasta el total reconocimiento de su estatus como números alrededor del Siglo XIX. Y el tiempo que necesitan los alumnos para construir un conocimiento tan complejo como el de volumen.

Después de mencionar el andar de la praxeología y el sistema de prácticas involucradas en la teoría antropológica de lo didáctico, podemos apreciar que además:

El primer concepto fundamental es el de objeto, es objeto toda entidad, tangible o intangible, que existe al menos para un individuo. Todo es pues objeto incluidas las personas. Son así, objetos el número siete y también la cifra 7, el concepto de padre y también de este joven padre que pasea a su niño o también la idea de perseverancia. En particular, toda obra, es decir, todo producto intencional de la actividad humana, es un objeto.

[...]

El segundo concepto fundamental es el de relación personal de un individuo x a un objeto o , expresión por la cual se designa el sistema, denotado por $R(x,o)$ de todas las interacciones que x puede tener con el objeto o que x lo manipula, lo utiliza, habla, sueña, etc.

[...]

El tercer concepto fundamental, es el de persona, el cual es el par formado por un individuo x y el sistema de sus relaciones personales $R(x,o)$ en un momento dado de la historia de x . La palabra persona, tal como se la emplea aquí, no es una ilusión: todo individuo es una persona, incluido el más pequeño niño, el infante (etimológicamente, el que no habla aún). (CHEVALLARD, 1999, p. 222)

Para explicar la formación y la evolución del universo cognitivo de una persona x , conviene introducir un cuarto concepto fundamental, el de institución.

Una institución I es un dispositivo social total, que sin duda puede tener una extensión muy pequeña en el espacio social (existen "micro-instituciones"), pero que permite e impone a sus objetos, es decir, a las personas x que hay las distintas posiciones p ofrecidas en I , la ejecución de maneras propias de hacer y de pensar. Así la clase es una institución (cuya dos posiciones esenciales son las de profesor y alumno), así como los establecimientos (donde otras posiciones aparecen: las de enfermera consejera de salud, etc.), al igual que la institución que engloba clases y establecimientos y donde abundan posiciones de todas las clases, el sistema educativo. (CHEVALLARD, 1999, p. 222)

En consecuencia, la praxeología está determinada por el contexto donde se ubica la práctica educativa: lo histórico define su marco de referencia que no puede ser rígido ni universal, sino que tiene que ser construido por las personas, en su calidad de sujetos cognoscentes, capaces de transformar su propia realidad. En consecuencia, la praxeología es el resultado, de un análisis empírico y de un discurso crítico: ella designa, desde el principio, una reflexión práctica sobre los principios de la acción humana y de sus técnicas, pero busca, igualmente, los

principios generales y la metodología adecuada para una acción competente y acertada. Teoría y proceso investigativo sobre la acción práctica son, pues, los dos sentidos más usados alrededor del concepto praxeología. En todo caso, la praxeología supone siempre un proceso de reflexividad.

Hay que tener en cuenta que la praxeología no es exactamente el análisis de las prácticas, sino el análisis de la *praxis*. La razón práctica no tiene los mismos objetivos que la razón praxeológica: la primera se enfoca en la eficacia de las acciones, en el logro de lo planeado, en la producción de objetos o de artefactos; mientras la segunda indaga y construye los *saberes de la práctica* mejor adaptados para gestionar una acción y, en últimas, intenta construir una teoría general de la *praxis*. La lógica de la acción (*praxis*) se articula con la del conocimiento (*logos*), y la clásica oposición entre teórico y práctico se transforma en una complementariedad dialéctica entre saberes y saberes de la acción, que favorece un movimiento en espiral entre lo vivido, la práctica y el pensamiento, lo que termina haciendo de esa práctica una *praxis*.

Las praxeologías mencionadas por Yves Chevallard dan cuenta de su composición, dividida en dos partes: una el saber-hacer y la segunda el logos o saber sabio. Referenciando el saber-hacer como los tipos de tareas y las técnicas involucradas y el logos como las teorías y tecnologías. A continuación se dará un breve resumen del significado de cada uno de estos términos según la teoría antropológica de lo didáctico (TAD).

Alrededor de un tipo de tareas, T , se encuentra así, en principio, una tripleta formada por una *técnica* (al menos), τ , por una tecnología de τ , θ , y por una teoría de θ , Θ . El total, indicado por $[T/\tau/\theta/\Theta]$, constituye una praxeología *puntual*, donde este último calificativo significa que se trata de una praxeología relativa a un único tipo de tareas, T . Una tal praxeología u *organización praxeológica* está pues constituida por un bloque *práctico-técnico*, $[T/\tau]$, y por un bloque *tecnológico-teórico*, $[\theta/\Theta]$.

El bloque $[\theta/\Theta]$ se identifica habitualmente como *un saber*, mientras que el bloque $[T/\tau]$ constituye un *saber-hacer*. Por metonimia se designa corrientemente como “saber” la praxeología $[T/\tau/\theta/\Theta]$, *completa*, o incluso cualquier parte de ella. Pero esta manera de hablar estimula una *minoración del saber-hacer*, sobre todo en la producción y difusión de las praxeologías, así, como ya hemos señalado,

encontramos a menudo tecnologías que esperan su primer empleo, o que han perdido su empleo.

A continuación, expondremos los niveles del saber-hacer, tanto los tipos de tareas como también las técnicas utilizadas en una cierta actividad.

TIPOS DE TAREAS T

Teniendo en cuenta las nociones principales de la praxeología, se empezará por un tópico muy importante que involucra la noción principal de esta.

Se encuentran las nociones solidarias de tarea t , y de tipo de tareas, T . Cuando una tarea t forma parte de un tipo de tareas T , se escribirá $t \in T$. En la mayoría de casos, una tarea (y el tipo de tareas asociado) se expresa por un verbo: limpiar la habitación, desarrollar la expresión literal dada, dividir un entero entre otro, saludar a un vecino, leer un manual de empleo, subir una escalera, integrarla función, etc. (CHEVALLARD, 1999, p 223)

Se trata de una puesta en práctica particularmente simple del “principio antropológico” evocado anteriormente. A continuación, la noción de tarea o, mejor, de tipo de tareas, supone un objeto relativamente preciso. Subir una escalera es un tipo de tarea, pero subir, simplemente, no lo es. De la misma manera, calcular el valor de una función en un punto es un tipo de tareas, pero calcular, simplemente, es lo que se llamará un género de tareas, que pide un determinativo.

Las tareas presentadas para este trabajo representarán el pilar fundamental que proporcionará las praxeologías matemáticas u organizaciones matemáticas como es el caso de la tarea llamada “interpretar una situación problema” que pide un determinativo, y no solo el verbo interpretar que según Chevallard (1999) pertenece al género de tareas.

TÉCNICAS τ

A pesar de lo indicado previamente, no se considerará en primer lugar, en esta primera parte, más que la estática de las praxeologías, ignorando pues, provisionalmente, la cuestión de su dinámica, y en particular de su génesis. Sea pues T un tipo de tareas dado. Una praxeología relativa a T requiere (en principio) una manera de realizar las tareas: a una determinada manera de hacer, se le da

aquí el nombre de técnica τ (del griego tekhnê, saber hacer). Una praxeología relativa al tipo de tareas contiene pues, en principio, una técnica relativa a T. Contiene así un “bloque” designado por $[T/\tau]$, que se denomina bloque práctico-Técnica y que se identificará genéricamente con lo que comúnmente se denomina un saber-hacer: un determinado tipo de tareas, T y una determinada manera, de realizar las tareas de este tipo. Una vez más deben hacerse aquí algunas precisiones: En primer lugar, una técnica τ

Una “manera de hacer” “no tiene éxito más que sobre una parte $P(\tau)$ de las tareas del tipo T a la cual es relativa, parte que se denomina alcance de la técnica: la técnica tiende a fracasar sobre $T \setminus P(\tau)$ de manera que se puede decir que “no se sabe, en general, realizar las tareas del tipo T”. En esta visión, una técnica puede ser superior a otra, si no sobre toda T, al menos sobre alguna parte de ella. (CHEVALLARD, 1999, p. 223)

Una técnica no es necesariamente de naturaleza algorítmica o casi algorítmica: no es así más que en casos poco frecuentes. Axiomatizar tal ámbito de las matemáticas, pintar un paisaje, fundar una familia son tipos de tareas para las cuales no existe forzosamente una técnica algorítmica. Pero es verdad que parece existir una tendencia bastante general a la algoritmización aun cuando este proceso de progreso técnico parezca a veces detenerse por largo tiempo, en una determinada institución, a propósito de tal o cual tipo de tareas o de tal o cual complejo de tipo de tareas.

En una institución I dada, y a propósito de un tipo de tareas T dado, existe en general una sola técnica, o al menos un pequeño número de técnicas institucionalmente reconocidas, con la exclusión de técnicas alternativas posibles que pueden existir efectivamente pero en otras instituciones. Dicha exclusión es correlativa, entre los actores de I, de una ilusión de naturalidad de las técnicas institucionales en I, por contraste con el conjunto de técnicas alternativas posibles, que los sujetos de I ignoran, si se les confronta a ellas, las miran espontáneamente como artificiales, y por ello “contestables”, “inaceptables”, etc. En esta visión, se observa frecuentemente, entre los sujetos de I, verdaderas pasiones institucionales para las técnicas naturalizadas en la institución.

En este trabajo se identifican diferentes tipos de técnicas que dan solución a las diferentes tareas aquí presentadas, y no son únicas, sin olvidar que pueden existir otras técnicas que proporcionen una solución a este tipo de actividades, cabe

resaltar que estas técnicas son las que se han identificado en los registros recolectados en la investigación de campo y que son mostradas en esta disertación.

TECNOLOGÍAS θ

Se entiende por tecnología θ , y se indica generalmente por, un discurso racional (el logos) sobre la técnica (la tekhnê), discurso cuyo primer objetivo es justificar “racionalmente” la técnica, para asegurarse de que permite realizar las tareas del tipo T, es decir, realizar lo que se pretende. El estilo de racionalidad puesto en juego varía por supuesto en el espacio institucional y, en una institución dada, al filo de la historia de esta institución, de manera que una racionalidad institucionalmente dada podrá aparecer; como poco racional en otra institución. De nuevo algunas observaciones completarán esta presentación.

Se admitirá en primer lugar como un hecho de observación que, en una institución I.

Cualquiera que sea el tipo de tareas T, la técnica relativa a T está siempre acompañada de al menos un embrión o más frecuentemente aún, de un vestigio de tecnología. En numerosos casos, incluso, algunos elementos tecnológicos están integrados en la técnica.

[...]

Cabe señalar después que una segunda función de la tecnología es la de explicar, de hacer inteligible, de aclarar la técnica. Si la primera función -justificar la técnica- consiste en asegurar que la técnica da lo pretendido, esta segunda función consiste en exponer por qué es correcta. Se observará que estas dos funciones son desigualmente asumidas por una tecnología dada. Desde este punto de vista, en matemáticas, la función de justificación predomina racionalmente por medio de la exigencia demostrativa, sobre la función de explicación.

[...]

Una tercera función corresponde a un empleo más actual del término de tecnología: la función de producción de técnicas. Notemos aquí que siempre hay tecnologías potenciales, a la espera de técnicas, que no son aún tecnologías de alguna técnica o que lo son de muy pocas técnicas. A este respecto se señalará este fenómeno de sub-explotación de las tecnologías disponibles, tanto desde el punto de vista de la explicación como de la producción (CHEVALLARD, 1999, p 223)

En este trabajo las tecnologías tienen un carácter justificativo, que argumenta la técnica realizada por el estudiante en la elaboración de las distintas tareas presentadas en este trabajo.

TEORÍAS Θ

A su vez, el discurso tecnológico contiene afirmaciones, más o menos explícitas, de las que se puede pedir razón. Se pasa entonces a un nivel superior de justificación-explicación producción, el de la teoría, Θ , que retoma, en relación a la tecnología, el papel que ésta última tiene respecto a la técnica.

Por supuesto, se puede imaginar que esta regresión justificativa se persiga hasta el infinito que exista una teoría de la teoría, etc. De hecho, la descripción en tres niveles presentada (técnica/tecnología/teoría) es suficiente en general para darse cuenta de la actividad que se quiere analizar. La teoría, tierra de elección de perogrulladas, tautologías y otras evidencias, es incluso a menudo evanescente: la justificación de una tecnología dada es, en muchas las instituciones, tratada por simple reenvío a otra institución, real o supuesta, censada como poseedora de una tal justificación. Éste es el sentido clásico: “Se demuestra en matemáticas...” del profesor de física, o aún del “Se ha visto en geometría...” del profesor de matemáticas de antaño. (CHEVALLARD, 1999, p. 223)

En este trabajo se construirán las diferentes teorías obtenidas en la identificación y ejecución de las diferentes actividades o tareas propuestas, aquí resaltamos que la teoría es el nivel superior de la justificación-explicación-producción y no siempre está presente en una actividad.

A partir de lo mencionado anteriormente podemos señalar que la praxeología no se preocupa en principio de las técnicas de la acción educativa; no las desecha, pero estudia, sobre todo, la práctica y su sujeto en un enfoque que es, adrede, hermenéutico y apela a los referentes sociológicos y de la acción educativa.

Además, algo de vital importancia en la praxeología es la noción de practicante. Este método supone un practicante reflexivo, que está obligado, desde la creación de un modelo específico, a construir con paciencia y a reconstruir con regularidad una visión particular de lo real.

Para sintetizar: ¿Qué es entonces la praxeología? Es el producto, de un análisis empírico y de un discurso crítico: designa, desde el principio, una reflexión práctica sobre los principios de la acción humana y de sus técnicas, pero busca, de igual manera, los principios generales y la metodología adecuada para una acción eficaz.

Se trata de ese movimiento de “accion-reflexion-accion” en espiral que va apareciendo con las propias actuaciones practicas. Lo primero es sentir o coexistir con el problema, es asombrarse, poner energia y pasión a lo que se nos plantea.

Algo muy distinto de un distanciamiento frio, que ademas de imposible, solo nos lleva a prejuicios peores por no ser conscientes y, por ende, no controlados. La praxeología comienza con cierta dosis de vivencias e implicaciones, y sigue luego con las reflexiones auto-criticas y criticas que juegan entre ellas. Entonces, se originan perplejidades y distanciamientos cruzados. Aparecen circunstancias no esperadas, dada la ambivalencia y contradicción de la vida, entonces, se trata de descubrir lo potencial que subyace oculto por las estructuras, que generalmente impiden vislumbrar lo más profundo y humano del hombre: lo insólito, lo carnavalesco, lo mágico del saber-hacer popular.

Las personas, los objetos y las ideas cambian cuando se transforman las condiciones de vida. Posiblemente no podamos cambiar todas las circunstancias de una vez, pero podemos, al menos, incorporarnos a unas prácticas y a unas redes sociales de transformación. Ni lo local, ni lo global van a cambiar por una mera disputa ideológica, por buenas que sean las ideas que juegan en ella. Es necesario el compromiso con las redes que ya estan en marcha, es decir, que ya se estan moviendo, o que podrian gestarse, por su potencialidad para transformar y mejorar nuestra calidad de vida.

2.6 LITERATURA SOBRE EL TEMA

En esta parte del trabajo se darán a conocer las lecturas más relevantes que contribuyen a la realización de esta pesquisa teniendo en cuenta el marco teórico y técnico que permitirán un adecuamiento de los términos investigativos.

Para realizar la búsqueda de la literatura acerca del tema a investigar, y en confrontación con la metodología de pesquisa, además de la teoría antropológica mencionada aquí, indagamos en el banco de datos de disertaciones de la CAPES en búsqueda de trabajos y artículos relacionados a la forma y estructura de las praxeologías matemáticas en conjunción con el concepto matemático de función exponencial, buscando palabras claves que involucren este conocimiento, encontrando cuatro trabajos que hacen referencia a lo pretendido en este trabajo.

El primer trabajo tiene como título “Estudio sobre la enseñanza de ecuaciones de primer grado, en Francia y en el Brasil a la luz de la teoría antropológica de lo didáctico”, con autoría de Abraão Juvencio de Araujo y Marcelo Câmara dos Santos, presentando en el año 2011, y enseñado en la XIII conferencia interamericana de educación matemática, CIAEM, cuya investigación estuvo orientada a caracterizar y comparar las trasposiciones didácticas realizadas en Francia y en el Brasil sobre la enseñanza de ecuaciones de primer grado a la luz de la teoría antropológica de lo didáctico, teniendo en cuenta las siguientes palabras claves: álgebra, ecuaciones de primer grado, trasposición didáctica, teoría antropológica de lo didáctico. Este trabajo estuvo orientado a resolver las preguntas de pesquisa que delimitaron el tema a ser investigado y el cual estuvo dirigido a ¿cómo caracterizar la enseñanza del álgebra, con el fin de comprender la enseñanza de la resolución algébrica de ecuaciones de 1º grado con una incógnita en Francia y en el Brasil? Como primera pregunta, además de ¿cómo caracterizar la transposición didáctica que se realiza sobre la enseñanza de la resolución algébrica de ecuaciones de primer grado en Francia y en el Brasil? Como segunda pregunta y por último es de interés para los autores abordar ¿en cuáles instituciones traspositivas de enseñanza es posible reconstruir las organizaciones matemáticas existentes, en Francia y en el Brasil, en torno de la enseñanza en la resolución de ecuaciones de primer grado?. Para este trabajo de investigación de tipo cualitativo es de interés caracterizar la enseñanza del álgebra sobre la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita, en Francia y el Brasil, a la luz de la teoría antropológica de lo didáctico cuya hipótesis estuvo encaminada a reconstruir las organizaciones matemáticas existentes en esos dos países, en torno a la enseñanza en la resolución algebraica de ecuaciones de primer grado, por medio del análisis de programas curriculares oficiales y parámetros nacionales, como también del análisis de libros didácticos que son instituciones de trasposición didáctica (externas) de saberes a enseñar, bien como del análisis de estudios experimentales conducidos junto a los alumnos franceses y brasileños, es de interés mostrar los principales resultados de pesquisa que muestran que, en Francia, los temas matemáticos desarrollados en los libros didácticos obedecen fielmente a la organización propuesta en el programa de enseñanza francés, es decir, son organizados en torno a los siguientes dominios: Números y cálculos; organización y gestión de datos, funciones; Geometría; longitudes e medidas. En el Brasil, aunque los temas matemáticos contemplen contenidos relacionados a los

cuatro grandes temas propuestos en los PCN, (números e operaciones; espacio y forma; longitudes e medidas; y tratamiento de la información), la secuencia en que éstos aparecen en los libros didácticos no es la misma propuesta en los PCN. En los libros franceses, los temas algébricos son esencialmente desarrollados en capítulos relativos a los dominios de números, operaciones y de la organización y gestión de datos

Las funciones en el Brasil, son tratadas en capítulos propios a los temas conectados a los números y operaciones. En los dos países, el estudio de las ecuaciones aparece implícitamente en los libros didácticos como una herramienta para resolver problemas.

Es importante resaltar para este trabajo de disertación lo citado por Yves Chevallard (1999) en la investigación de Abraão Juvencio de Araujo y Marcelo Câmara dos Santos que “la comprensión del aprendizaje del alumno está relacionada a la comprensión de los aprendizajes institucionales”, ya que para Chevallard (1999) el saber matemático es algo que es transpuesto entre instituciones, y la TAD fortalece un método de análisis que permite no solamente describirlo, sino también estudiar las condiciones de su existencia en determinadas instituciones, es decir, permite analizar las limitaciones o potencialidades que se crean entre los objetos de saber a enseñar en las diferentes instituciones.

Por tanto la creación de tareas acordes proporcionará una mejor calidad de enseñanza de un objeto matemático arbitrario que garantizará una apropiación de los diferentes conceptos y que en definitiva reconstruirá praxeologías lo cual certifica una mejor herramienta para la acción del profesor en el aula. El trabajo presentado anteriormente potencializa la realización de este trabajo en torno a la identificación de los distintos componentes de la organización praxeológica, además de esquematizar la construcción social y de conocimiento del individuo

El segundo trabajo presentado en el III seminario internacional de educación matemática, SIEMAT III realizado en la Universidad Banderante de Sao Paulo, UNIBAN, cuyo título es “un análisis de la función seno por la perspectiva de la organización praxeologica” y ejecutada en el 2011, de autoria de Ana Lucia Nogueira Junqueira, Tula Rocha, Wellerson Quintaneiro y Maria Lucia Tavares Campos, cuyas palabras claves son: función seno, teoría antropologica de lo didáctico, praxeología matemática, libro didáctico, tareas, técnicas, tecnologías y teorías, y cuya intención es presentar un análisis basado en la teoría antropológica de lo didáctico del

concepto de función seno enfocada a los libros didácticos de matemáticas con el objetivo de establecer una comparación entre los tipos de tareas y técnicas adoptadas, teniendo en consideración las directrices curriculares, la opción para este análisis se basa en el hecho de ser el libro didáctico un recurso disponible y frecuentemente adoptado por los profesores en ejercicio de la docencia. Esta investigación de tipo cualitativo obtuvo como principales resultados para los autores la identificación de más de 40 tareas propuestas en las cuales hay un predominio de actividades relativas a la construcción, identificación, imagen, periodo y valor de la función en el punto y algunos ejercicios de aplicación.

Es de interés para este trabajo la identificación y elaboración praxeológica de las diferentes tareas y técnicas, la cual se tendrán en cuenta a la hora de realizar las praxeologías de función exponencial, sus principales características y en la forma de presentación de las tareas y técnicas que según la teoría antropológica de lo didáctico pide para una construcción detallada en la forma del verbo y el determinativo que determina una tarea, además de la construcción e identificación de técnicas y tecnologías que tiene un carácter justificativo de la técnica.

El tercer trabajo tiene como título “Organizaciones praxeológicas sobre función exponencial un enfoque del libro didáctico” presentada en el VII CIBEM realizada en Montevideo Uruguay, cuyos autores son Rita Lôbo Freitas y Saddo Ag Almouloud, mostrada en el año 2013 y cuya investigación está encaminada a relatar los resultados de un estudio realizado en los libros didácticos acerca del objeto matemático función exponencial, tales resultados se caracterizaron con un análisis praxeológico con énfasis en un enfoque didáctico y en los tipos de tareas y técnicas a ellas asociadas, como también los bloques teórico-tecnológicos que justifican las técnicas, en la que se muestra las principales palabras claves, teoría antropológica de lo didáctico, libro didáctico, praxeología, función exponencial, enseñanza media, objetos ostensivos, objetos no ostensivos, programa nacional del libro didáctico, formación de profesores. Este trabajo de tipo cualitativo se tiene como principal pregunta de investigación y que orienta la pesquisa, la cual está determinada a investigar el conjunto de praxeologías utilizadas en la formación inicial de profesores en un curso de licenciatura en matemática que posee como objetivo principal el presentar los resultados de los análisis realizados en los libros didácticos brasileños utilizados en el programa nacional del libro didáctico tomando como base el objeto matemático función exponencial y cuyo resultado de investigación fue dictado en pro

de utilizar las tareas significativas de los libros didácticos para utilizarlas en una secuencia didáctica, el autor concluye que aún hay una fragmentación en el tratamiento de conceptos relativos a la función exponencial sobre el punto de vista de aquellas tareas como fundamentales para el desarrollo del concepto de este tipo de función.

Enfocado hacia la orientación del libro didáctico en el proceso de enseñanza y del proceso de aprendizaje, referente al objeto matemático función exponencial, este artículo contribuye a este trabajo el entramado praxeológico tomando en cuenta las tareas fundamentales de tipo interpretativo y de resolución de problemas, usadas para este estudio, cabe resaltar la división marcante de los bloques que componen la praxeología y la identificación de las diferentes tareas, técnicas, tecnologías y teorías.

Para el trabajo número 4 es presentada una disertación de Maestría realizada en la Universidad Federal de Juiz de Fora, nombrada como “La influencia del cotidiano en las preguntas de función del examen nacional de enseñanza media”, cuyo autor es Paulo Tadeu Gandra Campos, elaborada en el año 2014, y que está orientada a la investigación sobre la posible contribución del cotidiano en preguntas de función del examen nacional de enseñanza media, las palabras clave en este trabajo fueron identificadas como enseñanza media, examen nacional de enseñanza media, teoría antropológica de lo didáctico, ingeniería didáctica, función matemática. En este trabajo de disertación se sigue una pregunta que orienta la investigación en la cual se habla acerca de cómo las preguntas de pesquisa contextualizadas en situaciones del cotidiano y/o de otras áreas del conocimiento pueden ser más eficaces, alcanzando positivamente un grupo mayor de alumnos con relación al aprendizaje de esta disciplina, cuyos objetivos están en verificar si los sujetos presentan diferentes performances en la resolución de dos tipos de preguntas; de contexto cotidiano y de contexto matemático y en establecer un paralelo entre las resoluciones de preguntas de aspecto matemático y aquellas de contexto, sea del cotidiano o interdisciplinar, para ser contempladas en un análisis subsidiado por la teoría antropológica de lo didáctico y verificar si hay sensibilidad numérica en preguntas de contexto cotidiano. Este tipo de pesquisa de tipo cualitativo y en la que se sigue una metodología de pesquisa usando la ingeniería didáctica, tiene como hipótesis verificar si las preguntas de matemáticas contextualizadas con situaciones del cotidiano pueden ser más eficaces alcanzando un grupo mayor de

estudiantes con relación al aprendizaje de esa disciplina, además de evaluar si desarrollaron alguna sensibilidad numérica

Es de interés rescatar en este trabajo de disertación acerca de la influencia del cotidiano en las preguntas de función del examen nacional de enseñanza media, el carácter praxeológico y organizativo de las diferentes tareas, técnicas y tecnologías presentadas en el contexto del cotidiano, esto con el fin de determinar las praxeologías puntuales que germinaron o se desplegaron a través de los datos recolectados en la investigación de campo que surtieron una variedad de informaciones relevantes mostradas en la elaboración de este documento.

2.7 EL SABER MATEMÁTICO A SER ENSEÑADO: FUNCIÓN EXPONENCIAL

A continuación se dará a conocer algunos aspectos relevantes acerca del saber matemático utilizado en este documento, tomando en cuenta su historia y su cotidianidad en la que ha influenciado esta importante función en nuestras vidas.

2.7.1 - El número e

En muchas ocasiones nos preguntamos acerca de este número y la importancia que tiene en las ciencias y que recalca su rareza en las matemáticas.

Como todos los números son distintos, cada uno tiene sus propiedades especiales: el cero no puede dividir, el uno es el elemento neutro de la multiplicación, el dos es el único número primo que es par, 1,99898989098098098098980909809 es distinto del resto de los números y así hasta aburrirnos.

Las matemáticas son una disciplina que está a nuestro servicio. Son un cúmulo de sabiduría destilada y abstracta que ha surgido del día a día. Los antiguos agricultores desarrollaron la Geometría y el Cálculo por la necesidad elemental de dividir la tierra equitativamente. Los arquitectos inventaron métodos para construir casas y edificaciones que fueran sólidas y duraderas. Los navegantes, necesitaban averiguar su posición a partir de ciertos datos y además necesitaban saber cómo elaborar mapas.

El número e , es la base de los logaritmos naturales y es sin duda el número más importante del campo del cálculo. Su valor aproximado es 2.718281828459045. El número e es un número irracional trascendente y una de esas cosas que aparecen una y otra vez. Es especial ya que aparece en problemas que necesitan de un cierto desarrollo y madurez matemática, aparece en problemas que uno no entiende bien y carece de perspectiva para ver esos problemas. Cabe aquí resaltar que un número trascendente es un número real que no es raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros no todos nulos, es decir, no es solución de ninguna ecuación algebraica con coeficientes racionales

El número e aparece de manera natural en las operaciones tipo logaritmo y en la exponenciación. Los logaritmos eran muy usados antiguamente, cuando la gente no disponía de calculadoras de bolsillo. Entonces se usaban muchos los logaritmos, que tienen la propiedad especial de convertir multiplicaciones en sumas: esto era importante porque la multiplicación es mucho más tediosa de hacer que la suma cuando se trabaja con papel y lápiz; ahora con las computadoras y calculadoras de bolsillo da igual.

Análogamente, e es importante porque es un ingrediente importante de un elemento que es neutro para una operación importante: la derivada, puesto que el paso crucial, se dio con la invención del cálculo, cuando resultó que la inversa de la función logarítmica, denotada después por e^x , era igual a su propia derivada. Esto le dio a la vez al número e y a la función e^x un papel protagónico en el análisis.

2.7.2 Definición de función exponencial

A continuación se dará a conocer aspectos teóricos de la función exponencial que construyan el concepto en pro de esta investigación.

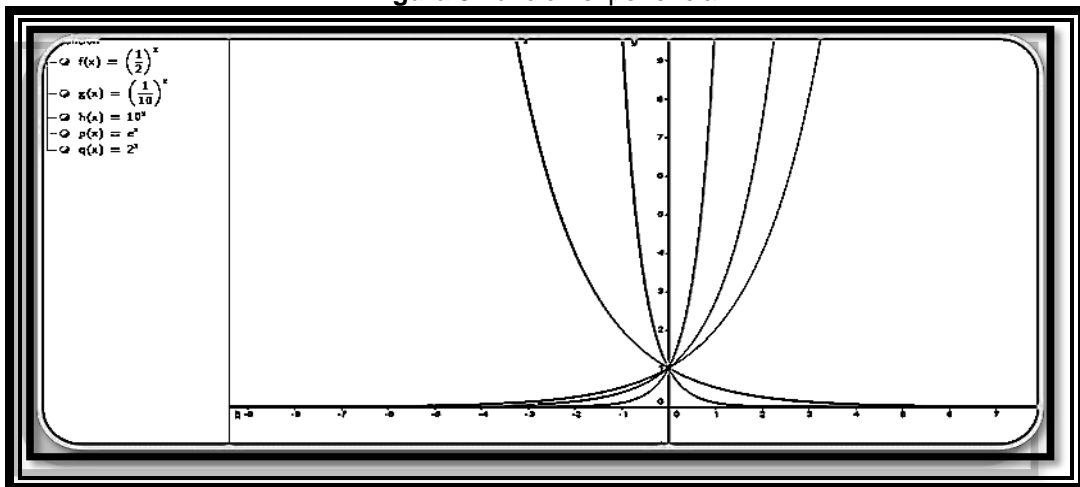
Recordemos brevemente qué se entiende por función exponencial y cómo aparece en los libros de texto (Zill, 2012). Se llaman funciones exponenciales a funciones de la forma $y = b^x$ siendo b una constante y x la variable independiente. La definición de la función exponencial exige siempre que la base sea positiva y distinta de 1 ($b > 0, b \neq 1$) la condición de que la base sea distinta de 1 se debe a que si consideráramos ese caso obtendríamos la función constante $y = 1$. La base

no puede ser negativa porque en ese caso no tendría sentido en el conjunto de los números reales.

La función exponencial tiene dominio \mathbb{R} y rango $(0, \infty)$ y todas las gráficas pasan por el punto $(0,1)$ independientemente del valor de la base.

Si $b > 1$ las funciones son monótonamente crecientes, si $0 < b < 1$, son monótonamente decrecientes. En la siguiente figura podemos ver la representación gráfica para distintos parámetros de b .

Figura 3: función exponencial



Fuente: datos de investigación

Si $b < 1$ entonces la gráfica se acerca a $y = 0$ para valores negativos de x , por lo que el eje x es una asíntota horizontal, Figura 3. Si $0 < b < 1$, la gráfica se acerca a $y = 0$ cuando x crece indefinidamente y de nuevo el eje x es una asíntota horizontal. En cualquiera de los casos la gráfica nunca corta al eje x . es decir $b^x > 0$ para todo x .

Algunas características de las funciones exponenciales son:

- ✓ El dominio es el conjunto de los números reales.
- ✓ La imagen es el conjunto de los números reales positivos.
- ✓ El valor de y se acerca a cero pero nunca será cero, cuando x toma valores negativos en las funciones crecientes y positivos en las decrecientes.
- ✓ Todas las funciones intersecan al eje y en el punto $(0,1)$.
- ✓ Son funciones continuas.

Estas funciones tienen una gran aplicación en campos muy diversos como la biología, la física, la química, la economía, la sociología o la ingeniería. Así fenómenos que se modelan con la función exponencial pueden ser crecimiento de poblaciones, modelos de expansión del universo, enfriamiento de sustancias, decaimiento radiactivo, interés compuesto continuo, sonido, entre otros. Se ha incluido esta definición de función exponencial con la única intención de contextualizarla dado que este es el nivel donde se introduce y estructura este concepto matemático y el nivel educativo al que se refiere esta investigación.

3 CONCEPCIONES Y ANÁLISIS A PRIORI

En esta parte del documento nos fijaremos, según las selecciones o tareas implementadas, del alcance o control en los pos-comportamientos de los estudiantes y su significado. Por lo anterior, este análisis a priori se basa en un conjunto de hipótesis. La validación de las mismas está indirectamente en juego en la confrontación que se lleva a cabo, entre el análisis a priori y el análisis a posteriori.

3.1 CONCEPCIONES

Esta pesquisa de campo de tipo cualitativo según Francisco Alvira Martín (2002) cuyo objetivo es la descripción de las cualidades de un suceso, esta clase de investigación busca un concepto que pueda abarcar una parte de la realidad. No se trata de probar o de medir en qué grado una cierta cualidad se encuentra en un cierto acontecimiento dado, sino de descubrir tantas cualidades como sea posible.

La investigación cualitativa tiene como principales características manifestar su estrategia para tratar de conocer los hechos, procesos, estructuras y personas en su totalidad, y no a través de la medición de algunos de sus elementos. La misma estrategia indica ya el empleo de procedimientos que dan un carácter único a las observaciones.

La segunda característica de esta investigación cualitativa, es el uso de procedimientos que hacen menos comparables las observaciones en el tiempo y en diferentes circunstancias culturales, es decir, este método busca menos la generalización.

Y por último, una tercera característica estratégica importante para este trabajo se refiere al papel del investigador en su trato intensivo con las personas involucradas en el proceso de investigación, para entenderlas.

En esta clase de investigación cualitativa, el investigador desarrolla o afirma las pautas y problemas centrales de su trabajo durante el mismo proceso de la investigación. Por tal razón, los conceptos que se manejan en las investigaciones cualitativas en la mayoría de los casos no están operacionalizados desde el principio de la investigación, es decir, no están definidos desde el inicio los indicadores que se tomarán en cuenta durante el proceso de investigación.

Este trabajo de disertación tiene como finalidad valorar los procedimientos por los cuales los alumnos encaminan su conocimiento, ejerciendo técnicas apropiadas para dar solución a unas tareas propuestas que les afianzará conceptos que podrán ser utilizados en su realidad cotidiana y en su ambiente educativo.

En esta fase de la ingeniería didáctica se entiende por concepción a la intención del profesor en la búsqueda de la comprensión de las diferentes maneras que los alumnos ejecutan una cantidad de tareas específicas.

Se hace necesario definir las variables que compondrán las principales variables pertinentes al sistema sobre la cual la enseñanza puede actuar, recordemos que según la ingeniería didáctica de Michelle Artigue (1999) se distinguen dos tipos de variables, llamadas variables micro-didacticas concernientes a la organización local de la investigación y las variables macro-didacticas concernientes a la organización global de la ingeniería.

Por tanto, en este trabajo se evidenciaron las variables que marcan una tendencia relevante a la hora de analizar y reflexionar sobre la práctica pedagógica.

Como variables macro-didacticas tenemos que el currículo es de vital importancia en cualquier ambiente educativo, que lo hace mudable, y que en consecuencia deben de tenerse en cuenta sus diversificaciones a la hora de implementarlo en el salón de clases, por otra parte una variable importante en el proceso educativo es el tiempo en el aula, por lo tanto al percatarse de esta variable permitirá el análisis y sus posibles variaciones en las cuales se puede actuar y que logrará una mejor adecuación de las diferentes actividades propuestas además de la eficacia en las metas trazadas en el aula.

Además de tener en cuenta las variables macro-didácticas, debemos ahondar en las variables micro-didácticas que están seguidas por la determinación de la ecuación canónica, es decir, la resolución de la ecuación exponencial con una incógnita. Con la ayuda simbólica de la función exponencial, el estudiante debe ser capaz de encontrar ecuaciones de tipo exponencial, como también la resolución y posibles raíces de esta ecuación, además de determinar las características asociadas a la función exponencial. Ayudado con la conceptualización de la función exponencial, el estudiante debe ser idóneo para identificar las características más influyentes de la función exponencial, y en consecuencia lograr determinar si se trata o no de una función exponencial.

En la Institución Educativa Técnica de Tunía (Cauca-Colombia), se utilizaron diapositivas para proporcionar las clases de función exponencial, con 23 estudiantes y haciéndoles conocer las características y gráfica de esta función con la ayuda del programa Geogebra y utilizando deslizadores para las posibles condiciones de la base en la ecuación de función exponencial, todos esto con el fin de que visualizaran los posibles escenarios y características de esta función.

Recalcando este tipo de variables micro-didacticas podemos determinar además las aplicabilidades de la función exponencial en un ambiente cotidiano es decir, las técnicas de resolución. El estudiante al hacer uso de unas técnicas de resolución debe evidenciar que las matemáticas debe trasformarse en un ente comunicador con la realidad en la que estamos inmersos cada día, este ente permitirá entender nuestro diario vivir, y por tanto el cotidiano del estudiante que permitirá que este sea capaz de trasponer sus conocimientos a su diario vivir, permitiendo que exista un conocimiento, igualmente convertir este conocimiento en un conocimiento recontextualizado, este es el caso de la función exponencial y que logrará que su aprendizaje sea eficaz.

Además de las aplicabilidades de la función exponencial es necesario Interpretar esta función, para las preguntas realizadas y elaboradas en este trabajo, el estudiante debe comprender y con la ayuda de la conceptualización de la función exponencial, la interpretación de preguntas contextualizadas a la realidad cotidiana del alumno.

En esta labor se espera que los estudiantes tomen un interés valioso y se apropien del conocimiento, aplicándolo a futuros ambientes e instituciones. Cabe resaltar que mediante las actividades de función exponencial, los estudiantes deberán lograr evidenciar, visualizar sus propias ideas y apropiarse de un carácter dinámico en su aprendizaje de las matemáticas.

3.2 ANÁLISIS A PRIORI

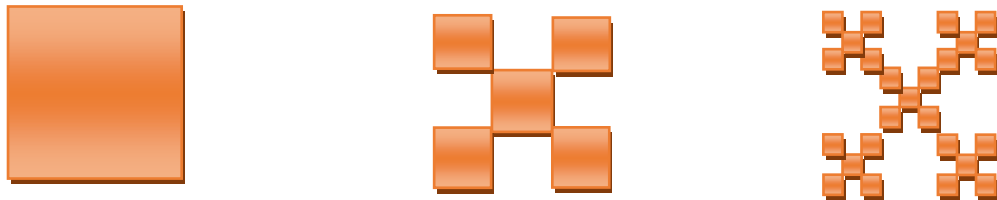
Para el análisis a priori, el estudiante es tomado en cuenta, en niveles de descripción y predicción, mientras que el profesor no interviene sino en un nivel descriptivo. Así, el estudiante es el actor principal del sistema y el profesor está poco presente en el análisis a priori, excepto durante las situaciones de devolución y de institucionalización

Fueron necesarias cuatro sesiones de clase para dar por terminadas las actividades propuestas; en un principio se propusieron siete puntos pero debido al tiempo y al espacio concedido por la Institución, se redujeron a cinco, los cuales fueron satisfactoriamente terminados por todos los alumnos; las sesiones fueron individuales en la que se mezclaron la definición, concepto, gráfica y características de la función exponencial, como también la realización de las tareas elaboradas en este trabajo.

En la experimentación realizada en Colombia, se ejecutaron unas actividades que fueron las siguientes:

ACTIVIDAD 1: La secuencia de figuras presenta varios niveles en la composición de un fractal.

- a) Utilizando una malla cuadrículada, construya la figura correspondiente al próximo nivel de esa secuencia.
- b) Escriba una función que expresa el número de cuadritos existentes en la figura A de un nivel cualquiera de esa secuencia.



Para la primera actividad se espera que los estudiantes logren identificar el patrón que existe en la proposición de este primer punto, y mediante la visualización del ejercicio y su construcción puedan conjeturar la secuencia didáctica existente, se puede dar el caso en que estos no entiendan la formulación de la pregunta puesto que en nuestro entorno educativo colombiano las preguntas o problemas de índole conjetural no son comprendidas por el alumno, presentándose un problema de índole didáctico.

En seguida, presentamos la actividad dos que exige la lectura gráfica y el reconocimiento simbólico de la función exponencial.

ACTIVIDAD 2: Representa gráficamente la siguiente función:

$$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x}{2}}$$

Para la segunda actividad se espera que el estudiante logre graficar e identificar si se trata de una función exponencial, en esta tarea el estudiante puede tener inconvenientes en el análisis de los números presentados en este problema, puesto que son de carácter fraccionario, en lo que se identificará como un obstáculo en la definición formal y gráfica de la función exponencial

La tercera actividad tiene un carácter interpretativo de una situación específica, esta actividad requiere que el estudiante además de hacer uso de sus conocimientos interprete y conjeture las posibles soluciones al problema, esta actividad es la siguiente.

ACTIVIDAD 3: En la reproducción asexual por mitosis que ocurre en algunas clases de células, cada célula se divide en 2 y produce 2 células nuevas (la primera desaparece) y el proceso sigue con estas dos.

- a) Haz una tabla y un gráfico correspondiente al número de células presentes después de que ha repetido la división de una a seis veces.
- b) Expresa la función $y = f(x)$.

En la tercera actividad, se espera que el estudiante identifique la naturaleza de sucesión de la función exponencial en el momento de su presentación con el fin de que los estudiantes puedan obtener una ecuación canónica que les permita obtener la gráfica de la función. Puede darse el caso que el estudiante construya primero la gráfica y su tabla a partir de su conjeturación y prueba de errores y por consiguiente la ecuación canónica.

En la actividad 4, el estudiante requiere descifrar y conjeturar las distintas soluciones o casos que tiene una variable específica, haciendo uso de sus conceptos previos y de lo aprendido sobre la función exponencial.

ACTIVIDAD 4: Que puedes conjeturar respecto de la gráfica de $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x + k$, con k un número real. Justifica tu respuesta.

En el cuarto punto se espera que a partir de la ecuación el estudiante tome valores de k mayores que cero, menores que cero e iguales que cero, en el problema no se tiene el valor de k pero se espera que el estudiante compruebe sus afirmaciones con cualquier número positivo, negativo o cero, además de su forma gráfica y sus características.

Por último, la actividad número 5 exige la lectura interpretativa del estudiante, en conjunción con lo aprendido sobre la función exponencial y sus conceptos previos, sobre las distintas situaciones que puede abarcar el problema.

ACTIVIDAD 5: El crecimiento de cierto cultivo de bacterias está regido por la ecuación

$$p(t) = 600(3^{2t})$$

t en horas. Si hay 600 bacterias a las 6:00 am ¿Cuántas habrá a las 8:00 am? ¿Cuántas a las 10:00 am? ¿Qué ocurre con la población cada 2 horas? ¿Cómo será la gráfica?

En el quinto punto el estudiante debe conjeturar e interpretar a partir de los datos del problema y por lo tanto este debe lograr una concatenación con su realidad, sus conceptos previos y su conocimiento adquirido en el aula de clase sobre la función exponencial.

4 EXPERIMENTACIÓN

Siguiendo con la metodología implementada de investigación llamada ingeniería didáctica, continuamos con la fase de experimentación que mostrará la aplicación de las actividades en el salón de clases, así como de los diferentes registros recolectados y usados para ejecutar los objetivos e hipótesis de esta investigación.

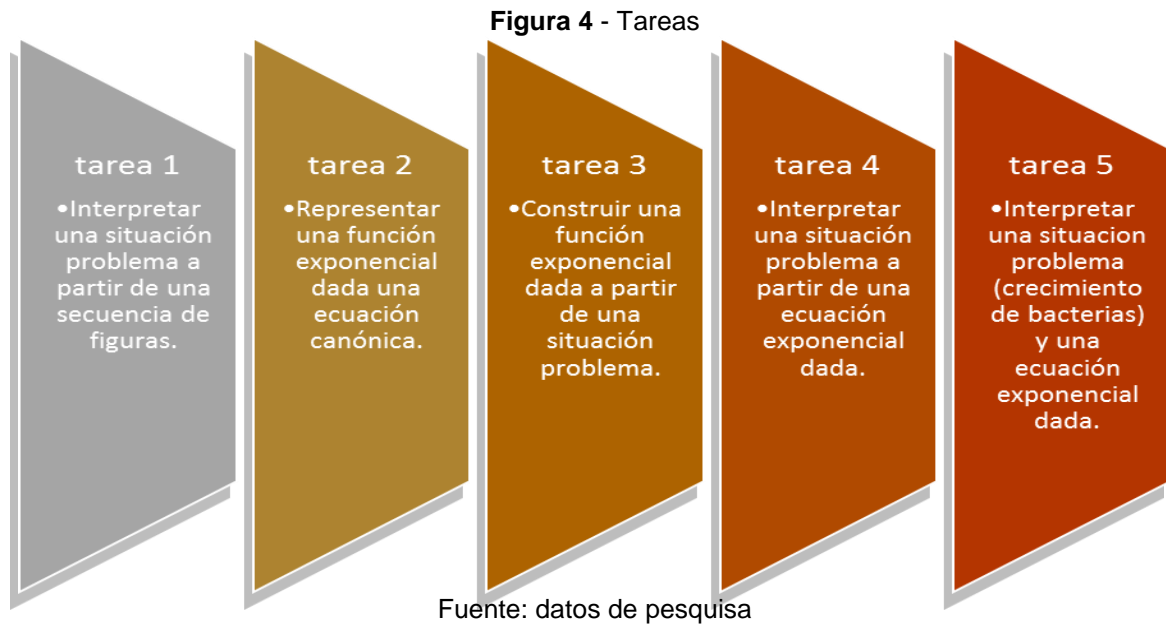
Exponiendo las aplicaciones de las actividades propuestas se enfocará en la identificación y la construcción de las praxeologías matemáticas enfocadas hacia el concepto matemático de función exponencial que evidenciará la acción humana de los alumnos a la hora de dar resultados para unas tareas propuestas.

Aquí cabe resaltar que de los 23 estudiantes encontrados en el grado decimo, escogimos solo tres individuos de análisis, no solo con el fin de ahondar en su accionar, sino el encontrar un enfoque de índole analítico en forma breve y precisa, puesto que estos sujetos permitían una mejor lectura de las técnicas utilizadas asociadas a unas determinadas tareas.

4.1 APLICACIÓN DE LAS ACTIVIDADES

Tomando en cuenta los registros recogidos en las tareas propuestas se identificará las diferentes técnicas respectivas y sus diferentes tecnologías, estas se mostraran en los siguientes Diagramas.

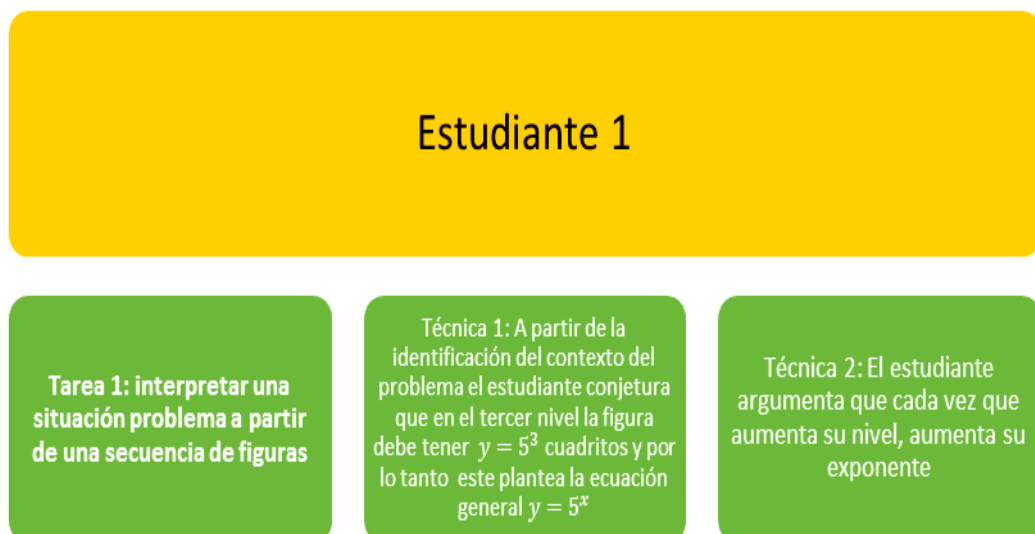
Cabe resaltar que aquí las **tareas** se han nombrado de la siguiente forma TAREA 1 (T_1) Y TAREA 2 (T_2), por lo que seguiremos tomando esta misma terminología hasta la TAREA 5 (T_5), Figura 4, notemos que las tareas se han construido en mención a la teoría antropológica de lo didáctico referenciadas a la conjunción de un verbo y un determinativo, de la misma forma unas técnicas, que aquí son nombradas como t_x donde $x = 1, 2, 3$, organizadas de la siguiente manera:



Los siguientes Diagramas clasificarán las distintas tareas y sus respectivas **técnicas** en la elaboración de soluciones de cada estudiante a las actividades propuestas mencionadas anteriormente. Se tomará el siguiente convenio relacionando el saber-hacer tanto la tarea como la técnica por cada estudiante correspondiente y que se mostrará en los siguientes Diagramas a seguir [**T_x**: **Tarea x** / **t_y**: **Técnicas** / **E_z**: **Estudiante z**] donde **x = 1, 2, 3, 4, 5**; **y = 1, 2, 3**; **z = 1, 2, 3**.

En el siguiente Diagrama podemos apreciar las diferentes técnicas utilizadas por el Estudiante 1 en la realización de la tarea 1, donde la principal característica de este quehacer es la de interpretar una situación dada un contexto.

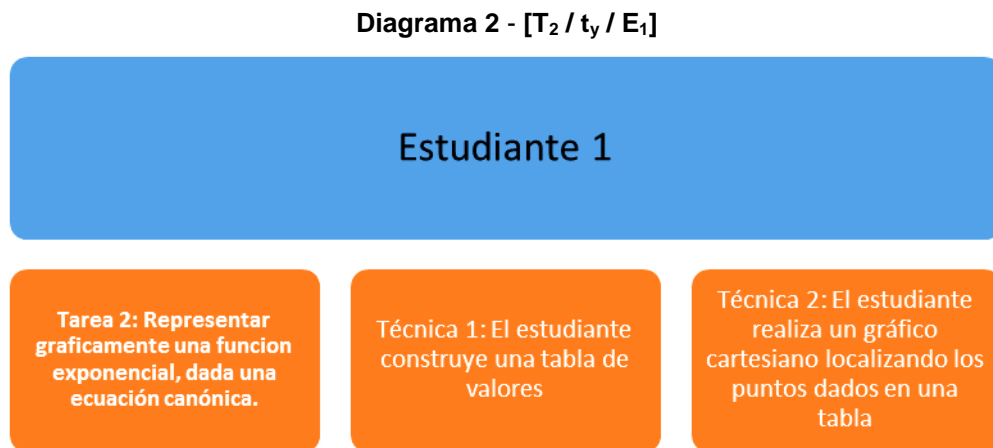
Diagrama 1 [T₁ / t_y / E₁]



Fuente: datos de pesquisa

El Diagrama 1 indica que el Estudiante 1, a partir de la tarea 1, cuya acción es interpretar una situación problema a partir de una secuencia de figuras obtiene dos técnicas que identifican el carácter conjetural además de obtener una ecuación canónica general, como también el aspecto proporcional exponencial de la variable independiente en relación de la variable dependiente.

En el siguiente Diagrama 2 se hace uso de las técnicas identificadas por el Estudiante 1 en ejecución de un tipo de tareas 2.

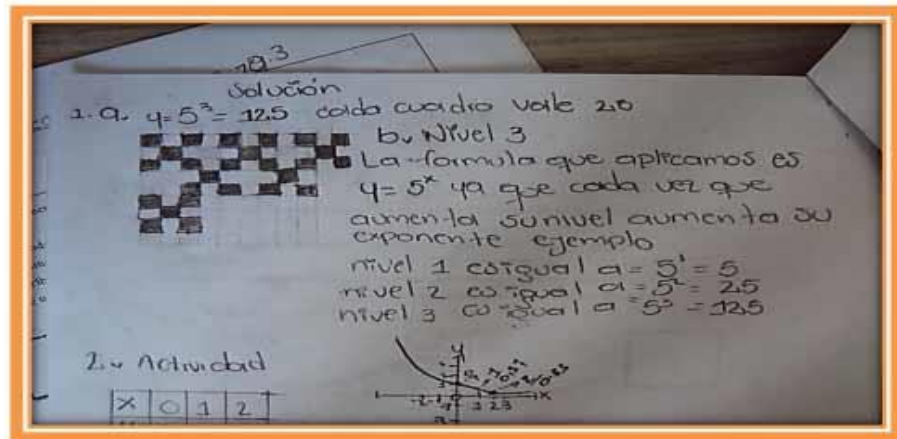


Fuente: datos de pesquisa

El Diagrama 2 indica que el Estudiante 1, a partir de la tarea 2, cuya acción es representar gráficamente una función exponencial, dada una ecuación canónica alcanza dos técnicas que identifican la construcción de una tabla de valores, tanto de la variable dependiente en relación con la variable independiente, además de realizar el plano cartesiano localizando los puntos dados u obtenidos en una tabla de valores.

La siguiente fotografía Figura 5 da cuenta de las diferentes técnicas utilizadas en la práctica y ejecución de los tipos de tareas 1 y 2 realizada por el Estudiante 1.

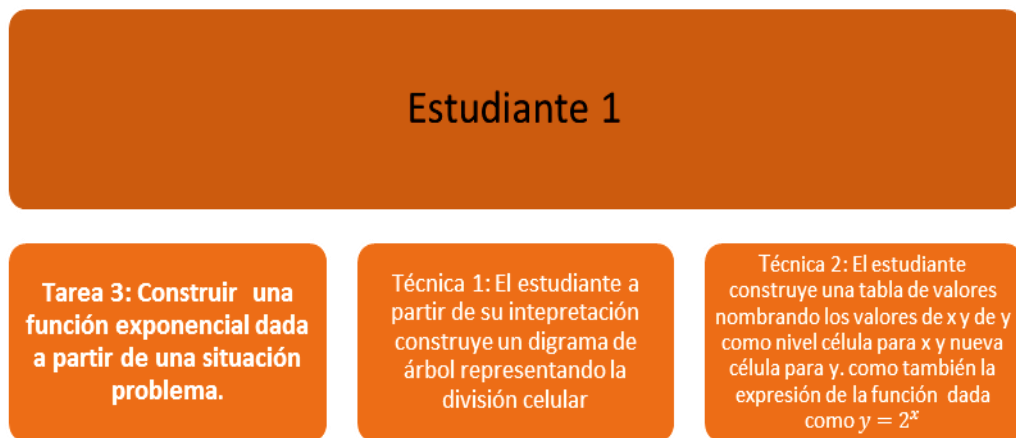
Figura 5 - Estudiante 1 (tarea 1 (T_1) y tarea 2 (T_2))



Fuente: datos de pesquisa

El siguiente es el Diagrama correspondiente para la identificación de las técnicas utilizadas por el Estudiante 1 en la elaboración de la tarea 3 de tipo constructivo.

Diagrama 3 - [T_3 / t_y / E_1]



Fuente: datos de pesquisa

El Diagrama 3 indica que el Estudiante 1, a partir de la tarea 3, cuya labor es construir una función exponencial dada a partir de una situación problema obtiene dos técnicas que identifican el carácter representativo del problema, en la cual el alumno realiza un diagrama de árbol incorporando la división celular además de una segunda técnica la cual es la construcción de una tabla de valores con el fin de obtener una ecuación canónica general para esta actividad 3.

El Diagrama 4 corresponde a la identificación de las técnicas utilizadas por el Estudiante 1 en la elaboración de la tarea 4 de tipo interpretativo.

Diagrama 4 - [T₄ / t_y / E₁]

Estudiante 1

Tarea 4: interpretar una situación problema a partir de una ecuación exponencial dada.

Técnica 1: El estudiante argumenta que si $k = 1$, entonces la gráfica sera 1.5 y por lo tanto creciente y si $k = 0$ entonces la gráfica sera igual 1 y por tanto tambien creciente.

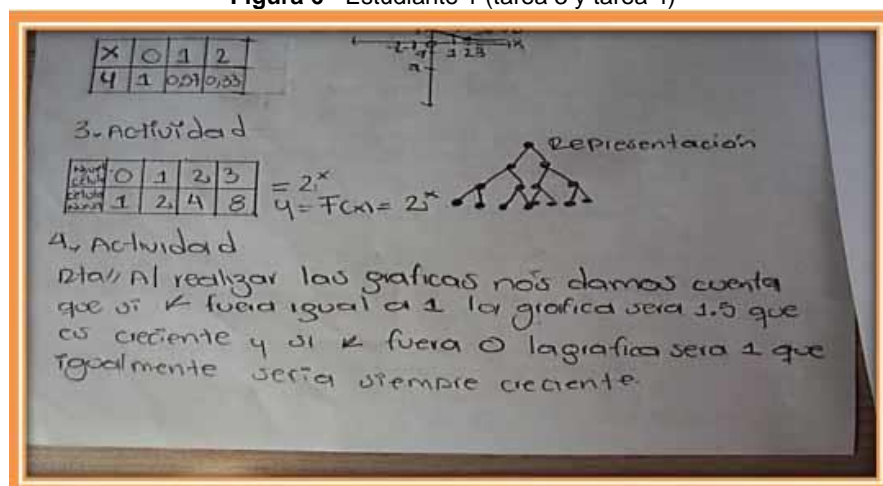
Comentario: El estudiante esta tomando valores de x como 0 y 1 y reemplazando en la ecuación dada, pero omite los valores arbitrarios de K y el hecho de que la base siempre es creciente si esta es mayor a 1.

Fuente: datos de pesquisa

El Diagrama 4 indica que el Estudiante 1, a partir de la tarea 4, cuya acción es interpretar una situación problema a partir de una situación problema obtiene una técnica que identifica el carácter conjetural y demostrativo de los distintos valores de k y su posible representación canónica de la función exponencial así como el carácter creciente debido a la condiciones que debe cumplir.

La Figura 6 muestra las tareas 3 y 4 que identifican las diferentes técnicas utilizadas por el Estudiante 1.

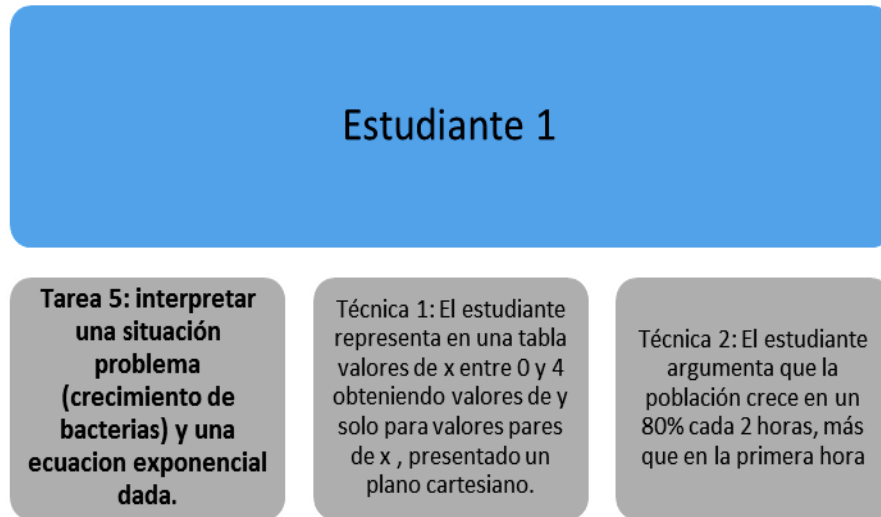
Figura 6 - Estudiante 1 (tarea 3 y tarea 4)



Fuente: datos de pesquisa

El Diagrama 5 muestra la tarea de tipo interpretativo denominada como tarea 5 (T_5) y en la que se identifican las técnicas utilizadas por el Estudiante 1 en la ejecución de este tipo de tarea.

Diagrama 5 - [T_5 / t_y / E_1]

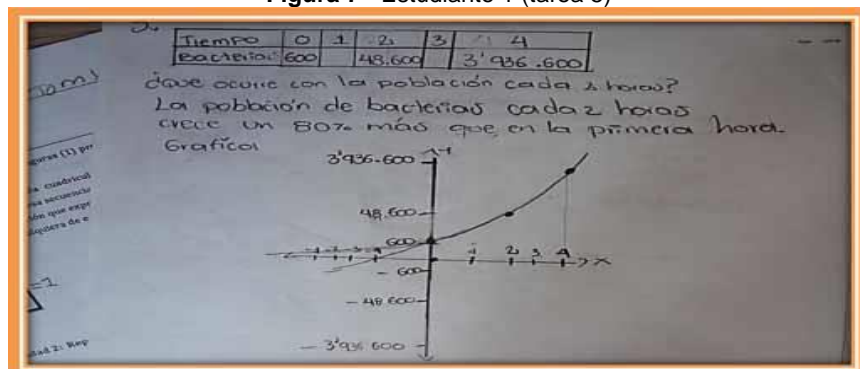


Fuente: datos de pesquisa

El Diagrama 5 indica que el Estudiante 1, a partir de la tarea 5, cuya acción es interpretar una situación problema (crecimiento de bacterias) y una ecuación exponencial dada, logra dos técnicas que identifican el carácter representativo en una tabla de valores con la particularidad de obtener valores o resultados en valores pares de x , debido a las condiciones del problema, además dentro de los conceptos previos del estudiante este recurre a la obtención de una tasa porcentual que representa el carácter creciente de la función exponencial.

En la siguiente imagen, Figura 7, se muestra la realización de esta tarea denominada como T_5 .

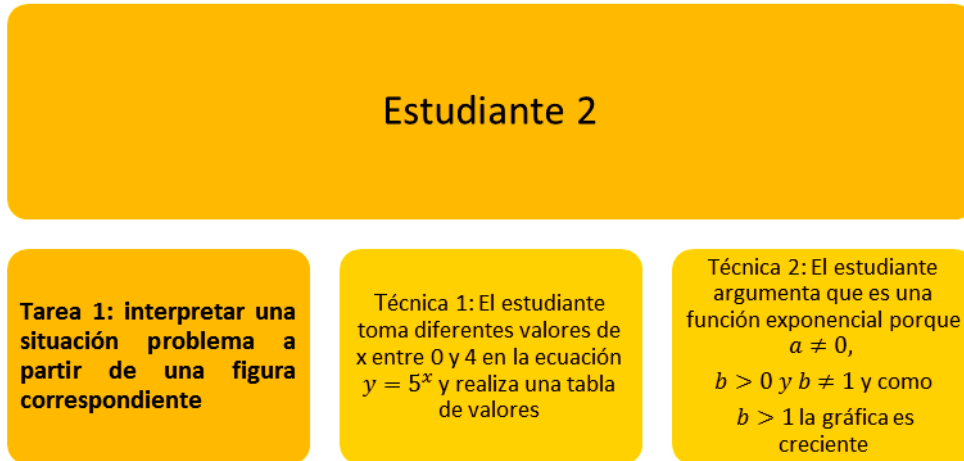
Figura 7 - Estudiante 1 (tarea 5)



Fuente: datos de pesquisa

Ahora cambiando el sujeto de pesquisa denominado, Estudiante 2 se identificarán las distintas técnicas utilizadas por éste en función de la actuación de la tarea 1.

Diagrama 6 - [T₁ / t_y / E₂]

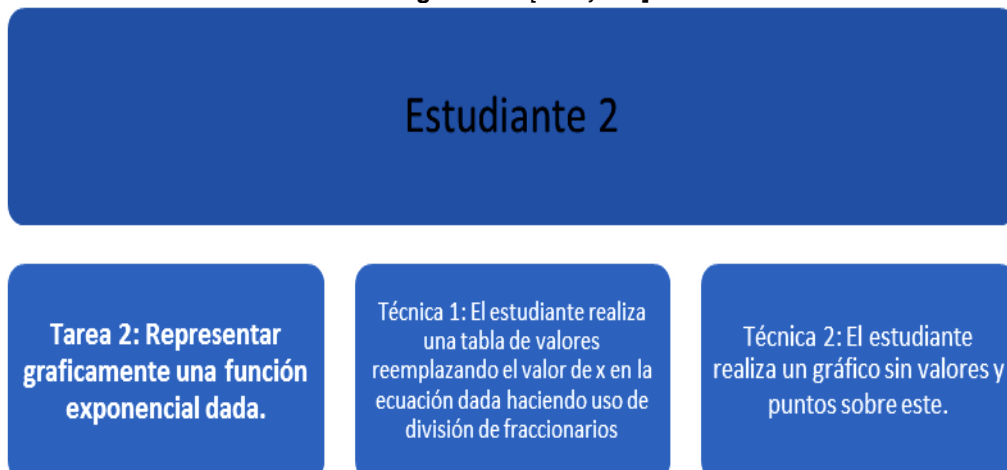


Fuente: datos de pesquisa

El Diagrama 6 indica que el Estudiante 2, a partir de la tarea 1, cuya acción es interpretar una situación problema a partir de una figura correspondiente, obtiene dos técnicas que identifican el carácter representativo y conjetural de la situación, argumentado mediante potencias de grado cero y de grado uno demostrando así una ecuación canónica de forma exponencial además de retomar a la definición formal de función exponencial y sus principales características.

El siguiente Diagrama 7 con su respectiva tarea 2, da cuenta de las diferentes técnicas utilizadas por el Estudiante 2.

Diagrama 7 - [T₂ / t_y / E₂]

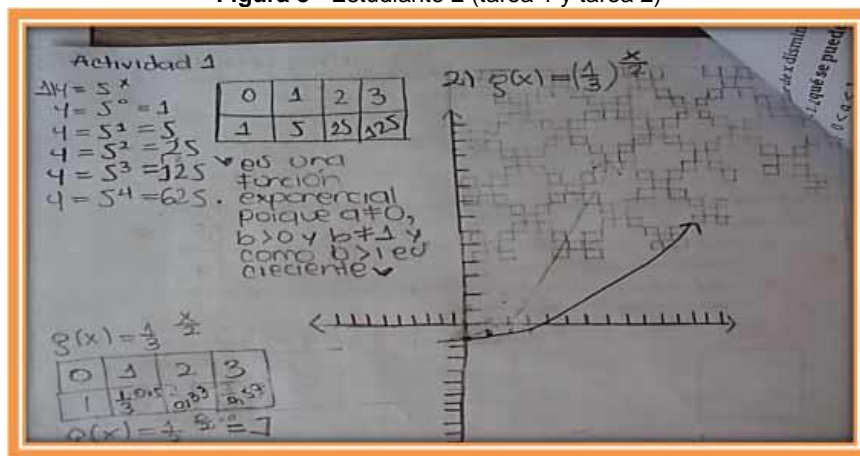


Fuente: datos de pesquisa

El Diagrama 7 indica que el Estudiante 2, a partir de la tarea 2, cuya acción es representar gráficamente una función exponencial dada, logra dos técnicas como lo son la realización de una gráfica de una función exponencial mediante puntos trazados en el plano cartesiano con la ayuda de una tabla de valores, además este alumno utiliza diferentes métodos para la obtención de un resultado específico como lo es la división de números enteros y la potenciación de dos números.

Esta actividad es reconocida en la siguiente Figura 8 que da cuenta de las técnicas utilizadas por el Estudiante 2 en interpretación de la tarea 2.

Figura 8 - Estudiante 2 (tarea 1 y tarea 2)



Fuente: datos de pesquisa

El Diagrama 8, muestra las diferentes técnicas utilizadas por el Estudiante 2 en la tarea 2 de tipo constructivo en una función exponencial.

Diagrama 8 - [T3 / ty / E2]

Estudiante 2

Tarea 3: construir una función exponencial dada, a partir de una situación problema.

Técnica 1: El estudiante construye una tabla de valores x y de y

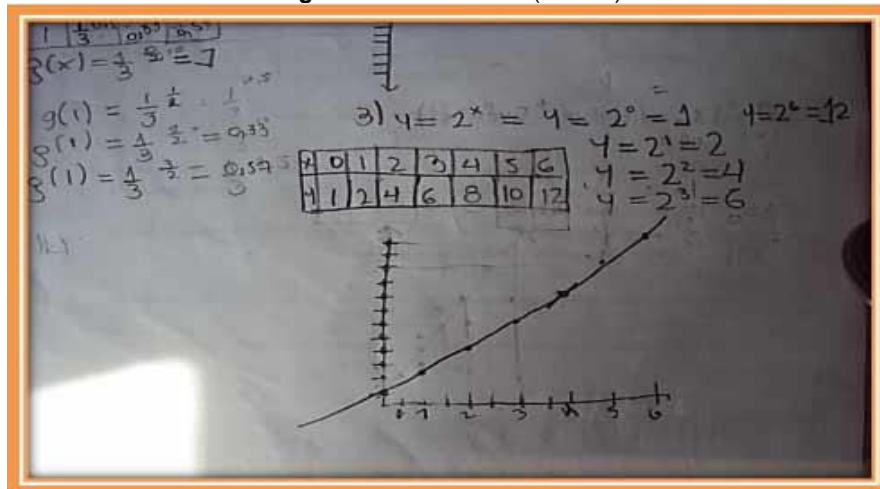
Técnica 2: El estudiante reemplaza los valores de x en la función de la forma $y = 2^x$

Fuente: datos de pesquisa

El Diagrama 8 indica que el Estudiante 2, a partir de la tarea 3, cuya acción es construir una función exponencial dada a partir de una situación problema, alcanza dos técnicas que identifican el carácter representativo en una tabla de valores además de realizar diferentes conjeturas con el fin de obtener una ecuación general, todo esto con la ayuda de representaciones de potencias en base 2.

Esta actividad es ilustrada en la Figura 9 que detalla los procedimientos realizados por el Estudiante 2.

Figura 9 - Estudiante 2 (tarea 3)



Fuente: datos de pesquisa

A continuación, se muestra la tarea de tipo interpretativo denominada tarea 4 y sus diferentes técnicas implementadas por el Estudiante 2, Diagrama 9.

Diagrama 9 - [T4 / ty / E2]

Estudiante 2

Tarea 4: interpretar una situación problema a partir de una ecuación exponencial dada

Técnica 1: El estudiante realiza una tabla de valores

Técnica 2: El estudiante toma valores cuando $x=k$ comprendidos entre 0 y 3

Fuente: datos de pesquisa

El Diagrama 9 muestra que el Estudiante 2, a partir de la tarea 4, cuya acción es interpretar una situación problema a partir de una ecuación exponencial dada, alcanza dos técnicas que identifican el carácter interpretativo de una ecuación y sus posibles respuestas y demostraciones, el estudiante toma valores de k entre 0 y 3 y a su vez, reemplaza los mismos valores de x en la ecuación obteniendo un resultado con números reales y una tabla que relaciona dos valores.

En la siguiente fotografía, Figura 10, se toma el registro correspondiente a la realización de la tarea 4 en función de las técnicas implementadas concebida por el Estudiante 2.

Figura 10 - Estudiante 2 (tarea 4)

Handwritten work on graph paper showing the exponential equation $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x + k$ and calculations for $k=0, 1, 2, 3$. A small table relates x and y values.

x	0	1	2	3
y	1	0	0,5	0,6

$y = \left(\frac{3}{2}\right)^0 + 0 = \left(\frac{3}{2}\right)^0 = 1 + 0 = 1$
 $y = \left(\frac{3}{2}\right)^1 + 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2} = 2,5$
 $y = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} + 2 = \frac{17}{4} = 4,25$
 $y = \left(\frac{3}{2}\right)^3 + 3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} + 3 = \frac{51}{8} = 6,375$

Fuente: datos de pesquisa

El siguiente es el Diagrama 10 correspondiente al tipo de tarea 5 y sus diferentes técnicas efectuadas por el Estudiante 2:

Diagrama 10 - [T₅ / t_y / E₂]

Estudiante 2

Tarea 5: interpretar una situación problema (crecimiento de bacterias) y una ecuación exponencial.

Técnica 1: El estudiante reemplaza diferentes valores de t en la ecuación dada y obtiene un valor.

Técnica 2: El estudiante argumenta que cada dos horas aumenta la población a partir de los datos obtenidos

Técnica 3: El estudiante realiza un gráfico cartesiano con los valores de obtenidos de y a partir de los valores de x

Fuente: datos de pesquisa

El Diagrama 10 indica que el Estudiante 2, a partir de la tarea 5, cuya acción es interpretar una situación problema (crecimiento de bacterias) y una ecuación exponencial dada, logra tres técnicas que identifican el carácter representativo e interpretativo de la situación, este alumno en una tabla de valores relaciona dos variables que le permite realizar una gráfica cartesiana localizando los puntos hallados en la tabla y trazando una ecuación exponencial, además de realizar operaciones con números reales, igualmente menciona la presunción e hipótesis de acuerdo a los datos obtenidos como lo es el crecimiento de bacterias en relación al aumento de horas de crecimiento.

En la siguiente Figura 11 se muestra las técnicas utilizadas por el Estudiante 2 en realización del tipo de tarea número 5.

Figura 11 - Estudiante 2 (tarea 5)

$$S) p(t) = 600(3^{2t})$$

$$p(t) = 600(3^{2t}) \quad p(t) = 600(3^{2t})$$

$$600 \quad 600(3^2)$$

$$600 \quad 600(9)$$

$$p(t) = 600(3^{2t}) \quad p(t) = 600(3^{2t})$$

$$600(3^6) \quad p(t) = 600(3^{2t})$$

$$600(729) \quad p(t) = 600(3^4)$$

$$437400 \quad = 600(81)$$

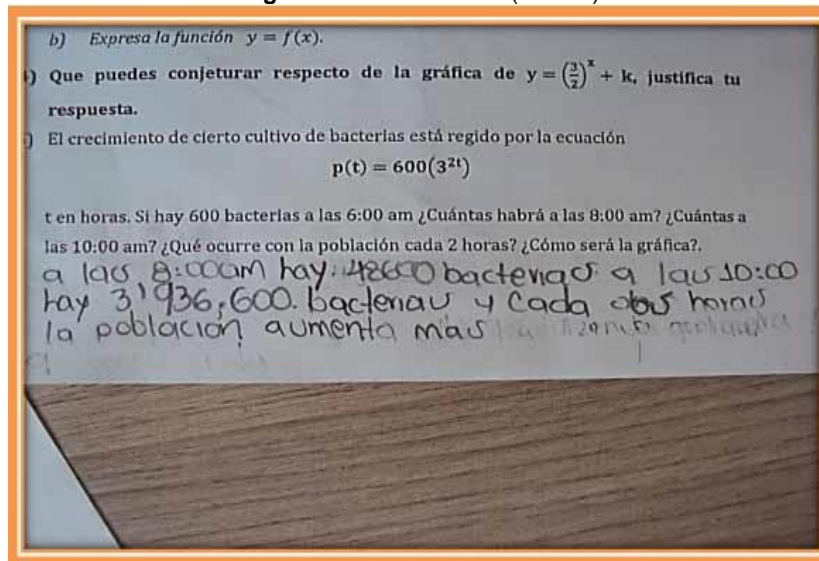
$$\quad = 48600$$

las 10:00 am (que ocurre con la población cada 2 horas: Como sera la granca.
a las 8:00am hay 48600 bacterias a las 10:00

Fuente: datos de pesquisa

Tanto como la anterior fotografía y la siguiente, se da cuenta de las técnicas e interpretaciones del Estudiante 2, Figura 12, en la solución de este tipo de tarea de tipo interpretativo.

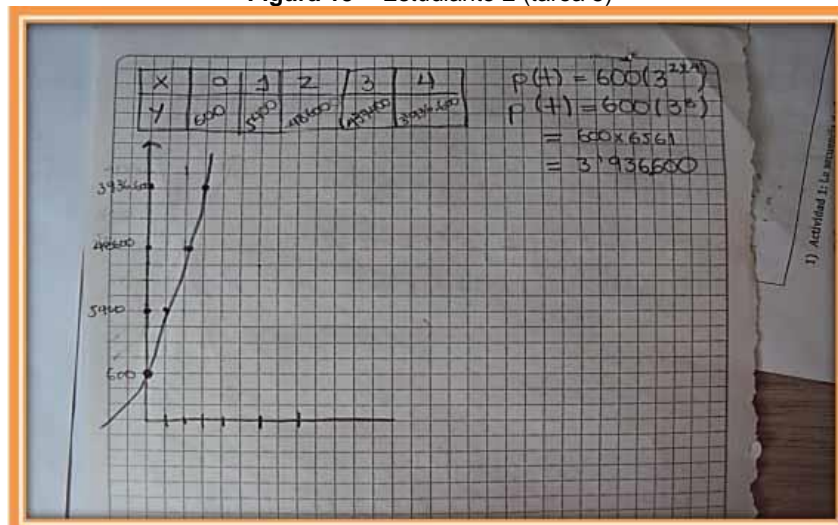
Figura 12 - Estudiante 2 (tarea 5)



Fuente: datos de pesquisa

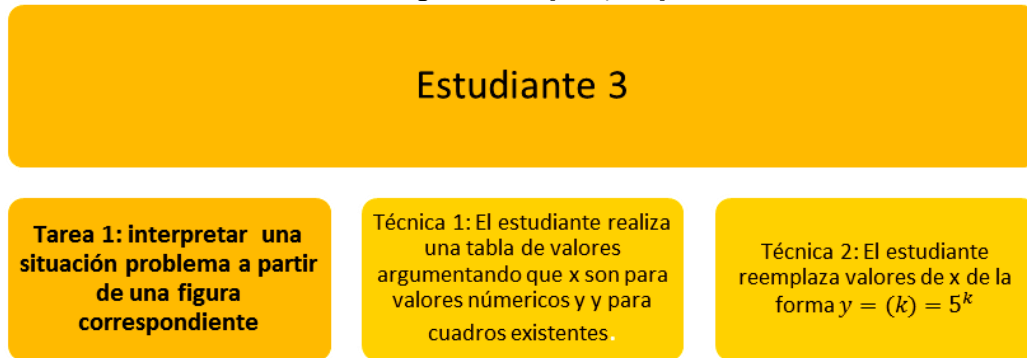
Por ultimo, en la siguiente Figura 13 se observa la técnica que el Estudiante 2 realiza para dar cabida de la actividad numero 5.

Figura 13 - Estudiante 2 (tarea 5)



Fuente: datos de pesquisa

A continuación se muestran las técnicas del Estudiante 3 en desarrollo de un tipo de tareas que en este caso, es la tarea 1 de tipo interpretativo.

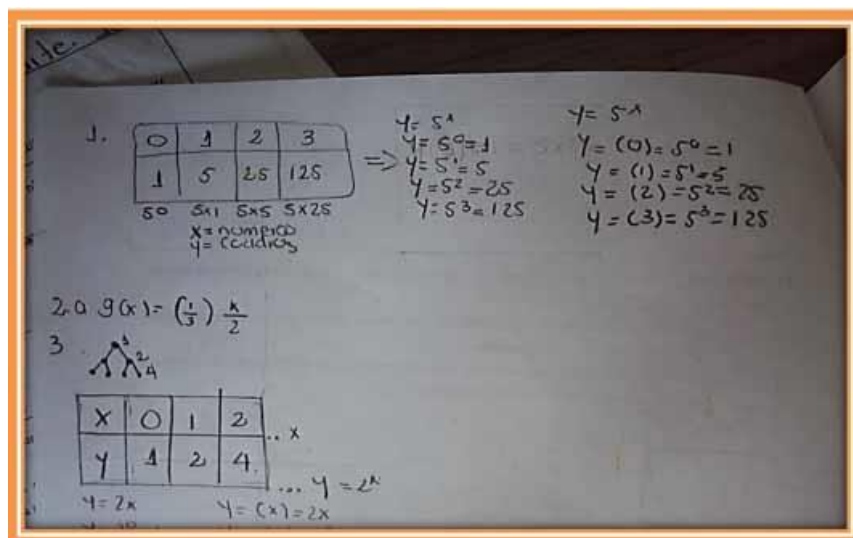
Diagrama 11 - [T₁ / t_y / E₃]

Fuente: datos de pesquisa

El Diagrama 11 indica que el Estudiante 3, a partir de la tarea 1, cuya acción es interpretar una situación problema a partir de una figura correspondiente, alcanza dos técnicas que muestran el entendimiento del problema como lo es la realización de una tabla de valores tomando como convención la variable independiente como el nivel que pertenece a la figura y como la variable dependiente la cantidad de cuadros existentes, asimismo este reemplaza los valores de la variable independiente en una ecuación de tipo exponencial.

En la Figura 14 se muestra las técnicas utilizadas por el Estudiante 3 en relación al tipo de tarea 1.

Figura 14 - Estudiante 3 (tarea 1)

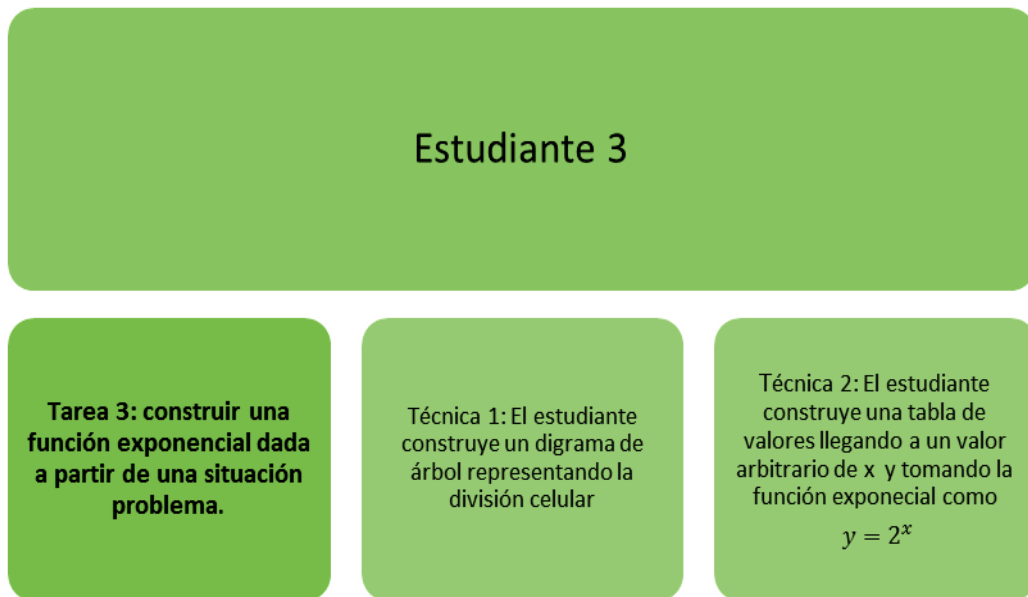


Fuente: datos de pesquisa

A continuación el siguiente esquema visualiza las técnicas identificadas en desarrollo de la tarea número de 3 de tipo constructivo.

Cabe resaltar que el Estudiante 3 no realizó la tarea 2 llamada representar gráficamente una función exponencial dada una ecuación canónica, en la que se aprecia (Figura 13) el accionar de este alumno y la no elaboración de técnicas que solucionen esta acción.

Diagrama 12 - [T₃ / t_y / E₃]

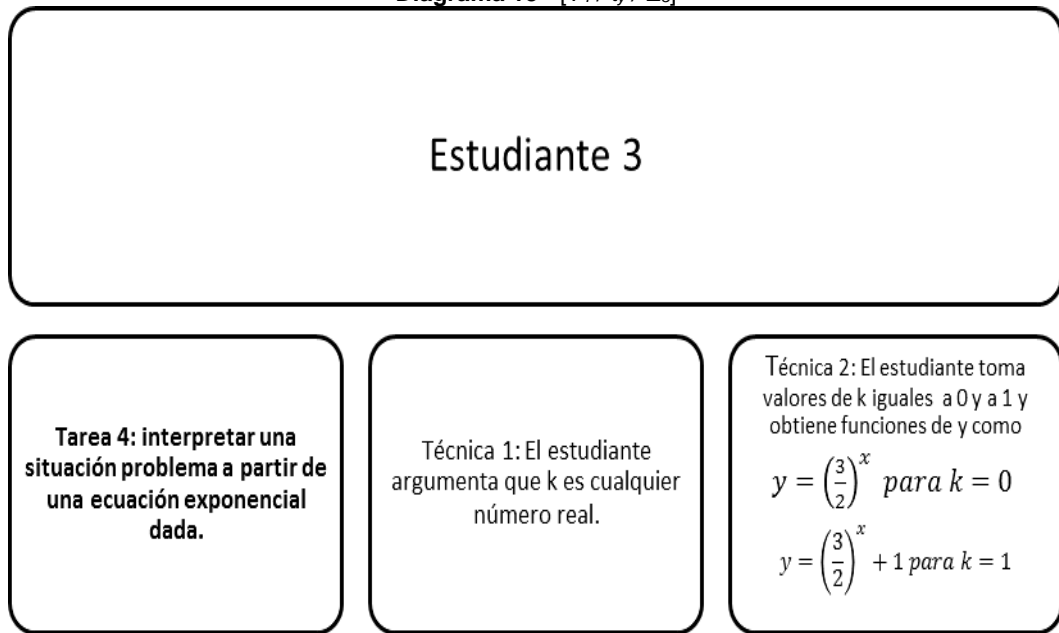


Fuente: datos de pesquisa

El Diagrama 12 enseña que el Estudiante 3, a partir de la tarea 3, cuya acción es construir una función exponencial dada a partir de una situación problema, obtiene dos técnicas que identifican el carácter representativo y conjetural en un diagrama de árbol representando el nivel celular y la secuencia apropiada que determinara la cantidad de células en contraposición a la iteración de este proceso de segmentación, también este alumno construye una tabla de valores que relaciona dos variables que representan esta división celular y el nivel correspondiente.

Se da cuenta del desarrollo de unas técnicas a partir de una tipo de tareas denominado tarea 4 en la que estos métodos se identifican en el siguiente esquema en la Diagrama 13

Diagrama 13 - [T4 / ty / E3]

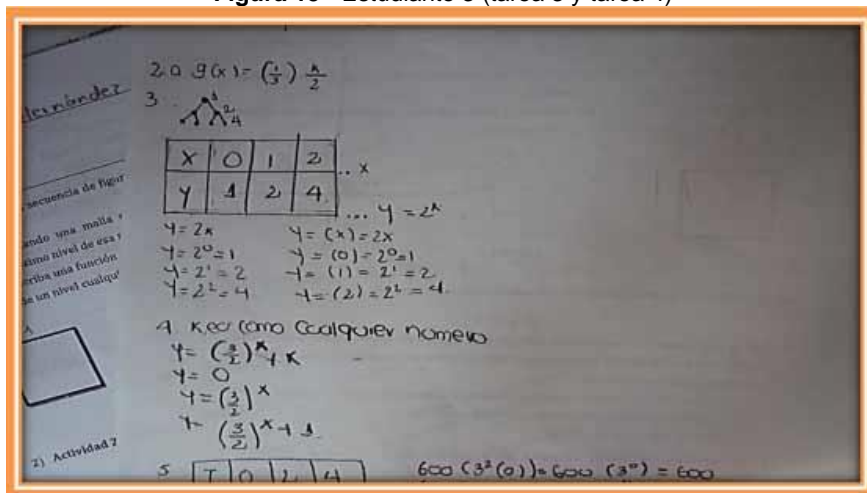


Fuente: datos de pesquisa

El Diagrama 13 indica que el Estudiante 3, a partir de la tarea 4, cuya acción es interpretar una situación problema a partir de una ecuación exponencial dada, logra dos técnicas que identifican la interpretación del problema tomando valores de k como cualquier número real y realizando hipótesis con valores de k y en la que obtendrá dos ecuaciones canónicas crecientes diferentes que pasan por el punto (0,1).

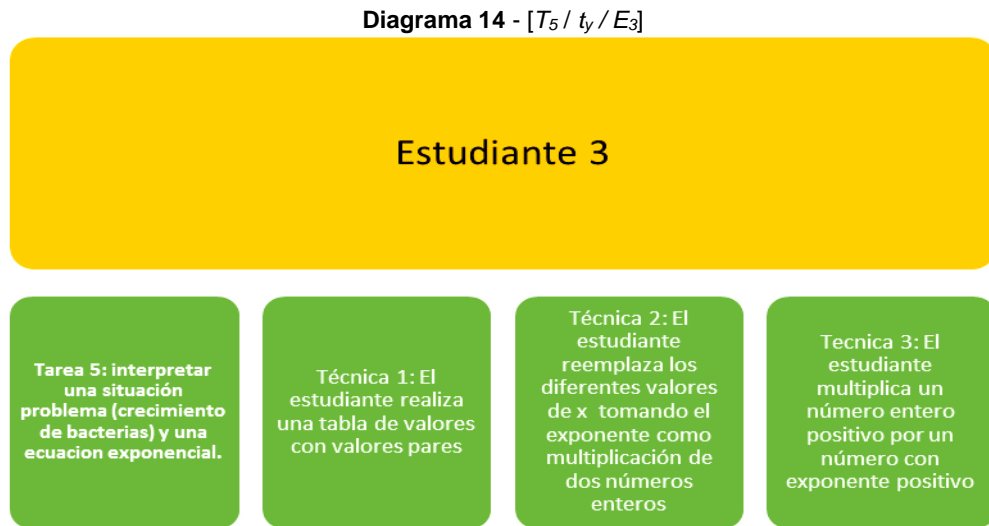
En la Figura 15 se muestra el desarrollo del estudiante número 3 en las diferentes técnicas utilizadas para desenvolver la tarea 3 y tarea 4

Figura 15 - Estudiante 3 (tarea 3 y tarea 4)



Fuente: datos de pesquisa

Por último se muestra el Diagrama 14 que da cuenta de las técnicas utilizadas por el Estudiante 3 en desarrollo de la tarea 5.

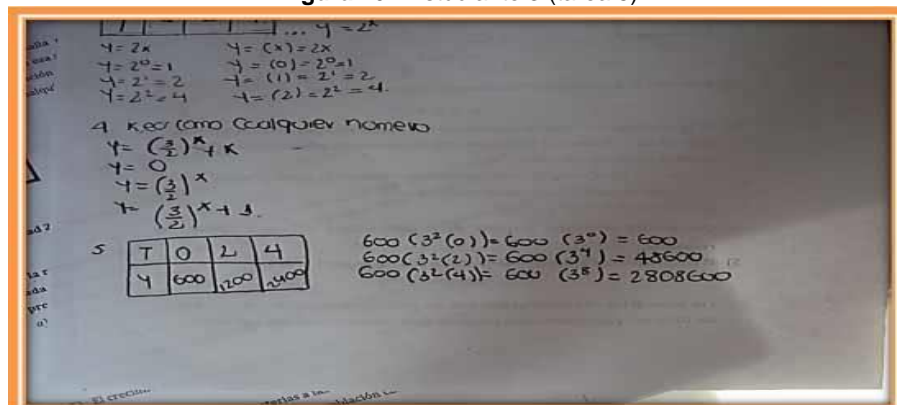


Fuente: datos de pesquisa

El Diagrama 14 indica que el Estudiante 3, a partir de la tarea 5, cuya acción es interpretar una situación problema (crecimiento de bacterias) y una ecuación exponencial dada, logra tres técnicas que identifican el carácter representativo y esquemático realizando una tabla de valores con la peculiaridad de obtener valores o resultados en valores pares de x, además este alumno obtiene resultados mediante el uso de operaciones entre números enteros como lo es la multiplicación y la división, asimismo realiza operaciones entre un número entero positivo y un número exponencial.

En la Figura 16 se muestra los diferentes procesos que utilizó el Estudiante 3 para desarrollar la tarea 5.

Figura 16 - Estudiante 3 (tarea 5)

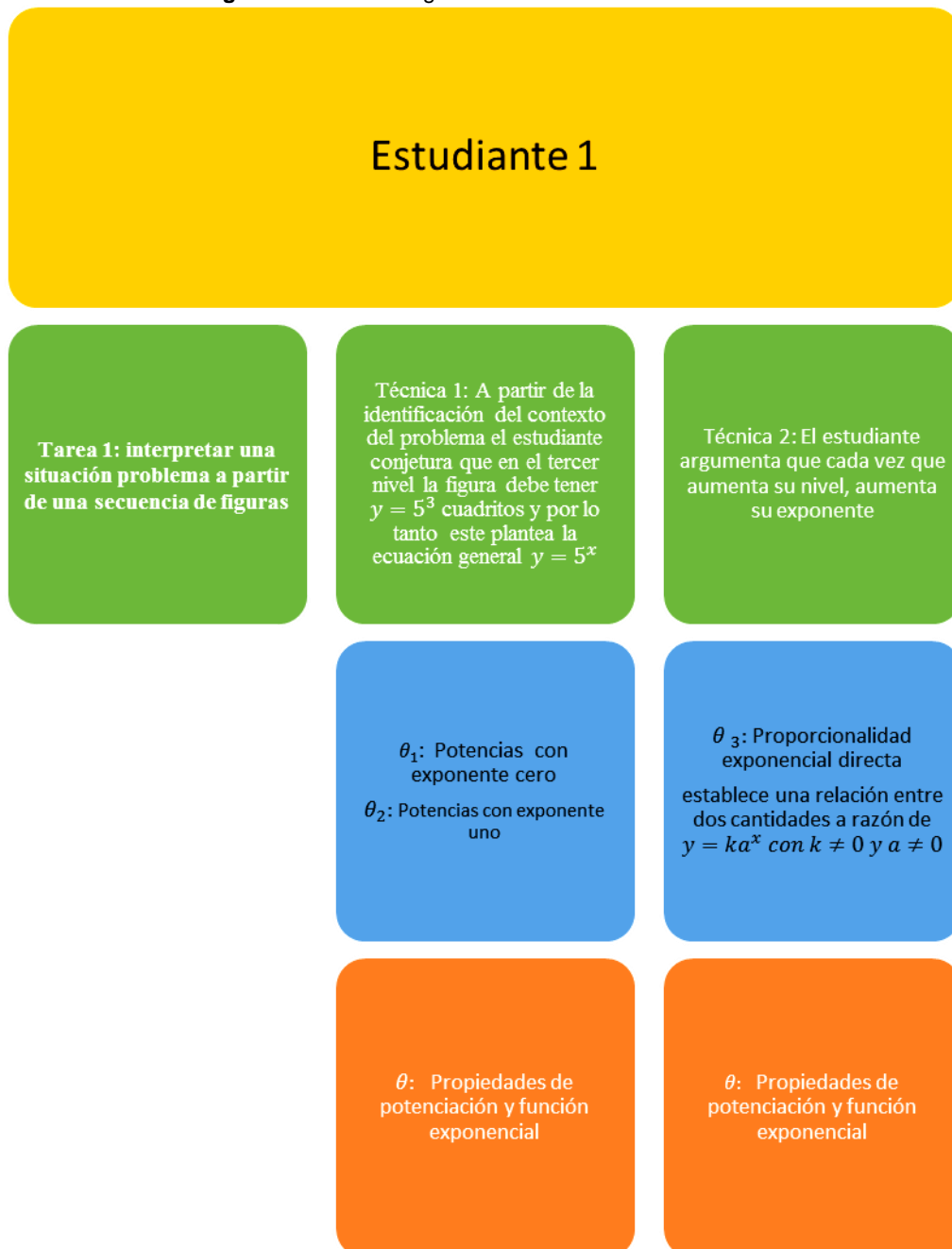


Fuente: datos de pesquisa

Usando las técnicas y tareas tratadas anteriormente, a continuación se muestran en este trabajo las **tecnologías** correspondientes que según la teoría antropológica de lo didáctico tienen un carácter justificativo-explicativo de las técnicas recolectadas en la institución educativa mencionada en este documento.

El Diagrama 15 muestra las tecnologías θ adquiridas a partir de la técnica establecida en el desarrollo del tipo de tarea 1 en el Estudiante 1.

Diagrama 15 - Tecnologías θ de tarea 1 en el Estudiante 1

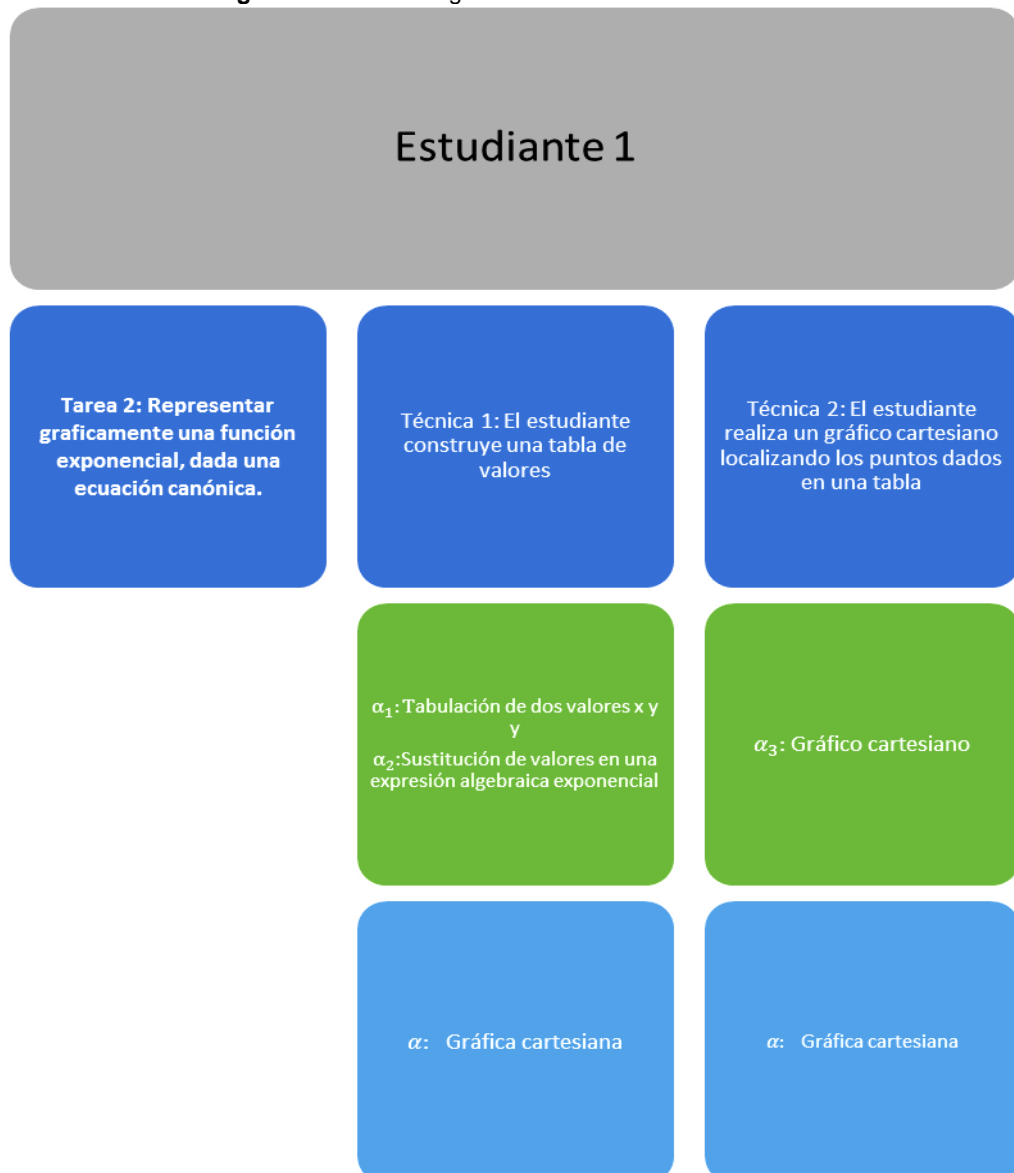


Fuente: datos de pesquisa

El Diagrama 15 muestra que el Estudiante 1, a partir de la tarea 1 llamada, interpretar una situación problema a partir de una secuencia de figuras, obtiene las tecnologías correspondientes que justifican las técnicas utilizadas para dar cabida a esta actividad, la cual establecen el carácter teórico referido a la potenciación y a la definición formal de la función exponencial, como también la proporcionalidad directa exponencial que construye una relación entre dos variables a razón de $y = ka^x$.

El Diagrama 16 muestra las tecnologías α correspondientes a las técnicas identificadas a partir de un tipo de tarea 2 de tipo representativo.

Diagrama 16 - Tecnologías α de tarea 2 en el Estudiante 1

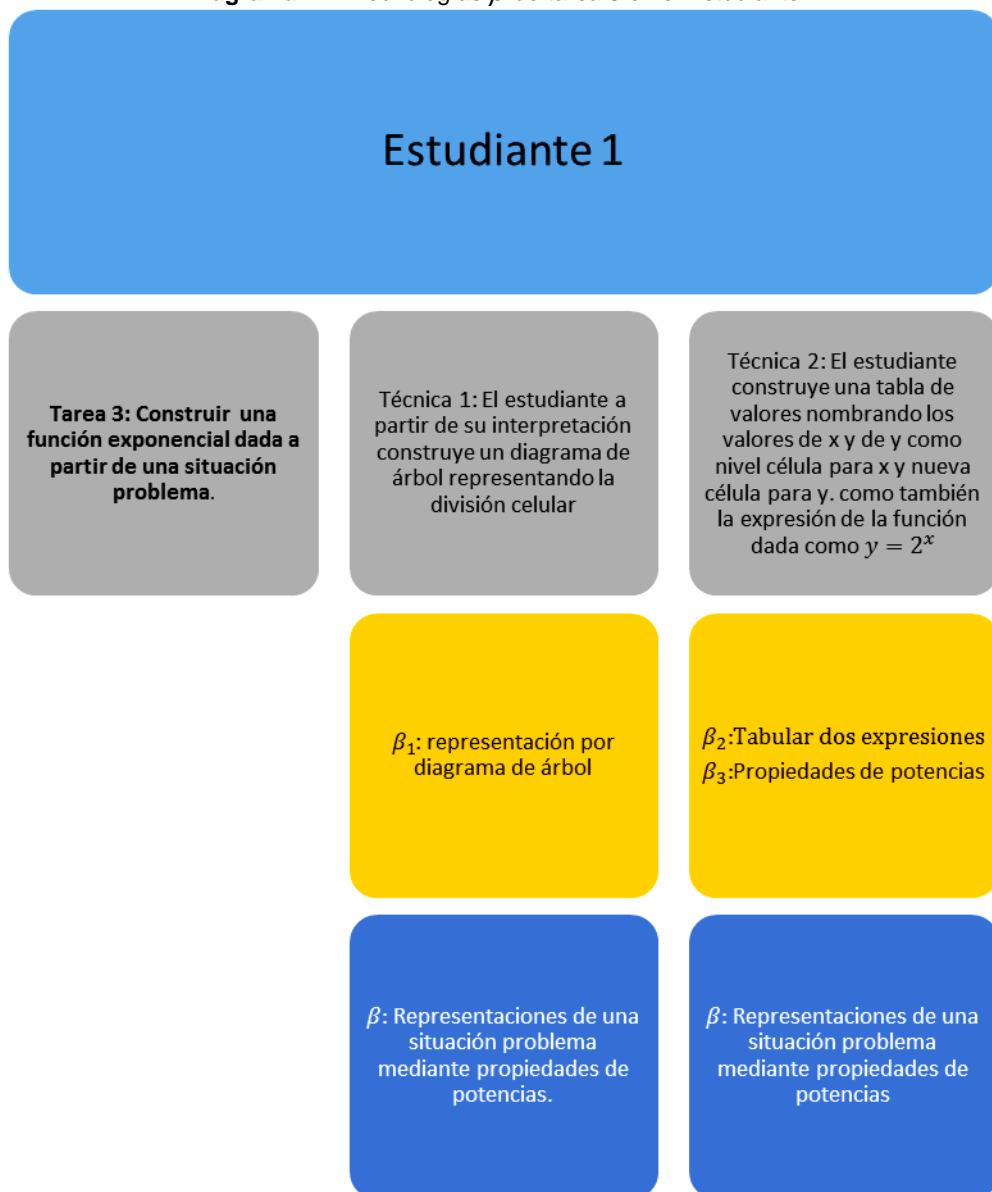


Fuente: datos de pesquisa

El Diagrama 16, indica que el Estudiante 1, a partir de la tarea 2, cuya acción es, representar gráficamente una función exponencial dada una ecuación canónica, alcanza las tecnologías correspondientes que justifican las técnicas utilizadas para dar cabida a esta actividad, que establecen el carácter representativo y gráfico en un plano cartesiano, que conlleva al hecho de elaborar tablas de valores que relacionan dos variables, además de realizar operaciones algebraicas que solucionan esta tarea.

Este Diagrama 17 establece las tecnologías β correspondientes en relación al tipo de tarea 3 de tipo constructivo.

Diagrama 17 - Tecnologías β de tarea 3 en el Estudiante 1

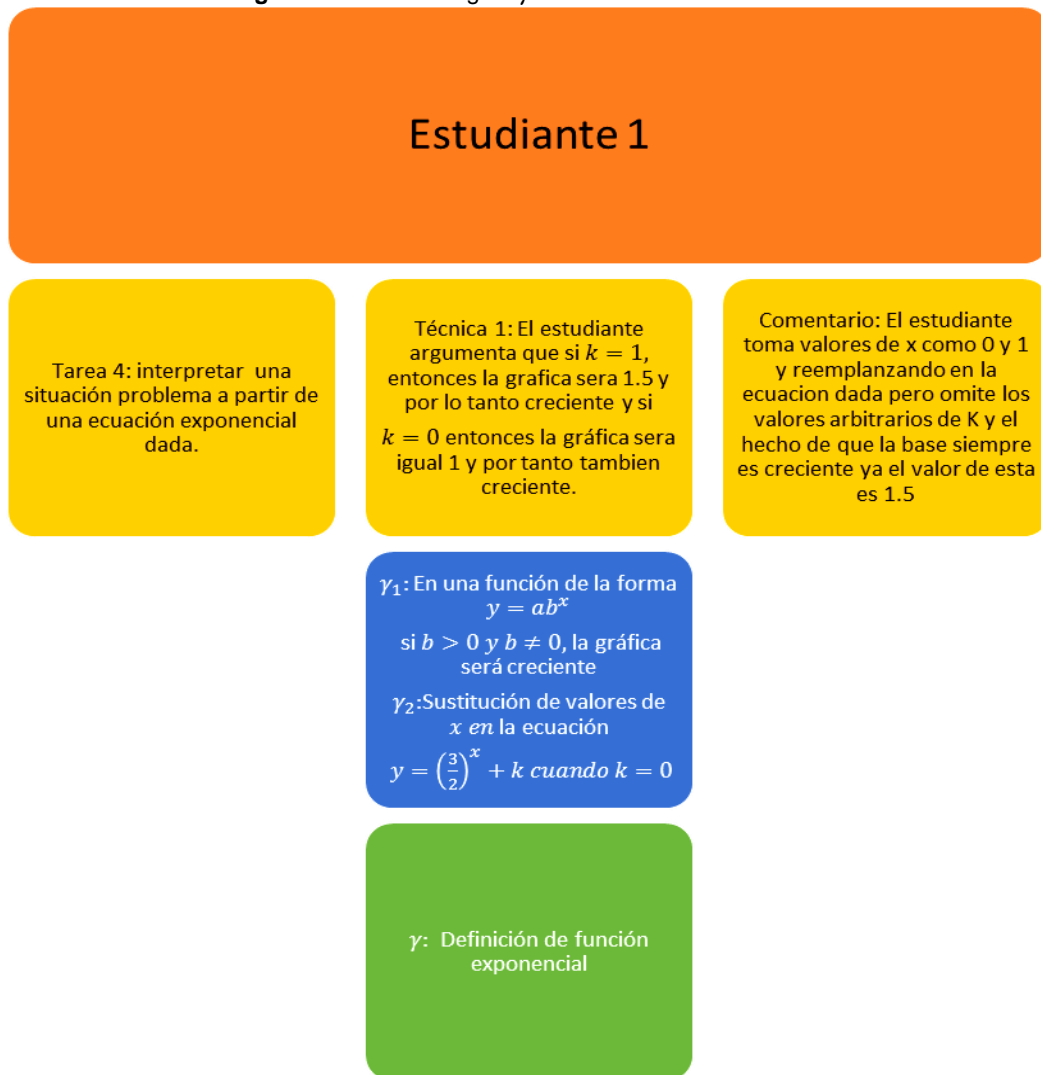


Fuente: datos de pesquisa

El Diagrama 17, muestra que el Estudiante 1, a partir de la tarea 3 llamada, construir una función exponencial dada a partir de una situación problema, logra las tecnologías correspondientes que justifican las técnicas utilizadas por el estudiante que dan resultado a esta actividad, que evidencian el carácter interpretativo de la actividad en donde el Estudiante 1 valida sus hipótesis a partir de diagramas de árbol, que visualizan la división celular, como también mediante el uso de tabla de valores que relacionan dos variables, asimismo de emplear procedimientos con propiedades de potencias.

El siguiente Diagrama 18 establece las tecnologías γ que justifican las correspondientes técnicas utilizadas por el Estudiante 2 en desarrollo de un tipo de tareas.

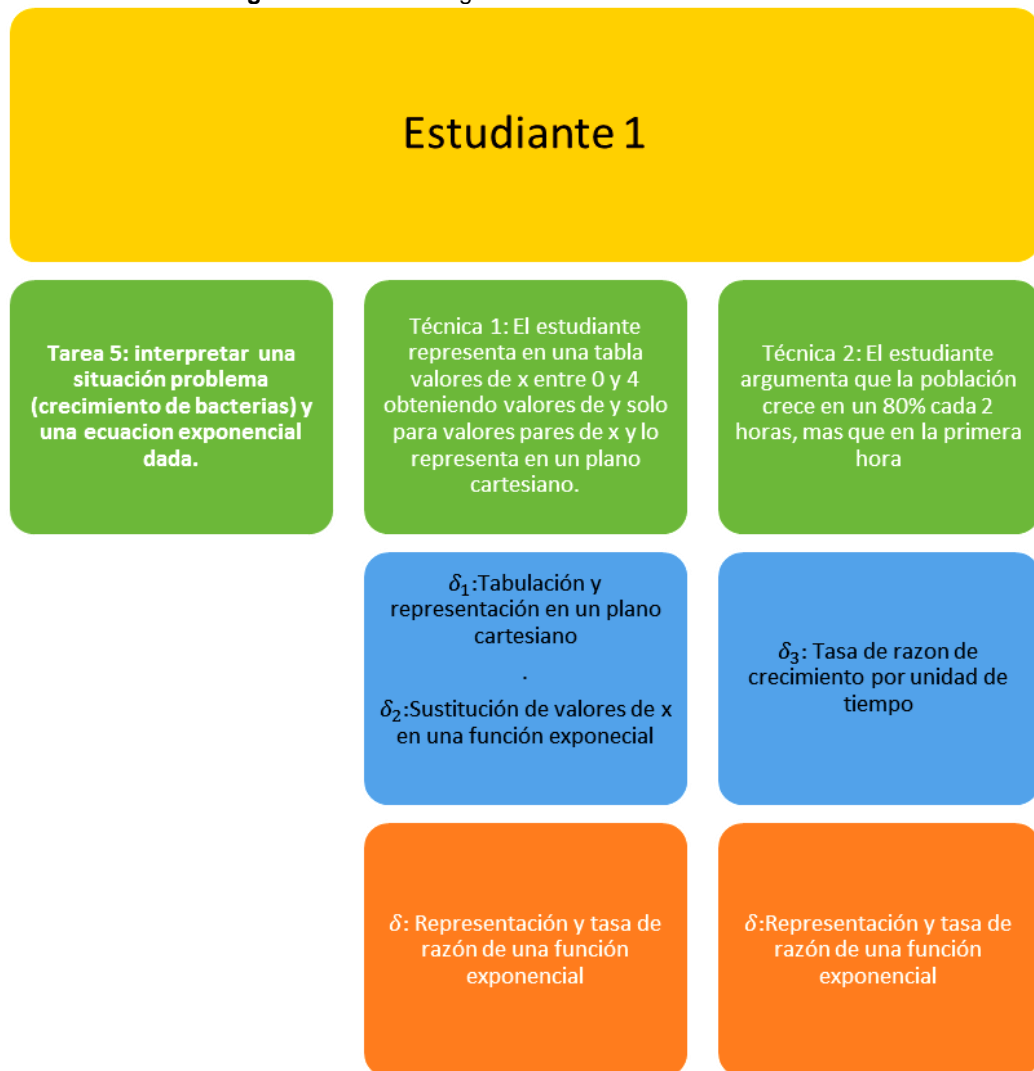
Diagrama 18 - Tecnologías γ de tarea 4 en el Estudiante 1



El diagrama 18, indica que el Estudiante 1, a partir de la tarea 4 cuyo ejercicio es interpretar una situación problema a partir de una ecuación exponencial dada, consigue las tecnologías correspondientes que demuestran las técnicas empleadas para dar cabida a esta actividad, la cual establecen el carácter interpretativo de la actividad justificando la variación de la base en la ecuación canónica exponencial si $b > 1$ y la propiedad creciente en la gráfica de función exponencial, igualmente el Estudiante 1 debe realizar operaciones que conlleven a la obtención de valores o resultados que evidencien puntos sobre el plano cartesiano como también en una tabla de valores.

Este Diagrama muestra las correspondientes tecnologías δ que dan cuenta de las técnicas utilizadas por el Estudiante 1 en desarrollo de un tipo de tarea 5.

Diagrama 19 - Tecnologías δ de tarea 5 en el Estudiante 1

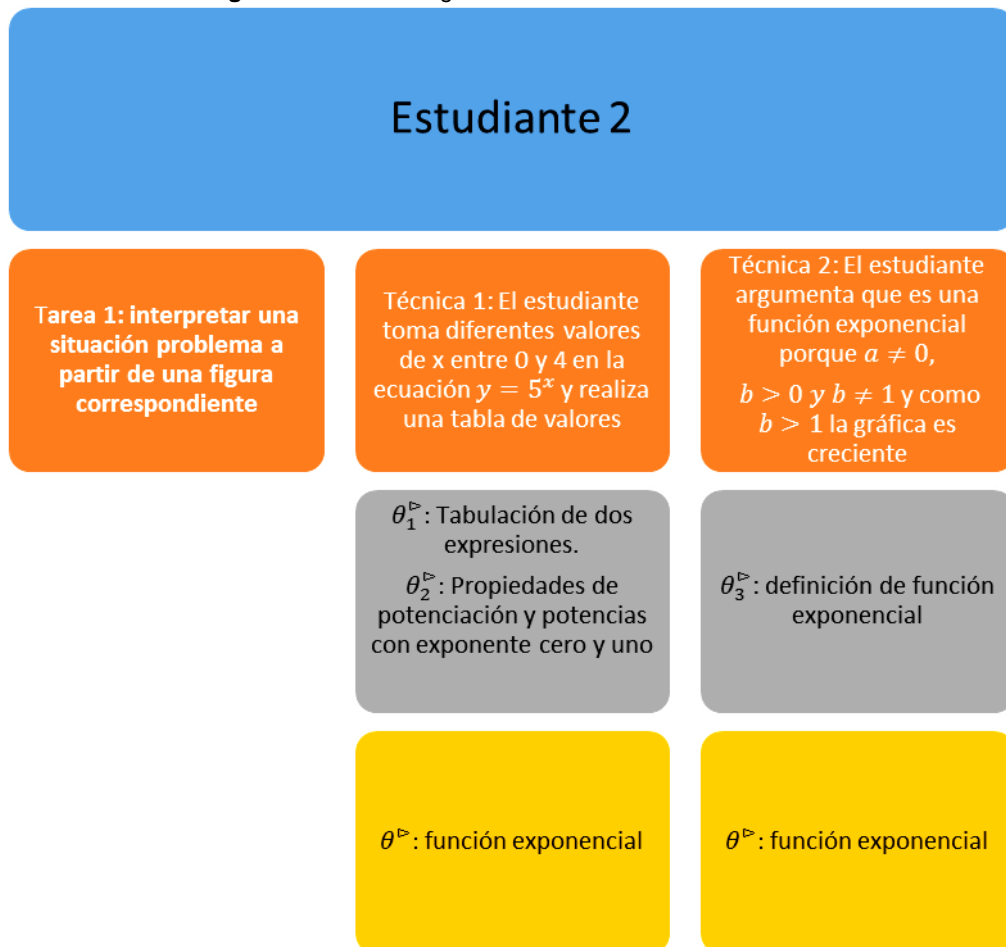


Fuente: datos de pesquisa

El Diagrama 19, muestra que el Estudiante 1, a partir de la tarea 5 llamada, interpretar una situación problema (crecimiento de bacterias) y una ecuación exponencial dada, alcanza las tecnologías correspondientes que justifican las técnicas utilizadas para dar cabida a esta actividad, en la que visualiza los aspectos tecnológicos como la realización de tablas de valores que relacionan dos variables y la construcción de graficas cartesianas, asimismo este estudiante necesita realizar operaciones con números reales que den solución a esta tarea, igualmente el carácter interpretativo de la tarea lleva al estudiante a construir tasas de variación y crecimiento por unidad de tiempo que demuestran las principales características exponenciales de la actividad.

Cambiando hacia el Estudiante 2 formaremos las tecnologías θ^{p} correspondientes a las técnicas utilizadas en desarrollo de un tipo de tareas 1, como se observa en el siguiente Diagrama.

Diagrama 20 - Tecnologías θ^{p} de tarea 1 en el Estudiante 2

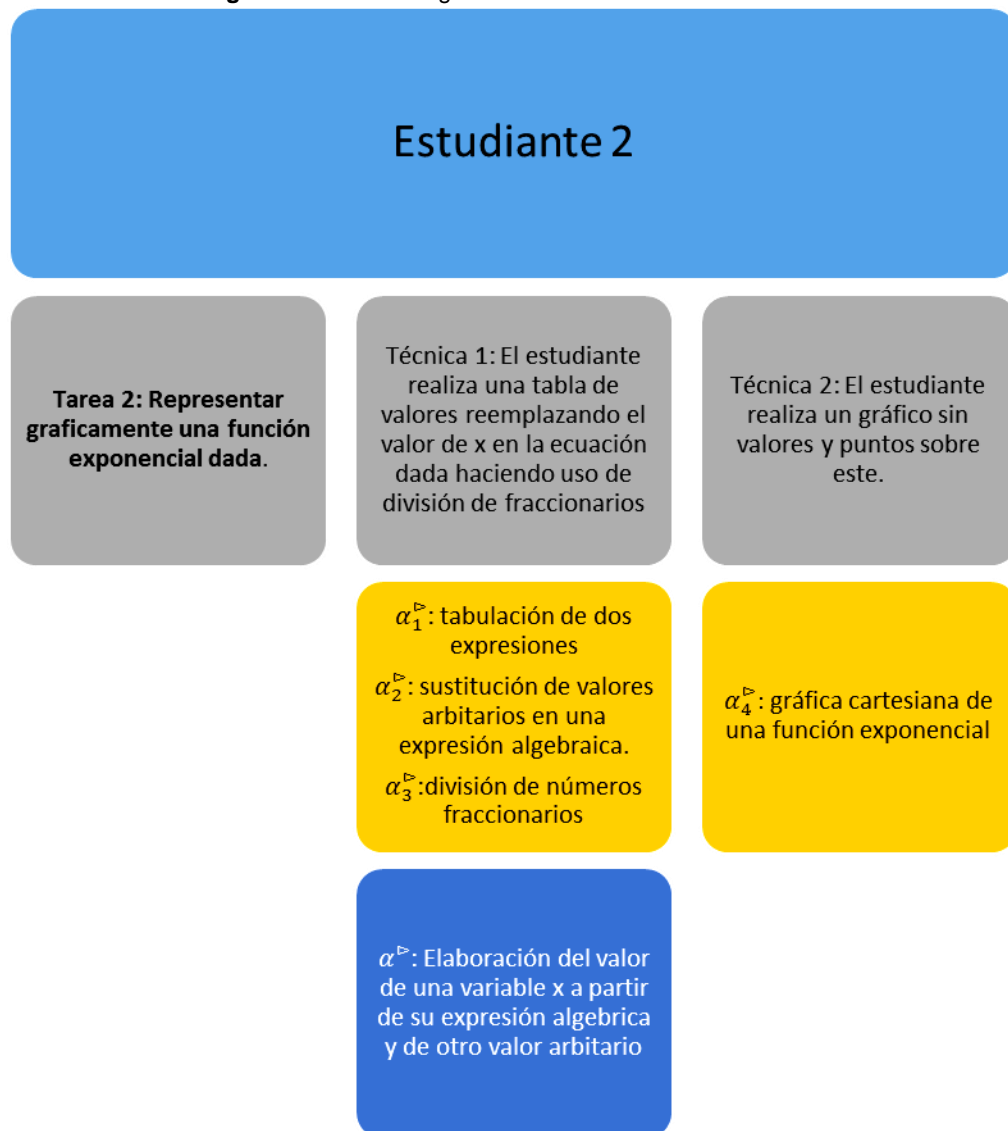


Fuente: datos de pesquisa

El diagrama 20, indica que el Estudiante 2, a partir de la tarea 1 llamada, interpretar una situación problema a partir de una secuencia de figuras, obtiene las tecnologías correspondientes que justifican las técnicas utilizadas para dar cabida a esta actividad, la cual establecen el carácter teórico e interpretativo concerniente a las propiedades de potenciación y a las potencias de grado cero y de grado uno, asimismo, el estudiante alcanza la definición formal de la función exponencial y el uso de tabla de valores con el fin de conjeturar y validar la posible ecuación canónica exponencial.

El Diagrama 21 muestra las tecnologías α^{\triangleright} formadas en razón a las técnicas utilizadas por el Estudiante 2.

Diagrama 21 - Tecnologías α^{\triangleright} de tarea 2 en el Estudiante 2

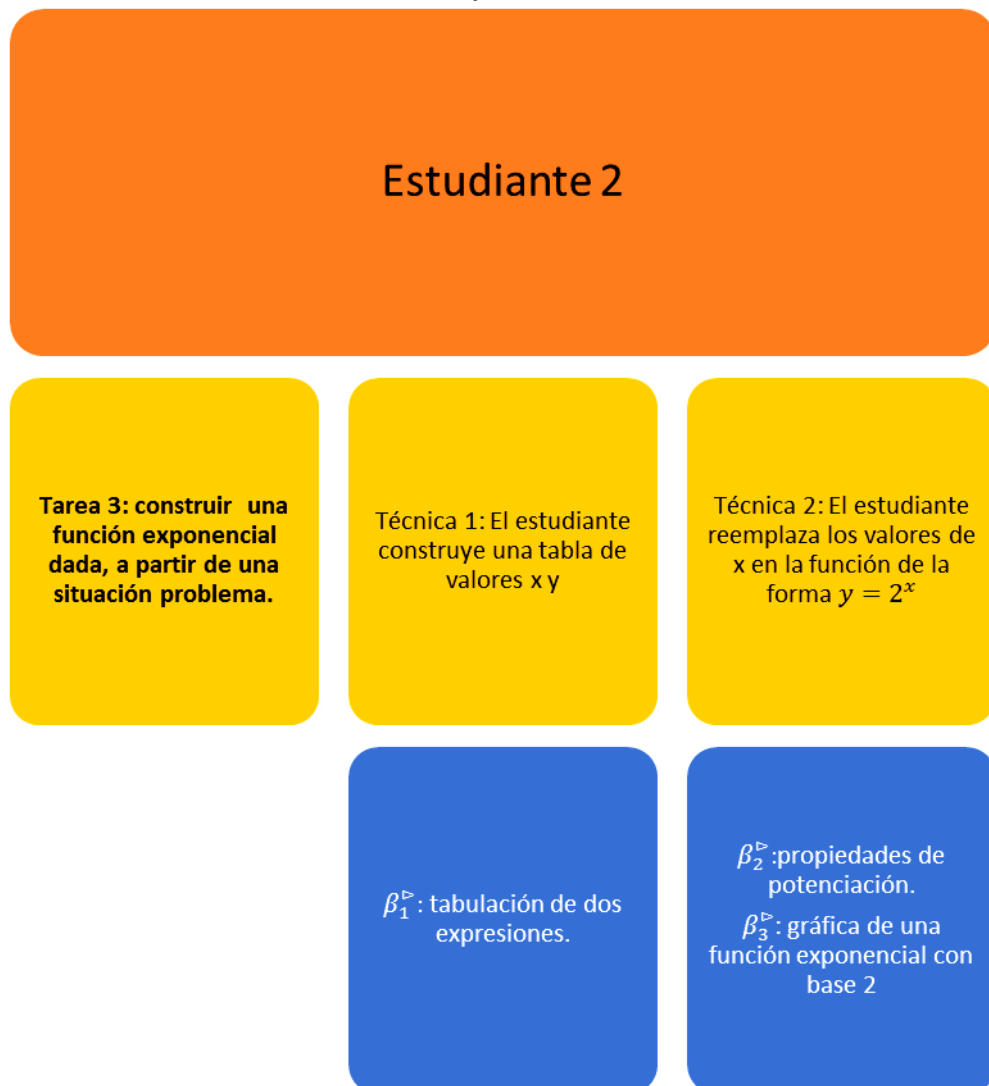


Fuente: datos de pesquisa

El diagrama 21, indica que el Estudiante 2, a partir de la tarea 2 llamada, representar gráficamente una función exponencial dada, obtiene las tecnologías correspondientes que justifican las técnicas utilizadas para dar cabida a esta actividad, la cual establecen el carácter teórico e interpretativo concerniente a las propiedades de potenciación y a las potencias de grado cero y de grado uno, asimismo, el estudiante alcanza la definición formal de la función exponencial y el uso de tabla de valores con el fin de conjeturar y validar la posible ecuación canónica exponencial.

En el Diagrama 22 se forman las tecnologías β^{\triangleright} correspondientes que tienen un carácter justificativo de las técnicas usadas por el Estudiante 2 en desarrollo de un tipo de tareas 3.

Diagrama 22 - Tecnologías β^{\triangleright} de tarea 3 en el Estudiante 2

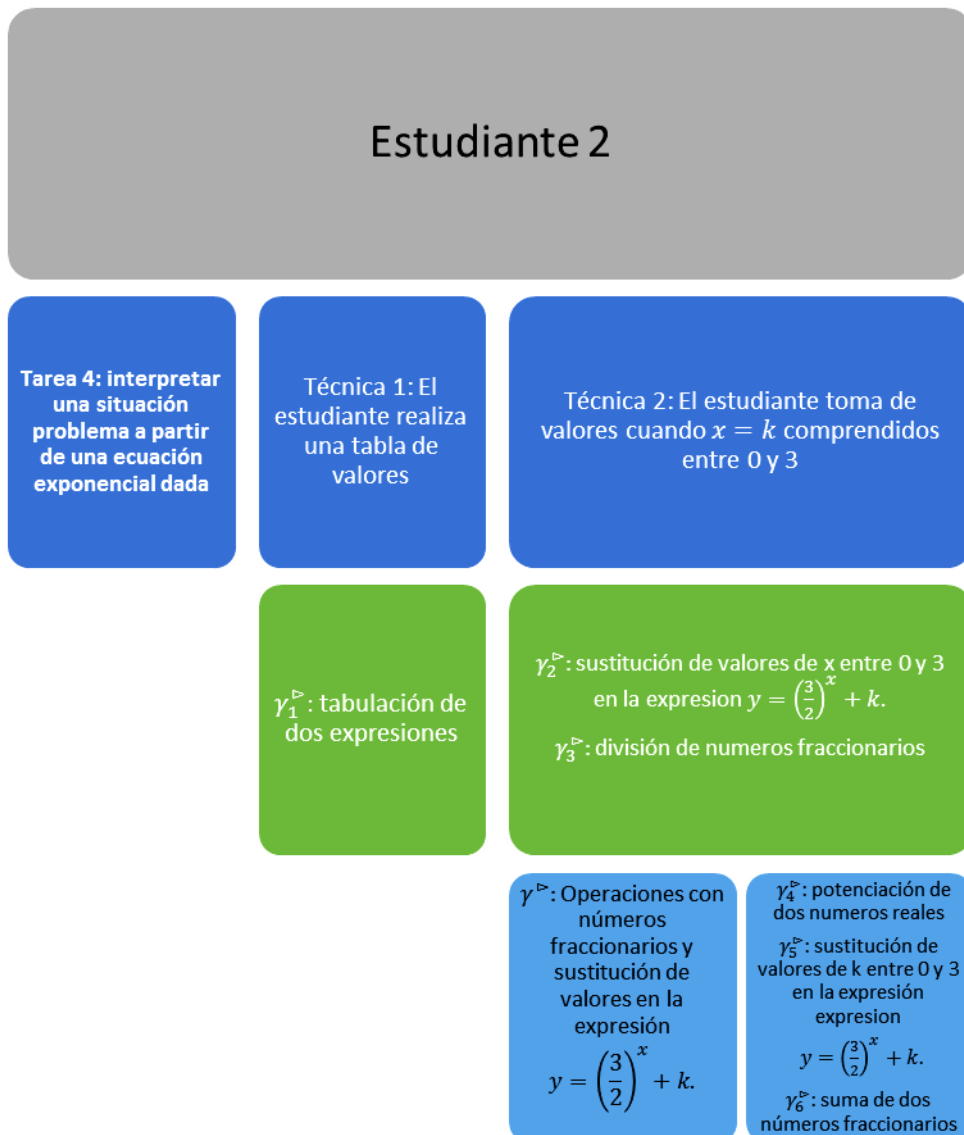


Fuente: datos de pesquisa

El Diagrama 22, indica que el Estudiante 2, a partir de la tarea 3 cuya acción es construir una función exponencial dada a partir de una situación, consigue las tecnologías correspondientes que justifican las técnicas utilizadas para dar cabida a esta actividad 3, que establece el uso de tablas de valores que relacionan dos variables que ayudaran a la construcción de gráficos cartesianos con el fin de visualizar la gráfica de la función exponencial y su carácter creciente, además de usar y tener en cuenta propiedades de potenciación que darán cuenta de los resultados obtenidos en la tabla.

En el Diagrama 23 se observan las tecnologías γ^{\triangleright} propiciadas por las técnicas utilizadas en recurso a la interpretación de una situación problema.

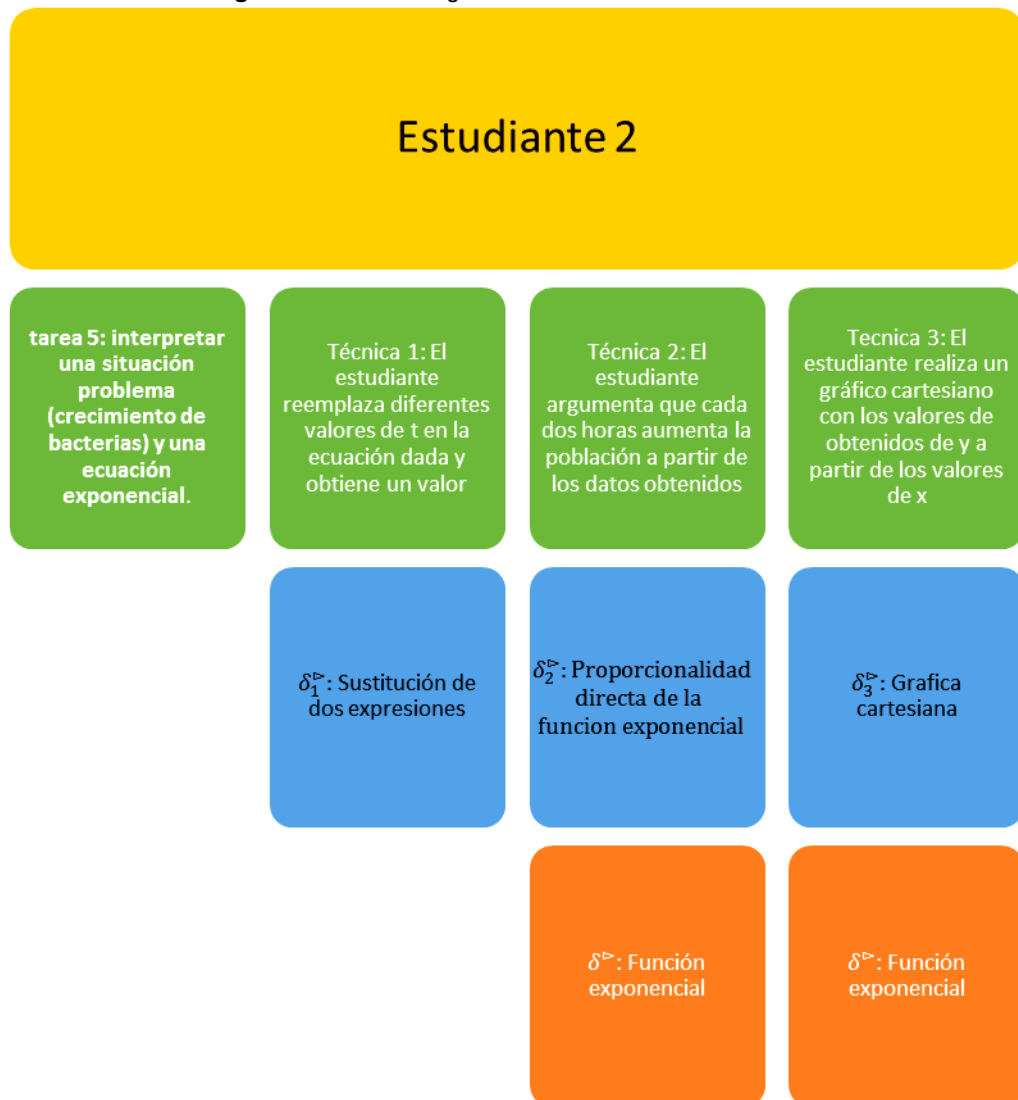
Diagrama 23 - Tecnologías γ^{\triangleright} de tarea 4 en el Estudiante 2



El Diagrama 23, indica que el Estudiante 2, a partir de la tarea 4 cuya acción es interpretar una situación problema a partir de una ecuación exponencial dada, establece las tecnologías correspondientes que justifican las técnicas utilizadas para dar cabida a esta actividad 4, en la que justifica las diferentes maneras de realizar operaciones como lo es la suma, la división entre números fraccionarios con el fin de obtener un resultado que permita la visualización en otro plano representativo como una tabla de valores, además de realizar sustituciones y tener en cuenta el carácter independiente y dependiente de las variables X y Y respectivamente.

En el Diagrama 24 se establecen las tecnologías δ^{\triangleright} que dan cuenta de las técnicas manejadas por el Estudiante 2 en desarrollo de la tarea 5.

Diagrama 24 - Tecnologías δ^{\triangleright} de tarea 5 en el Estudiante 2

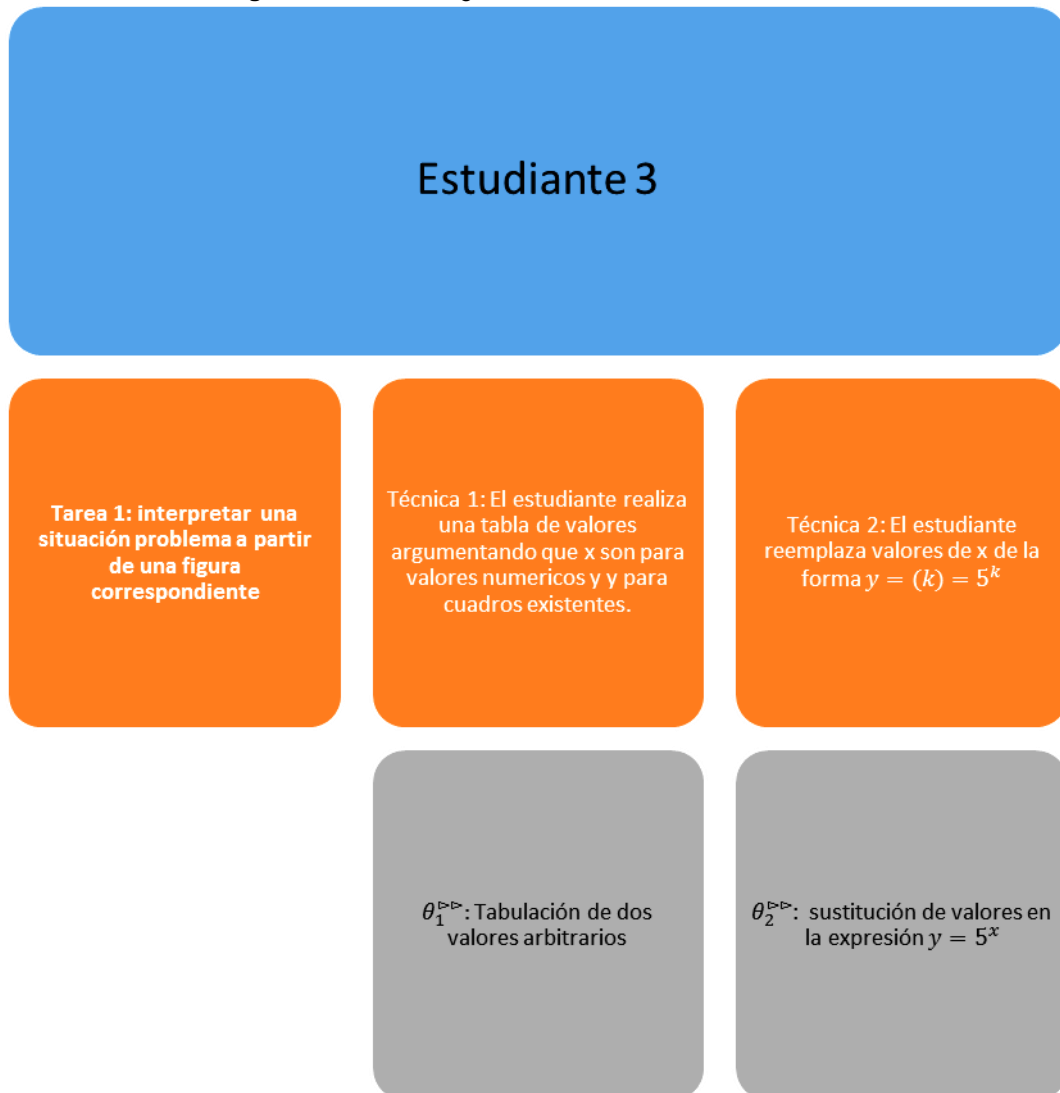


Fuente: datos de pesquisa

El Diagrama 24, indica que el Estudiante 2, a partir de la tarea 5 cuya acción es interpretar una situación problema (crecimiento de bacterias) y una ecuación exponencial dada, establece las tecnologías correspondientes que justifican las técnicas utilizadas para dar cabida a esta actividad 5, en la que justifica el uso proporcional de la función exponencial, además de sustituir valores en la ecuación exponencial dada con el fin de realizar un gráfico cartesiano que relaciona dos variables.

Por último se obtienen las tecnologías $\theta^{p>}$ correspondientes a las técnicas utilizadas por el Estudiante 3 en desarrollo de unas actividades como es el caso del siguiente esquema donde se involucra la tarea 1.

Diagrama 25 - Tecnologías $\theta^{p>}$ de tarea 1 en el Estudiante 3

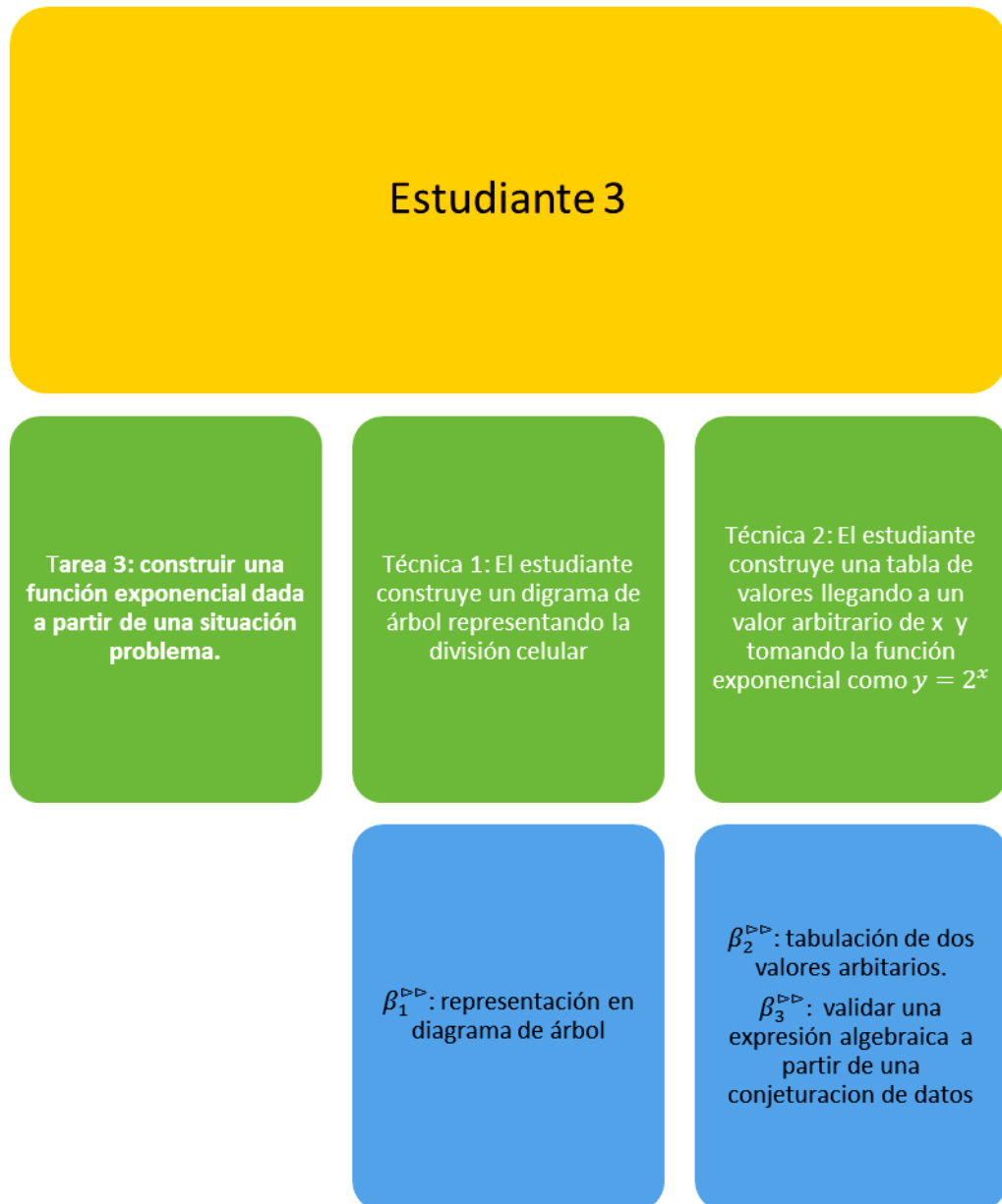


Fuente: datos de pesquisa

El Diagrama 25, indica que el Estudiante 3, a partir de la tarea 1 llamada interpretar una situación problema a partir de una secuencia de figuras, establece las tecnologías correspondientes que justifican las técnicas utilizadas para dar cabida a esta actividad 1, que muestra el uso de tabla de valores además de la sustitución de valores arbitrarios en una ecuación canónica exponencial.

Siguiendo con la misma metodología de identificación de técnicas, se establecen las tecnologías $\beta^{\triangleright\triangleright}$ para la tarea 3 observada en el siguiente Diagrama 26.

Diagrama 26 - Tecnologías $\beta^{\triangleright\triangleright}$ de tarea 3 en el Estudiante 3

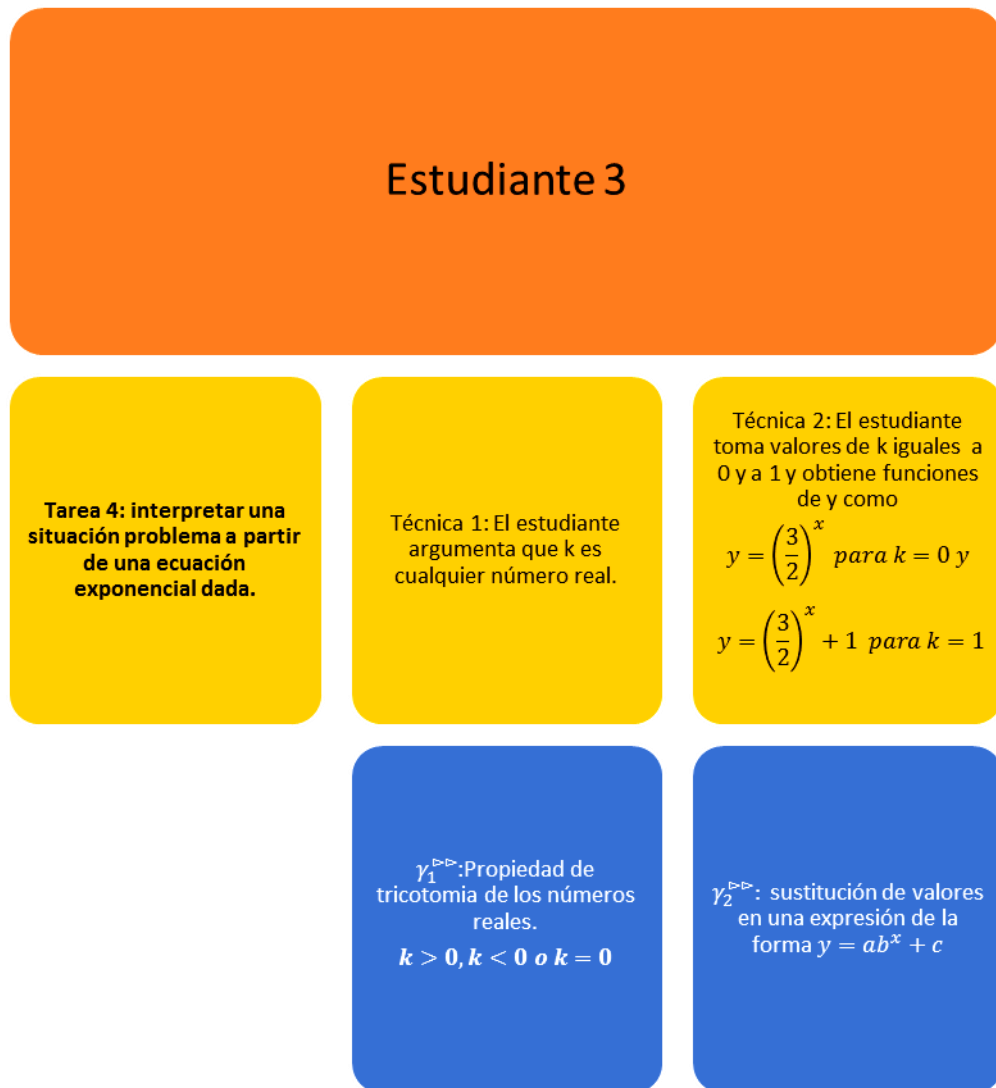


Fuente: datos de pesquisa

El Diagrama 26, muestra que el Estudiante 3, a partir de la tarea 3 llamada construir una función exponencial dada a partir de una situación problema, establece las tecnologías correspondientes que justifican las técnicas utilizadas para dar cabida a esta actividad 3, que muestra la acción de realizar diagramas representativos que indiquen el carácter divisorio de la célula y su correspondiente nivel de secuencia, además de validar la hipótesis de este estudiante, mediante el uso de operaciones que involucren números reales y su adecuada gráfica exponencial y su tabla de valores arbitrarios.

Para la tarea 4 se muestran las diferentes tecnologías $\gamma^{\triangleright\triangleright}$ de carácter justificativo en relación a las técnicas empleadas por el Estudiante 3.

Diagrama 27: -Tecnologías $\gamma^{\triangleright\triangleright}$ de tarea 4 en el Estudiante 3

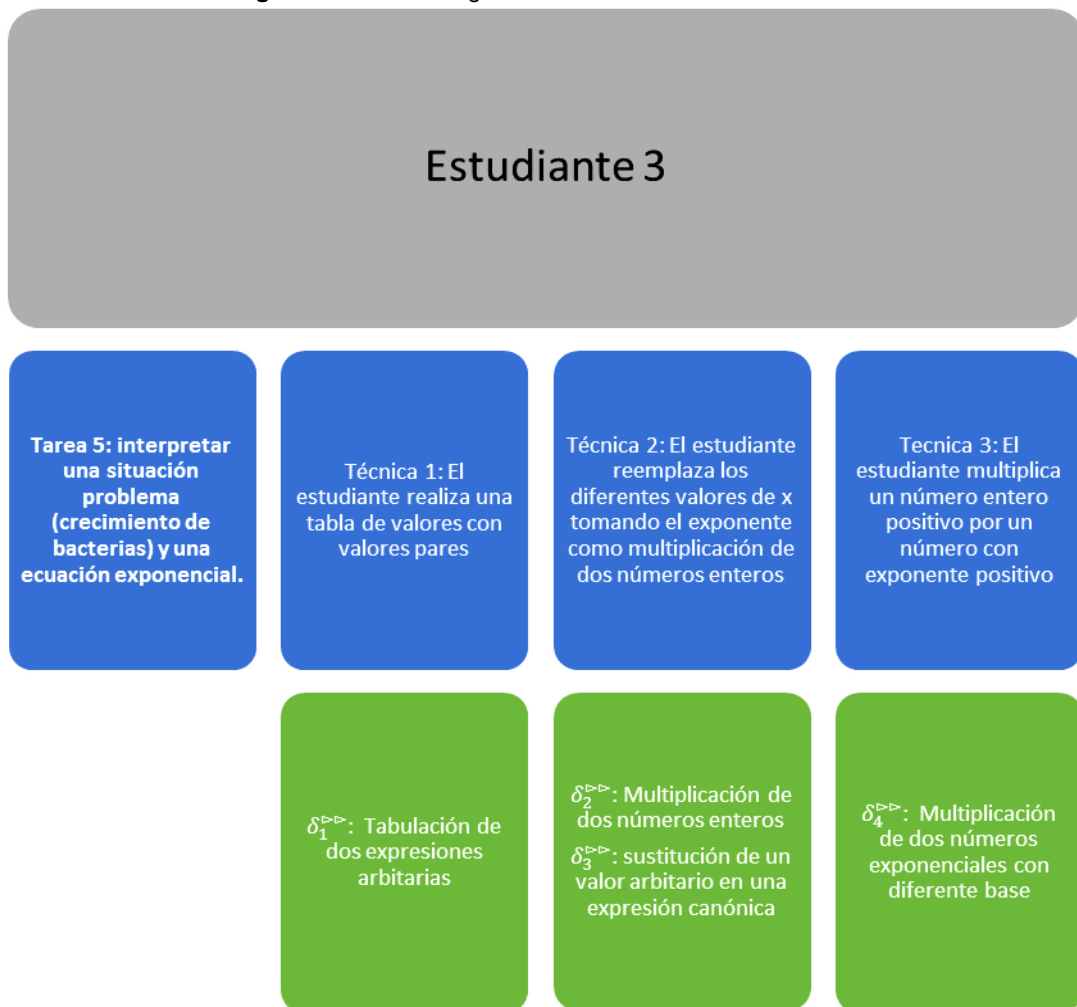


Fuente: datos de pesquisa

El Diagrama 27, indica que el Estudiante 3, a partir de la tarea 4 cuya acción es interpretar una situación problema a partir de una ecuación exponencial dada, establece las tecnologías correspondientes que justifican las técnicas utilizadas para dar cabida a esta actividad 4, que enseña el uso conjetural del estudiante en las diferentes variables involucradas para esta labor, como es el caso de la variable y el uso de la ley de tricotomía de los números que establece el carácter ordenativo de este número k , además de sustituir y conjeturar dos tipos de expresiones canónicas que permiten obtener dos formas y gráficas diferentes de la función exponencial con base creciente.

Para el último Diagrama 28 se observan las correspondientes tecnologías δ^{\triangleright} de carácter justificativo que dan cuenta de las técnicas utilizadas por el Estudiante 3 en desarrollo del tipo de tarea 5.

Diagrama 28 - Tecnologías δ^{\triangleright} de tarea 5 en el Estudiante 3



Fuente: datos de pesquisa

El Diagrama 28, indica que el Estudiante 3, a partir de la tarea 5 cuya acción es interpretar una situación problema (crecimiento de bacterias) y una ecuación exponencial dada, establece las tecnologías correspondientes que justifican las técnicas utilizadas para dar cabida a esta actividad 5, que señala el hecho de construir tablas o gráficos cartesianos con la ayuda del establecimiento de operaciones entre números fraccionarios y de números con la particularidad de tener potencias enteras positivas con diferente base.

A continuación daremos un resumen de tecnologías asociadas al tipo de tareas 1 y sus correspondientes técnicas el en Cuadro 6.

Cuadro 6 - Tarea 1

TAREA 1: interpretar una situación problema a partir de una figura correspondiente	TÉCNICA	TECNOLOGÍA
ESTUDIANTE 1	<p>Técnica 1: A partir de la identificación del contexto del problema el estudiante conjetura que en el tercer nivel la figura debe tener $y = 5^3$ cuadritos y por lo tanto este plantea la ecuación general $y = 5^x$</p> <p>Técnica 2: El estudiante argumenta que cada vez que aumenta su nivel, aumenta su exponente</p>	<p>θ_1: potencias con exponente cero $5^0 = 1$</p> <p>θ_2: potencias con exponente 1 $5^1 = 5$</p> <p>θ_3: proporcionalidad exponencial directa establece una relación entre dos cantidades a razón de $y = ka^x$ con $k \neq 0$ y $a \neq 0$</p> <p>θ: Propiedades de potenciación y función exponencial</p>
ESTUDIANTE 2	<p>Técnica 1: El estudiante toma diferentes valores de x entre 0 y 4 en la ecuación $y = 5^x$ y realiza una tabla de valores</p> <p>Técnica 2: El estudiante argumenta que es una función exponencial porque $a \neq 0, b > 0$ y $b \neq 1$ y como $b > 1$ la gráfica es creciente</p>	<p>$\theta_1^>$: Tabulación de dos expresiones.</p> <p>$\theta_2^>$: Propiedades de potenciación y potencias con exponente cero y uno</p> <p>$\theta_3^>$: definición de función exponencial</p> <p>$\theta^>$: función exponencial</p>
ESTUDIANTE 3	<p>Técnica 1: El estudiante realiza una tabla de valores argumentando que x son para valores numéricos y y para cuadros existentes.</p> <p>Técnica 2: El estudiante reemplaza valores de x de la forma $y = (k) = 5^k$</p>	<p>$\theta_1^>>$: Tabulación de dos valores arbitrarios</p> <p>$\theta_2^>>$: sustitución de valores en la expresión $y = 5^x$</p>

Fuente: datos de pesquisa

El Cuadro 7 de tecnologías asociadas al tipo de tareas 2 y sus correspondientes técnicas.

Cuadro 7 - Tarea 2

TAREA 2: Representar gráficamente una función exponencial, dada una ecuación canónica.	TÉCNICA	TECNOLOGÍA
ESTUDIANTE 1	<p>Técnica 1: El estudiante construye una tabla de valores</p> <p>Técnica 2: El estudiante realiza un gráfico cartesiano localizando los puntos dados en una tabla</p>	<p>α_1: tabulación de dos valores x y y</p> <p>α_2: Sustitución de valores en una expresión algebraica exponencial</p> <p>α_3: Grafico cartesiano</p> <p>α: Gráfica cartesiana</p>
ESTUDIANTE 2	<p>Técnica 1: El estudiante realiza una tabla de valores reemplazando el valor de x en la ecuación dada haciendo uso de división de fraccionarios.</p> <p>Técnica 2: El estudiante realiza un grafico sim valores y puntos sobre este</p>	<p>α_1^b: tabulación de dos expresiones</p> <p>α_2^b: Sustitución de valores arbitrarios en una expresión algebraica.</p> <p>α_3^b: división de números fraccionarios</p> <p>α_4^b: gráfica cartesiana de una función exponencial</p> <p>α^b: Elaboración del valor de una variable y a partir de su expresión algébrica y de otro valor arbitrario</p>
ESTUDIANTE 3	No realizada	No realizada

Fuente: datos de pesquisa

El Cuadro 8 de tecnologías asociadas al tipo de tareas 3 y sus correspondientes técnicas.

Cuadro 8: Tarea 3

TAREA 3: Construir una función exponencial dada partir de una situación problema	TÉCNICA	TECNOLOGÍA
ESTUDIANTE 1	<p>Técnica 1: El estudiante a partir de su interpretación construye un Diagrama de árbol representando la división celular</p> <p>Técnica 2: El estudiante construye una tabla de valores nombrando los valores de x y de y como nivel célula para x y nueva célula para y. como obteniendo la expresión de la función dada como $y = 2^x$</p>	<p>β_1: representación por Diagrama de árbol</p> <p>β_2: tabulación de dos expresiones x y y</p> <p>β_3: propiedades de potencias</p> <p>β: Representaciones de una situación problema mediante propiedades de potencias.</p>
ESTUDIANTE 2	<p>Técnica 1: El estudiante construye una tabla de valores x y</p> <p>Técnica 2: El estudiante reemplaza los valores de x en la función de la forma $y = 2^x$</p>	<p>β_1: tabulación de dos expresiones</p> <p>β_2: propiedades de potenciación.</p> <p>β_3: gráfica de una función exponencial con base 2</p>
ESTUDIANTE 3	<p>Técnica 1: El estudiante construye un Diagrama de árbol representando la división celular</p> <p>Técnica 2: El estudiante construye una tabla de valores llegando a un valor arbitrario de x y tomando la función exponencial como $y = 2^x$</p>	<p>β_1: representación en Diagrama de árbol</p> <p>β_2: Tabulación de dos valores arbitrarios.</p> <p>β_3: validar una expresión algebraica a partir de una conjeturación de datos</p>

Fuente: datos de pesquisa

El Cuadro 9 de tecnologías asociadas al tipo de tareas 4 y sus correspondientes técnicas.

Cuadro 9 - Tarea 4

TAREA 4: interpretar una situación problema a partir de una ecuación exponencial dada	TÉCNICA	TECNOLOGÍA
ESTUDIANTE 1	<p>Técnica 1: El estudiante argumenta que si $k = 1$, entonces la grafica será 1.5 y por lo tanto creciente y si $k = 0$ entonces la gráfica será igual 1 y por tanto también creciente.</p>	<p>γ_1: En una función de la forma $y = ab^x$ si $b > 0$ y $b \neq 0$,. La gráfica será creciente γ_2: Sustitución de valores de x en la ecuación $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x + k$ cuando $k = 0$ γ: definición de función exponencial</p>
ESTUDIANTE 2	<p>Técnica 1: El estudiante realiza una tabla de valores Técnica 2: El estudiante toma de valores cuando $x = k$ comprendidos entre 0 y 3</p>	<p>γ_1^{a}: tabulación de dos expresiones γ_2^{a}: sustitución de valores de x entre 0 y 3 en la expresión $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x + k$. γ_3^{a}: división de números fraccionario γ_4^{a}: potenciación de dos números reales γ_5^{a}: sustitución de valores de k entre 0 y 3 en la expresión $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x + k$. γ_6^{a}: suma de dos números fraccionarios γ^{a}: Operaciones con números fraccionarios y sustitución de valores en la expresión $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x + k$.</p>
ESTUDIANTE 3	<p>Técnica 1: El estudiante argumenta que k es cualquier número real. Técnica 2: El estudiante toma valores de k iguales a 0 y a 1 y obtiene funciones de y como $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ para $k = 0$ y $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x + 1$ para $k = 1$</p>	<p>γ_1^{a}: Propiedad de tricotomía de los números reales. γ_2^{a}: sustitución de valores en una expresión de la forma $y = ab^x + c$</p>

Fuente: datos de pesquisa

El Cuadro 10 de tecnologías asociadas al tipo de tareas 5 y sus correspondientes técnicas.

Cuadro 10: Tarea 5

TAREA 5: interpretar una situación problema (crecimiento de bacterias) y una ecuación exponencial dada.	TÉCNICA	TECNOLOGÍA
ESTUDIANTE 1	<p>Técnica 1: El estudiante representa en una tabla valores de x entre 0 y 4 obteniendo valores de y solo para valores pares de x y presenta un plano cartesiano.</p> <p>Técnica 2: El estudiante argumenta que la población crece en un 80% cada 2 horas, más que en la primera hora</p>	<p>δ_1: Tabulación y representación en un plano cartesiano</p> <p>δ_2: sustitución de valores de x en una función exponencial</p> <p>δ_3: tasa de razón de crecimiento por unidad de tiempo</p> <p>δ: representación y tasa de razón de una función exponencial</p>
ESTUDIANTE 2	<p>Técnica 1: El estudiante reemplaza diferentes valores de t en la ecuación dada y obtiene un valor</p> <p>Técnica 2: El estudiante argumenta que cada dos horas aumenta la población a partir de los datos obtenidos</p> <p>Técnica 3: El estudiante realiza un gráfico cartesiano con los valores de obtenidos de y a partir de los valores de x</p>	<p>δ_1^p: sustitución de dos expresiones</p> <p>δ_2^p: proporcionalidad directa de la función exponencial</p> <p>δ_3^p: gráfica cartesiana</p> <p>δ^p: Función exponencial</p>
ESTUDIANTE 3	<p>Técnica 1: El estudiante realiza una tabla de valores con valores pares</p> <p>Técnica 2: El estudiante reemplaza los diferentes valores de x tomando el exponente como multiplicación de dos números enteros</p> <p>Técnica 3: El estudiante multiplica un número entero positivo por un número con exponente positivo</p>	<p>δ_1^{pp}: Tabulación de dos expresiones arbitrarias</p> <p>δ_2^{pp}: Multiplicación de dos números enteros</p> <p>δ_3^{pp}: sustitución de un valor arbitrario en una expresión canónica</p> <p>δ_4^{pp}: Multiplicación de dos números exponenciales con diferente base</p>

Fuente: datos de pesquisa

La **teoría** es llamada, tecnología de la tecnología y según Chevallard (1999) “la teoría es el nivel superior de justificación-explicación-producción y no siempre se presenta en una actividad”.

Consideramos presencia de teoría en los ejercicios cuando un sujeto es capaz de identificar y generalizar situaciones ya vividas y tiene un accionar en el momento de utilizar los conceptos matemáticos en su diario vivir.

A pesar de que en esta investigación no existió presencia de teorías, según lo mencionado anteriormente, es conveniente sobresaltar e identificar aspectos

matemáticos relevantes que usaron los estudiantes a la hora de dar cabida a las actividades, y que evidencia la concatenación existente entre conceptos matemáticos que curricularmente o en un salón de clases, se muestran como independientes.

La notación empleada en seguida, esta dada como $\Theta_{\text{tarea } a \text{ tecnología } b}$ es decir, la teoría relacionada con la *tarea a* según la *tecnología b*.

Θ_{E_1, θ_1} : La potencia de cualquier número natural, no nulo, elevado a un exponente cero es igual a uno $a^0 = 1 \forall a \neq 0$.

Θ_{E_1, θ_2} : La potencia de cualquier número natural elevado al exponente uno da como resultado el mismo número (la base) $a^1 = a \forall a \neq 0$

Θ_{E_1, θ_3} : $\forall a, n \in \mathbb{N}$ el producto n veces el factor a se denomina potenciación y se simboliza de la siguiente forma:

$$a^n = a.a.a.a.a \dots a \text{ con } n \geq 2$$

a Recibe el nombre de base de la potencia

n Se llama exponente

La siguiente notación es empleada para diferenciar las teorías de la teoría A con la teoría B. es decir:

$\Theta_{\text{tarea } a \text{ tecnología } b}^A$: *teoría A relacionada con la tarea a según la tecnología b*

$\Theta_{\text{tarea } a \text{ tecnología } b}^B$: *teoría B relacionada con la tarea a según la tecnología b*

Θ_{E_1, θ_3}^A : Una variable y es proporcionalmente exponencial a una variable x , si y es directamente proporcional a la función exponencial de x , esto es si existen constantes k y a diferentes de cero tal que: $y = ka^x$

Θ_{E_1, θ_3}^B : Para cualquier par de números x y y , una y solo una de las siguientes proposiciones es verdadera: $x < y$ ó $x > y$ ó $x = y$

4.2 MARCOS INTERPRETATIVOS

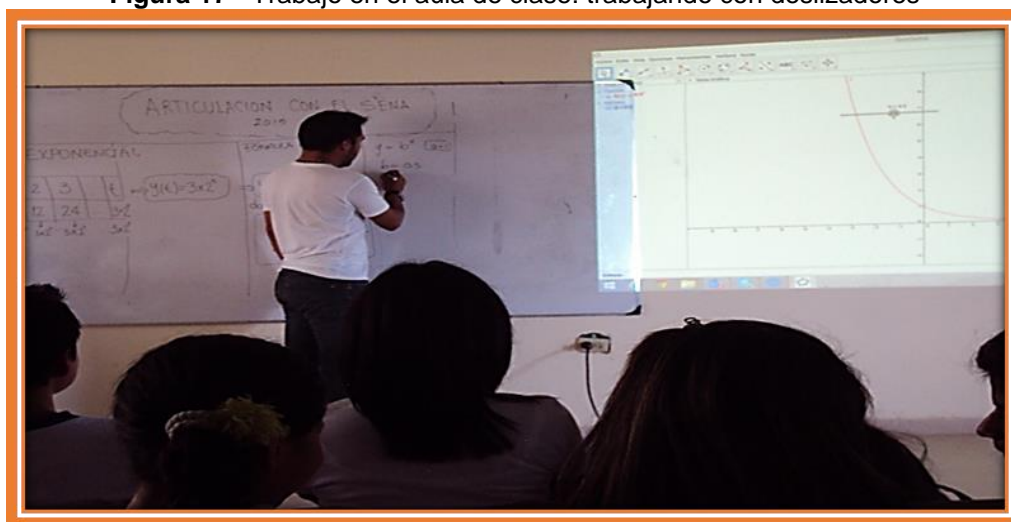
Retomando la praxis, la implementación de las clases y la experiencia en docencia del autor de este trabajo, las clases fueron impartidas en una sala de computación debido a la eficacia lograda en docencia en grupos escolares que manejan Geogebra y programas en física. Se utilizaron diapositivas elaboradas en Prezi con el fin de dar una mejor visualización de la gráfica de la función exponencial y sus principales características, en donde se interactuó con los estudiantes, mostrándoles los diferentes casos de la base mencionados en la definición y en formalización de la función exponencial.

Cabe resaltar que debido al tiempo y al espacio otorgado por la institución, fue imposible realizar por parte de los estudiantes un buen manejo de estos programas además de las malas condiciones de los computadores, lo que no permitió que se aprovecharan las informaciones dadas en clase.

La clase fue primeramente diseñada sin dar una definición formal acerca del significado de función exponencial, ésta fue introducida mediante ejemplos de crecimiento de bacterias y su posible ecuación canónica general.

Los Estudiantes hicieron una mesa redonda dando oportunidad de preguntar al profesor, sobre los aspectos que nos ayudarían a realizar nuestro taller de función exponencial.

Figura 17 - Trabajo en el aula de clase: trabajando con deslizadores



Fuente: datos de pesquisa

En la anterior fotografía (Figura 17) podemos apreciar el trabajo realizado en clase en donde se combina el uso de herramientas como Geogebra y la clase magistral, es decir, uso del marcador y tablero. En esta clase se utilizaron deslizadores con el fin de mostrar a los estudiantes las diferentes condiciones de la base en la función exponencial y sus posibles resultados en la gráfica cartesiana

5 VALIDACIÓN Y ANÁLISIS A POSTERIORI

En la siguiente parte del documento, se confrontarán los análisis a priori y los análisis a posteriori que validan o refutan la hipótesis formulada en el inicio de la ingeniería.

Esta fase se apoya sobre los datos recolectados durante la experimentación de las observaciones realizadas durante las sesiones de enseñanza, así como de las producciones de los alumnos en clase.

Partiendo de nuestra realidad educacional y en confrontación con los datos y concepciones esperadas por los estudiantes, nos damos cuenta que existe una verdadera brecha entre la interpretación y la mecanización de conceptos algebraicos, en la medida en que son trabajados.

Los estudiantes algoritmizan un método de resolución de un tópico matemático, dejando de lado los procesos interpretativos inmersos en estos conceptos, es decir que el estudiante solo maneja e interesa el ¿cómo resolver el problema?; por lo que posteriormente se convertirá en un impedimento que llevará a que el estudiante no aprenda u olvide este concepto en un corto lapso de tiempo, ya que no es un aprendizaje con sentido del análisis, sino un aprendizaje impuesto por una cierta institución que en este caso puede ser el profesor.

Los estudiantes solo abarcan procesos simbólicos y matemáticos que caracterizan la enseñanza en el salón de clases, dificultando en sí lo que significa el concepto, puesto que para el estudiante interpretar y pensar fuera de un contexto e idea formada por el profesor, lo incomoda pues no tiene ninguna posible interpretación y visualización del concepto, llevándolo al equivoco de ecuaciones y que en consecuencia este no logre apropiarse del conocimiento que como resultado conduce a que su aprendizaje no sea eficaz.

En la actividad 1 llamada interpretar una situación problema a partir de una secuencia de figuras, se evidencia el carácter conjetural en el que el estudiante 1 está en la necesidad de realizar procedimientos matemáticos a partir de conceptos previos que le permitan desarrollar y solucionar esta tarea, teniendo en cuenta definiciones de potencias con exponente cero y con exponente uno, además del uso de la definición de función exponencial tomando como base un número mayor que 5. El uso de representaciones como el construir una tabla de valores que involucran dos variables permite que el estudiante logre organizar además de visualizar las

posibles condiciones y patrones del problema incluyendo dos tipos de variables independiente y dependiente como es el número de cuadros en relación con un nivel de secuencia.

Para las tareas de tipo representativo como es el caso de la actividad número 2, existen técnicas que permiten visualizar una grafica cartesiana, como es el caso del uso de una tabla de valores y la localización de puntos en el plano.

En esta actividad además de lo anteriormente expuesto, es necesario realizar operaciones con el fin de encontrar un resultado específico, por tanto no es posible potencializar una praxeología de tipo representativo en el que se involucre la realización de gráficas y tablas de valores puesto que el fin, es el de realizar solo una gráfica, por consiguiente la actividad puede ser potencializada con otras herramientas como por ejemplo un programa de computación, además de hacer preguntas contextualizadas

La praxeología se entiende entonces como un ejercicio de construcción del discurso sobre la práctica, y más que sobre la mera práctica, sobre el actuar consciente. Eso es precisamente la principal intención de la praxeología: hacer que el actuar, mediante la autorreflexión sea más asertivo a la hora de intervenir las realidades en las que desea brindar su aporte.

La praxeología es, al fin y al cabo, un modelo que rompe con la estructura teoría-praxis para pasar a uno praxis-teoría. Sin embargo, aquí se debe hacer un matiz para evitar un grave error al tratar de comprender la praxeología. La clave de lectura praxis-teoría no es un acercamiento a la realidad así sin más. Si bien el primer momento del proceso es el desarrollo de una práctica que poco a poco se hace consciente, esto no implica la ausencia de herramientas o conocimientos previos. Podría refutarse que la necesidad de recurrir a elementos teóricos o metodológicos previos a la teoría ya desvirtúa la pretensión de la praxeología. Sin embargo, aquí es preciso hacer otro matiz y es que, si bien es necesario un conjunto de elementos previos a la teoría, la plataforma teórica final es resultado de esa reflexión seria sobre la práctica desarrollada en un primer momento. Los elementos previos no son más que pines de arranque o pinzas para poder aprehender la realidad. Valerse de estos elementos no implica que la construcción teórica dependa de ellos en su totalidad o simplemente sea una extensión de los mismos.

Para la actividad numero 3 llamada "construir una función exponencial dada a partir de una ecuación exponencial dada", actividad de tipo interpretativo el

estudiante potencializa sus técnicas mediante representaciones que permiten una mejor interpretación del problema, permitiéndole una mejor visualización de este y una manera acertada de su acción, sin embargo los estudiante evaluados en este trabajo no logran dar una buena representación de la grafica exponencial, debido a que sus conceptos previos eran débiles y que eran necesarios a la hora de realizar esta tarea.

Es por tanto que la praxeología puntual construida, es el producto, de un análisis empírico y de un discurso crítico, designa, desde el principio, una reflexión práctica sobre los principios de la acción humana y de sus técnicas, pero busca, de igual manera, los principios generales y la metodología adecuada para una acción eficaz.

En la actividad 4 cuyo nombre es “intepretar una situación problema a partir de una ecuación exponencial dada”, tarea de tipo interpretativo y representativo, el estudiante no llega a verdaderas conjeturas que permitan dar una solución eficaz a esta actividad, en el caso de los estudiantes evaluados en este trabajo, los estudiantes intepretan mal el problema y no toman en cuenta los valores posibles de k lo que no les permite evidenciar en su gráfica la naturaleza creciente de esta sin importar los valores de k .

Los estudiantes deben evidenciar exactamente las soluciones eficaces que permitan dar solución a este problema, tomando en cuenta la propiedad de tricotomía de los números reales visualizando su naturaleza y los posibles valores de k de manera que los estudiantes no potencializan esta tarea, ya que solo se limitan a la ejecución de pasos que no evidencian la riqueza e información del problema.

Para la ultima actividad numero 5 llamada “interpretar una situación problema (crecimiento de bacterias) y una ecuación dada” labor de tipo interpretativo, los actores que realizan esta tarea visualizan mediante tablas de valores los elementos que permiten suministrar una solución al problema, olvidando su realidad además de su interpretación con esta, los estudiantes no evidencian el carácter creciente de la gráfica y las principales características de la función exponencial, como es el caso de pasar por el punto $(0,1)$ que lograrían una efectividad en la solución al problema, por consiguiente para esta actividad el estudiante no potencializa sus practicas y no se toma el trabajo de pensar en su actividad.

Los resultados confirman que el teoricismo dominante en la enseñanza media de la matemática, caracterizado por la concepción de que el saber matemático es un conocimiento acabado y solo se toma el fruto final de esta actividad provoca una desconexión creciente entre el bloque práctico-técnico y el bloque tecnológico teórico de las organizaciones matemáticas estudiadas. La relación entre ambas es asimétrica mientras el tecnológico teórico dicta los contenidos del bloque práctico técnico este tiene una incidencia nula en la constitución, desarrollo y estructura del bloque tecnológico teórico.

Es por tanto, que los estudiantes no lograron aportar ni potencializar una praxeología puesto que se realizan las tareas a partir de lo orientado por el bloque práctico-técnico y como consecuencia su aprendizaje se dará mediante esquemas repetitivos que no permiten una visualización de las posibles técnicas y estrategias que puedan realizar, a fin de ahondar en su problemática y como consecuencia dificultará el aprendizaje de futuros conceptos matemáticos.

A pesar del uso de diferentes herramientas utilizadas en este trabajo, como es el caso de programas de computación, uso de geometría fractal entre otras, el estudiante no es capaz de llevar lo aprendido en el salón de clases a su realidad, sin embargo este es apto para solucionar diferentes problemas de índole matemático, como graficar o calcular. Por tanto el profesor debe generar no solo una reflexión de su praxis, sino una reflexión de sus prácticas en el estudiante con el fin de que este utilice y aplique los distintos conceptos matemáticos en su cotidianidad, lo que conllevará a que su aprendizaje sea con sentido.

La conexión simétrica de los bloques práctico-técnico y tecnológico-teórico permitirá una potencialización de la praxeología, convirtiéndola en una praxeología propia del alumno; además de que la praxeología debe tener en cuenta su implementación en la sociedad, ya que logrará un aprendizaje eficaz de su actividad y cambiará su accionar y sus prácticas educativas en el alumno.

Por tanto podemos implementar la praxeología en la sociedad, esto no solo está en el sujeto, sino que también hay que mostrarla a la sociedad, para que así, la labor de la praxeología sea complementada, este concatenar, este cohesionar, es la educación. La educación es el principal agente de conocimiento que se puede practicar desde la praxis, ya que en ello se debe producir la relación sujeto-sociedad desde la educación.

Por ello, la educación en cualquier tipo de sociedad debe estar relacionada directamente con la cultura, la economía, la política etc., pues es allí donde se puede ver desde un punto de vista crítico y praxeológico los problemas que acaecen en el desarrollo de la educación. Por eso el problema a desarrollar debe tener como énfasis la preocupación que debe tener el Estado con la educación, ya que en ella se debe ver el progreso de la sociedad y de la relación con el sujeto mismo.

Quisiera tomar un ejemplo común que se encuentra en una sociedad como la colombiana. El planteamiento del problema educativo en nuestra nación ha dado pie para múltiples investigaciones, las cuales, han sabido aportar considerablemente a esa concepción de educación que tenemos. La cuestión de establecer una educación que realmente nos sirva ha llevado a múltiples análisis sobre la calidad de nuestra educación, sabiendo ya, que el problema base es el Estado.

Además es importante resaltar que la educación esta compuesta por un accionar de multiples actores que aportan a la educación de un individuo que permitirá efectivizar sus prácticas y su accionar, además de obtener un aprendizaje que sea construido por el propio alumno.

Por último, en las actividades propuestas en este trabajo objetamos que no hay una potencialización de las técnicas y por consiguiente de la praxeología, refiriéndose al poco o nulo uso de los conceptos matemáticos en la realidad del alumno, limitándose a una continuación de pasos que como consecuencia dan como resultado un valor aritmético, con el fin de que permitiesen un mejoramiento de la praxeología y la apropiación de éstas praxeologías a su contexto, por tanto los docentes deben ser capaces de ahondar y mejorar en el cómo estan impartiendo una clase magistral ya que en este trabajo de disertación evidenciamos la mecanización de técnicas para un cierto tipo de tareas referenciándose al saber-hacer de la praxeología por lo que urgentemente debemos encontrar caminos en la construcción de nuevas praxeologías contextualizadas ya que según la teoría de Yves Chevallard (1999) estas envejecen sus componentes teóricos y tecnológicos, que con el pasar del tiempo, pierden crédito y llegan a ser opacos, en el mismo espacio emergen nuevas tecnologías que, por contraste, ponen bajo sospecha, por arcaicas, las técnicas establecidas. Sobre todo, en un universo de tareas rutinarias, surgen en todo momento, las tareas problemáticas que no se sabe aún realizar. Nuevos tipos de tareas, que son entonces los tipos de problemas, se asientan, y nuevas praxeologías vendrán a constituirse a su alrededor.

6 CONSIDERACIONES FINALES

En esta última parte del documento de disertación, se mencionarán aspectos de gran importancia en el entorno educativo y praxeológico.

En este trabajo, se evidencian comportamientos que marcan un aprendizaje repetitivo, es decir, que para las tareas aquí propuestas, donde su principal particularidad, es tener tareas de tipo interpretativo, los estudiantes realizan técnicas que además de involucrar conceptos previos, realizan procedimientos mecánicos con el fin de dar solución a una tarea dada.

Esto es debido a que gran parte de nuestro aprendizaje escolar tradicional, está enfocado hacia la información y muy poco hacia la formación en la estimulación para que el estudiante pueda adquirir capacidades de realizar operaciones intelectuales. De las informaciones que aprendimos al transitar por la escuela tradicional, la mayoría abandonaron nuestra inteligencia, ya no habitan en ningún espacio mental. Fuimos solo instruidos y no formados intelectualmente.

Durante mucho tiempo, se pensaba que los estudiantes que guardaban en su memoria la mayor cantidad de información por unidad de tiempo, son más inteligentes, debido a que el acceso a la información en ese entonces era dispendioso, la información se encontraba en bibliotecas y en sitios muy puntuales. Hoy en día, gracias a los desarrollos en las comunicaciones, podemos tener acceso a cualquier tipo de información del mundo en cuestión de segundos, desde su casa, su oficina y prácticamente desde cualquier lugar, hoy es más importante la habilidad para plantear y para resolver problemas en el análisis adecuado y la habilidad para comunicar a los demás las soluciones planteadas.

Es verdad que toda la vida personal y social puede ser objeto de aprendizaje y de acción. Grande es entonces la tentación de privilegiar este aspecto de las cosas para recalcar el potencial educativo de los medios modernos de comunicación o de la vida profesional, o de las actividades culturales y de esparcimiento, hasta el punto de olvidar por eso algunas verdades esenciales. Porque, si bien hay que aprovechar todas estas posibilidades de aprender y perfeccionarse, no es menos cierto que para poder utilizar bien ese potencial la persona deba poseer todos los elementos de una educación básica de calidad. Mas aún, es deseable que la escuela le inculque más el gusto y el placer de aprender, la capacidad de aprender a aprender, la curiosidad

del intelecto. Imaginémoslo incluso una sociedad en que cada uno sería alternativamente educador y educando.

El uso de las tecnologías de la información y la comunicación debe ser tomadas en cuenta a la hora de abordar conceptos matemáticos en los que este uso continuo renovará las praxeologías matemáticas existentes en una determinada institución, que permitirá un florecimiento de la educación y del saber. En la actualidad, en las informaciones y en los desarrollos educativos, no se enseñan procesos de pensamiento a los estudiantes como lo son: deducir, inducir, argumentar, interpretar, ejemplificar, proposicionalizar entre otros y es allí, donde los medios de comunicación lograrían un desarrollo de nuevas y eficaces praxeologías.

Aquello que conoce una persona y le sirve para interpretar, deducir, argumentar, ejemplificar, comprender situaciones o ideas son sus instrumentos de conocimiento. Las habilidades y acciones, mediante las cuales el individuo pone a funcionar los instrumentos de conocimiento son sus operaciones intelectuales.

De nada vale que hagamos un gran esfuerzo para que los estudiantes se apropien de instrumentos de conocimiento si no nos esforzamos también por el desarrollo de sus operaciones intelectuales. Así pues, estamos frente a una gran verdad, un profesor que promueve la inteligencia debe fortalecer las operaciones intelectuales, es decir, enseñar a pensar. La educación tiene la misión de permitir a todos sin excepción hacer fructificar todos sus talentos y todas sus capacidades de creación, lo que implica que cada uno pueda responsabilizarse de sí mismo y realizar su proyecto personal.

Es por tanto, para que el conocimiento pueda convertirse en acción, generar una potencialidad y que se inculque el gusto por aprender, tienen que ingresar en el orden del discurso, hallar un modo de formalizarse, con los riesgos que esto implica, generalmente la distorsión de la experiencia y obtener de ellas un saber válido que dé créditos para la acción. Es fácil, entonces, entender que esta visión praxeológica del acto educativo se opone a la educación formal y tradicional, en la cual el saber transmitido es fundado más que fundante, y donde la acción es más reproductora que creativa e innovadora. Se impone una educación que asume la experiencia del sujeto, que le permite imaginar y crear a partir de lo que es y tiene, que le abre perspectivas novedosas, es decir, que lo tiene en cuenta. Esta finalidad va más allá de todas las demás, su realización larga y difícil, será una contribución esencial en la búsqueda de un mundo más vivible y más justo.

REFERENCIAS

ARAUJO Abraão. Estudio sobre la enseñanza de ecuaciones de primer grado, en Francia y en el Brasil a la luz de la teoría antropológica de lo didáctico. XIII conferencia interamericana de educación matemática, CIAEM, **Anais...**Fortaleza-CE, Brasil, 2011.

ARTIGUE, Michelle. **Ingeniería didáctica en educación matemática**, impreso en México. Julio de 1995.

CAMPOS, Paulo Tadeu Gandra. **A influência do cotidiano nas questões de função do exame nacional do ensino médio**. 2014. 96 F. Dissertação de mestrado. Programa de pos-graduação em educação matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora.2014.

COLOMBIA, Ministerio de Educacion Nacional, **Ley 115** (1994): Ley general de la Educación, Bogotá D.C: El ministerio, 1994.

_____. Ministerio de Educación Nacional, **Guía para el mejoramiento institucional de la Autoevaluación al mejoramiento (Guía 34)**, Revolución Educativa Colombia aprende, 2008.

CHEVALLARD, Yves. Análisis de las prácticas docentes. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Francia, 1999a. p. 221-266.

_____. **Aspectos básicos sobre la teoría antropológica de lo didáctico**. Francia. 1999b.

_____. **Informe antropológico de la relación entre conocimiento y la didáctica de las matemáticas**. Francia: 1999c.

DANTA Roberto Carlos. **Geometría Analítica Plana: Praxeologías Matemáticas en enseñanza media**. 2007. 121 f. dissertação de mestrado. Programa de pós-graduação em educação em ciências matemáticas, Universidade Federal de Pará, Belém, 2007.

DOUADY, Raphael. L'ingenierie didactique, un instrument privilegie pour une prise en compte de la complexite de la classe, ProLeedings-of PME XI. **Anais...** Montreal July 1987, p 222-228, Ed J C Bergeron N Herscovics C Kieran.

FREITAS LOBO Rita. ALMOULOU Saddo Ag. Organizaciones praxeologicas sobre função exponencial um enfoque do livro didático. In: VII CIBEM, 2013, São Paulo. UNEB/PUC-SP-Brasil- PUC-SP-Brasil. **Anais**.

GARCIA, Walter. **El sistema educativa brasileño y las innovaciones pedagógicas**. Disponible en: < www.cepal.org > Acceso en: 15 jun. 2015.

GASCON Josep, **El problema de la educación matemática y la doble ruptura de la didáctica de las matemáticas**, Publicado en La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 2002, p 4.

GOMEZ Victor Manuel. **Educadores e informática**: Promesas, dilemas y realidades. Año nacional de la ciencia y la tecnología. Colombia 1988-1989. Serie Colciencias.

KAISER, Gabriele y SCHWARZ Björn, Authentic Modelling Problems in Mathematics Education Examples and Experiences, In: STILLMAN, Gloria Ann et al. **Teaching Mathematical Modelling**: connecting to research and practice. J Math Didakt , 2010, p 51-53.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. Engenharia Didactica. **Educação matemática**: uma introdução. Serie trilhas. PUC-SP. 1999.

MANDEL, Silvia. Crescimento exponencial? o que é isso? **Revista do professor de matemática**. n. 62. São Paulo: SBM, 1 quadrimestre de 2007.

MARTIN, Francisco Alvira. **Perspectiva cualitativa y perspectiva cuantitativa en la metodología sociológica**. Mc Graw Hill. Mexico. 2002.

MORIN, Edgar. **Sobre la interdisciplinariedad**. Curso internacional sobre la complejidad y la interdisciplinariedad organizado por la dirección de investigaciones de la UNESCO. Medellin del 24 al 28 de febrero de 1997.

NOGUEIRA, Ana Lucia. Un análisis de la función seno por la perspectiva de la organización praxeologica. III seminario internacional de educación matemática, SIEMAT III. **Anais...**UNIBAN, São Paulo, 2011.

PERRIN-GLORIAN, Maria Jeanne. L'ingénierie didactique a l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement des ressources et formação des enseignants. In: Margolinas et al.(org.): En amont et en aval des ingénieries didactiques, XV^a École d'Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (PUY-de-Dôme). **Recherches em Didactique des Mathématiques**. Grenoble : La Pensée Sauvage, v. 1, p. 57-78, 2009.

ROSSINI, Renata. **Saberes docentes sobre el tema de función**: una investigación de las praxeologías. 2006. 384 f. (tese de doutorado). Doutorado em educação matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 2006.

SÁNCHEZ ORDOÑEZ, Eruin Alonso, **Razones, Proporciones y Proporcionalidad en términos de correlación entre magnitudes**: una posible forma para comprender la construcción de dichos objetos matemáticos. 2011. 215 p Disertacion de Maestría. Programa de posgrado en Educación, Línea de Enseñanza de la Ciencias y la Tecnología. Universidad del Cauca. Popayan. 2011.

SALDARRIAGA Oscar, **Oficio de maestro saber pedagógico y prácticas culturales en Colombia 1870-2002**, Universidad Javeriana, Bogotá, 1997.

SHAUGHNESSY, Michael. **Research in probability and statistics**: Reflections and Directions. En GROUWS, D.A. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, New York, Macmillam, p 465 - 490.

SWIATKIEWICZ Olgierd. **Por que não uma abordagem praxeologica?!**. Análise psicológica 1997. p. 637-644. Disponible en: < www.scielo.gpeari.mctes.pt > Acceso en: 21 mar. 2015.

VASCO, Carlos Eduardo, **Reflexiones sobre pedagogía y didáctica, Ministerio de Educación nacional**, Bogotá: Jotamar impresores Ltda, 1990. (serie: pedagogía y currículo).

ZILL, Denis. **Algebra, trigonometría y geometría analítica**, Mexico: Mc Graw Hill, 2012.