

Universidade Federal de Juiz de Fora  
Instituto de Ciências Exatas / Faculdade de Engenharia  
Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional

**Dênis Emanuel da Costa Vargas**

**Um Algoritmo de Evolução Diferencial com Penalização Adaptativa para  
Otimização Estrutural Multiobjetivo**

Juiz de Fora

2015

Dênis Emanuel da Costa Vargas

**Um Algoritmo de Evolução Diferencial com Penalização Adaptativa para  
Otimização Estrutural Multiobjetivo**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração Modelagem Computacional, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Modelagem Computacional.

Orientador: D.Sc. Afonso Celso de Castro Lemonge

Coorientadores: D.Sc. Helio José Corrêa Barbosa  
D.Sc. Heder Soares Bernardino

Juiz de Fora

2015

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Vargas, Dênis Emanuel da Costa.

Um Algoritmo de Evolução Diferencial com Penalização Adaptativa para  
Otimização Estrutural Multiobjetivo / Dênis Emanuel da Costa Vargas.  
– 2015.

212 f. : il.

Orientador: D.Sc. Afonso Celso de Castro Lemonge

Coorientadores: D.Sc. Helio José Corrêa Barbosa

D.Sc. Heder Soares Bernardino

Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de  
Ciências Exatas / Faculdade de Engenharia. Programa de Pós-graduação  
em Modelagem Computacional, 2015.

1. Evolução Diferencial. 2. Técnicas de Tratamento de Restrições. 3.  
Otimização Multiobjetivo. 4.Otimização Estrutural. I. Lemonge, Afonso  
Celso de Castro, orient. II. Barbosa, Helio José Corrêa, coorient. III.  
Bernardino, Heder Soares, coorient. IV. Título.

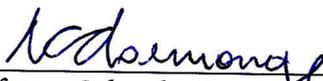
Dênis Emanuel da Costa Vargas

**UM ALGORITMO DE EVOLUÇÃO DIFERENCIAL COM  
PENALIZAÇÃO ADAPTATIVA PARA OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL  
MULTIOBJETIVO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional, da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do grau de Doutor em Modelagem Computacional.

Aprovada em 5 de Novembro de 2015.

**BANCA EXAMINADORA**



---

Prof. D. Sc. Afonso Celso de Castro Demonge - Orientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora



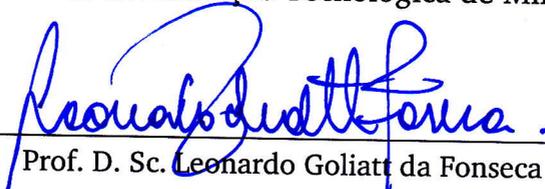
---

Prof.<sup>a</sup> D. Sc. Beatriz de Souza Leite Pires de Lima  
Universidade Federal do Rio de Janeiro



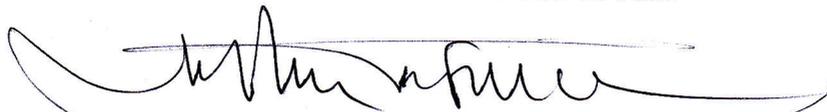
---

Prof.<sup>a</sup> D. Sc. Elizabeth Fialho Wanner  
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais



---

Prof. D. Sc. Leonardo Goliatt da Fonseca  
Universidade Federal de Juiz de Fora



---

Prof. D. Sc. Wilhelm Passarella Freire  
Universidade Federal de Juiz de Fora

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço o apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e à todos que contribuíram para a realização desse trabalho: família, amigos, professores e colegas.

## RESUMO

Problemas de Otimização Multiobjetivo (POMs) com restrições são frequentes em diversas áreas das ciências e engenharia, entre elas a Otimização Estrutural (OE). Apesar da Evolução Diferencial (ED) ser uma metaheurística muito atraente na resolução de problemas do mundo real, há uma carência na literatura de discussões sobre o desempenho em POMs de OE. Na sua grande maioria os problemas de OE apresentam restrições. Nesta tese utiliza-se uma técnica para o tratamento de restrições chamada de APM (*Adaptive Penalty Method*) que tem histórico de bons resultados quando aplicada em problemas monobjetivo de OE. Pelo potencial da ED na resolução de problemas do mundo real e da técnica APM em OE, juntamente com a escassez de trabalhos envolvendo esses elementos em POMs de OE, essa tese apresenta um estudo de um algoritmo bem conhecido de ED acoplado à técnica APM nesses problemas. Experimentos computacionais considerando cenários sem e com inserção de informações de preferência do usuário foram realizados em problemas com variáveis contínuas e discretas. Os resultados foram comparados aos encontrados na literatura, além dos obtidos pelo algoritmo que representa o estado da arte. Comparou-se também os resultados obtidos pelo mesmo algoritmo de ED adotado, porém sem ser acoplado à técnica APM, objetivando investigar sua influência no desempenho da combinação proposta. As vantagens e desvantagens do algoritmo proposto em cada cenário são apresentadas nessa tese, além de sugestões para trabalhos futuros.

Palavras-chave: Evolução Diferencial. Técnicas de Tratamento de Restrições. Otimização Multiobjetivo. Otimização Estrutural.

## ABSTRACT

Multiobjective Optimization Problems (MOPs) with constraints are common in many areas of science and engineering, such as Structural Optimization (SO). In spite of Differential Evolution (DE) being a very attractive metaheuristic in real-world problems, no work was found assessing its performance in SO MOPs. Most OE problems have constraints. This thesis uses the constraint handling technique called Adaptive Penalty Method (APM) that has a history of good results when applied in monobjective problems of SO. Due to the potential of DE in solving real world problems and APM in SO problems, and also with the lack of studies involving these elements in SO MOPs, this work presents a study of a well-known DE algorithm coupled to the APM technique in these problems. Computational experiments considering scenarios with and without inclusion of user preference information were performed in problems with continuous and discrete variables. The results were compared with those in the literature, in addition to those obtained by the algorithm that represents the state of the art. They were also compared to the results obtained by the same DE algorithm adopted, but without the APM technique, aiming at investigating the influence of the APM technique in their performance. The advantages and disadvantages of the proposed algorithm in each scenario are presented in this research, as well as suggestions for future works.

Key-words: Differential Evolution. Constraint Handling Techniques. Multiobjective Optimization. Structural Optimization.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |    |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1 | Exemplo de um mapeamento do vetor de variáveis de decisão $\mathbf{x}$ de um POM com restrições no espaço das variáveis tridimensional para sua imagem no espaço dos objetivos bidimensional. . . . .                                                                                                                                                                                                                                | 37 |
| 2.2 | Frente de Pareto do exemplo da Figura 2.1. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 38 |
| 2.3 | Ilustração das características de convergência e diversidade que a imagem de um conjunto discreto $Q'$ (representada pelos pontos vermelhos) deve ter para que ele seja considerado uma boa aproximação de $Q$ . . . . .                                                                                                                                                                                                             | 38 |
| 2.4 | A solução do POMONO da Equação (2.2) com o vetor de pesos $\mathbf{w}_1$ é um elemento de $Q'$ cuja imagem é $S_1$ . Idem para $\mathbf{w}_2$ e $S_2$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                      | 40 |
| 2.5 | As imagens das soluções dos POMONOs da Equação (2.2) para os vetores de pesos $\mathbf{w}_1$ , $\mathbf{w}_2$ , $\mathbf{w}_3$ e $\mathbf{w}_4$ são $S_1$ , $S_2$ , $S_3$ e $S_4$ , respectivamente. Embora os vetores de pesos estejam razoavelmente espalhados no espaço, não há garantias de que $S_1$ , $S_2$ , $S_3$ e $S_4$ estejam bem espaçadas sobre a Frente de Pareto, podendo deixar regiões dela sem cobertura. . . . . | 40 |
| 2.6 | Exemplos de Frentes de Pareto Convexa e Não-Convexa. Na Frente de Pareto Convexa, o interior do segmento AB fica inteiramente contido na região do plano que ela domina. Na Frente de Pareto Não-Convexa, o segmento ED contém pontos que dominam a Frente de Pareto. . . . .                                                                                                                                                        | 41 |
| 2.7 | O Método da Soma Ponderada não atinge parte da Frente de Pareto quando ela é Não-Convexa. As retas $r_1$ e $r_2$ são normais ao mesmo vetor de pesos $\mathbf{w}$ , porém a solução do problema da Equação (2.2) vai ter imagem na interseção da reta $r_1$ com a Frente de Pareto, já que ela representa valor menor da função objetivo por estar mais próxima da origem do plano cartesiano. . . . .                               | 41 |
| 2.8 | Método da Restrição $\varepsilon$ com duas funções objetivo (inspirada na Figura de (DEB, 2001)). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 42 |
| 3.1 | Visão Geral de um Algoritmo Genético. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 45 |
| 3.2 | Exemplo da Ordenação de Pareto em um problema com duas funções objetivo pelo procedimento proposto por (GOLDBERG, 1989) e que atualmente é a base da maioria dos MOEAs. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                      | 46 |

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |     |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.3 | Nicho para promoção da diversidade no NSGA: apesar dos indivíduos $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ terem o mesmo posto, $\mathbf{x}_2$ terá preferência de seleção em relação ao $\mathbf{x}_1$ no NSGA por estar em uma área com menos vizinhos no espaço dos objetivos.                                 | 47  |
| 3.4 | Cálculo do <i>Crowding Distance</i> do indivíduo $i_k$ em um problema com duas funções objetivo: $CD(i_k) = a + b$ .                                                                                                                                                                                     | 48  |
| 3.5 | Esquema de Seleção da Próxima Geração do NSGA-II.                                                                                                                                                                                                                                                        | 49  |
| 3.6 | Esquema de seleção entre o vetor alvo e o vetor experimental gerado por ele no GDE3 (Figura Adaptada de (KUKKONEN, 2012)).                                                                                                                                                                               | 54  |
| 3.7 | Efeito de diferentes valores de $\epsilon$ sobre a diversidade das soluções obtidas no conhecido problema <i>Benchmark ZDT1</i> . Dois pontos de referência foram utilizados pelos autores (losangos pretos) e 4 valores de $\epsilon$ (0.0001, 0.001, 0.005 e 0.01). (Extraída de (DEB; SUNDAR, 2006)). | 58  |
| 4.1 | Definição de $F(\mathbf{x})$ da técnica APM (adaptada de (BARBOSA; LEMONGE, 2002)).                                                                                                                                                                                                                      | 64  |
| 5.1 | Estrutura da Treliça de 10 barras.                                                                                                                                                                                                                                                                       | 68  |
| 5.2 | Exemplo de um problema de OE do tipo Dimensional: possíveis mudanças na treliça de 10 barras quando as áreas das seções transversais das barras são variáveis. (Extraída de (BERNARDINO, 2012)).                                                                                                         | 68  |
| 5.3 | Exemplo de um problema de OE de Forma: possíveis mudanças na treliça de 10 barras quando a forma é assumida variável. (Extraída de (BERNARDINO, 2012)).                                                                                                                                                  | 69  |
| 5.4 | Exemplo de um problema de OE Topológico: a conectividade e a quantidade de barras é assumida variável. (Extraída de (BERNARDINO, 2012)).                                                                                                                                                                 | 69  |
| 5.5 | Estrutura da Treliça de 25 barras (Extraída de (ANGELO et al., 2012)).                                                                                                                                                                                                                                   | 73  |
| 5.6 | Estrutura da Treliça de 60 barras (Extraída de (ANGELO et al., 2012)).                                                                                                                                                                                                                                   | 75  |
| 5.7 | Estrutura da Treliça de 72 barras (Extraída de (ANGELO et al., 2012)).                                                                                                                                                                                                                                   | 76  |
| 5.8 | Estrutura da Treliça de 942 barras (Extraída de (ANGELO et al., 2012)).                                                                                                                                                                                                                                  | 78  |
| 7.1 | Com duas funções objetivo, Hipervolume é a área do polígono cujos vértices são os pontos da <i>SPO</i> e um ponto de referência.                                                                                                                                                                         | 101 |

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                         |     |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 7.2 | Exemplo do gráfico da EAF ( <i>best</i> , <i>median</i> e <i>worst</i> ) obtido pela ferramenta do software R construída por Manuel López-Ibáñez. A Figura foi extraída de (LÓPEZ-IBÁÑEZ et al., 2010) . . . . .                                                        | 103 |
| 8.1 | Curvas EAF dos algoritmos MOACS e GDE3+APM nas Treliças de 10 (a,b,c), 25 (d,e,f) e 60 (g,h,i) Barras (caso discreto). Hipervolumes normalizados: $H_1$ para GDE3+APM e $H_2$ para MOACS. . . . .                                                                       | 110 |
| 8.2 | Curvas EAF dos algoritmos MOAS e GDE3+APM nas Treliças de 10 (a,b,c), 25 (d,e,f) e 60 (g,h,i) Barras (caso discreto). Hipervolumes normalizados: $H_1$ para GDE3+APM e $H_2$ para MOAS. . . . .                                                                         | 111 |
| 8.3 | Curvas EAF dos algoritmos MOACS, MOAS e GDE3+APM nas Treliças de 72 (a,b,c,d,e,f) e 942 (g,h,i,j,k,l) Barras (caso discreto). Hipervolumes normalizados: $H_1$ para GDE3+APM e $H_2$ para MOACS e MOAS. . . . .                                                         | 112 |
| 8.4 | Curvas EAF dos algoritmos MOACS (a,b,c,d,e) e MOAS (f,g,h,i,j) nas Treliças de 10 (a,f), 25 (b,g), 60 (c,h), 72 (d,i) e 942 (e,j) Barras (caso discreto), onde <i>Dif</i> é a diferença entre o Hipervolume normalizado das curvas <i>best</i> e <i>worst</i> . . . . . | 113 |
| 8.5 | Curvas EAF do algoritmo GDE3+APM nas Treliças de 10 (a), 25 (b), 60 (c), 72 (d) e 942 (e) Barras (caso discreto), onde <i>Dif</i> é a diferença entre o Hipervolume normalizado das curvas <i>best</i> e <i>worst</i> . . . . .                                         | 114 |
| 9.1 | Exemplo de uma execução independente onde o GDE3+APM (vermelho) dominou uma área maior do que o NSGA-II (preto) na Treliça de 10 Barras.                                                                                                                                | 119 |
| 9.2 | Exemplo de uma execução independente onde o GDE3+APM (vermelho) dominou uma área maior do que o NSGA-II (preto) nas Treliças de 25 e 60 Barras. . . . .                                                                                                                 | 120 |
| 9.3 | Exemplo de uma execução independente onde o GDE3+APM (vermelho) dominou uma área maior do que o NSGA-II (preto) nas Treliças de 72 e 942 Barras. . . . .                                                                                                                | 121 |
| 9.4 | Exemplo de uma execução independente em que o GDE3 (preto) e o GDE3+APM (vermelho) obtiveram as mesmas soluções nas Treliças de 25 e 72 Barras. . . . .                                                                                                                 | 123 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |     |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 9.5  | Perfis de Desempenho dos resultados obtidos por cada algoritmo GDE3+APM, GDE3 e NSGA-II. As áreas abaixo das curvas, normalizadas pela maior delas, estão indicadas em cada Figura. . . . .                                                                                                             | 125 |
| 9.6  | Curvas EAF da Treliça de 10 Barras: ORIGINAL refere-se ao GDE3 e APM ao GDE3+APM. As Figuras (a,b,c,g,h,i) tratam do caso discreto e (d,e,f,j,k,l) tratam do caso contínuo. Hipervolumes normalizados: $H_1$ para GDE3+APM e $H_2$ para GDE3 e NSGA-II. . . . .                                         | 126 |
| 9.7  | Curvas EAF da Treliça de 25 Barras: ORIGINAL refere-se ao GDE3 e APM ao GDE3+APM. As Figuras (a,b,c,g,h,i) tratam do caso discreto e (d,e,f,j,k,l) tratam do caso contínuo. Hipervolumes normalizados: $H_1$ para GDE3+APM e $H_2$ para GDE3 e NSGA-II. . . . .                                         | 127 |
| 9.8  | Curvas EAF da Treliça de 60 Barras: ORIGINAL refere-se ao GDE3 e APM ao GDE3+APM. As Figuras (a,b,c,g,h,i) tratam do caso discreto e (d,e,f,j,k,l) tratam do caso contínuo. Hipervolumes normalizados: $H_1$ para GDE3+APM e $H_2$ para GDE3 e NSGA-II. . . . .                                         | 128 |
| 9.9  | Curvas EAF da Treliça de 72 Barras: ORIGINAL refere-se ao GDE3 e APM ao GDE3+APM. As Figuras (a,b,c,g,h,i) tratam do caso discreto e (d,e,f,j,k,l) tratam do caso contínuo. Hipervolumes normalizados: $H_1$ para GDE3+APM e $H_2$ para GDE3 e NSGA-II. . . . .                                         | 129 |
| 9.10 | Curvas EAF da Treliça de 942 Barras: ORIGINAL refere-se ao GDE3 e APM ao GDE3+APM. As Figuras (a,b,c,g,h,i) tratam do caso discreto e (d,e,f,j,k,l) tratam do caso contínuo. Hipervolumes normalizados: $H_1$ para GDE3+APM e $H_2$ para GDE3 e NSGA-II. . . . .                                        | 130 |
| 9.11 | Curvas EAF do algoritmo GDE3 nas Treliças de 10 (a,f), 25 (b,g), 60 (c,h), 72 (d,i) e 942 (e,j), onde <i>Dif</i> é a diferença entre o Hipervolume normalizado das curvas <i>best</i> e <i>worst</i> . As Figuras (a,b,c,d,e) tratam do caso discreto e (f,g,h,i,j) tratam do caso contínuo. . . . .    | 134 |
| 9.12 | Curvas EAF do algoritmo NSGA-II nas Treliças de 10 (a,f), 25 (b,g), 60 (c,h), 72 (d,i) e 942 (e,j), onde <i>Dif</i> é a diferença entre o Hipervolume normalizado das curvas <i>best</i> e <i>worst</i> . As Figuras (a,b,c,d,e) tratam do caso discreto e (f,g,h,i,j) tratam do caso contínuo. . . . . | 135 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |     |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 9.13 | Curvas EAF do algoritmo GDE3+APM nas Treliças de 10 (a), 25 (b), 60 (c), 72 (d) e 942 (e) Barras (caso contínuo), onde $Dif$ é a diferença entre o Hipervolume normalizado das curvas <i>best</i> e <i>worst</i> . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 136 |
| 10.1 | Comparação de uma das 100 execuções do GDE3+APM com 30000 avaliações das funções objetivo (em vermelho no gráfico) com as 3 soluções explícitas em (KAVEH; LAKNEJADI, 2011), as quais foram [267;0,65], [348;0,49] e [457;0,37] (em preto no gráfico), para o caso contínuo do problema da Treliça de 25 Barras. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 138 |
| 10.2 | Efeito de diferentes valores de $\epsilon$ sobre a diversidade das soluções obtidas pelo R-NSGA-II na Treliça de 10 Barras (caso contínuo). A linha preta corresponde ao $SPO$ obtido pelo NSGA-II e o quadrado preto é o ponto de referência. Os pontos vermelhos, azuis, verdes e amarelos representam, respectivamente, o $SPO$ obtido pelo R-NSGA-II para $\epsilon = 0,01$ , $\epsilon = 0,005$ , $\epsilon = 0,001$ e $\epsilon = 0,0001$ . As Figuras 10.2b e 10.2c são aproximações da Figura 10.2a. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 141 |
| 10.3 | Região de Cobertura do Ponto de Referência do problema contínuo da Treliça de 10 Barras: em preto, aparece a Frente de Pareto real e em vermelho as soluções não-dominadas da união dos 120 $SPO$ s obtidos por cada algoritmo R-NSGA-II, R-GDE3 e R-GDE3+APM para cada valor de $\epsilon \in \{0,01; 0,005; 0,001; 0,0001\}$ . As Figuras 10.3b, 10.3c, 10.3d, 10.3e e 10.3f são aproximações da Figura 10.3a. Pode ser observado que soluções da Frente de Pareto real cujo valor da função objetivo $f_2$ esteja dentro do intervalo [1,91; 2,085] são predominantemente dominadas por uma ou mais soluções obtidas por um dos algoritmos R-NSGA-II, R-GDE3 e R-GDE3+APM (Figuras 10.3b, 10.3c e 10.3d). Fora dessa região, as soluções obtidas com a utilização da informação do ponto de referência não-dominam as soluções da Frente de Pareto real (Figuras 10.3a, 10.3b, 10.3e e 10.3f). . . . . | 144 |

|       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |     |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 10.4  | Soluções do Caso Discreto dos Problemas das Treliças de 10 (Figuras 10.4a e 10.4b) e 25 (Figuras 10.4c e 10.4d) Barras, onde as Figuras 10.4b e 10.4d são aproximações das Figuras 10.4a e 10.4c, respectivamente. Esses problemas tiveram suas Regiões de Cobertura do Ponto de Referência vazias. Isto porque os algoritmos R-NSGA-II, R-GDE3 e R-GDE3+APM não produzem soluções que dominam aquelas obtidas pelos algoritmos NSGA-II, GDE3 e GDE3+APM na vizinhança do ponto de referência (Figuras 10.4b e 10.4d) e soluções piores fora dessa vizinhança (Figuras 10.4a e 10.4c). | 145 |
| 10.5  | 10.5a e 10.5b: Comparação entre as populações do R-GDE3+APM (Vermelho) e R-NSGA-II (Verde) do caso contínuo do problema da Treliça de 10 Barras.<br>10.5c e 10.5d: R-GDE3+APM executado com $\epsilon = 0,018$ , $\epsilon = 0,01$ e $\epsilon = 0,02$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 151 |
| 10.6  | Perfis de Desempenho dos resultados obtidos por cada um dos algoritmos R-GDE3+APM, R-GDE3 e R-NSGA-II. As áreas abaixo das curvas, normalizadas pela maior delas, estão indicadas em cada Figura.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 154 |
| 10.7  | Curvas EAF das Treliças de 10 e 25 Barras (caso contínuo): ORIGINAL refere-se ao R-GDE3 e APM ao R-GDE3+APM. Hipervolumes normalizados: $H_1$ para R-GDE3+APM e $H_2$ para R-GDE3 e R-NSGA-II.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 155 |
| 10.8  | Curvas EAF da Treliça de 60 Barras: ORIGINAL refere-se ao R-GDE3 e APM ao R-GDE3+APM. As Figuras (a,b,c,g,h,i) tratam do caso contínuo e (d,e,f,j,k,l) tratam do caso discreto. Hipervolumes normalizados: $H_1$ para R-GDE3+APM e $H_2$ para R-GDE3 e R-NSGA-II.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 156 |
| 10.9  | Curvas EAF da Treliça de 72 Barras: ORIGINAL refere-se ao R-GDE3 e APM ao R-GDE3+APM. As Figuras (a,b,c,g,h,i) tratam do caso contínuo e (d,e,f,j,k,l) tratam do caso discreto. Hipervolumes normalizados: $H_1$ para R-GDE3+APM e $H_2$ para R-GDE3 e R-NSGA-II.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 157 |
| 10.10 | Curvas EAF da Treliça de 942 Barras: ORIGINAL refere-se ao R-GDE3 e APM ao R-GDE3+APM. As Figuras (a,b,c,g,h,i) tratam do caso contínuo e (d,e,f,j,k,l) tratam do caso discreto. Hipervolumes normalizados: $H_1$ para R-GDE3+APM e $H_2$ para R-GDE3 e R-NSGA-II.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 158 |

|       |                                                                                                                                                                                                                                                                                     |     |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 10.11 | Curvas EAF do algoritmo R-GDE3+APM das Treliças de 10 (a), 25 (b), 60 (c), 72 (d) e 942 (e) Barras (caso contínuo) e 60 (f), 72 (g) e 942 (h) Barras (caso discreto), onde <i>Dif</i> é a diferença entre o Hipervolume normalizado das curvas <i>best</i> e <i>worst</i> . . . . . | 159 |
| 10.12 | Curvas EAF do algoritmo R-GDE3 das Treliças de 10 (a), 25 (b), 60 (c), 72 (d) e 942 (e) Barras (caso contínuo) e 60 (f), 72 (g) e 942 (h) Barras (caso discreto), onde <i>Dif</i> é a diferença entre o Hipervolume normalizado das curvas <i>best</i> e <i>worst</i> . . . . .     | 160 |
| 10.13 | Curvas EAF do algoritmo R-NSGA-II das Treliças de 10 (a), 25 (b), 60 (c), 72 (d) e 942 (e) Barras (caso contínuo) e 60 (f), 72 (g) e 942 (h) Barras (caso discreto), onde <i>Dif</i> é a diferença entre o Hipervolume normalizado das curvas <i>best</i> e <i>worst</i> . . . . .  | 161 |
| 11.1  | Exemplo do I-NSGA-II nas Treliças de 10, 25 e 72 Barras (caso discreto) com 15000 avaliações na vizinhança do ponto de referência (Tabela 10.1). . . . .                                                                                                                            | 167 |
| 11.2  | Perfis de Desempenho dos resultados obtidos por cada um dos três algoritmos: I-GDE3+APM, I-GDE3 e I-NSGA-II. As áreas abaixo das curvas, normalizadas pela maior delas, estão indicadas em cada Figura. . . . .                                                                     | 170 |
| 11.3  | Curvas EAF das Treliças de 10 e 25 Barras (caso contínuo): ORIGINAL refere-se ao I-GDE3 e APM ao I-GDE3+APM. Hipervolumes normalizados: $H_1$ para I-GDE3+APM e $H_2$ para I-GDE3 e I-NSGA-II. . . . .                                                                              | 171 |
| 11.4  | Curvas EAF da Treliça de 60 Barras: ORIGINAL refere-se ao I-GDE3 e APM ao I-GDE3+APM. As Figuras (a,b,c,g,h,i) tratam do caso contínuo e (d,e,f,j,k,l) tratam do caso discreto. Hipervolumes normalizados: $H_1$ para I-GDE3+APM e $H_2$ para I-GDE3 e I-NSGA-II. . . . .           | 172 |
| 11.5  | Curvas EAF da Treliça de 72 Barras: ORIGINAL refere-se ao I-GDE3 e APM ao I-GDE3+APM. As Figuras (a,b,c,g,h,i) tratam do caso contínuo e (d,e,f,j,k,l) tratam do caso discreto. Hipervolumes normalizados: $H_1$ para I-GDE3+APM e $H_2$ para I-GDE3 e I-NSGA-II. . . . .           | 173 |
| 11.6  | Curvas EAF da Treliça de 942 Barras: ORIGINAL refere-se ao I-GDE3 e APM ao I-GDE3+APM. As Figuras (a,b,c,g,h,i) tratam do caso contínuo e (d,e,f,j,k,l) tratam do caso discreto. Hipervolumes normalizados: $H_1$ para I-GDE3+APM e $H_2$ para I-GDE3 e I-NSGA-II. . . . .          | 174 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |     |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 11.7 | Curvas EAF do algoritmo I-GDE3+APM das Treliças de 10 (a), 25 (b), 60 (c) e (d), 72 (e) e (f) e 942 (g) e (h) Barras, onde (a), (b), (c), (e) e (g) referem-se ao caso contínuo e (d), (f) e (h) ao caso discreto e <i>Dif</i> é a diferença entre o Hipervolume normalizado das curvas <i>best</i> e <i>worst</i> . . . . .                                                                                                  | 175 |
| 11.8 | Curvas EAF do algoritmo I-GDE3 das Treliças de 10 (a), 25 (b), 60 (c) e (d), 72 (e) e (f) e 942 (g) e (h) Barras, onde (a), (b), (c), (e) e (g) referem-se ao caso contínuo e (d), (f) e (h) ao caso discreto e <i>Dif</i> é a diferença entre o Hipervolume normalizado das curvas <i>best</i> e <i>worst</i> . . . . .                                                                                                      | 176 |
| 11.9 | Curvas EAF do algoritmo I-NSGA-II das Treliças de 10 (a), 25 (b), 60 (c) e (d), 72 (e) e (f) e 942 (g) e (h) Barras, onde (a), (b), (c), (e) e (g) referem-se ao caso contínuo e (d), (f) e (h) ao caso discreto e <i>Dif</i> é a diferença entre o Hipervolume normalizado das curvas <i>best</i> e <i>worst</i> . . . . .                                                                                                   | 177 |
| A.1  | Média do Hipervolume dos 10 <i>SPOs</i> normalizados obtidos pelo GDE3+APM para cada combinação dos valores de $CR \in \{0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$ e $F \in \{0,1; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3\}$ dos problemas das Treliças de 10 (a), 25 (b), 60 (c) e 72 (d) Barras (caso discreto). Quanto mais escuro, maior o Hipervolume, sendo que o vermelho representa a combinação que atingiu o Hipervolume Máximo. . . . .           | 197 |
| A.2  | Média do Hipervolume dos 10 <i>SPOs</i> normalizados obtidos pelo GDE3+APM para cada combinação dos valores de $CR \in \{0,1; 0,2; 0,3; \dots; 0,8; 0,9\}$ e $F \in \{0,1; 0,2; 0,3; \dots; 1,4; 1,5\}$ dos problemas das Treliças de 10 (a), 25 (b), 60 (c) e 72 (d) Barras (caso discreto). Quanto mais escuro, maior o Hipervolume, sendo que o vermelho representa a combinação que atingiu o Hipervolume Máximo. . . . . | 198 |
| A.3  | Média do Hipervolume dos 10 <i>SPOs</i> normalizados obtidos pelo GDE3+APM para cada combinação dos valores de $CR \in \{0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$ e $F \in \{0,1; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3\}$ dos problemas das Treliças de 10 (a), 25 (b), 60 (c) e 72 (d) Barras (caso contínuo). Quanto mais escuro, maior o Hipervolume, sendo que o vermelho representa a combinação que atingiu o Hipervolume Máximo. . . . .           | 201 |

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |     |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| A.4 | Média do Hipervolume dos 10 <i>SPOs</i> normalizados obtidos pelo GDE3+APM para cada combinação dos valores de $CR \in \{0,1; 0,2; 0,3; \dots; 0,8; 0,9\}$ e $F \in \{0,1; 0,2; 0,3; \dots; 1,4; 1,5\}$ dos problemas das Treliças de 10 (a), 25 (b), 60 (c) e 72 (d) Barras (caso contínuo). Quanto mais escuro, maior o Hipervolume, sendo que o vermelho representa a combinação que atingiu o Hipervolume Máximo. . . . .                     | 202 |
| A.5 | Média do Hipervolume dos 10 <i>SPOs</i> normalizados obtidos pelo GDE3 para cada combinação dos valores de $CR \in \{0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$ e $F \in \{0,1; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3\}$ dos problemas das Treliças de 10 ( (a) contínuo e (b) discreto ) e 25 ( (c) contínuo e (d) discreto ) Barras. Quanto mais escuro, maior o Hipervolume, sendo que o vermelho representa a combinação que atingiu o Hipervolume Máximo. . . . .           | 204 |
| A.6 | Média do Hipervolume dos 10 <i>SPOs</i> normalizados obtidos pelo GDE3 para cada combinação dos valores de $CR \in \{0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$ e $F \in \{0,1; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3\}$ dos problemas das Treliças de 60 ( (a) contínuo e (b) discreto ) e 72 ( (c) contínuo e (d) discreto ) Barras. Quanto mais escuro, maior o Hipervolume, sendo que o vermelho representa a combinação que atingiu o Hipervolume Máximo. . . . .           | 205 |
| A.7 | Média do Hipervolume dos 10 <i>SPOs</i> normalizados obtidos pelo GDE3 para cada combinação dos valores de $CR \in \{0,1; 0,2; 0,3; \dots; 0,8; 0,9\}$ e $F \in \{0,1; 0,2; 0,3; \dots; 1,4; 1,5\}$ dos problemas das Treliças de 10 ( (a) contínuo e (b) discreto ) e 25 ( (c) contínuo e (d) discreto ) Barras. Quanto mais escuro, maior o Hipervolume, sendo que o vermelho representa a combinação que atingiu o Hipervolume Máximo. . . . . | 206 |
| A.8 | Média do Hipervolume dos 10 <i>SPOs</i> normalizados obtidos pelo GDE3 para cada combinação dos valores de $CR \in \{0,1; 0,2; 0,3; \dots; 0,8; 0,9\}$ e $F \in \{0,1; 0,2; 0,3; \dots; 1,4; 1,5\}$ dos problemas das Treliças de 60 ( (a) contínuo e (b) discreto ) e 72 ( (c) contínuo e (d) discreto ) Barras. Quanto mais escuro, maior o Hipervolume, sendo que o vermelho representa a combinação que atingiu o Hipervolume Máximo. . . . . | 207 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |     |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| A.9  | Média do Hipervolume dos 10 <i>SPOs</i> normalizados obtidos pelo NSGA-II para cada combinação dos valores de $\eta_c \in \{2; 5; 10; 15; 20\}$ , $\eta_m \in \{5; 20; 100; 500\}$ e $PC \in \{0,9; 1\}$ dos problemas das Treliças de 10 ( (a) contínuo e (b) discreto ) e 25 ( (c) contínuo e (d) discreto ) Barras: (a) significa $PC = 0,9$ e (b) significa $PC = 1$ . Quanto mais escuro, maior o Hipervolume, sendo que o vermelho representa a combinação que atingiu o Hipervolume Máximo.           | 210 |
| A.10 | Média do Hipervolume dos 10 <i>SPOs</i> normalizados obtidos pelo algoritmo NSGA-II para cada combinação dos valores de $\eta_c \in \{2; 5; 10; 15; 20\}$ , $\eta_m \in \{5; 20; 100; 500\}$ e $PC \in \{0,9; 1\}$ dos problemas das Treliças de 60 ( (a) contínuo e (b) discreto ) e 72 ( (c) contínuo e (d) discreto ) Barras: (a) significa $PC = 0,9$ e (b) significa $PC = 1$ . Quanto mais escuro, maior o Hipervolume, sendo que o vermelho representa a combinação que atingiu o Hipervolume Máximo. | 211 |

## LISTA DE TABELAS

|     |                                                                                                                                                                                |     |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.1 | Agrupamento para a Treliça de 25 barras. . . . .                                                                                                                               | 74  |
| 5.2 | Carregamento para a treliça de 25 barras (em <i>kips</i> ). . . . .                                                                                                            | 74  |
| 5.3 | Agrupamento para a Treliça de 60 barras. . . . .                                                                                                                               | 75  |
| 5.4 | Carregamento para a treliça de 60 barras (em <i>kips</i> ). . . . .                                                                                                            | 76  |
| 5.5 | Agrupamento para a Treliça de 72 barras. . . . .                                                                                                                               | 77  |
| 5.6 | Carregamento para a treliça de 72 barras (em <i>kips</i> ). . . . .                                                                                                            | 77  |
| 7.1 | Organização dos Experimentos Computacionais. . . . .                                                                                                                           | 106 |
| 8.1 | Valores dos parâmetros $CR$ e $F$ adotados pelo algoritmo GDE3+APM para cada uma das Treliças de 10, 25, 60, 72 e 942 Barras (caso discreto) no Experimento 1. . . . .         | 108 |
| 8.2 | Média e Desvio Padrão (DP) dos Resultados do Hipervolume (H) para o Experimento 1 considerando 50000 avaliações de cada uma das funções objetivo no GDE3+APM. . . . .          | 109 |
| 8.3 | Média e Desvio Padrão (DP) dos Resultados do Hipervolume (H) para o Experimento 1 considerando 30000 avaliações de cada uma das funções objetivo no GDE3+APM. . . . .          | 109 |
| 9.1 | Valores dos parâmetros $CR$ e $F$ adotados pelo algoritmo GDE3+APM para cada uma das Treliças de 10, 25, 60, 72 e 942 Barras (caso contínuo) no Experimento 2. . . . .         | 115 |
| 9.2 | Valores dos parâmetros $CR$ e $F$ adotados pelo algoritmo GDE3 para cada uma das Treliças de 10, 25, 60, 72 e 942 Barras (casos contínuo e discreto) no Experimento 2. . . . . | 116 |
| 9.3 | Valores dos parâmetros pelo algoritmo NSGA-II para cada uma das Treliças de 10, 25, 60, 72 e 942 Barras (casos contínuo e discreto) no Experimento 2.                          | 116 |
| 9.4 | Quantidade de execuções onde um algoritmo alcançou valores maiores em pelo menos uma função objetivo do que os obtidos pelo outro. . . . .                                     | 118 |
| 9.5 | Média do número de indivíduos inactiváveis por execução. . . . .                                                                                                               | 122 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                      |     |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 9.6  | Média e Desvio Padrão (DP) dos Resultados do Hipervolume e IGD para o Experimento 2. . . . .                                                                                                                                         | 131 |
| 9.7  | Média e Desvio Padrão (DP) dos Resultados da CM e do $I_\epsilon$ para o Experimento 2. Os algoritmos GDE3+APM, GDE3 e NSGA-II são identificados respectivamente por A, B e C. . . . .                                               | 132 |
| 9.8  | Média e Desvio Padrão (DP) dos Resultados do Hipervolume (H) para o Experimento 2 considerando 30000 avaliações de cada uma das funções objetivo no GDE3+APM. . . . .                                                                | 133 |
| 9.9  | Média e Desvio Padrão (DP) dos Resultados da CM para o Experimento 2 considerando 30000 avaliações de cada uma das funções objetivo no GDE3+APM. . . . .                                                                             | 133 |
| 9.10 | Média e Desvio Padrão (DP) dos Resultados do $I_\epsilon$ para o Experimento 2 considerando 30000 avaliações de cada uma das funções objetivo no GDE3+APM. . . . .                                                                   | 133 |
| 10.1 | Pontos de Referência $\bar{z} = (z_1, z_2)$ , onde $z_1$ é a melhor solução do POMONO correspondente exibida em (SILVA et al., 2013) utilizando o mesmo tipo de variável e $z_2$ o respectivo deslocamento máximo permitido. . . . . | 139 |
| 10.2 | Região de Cobertura do Ponto de Referência das Treliças de 10, 25, 60, 72 e 942 Barras (casos contínuo e discreto) em termos de intervalo da função objetivo $f_2$ . . . . .                                                         | 143 |
| 10.3 | Médias do Hipervolume normalizado obtido para cada $\epsilon$ pelo R-GDE3+APM dentro do intervalo HD da Tabela 10.2. . . . .                                                                                                         | 147 |
| 10.4 | Médias do Hipervolume normalizado obtido para cada $\epsilon$ pelo R-GDE3 dentro do intervalo HD da Tabela 10.2. . . . .                                                                                                             | 147 |
| 10.5 | Médias do Hipervolume normalizado obtido para cada $\epsilon$ pelo R-NSGA-II dentro do intervalo HD da Tabela 10.2. . . . .                                                                                                          | 147 |
| 10.6 | Média e Desvio Padrão (DP) dos Resultados do Hipervolume (H) e do IGD para o Experimento 3. . . . .                                                                                                                                  | 152 |
| 10.7 | Média e Desvio Padrão (DP) dos Resultados da CM e do $I_\epsilon$ dos algoritmos R-GDE3+APM, R-GDE3 e R-NSGA-II, os quais são identificados respectivamente por A, B e C. . . . .                                                    | 153 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                        |     |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 11.1 | Solução do POMONO obtida pelo I-NSGA-II em comparação com as exibidas em (SILVA et al., 2013). . . . .                                                                                                                                 | 166 |
| 11.2 | Média e Desvio Padrão (DP) dos Resultados do Hipervolume (H) e do IGD para o intervalo de preferência HD da Tabela 10.2. . . . .                                                                                                       | 168 |
| 11.3 | Média e Desvio Padrão (DP) dos Resultados da CM e do $I_e$ para o intervalo de preferência HD da Tabela 10.2. Os algoritmos I-GDE3+APM, I-GDE3 e I-NSGA-II são identificados respectivamente por A, B e C. . . . .                     | 169 |
| A.1  | Média do Hipervolume (H) dos 5 <i>SPOs</i> normalizados obtidos pelo GDE3+APM para cada combinação dos valores de $CR \in \{0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$ com $F = 0,5$ para o problema da Treliça de 942 Barras (caso discreto). . . . . | 199 |
| A.2  | Média do Hipervolume (H) dos 5 <i>SPOs</i> normalizados obtidos pelo GDE3+APM para cada combinação dos valores de $F \in \{0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$ com $CR = 0,1$ para o problema da Treliça de 942 Barras (caso discreto). . . . . | 199 |
| A.3  | Média do Hipervolume (H) dos 5 <i>SPOs</i> normalizados obtidos pelo GDE3+APM para cada combinação de parâmetros na vizinhança de $CR = 0,1$ e $F = 0,7$ para o problema da Treliça de 942 Barras (caso discreto). . . . .             | 199 |
| A.4  | Valores dos parâmetros $CR$ e $F$ adotados pelo algoritmo GDE3+APM para cada um dos problemas das Treliças de 10, 25, 60, 72 e 942 Barras (caso discreto) no Experimento 1. . . . .                                                    | 200 |
| A.5  | Média do Hipervolume (H) dos 5 <i>SPOs</i> normalizados obtidos pelo GDE3+APM para cada combinação dos valores de $CR \in \{0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$ com $F = 0,5$ para o problema da Treliça de 942 Barras (caso contínuo). . . . . | 200 |
| A.6  | Média do Hipervolume (H) dos 5 <i>SPOs</i> normalizados obtidos pelo GDE3+APM para cada combinação dos valores de $F \in \{0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$ com $CR = 0,1$ para o problema da Treliça de 942 Barras (caso contínuo). . . . . | 203 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                        |     |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| A.7  | Média do Hipervolume (H) dos 5 <i>SPOs</i> normalizados obtidos pelo GDE3+APM para cada combinação de parâmetros na vizinhança de $CR = 0,1$ e $F = 0,7$ para o problema da Treliça de 942 Barras (caso contínuo).                     | 203 |
| A.8  | Valores dos parâmetros $CR$ e $F$ adotados pelo algoritmo GDE3+APM para cada um dos problemas das Treliças de 10, 25, 60, 72 e 942 Barras (caso contínuo) no Experimento 2.                                                            | 203 |
| A.9  | Média do Hipervolume (H) dos 5 <i>SPOs</i> normalizados obtidos pelo GDE3 para cada combinação dos valores de $CR \in \{0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$ com $F = 0,5$ para o problema da Treliça de 942 Barras (casos contínuo e discreto). | 208 |
| A.10 | Média do Hipervolume (H) dos 5 <i>SPOs</i> normalizados obtidos pelo GDE3 para cada combinação dos valores de $F \in \{0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$ com $CR = 0,1$ para o problema da Treliça de 942 Barras (casos contínuo e discreto). | 208 |
| A.11 | Média do Hipervolume (H) dos 5 <i>SPOs</i> normalizados obtidos pelo GDE3 Original para cada combinação de parâmetros na vizinhança de $CR = 0,1$ e $F = 0,9$ para o problema da Treliça de 942 Barras (caso contínuo).                | 208 |
| A.12 | Média do Hipervolume (H) dos 5 <i>SPOs</i> normalizados obtidos pelo GDE3 Original para cada combinação de parâmetros na vizinhança de $CR = 0,1$ e $F = 0,7$ para o problema da Treliça de 942 Barras (caso discreto).                | 209 |
| A.13 | Valores dos parâmetros $CR$ e $F$ adotados pelo algoritmo GDE3 para cada um dos problemas das Treliças de 10, 25, 60, 72 e 942 Barras (caso contínuo e discreto) no Experimento 2.                                                     | 209 |
| A.14 | Média do Hipervolume (H) dos 5 <i>SPOs</i> normalizados obtidos pelo NSGA-II para cada combinação dos valores de $\eta_m \in \{5; 20; 100; 500\}$ com $PC = 1$ e $\eta_c = 2$ para o problema da Treliça de 942 Barras.                | 212 |
| A.15 | Média do Hipervolume (H) dos 5 <i>SPOs</i> normalizados obtidos pelo NSGA-II para cada combinação de parâmetros na vizinhança de $PC = 1$ , $\eta_c = 2$ e $\eta_m = 500$ para o problema da Treliça de 942 Barras.                    | 212 |
| A.16 | Valores dos parâmetros pelo algoritmo NSGA-II para cada um dos problemas das Treliças de 10, 25, 60, 72 e 942 Barras (casos contínuo e discreto) no Experimento 2.                                                                     | 212 |

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

**AE** - Algoritmo Evolucionista

**AG** - Algoritmo Genético

**APM** - *Adaptive Penalty Method*

**CM** - *Coverage Metric*

**DEMO** - *Differential Evolution for Multiobjective Optimization*

**DM** - *Decision Maker*

**EAF** - *Empirical Attainment Function*

**ED** - Evolução Diferencial

**GDE3** - *The Third Step of Generalized Differential Evolution*

**GDE3+APM** - Algoritmo GDE3 acoplado à técnica APM

**H** - Hipervolume

**IBEA** - *Indicator Based Evolutionary Algorithm*

**IGD** - *Inverted Generational Distance*

**I-GDE3** - Versão interativa do R-GDE3

**I-GDE3+APM** - Versão interativa do R-GDE3+APM

**I-NSGA-II** - Versão interativa do R-NSGA-II

**MOAS** - *Multi-objective Ant System*

**MOACS** - *Multi-objective Ant Colony System*

**MODE** - *Multiobjective Differential Evolution*

**MOEA** - *Multi-Objective Evolutionary Algorithms*

**MOEA/D** - *Multiobjective Evolutionary Algorithm based on Decomposition*

**MOEA/D-DE** - *Multiobjective Evolutionary Algorithm based on Decomposition with Differential Evolution*

**NSGA-II** - *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm - II*

**NSGA-III** - *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm - III*

**OE** - Otimização Estrutural

**PO** - Problema de Otimização

**POM** - Problema de Otimização Multiobjetivo

**POMONO** - Problema de Otimização Monobjetivo

**R-GDE3** - *Reference Point based GDE3*

**R-GDE3+APM** - *Reference Point based GDE3+APM*

**R-NSGA-II** - *Reference Point based NSGA-II*

**SBX** - *Simulated Binary Crossover*

**SPEA** - *Strength Pareto Evolutionary Algorithm*

**VEGA** - *Vector Evaluated Genetic Algorithm*

$I_\epsilon$  -  $\epsilon$ -Indicator

$f_p, p = 1, \dots, P$  - Funções objetivo

$\mathbf{x}$  - Vetor de variáveis de decisão

$\underline{\mathbf{x}}$  - Limite inferior de  $\mathbf{x}$

$\overline{\mathbf{x}}$  - Limite superior de  $\mathbf{x}$

$D$  - Conjunto factível (ou viável)

$g_j, j = 1, \dots, J$  - Restrições

$\succ$  - Relação de dominância

$\succ_c$  - Relação de restrito-dominância

$Q$  - Conjunto de Soluções Pareto-Ótimas de um POM

$Q'$  - Aproximação discreta de  $Q$

$SPO$  - Conjunto de Soluções Pareto-Ótimas gerado por um MOEA

$CD$  - *crowding distance*

$\eta_c$  - Índice de distribuição do operador SBX

$\eta_m$  - Índice de mutação do operador SBX

$\mathbf{u}$  - Vetor experimental da Evolução Diferencial

$F$  - Parâmetro de Mutação da Evolução Diferencial

$CR$  - Probabilidade de Cruzamento da Evolução Diferencial

$\epsilon$  - Parâmetro de controle da diversidade da população no R-NSGA-II

$\bar{z}$  - Ponto de referência

## SUMÁRIO

|       |                                                                    |    |
|-------|--------------------------------------------------------------------|----|
| I     | ESTRUTURA DA TESE                                                  | 28 |
| 1     | INTRODUÇÃO                                                         | 29 |
| 1.1   | Justificativas                                                     | 32 |
| 1.2   | Objetivos                                                          | 32 |
| 1.3   | Metodologia                                                        | 33 |
| II    | REVISÃO DA LITERATURA E TRABALHOS<br>RELACIONADOS                  | 35 |
| 2     | OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO                                           | 36 |
| 2.1   | Conceitos Básicos                                                  | 36 |
| 2.2   | Alguns Métodos Clássicos                                           | 39 |
| 2.3   | Considerações Finais do Capítulo                                   | 42 |
| 3     | ALGORITMOS EVOLUCIONISTAS PARA OTIMIZAÇÃO<br>MULTIOBJETIVO - MOEAs | 43 |
| 3.1   | Conceitos Básicos                                                  | 43 |
| 3.2   | MOEAs Baseados em Algoritmos Genéticos                             | 45 |
| 3.2.1 | <i>VEGA</i>                                                        | 45 |
| 3.2.2 | <i>NSGA-II</i>                                                     | 46 |
| 3.2.3 | <i>SPEA2</i>                                                       | 50 |
| 3.3   | MOEAs Baseados em Evolução Diferencial                             | 51 |
| 3.3.1 | <i>DEMO</i>                                                        | 52 |
| 3.3.2 | <i>MODE</i>                                                        | 52 |
| 3.3.3 | <i>GDE3</i>                                                        | 53 |
| 3.4   | Outros Aspectos sobre os MOEAs                                     | 55 |
| 3.4.1 | <i>MOEAs com Outras Estruturas</i>                                 | 55 |
| 3.4.2 | <i>MOEAs Baseados em Preferências do Usuário</i>                   | 56 |

|                                 |                                                                                  |     |
|---------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.4.3                           | <i>MOEAs para POMs com Muitos Objetivos</i> .....                                | 58  |
| 3.5                             | Considerações Finais do Capítulo .....                                           | 59  |
| 4                               | TÉCNICAS PARA O TRATAMENTO DE RESTRIÇÕES EM MOEAs                                | 60  |
| 4.1                             | Funções de Penalização Adaptativa .....                                          | 60  |
| 4.2                             | Regras de Factibilidade .....                                                    | 64  |
| 4.3                             | Considerações Finais do Capítulo .....                                           | 65  |
| 5                               | OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL .....                                                      | 67  |
| 5.1                             | Problemas de Otimização Estrutural de Treliças .....                             | 67  |
| 5.2                             | Formulação Matemática .....                                                      | 71  |
| 5.2.1                           | <i>Treliça de 10 Barras</i> .....                                                | 72  |
| 5.2.2                           | <i>Treliça de 25 Barras</i> .....                                                | 73  |
| 5.2.3                           | <i>Treliça de 60 Barras</i> .....                                                | 74  |
| 5.2.4                           | <i>Treliça de 72 Barras</i> .....                                                | 74  |
| 5.2.5                           | <i>Treliça de 942 Barras</i> .....                                               | 76  |
| 5.3                             | Considerações Finais do Capítulo .....                                           | 77  |
| III EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS |                                                                                  | 80  |
| 6                               | ALGORITMO PROPOSTO E ALGORITMOS DE COMPARAÇÃO .                                  | 81  |
| 6.1                             | Algoritmo Proposto .....                                                         | 81  |
| 6.1.1                           | <i>Sem Inserção de Informações de Preferências</i> .....                         | 81  |
| 6.1.2                           | <i>Com Inserção de Informações de Preferências</i> .....                         | 82  |
| 6.2                             | Algoritmos Adotados para as Comparações dos Experimentos<br>Computacionais ..... | 87  |
| 7                               | MEDIDAS DE DESEMPENHO .....                                                      | 99  |
| 7.1                             | Medidas Unárias .....                                                            | 99  |
| 7.1.1                           | <i>Inverted Generational Distance</i> .....                                      | 99  |
| 7.1.2                           | <i>Hypervolume</i> .....                                                         | 100 |
| 7.2                             | Medidas Binárias .....                                                           | 101 |
| 7.2.1                           | <i>Coverage Metric</i> .....                                                     | 101 |
| 7.2.2                           | <i><math>\epsilon</math>-Indicator</i> .....                                     | 102 |

|        |                                                           |     |
|--------|-----------------------------------------------------------|-----|
| 7.3    | <i>Empirical Attainment Function</i>                      | 102 |
| 7.4    | Outros Aspectos sobre Medidas de Desempenho               | 103 |
| 8      | EXPERIMENTO 1: GDE3+APM versus MOAS e MOACS               | 107 |
| 8.1    | Delineamento                                              | 107 |
| 8.2    | Análise dos Resultados                                    | 108 |
| 9      | EXPERIMENTO 2: GDE3+APM versus NSGA-II e GDE3             | 115 |
| 9.1    | Delineamento                                              | 115 |
| 9.2    | Análise dos Resultados                                    | 116 |
| 9.2.1  | <i>GDE3+APM e NSGA-II</i>                                 | 117 |
| 9.2.2  | <i>GDE3+APM e GDE3</i>                                    | 122 |
| 10     | EXPERIMENTO 3: PREFERÊNCIA DE MODO <i>A PRIORI</i>        | 137 |
| 10.1   | Delineamento                                              | 137 |
| 10.1.1 | <i>Definição das Preferências e Análise de Parâmetros</i> | 139 |
| 10.2   | Análise dos Resultados                                    | 147 |
| 10.2.1 | <i>R-GDE3+APM e R-GDE3</i>                                | 148 |
| 10.2.2 | <i>R-GDE3+APM e R-NSGA-II</i>                             | 149 |
| 11     | EXPERIMENTO 4: PREFERÊNCIA DE MODO INTERATIVO             | 162 |
| 11.1   | Delineamento                                              | 162 |
| 11.2   | Análise dos Resultados                                    | 164 |
| 11.2.1 | <i>I-GDE3+APM e I-GDE3</i>                                | 164 |
| 11.2.2 | <i>I-GDE3+APM e I-NSGA-II</i>                             | 165 |
| 12     | CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS                            | 178 |
| 12.1   | Conclusões                                                | 178 |
| 12.2   | Trabalhos Futuros                                         | 180 |
|        | APÊNDICES                                                 | 195 |

# Parte I

## ESTRUTURA DA TESE

# 1 INTRODUÇÃO

Muitos problemas de otimização em diversas áreas da ciência e engenharia envolvem situações em que se pretende estabelecer a(s) melhor(es) solução(ões) possível(veis) atendendo a mais de um objetivo simultaneamente. Uma dificuldade de se solucionar esses problemas está no fato desses objetivos serem, em geral, conflitantes. Esses problemas são chamados de Problemas de Otimização Multiobjetivo (POMs) (DEB, 2001; COELLO et al., 2007).

Ao contrário dos problemas monobjetivo, a resolução de um POM fornece um conjunto de soluções que representam os melhores compromissos entre os objetivos. A imagem dessas soluções no espaço dos objetivos é chamada de Frente de Pareto (PARETO, 1896). A principal meta na resolução de um POM é encontrar a Frente de Pareto, ou pelo menos uma boa aproximação discreta dela, da qual o tomador de decisão irá escolher a solução que melhor atenda às suas preferências.

Muitos métodos foram propostos na literatura para se resolver um POM, dentre os quais estão os Algoritmos Evolucionistas (AEs). Tratam-se de metaheurísticas bioinspiradas que se baseiam nos princípios da evolução biológica. Na resolução de POMs, os AEs tem muita popularidade na literatura devido principalmente à dois fatos: 1) diferentemente dos Métodos Clássicos<sup>1</sup> tradicionais, eles são capazes de obter uma boa aproximação da Frente de Pareto em apenas uma execução; e 2) eles não exigem características tais como linearidade, convexidade, continuidade, além de cálculos de derivadas, gradientes e hessianas, como muitos métodos determinísticos exigem (DEB, 2001; COELLO et al., 2007; LAMPINEN, 2000).

Um AE bem conhecido na literatura é a Evolução Diferencial (ED). A ED foi proposta em (STORN; PRICE, 1995) originalmente para problemas monobjetivo com codificação real para as variáveis do problema. Seus principais destaques são a simplicidade de implementação, a necessidade de poucos parâmetros de controle e robustez demonstrada principalmente pelos bons resultados obtidos em competições, o que a torna atrativa para aplicações em problemas do mundo real (DAS; SUGANTHAN, 2011). Devido a sua popularidade em problemas monobjetivo, seu uso foi estendido para POMs apresentando

---

<sup>1</sup>Denominação encontrada em (DEB, 2001).

bons resultados (DAS; SUGANTHAN, 2011; MEZURA-MONTES et al., 2008).

O trabalho (MEZURA-MONTES et al., 2008) apontou que um caminho natural da ED é a sua aplicação na resolução em POMs do mundo real devido às suas características de associar robustez e simplicidade. Apesar disso, existem áreas das ciências e engenharias que estão carentes de estudos com ED aplicadas à seus POMs, como por exemplo a Otimização Estrutural (OE). (ZAVALA et al., 2014) faz um levantamento dos trabalhos existentes sobre metaheurísticas aplicadas à POMs em OE e nenhum trabalho envolvendo ED foi encontrado, como pode ser observado no trecho que segue:

*"Many of the problems reported in the specialized literature are encoded using floating point representation (i.e., real numbers are used for all the decision variables), and we found no study in which differential evolution was used to solve any of these problems. This is rather surprising if we consider that differential evolution is a very powerful approach for solving problems in which all the decision variables are real numbers." ((ZAVALA et al., 2014), p.555).*

Trabalhos podem ser encontrados na literatura onde a ED apresenta bons resultados em OE monobjetivo, como por exemplo (SILVA et al., 2011c) e (SILVA et al., 2013). Nesses dois trabalhos foram abordados problemas em que se pretende encontrar as dimensões das seções transversais das barras de uma treliça de tal forma que se minimize o seu peso, sujeito à restrições nas tensões normais máximas que estas barras podem estar submetidas e os deslocamentos máximos de seus nós.

Problemas de OE frequentemente apresentam restrições, como aqueles tratados em (SILVA et al., 2011c) e (SILVA et al., 2013). (MICHALEWICZ; FOGEL, 2004) apontam as restrições como uma das principais fontes de dificuldade na resolução de problemas do mundo real. Se o tratamento dessas restrições não for adequado, pode acontecer dos algoritmos acharem somente soluções factíveis e não conseguirem direcionar a busca para as melhores soluções dentre as factíveis (MEZURA-MONTES; COELLO, 2011).

Como a maior parte dos algoritmos bioinspirados não foram originalmente propostos para resolver problemas com restrições, geralmente eles necessitam de técnicas especiais acopladas para o tratamento das mesmas (MEZURA-MONTES; COELLO, 2011). Uma delas é a técnica APM (*Adaptive Penalty Method*), proposta em (BARBOSA; LEMONGE, 2002) para problemas monobjetivo e utilizada nos trabalhos (SILVA et al., 2011c) e (SILVA et al., 2013).

A técnica de penalização adaptativa APM é atrativa principalmente por ser livre de parâmetros a serem definidos pelo usuário e de fácil implementação computacional (LEMONGE; BARBOSA, 2004). Sua robustez no tratamento de restrições em problemas de OE pode ser vista nos trabalhos que a utilizam diretamente, seja na sua formulação original ou introduzindo algumas alterações: (ANGELO et al., 2015; LEMONGE et al., 2015; SILVA et al., 2013; CARVALHO et al., 2013; ANGELO et al., 2012; SILVA et al., 2011a; SILVA et al., 2011c; SILVA et al., 2011b; SILVA et al., 2011d; SILVA et al., 2008; BARBOSA et al., 2008; BARBOSA; LEMONGE, 2008; LEMONGE; BARBOSA, 2004; BARBOSA; LEMONGE, 2003a; BARBOSA; LEMONGE, 2003b), bem como no trabalho original de sua proposição (BARBOSA; LEMONGE, 2002). Trabalhos de aplicações em outras áreas e/ou em suite de problemas *benchmark*, tais como (PAQUET; VIKTOR, 2013; GANG et al., 2013; YOUSEFI et al., 2013; YOUSEFI et al., 2012; LIU et al., 2012; BARBOSA et al., 2010a; VENTER; HAFTKA, 2010; SILVA, 2009; ROCHA; FERNANDES, 2009; YOUNG et al., 2007; GALLET et al., 2005), também mostram bons resultados quando a técnica APM é utilizada.

Dos trabalhos encontrados na literatura que mostram o destaque da técnica APM no tratamento de restrições, (ANGELO et al., 2012) foi o precursor na investigação do seu potencial em POMs<sup>2</sup>. Seus autores analisaram problemas cujas funções objetivo eram a minimização do peso da treliça e a minimização do maior deslocamento de seus nós, restringindo as tensões das barras. Eles utilizaram dois algoritmos baseados em Colônia de Formigas e os resultados apresentados se mostraram eficientes, inclusive com algumas das soluções obtidas compatíveis com a do problema monobjetivo equivalente.

Outro aspecto identificado por (ZAVALA et al., 2014) e que ainda foi pouco explorado utilizando metaheurísticas em POM de OE é o uso de informações de preferência do usuário nos mecanismos de busca, como pode ser visto no trecho destacado:

*"Finally, another aspect that has been only scarcely explored in multi-objective structural optimization using metaheuristics, is the incorporation of user's preferences in the search engine (Sanchis et al. 2008). (...). Evidently, more work in these directions is expected to appear in the next few years, (...)."* ((ZAVALA et al., 2014), p.555).

---

<sup>2</sup> Após, houve trabalhos produzidos pelo próprio autor dessa tese ((VARGAS et al., 2013; VARGAS et al., 2014; VARGAS et al., 2015)) e, mais recentemente, (ANGELO et al., 2015) acrescentando restrições de cardinalidade aos mesmos problemas abordados em (ANGELO et al., 2012).

Baseando na argumentação apresentada sobre o potencial da ED na resolução de problemas do mundo real e da técnica APM em OE, juntamente com a escassez de estudos envolvendo esses elementos em POMs de OE, essa tese propõe um algoritmo baseado em ED combinada com a técnica APM para POMs de OE. Além disso, situações utilizando informações de preferência em POMs de OE são abordadas, visando contribuir para o preenchimento dessa lacuna. As justificativas e os objetivos são listados a seguir.

## 1.1 Justificativas

1. Algoritmos baseados em ED são atrativos para aplicações em problemas do mundo real por serem robustos, terem simplicidade de implementação e poucos parâmetros de controle;
2. A técnica APM tem bom histórico no tratamento de restrições em problemas de OE;
3. Não foram encontrados trabalhos na literatura que analisam a resolução de POMs em OE via ED;
4. Foram encontrados poucos trabalho na literatura que investigam o potencial da técnica APM na resolução de POMs <sup>3</sup>;
5. O uso de informações de preferência do usuário nos mecanismos de busca foi pouco explorado em POM de OE.

Pelas justificativas apresentadas, um algoritmo baseado em ED combinado com a técnica APM tem potencial para ser um otimizador simples, robusto e capaz de obter bons resultados em POMs de OE. A carência de estudos avaliando a combinação desses elementos nestes problemas foi a principal motivação desta tese. Também foi explorado aqui o uso de informações de preferência em POMs de OE no algoritmo proposto.

## 1.2 Objetivos

Os seguintes objetivos foram considerados:

---

<sup>3</sup>No início das atividades dessa tese, (ANGELO et al., 2012) era o único até então.

1. Propor a combinação de um algoritmo baseado em ED acoplado à técnica APM para a resolução de POMs de OE em conformidade com o estado da arte.
2. Investigar o desempenho da combinação proposta em POMs de OE, analisando a influência da ED e da técnica APM, tanto separadamente quanto agrupadas, em seu desempenho nesses problemas.
3. Comparar os resultados do algoritmo proposto com os apresentados na literatura que já resolveram os mesmos problemas e com o algoritmo *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II* (NSGA-II), que representa o estado da arte uma vez que é o algoritmo mais comumente encontrado nos trabalhos envolvendo a resolução de POMs em OE (ZAVALA et al., 2014).
4. Abordar o uso de informações de preferência em POMs de OE no algoritmo proposto.

### 1.3 Metodologia

Para orientar a escolha de problemas, proposição de algoritmos e ambientes de análise, uma revisão da literatura se fez necessária. Assim, os Capítulos 2, 3, 4 e 5 fornecem revisões sobre POMs, Algoritmos Evolucionistas para Otimização Multiobjetivo (MOEAs, do inglês *Multi-Objective Evolutionary Algorithms*), técnicas para o tratamento de restrições e POMs de OE, respectivamente.

A partir disso, a experimentação computacional desse trabalho será delineada. O detalhamento dos algoritmos estão no Capítulo 6 e das medidas de desempenho adotadas no Capítulo 7. Foram escolhidos POMs de OE com codificação real e discreta e considerados cenários sem (Capítulos 8 e 9) e com (Capítulos 10 e 11) inserção de informações de preferências do usuário nesses POMs.

A experimentação computacional desse trabalho foi organizada como segue: O Capítulo 8 fornece uma comparação dos resultados obtidos pelo algoritmo proposto com os apresentados em (ANGELO et al., 2012) visando verificar se ele é competitivo com os existentes na literatura que já resolveram os mesmos problemas. O Capítulo 9 analisa a influência da técnica APM no desempenho do algoritmo proposto. Além disso, compara os resultados obtidos pelo algoritmo proposto com aqueles obtidos pelo NSGA-II. O Capítulo 10 repete os experimentos do Capítulo 9 em cenários com inclusão de informações de

preferências do usuário feita de forma *a priori*<sup>4</sup>. O Capítulo 11 repete os experimentos do Capítulo 10, porém considerando cenários onde a inclusão de informações de preferências do usuário é feita de forma interativa<sup>4</sup>. Finalmente, o Capítulo 12 apresenta as conclusões e possibilidades de trabalhos futuros.

---

<sup>4</sup>Classificação dada por (PURSHOUSE et al., 2014).

## Parte II

# REVISÃO DA LITERATURA E TRABALHOS RELACIONADOS

## 2 OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO

A fim de desenvolver uma compreensão relativa aos POMs, algumas definições formais são necessárias. Elas constam na literatura em diversas publicações, tais como (DEB, 2001; COELLO et al., 2007; TAKAHASHI, 2009; PIERRE, 2012).

### 2.1 Conceitos Básicos

**Definição 1.** Sejam  $n, P \in \mathbb{N}$  e  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ . Um Problema de Otimização (PO) pode ser definido de uma forma geral como

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), \dots, f_P(\mathbf{x})] \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{x} \in D \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde  $f_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  com  $p = 1, \dots, P$  são chamadas de funções objetivo.

Se  $P = 1$ , o PO da Definição 1 é chamado de Problema de Otimização Monobjetivo (POMONO). Um PO que não é POMONO é chamado de Problema de Otimização Multiobjetivo (POM). A literatura atualmente classifica POMs com  $P \geq 4$  como Problemas de Otimização com Muitos Objetivos (do inglês *Many-objective Optimization Problems*). Métodos de resolução eficientes para POMs com  $P = 2$  ou 3 geralmente perdem essa eficiência quando  $P \geq 4$ , motivo pelo qual esses problemas adotaram nomenclatura e métodos de resolução próprios (VON LUCKEN et al., 2014). Os problemas tratados aqui tem 2 objetivos.

Um PO é dito sem restrições se  $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \underline{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x} \leq \bar{\mathbf{x}}\}$ <sup>1</sup> e com restrições se  $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | g_j(\mathbf{x}) \leq 0, \underline{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x} \leq \bar{\mathbf{x}}\}$ , onde  $\underline{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \cup \{\pm\infty\}$  e  $j = 1, \dots, J$ . Os vetores  $\underline{\mathbf{x}}$  e  $\bar{\mathbf{x}}$  são chamados, respectivamente, de limites inferior e superior do vetor de variáveis de decisão  $\mathbf{x}$ . Em um PO com restrições,  $D$  é chamado de conjunto factível (ou viável) e as funções  $g_j$  são chamadas de restrições. Existem definições na literatura que descrevem restrições de igualdade separadamente, na forma  $h(\mathbf{x}) = 0$ . Isso não será feito nesse texto, uma vez que a restrição  $h(\mathbf{x}) = 0$  pode ser reescrita como  $h(\mathbf{x}) \leq 0$  e  $h(\mathbf{x}) \geq 0$ . Além

---

<sup>1</sup>Apesar de possuir restrições de limites das variáveis (que indica um problema com restrições), elas são trivialmente tratadas e o problema é popularmente conhecido como sem restrições.

disso, os problemas tratados nessa tese não possuem restrições de igualdade.

Na Definição 1,  $\mathbb{R}^n$  é chamado de espaço das variáveis e  $\mathbb{R}^P$  de espaço dos objetivos. A Figura 2.1 mostra um exemplo de um mapeamento feito pelas funções objetivo de um POM com restrições entre um espaço das variáveis tridimensional e um espaço dos objetivos bidimensional.

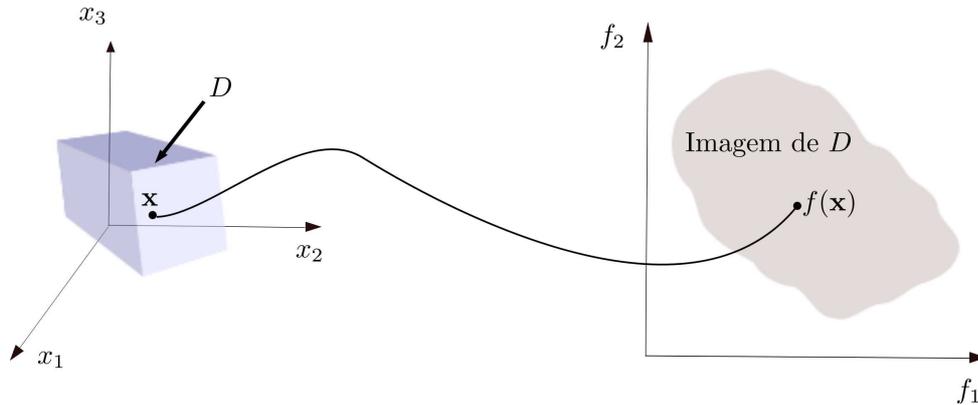


Figura 2.1: Exemplo de um mapeamento do vetor de variáveis de decisão  $\mathbf{x}$  de um POM com restrições no espaço das variáveis tridimensional para sua imagem no espaço dos objetivos bidimensional.

A solução de um POMONO é facilmente definida, uma vez que a relação de ordem entre os números reais é trivial. Entretanto, para se definir uma solução de um POM, se faz necessário estabelecer uma relação de ordem vetorial, que é comumente baseada na noção de dominância introduzida por (PARETO, 1896).

**Definição 2.** Considera-se dois vetores  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ . Uma, e somente uma, das situações **a**, **b** e **c** descritas a seguir ocorre:

- a) Se  $f_i(\mathbf{x}) \leq f_i(\mathbf{y})$  com  $i = 1, \dots, P$ , e existe um  $j$  natural entre 1 e  $P$  tal que  $f_j(\mathbf{x}) < f_j(\mathbf{y})$ , então  $\mathbf{x}$  domina  $\mathbf{y}$  (denota-se por  $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ ).
- b) Se  $f_i(\mathbf{y}) \leq f_i(\mathbf{x})$  com  $i = 1, \dots, P$ , e existe um  $j$  natural entre 1 e  $P$  tal que  $f_j(\mathbf{y}) < f_j(\mathbf{x})$ , então  $\mathbf{y}$  domina  $\mathbf{x}$  (denota-se por  $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$ ).
- c)  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  são ditos não-dominados entre si (denota-se por  $\mathbf{x} \not\succeq \mathbf{y}$  e  $\mathbf{y} \not\succeq \mathbf{x}$ ).

Em geral, um POMONO tem uma única solução e um POM tem infinitas soluções. Isso porque as funções objetivo de um POM são, frequentemente, conflitantes. Ou seja, a diminuição em uma delas pode provocar aumento em outra(s) e vice-versa. O conjunto  $Q \subseteq D$  formado por todas as soluções de um POM não-dominadas entre si e que não são

dominadas por nenhuma outra de  $D$  é chamado de Soluções Pareto-Ótimas. A união das imagens de todos os elementos de  $Q$  pelas funções objetivo é chamada Frente de Pareto do POM. Para o Exemplo ilustrado pela Figura 2.1, a Frente de Pareto é exibida na Figura 2.2.

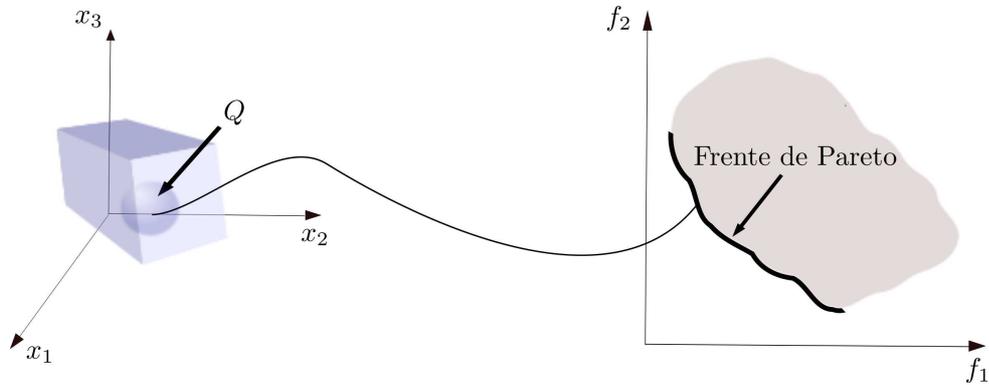


Figura 2.2: Frente de Pareto do exemplo da Figura 2.1.

O principal objetivo de um POM é obter o conjunto  $Q$ . Dada a dificuldade de se obter  $Q$  completamente, já que em geral ele contém infinitos elementos, métodos que o aproximam por um conjunto discreto são necessários. Para que um conjunto discreto  $Q'$  seja uma aproximação adequada de  $Q$ , sua imagem deve ser suficientemente próxima da Frente de Pareto (convergente) e possuir maior diversidade possível sobre ela. A Figura 2.3 ilustra essas características de convergência e diversidade de  $Q'$  e a Seção 2.2 apresenta alguns Métodos Clássicos<sup>2</sup> para sua obtenção.

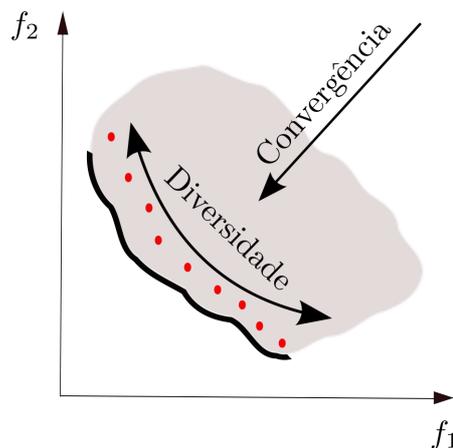


Figura 2.3: Ilustração das características de convergência e diversidade que a imagem de um conjunto discreto  $Q'$  (representada pelos pontos vermelhos) deve ter para que ele seja considerado uma boa aproximação de  $Q$ .

<sup>2</sup>Denominação encontrada em (DEB, 2001).

## 2.2 Alguns Métodos Clássicos

(DEB, 2001) apresenta diversos métodos anteriores às metaheurísticas para a resolução de um POM, os quais ele denomina de Métodos Clássicos e que tem a característica de transformar o POM em diversos POMONOs, resolvendo cada um deles separadamente. O autor ainda afirma que o Método Clássico mais utilizado na literatura provavelmente é o Método da Soma Ponderada, que transforma o POM em um POMONO da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^P w_i f_i(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{x} \in D \subseteq \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Cada função objetivo  $f_i$  tem um peso  $0 \leq w_i \leq 1$  definido pelo usuário e cada vetor de pesos  $\mathbf{w}$  gera um POMONO na forma da Equação (2.2), cuja solução corresponde a um elemento de  $Q'$ . Assim, deve-se resolver vários POMONOs para a obtenção satisfatória de  $Q'$ , cada um com um vetor de pesos  $\mathbf{w}$  diferente. Vale destacar que a Equação (2.2) foi construída tendo em mente  $\sum_{i=1}^P w_i = 1$ .

A Figura 2.4 mostra um exemplo do Método da Soma Ponderada com dois vetores de pesos  $\mathbf{w}_1$  e  $\mathbf{w}_2$  em um POM com  $P = 2$ . Cada vetor representa um conjunto de retas paralelas cuja direção é normal à ele. O vetor  $\mathbf{w}_1$  tem direção normal às retas vermelhas e o vetor  $\mathbf{w}_2$  tem direção normal às retas azuis. Logo, de todas as interseções dessas retas com a Frente de Pareto, aquela gerada pela reta que estiver mais próxima da origem do plano cartesiano é a imagem da solução do POMONO da Equação (2.2) com o vetor de pesos  $\mathbf{w}$  correspondente. Uma desvantagem do Método da Soma Ponderada está na definição dos vetores de pesos a serem utilizados, o que muitas vezes não é uma tarefa simples. Uma boa distribuição deles no espaço não necessariamente implica em boa diversidade de  $Q'$ , como ilustrado na Figura 2.5.

Outra desvantagem do Método da Soma Ponderada diz respeito à convexidade da Frente de Pareto. Em  $\mathbb{R}^2$ , por exemplo, a Frente de Pareto é dita Convexa se o interior do segmento de reta que une quaisquer dois de seus elementos ou fica inteiramente contido na região do plano que ela domina ou fica sobre ela, não podendo nunca ter pontos que dominem a Frente de Pareto (Figura 2.6). O Método da Soma Ponderada não consegue atingir parte da Frente de Pareto quando ela é Não-Convexa (Figura 2.7).

Outros Métodos Clássicos que não possuem a dificuldade de resolver problemas cuja Frente de Pareto é Não-Convexa foram propostas na literatura. Um deles é o Método

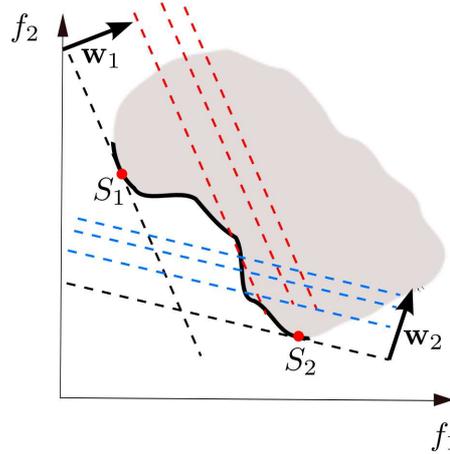


Figura 2.4: A solução do POMONO da Equação (2.2) com o vetor de pesos  $\mathbf{w}_1$  é um elemento de  $Q'$  cuja imagem é  $S_1$ . Idem para  $\mathbf{w}_2$  e  $S_2$ .

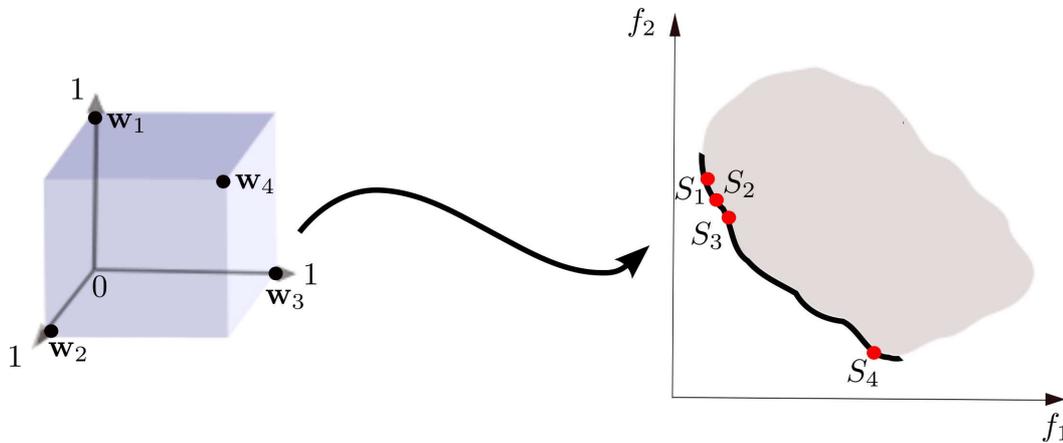


Figura 2.5: As imagens das soluções dos POMONOs da Equação (2.2) para os vetores de pesos  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$ ,  $\mathbf{w}_3$  e  $\mathbf{w}_4$  são  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  e  $S_4$ , respectivamente. Embora os vetores de pesos estejam razoavelmente espalhados no espaço, não há garantias de que  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  e  $S_4$  estejam bem espaçadas sobre a Frente de Pareto, podendo deixar regiões dela sem cobertura.

da Restrição  $\varepsilon$ , proposto por (HAIMES et al., 1971). Trata-se de escolher uma função objetivo (digamos  $f_i$ , com  $i$  escolhido entre 1 e  $P$ ) a ser minimizada e transformar as  $P-1$  demais em restrições limitadas por valores reais  $\varepsilon_j^k$ , onde  $j = 1, \dots, P, j \neq i$  e  $k = 1, \dots, N$ , sendo  $N$  o número de vezes que o POMONO terá que ser resolvido. Cada um dos  $N$  problemas é definido como:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f_i(\mathbf{x}) \\
 \text{s.a.} \quad & f_j(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_j^k \\
 & \mathbf{x} \in D \subseteq \mathbb{R}^n.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

A Figura 2.8 mostra um exemplo com duas funções objetivo, onde minimiza-se a função  $f_2$  e mantém a função  $f_1$  como restrição limitada por um número real  $\varepsilon_1^k$ , com

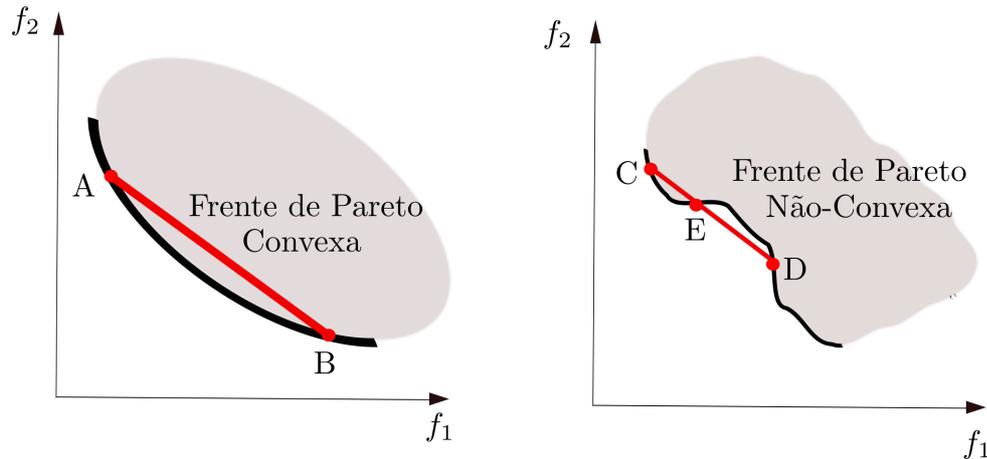


Figura 2.6: Exemplos de Frentes de Pareto Convexa e Não-Convexa. Na Frente de Pareto Convexa, o interior do segmento AB fica inteiramente contido na região do plano que ela domina. Na Frente de Pareto Não-Convexa, o segmento ED contém pontos que dominam a Frente de Pareto.

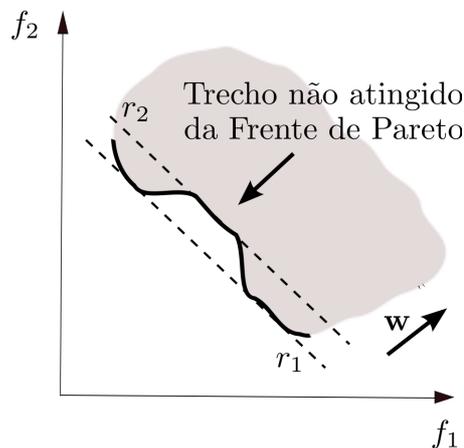


Figura 2.7: O Método da Soma Ponderada não atinge parte da Frente de Pareto quando ela é Não-Convexa. As retas  $r_1$  e  $r_2$  são normais ao mesmo vetor de pesos  $w$ , porém a solução do problema da Equação (2.2) vai ter imagem na interseção da reta  $r_1$  com a Frente de Pareto, já que ela representa valor menor da função objetivo por estar mais próxima da origem do plano cartesiano.

$k \in \{a, b, c, d\}$ . Para cada valor de  $\varepsilon_1^k$  encontra-se um elemento de  $Q'$  ( $k = b$  e  $k = c$ ), caso exista. Além disso, diferentes valores de  $\varepsilon_1^k$  podem gerar um mesmo valor em  $Q'$  ( $k \geq d$ ) ou até mesmo não tornar possível obter nenhuma solução ( $k = a$ ).

Apesar desse método teoricamente ser capaz de obter  $Q'$  com as características de convergência e diversidade sobre a Frente de Pareto, incluindo os problemas em que ela é Não-Convexa, a dificuldade de se determinar valores adequados dos parâmetros para tal fim ainda permanece. Escolhas indevidas para  $\varepsilon_j^k$  podem prover regiões inefectíveis ou imagens concentradas em uma única região da Frente de Pareto.

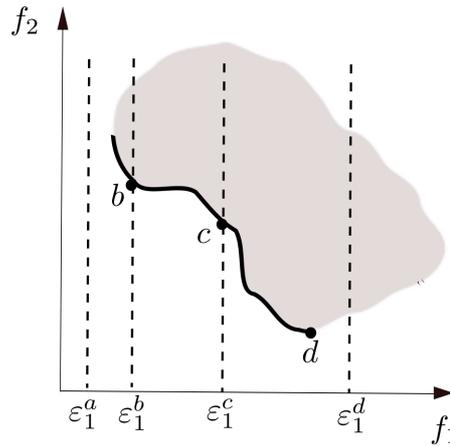


Figura 2.8: Método da Restrição  $\varepsilon$  com duas funções objetivo (inspirada na Figura de (DEB, 2001)).

## 2.3 Considerações Finais do Capítulo

Juntamente com uma revisão detalhada sobre estes e outros Métodos Clássicos, (DEB, 2001) lista as dificuldades que eles possuem para obter  $Q'$  com uma boa convergência e diversidade sobre a Frente de Pareto de um POM. São elas a necessidade de se resolver diversos POMONOs, a dificuldade de se fazer boas escolhas dos parâmetros e o fato de nem toda região da Frente de Pareto ser alcançada por alguns desses métodos quando ela é Não-Convexa.

Essas dificuldades, juntamente com a limitação do uso de métodos determinísticos por normalmente exigir uma ou mais características das funções objetivo tais como linearidade, convexidade, continuidade e diferenciabilidade, além de cálculos de derivadas, gradientes ou hessianas, impulsionaram e popularizaram o uso de metaheurísticas na resolução de POMs. As metaheurísticas se mostraram capazes de obter aproximações de  $Q'$  sem a necessidade de fragmenta-los em diversos POMONOs (DEB, 2001) e sem exigências das características das funções objetivo nem cálculos mencionados anteriormente, podendo ser aplicadas a um maior número de POMs (LAMPINEN, 2000).

As metaheurísticas mais populares na resolução de POMs são os Algoritmos Evolucionistas (AEs) (ZHOU et al., 2011), que se baseiam nos princípios da evolução biológica. A literatura os denomina como MOEAs (do inglês *Multi-Objective Evolutionary Algorithms*) e uma revisão sobre os principais aspectos deles é feita no Capítulo 3.

# 3 ALGORITMOS EVOLUCIONISTAS PARA OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO - MOEAs

Diversas publicações na literatura, tais como (VELDHUIZEN, 1999; DEB, 2001; COELLO et al., 2007; TAKAHASHI, 2009; ZHOU et al., 2011), dão um aprofundamento mais detalhado do funcionamento de um MOEA. Seus principais aspectos serão destacados neste Capítulo.

## 3.1 Conceitos Básicos

No Capítulo 2 mostrou-se que o uso eficaz de Métodos Clássicos em POMs é limitado a uma pequena classe (LAMPINEN, 2000). Na prática, é mais comum resolver um POM de maneira heurística (TAKAHASHI, 2009). A Definição 3, que resume as definições e propriedades detalhadas em (VELDHUIZEN, 1999), apresenta o que é a maneira heurística de resolução de um POM.

**Definição 3.** Considere um POM, seu conjunto factível  $D$  e um subconjunto finito não vazio  $W \subseteq D$ . O subconjunto  $\emptyset \neq W' \subseteq W$  formado por todos os elementos de  $W$  não são dominados por nenhum outro de  $W$  é denominado conjunto de Soluções Pareto-Ótimas do POM com relação à  $W$ . Matematicamente, tem-se  $W' = \{\mathbf{x} \in W \mid \forall \mathbf{y} \neq \mathbf{x} \in W \Rightarrow \mathbf{y} \not\prec \mathbf{x}\}$ . Resolver um POM de maneira heurística é obter um  $W'$  com relação à algum  $W$  selecionado de algum modo. É fácil ver que  $\forall \mathbf{y}, \mathbf{x} \in W', (\mathbf{y} \neq \mathbf{x}) \Rightarrow (\mathbf{y} \not\prec \mathbf{x}) \wedge (\mathbf{x} \not\prec \mathbf{y})$ .

Quando um POM representa um problema real, um ou mais tomador(es) de decisão (DM, do inglês *Decision Maker*) tem a tarefa de fazer escolhas sobre as soluções de  $Q$  que irão utilizar, uma vez que eles são especialistas do problema. Dessa forma, mesmo não sendo possível obter provas formais de que as soluções obtidas por métodos heurísticos pertençam ou não ao  $Q$  do POM em questão (TAKAHASHI, 2009), elas podem ser consideradas aceitáveis pelo(s) DM(s) (BENTLEY; WAKEFIELD, 1998).

Os MOEAs resolvem um POM de maneira heurística. Eles são Algoritmos Evolucionistas (AEs) projetados para POMs que, tal como todo AE, geram o conjunto  $\emptyset \neq W \subseteq D$  inspirados nas ideias da seleção natural da Teoria da Evolução de Charles Darwin seguindo os princípios de sobrevivência e aptidão (DEB, 2001; COELLO et al., 2007). Em geral, um AE consiste em uma população de indivíduos<sup>1</sup> (vetores de variáveis de decisão) manipulada por um conjunto de operadores e que é avaliada por uma função de aptidão. A reprodução de novos indivíduos e a seleção de uma nova geração estão entre os mecanismos comumente encontrados em um AE para evoluir sua população. (COELLO et al., 2007) define um AE a partir de um algoritmo ((COELLO et al., 2007), p.28-29), o qual foi sintetizado e adaptado aqui no **Algoritmo 1**.

Na Definição 3,  $W$  representa todos os indivíduos factíveis gerados pelo MOEA durante sua execução e o subconjunto  $W' \subseteq W$  é o conjunto de Soluções Pareto-Ótimas gerado pelo MOEA, o qual será designado neste texto por  $SPO$ . Existem diversos experimentos na literatura que mostram o potencial dos MOEAs para encontrar  $W'$  como uma aproximação de  $Q$  aceitável pelo(s) DM(s) (DEB, 2001; COELLO et al., 2007; BRANKE et al., 2008; ZHOU et al., 2011).

---

**Algoritmo 1** Definição de um AE (Adaptado de (COELLO et al., 2007))

---

- 1:  $t := 0$  ▷  $t$  é o contador de gerações.
  - 2: Inicializa a população  $P(t)$ .
  - 3: **enquanto** Critério de parada não é atendido **faça**
  - 4:      $P'(t) := \{ \text{indivíduos originados da aplicação de operadores de recombinação e mutação sobre os indivíduos da população } P(t) \}$ .
  - 5:      $P(t+1) := \text{indivíduos selecionados de } P'(t) \cup P(t)$ .
  - 6:      $t := t + 1$ .
  - 7: **fim enquanto**
- 

(SCHAFFER, 1984) foi o primeiro a propor um MOEA e, desde então, tem havido um interesse crescente no desenvolvimento de MOEAs cada vez mais robustos (ZHOU et al., 2011). Destacam-se aqui MOEAs baseados em dois dos AEs de maiores sucessos (BINITHA; SATHYA, 2012): os Algoritmos Genéticos (AGs), proposto por (HOLLAND, 1975), e a Evolução Diferencial (ED), proposta por (STORN; PRICE, 1995). Nas próximas seções serão detalhados alguns desses MOEAs.

---

<sup>1</sup>Em um AE, indivíduos são conhecidos de modo mais geral por soluções candidatas.

## 3.2 MOEAs Baseados em Algoritmos Genéticos

Os três principais operadores dos Algoritmos Genéticos (AGs) são seleção, reprodução e mutação (BINITHA; SATHYA, 2012). Os AGs começam por inicializar uma população de indivíduos geralmente sob a forma de vetores binários, chamados cromossomos dos indivíduos. Avalia-se a aptidão de cada indivíduo usando uma função adequada, geralmente a própria função objetivo. Com base nessa aptidão, seleciona-se os melhores indivíduos (denominados pais) para cruzamentos e mutações, dando origem a novos indivíduos (denominados filhos). A Figura 3.1 fornece uma visão geral de um AG. Alguns MOEAs populares baseados em AG serão detalhados a seguir.

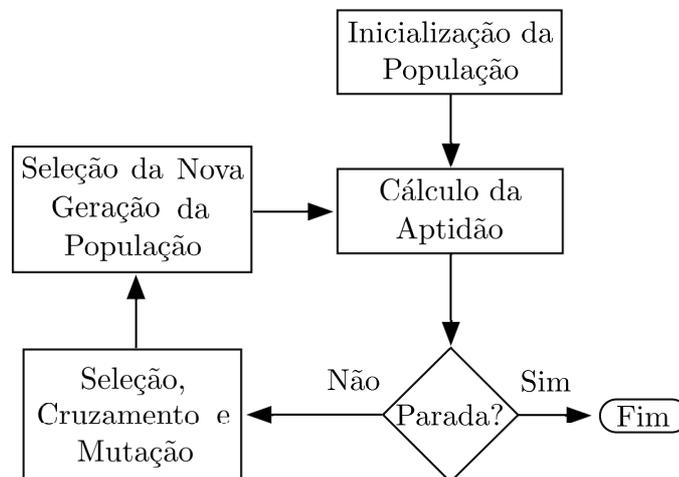


Figura 3.1: Visão Geral de um Algoritmo Genético.

### 3.2.1 VEGA

A primeira implementação de um MOEA é creditada a David Schaffer, que propôs em (SCHAFFER, 1984) um AG denominado VEGA (*Vector Evaluated Genetic Algorithm*). A ideia do VEGA é a avaliação do indivíduo feita dividindo a população em subpopulações (uma para cada função objetivo) de tal forma que os indivíduos de cada subpopulação fossem avaliados somente na sua função objetivo. Os demais operadores genéticos eram realizados sobre toda a população. O VEGA possui a tendência de encontrar soluções próximas ao ótimo de cada função objetivo, o que não necessariamente significa que essas soluções possuem as características desejáveis de convergência e diversidade sobre a Frente de Pareto.

A partir do VEGA, outros MOEAs foram propostos sendo a maioria deles baseada no

esquema mais popular de classificação (COELLO et al., 2007): a Ordenação de Pareto (no inglês *Non-dominated Sorting*), proposta por (GOLDBERG, 1989). A Ordenação de Pareto consiste em classificar uma população  $P$  em  $d$  subconjuntos tais que  $F_1 = \{\text{todos os indivíduos não-dominados de } P \text{ e que não são dominados por nenhum outro de } P\}$  (posto 1 ou, no inglês, *rank 1*),  $F_2 = \{\text{todos os indivíduos não-dominados de } P \setminus F_1 \text{ e que não são dominados por nenhum outro de } P \setminus F_1\}$  (posto 2 ou, no inglês, *rank 2*),  $\dots$ ,  $F_d = \{\text{todos os indivíduos não-dominados de } P \setminus \{F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{d-1}\} \text{ e que não são dominados por nenhum outro de } P \setminus \{F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{d-1}\}\}$  (posto  $d$  ou, no inglês, *rank d*), onde  $P = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_d$ . A Figura 3.2 mostra um exemplo da Ordenação de Pareto em um problema com duas funções objetivo.

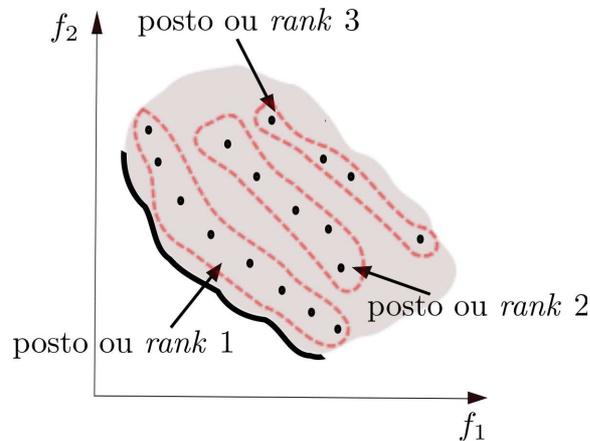


Figura 3.2: Exemplo da Ordenação de Pareto em um problema com duas funções objetivo pelo procedimento proposto por (GOLDBERG, 1989) e que atualmente é a base da maioria dos MOEAs.

### 3.2.2 NSGA-II

Dentre todos os MOEAs existentes na literatura que se baseiam em Ordenação de Pareto, o *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II* (NSGA-II), proposto por (DEB et al., 2002), é o mais popular (LI; ZHANG, 2009). O NSGA-II é uma versão do *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm* (NSGA), proposto por (DEB; SRINIVAS, 1995). No NSGA, os indivíduos de posto 1 tem preferência de seleção sobre os demais. O mesmo acontece com os indivíduos de posto 2 que tem preferência de seleção sobre os demais, exceto em relação aos indivíduos de posto 1. Desse modo, indivíduos de postos menores tem mais chance de permanecer na população e serem pais de novos indivíduos.

Para manter a população evoluindo de forma bem diversificada sobre a Frente de

Pareto, um esquema de nicho foi incluído no NSGA. O nicho de um indivíduo é um valor baseado no número de vizinhos no espaço dos objetivos. A Figura 3.3 exemplifica esse conceito. Nela, as circunferências  $C_1$  e  $C_2$  tem o mesmo raio  $\sigma_{share}$  que define a vizinhança dos indivíduos  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$ , respectivamente. Existem mais indivíduos com imagens no interior de  $C_1$  do que no interior de  $C_2$ . Apesar dos indivíduos  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  terem o mesmo posto,  $\mathbf{x}_2$  terá preferência de seleção em relação ao  $\mathbf{x}_1$  no NSGA por estar em uma área com menos vizinhos no espaço dos objetivos.

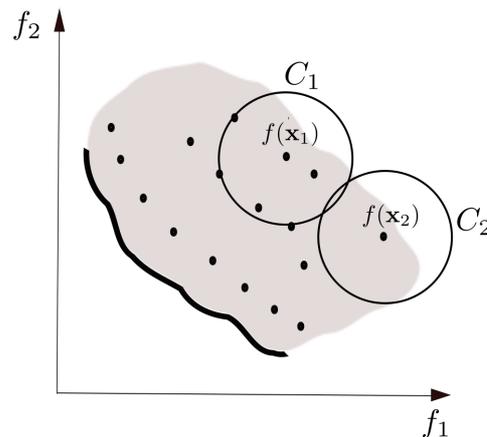


Figura 3.3: Nicho para promoção da diversidade no NSGA: apesar dos indivíduos  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  terem o mesmo posto,  $\mathbf{x}_2$  terá preferência de seleção em relação ao  $\mathbf{x}_1$  no NSGA por estar em uma área com menos vizinhos no espaço dos objetivos.

O NSGA-II foi proposto para melhorar as fragilidades encontradas no NSGA, tais como a sensibilidade ao parâmetro  $\sigma_{share}$  e o alto custo computacional de seu algoritmo de Ordenação de Pareto. Ele possui um algoritmo computacionalmente eficiente para a Ordenação de Pareto e uma nova técnica de promoção de diversidade que é livre de parâmetros, chamada *crowding distance* ( $CD$ ).

O valor de  $CD$  de cada solução se baseia na distância em que sua imagem se encontra das imagens vizinhas mais próximas para cada função objetivo dentro de um mesmo posto. O **Algoritmo 2** calcula o valor de  $CD$  de cada indivíduo em uma população. Quanto maior o valor de  $CD$ , mais distante a solução se encontra de suas vizinhas no espaço dos objetivos, tornando maior sua preferência na seleção para a próxima geração da população. Para manter as soluções candidatas que tem imagem nas extremidades de um posto, é atribuído valor infinito ao seus  $CDs$ . Em um problema com duas funções objetivo,  $CD$  é o semiperímetro de um retângulo cujos vértices são as imagens vizinhas mais próximas (Figura 3.4).

---

**Algoritmo 2** Cálculo do *Crowding Distance*


---

- 1:  $N \leftarrow$  número de soluções que possuem o mesmo posto.
  - 2:  $P \leftarrow$  número de funções objetivo.
  - 3:  $S_{N \times P} \leftarrow$  matriz de tamanho  $N \times P$  onde o elemento  $s_{i,j}$  é a posição da solução  $i$  na ordenação crescente das  $N$  soluções em relação ao objetivo  $j$ .
  - 4:  $CD(i) = 0 \leftarrow$  Inicialização do *crowding distance* da solução  $i$  como sendo nulo.
  - 5: **para**  $j = 1 : P$  **faça**
  - 6:     **para**  $k = 1 : N$  **faça**
  - 7:         Identificar  $i_k$  tal que  $s_{i_k,j} = k$ .
  - 8:     **fim para**
  - 9:      $CD(i_1) = CD(i_N) = \infty$ .
  - 10:    **para**  $k = 2 : N - 1$  **faça**
  - 11:          $CD(i_k) = CD(i_k) + f_j(i_{k+1}) - f_j(i_{k-1})$ ;
  - 12:    **fim para**
  - 13: **fim para**
- 

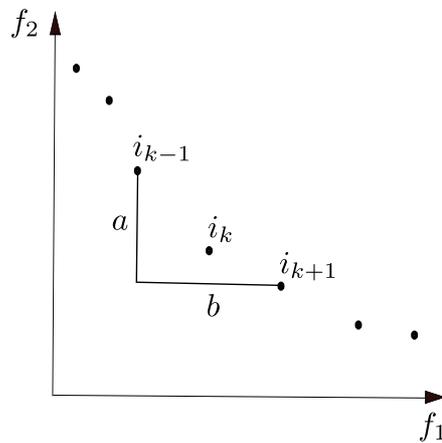


Figura 3.4: Cálculo do *Crowding Distance* do indivíduo  $i_k$  em um problema com duas funções objetivo:  $CD(i_k) = a + b$ .

O procedimento de seleção da nova geração da população do NSGA-II é feito como segue: une-se a população corrente com os filhos gerados e classifica-se esse conjunto pelo procedimento de Ordenação de Pareto. Terá preferência de entrada na próxima geração da população os indivíduos com postos mais baixos. Quando for necessário selecionar um indivíduo entre 2 ou mais dentro do mesmo posto, o indivíduo com maior valor de  $CD$  terá preferência. A Figura 3.5 mostra o esquema de seleção do NSGA-II.

É muito comum na literatura encontrar trabalhos que utilizam o NSGA-II com o operador *Simulated Binary Crossover* (SBX) (DEB; AGRAWAL, 1995). Esse operador trabalha com codificação real para o vetor de variáveis de decisão ao invés dos tradicionais cromossomos binários. (DEB et al., 2002), por exemplo, faz uso do operador SBX acoplado ao NSGA-II em seus experimentos (designado lá por *real-coded NSGA-II*) e

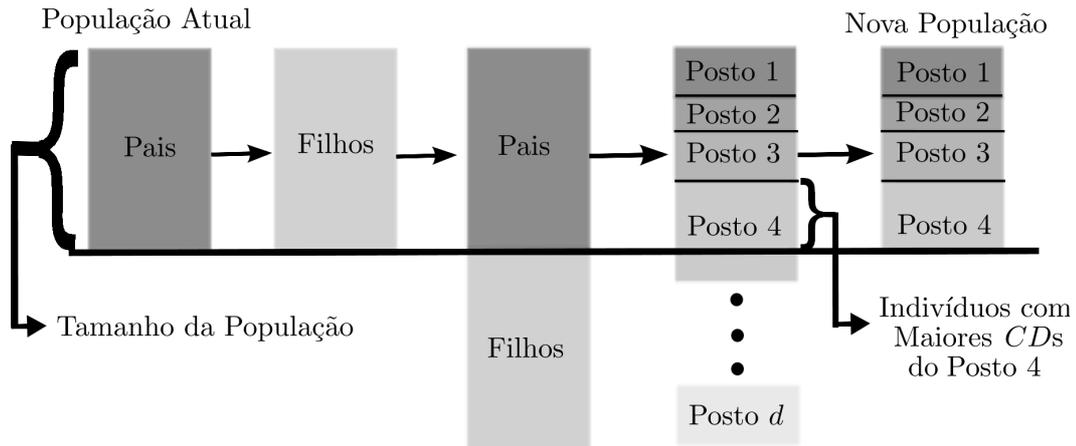


Figura 3.5: Esquema de Seleção da Próxima Geração do NSGA-II.

conclui ser muito mais eficiente para resolver os problemas com restrições adotados em seus experimentos:

*"Although this new definition can be used with any other MOEAs, the real-coded NSGA-II with this definition has been shown to solve four different problems much better than another recently-proposed constraint-handling approach."* ((DEB et al., 2002), p.196).

O operador de recombinação SBX cria cada entrada  $i$  dos filhos 1 e 2 (designados por **Filho**<sub>1</sub> e **Filho**<sub>2</sub>) a partir da entrada  $i$  de dois indivíduos selecionados como pais (designados por **Pai**<sub>1</sub> e **Pai**<sub>2</sub>) através do seguinte procedimento: um número aleatório  $\mu \in [0,1]$  é gerado. Seja a função de distribuição de probabilidade

$$f(\beta_i) = \begin{cases} 0,5(\eta_c + 1)\beta_i^{\eta_c}, & \text{se } \beta_i < 1 \\ \frac{0,5(\eta_c+1)}{\beta_i^{\eta_c+2}}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $\eta_c$  é um número real não negativo definido pelo usuário (denominado índice de distribuição). O valor de  $\beta_i$  é determinado de modo que a área sob a curva de zero até  $\beta_i$  seja  $\mu$ , dado por

$$\beta_i = \begin{cases} (2\mu)^{1/(\eta_c+1)}, & \text{se } \mu \leq 0,5 \\ \left(\frac{1}{2(1-\mu)}\right)^{1/(\eta_c+1)}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.2)$$

As entradas  $i$  dos filhos são respectivamente **Filho**<sub>1</sub>( $i$ ) = 0,5[(1 +  $\beta_i$ )**Pai**<sub>1</sub>( $i$ ) + (1 -  $\beta_i$ )**Pai**<sub>2</sub>( $i$ )] e **Filho**<sub>2</sub>( $i$ ) = 0,5[(1 -  $\beta_i$ )**Pai**<sub>1</sub>( $i$ ) + (1 +  $\beta_i$ )**Pai**<sub>2</sub>( $i$ )].

Se ocorrer mutação da  $j$ -ésima entrada  $x_j$  do indivíduo  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , ela será obtida da seguinte forma: um novo número aleatório  $\mu \in [0,1]$  é gerado e a entrada  $x_j$  do indivíduo é mutada para  $x_j + \delta_j$ , onde

$$\delta_j = \begin{cases} (2\mu)^{1/(\eta_m+1)} - 1, & \text{se } \mu < 0,5 \\ 1 - 2(1 - \mu)^{1/(\eta_m+1)}, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.3)$$

sendo  $\eta_m$  um número real não negativo definido pelo usuário (denominado índice de mutação).

### 3.2.3 SPEA2

Outro MOEA muito popular na literatura é o *Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2* (SPEA2), proposto por (ZITZLER et al., 2001) como um melhoramento do *Strength Pareto Evolutionary Algorithm* (SPEA), proposto por (ZITZLER; THIELE, 1999). Seus operadores genéticos são baseados em AG e sua principal característica é a manutenção de uma população secundária, isto é, um arquivo externo das soluções não-dominadas encontradas durante sua execução.

Inicialmente, a população do SPEA2 é gerada aleatoriamente e um arquivo externo é preenchido com os indivíduos não-dominados dessa população. Filhos são gerados através de seleção, cruzamento e mutação tradicionais de um AG e cada entrada de um indivíduo não-dominado no arquivo externo provoca a exclusão daqueles que ele domina. No final do processo, os membros do arquivo externo são as soluções obtidas.

Essas soluções no arquivo externo participam do cruzamento e seleção do SPEA/SPEA2. Eles atribuem uma função de aptidão a um indivíduo denominada *Strength*, que depende do número de soluções que ele domina e/ou que é dominado. No SPEA, a atribuição da mesma aptidão a indivíduos diferentes, ambos dominados pelo mesmo terceiro indivíduo, é possível. Assim, se um único indivíduo dominar todo o resto da população, todos terão a mesma aptidão, independentemente de serem dominados ou dominar uns aos outros. Essas e outras fragilidades encontradas no SPEA foram corrigidas no SPEA2.

Para evitar que o número de soluções não-dominadas no arquivo externo cresça exorbitantemente, é estabelecida uma capacidade máxima de indivíduos nele. O SPEA2,

juntamente com o NSGA-II, são dois dos mais proeminentes MOEAs baseados em AG que utilizam informações da dominância de Pareto em sua execução (COELLO et al., 2007).

### 3.3 MOEAs Baseados em Evolução Diferencial

A Evolução Diferencial (ED) foi proposta por (STORN; PRICE, 1995) e é um AE muito popular. A ED possui 3 principais operadores: mutação, cruzamento e seleção. Cada indivíduo (chamado vetor alvo) gera um filho (chamado vetor experimental) usando informações baseadas na diferença entre outros indivíduos selecionados aleatoriamente.

A mutação sugerida por (STORN; PRICE, 1995) é dada pela adição da diferença ponderada entre dois indivíduos ao vetor alvo. O resultado dessa mutação é chamado de vetor doador  $\mathbf{v}$ , o qual combinado com o vetor alvo  $\mathbf{x}$  (cruzamento) da origem ao vetor experimental  $\mathbf{u}$ . O **Algoritmo 3** mostra a mutação e o cruzamento trivial<sup>2</sup> entre  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{v}$ , onde  $F \in \mathbb{R}$  e  $CR \in [0,1]$  são parâmetros definidos pelo usuário.

---

**Algoritmo 3** Cruzamento trivial que gera uma nova solução candidata  $\mathbf{u}$  em ED.

---

```

1:  $\mathbf{x}$  vetor alvo.
2: Sorteia-se três soluções candidatas  $\mathbf{x}_{r1}$ ,  $\mathbf{x}_{r2}$  e  $\mathbf{x}_{r3}$  da população.
3:  $I_{rand} \leftarrow$  inteiro entre 1 e  $N$  escolhido aleatoriamente, sendo  $N$  o número de entradas do vetor  $\mathbf{x}$ .
4: para  $i = 1 : N$  faça
5:    $rand \leftarrow$  real entre 0 e 1 escolhido aleatoriamente.
6:   se  $rand < CR$  ou  $i = I_{rand}$  então
7:      $\mathbf{u}(i) \leftarrow \mathbf{v}(i) = \mathbf{x}_{r1}(i) + F(\mathbf{x}_{r2}(i) - \mathbf{x}_{r3}(i))$ .
8:   senão
9:      $\mathbf{u}(i) \leftarrow \mathbf{x}(i)$ .
10:  fim se
11: fim para

```

---

A seleção utilizada por (STORN; PRICE, 1995) para compor a próxima geração em ED é feita do seguinte modo: se  $\mathbf{u}$  tiver melhor aptidão que  $\mathbf{x}$ , então  $\mathbf{u}$  será escolhido. Do contrário,  $\mathbf{x}$  será mantido na população. (STORN; PRICE, 1997) mostraram que ED é um método robusto que alcançava excelentes resultados em problemas de otimização com variáveis contínuas.

A ED foi estendida para POMs e tem se mostrado atraente na resolução destes, principalmente pela sua simplicidade de implementação e eficiência demonstrada pelos

---

<sup>2</sup>Denominação dada em (STORN; PRICE, 1995).

resultados obtidos (DAS; SUGANTHAN, 2011; MEZURA-MONTES et al., 2008). Os autores de (MEZURA-MONTES et al., 2008) analisaram trabalhos com MOEAs baseados em ED, apresentando uma revisão da literatura bem detalhada. Alguns dos MOEAs apresentados naquele trabalho são descritos a seguir.

### 3.3.1 DEMO

(ROBIC; FILIPIC, 2005) propuseram o *Differential Evolution for Multiobjective Optimization* (DEMO), que é um MOEA baseado em ED que utiliza tanto a mutação quanto o cruzamento trivial sugeridas em (STORN; PRICE, 1995) para evoluir a população (**Algoritmo 3**). O DEMO utiliza a relação de dominância na tomada de decisão da substituição do vetor alvo pelo experimental gerado por ele da seguinte forma: aquele vetor que domina o outro o substitui imediatamente na população. Se os dois vetores são não-dominados entre si, os dois permanecem na população, que será submetida ao procedimento de seleção do NSGA-II (Figura 3.5).

Nos experimentos realizados por (ROBIC; FILIPIC, 2005), o DEMO se mostrou competitivo ao NSGA-II e SPEA nos problemas analisados, além de obter desempenho superior aos demais MOEAs. Um deles é o *Multiobjective Differential Evolution* (MODE) proposto por (XUE, 2004), que será detalhado a seguir.

### 3.3.2 MODE

No MODE, cada vetor alvo gera um vetor experimental que é inserido na população, independente da relação de dominância existente entre eles. Após isso, o mesmo esquema de seleção do NSGA-II é aplicado (Figura 3.5). O MODE conta com duas particularidades, que são descritas a seguir.

A primeira é seu procedimento de mutação, onde ele usa informações de indivíduos não-dominados da população na construção do vetor experimental, sempre que estes estão sendo produzidos a partir de um vetor alvo dominado por algum indivíduo na população corrente. Para cada vetor alvo  $\mathbf{x}$  da população, o esquema de mutação do MODE é definido por  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + F(\mathbf{x}_{r1} - \mathbf{x}_{r2}) + \dots + F(\mathbf{x}_{r(L-1)} - \mathbf{x}_{rL})$  se  $\mathbf{x}$  é uma solução não-dominada da população corrente ou  $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{x}_{best} + (1 - \alpha)\mathbf{x} + F(\mathbf{x}_{r1} - \mathbf{x}_{r2}) + \dots + F(\mathbf{x}_{r(L-1)} - \mathbf{x}_{rL})$  caso contrário. Os indivíduos  $\mathbf{x}_{r1}, \mathbf{x}_{r2}, \dots, \mathbf{x}_{rL}$  e  $\mathbf{x}_{best}$  são selecionados aleatoriamente na população corrente, onde  $\mathbf{x}_{best}$  é escolhido entre os indivíduos não-dominados da população

corrente e que, ao mesmo tempo, dominam  $\mathbf{x}$ . No MODE,  $L$  e  $\alpha \in [0, 1]$  são parâmetros definidos pelo usuário.

A segunda particularidade do MODE é que, além do parâmetro adicional  $\alpha$ , existe o parâmetro  $\sigma_{crowd}$  para conservar melhor a diversidade que atua de modo similar ao  $\sigma_{share}$  do NSGA. Os indivíduos cujo *crowding distance* seja menor que  $\sigma_{crowd}$  são penalizados no ranqueamento de tal forma que sua seleção seja dificultada. Em seus experimentos, (XUE, 2004) comparou o MODE ao SPEA, tendo o MODE melhor desempenho global nas medidas de desempenho adotadas e nos POMs analisados. Nos experimentos de (ROBIC; FILIPIC, 2005), o MODE obteve convergência superior ao NSGA-II na maioria dos problemas *Benchmark* conhecidos como ZDT (Zitzler-Deb-Thiele) (ZITZLER et al., 2000).

### 3.3.3 GDE3

(KUKKONEN; LAMPINEN, 2005) propuseram o *The Third Step of Generalized Differential Evolution* (GDE3) como um melhoramento do *Generalized Differential Evolution* (GDE) (LAMPINEN, 2001) e do *Generalized Differential Evolution 2* (GDE2) (KUKKONEN; LAMPINEN, 2004).

O GDE introduziu o uso da relação de dominância na tomada de decisão da substituição do vetor alvo pelo experimental gerado por ele, procedimento que mais tarde foi adotado pelo DEMO. O vetor experimental só entraria na próxima geração da população caso dominasse o vetor alvo, sendo descartado caso contrário.

No GDE não há qualquer mecanismo de manutenção da diversidade das soluções, o que lhe causou problemas de desempenho. Com o advento do *crowding distance*, (KUKKONEN; LAMPINEN, 2004) propuseram o *Generalized Differential Evolution 2* (GDE2) modificando o esquema de seleção do GDE inserindo a seguinte condição: caso o vetor experimental e o vetor alvo sejam não-dominados entre si, prevalece aquele que tiver maior *crowding distance*. Os autores reconheceram que esse mecanismo melhora a distribuição das soluções obtidas mas retarda a convergência da população por favorecer soluções isoladas, tirando a melhor característica da ED: rápida convergência.

Diferentemente da maioria dos MOEAs que não foram projetados para resolver problemas com restrições (MEZURA-MONTES; COELLO, 2011), o GDE3 adota uma Ordenação de Pareto no espaço das restrições para o tratamento delas. Ele utiliza o

esquema da substituição do vetor alvo na próxima geração da população pelo experimental quando este último domina o primeiro, segundo o conceito de restrito-dominância (indicado por  $\succ_c$ ), o qual pressupõe verdadeiro um dos casos a seguir:

1. os dois são infactíveis e o vetor experimental domina o vetor alvo no espaço das restrições.
2. o vetor experimental é factível e o vetor alvo não.
3. os dois são factíveis e o vetor experimental domina o vetor alvo no espaço dos objetivos.

Caso os dois vetores sejam factíveis e não-dominados entre si, ambos seriam inseridos na população que, posteriormente, seria submetida a um esquema de seleção semelhante ao do NSGA-II, com uma modificação. Nos demais casos, o vetor experimental é descartado e o vetor permanece na população. A Figura 3.6 ilustra esse esquema de seleção.

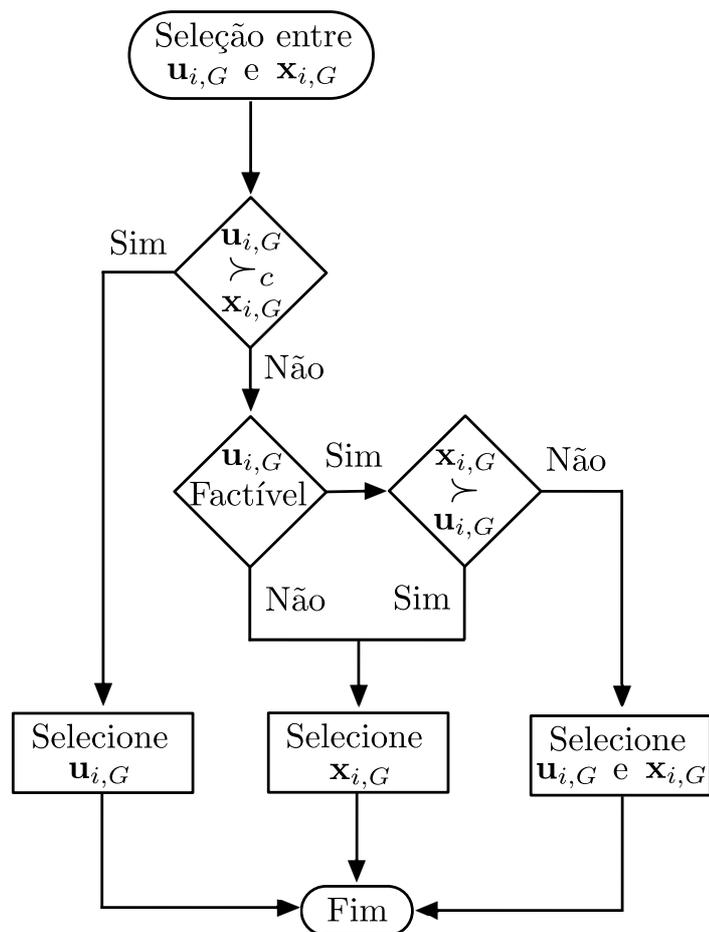


Figura 3.6: Esquema de seleção entre o vetor alvo e o vetor experimental gerado por ele no GDE3 (Figura Adaptada de (KUKKONEN, 2012)).

A modificação no esquema de seleção do NSGA-II utilizada pelo GDE3 é feita da seguinte forma: após a identificação da solução com o pior valor de  $CD$  e sua exclusão, repete-se o cálculo dos valores de  $CDs$  das soluções restantes, já que esses valores foram afetados pela exclusão daquele indivíduo. (KUKKONEN; LAMPINEN, 2005) afirma que essa modificação provoca uma melhoria da diversidade sem a introdução de um novo parâmetro.

O GDE3 participou da competição do *The Annual IEEE Congress on Evolutionary Computation* (CEC) realizado em 2009 (ZHANG et al., 2009), onde alcançou o 5º lugar geral em problemas sem restrições, e da versão do ano 2007 da mesma competição, perdendo apenas para o NSGA-II com codificação real. Os experimentos de (KUKKONEN; LAMPINEN, 2005) também compararam os desempenhos do GDE3 e do NSGA-II, os quais mostraram que o GDE3 foi bem competitivo.

## 3.4 Outros Aspectos sobre os MOEAs

Existem outros aspectos sobre MOEAs além dos que foram descritos anteriormente, como por exemplo MOEAs com outras estruturas, MOEAs para POMs com Muitos Objetivos e MOEAs que utilizam informação sobre as preferências do usuário. Esses três aspectos serão abordados brevemente a seguir, apresentando alguns MOEAs como exemplos.

### 3.4.1 MOEAs com Outras Estruturas

A maioria dos MOEAs compartilha uma estrutura similar à do NSGA-II com um procedimento de seleção da nova geração da população baseado em dominância de Pareto (ZHOU et al., 2011). Existem outras estruturas para MOEAs que, apesar de não serem tão populares, apresentam bons resultados na literatura. Um exemplo é o *Multiobjective Evolutionary Algorithm based on Decomposition* (MOEA/D), proposto por (ZHANG; LI, 2007).

O MOEA/D é baseado nas abordagens tradicionais de decompor um POM em vários POMONOs. Diferentemente dos Métodos Clássicos, o MOEA/D também é capaz de obter várias soluções em uma única execução. Isso porque cada POMONO, também chamado de subproblema, trabalha interagindo com os demais através de uma relação de vizinhança definida em termos das distâncias entre os vetores de pesos utilizados na decomposição.

Numa versão simplificada, cada indivíduo representa um subproblema que é associado a um vetor de pesos. Cada subproblema gera uma nova solução executando operações genéticas sobre indivíduos de subproblemas vizinhos e atualiza seu indivíduo para o filho gerado se ele é melhor do que o pai. Dessa forma, a solução candidata atualizada também contribui para o melhoramento das soluções candidatas vizinhas, mantendo uma boa diversidade.

O objetivo de cada subproblema é uma agregação ponderada dos objetivos originais do POM, a qual pretende minimizar a distância para o vetor ideal (formado pelos valores mínimos de cada função objetivo). Qualquer procedimento de agregação pode ser utilizado, sendo o método de Tchebycheff (MIETTINEN, 1999) o mais comum. Uma das principais vantagens do MOEA/D é que técnicas de busca local de POMONOs podem ser facilmente acopladas.

Estudos experimentais indicam que o MOEA/D é um bom otimizador para um amplo conjunto de problemas (LI; ZHANG, 2009; ZHANG; LI, 2007; ZHANG et al., 2010). Utilizando a estrutura MOEA/D juntamente com os operadores da Evolução Diferencial, (LI; ZHANG, 2009) propuseram o MOEA/D-DE, o qual obteve o melhor desempenho nos problemas sem restrições em uma competição que fez parte do *The Annual IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)* realizado em 2009 (ZHANG et al., 2009)<sup>3</sup>. Além disso, (LI; ZHANG, 2009) mostraram resultados onde o MOEA/D-DE superou o NSGA-II em problemas com formas complexas de Frentes de Pareto.

Além do MOEA/D, pode-se citar também o *Indicator Based Evolutionary Algorithm (IBEA)*, proposto por (ZITZLER; KÜNZLI, 2004), como outro MOEA que também possui estrutura diferente do NSGA-II. A qualidade das soluções obtidas por um MOEA pode ser medida através de um indicador e o IBEA utiliza esses indicadores para comparar um par de soluções candidatas sobre a sua permanência ou não na população.

### ***3.4.2 MOEAs Baseados em Preferências do Usuário***

Para problemas do mundo real, a tarefa dos tomadores de decisão é identificar no *SPO* obtido pelo MOEA uma ou mais soluções que melhor satisfazem suas preferências. Devido à natureza conflitante das funções objetivo dos POMs, o número total de soluções no *SPO* pode ser muito grande. Além disso, as opções podem representar fracamente as

---

<sup>3</sup><http://cswww.essex.ac.uk/staff/zhang/moeacompetition09.htm>.

preferências dos decisores. MOEAs que se utilizam de informação sobre as preferências dos tomadores de decisão podem orientar a pesquisa por soluções na região de interesse da Frente de Pareto, evitando aquelas que não representam de forma alguma essas preferências. Isso pode provocar uma melhoria significativa na qualidade das opções de escolha do ponto de vista dos tomadores de decisão, representando suas preferências de um modo bem melhor.

Esse tipo de MOEA começou a ser largamente explorado na última década e atualmente é uma das vertentes mais importantes nas pesquisas com MOEAs. (PURSHOUSE et al., 2014) classificam a forma com que esses MOEAs utilizam informações de preferências dos decisores em dois tipos: *a priori* e interativo. Os MOEAs que utilizam informações de preferências *a priori* são aqueles em que os decisores devem informar suas preferências antes do início do processo de busca, sem modificar essas informações ao longo de sua execução. Quando os decisores podem modificar e/ou incluir essas informações durante a execução do MOEA, Purshouse *et. al* o classifica como interativo.

Existem várias maneiras de inserir informações de preferência do usuário no processo de busca de um MOEA. Uma dessas maneiras é por meio de Pontos de Referência, isto é, aspirações para os valores das funções objetivo. Ela se adapta bem à resolução de problemas oriundos de áreas cujos decisores já acumulam larga experiência. O *Reference Point based NSGA-II* (R-NSGA-II), proposto em (DEB; SUNDAR, 2006), é um exemplo desse tipo de MOEA. Ele funciona como o NSGA-II, porém modificando procedimento do *Crowding Distance* da seguinte forma: para selecionar um indivíduo entre dois ou mais de mesmo posto, terá preferência aquele que estiver mais próximo dos pontos de referência.

Para definir a proximidade de um indivíduo  $\mathbf{x}$  à um ponto de referência  $\bar{\mathbf{z}}$ , a distância Euclidiana normalizada é adotada no R-NSGA-II e definida por

$$d(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{z}}) = \sqrt{\sum_{k=1}^P w_k \left( \frac{f_k(\mathbf{x}) - \bar{z}_k}{f_k^{max} - f_k^{min}} \right)^2} \quad (3.4)$$

onde  $f_k^{max}$  e  $f_k^{min}$  são os valores máximo e mínimo, respectivamente, da  $k$ -ésima função objetivo. O vetor de pesos de entradas  $w_k$  é definido por  $1/P$  quando as funções objetivo tem a mesma preferência.

O R-NSGA-II também possui um parâmetro  $\epsilon$  que controla a diversidade da população,

o qual trabalha como um tipo de operador de nicho. Todas as soluções de mesmo posto cuja soma das diferenças normalizadas de suas funções objetivo tem  $\epsilon$  como um valor máximo são agrupadas e somente uma solução de cada grupo selecionada aleatoriamente permanece na população. Caso necessário, depois desse processo, outras soluções podem ser selecionadas aleatoriamente dentre todas as restantes. A Figura 3.7, extraída de (DEB; SUNDAR, 2006), mostra o efeito de diferentes valores de  $\epsilon$  sobre a diversidade das soluções obtidas no conhecido problema *Benchmark ZDT1*.

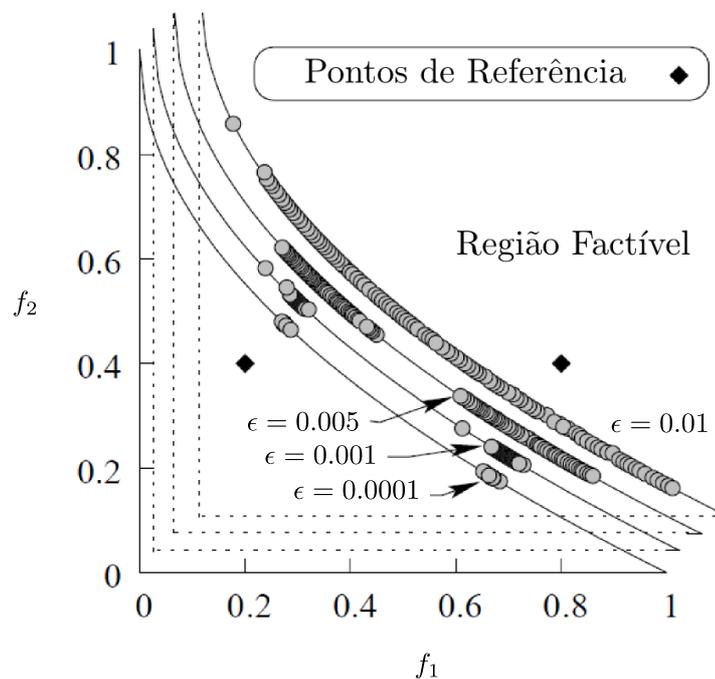


Figura 3.7: Efeito de diferentes valores de  $\epsilon$  sobre a diversidade das soluções obtidas no conhecido problema *Benchmark ZDT1*. Dois pontos de referência foram utilizados pelos autores (losangos pretos) e 4 valores de  $\epsilon$  (0.0001, 0.001, 0.005 e 0.01). (Extraída de (DEB; SUNDAR, 2006))

### 3.4.3 MOEAs para POMs com Muitos Objetivos

Em muitas aplicações do mundo real, existem POMs com mais de três funções objetivo. Projetar um MOEA para estes POMs é um grande desafio, isso porque MOEAs eficientes para POMs com  $P = 2$  ou 3 (NSGA-II, por exemplo) geralmente perdem essa eficiência quando  $P \geq 4$ . A principal razão está no fato de que o número de soluções não-dominadas entre si aumenta consideravelmente à medida que o número de funções objetivo aumenta, dificultando a seleção pela Ordenação de Pareto (VON LUCKEN et al., 2014). Como a maioria dos MOEAs são baseados em Ordenação de Pareto (ZHOU et al., 2011), se

fez necessário acoplar técnicas especiais de seleção para que eles se mostrassem eficientes nesses problemas.

Uma das maneiras de acoplar essas técnicas especiais de seleção é usando relações de preferências (VON LUCKEN et al., 2014). Um MOEA que utiliza relações de preferências no processo de seleção para resolver POMs com Muitos Objetivos é o *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm III* (NSGA-III), proposto em (DEB; JAIN, 2014). A estrutura básica do NSGA-II permanece no NSGA-III, com uma técnica de preferência semelhante à do R-NSGA-II acoplada. Assim, o NSGA-III exige a definição de um conjunto de pontos de referência e o procedimento de seleção da nova geração da população é feito da mesma forma que o NSGA-II, modificando o conceito de *Crowding Distance* de um modo semelhante ao R-NSGA-II. Maiores detalhes podem ser encontrados em (DEB; JAIN, 2014).

### 3.5 Considerações Finais do Capítulo

Foi realizada aqui uma revisão de alguns aspectos dos MOEAs e uma revisão bem detalhada sobre o estado da arte pode ser encontrada em (VON LUCKEN et al., 2014; PURSHOUSE et al., 2014; ZHOU et al., 2011; DAS; SUGANTHAN, 2011; MEZURA-MONTES et al., 2008). Outro aspecto relativo aos MOEAs é o uso de técnicas especiais para o tratamento de restrições, já que POMs originados em aplicações do mundo real geralmente possuem a presença de restrições e a maior parte dos algoritmos bioinspirados não foram originalmente propostos para resolvê-los (ZHOU et al., 2011; MEZURA-MONTES; COELLO, 2011). No Capítulo 4 as técnicas utilizadas nessa tese serão apresentadas.

# 4 TÉCNICAS PARA O TRATAMENTO DE RESTRIÇÕES EM MOEAs

Este Capítulo discorre sobre algumas técnicas para o tratamento de restrições que podem ser acopladas aos MOEAs. A maior parte dos MOEAs não foram originalmente propostos para resolver problemas com restrições, embora algumas exceções (NSGA-II e GDE3, por exemplo) possam ser encontradas na literatura.

(MEZURA-MONTES; COELLO, 2011) apresentam uma análise dos tipos mais relevantes de técnicas de tratamento de restrições que foram adotadas juntamente com algoritmos bioinspirados para POMONOs. Os autores afirmam que o desenvolvimento de técnicas de tratamento de restrição para POMs recebeu pouca atenção na literatura especializada e isto pode ser devido ao fato de que a maioria dessas técnicas voltadas para POMONOs pode ser facilmente acoplada a POMs. Eles ainda citam ainda as Funções de Penalização Adaptativa e as Regras de Factibilidade como exemplos de técnicas de tratamento de restrições originalmente propostas para POMONOs que podem ser acopladas à MOEAs sem muitas alterações.

## 4.1 Funções de Penalização Adaptativa

As Funções de Penalização estão entre as técnicas de tratamento de restrições mais populares utilizando AE (ZHOU et al., 2011). Elas se baseiam em abordagens determinísticas de programação matemática, onde um PO com restrições é transformado em PO sem restrições através de um esquema que piora o valor da aptidão para os indivíduos inactivos (MEZURA-MONTES; COELLO, 2011).

(COELLO, 2002) mostra diversas Funções de Penalização utilizadas na literatura para POMONOs que podem ser classificadas em Estáticas, Dinâmicas e Adaptativas. As Estáticas (HOMAIFAR et al., 1994; RICHE et al., 1995; HOFFMEISTER; SPRAVE, 1996; KURI-MORALES; QUEZADA, 1998) dependem somente da definição de um valor

a ser somado ou multiplicado à função objetivo e as Dinâmicas (JOINES; HOUCK, 1994; MICHALEWICZ; ATTIA, 1994; CROSSLEY; WILLIAMS, 1997; KAZARLIS; PETRIDIS, 1998; TASGETIREN; SUGANTHAN, 2006; PUZZI; CARPINTERI, 2008) modifica os parâmetros de penalização em função do tempo da evolução, sem levar em conta características da população.

A maior dificuldade das penalizações Estáticas e Dinâmicas é que elas exigem um cuidadoso ajuste dos parâmetros para determinar a severidade das sanções a serem aplicadas. Esses parâmetros são dependentes do problema em questão, ou seja, um ajuste que obtém excelentes resultados em um pode não produzir bons resultados em outros, tornando-as pouco atrativas (MEZURA-MONTES; COELLO, 2011). Por outro lado, as Funções de Penalização Adaptativa alteram os valores dos parâmetros em função das características dos seus indivíduos durante o processo evolutivo, o que as torna menos dependentes do problema e, conseqüentemente, mais atrativas.

Técnicas de penalização adaptativa tem contribuído para algoritmos obterem bons resultados em POs com restrições, tais como os encontrados em (HADJ-ALOUANE; BEAN, 1997; RASHEED, 1998; HAMDA; SCHOENAUER, 2000; BARBOSA; LEMONGE, 2002; HAMIDA; SCHOENAUER, 2002; CHAFEKAR et al., 2003; HE et al., 2008; TESSEMA; YEN, 2009; MANI; PATVARDHAN, 2009; YEN, 2009; WOLDESENBET et al., 2009; WU, 2011; SILVA et al., 2011c; ANGELO et al., 2012; SILVA et al., 2013; VARGAS et al., 2013; VARGAS et al., 2014; VARGAS et al., 2015; ANGELO et al., 2015; LEMONGE et al., 2015), alguns deles aplicados à POMs.

(WOLDESENBET et al., 2009) por exemplo, estendem para POMs a proposta de penalização adaptativa de (TESSEMA; YEN, 2006) para POMONOs. A aptidão de cada indivíduo depende do valor das funções objetivo e da soma das violações das restrições. O número de indivíduos factíveis na população controla de forma adaptativa a ênfase dada para guiar o processo de busca de mais indivíduos factíveis ou na busca de soluções na Frente de Pareto. Essa técnica de tratamento das restrições é de simples implementação e não requer qualquer parâmetro. Ela foi implementada no NSGA-II e testada em 14 POMs com restrições. Os experimentos numéricos dos autores compararam a técnica com o NSGA-II com o tratamento de restrições original (proposto em (DEB et al., 2002)) e com a técnica de tratamento de restrições conhecida como Ray-Tai-Seow (RAY et al., 2001), obtendo resultados superiores.

Da mesma forma que (WOLDESENBET et al., 2009), (ANGELO et al., 2012) também estende para POMs a proposta de penalização adaptativa de (BARBOSA; LEMONGE, 2002) para POMONOs. Trata-se da técnica de penalização adaptativa denominada APM (*Adaptive Penalty Method*). (ANGELO et al., 2012) analisaram problemas de Otimização Estrutural (OE) cujas funções objetivo eram a minimização do peso da estrutura de treliças e a minimização do maior deslocamento de seus nós, restringindo as tensões das barras a um determinado valor. Eles utilizaram dois algoritmos baseados em Colônia de Formigas e os resultados apresentados se mostraram eficientes, inclusive com algumas das soluções obtidas compatíveis com a do POMONO equivalente.

A técnica APM foi originalmente proposta por (BARBOSA; LEMONGE, 2002) para POMONOs resolvidos através de AG. Entre suas vantagens estão os fatos de ser livre de parâmetros a serem definidos pelo usuário e de fácil implementação computacional (LEMONGE; BARBOSA, 2004). Sua robustez no tratamento de restrições em problemas de OE pode ser vista nos trabalhos que a utilizam diretamente, seja na sua formulação original ou introduzindo algumas alterações: (ANGELO et al., 2015; LEMONGE et al., 2015; VARGAS et al., 2015; VARGAS et al., 2014; VARGAS et al., 2013; SILVA et al., 2013; CARVALHO et al., 2013; ANGELO et al., 2012; SILVA et al., 2011a; SILVA et al., 2011c; SILVA et al., 2011b; SILVA et al., 2011d; SILVA et al., 2008; BARBOSA et al., 2008; BARBOSA; LEMONGE, 2008; LEMONGE; BARBOSA, 2004; BARBOSA; LEMONGE, 2003a; BARBOSA; LEMONGE, 2003b). Trabalhos de aplicações em outras áreas e/ou em suite de problemas *benchmark*, tais como (PAQUET; VIKTOR, 2013; GANG et al., 2013; YOUSEFI et al., 2013; YOUSEFI et al., 2012; LIU et al., 2012; BARBOSA et al., 2010a; VENTER; HAFTKA, 2010; SILVA, 2009; ROCHA; FERNANDES, 2009; YOUNG et al., 2007; GALLET et al., 2005), também mostram bons resultados quando a técnica APM é utilizada. Como o foco desse trabalho é POMs em OE, ela foi escolhida por possuir excelente histórico nessa área.

### ***The Adaptive Penalty Method (APM)***

Entre as vantagens da técnica APM estão o tratamento de restrições de igualdade e desigualdade, não necessitar que as restrições sejam funções explícitas das variáveis do problema, não possuir parâmetros a serem definidos pelo usuário e ser de fácil implementação computacional (LEMONGE; BARBOSA, 2004). A ideia principal é fazer

com que o valor dos coeficientes de penalização sejam distribuídos de tal forma que as restrições mais difíceis de serem atendidas sejam penalizadas mais fortemente.

No contexto de POMONOs, a função aptidão  $F(\mathbf{x})$  da técnica APM é definida por:

$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{se } \mathbf{x} \text{ é factível,} \\ \bar{f}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^J k_j v_j(\mathbf{x}) & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (4.1)$$

em que

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{se } f(\mathbf{x}) > \langle f(\mathbf{x}) \rangle, \\ \langle f(\mathbf{x}) \rangle & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (4.2)$$

e  $\langle f(\mathbf{x}) \rangle$  é a média da função objetivo para a população.

Os coeficientes de penalização  $k_j$  são definidos por

$$k_j = |\langle f(\mathbf{x}) \rangle| \frac{\langle v_j(\mathbf{x}) \rangle}{\sum_{l=1}^J [\langle v_l(\mathbf{x}) \rangle]^2}, \quad (4.3)$$

onde  $v_j(\mathbf{x})$  é a violação da restrição  $j$  pelo indivíduo  $\mathbf{x}$  definida por  $v_j(\mathbf{x}) = \max(g_j(\mathbf{x}), 0)$  e  $\langle v_j(\mathbf{x}) \rangle$  é a média da violação da restrição  $j$  na população.

A Figura 4.1 ilustra a definição de  $F(\mathbf{x})$  da técnica APM. Nela, os vetores factíveis  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$  e  $\mathbf{x}_3$  permanecem com os valores da função objetivo inalterado. Já os vetores infactíveis  $\mathbf{x}_4$ ,  $\mathbf{x}_5$  e  $\mathbf{x}_6$  são penalizados levando em consideração a violação da restrição  $g(\mathbf{x}) \leq 0$ , isto é, a distância de suas imagens à reta  $g(\mathbf{x}) = 0$ . Pode-se observar que os vetores  $\mathbf{x}_4$  e  $\mathbf{x}_5$  são também penalizados por terem imagens menores que a média  $\langle f(\mathbf{x}) \rangle$ . Caso isso não ocorresse, poderia-se ter uma situação onde o vetor infactível  $\mathbf{x}_4$  ficaria melhor que o vetor factível  $\mathbf{x}_3$ . O vetor  $\mathbf{x}_6$  é penalizado apenas pela violação da restrição.

Ao que consta na literatura, (ANGELO et al., 2012) foi o primeiro trabalho a utilizar a técnica APM em POMs. Eles o fizeram simplesmente utilizando as Equações 4.1, 4.2 e 4.3 para penalizar cada função objetivo separadamente. Após isso vieram trabalhos do autor dessa tese, a saber, (VARGAS et al., 2013; VARGAS et al., 2014; VARGAS et al., 2015) e mais recentemente um segundo trabalho de (ANGELO et al., 2015).

Uma das vantagens de técnicas de penalização é que elas frequentemente atuam com parte da população formada por indivíduos infactíveis. Os autores de (COELLO et al., 2007) afirmam que é importante preservar alguns desses indivíduos na população para que o algoritmo seja capaz de convergir para soluções que se encontram no limite entre as regiões factível e infactível. Apesar disso, outros autores propuseram técnicas que

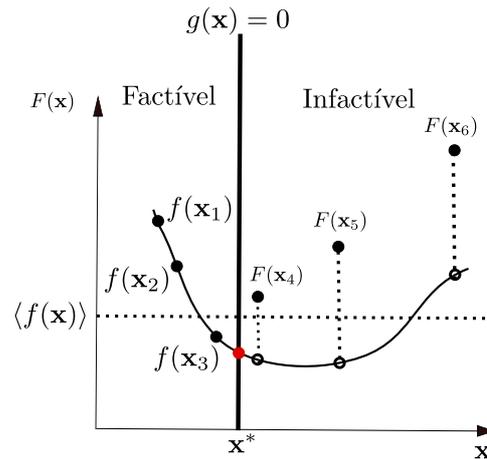


Figura 4.1: Definição de  $F(\mathbf{x})$  da técnica APM (adaptada de (BARBOSA; LEMONGE, 2002)).

consideram qualquer indivíduo factível superior à qualquer indivíduo infactível. As Regras de Factibilidade são técnicas que classificam os indivíduos dessa forma. Elas são bastante populares pois são facilmente acopladas sem a introdução de novos parâmetros.

## 4.2 Regras de Factibilidade

As Regras de Factibilidade mantêm separados os valores da função objetivo e das violações das restrições de cada indivíduo. O trabalho precursor dessa abordagem foi (POWELL; SKOLNICK, 1993), que definiu uma função aptidão de tal forma que um indivíduo factível tenha sempre um valor da função aptidão melhor com do que um infactível. Assim, as Regras de Factibilidade privilegiam fortemente os indivíduos factíveis sobre os infactíveis.

Por serem simples, elas se tornam muito adequadas para ser acopladas facilmente a qualquer tipo de mecanismo de seleção. Porém, a possibilidade de causar convergência prematura é uma grande desvantagem. Uma listagem considerável de algoritmos onde as Regras de Factibilidade foram adotadas pode ser encontrada em (MEZURA-MONTES; COELLO, 2011).

A Regra de Factibilidade proposta por (DEB, 2000) é uma técnica de tratamento de restrições que possui grande impacto na literatura (MEZURA-MONTES; COELLO, 2011). Ela é composta por três critérios da seguinte forma:

- Ao comparar dois indivíduos factíveis, aquele com melhor função objetivo é escolhido.

- Quando se compara um indivíduo factível com outro inefectível, o indivíduo factível é escolhido.
- Ao comparar dois indivíduos inefectíveis, o indivíduo  $\mathbf{x}$  com a menor soma das violações das restrições  $\Phi(\mathbf{x})$  é escolhido, sendo  $\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^J v_j(\mathbf{x})$ .

Essa Regra de Factibilidade foi utilizada em (DEB et al., 2002) juntamente com a Definição de Dominância (Definição 2) para POMs com restrições. Os três critérios foram reescritos da seguinte forma:

- Ao comparar dois indivíduos factíveis, aquele que domina o outro é escolhido. Caso os dois sejam não-dominados entre si, aquele com maior valor de *Crowding Distance* é escolhido.
- Quando se compara um indivíduo factível com outro inefectível, o indivíduo factível é escolhido.
- Ao comparar dois indivíduos inefectíveis, aquele com menor soma das violações das restrições  $\Phi(\mathbf{x})$  é escolhido.

Essa nova Regra de Factibilidade foi proposta juntamente com o NSGA-II em (DEB et al., 2002). Naquele trabalho foram mostrados experimentos computacionais onde o NSGA-II acoplado à essa regra obteve melhores resultados que o NSGA-II acoplado à técnica de tratamento de restrições proposta por (RAY et al., 2001).

Como apresentado no Capítulo 3, o GDE3 também utiliza uma versão da Regra de Factibilidade, introduzindo o conceito de restrito-dominância. Assim, se o vetor alvo for inefectível, ele só é substituído imediatamente na população se gerar um vetor experimental factível ou inefectível que o domine no espaço das restrições. Caso o vetor alvo seja factível e gere um vetor experimental inefectível, o vetor experimental é descartado. Dessa forma, quando o GDE3 obtém uma população formada apenas por indivíduos factíveis, nenhum indivíduo inefectível pode ser incluído nela.

### 4.3 Considerações Finais do Capítulo

Apesar das funções de penalização e as regras de factibilidade serem as técnicas mais populares na literatura na resolução de POMs com restrições (COELLO et al.,

2007), existem trabalhos que utilizam técnicas diferentes. Uma listagem considerável de trabalhos sobre o tratamento de restrições para POMs pode ser encontrada em (MEZURA-MONTES; COELLO, 2011) e (ZHOU et al., 2011).

Outra vertente que envolve técnicas de tratamento de restrições e POMs é o uso deles como uma dessas técnicas. Ela trata as restrições como funções objetivo adicionais, onde cada restrição (ou a soma delas) vira uma função objetivo que deve ser minimizada juntamente com a(s) função(ões) objetivo do problema. No trabalho (DEB; DATTA, 2010), por exemplo, os autores transformaram cada POMONO com restrições em um POM sem restrições com duas funções objetivo: a própria função objetivo do POMONO e a soma das violações das restrições. Assim, resolvendo o POM através de um MOEA, eles obtiveram uma boa estimativa para os parâmetros de penalidade, terminando de resolver o POMONO com funções de penalização. Através desse procedimento, obtiveram soluções melhores do que as encontradas na literatura com um número menor de avaliações da função objetivo.

A principal vantagem de se usar POMs como técnica de tratamento de restrições é a simplicidade de implementação. No entanto, o aumento do número de funções objetivo aumenta a complexidade do problema, podendo causar perda da qualidade das soluções obtidas (ZHOU et al., 2011). Em (MEZURA-MONTES; COELLO, 2011) pode ser encontrada uma listagem bem detalhada de trabalhos que utilizam POMs como técnica de tratamento de restrições.

# 5 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

Problemas de Otimização Estrutural (OE) visam o aumento do desempenho da estrutura e a diminuição de seus custos garantindo os requisitos de segurança aplicáveis. A solução de problemas de OE é de grande aplicabilidade na busca por concepções estruturais com baixo custo, alto desempenho, de fácil execução/manutenção e, mais recentemente, incorporando aspectos ambientais desde sua construção até a sua utilização.

Este Capítulo visa apresentar os problemas de OE que serão adotados nessa tese. Esses problemas são clássicos na literatura, podendo ser encontrados tanto no formato de um POMONO quanto de um POM em diversas publicações, tais como (VARGAS et al., 2015; ZAVALA et al., 2014; SILVA et al., 2013; ANGELO et al., 2012; SILVA et al., 2011c).

## 5.1 Problemas de Otimização Estrutural de Treliças

Em engenharia é comum projetos que buscam a concepção, construção e manutenção das características físicas e naturais do ambiente construído (pontes, estradas, canais, barragens, edifícios, etc.) garantindo a estabilidade dessas estruturas contra intempéries e fenômenos ambientais. O problema de se conceber esses projetos estruturais com o menor custo possível é denominado Otimização Estrutural (OE) (ZAVALA et al., 2014).

A treliça é uma estrutura que é frequentemente tema de estudos de problemas de OE. Uma treliça é uma combinação de barras interligadas em seus extremos, formando uma estrutura rígida. A estrutura da treliça de 10 barras (Figura 5.1) é um exemplo comumente encontrado na literatura. Ela conta com 10 barras e 6 nós (encontro das barras), submetida a duas cargas externas de valor  $P$ . Os nós 5 e 6 são mantidos fixos.

(ARORA, 2012) cita três classes usuais para a composição do problema de OE de treliças: Dimensional, de Forma e Topológico. No Dimensional, as variáveis de projeto são as áreas das seções transversais das barras. Mesmo existindo uma pequena variação da Forma da treliça (posição geométrica dos nós) devido à atuação das forças externas, ela e a Topologia (conectividade e/ou quantidade de barras) são consideradas fixas. Um objetivo desse problema pode ser obter o valor otimizado das áreas das seções transversais das barras da estrutura com menor custo possível, garantindo sua estabilidade. A Figura

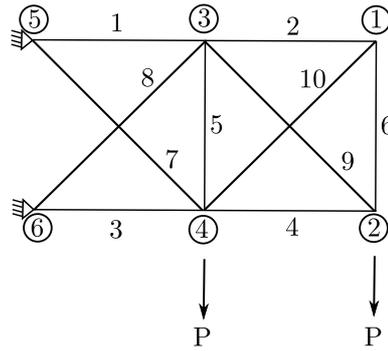


Figura 5.1: Estrutura da Treliça de 10 barras.

5.2, extraída de (BERNARDINO, 2012), ilustra duas possibilidades de atribuição das áreas das seções transversais das barras do problema de OE da treliça de 10 barras.

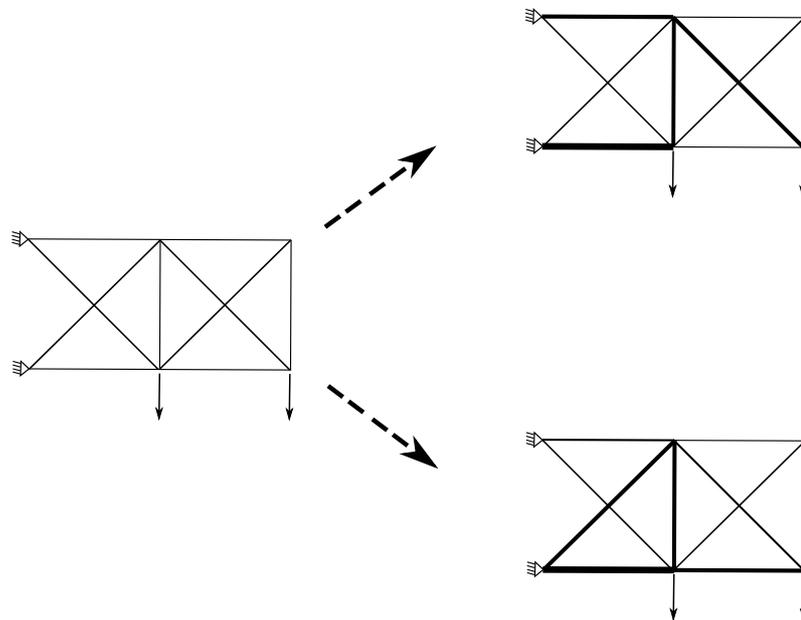


Figura 5.2: Exemplo de um problema de OE do tipo Dimensional: possíveis mudanças na treliça de 10 barras quando as áreas das seções transversais das barras são variáveis. (Extraída de (BERNARDINO, 2012)).

No problema de OE da treliça de 10 barras classificado como de Forma, a Topologia é mantida como indicado pelo projetista e a posição geométrica dos nós (de pelo menos parte deles) não está fixada. Em geral, tanto os nós de apoio da estrutura quanto aqueles em que as cargas são aplicadas têm seus deslocamentos restringidos<sup>1</sup>. Um possível objetivo nesse problema é obter a forma da estrutura com menor custo possível e que garanta sua estabilidade. Duas dessas possibilidades de atribuição de forma para a treliça de 10 barras são ilustradas na Figura 5.3, extraída de (BERNARDINO, 2012).

<sup>1</sup> Isso também pode ocorrer no problema de OE Dimensional.

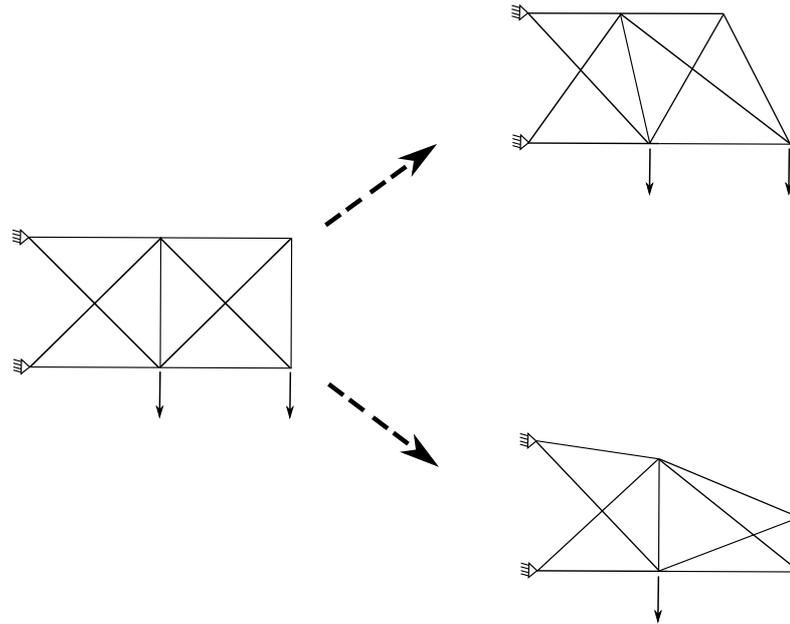


Figura 5.3: Exemplo de um problema de OE de Forma: possíveis mudanças na treliça de 10 barras quando a forma é assumida variável. (Extraída de (BERNARDINO, 2012)).

No problema de OE da treliça de 10 barras classificado como Topológico, tanto a conectividade quanto a quantidade de barras são as variáveis do problema. Duas possibilidades de atribuição topológica para a treliça de 10 barras são ilustradas na Figura 5.4, extraída de (BERNARDINO, 2012). Também é possível existir um problema de OE simultaneamente Dimensional, de Forma e Topológico.

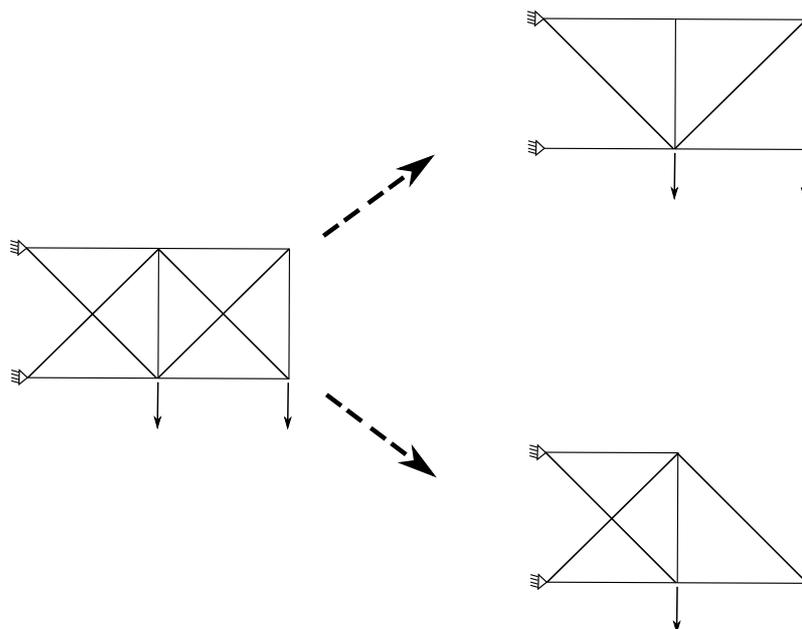


Figura 5.4: Exemplo de um problema de OE Topológico: a conectividade e a quantidade de barras é assumida variável. (Extraída de (BERNARDINO, 2012)).

(ZAVALA et al., 2014) faz um levantamento dos trabalhos existentes na literatura sobre MOEAs aplicados à POMs de OE e analisa 52 publicações, as quais esses autores consideraram os trabalhos mais representativos dessa área. Dessas pesquisas, 18 abordavam problemas de Otimização Dimensional de estruturas de treliças, 25 pesquisas abordaram problemas cujo peso da estrutura era uma das funções objetivo e 23 pesquisas abordaram problemas cujo maior deslocamento dos nós da estrutura em qualquer direção era uma das funções objetivo. Além disso, 16 publicações (9 envolvendo treliças) abordaram problemas cujo peso da estrutura e o deslocamento dos nós da estrutura eram funções objetivo e apenas uma delas abordou problemas com mais de duas funções objetivo<sup>2</sup>.

Uma das conclusões de (ZAVALA et al., 2014) foi que nenhum trabalho envolvendo Evolução Diferencial (ED) foi encontrado, sendo que a literatura contém trabalhos onde a ED apresenta resultados muito bons em POMONO de OE (por exemplo (SILVA et al., 2011c) e (SILVA et al., 2013)). Os problemas de OE abordados em (SILVA et al., 2011c; SILVA et al., 2013) são dimensionais de estruturas de treliças, cujo objetivo é a minimização do peso da estrutura e as restrições referem-se às tensões nas barras e aos deslocamentos dos nós. Eles foram resolvidos através de algoritmos de ED acoplados à técnica de tratamento de restrições APM.

O primeiro trabalho encontrado na literatura que investiga o potencial da técnica APM no tratamento de restrições de POMs em OE é o de (ANGELO et al., 2012)<sup>3</sup>, que também investigou problemas dimensionais de estruturas de treliças com objetivos de minimização do peso da estrutura e minimização do máximo deslocamentos dos nós, com restrições referindo-se às tensões nas barras. Os POMs em OE resolvidos em (ANGELO et al., 2012) são das estruturas de treliças de 10, 25, 60, 72 e 942 barras, que serão detalhados na seção seguinte.

Para efeito de comparação com a literatura, os POMs resolvidos em (ANGELO et al., 2012) serão resolvidos aqui. Além do caso discreto desses problemas (abordada em (ANGELO et al., 2012)), também serão tratados nesta pesquisa o caso contínuo de cada um deles.

---

<sup>2</sup>(COELLO; CHRISTIANSEN, 2000) trabalhou com POMs dimensionais de estruturas de treliças com 3 funções objetivo: minimizar o peso, o máximo deslocamento dos nós e a máxima tensão das barras.

<sup>3</sup>No início das atividades de pesquisa que originaram a presente tese, (ANGELO et al., 2012) era o único trabalho disponível na literatura que utilizava técnica APM em POMs.

## 5.2 Formulação Matemática

A seguir será feita a formulação matemática do tipo de problema de OE Dimensional de treliças abordado aqui. Inicialmente será discutida sua versão como POMONO e em seguida como POM. Seja uma treliça de  $N$  barras com  $M$  graus de liberdade de translação de seus nós, com material de massa específica  $\rho$  e comprimento da  $j$ -ésima barra denotada por  $L_j$ . Considere  $s_j$  a tensão da  $j$ -ésima barra,  $s_{adm}$  a tensão normal máxima que esta barra pode estar submetida,  $u_{il}$  o deslocamento do nó  $i$  no caso de carregamento  $l$  e  $u_{adm_i}$  o deslocamento máximo que o nó  $i$  pode sofrer em qualquer uma das direções  $x, y, z$ .

O POMONO Dimensional de OE de treliça consiste em encontrar o vetor de variáveis de projeto  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$  que está associado ao vetor de áreas das seções transversais das barras da treliça  $(A_1, \dots, A_N)$  que minimiza o problema definido como:

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \rho A_j L_j \\
 \text{s.a.} \quad & |s_{jl}| \leq s_{adm} \\
 & |u_{il}| \leq u_{adm_i} \\
 & \mathbf{x} \in [1, |AP|]^N \text{ ou } \mathbf{x} \in [a, b]^N, \quad 0 < a < b. \\
 & j = 1, \dots, N \quad i = 1, \dots, M \quad l = 1, \dots, N_L
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

No caso discreto, o vetor  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$  está associado ao vetor de áreas da seção transversal das barras da treliça  $(A_1, \dots, A_N)$  da seguinte forma: a área da seção transversal da  $j$ -ésima barra da treliça é  $A_{[x_j]}$  ( $[x_j]$ -ésimo elemento do conjunto ordenado das possíveis áreas  $AP = \{A_1, \dots, A_P\}$ , com  $[x_j] = \text{round}(x_j)$ ,  $\mathbf{x} \in [1, |AP|]^N$ ,  $j = 1, \dots, N$  em que  $|AP|$  é o número de elementos do conjunto  $AP$ . No caso contínuo, essa associação é feita diretamente:  $A_j = x_j$ , com  $\mathbf{x} \in [a, b]^N$  sendo  $0 < a < b$  os limites mínimo e máximo do vetor de áreas da seção transversal das barras da treliça  $(A_1, \dots, A_N)$ , respectivamente.

As restrições do problema (deslocamentos dos nós e tensões das barras) são funções implícitas das variáveis de projeto e calcular a violação delas exige a solução do sistema de equações de equilíbrio. O sistema que define o vetor  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  de deslocamentos dos nós da estrutura  $\mathbf{x}$  é definido por  $\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , em que  $\mathbf{K}(\mathbf{x})$  é a matriz de rigidez da estrutura (simétrica e positiva definida, obtida através de uma formulação com elementos finitos) e  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  o vetor de forças nodais equivalentes (casos de carga nos nós).

Uma vez definidos os deslocamentos dos nós da estrutura  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  como apresentado, o

vetor de tensões  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$  pode ser obtido seguindo a lei de Hooke, em que a tensão da  $j$ -ésima barra no caso de carregamento  $l$  é calculada por  $s_{jl}(\mathbf{x}) = E\varepsilon_{jl}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$ , sendo  $E$  o módulo de Young e  $\varepsilon_{jl}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$  é a deformação associada ao campo de deslocamentos para a  $j$ -ésima barra no caso de carregamento  $l$ . Um detalhamento mais apropriado sobre otimização estrutural pode ser encontrado em (ARORA, 2012).

A versão desse problema como POM é semelhante ao problema da Equação (5.1), diferente apenas pela substituição das restrições referentes ao deslocamento máximo dos nós pela inserção de uma segunda função objetivo: minimizar o máximo deslocamento dos nós (representado na Equação (5.2) por  $f_2(\mathbf{x}) = \max(|u_{il}|)$ ). Assim, ele pode ser definido por:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f_1(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \rho A_j L_j \quad \text{e} \quad f_2(\mathbf{x}) = \max(|u_{il}|) \\ \text{s.a.} \quad & |s_{jl}| \leq s_{adm} \\ & \mathbf{x} \in [1, |AP|]^N \text{ ou } \mathbf{x} \in [a, b]^N, \quad 0 < a < b. \\ & j = 1, \dots, N \quad i = 1, \dots, M \quad l = 1, \dots, N_L \end{aligned} \tag{5.2}$$

Os POMs em OE das treliças de 10, 25, 60, 72 e 942 barras serão detalhados a seguir.

### 5.2.1 Treliça de 10 Barras

O primeiro problema a ser tratado aqui é a treliça clássica de 10 barras, ilustrada pela Figura 5.1. A versão como POMONO é amplamente estudada (ver (LEMONGE; BARBOSA, 2004; SILVA et al., 2011c; SILVA et al., 2013)) e trabalhos sobre sua versão como POM podem ser encontrados em (HAJELA; LIN, 1992; BUCHE; DORNBERGER, 2001; LUH; CHUEH, 2004; SU et al., 2010; ANGELO et al., 2012; VARGAS et al., 2014; VARGAS et al., 2015).

Os dados do problema são: densidade do material  $\rho = 0,11b/in^3$ , tensão normal máxima limitada em  $\pm 25 \text{ ksi}$ , Módulo de Young  $E = 10^4 \text{ ksi}$  e cargas de 100 kips aplicadas nos nós 2 e 4 na direção  $y$  (representadas na Figura 5.1 por P). O conjunto das áreas possíveis no caso discreto é (em  $(in^2)$ ):  $AP = \{1,62; 1,80; 1,99; 2,13; 2,38; 2,62; 2,63; 2,88; 2,93; 3,09; 3,13; 3,38; 3,47; 3,55; 3,63; 3,84; 3,87; 3,88; 4,18; 4,22; 4,49; 4,59; 4,80; 4,97; 5,12; 5,74; 7,22; 7,97; 11,50; 13,50; 13,90; 14,20; 15,50; 16,00; 16,90; 18,80; 19,90; 22,00; 22,90; 26,50; 30,00; 33,50\}$ , definindo  $|AP| = 42$ . No caso contínuo, o intervalo de pertinência do vetor de variáveis de decisão (representado na Equação (5.2) por  $[a, b]$ ) é adotado por  $[0, 1; 40](in^2)$ .

### 5.2.2 Treliça de 25 Barras

O segundo problema tratado é o da treliça de 25 barras, ilustrada na Figura 5.5, cuja versão como POMONO também é amplamente estudada (ver (LEMONGE; BARBOSA, 2004; SILVA et al., 2011c; SILVA et al., 2013)) e trabalhos com sua versão como POM podem ser encontrados em (COELLO; CHRISTIANSEN, 2000; LUH; CHUEH, 2004; IZUI et al., 2008; KAVEH; LAKNEJADI, 2011; ANGELO et al., 2012; VARGAS et al., 2014; VARGAS et al., 2015).

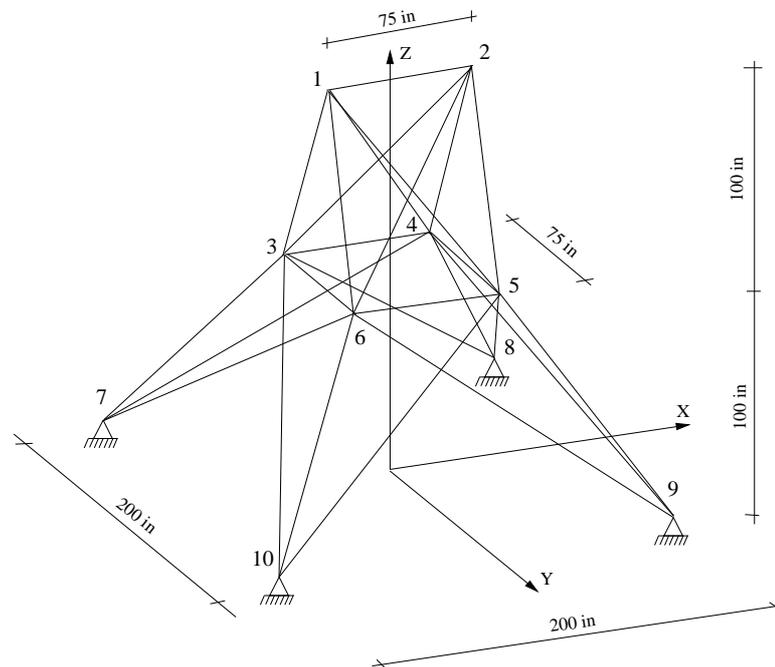


Figura 5.5: Estrutura da Treliça de 25 barras (Extraída de (ANGELO et al., 2012)).

Os dados do problema são: densidade do material  $\rho = 0,11\text{lb}/\text{in}^3$ , tensão normal máxima limitada em  $\pm 40\text{ ksi}$  e Módulo de Young  $E = 10^4\text{ ksi}$ . No caso discreto, o conjunto das áreas possíveis é (em  $\text{in}^2$ ):  $AP = \{0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2,0; 2,1; 2,2; 2,3; 2,4; 2,5; 2,6; 2,8; 3,0; 3,2; 3,4\}$ , definindo  $|AP| = 30$ . No caso contínuo, o intervalo de pertinência do vetor de variáveis de decisão é adotado por  $[0,1; 3,4](\text{in}^2)$ .

As barras da treliça são agrupadas e cada grupo possui uma única área  $A$ , a fim de manter a simetria da estrutura. O agrupamento das barras é mostrado na Tabela 5.1 e o carregamento aplicado sobre a estrutura é mostrado na Tabela 5.2.

Tabela 5.1: Agrupamento para a Treliça de 25 barras.

| Grupo | Conectividade       |
|-------|---------------------|
| $A_1$ | 1-2                 |
| $A_2$ | 1-4, 2-3, 1-5, 2-6  |
| $A_3$ | 2-5, 2-4, 1-3, 1-6  |
| $A_4$ | 3-6, 4-5            |
| $A_5$ | 3-4, 5-6            |
| $A_6$ | 3-10, 6-7, 4-9, 5-8 |
| $A_7$ | 3-8, 4-7, 6-9, 5-10 |
| $A_8$ | 3-7, 4-8, 5-9, 6-10 |

Tabela 5.2: Carregamento para a treliça de 25 barras (em *kips*).

| Nó | $F_x$ | $F_y$ | $F_z$ |
|----|-------|-------|-------|
| 1  | 1     | -10,0 | -10,0 |
| 2  | 0     | -10,0 | -10,0 |
| 3  | 0,5   | 0     | 0     |
| 6  | 0,6   | 0     | 0     |

### 5.2.3 Treliça de 60 Barras

O terceiro problema tratado é o da treliça de 60 barras, ilustrada pela Figura 5.6. Essa estrutura tem formato de anel e foi proposta em (PATNAIK et al., 1996). A versão como POMONO pode ser encontrada em (BERNARDINO, 2008; SILVA et al., 2011c; SILVA et al., 2013) e em (ANGELO et al., 2012; VARGAS et al., 2015) pode ser encontrada a versão multiobjetivo desse problema.

Nessa treliça, a densidade do material é  $\rho = 0,1lb/in^3$ , a tensão normal máxima é limitada em  $\pm 10 ksi$  e o Módulo de Young  $E = 10^4 ksi$ . O raio externo do anel mede 100 *in* e o raio interno 90 *in*. O conjunto das áreas possíveis para o caso discreto é (em (*in*<sup>2</sup>)) dado por:  $AP = \{0,5; 0,6; 0,7; \dots; 4,7; 4,8; 4,9\}$ , definindo  $|AP| = 45$ . Para o caso contínuo, adota-se  $[0,5; 5](in^2)$  como intervalo de pertinência do vetor de variáveis de decisão. A treliça é submetida a três casos de carregamento, observados na Tabela 5.4, totalizando 180 restrições. As barras são agrupadas conforme dados da Tabela 5.3.

### 5.2.4 Treliça de 72 Barras

O penúltimo problema tratado aqui é o da treliça de 72 barras, ilustrada pela Figura 5.7. A versão como POMONO pode ser encontrada em (LEMONGE; BARBOSA, 2004; BERNARDINO, 2008; SILVA et al., 2011c; SILVA et al., 2013) e a versão multiobjetivo

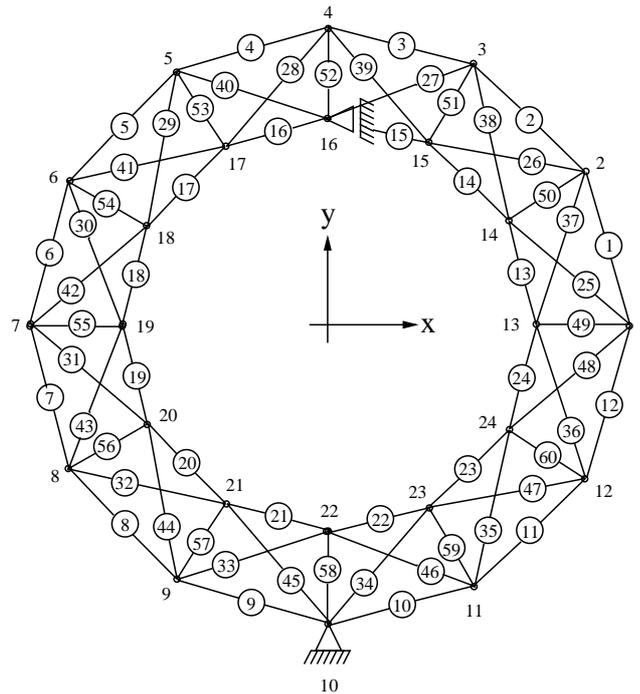


Figura 5.6: Estrutura da Treliça de 60 barras (Extraída de (ANGELO et al., 2012)).

Tabela 5.3: Agrupamento para a Treliça de 60 barras.

| Grupo    | Barras   | Grupo    | Barras  |
|----------|----------|----------|---------|
| $A_1$    | 49 ao 60 | $A_{14}$ | 25 e 37 |
| $A_2$    | 1 e 13   | $A_{15}$ | 26 e 38 |
| $A_3$    | 2 e 14   | $A_{16}$ | 27 e 39 |
| $A_4$    | 3 e 15   | $A_{17}$ | 28 e 40 |
| $A_5$    | 4 e 16   | $A_{18}$ | 29 e 41 |
| $A_6$    | 5 e 17   | $A_{19}$ | 30 e 42 |
| $A_7$    | 6 e 18   | $A_{20}$ | 31 e 43 |
| $A_8$    | 7 e 19   | $A_{21}$ | 32 e 44 |
| $A_9$    | 8 e 20   | $A_{22}$ | 33 e 45 |
| $A_{10}$ | 9 e 21   | $A_{23}$ | 34 e 46 |
| $A_{11}$ | 10 e 22  | $A_{24}$ | 35 e 47 |
| $A_{12}$ | 11 e 23  | $A_{25}$ | 36 e 48 |
| $A_{13}$ | 12 e 24  |          |         |

foi encontrada em (ANGELO et al., 2012; VARGAS et al., 2015).

A densidade do material é  $\rho = 0,1lb/in^3$ , a tensão normal máxima é limitada em  $\pm 25 ksi$  e o Módulo de Young  $E = 10^4 ksi$ . Para o caso discreto, o conjunto das áreas possíveis é (em  $in^2$ ):  $AP = \{0,1; 0,2; 0,3; \dots; 2,4; 2,5\}$ , definindo  $|AP| = 25$ . No caso contínuo, adota-se  $[0,1; 2,5](in^2)$  como intervalo de pertinência do vetor de variáveis de decisão. A treliça é submetida a dois casos de carregamento, observados na Tabela 5.6,

Tabela 5.4: Carregamento para a treliça de 60 barras (em *kips*).

| Carregamento | Nó | $F_x$ | $F_y$ |
|--------------|----|-------|-------|
| 1            | 1  | -10,0 | 0     |
|              | 7  | 9,0   | 0     |
| 2            | 15 | -8,0  | 3,0   |
|              | 18 | -8,0  | 3,0   |
| 3            | 22 | -20,0 | 10,0  |

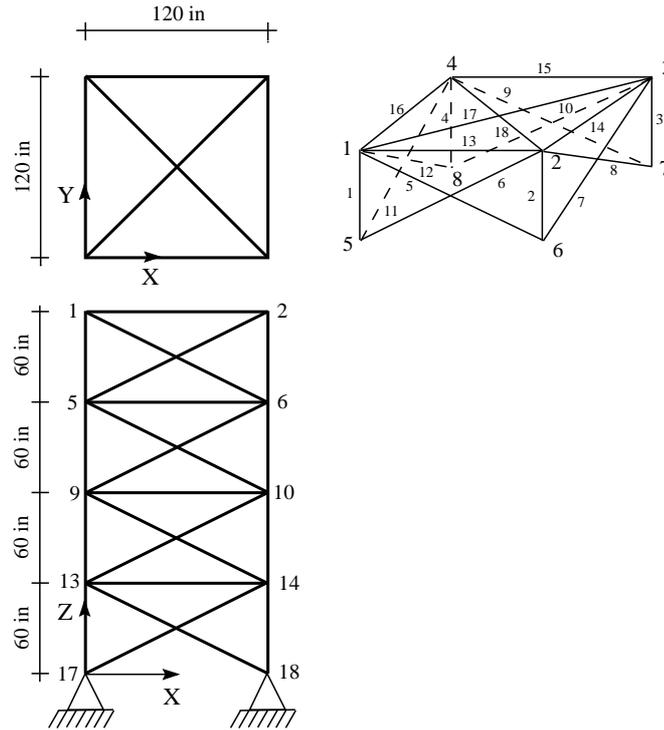


Figura 5.7: Estrutura da Treliça de 72 barras (Extraída de (ANGELO et al., 2012)).

totalizando 60 restrições de tensão. As barras são agrupadas conforme Tabela 5.5.

### 5.2.5 Treliça de 942 Barras

O último problema tratado aqui é o da treliça de 942 barras, ilustrada pela Figura 5.8. As 942 barras são agrupadas em 59 variáveis de projeto e considera-se um caso de carregamento que consiste em cargas horizontais e verticais da seguinte forma: cargas verticais na direção  $z$  de  $-3 \text{ kips}$ ,  $-6 \text{ kips}$  e  $-9 \text{ kips}$  em cada nó no primeiro, segundo e terceiro setores, respectivamente; cargas laterais na direção  $y$  de  $1 \text{ kips}$  em todos os nós da torre; e cargas laterais na direção  $x$  de  $1,5 \text{ kips}$  e  $1 \text{ kips}$  em cada nó à esquerda e à direita da torre, respectivamente.

As variáveis de projeto são valores inteiros no intervalo de  $[1,200]in^2$  para o caso

Tabela 5.5: Agrupamento para a Treliça de 72 barras.

| Grupo    | Barras                          |
|----------|---------------------------------|
| $A_1$    | 1, 2, 3 e 4                     |
| $A_2$    | 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12      |
| $A_3$    | 13, 14, 15 e 16                 |
| $A_4$    | 17 e 18                         |
| $A_5$    | 19, 20, 21 e 22                 |
| $A_6$    | 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 e 30 |
| $A_7$    | 31, 32, 33 e 34                 |
| $A_8$    | 35 e 36                         |
| $A_9$    | 37, 38, 39 e 40                 |
| $A_{10}$ | 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47 e 48 |
| $A_{11}$ | 49, 50, 51 e 52                 |
| $A_{12}$ | 53 e 54                         |
| $A_{13}$ | 55, 56, 57 e 58                 |
| $A_{14}$ | 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65 e 66 |
| $A_{15}$ | 67, 68, 69 e 70                 |
| $A_{16}$ | 71 e 72                         |

Tabela 5.6: Carregamento para a treliça de 72 barras (em *kips*).

| Carregamento | Nó | $F_x$ | $F_y$ | $F_z$ |
|--------------|----|-------|-------|-------|
| 1            | 1  | 5     | 5     | -5    |
| 2            | 1  | 0     | 0     | -5    |
|              | 2  | 0     | 0     | -5    |
|              | 3  | 0     | 0     | -5    |
|              | 4  | 0     | 0     | -5    |

discreto do problema e as restrições incluem tensão normal máxima limitada em  $\pm 25 \text{ ksi}$  para todas as barras. Para o caso contínuo,  $[1; 200](\text{in}^2)$  foi adotado como intervalo de pertinência do vetor de variáveis de decisão. O Módulo de Young é  $E = 10^4 \text{ ksi}$  e a densidade do material é de  $\rho = 0,1 \text{ lb/in}^3$ . A versão como POMONO pode ser encontrada em (HASANÇEBI, 2008; ADELI; CHENG, 1994; ERBATUR et al., 2000; HASANÇEBI; ERBATUR, 2002) e a versão multiobjetivo foi encontrada em (ANGELO et al., 2012; VARGAS et al., 2015).

### 5.3 Considerações Finais do Capítulo

Este Capítulo apresentou os problemas de OE que serão foco dessa tese, isto é, as Treliças de 10, 25, 60, 72 e 942 barras. Deseja-se aqui encontrar as áreas das seções transversais das barras que minimize o peso e o máximo deslocamento dos nós das estruturas, mantendo

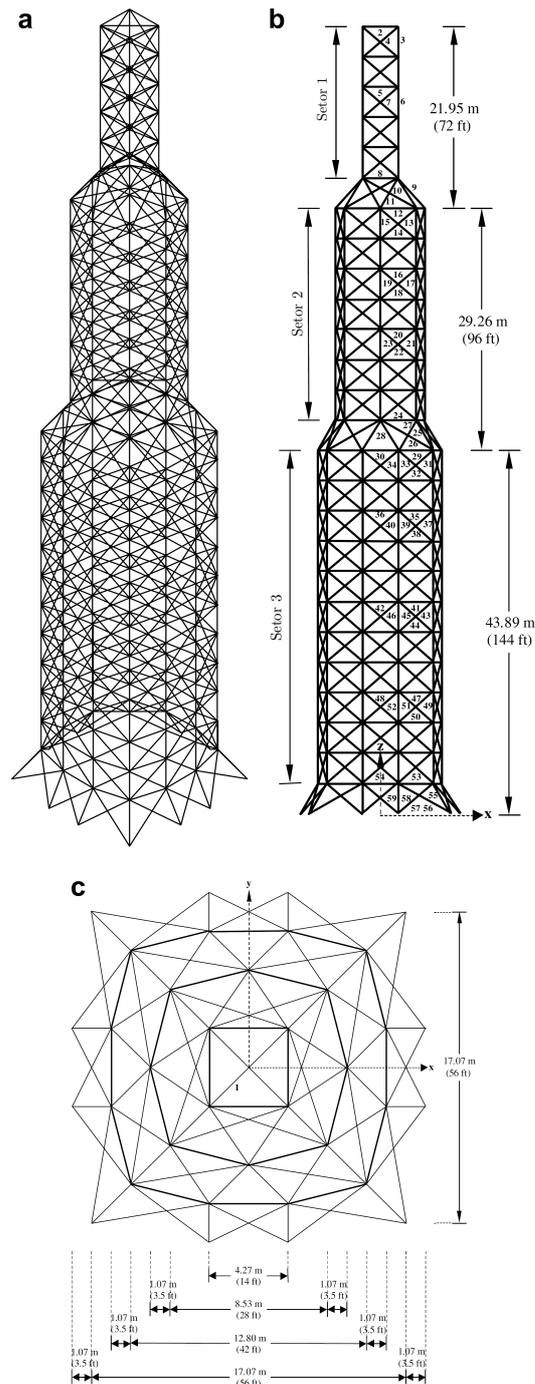


Figura 5.8: Estrutura da Treliça de 942 barras (Extraída de (ANGELO et al., 2012)).

a forma (posição geométrica dos nós) e a topologia (conectividade e/ou quantidade de barras) fixas. As áreas das seções transversais das barras (variáveis de projeto) podem pertencer a um conjunto finito de opções (caso discreto) ou variar continuamente em um dado intervalo (caso contínuo).

Esses problemas são clássicos na literatura, mais comumente encontrados no formato de um POMONO. A principal razão da escolha desses problemas se deve ao fato de serem

os mesmos POMs adotados por (ANGELO et al., 2012), que foi o primeiro trabalho publicado na literatura que utiliza a técnica APM no tratamento de restrições de POMs. Além disso, suas versões monobjetivo foram utilizadas nos trabalhos (SILVA et al., 2011c) e (SILVA et al., 2013), ambos utilizando algoritmos de ED acoplados à técnica APM. Apesar de (ANGELO et al., 2012) considerar apenas o caso discreto desses problemas, o caso contínuo também foi discutido nesta tese.

## Parte III

# EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

# 6 ALGORITMO PROPOSTO E ALGORITMOS DE COMPARAÇÃO

## 6.1 Algoritmo Proposto

### 6.1.1 Sem Inserção de Informações de Preferências

Para orientar a construção do algoritmo proposto e algoritmos de comparação, foram feitas escolhas baseadas no levantamento dos trabalhos existentes sobre metaheurística aplicadas à POMs em OE feito em (ZAVALA et al., 2014). Além dos autores não encontrarem o uso da ED, eles ainda citam dois MOEAs que poderiam ser utilizados em trabalhos futuros, como mostra o trecho destacado:

*"Some of the multi-objective metaheuristics based on differential evolution that could be used for these problems are GDE3 (Kukkonen and Lampinen 2005) and MOSADE (Huang et al. 2009)."* ((ZAVALA et al., 2014), p.555).

O NSGA-II é o MOEA mais comumente encontrado nos trabalhos envolvendo a resolução de POMs em OE, fato constatado em (ZAVALA et al., 2014). Dentre os dois MOEAs mencionados no parágrafo anterior, o GDE3 é o que utiliza os mesmos mecanismos de seleção do NSGA-II: Ordenação de Pareto e *crowding distance*. Isso foi determinante para sua adoção neste trabalho, além de ser um algoritmo baseado em ED bem conhecido na literatura.

Dessa forma, o algoritmo proposto aqui consiste em acoplar ao GDE3 a técnica APM e será indicado por GDE3+APM para cenários sem a inserção de informações de preferências do usuário. Em um POM sem restrições, o GDE3 funciona da seguinte maneira:

1. Uma população inicial  $P_0$  de  $POP$  indivíduos é criada aleatoriamente ( $P_0 = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{POP}\}$ ).
2. Cada indivíduo  $\mathbf{x} \in P_0$  gera um novo  $\mathbf{u}$  através do **Algoritmo 3**, onde  $F \in \mathbb{R}$  e  $CR \in [0,1]$  são parâmetros definidos pelo usuário.

3. O conjunto  $R_0$  recebe, dentre os indivíduos  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{u}$ , aquele que dominar o outro. Caso os dois sejam não-dominados entre si,  $R_0$  recebe ambos.

A próxima geração da população ( $P_1$ ) será composta pelos *POP* melhores indivíduos de  $R_0$ , conforme posição na Ordenação de Pareto e valor do *crowding distance* ( $CD$ ). Após a identificação da solução com o pior valor de  $CD$  e sua exclusão, repete-se o cálculo dos valores de  $CD$ s das soluções restantes, já que esses valores foram afetados pela exclusão daquele indivíduo. Isso pode fornecer uma melhoria na diversidade da população sem a introdução de um novo parâmetro (KUKKONEN; LAMPINEN, 2005).

Assim, o algoritmo proposto aqui (GDE3+APM) consiste em substituir o uso de  $f_1$  e  $f_2$  no esquema de seleção da nova geração pelo uso dos valores de  $F_1$  e  $F_2$  (Equação (4.1)). Isto significa que a avaliação da dominância do vetor  $\mathbf{u}$  sobre o vetor  $\mathbf{x}$ , o processo de Ordenação de Pareto do conjunto  $R_t$  e o cálculo dos valores de  $CD$  de cada posto serão realizados considerando os valores de  $F_1$  e  $F_2$ . O detalhamento do GDE3+APM pode ser visto no **Algoritmo 4**.

(HORN, 1997) afirma que qualquer MOEA com aplicação prática deve incluir um arquivamento externo de todas as soluções não-dominadas encontradas até o momento. A razão disso é devida à natureza estocástica de um MOEA que não garante que soluções desejáveis, uma vez encontrada, permaneçam na população até a finalização de sua execução. (ANGELO et al., 2012), por exemplo, definiu o *SPO* de cada algoritmo como todas as soluções candidatas não-dominadas factíveis obtidas ao longo de toda a sua execução. Essa mesma definição do *SPO* de cada algoritmo será adotada aqui.

### 6.1.2 Com Inserção de Informações de Preferências

Como mencionado no Capítulo 3, após a obtenção da *SPO* por um MOEA, a tarefa dos tomadores de decisão é identificar aquela solução que melhor satisfaz suas preferências. Acontece que nem sempre o *SPO* contém soluções que representam devidamente as preferências dos decisores. Diversos MOEAs que se utilizam de informação sobre as preferências dos tomadores de decisão durante sua execução foram propostos (PURSHOUSE et al., 2014). Eles são capazes de orientar a busca por soluções na região de interesse da Frente de Pareto, evitando aquelas que não representam de forma alguma essas preferências e provocando uma melhoria significativa na qualidade das opções de escolha do ponto de vista dos decisores, representando melhor suas preferências.

---

**Algoritmo 4** GDE3+APM.
 

---

**entrada:** Parâmetros  $CR$ ,  $F$  e  $GEN$ , além dos dados referentes ao problema (funções objetivo, restrições, espaços de busca, entre outras.)  $\triangleright GEN$  é o número máximo de gerações. **saída:**  $SPO$ .

- 1:  $P_0 \leftarrow$  população inicial criada aleatoriamente de  $POP$  soluções candidatas  $\mathbf{x}$ .
  - 2:  $Arq \leftarrow P_0$   $\triangleright$  Arquivo Externo que vai armazenar todas as soluções candidatas encontradas durante toda a execução do algoritmo.
  - 3:  $f_1, f_2 \leftarrow$  funções objetivo de cada solução candidata de  $P_0$ .
  - 4:  $G \leftarrow 0$  contador de gerações.
  - 5: **enquanto**  $G \leq GEN$  **faça**
  - 6:    $F_1, F_2 \leftarrow$  funções objetivo de cada solução candidata de  $P_G$  modificadas pela técnica APM.
  - 7:   **para**  $i = 1 : POP$  **faça**
  - 8:      $\mathbf{u} \leftarrow$  criado a partir de  $\mathbf{x}_i \in P_G$  através do **Algoritmo 3**.
  - 9:     Obtenha  $f_1(\mathbf{u})$  e  $f_2(\mathbf{u})$ .
  - 10:    Obtenha  $F_1(\mathbf{u})$  e  $F_2(\mathbf{u})$  modificadas pela técnica APM com os mesmos valores dos coeficientes de penalização usados na linha 6.
  - 11:    **se**  $\mathbf{u}$  domina  $\mathbf{x}_i$  **então**
  - 12:      $R_G \leftarrow \mathbf{u}$ .
  - 13:    **senão**
  - 14:     **se**  $\mathbf{x}_i$  domina  $\mathbf{u}$  **então**
  - 15:       $R_G \leftarrow \mathbf{x}_i$ .
  - 16:     **senão**
  - 17:       $R_G \leftarrow \mathbf{x}_i, \mathbf{u}$ .
  - 18:    **fim se**
  - 19:    **fim se**
  - 20: **fim para**
  - 21: **se**  $R_G$  tem mais de  $POP$  soluções candidatas **então**
  - 22:    Classifique  $R_G$  em  $d$  postos pelo processo de Ordenação de Pareto.
  - 23:     $P_{G+1} \leftarrow \emptyset$ .
  - 24:     $\gamma \leftarrow 1$ .
  - 25:    **enquanto** Quantidade de soluções candidatas em  $P_{G+1} < POP$  **faça**
  - 26:      $P_{G+1} \leftarrow P_{G+1} \cup$  soluções candidatas do posto  $\gamma$ .
  - 27:      $\gamma \leftarrow \gamma + 1$ .
  - 28:    **fim enquanto**
  - 29:     $\gamma \leftarrow \gamma - 1$ .
  - 30:    **enquanto** Quantidade de soluções candidatas em  $P_{G+1} > POP$  **faça**
  - 31:     Calcule  $CD$  para todas as soluções candidatas de posto  $\gamma$ .
  - 32:     Exclua de  $P_{G+1}$  a solução candidata de posto  $\gamma$  com menor valor de  $CD$ .
  - 33:    **fim enquanto**
  - 34:    **senão**
  - 35:      $P_{G+1} \leftarrow R_G$ .
  - 36:    **fim se**
  - 37:     $Arq \leftarrow Arq \cup P_{G+1}$ .
  - 38:     $G \leftarrow G + 1$ .
  - 39: **fim enquanto**
  - 40:  $SPO \leftarrow$  soluções candidatas não-dominadas e factíveis de  $Arq$ .
-

Entre as várias maneiras de inserir informações de preferência no algoritmo proposto aqui está a inserção de um Ponto de Referência (aspirações das funções objetivo), a qual se adapta bem à resolução de problemas oriundos de áreas cujos decisores já acumulam larga experiência (PURSHOUSE et al., 2014). Como os problemas de OE analisados aqui são bastante tratados na literatura (especialmente na versão monobjetivo), a adoção de um Ponto de Referência é adequada. Dentre os que trabalham baseados em pontos de referência, o algoritmo R-NSGA-II (DEB; SUNDAR, 2006) foi o adotado aqui (Capítulo 3). A razão de sua escolha se deve ao fato de que seu esquema de trabalho com as informações de preferências do usuário é facilmente adaptável aos algoritmos utilizados nessa tese. O algoritmo GDE3+APM adaptado para utilizar informações de preferência da mesma forma que o R-NSGA-II é denominado R-GDE3+APM e seu detalhamento pode ser visto no **Algoritmo 5**.

---

**Algoritmo 5** R-GDE3+APM.

---

**entrada:** Parâmetros  $CR$ ,  $F$ ,  $\epsilon$ ,  $\bar{z}$  e  $GEN$ , além dos dados referentes ao problema (funções objetivo, restrições, espaços de busca, entre outras.)  $\triangleright \epsilon$  é um número real controla a diversidade da população,  $\bar{z}$  é o ponto de referência e  $GEN$  é o número máximo de gerações. **saída:**  $SPO$ .

- 1:  $P_0 \leftarrow$  população inicial criada aleatoriamente de  $POP$  soluções candidatas  $\mathbf{x}$ .
  - 2:  $Arq \leftarrow P_0$   $\triangleright$  Arquivo Externo que vai armazenar todas as soluções candidatas encontradas durante toda a execução do algoritmo.
  - 3:  $f_1, f_2 \leftarrow$  funções objetivo de cada solução candidata de  $P_0$ .
  - 4:  $G \leftarrow 0$  contador de gerações.
  - 5: **enquanto**  $G \leq GEN$  **faça**
  - 6:  $F_1, F_2 \leftarrow$  funções objetivo de cada solução candidata de  $P_G$  modificadas pela técnica APM.
  - 7: **para**  $i = 1 : POP$  **faça**
  - 8:  $\mathbf{u} \leftarrow$  criado a partir de  $\mathbf{x}_i \in P_G$  através do **Algoritmo 3**.
  - 9: Obtenha  $f_1(\mathbf{u})$  e  $f_2(\mathbf{u})$ .
  - 10: Obtenha  $F_1(\mathbf{u})$  e  $F_2(\mathbf{u})$  modificadas pela técnica APM com os mesmos valores dos coeficientes de penalização usados na linha 6.
  - 11: **se**  $\mathbf{u}$  domina  $\mathbf{x}_i$  **então**
  - 12:  $R_G \leftarrow \mathbf{u}$ .
  - 13: **senão**
  - 14: **se**  $\mathbf{x}_i$  domina  $\mathbf{u}$  **então**
  - 15:  $R_G \leftarrow \mathbf{x}_i$ .
  - 16: **senão**
  - 17:  $R_G \leftarrow \mathbf{x}_i, \mathbf{u}$ .
  - 18: **fim se**
  - 19: **fim se**
  - 20: **fim para**
-

---

**Algoritmo 5** R-GDE3+APM (continuação).
 

---

```

21:   se  $R_G$  tem mais de  $POP$  soluções candidatas então
22:     Classifique  $R_G$  em  $d$  postos pelo processo de Ordenação de Pareto.
23:      $P_{G+1} \leftarrow \emptyset$ .
24:      $\gamma \leftarrow 1$ .
25:     enquanto Quantidade de soluções candidatas em  $P_{G+1} < POP$  faça
26:        $P_{G+1} \leftarrow P_{G+1} \cup$  soluções candidatas do posto  $\gamma$ .
27:        $\gamma \leftarrow \gamma + 1$ .
28:     fim enquanto
29:      $\gamma \leftarrow \gamma - 1$ .
30:     se Quantidade de indivíduos em  $P_{G+1} > POP$  então
31:        $P_\gamma \leftarrow$  indivíduos de posto  $\gamma$  de  $P_{G+1}$ .
32:       Exclua de  $P_{G+1}$  todos os indivíduos de posto  $\gamma$ .
33:        $F\epsilon, D\epsilon \leftarrow \emptyset$ .
34:       enquanto Quantidade de indivíduos em  $P_{G+1} < POP$  faça
35:         se  $P_\gamma \neq \emptyset$  então
36:           Calcule  $d_i(\mathbf{x}_i, \bar{\mathbf{z}})$  para todo  $\mathbf{x}_i \in P_\gamma$  usando a Equação (3.4).
37:            $\mathbf{x}_{md} \leftarrow$  indivíduo de  $P_\gamma$  com menor valor  $d_i$  calculado no item
anterior.
38:            $D\epsilon \leftarrow$  indivíduos de  $P_\gamma$  cuja soma das diferenças normalizadas no
espaço dos objetivos entre ele e  $\mathbf{x}_{md}$  seja menor ou igual a  $\epsilon$ .
39:            $P_\gamma \leftarrow P_\gamma \setminus D\epsilon$ .
40:            $P_{G+1} \leftarrow P_{G+1} \cup$  indivíduo selecionado aleatoriamente em  $D\epsilon$ .
41:            $F\epsilon \leftarrow F\epsilon \cup$  indivíduos não selecionados em  $D\epsilon$  no item anterior.
42:            $D\epsilon \leftarrow \emptyset$ .
43:         senão
44:            $P_{G+1} \leftarrow P_{G+1} \cup$  indivíduo selecionado aleatoriamente em  $F\epsilon$ .
45:           Exclua de  $F\epsilon$  o indivíduo selecionado no item anterior.
46:         fim se
47:       fim enquanto
48:     fim se
49:     senão
50:        $P_{G+1} \leftarrow R_G$ .
51:     fim se
52:      $Arq \leftarrow Arq \cup P_{G+1}$ .
53:      $G \leftarrow G + 1$ .
54: fim enquanto
55:  $SPO \leftarrow$  soluções candidatas não-dominadas e factíveis de  $Arq$ .

```

---

(PURSHOUSE et al., 2014) classifica as formas de utilizar informações de preferências dos tomadores de decisão na execução de um MOEA em duas: *a priori* e interativa. Na *a priori*, as informações são inseridas no início do processo de evolução do MOEA, não podendo ser alteradas ao longo de sua execução. Como existe uma dificuldade de ajustar as informações de preferência no início da busca para que o *SPO* gerado pelo MOEA em questão represente, de fato, boas opções de escolha para os tomadores de decisão, o modo interativo surge como uma boa opção.

Na forma interativa, o tomador de decisão tem a liberdade de inserir/modificar as informações de preferência ao longo do processo evolutivo, de acordo com a sua satisfação sobre o desenvolvimento da população. O tomador de decisão controla o processo de busca, fica mais envolvido e pode ficar mais satisfeito e confiante sobre sua escolha final (PURSHOUSE et al., 2014).

No trabalho (PURSHOUSE et al., 2014), os autores afirmam que métodos classificados na literatura como *a priori* podem ser transformados em métodos interativos apenas permitindo que o tomador de decisão insira/altere as informações de preferência durante o processo de evolução. Entre os exemplos apresentados em (PURSHOUSE et al., 2014) de MOEAs que utilizam informações de preferências dos tomadores de decisão de forma interativa está o I-MODE, proposto por (CHAUDHURI; DEB, 2010). O I-MODE permite que o tomador de decisão, caso não tenha uma ideia *a priori* de suas preferências, utilize algum MOEA sem preferências para encontrar uma aproximação inicial da Frente de Pareto. Assim, ele teria uma ideia mais clara dos possíveis valores que podem ser alcançados pelas funções objetivos e conseguiria uma informação parcial para tomar suas decisões mais fundamentado.

Para transformar o R-GDE3+APM num MOEA interativo, permitiu-se que os pontos de referência fossem alterados conforme a vontade do tomador de decisão durante o processo de otimização. Ele foi denominado aqui de I-GDE3+APM e seu detalhamento pode ser visto no **Algoritmo 6**. Como fornecer um ponto de referência *a priori* pode não ser uma tarefa fácil em problemas do mundo real, o I-GDE3+APM tem a possibilidade de ser aplicado em mais problemas do que o R-GDE3+APM, já que ele utiliza uma aproximação inicial da Frente de Pareto completa da mesma forma que o I-MODE.

---

**Algoritmo 6** I-GDE3+APM.
 

---

**entrada:** Parâmetros do GDE3+APM. **saída:** *SPO*, isto é, soluções não-dominadas factíveis obtidas durante todas as execuções tanto do GDE3+APM quanto também do R-GDE3+APM.

- 1:  $G_0 \leftarrow$  número de gerações fornecida pelo Tomador de Decisão para executar o GDE3+APM.
  - 2: Execute o GDE3+APM durante  $G_0$  gerações.
  - 3: Observe a Frente de Pareto inicial obtida pelo GDE3+APM e defina um Ponto de Referência e um valor para  $\epsilon$ .
  - 4:  $G \leftarrow G_0$  contador de gerações.
  - 5: **enquanto**  $G \leq GEN$  **faça**
  - 6:      $G_I \leftarrow$  número de gerações fornecida pelo Tomador de Decisão para executar o R-GDE3+APM até a próxima interação.
  - 7:     Execute o R-GDE3+APM com os mesmos parâmetros do GDE3+APM, além do Ponto de Referência e do valor de  $\epsilon$  fornecidos pelo Tomador de Decisão durante  $G_I$  gerações.
  - 8:     Observe os resultados obtidos pelo R-GDE3+APM e, se preferir, defina um novo Ponto de Referência e um novo valor para  $\epsilon$ .
  - 9:      $G \leftarrow G + G_I$ .
  - 10: **fim enquanto**
- 

## 6.2 Algoritmos Adotados para as Comparações dos Experimentos Computacionais

Neste trabalho, o desempenho do algoritmo proposto GDE3+APM foi comparado ao desempenho de dois algoritmos baseados em Colônia de Formigas nos experimentos de (ANGELO et al., 2012) : MOAS *Multi-objective Ant System* e MOACS *Multi-objective Ant Colony System*. Os autores cederam os resultados obtidos para que fossem feitas análises comparativas, permitindo verificar se o algoritmo proposto produz resultados competitivos com os apresentados na literatura para os mesmos problemas. Além disso, foi possível investigar a influência da ED no desempenho da combinação proposta, uma vez que os algoritmos propostos por (ANGELO et al., 2012) utilizam a mesma técnica APM.

O desempenho do GDE3+APM também foi comparado ao desempenho do próprio GDE3 (**Algoritmo 13**) e do NSGA-II (**Algoritmo 7**), ambos utilizando as técnicas de tratamento de restrições originalmente propostas com eles. Os algoritmos e suas técnicas de tratamento de restrições originais foram apresentados nos Capítulos 3 e 4. O objetivo da comparação com o NSGA-II é verificar o desempenho da combinação proposta com o MOEA mais comumente encontrado nos trabalhos envolvendo a resolução de POMs em

OE. A comparação com o GDE3 tem por objetivo verificar a influência da técnica APM no desempenho do algoritmo proposto.

Para avaliar o desempenho em cenários com inserção de informações de preferência, o desempenho do R-GDE3+APM foi comparado ao desempenho do R-NSGA-II (**Algoritmo 8**) e do R-GDE3 (**Algoritmo 15**), este último também utilizando as informações da mesma forma *a priori* que o R-NSGA-II (DEB; SUNDAR, 2006). Cenários com inserção de informações de preferência de modo interativo também foram considerados da mesma forma que no I-GDE3+APM. Neste caso, os algoritmos para a comparação dos experimentos computacionais foram o I-NSGA-II (**Algoritmo 9**) e o I-GDE3 (**Algoritmo 14**), detalhados a seguir. Vale reforçar que, além dos algoritmos GDE3+APM, R-GDE3+APM e I-GDE3+APM, os algoritmos usados na comparação dos resultados R-GDE3, I-GDE3 e I-NSGA-II também são proposições dessa tese.

Todos os algoritmos foram implementados no MATLAB<sup>®</sup><sup>1</sup>, os quais foram acoplados a um Simulador Numérico na linguagem C++ para o cálculo dos deslocamentos dos nós e tensões das barras das estruturas avaliadas. Eles foram executados em uma CPU com memória RAM de 8GB, Sistema Operacional *Windows 7 Ultimate* com processador Intel *quad-core i7-3770*. A versão do MATLAB<sup>®</sup> utilizada foi R2013a.

---

<sup>1</sup>Exceto os algoritmos MOACS e MOAS utilizados na primeira seção de experimentos, cujos autores de (ANGELO et al., 2012) disponibilizaram os resultados obtidos.

---

**Algoritmo 7** NSGA-II.
 

---

**entrada:** Parâmetros  $PC$ ,  $\eta_c$ ,  $\eta_m$  e  $GEN$ , além dos dados referentes ao problema (funções objetivo, restrições, espaços de busca, entre outras.)  $\triangleright PC$  é a Probabilidade de Cruzamento e  $GEN$  é o número máximo de gerações. **saída:**  $SPO$ .

- 1:  $P_0 \leftarrow$  população inicial criada aleatoriamente de  $POP$  soluções candidatas  $\mathbf{x}$ .
- 2:  $Arq \leftarrow P_0$   $\triangleright$  Arquivo Externo que vai armazenar todas as soluções candidatas encontradas durante toda a execução do algoritmo.
- 3: Avalie as funções objetivo de cada solução candidata de  $P_0$ .
- 4:  $AFO \leftarrow POP$  contador de avaliações das funções objetivo.
- 5:  $G \leftarrow 0$  contador de gerações.
- 6: **enquanto**  $AFO \leq GEN \times POP$  **faça**
- 7:   **para**  $i = 1 : POP/2$  **faça**
- 8:     Selecione  $\mathbf{Pai}_1$  e  $\mathbf{Pai}_2$  de  $P_G$  por torneio através do **Algoritmo 12**.
- 9:     **se**  $rand() \leq PC$  **então**
- 10:       Crie  $\mathbf{Filho}_1$  e  $\mathbf{Filho}_2$  a partir de  $\mathbf{Pai}_1$  e  $\mathbf{Pai}_2$  pelo procedimento de cruzamento do *Simulated Binary Crossover* (SBX) (**Algoritmo 10**).
- 11:        $\mathbf{Filho}_1, \mathbf{Filho}_2 \leftarrow$ , respectivamente, mutação de  $\mathbf{Filho}_1$  e  $\mathbf{Filho}_2$  pelo procedimento de mutação do *Simulated Binary Crossover* (SBX) (**Algoritmo 11**).
- 12:       Avalie as funções objetivo de  $\mathbf{Filho}_1$  e  $\mathbf{Filho}_2$ .
- 13:        $AFO \leftarrow AFO + 2$ .
- 14:     **senão**
- 15:        $\mathbf{Filho}_1 \leftarrow \mathbf{Pai}_1$  e  $\mathbf{Filho}_2 \leftarrow \mathbf{Pai}_2$ .
- 16:        $\mathbf{Filho}_1, \mathbf{Filho}_2 \leftarrow$ , respectivamente, mutação de  $\mathbf{Filho}_1$  e  $\mathbf{Filho}_2$  pelo procedimento de mutação do *Simulated Binary Crossover* (SBX) (**Algoritmo 11**).
- 17:       **se**  $\mathbf{Filho}_1 \neq \mathbf{Pai}_1$  **então**
- 18:         Avalie as funções objetivo de  $\mathbf{Filho}_1$ .
- 19:          $AFO \leftarrow AFO + 1$ .
- 20:       **fim se**
- 21:       **se**  $\mathbf{Filho}_2 \neq \mathbf{Pai}_2$  **então**
- 22:         Avalie as funções objetivo de  $\mathbf{Filho}_2$ .
- 23:          $AFO \leftarrow AFO + 1$ .
- 24:       **fim se**
- 25:     **fim se**
- 26:      $P_G \leftarrow P_G \cup \{\mathbf{Filho}_1, \mathbf{Filho}_2\}$ .
- 27: **fim para**

---

---

**Algoritmo 7** NSGA-II (continuação).
 

---

```

28:   se  $P_G$  tem mais de  $POP$  soluções candidatas então
29:      $Fac(P_G) \leftarrow$  soluções candidatas factíveis de  $P_G$ .
30:   se  $Fac(P_G)$  tem mais de  $POP$  soluções candidatas então
31:     Classifique  $Fac(P_G)$  em  $d$  postos pelo processo de Ordenação de Pareto.
32:      $P_{G+1} \leftarrow \emptyset$ .
33:      $\gamma \leftarrow 1$ .
34:     enquanto Quantidade de soluções candidatas em  $P_{G+1} < POP$  faça
35:        $P_{G+1} \leftarrow P_{G+1} \cup$  soluções candidatas de  $Fac(P_G)$  de posto  $\gamma$ .
36:        $\gamma \leftarrow \gamma + 1$ .
37:     fim enquanto
38:      $\gamma \leftarrow \gamma - 1$ .
39:     se Quantidade de soluções candidatas em  $P_{G+1} > POP$  então
40:       Calcule  $CD$  para todas as soluções candidatas de  $Fac(P_G)$  de posto  $\gamma$ .
41:       Exclua de  $P_{G+1}$  todas as soluções candidatas de posto  $\gamma$  com menores
valores de  $CD$  até que se tenha a quantidade de soluções candidatas em  $P_{G+1} = POP$ .
42:     fim se
43:     senão
44:        $P_{G+1} \leftarrow Fac(P_G)$ .
45:     fim se
46:     senão
47:       se Quantidade de soluções candidatas em  $P_{G+1} < POP$  então
48:          $InFac(P_G) \leftarrow P_G \setminus Fac(P_G)$ .
49:         Classifique  $InFac(P_G)$  de acordo com a soma das violações das restrições
(ver Seção 4.2 do Capítulo 4).
50:          $P_{G+1} \leftarrow P_{G+1} \cup$  soluções candidatas de  $InFac(P_G)$  com menores somas das
violações das restrições até que se tenha a quantidade de soluções candidatas em
 $P_{G+1} = POP$ .
51:       fim se
52:     fim se
53:      $Arq \leftarrow Arq \cup P_{G+1}$ .
54:      $G \leftarrow G + 1$ .
55: fim enquanto
56:  $SPO \leftarrow$  soluções candidatas não-dominadas e factíveis de  $Arq$ .

```

---

---

**Algoritmo 8** R-NSGA-II.
 

---

**entrada:** Parâmetros  $PC$ ,  $\eta_c$ ,  $\eta_m$ ,  $\epsilon$ ,  $\bar{z}$  e  $GEN$ , além dos dados referentes ao problema (funções objetivo, restrições, espaços de busca, entre outras.)  $\triangleright$

$PC$  é a Probabilidade de Cruzamento,  $\epsilon$  é um número real controla a diversidade da população,  $\bar{z}$  é o ponto de referência e  $GEN$  é o numero máximo de gerações. **saída:**  $SPO$ .

- 1:  $P_0 \leftarrow$  população inicial criada aleatoriamente de  $POP$  indivíduos  $\mathbf{x}$ .
  - 2:  $Arq \leftarrow P_0$   $\triangleright$  Arquivo Externo que vai armazenar todas as indivíduos encontradas durante toda a execução do algoritmo.
  - 3: Avalie as funções objetivo de cada indivíduo de  $P_0$ .
  - 4:  $AFO \leftarrow POP$  contador de avaliações das funções objetivo.
  - 5:  $G \leftarrow 0$  contador de gerações.
  - 6: **enquanto**  $AFO \leq GEN \times POP$  **faça**
  - 7:     **para**  $i = 1 : POP/2$  **faça**
  - 8:         Selecione  $\mathbf{Pai}_1$  e  $\mathbf{Pai}_2$  de  $P_G$  por torneio através do algoritmo 12.
  - 9:         **se**  $rand() \leq PC$  **então**
  - 10:             Crie  $\mathbf{Filho}_1$  e  $\mathbf{Filho}_2$  a partir de  $\mathbf{Pai}_1$  e  $\mathbf{Pai}_2$  pelo procedimento de cruzamento do *Simulated Binary Crossover* (SBX) (Algoritmo 10).
  - 11:              $\mathbf{Filho}_1, \mathbf{Filho}_2 \leftarrow$ , respectivamente, mutação de  $\mathbf{Filho}_1$  e  $\mathbf{Filho}_2$  pelo procedimento de mutação do *Simulated Binary Crossover* (SBX) (Algoritmo 11).
  - 12:             Avalie as funções objetivo de  $\mathbf{Filho}_1$  e  $\mathbf{Filho}_2$ .
  - 13:              $AFO \leftarrow AFO + 2$ .
  - 14:         **senão**
  - 15:              $\mathbf{Filho}_1 \leftarrow \mathbf{Pai}_1$  e  $\mathbf{Filho}_2 \leftarrow \mathbf{Pai}_2$ .
  - 16:              $\mathbf{Filho}_1, \mathbf{Filho}_2 \leftarrow$ , respectivamente, mutação de  $\mathbf{Filho}_1$  e  $\mathbf{Filho}_2$  pelo procedimento de mutação do *Simulated Binary Crossover* (SBX) (Algoritmo 11).
  - 17:             **se**  $\mathbf{Filho}_1 \neq \mathbf{Pai}_1$  **então**
  - 18:                 Avalie as funções objetivo de  $\mathbf{Filho}_1$ .
  - 19:                  $AFO \leftarrow AFO + 1$ .
  - 20:             **fim se**
  - 21:             **se**  $\mathbf{Filho}_2 \neq \mathbf{Pai}_2$  **então**
  - 22:                 Avalie as funções objetivo de  $\mathbf{Filho}_2$ .
  - 23:                  $AFO \leftarrow AFO + 1$ .
  - 24:             **fim se**
  - 25:         **fim se**
  - 26:          $P_G \leftarrow P_G \cup \{\mathbf{Filho}_1, \mathbf{Filho}_2\}$ .
  - 27:     **fim para**
-

---

**Algoritmo 8** R-NSGA-II (continuação).
 

---

```

28:   se  $P_G$  tem mais de  $POP$  indivíduos então
29:      $Fac(P_G) \leftarrow$  indivíduos factíveis de  $P_G$ .
30:     se  $Fac(P_G)$  tem mais de  $POP$  indivíduos então
31:       Classifique  $Fac(P_G)$  em  $d$  postos pelo processo de Ordenação de Pareto.
32:        $P_{G+1} \leftarrow \emptyset$ .
33:        $\gamma \leftarrow 1$ .
34:       enquanto Quantidade de indivíduos em  $P_{G+1} < POP$  faça
35:          $P_{G+1} \leftarrow P_{G+1} \cup$  indivíduos de  $Fac(P_G)$  de posto  $\gamma$ .
36:          $\gamma \leftarrow \gamma + 1$ .
37:       fim enquanto
38:        $\gamma \leftarrow \gamma - 1$ .
39:     se Quantidade de indivíduos em  $P_{G+1} > POP$  então
40:       Exclua de  $P_{G+1}$  todos os indivíduos de posto  $\gamma$ .
41:        $P_\gamma \leftarrow$  indivíduos de  $Fac(P_G)$  de posto  $\gamma$ .
42:       enquanto Quantidade de indivíduos em  $P_{G+1} < POP$  faça
43:          $F\epsilon, D\epsilon \leftarrow \emptyset$ .
44:         se  $P_\gamma = \emptyset$  então
45:           enquanto Quantidade de indivíduos em  $P_{G+1} < POP$  faça
46:              $P_{G+1} \leftarrow P_{G+1} \cup$  indivíduo selecionado aleatoriamente em  $F\epsilon$ .
47:             Exclua de  $F\epsilon$  o indivíduo selecionado no item anterior.
48:           fim enquanto
49:         senão
50:           Calcule  $d_i(\mathbf{x}_i, \bar{\mathbf{z}})$  para todo  $\mathbf{x}_i \in P_\gamma$  usando a Equação (3.4).
51:            $\mathbf{x}_{md} \leftarrow$  indivíduo de  $P_\gamma$  com menor valor  $d_i$  calculado no item
anterior.
52:            $D\epsilon \leftarrow$  indivíduos de  $P_\gamma$  cuja soma das diferenças normalizadas
no espaço dos objetivos entre ele e  $\mathbf{x}_{md}$  seja menor ou igual a  $\epsilon$ .
53:            $P_{G+1} \leftarrow P_{G+1} \cup$  indivíduo selecionado aleatoriamente em  $D\epsilon$ .
54:            $F\epsilon \leftarrow F\epsilon \cup$  indivíduos não selecionados em  $D\epsilon$  no item anterior.
55:         fim se
56:       fim enquanto
57:     fim se
58:   senão
59:      $P_{G+1} \leftarrow Fac(P_G)$ .
60:   fim se
61: senão
62:   se Quantidade de indivíduos em  $P_{G+1} < POP$  então
63:      $InFac(P_G) \leftarrow P_G \setminus Fac(P_G)$ .
64:     Classifique  $InFac(P_G)$  de acordo com a soma das violações das restrições
(ver Seção 4.2 do Capítulo 4).
65:      $P_{G+1} \leftarrow P_{G+1} \cup$  indivíduos de  $InFac(P_G)$  com menores somas das violações
das restrições até que se tenha a quantidade de indivíduos em  $P_{G+1} = POP$ .
66:   fim se
67: fim se
68:    $Arq \leftarrow Arq \cup P_{G+1}$ .
69:    $G \leftarrow G + 1$ .
70: fim enquanto
71:  $SPO \leftarrow$  indivíduos não-dominadas e factíveis de  $Arq$ .

```

---

---

**Algoritmo 9** I-NSGA-II.

**entrada:** Parâmetros do NSGA-II. **saída:** *SPO*, isto é, todas as soluções não-dominadas factíveis obtidas durante todas as execuções tanto do NSGA-II quanto do R-NSGA-II.

- 1:  $G_0 \leftarrow$  número de gerações para executar o NSGA-II.
- 2: Execute o NSGA-II durante  $G_0$  gerações.
- 3: Observe a Frente de Pareto inicial obtida pelo NSGA-II e defina um Ponto de Referência e um valor para  $\epsilon$ .
- 4:  $G \leftarrow G_0$  contador de gerações.
- 5: **enquanto**  $G \leq GEN$  **faça**
- 6:      $G_I \leftarrow$  número de gerações fornecida pelo Tomador de Decisão para executar o R-NSGA-II até a próxima interação.
- 7:     Execute o R-NSGA-II com os mesmos parâmetros do NSGA-II e o Ponto de Referência e o valor de  $\epsilon$  fornecidos pelo fornecida pelo Tomador de Decisão durante  $G_I$  gerações.
- 8:     Observe os resultados obtidos pelo R-NSGA-II e, se preferir, defina um novo Ponto de Referência e um novo valor para  $\epsilon$ .
- 9:      $G \leftarrow G + G_I$ .
- 10: **fim enquanto**

---



---

**Algoritmo 10** *Simulated Binary Crossover (SBX)* - cruzamento.

**entrada:**  $\text{Pai}_1$ ,  $\text{Pai}_2$  e  $\eta_c$ . **saída:**  $\text{Filho}_1$  e  $\text{Filho}_2$ .

- 1: **para**  $i = 1 : N$  **faça**
- 2:     escolha aleatoriamente  $\mu \in [0,1]$ .
- 3:     **se**  $\mu \leq 0,5$  **então**
- 4:          $\beta_i \leftarrow (2\mu)^{1/(\eta_c+1)}$
- 5:     **senão**
- 6:          $\beta_i \leftarrow \left(\frac{1}{2(1-\mu)}\right)^{1/(\eta_c+1)}$
- 7:     **fim se**
- 8:      $\text{Filho}_1(i) \leftarrow 0,5[(1 + \beta_i)\text{Pai}_1(i) + (1 - \beta_i)\text{Pai}_2(i)]$ .
- 9:      $\text{Filho}_2(i) \leftarrow 0,5[(1 - \beta_i)\text{Pai}_1(i) + (1 + \beta_i)\text{Pai}_2(i)]$ .
- 10: **fim para**

---



---

**Algoritmo 11** *Simulated Binary Crossover (SBX)* - mutação.

**entrada:** solução candidata  $\mathbf{x} \in P_G$  e  $\eta_m$ . **saída:**  $\mathbf{x}$ .

- 1: **para**  $i = 1 : N$  **faça**
- 2:     **se**  $\text{rand}() \leq 1/N$  **então**
- 3:         escolha aleatoriamente  $\mu \in [0,1]$ .
- 4:         **se**  $\mu \leq 0,5$  **então**
- 5:              $\delta_j \leftarrow (2\mu)^{1/(\eta_m+1)} - 1$
- 6:         **senão**
- 7:              $\delta_j \leftarrow 1 - 2(1 - \mu)^{1/(\eta_m+1)}$
- 8:         **fim se**
- 9:          $\mathbf{x}(i) \leftarrow \mathbf{x}(i) + \delta_j$ .
- 10:     **fim se**
- 11: **fim para**

---

---

**Algoritmo 12** Torneio de Seleção de Pais do NSGA-II.
 

---

**entrada:**  $P_G$ . **saída:**  $\mathbf{Pai}_1$  e  $\mathbf{Pai}_2$ .

```

1: Sorteie  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  e  $\mathbf{x}_4$  indivíduos distintos em  $P_G$ .
2: para  $i = 1 : 2$  faça
3:   se  $\mathbf{x}_i$  é factível então
4:     se  $\mathbf{x}_{i+1}$  é factível então
5:       se  $\mathbf{x}_i$  domina  $\mathbf{x}_{i+1}$  então
6:          $\mathbf{Pai}_i \leftarrow \mathbf{x}_i$ .
7:       senão
8:         se  $\mathbf{x}_{i+1}$  domina  $\mathbf{x}_i$  então
9:            $\mathbf{Pai}_i \leftarrow \mathbf{x}_{i+1}$ .
10:        senão
11:           $\mathbf{Pai}_i \leftarrow$  um entre  $\mathbf{x}_i$  e  $\mathbf{x}_{i+1}$  escolhido por sorteio.
12:        fim se
13:      fim se
14:    senão
15:       $\mathbf{Pai}_i \leftarrow \mathbf{x}_i$ .
16:    fim se
17:  senão
18:    se  $\mathbf{x}_{i+1}$  é factível então
19:       $\mathbf{Pai}_i \leftarrow \mathbf{x}_{i+1}$ .
20:    senão
21:       $\mathbf{Pai}_i \leftarrow$  aquele entre  $\mathbf{x}_i$  e  $\mathbf{x}_{i+1}$  com menor soma das violações das restrições
      (ver Seção 4.2 do Capítulo 4).
22:    fim se
23:  fim se
24: fim para

```

---

---

**Algoritmo 13** GDE3.
 

---

**entrada:** Parâmetros  $CR$ ,  $F$  e  $GEN$ , além dos dados referentes ao problema (funções objetivo, restrições, espaços de busca, entre outras.)  $\triangleright GEN$  é o número máximo de gerações. **saída:**  $SPO$ .

- 1:  $P_0 \leftarrow$  população inicial criada aleatoriamente de  $POP$  soluções candidatas  $\mathbf{x}$ .
  - 2:  $Arq \leftarrow P_0$   $\triangleright$  Arquivo Externo que vai armazenar todas as soluções candidatas encontradas durante toda a execução do algoritmo.
  - 3:  $f_1, f_2 \leftarrow$  funções objetivo de cada solução candidata de  $P_0$ .
  - 4:  $G \leftarrow 0$  contador de gerações.
  - 5: **enquanto**  $G \leq GEN$  **faça**
  - 6:   **para**  $i = 1 : POP$  **faça**
  - 7:      $\mathbf{u} \leftarrow$  criado a partir de  $\mathbf{x}_i \in P_G$  através do **Algoritmo 3**.
  - 8:     Obtenha  $f_1(\mathbf{u})$  e  $f_2(\mathbf{u})$ .
  - 9:     **se**  $\mathbf{u}$  é factível **então**
  - 10:       **se**  $\mathbf{x}_i$  é factível **então**
  - 11:         **se**  $\mathbf{u}$  domina  $\mathbf{x}_i$  **então**
  - 12:          $R_G \leftarrow \mathbf{u}$ .
  - 13:         **senão**
  - 14:         **se**  $\mathbf{x}_i$  domina  $\mathbf{u}$  **então**
  - 15:          $R_G \leftarrow \mathbf{x}_i$ .
  - 16:         **senão**
  - 17:          $R_G \leftarrow \mathbf{x}_i, \mathbf{u}$ .
  - 18:         **fim se**
  - 19:         **fim se**
  - 20:         **senão**
  - 21:          $R_G \leftarrow \mathbf{u}$ .
  - 22:         **fim se**
  - 23:         **senão**
  - 24:         **se**  $\mathbf{x}_i$  é factível **então**
  - 25:          $R_G \leftarrow \mathbf{x}_i$ .
  - 26:         **senão**
  - 27:         **se**  $\mathbf{u}$  domina  $\mathbf{x}_i$  no espaço das restrições **então**
  - 28:          $R_G \leftarrow \mathbf{u}$ .
  - 29:         **senão**
  - 30:          $R_G \leftarrow \mathbf{x}_i$ .
  - 31:         **fim se**
  - 32:         **fim se**
  - 33:         **fim se**
  - 34:     **fim para**
-

---

**Algoritmo 13** GDE3 (continuação).
 

---

35: **se**  $R_G$  tem mais de  $POP$  soluções candidatas **então**  
 36:     Classifique  $R_G$  em  $d$  postos pelo processo de Ordenação de Pareto.  
 37:      $P_{G+1} \leftarrow \emptyset$ .  
 38:      $\gamma \leftarrow 1$ .  
 39:     **enquanto** Quantidade de soluções candidatas em  $P_{G+1} < POP$  **faça**  
 40:          $P_{G+1} \leftarrow P_{G+1} \cup$  soluções candidatas do posto  $\gamma$ .  
 41:          $\gamma \leftarrow \gamma + 1$ .  
 42:     **fim enquanto**  
 43:      $\gamma \leftarrow \gamma - 1$ .  
 44:     **enquanto** Quantidade de soluções candidatas em  $P_{G+1} > POP$  **faça**  
 45:         Calcule  $CD$  para todas as soluções candidatas de posto  $\gamma$ .  
 46:         Exclua de  $P_{G+1}$  a solução candidata de posto  $\gamma$  com menor valor de  $CD$ .  
 47:     **fim enquanto**  
 48:     **senão**  
 49:          $P_{G+1} \leftarrow R_G$ .  
 50:     **fim se**  
 51:      $Arq \leftarrow Arq \cup P_{G+1}$ .  
 52:      $G \leftarrow G + 1$ .  
 53: **fim enquanto**  
 54:  $SPO \leftarrow$  soluções candidatas não-dominadas e factíveis de  $Arq$ .

---



---

**Algoritmo 14** I-GDE3.
 

---

**entrada:** Parâmetros do GDE3. **saída:**  $SPO$ , isto é, todas as soluções não-dominadas factíveis obtidas durante todas as execuções tanto do GDE3 quanto do R-GDE3.

- 1:  $G_0 \leftarrow$  número de gerações fornecida pelo Tomador de Decisão para executar o GDE3.
- 2: Execute o GDE3 durante  $G_0$  gerações.
- 3: Observe a Frente de Pareto inicial obtida pelo GDE3 e defina um Ponto de Referência e um valor para  $\epsilon$ .
- 4:  $G \leftarrow G_0$  contador de gerações.
- 5: **enquanto**  $G \leq GEN$  **faça**
- 6:      $G_I \leftarrow$  número de gerações fornecida pelo Tomador de Decisão para executar o R-GDE3 até a próxima interação.
- 7:     Execute o R-GDE3 com os mesmos parâmetros do GDE3 e o Ponto de Referência e o valor de  $\epsilon$  fornecidos pelo fornecida pelo Tomador de Decisão durante  $G_I$  gerações.
- 8:     Observe os resultados obtidos pelo R-GDE3 e, se preferir, defina um novo Ponto de Referência e um novo valor para  $\epsilon$ .
- 9:      $G \leftarrow G + G_I$ .
- 10: **fim enquanto**

---

---

**Algoritmo 15** R-GDE3.
 

---

**entrada:** Parâmetros  $CR$ ,  $F$ ,  $\epsilon$ ,  $\bar{z}$  e  $GEN$ , além dos dados referentes ao problema (funções objetivo, restrições, espaços de busca, entre outras.)  $\triangleright \epsilon$  é um número real controla a diversidade da população,  $\bar{z}$  é o ponto de referência e  $GEN$  é o número máximo de gerações. **saída:**  $SPO$ .

```

1:  $P_0 \leftarrow$  população inicial criada aleatoriamente de  $POP$  soluções candidatas  $\mathbf{x}$ .
2:  $Arq \leftarrow P_0$   $\triangleright$  Arquivo Externo que vai armazenar todas as soluções candidatas encontradas durante toda a execução do algoritmo.
3:  $f_1, f_2 \leftarrow$  funções objetivo de cada solução candidata de  $P_0$ .
4:  $G \leftarrow 0$  contador de gerações.
5: enquanto  $G \leq GEN$  faça
6:   para  $i = 1 : POP$  faça
7:      $\mathbf{u} \leftarrow$  criado a partir de  $\mathbf{x}_i \in P_G$  através do Algoritmo 3.
8:     Obtenha  $f_1(\mathbf{u})$  e  $f_2(\mathbf{u})$ .
9:     se  $\mathbf{u}$  é factível então
10:      se  $\mathbf{x}_i$  é factível então
11:        se  $\mathbf{u}$  domina  $\mathbf{x}_i$  então
12:           $R_G \leftarrow \mathbf{u}$ .
13:        senão
14:          se  $\mathbf{x}_i$  domina  $\mathbf{u}$  então
15:             $R_G \leftarrow \mathbf{x}_i$ .
16:          senão
17:             $R_G \leftarrow \mathbf{x}_i, \mathbf{u}$ .
18:          fim se
19:        fim se
20:      senão
21:         $R_G \leftarrow \mathbf{u}$ .
22:      fim se
23:    senão
24:      se  $\mathbf{x}_i$  é factível então
25:         $R_G \leftarrow \mathbf{x}_i$ .
26:      senão
27:        se  $\mathbf{u}$  domina  $\mathbf{x}_i$  no espaço das restrições então
28:           $R_G \leftarrow \mathbf{u}$ .
29:        senão
30:           $R_G \leftarrow \mathbf{x}_i$ .
31:        fim se
32:      fim se
33:    fim se
34:  fim para

```

---

---

**Algoritmo 15** R-GDE3 (continuação).
 

---

```

35:   se  $R_G$  tem mais de  $POP$  soluções candidatas então
36:     Classifique  $R_G$  em  $d$  postos pelo processo de Ordenação de Pareto.
37:      $P_{G+1} \leftarrow \emptyset$ .
38:      $\gamma \leftarrow 1$ .
39:     enquanto Quantidade de soluções candidatas em  $P_{G+1} < POP$  faça
40:        $P_{G+1} \leftarrow P_{G+1} \cup$  soluções candidatas do posto  $\gamma$ .
41:        $\gamma \leftarrow \gamma + 1$ .
42:     fim enquanto
43:      $\gamma \leftarrow \gamma - 1$ .
44:     se Quantidade de indivíduos em  $P_{G+1} > POP$  então
45:        $P_\gamma \leftarrow$  indivíduos de posto  $\gamma$  de  $P_{G+1}$ .
46:       Exclua de  $P_{G+1}$  todos os indivíduos de posto  $\gamma$ .
47:        $F\epsilon, D\epsilon \leftarrow \emptyset$ .
48:       enquanto Quantidade de indivíduos em  $P_{G+1} < POP$  faça
49:         se  $P_\gamma \neq \emptyset$  então
50:           Calcule  $d_i(\mathbf{x}_i, \bar{z})$  para todo  $\mathbf{x}_i \in P_\gamma$  usando a Equação (3.4).
51:            $\mathbf{x}_{md} \leftarrow$  indivíduo de  $P_\gamma$  com menor valor  $d_i$  calculado no item
anterior.
52:            $D\epsilon \leftarrow$  indivíduos de  $P_\gamma$  cuja soma das diferenças normalizadas no
espaço dos objetivos entre ele e  $\mathbf{x}_{md}$  seja menor ou igual a  $\epsilon$ .
53:            $P_\gamma \leftarrow P_\gamma \setminus D\epsilon$ .
54:            $P_{G+1} \leftarrow P_{G+1} \cup$  indivíduo selecionado aleatoriamente em  $D\epsilon$ .
55:            $F\epsilon \leftarrow F\epsilon \cup$  indivíduos não selecionados em  $D\epsilon$  no item anterior.
56:            $D\epsilon \leftarrow \emptyset$ .
57:         senão
58:            $P_{G+1} \leftarrow P_{G+1} \cup$  indivíduo selecionado aleatoriamente em  $F\epsilon$ .
59:           Exclua de  $F\epsilon$  o indivíduo selecionado no item anterior.
60:         fim se
61:       fim enquanto
62:     fim se
63:   senão
64:      $P_{G+1} \leftarrow R_G$ .
65:   fim se
66:    $Arq \leftarrow Arq \cup P_{G+1}$ .
67:    $G \leftarrow G + 1$ .
68: fim enquanto
69:  $SPO \leftarrow$  soluções candidatas não-dominadas e factíveis de  $Arq$ .

```

---

## 7 MEDIDAS DE DESEMPENHO

Como discutido nos Capítulos 2 e 3 e ilustrado pela Figura 2.3, há dois objetivos que um *SPO* deve atingir para ser considerado uma boa aproximação da Frente de Pareto real: convergência e diversidade. Para comparar a qualidade do *SPO* em termos de convergência e diversidade, várias Medidas de Desempenho foram introduzidas na literatura.

Foram adotadas aqui três tipos de medidas de desempenho para MOEAs: Medidas Unárias, Medidas Binárias e a *Empirical Attainment Function*, sendo as Medidas Unárias as mais populares (ZITZLER et al., 2003). As Medidas Unárias fornecem um indicador de qualidade para cada *SPO*, independentemente. Elas podem medir a qualidade da convergência, da diversidade ou de ambos e algumas delas exigirem o conhecimento da Frente de Pareto real. As Medidas Binárias comparam dois ou mais *SPOs* diretamente e a *Empirical Attainment Function* consiste em fornecer a probabilidade de algum conjunto de soluções obtidas atingir alguma meta arbitrária. Neste trabalho foram adotadas 2 Medidas Unárias (*Inverted Generational Distance* e Hipervolume), 2 Medidas Binárias (*Coverage Metric* e  $\epsilon$ -*Indicator*) e a *Empirical Attainment Function*. A descrição delas e a justificativa dessas escolhas serão destacadas a seguir.

### 7.1 Medidas Unárias

#### 7.1.1 *Inverted Generational Distance*

(DEB et al., 2002) utilizou duas Medidas Unárias para avaliar o desempenho do NSGA-II: *Generational Distance* (GD), proposta por (VELDHUIZEN; LAMONT, 1998), e *Spread* ( $\Delta$ ), proposta por (DEB, 2001). Devido à popularidade do NSGA-II e do trabalho (DEB et al., 2002), essas medidas se tornaram igualmente populares. Tratam-se de Medidas Unárias que exigem o conhecimento da Frente de Pareto real do problema em questão.

A medida *Spread* ( $\Delta$ ) tem por principal função fornecer um indicador de qualidade com relação à diversidade do *SPO* sobre a Frente de Pareto real. O valor de  $\Delta$  pode ser

calculado por:

$$\Delta = \frac{d_f + d_l + \sum_{i=1}^{|SPO|} |d_i - \bar{d}|}{d_f + d_l + |SPO|\bar{d}} \quad (7.1)$$

onde  $d_f$  e  $d_l$  são as menores distâncias entre os pontos extremos do  $SPO$  (aqueles em que o valor do *crowding distance* é igual a infinito) e dos pontos extremos da Frente de Pareto real. A distância euclidiana entre a  $i$ -ésima solução do  $SPO$  e a solução do  $SPO$  mais próxima dela é dada por  $d_i$  e  $\bar{d}$  é a média dos valores de  $d_i$ . Quanto menor o valor de  $\Delta$ , maior a diversidade do  $SPO$  sobre a Frente de Pareto real.

A medida *Generational Distance* (GD) é a média das distâncias de cada uma das soluções do  $SPO$  que está sendo avaliado até a solução da Frente de Pareto real mais próxima dela. Sua principal função é fornecer um indicador de qualidade com relação à convergência do  $SPO$ . Quanto menor o valor de GD, mais perto o  $SPO$  está da Frente de Pareto real do problema. Matematicamente, o valor de GD pode ser obtido por

$$GD = \frac{\sum_{i=1}^{|SPO|} d_i}{|SPO|} \quad (7.2)$$

onde  $d_i$  é a distância euclidiana entre a  $i$ -ésima solução do  $SPO$  e a solução da Frente de Pareto real mais próxima dela.

(SIERRA; COELLO, 2005) propõe a inversão do cálculo do GD para que ela seja capaz de medir, além da convergência, a diversidade da  $SPO$ . Eles denominam essa inversão de *Inverted Generational Distance* (IGD). Assim, para cada  $SPO$ , IGD é a média das distâncias de cada uma das soluções da Frente de Pareto real até a solução do  $SPO$  mais próxima dela. Qualquer deficiência na convergência ou na diversidade do  $SPO$  aumenta o valor do IGD. Logo, quanto menor o valor de IGD melhor é a convergência e diversidade do  $SPO$  em relação à Frente de Pareto real do problema. O uso da IGD dispensa a adoção de medidas que avaliam somente a diversidade, como é o caso da medida *Spread*.

### 7.1.2 Hipervolume

Outra Medida Unária que avalia tanto a convergência quanto a diversidade do  $SPO$  é a Hipervolume (H), proposta por (ZITZLER; THIELE, 1999). Como o próprio nome indica, ela fornece o hipervolume do espaço limitado pelos pontos da  $SPO$  e um ponto de referência. No caso de duas funções objetivo, H é a área do polígono cujos vértices são os pontos da  $SPO$  e um ponto de referência. Na Figura 7.1, H é a área hachurada

de azul e as soluções da *SPO* são os pontos em vermelho. Quanto maior o valor de  $H$ , melhor é a relação convergência/diversidade do *SPO* em relação à Frente de Pareto real do problema. A medida  $H$  é bastante popular na literatura devido ao fato de não exigir o conhecimento da Frente de Pareto real do problema em questão.

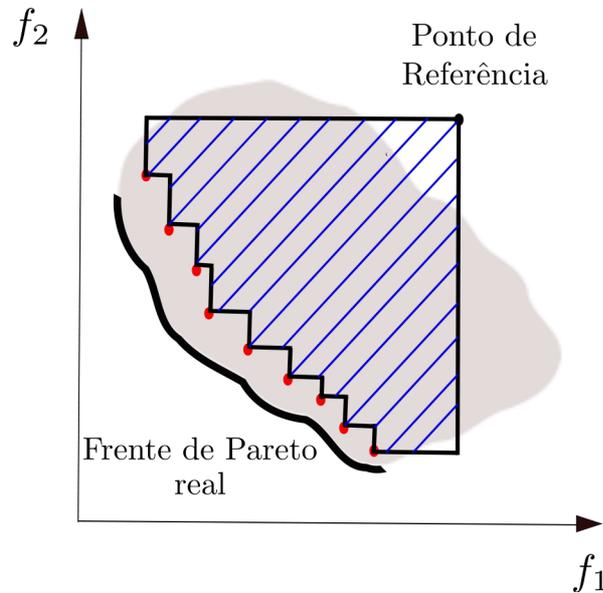


Figura 7.1: Com duas funções objetivo, Hipervolume é a área do polígono cujos vértices são os pontos da *SPO* e um ponto de referência.

## 7.2 Medidas Binárias

### 7.2.1 Coverage Metric

Em relação às Medidas Binárias, (ZITZLER et al., 2003) faz um estudo comparando algumas comumente encontradas na literatura. Dado dois *SPOs* obtidos separadamente (digamos  $A$  e  $B$ ), os autores definem que  $A$  é melhor que  $B$  ( $A \triangleright B$ ) se para cada elemento de  $B$  existir um elemento de  $A$  que o domina. Os autores analisaram se as medidas são capazes de indicar  $A \triangleright B$  através de um experimento com diversos *SPOs* em situações de dominância distintas. Entre as medidas binárias discutidas naquele trabalho, a *Coverage Metric* (CM) e a  $\epsilon$ -Indicator ( $I_\epsilon$ ) foram as que apresentaram melhores resultados, isto é, de fato são capazes de indicar  $A \triangleright B$  na maior parte dos casos.

Dado dois *SPOs* obtidos separadamente, a medida binária *Coverage Metric* (CM), proposta por (ZITZLER; THIELE, 1999), fornece a proporção de elementos de um deles que são dominadas por algum elemento do outro. Sejam  $A$  e  $B$  dois *SPOs* distintos, o

valor de CM é dado por

$$CM(A,B) = \frac{|\{b \in B | \exists a \in A, a \succ b\}|}{|B|}$$

Se  $CM(A,B) > CM(B,A)$ , então  $A$  é melhor que  $B$  segundo a *Coverage Metric*. Se todos os pontos de  $A$  não são dominados por nenhum ponto de  $B$ , então  $CM(A,B) = 1$ . Se  $CM(A,B) = 0$ , o oposto é válido.

### 7.2.2 $\epsilon$ -Indicator

A medida binária  $\epsilon$ -Indicator ( $I_\epsilon$ ), proposta por (ZITZLER et al., 2003), funciona da seguinte maneira: Seja um número real  $\epsilon$  tal que o produto de cada elemento de  $B$  por  $\epsilon$  seja dominado por algum elemento de  $A$ . O valor de  $I_\epsilon(A,B)$  é o menor valor que  $\epsilon$  pode assumir. Se  $I_\epsilon(A,B) < I_\epsilon(B,A)$ , então  $A$  é melhor que  $B$  segundo a  $\epsilon$ -Indicator. Nesta definição, se a substituição do produto pela soma for considerada, essa medida passa a ser denominada *Additive  $\epsilon$ -Indicator* ( $I_{\epsilon+}$ ).

## 7.3 Empirical Attainment Function

A *Empirical Attainment Function* (EAF) fornece uma estimativa da probabilidade de algum conjunto de soluções obtidas atingir alguma meta arbitrária. Proposta por (FONSECA; FLEMING, 1996), ela se baseia em dados empíricos, atuando como uma função de distribuição de probabilidade. Ela pode ser observada graficamente através da superfície que divide espaço dos objetivos em metas alcançadas por uma solução arbitrária segundo uma dada probabilidade.

Manuel López-Ibáñez construiu uma ferramenta baseada no software R que calcula e exibe o gráfico da EAF <sup>1</sup>. A Figura 7.2 extraída de (LÓPEZ-IBÁÑEZ et al., 2010) exibe o gráfico da EAF (Melhor, média e pior áreas de dominância alcançadas, denominada pela ferramenta de *best*, *median* e *worst*) obtidas por 10 execuções independentes de um determinado MOEA sobre um problema com duas funções objetivo. Isso significa que qualquer solução arbitrária obtida por qualquer uma dessas 10 execuções desse algoritmo tem 0% de chance de ser dominada por algum dos pontos da curva *worst*, 50% de chance

<sup>1</sup>Disponível em <http://iridia.ulb.ac.be/~manuel/eaftools>.

de ser dominada por algum dos pontos da curva *median* e 0% de chance de dominar algum dos pontos da curva *best*.

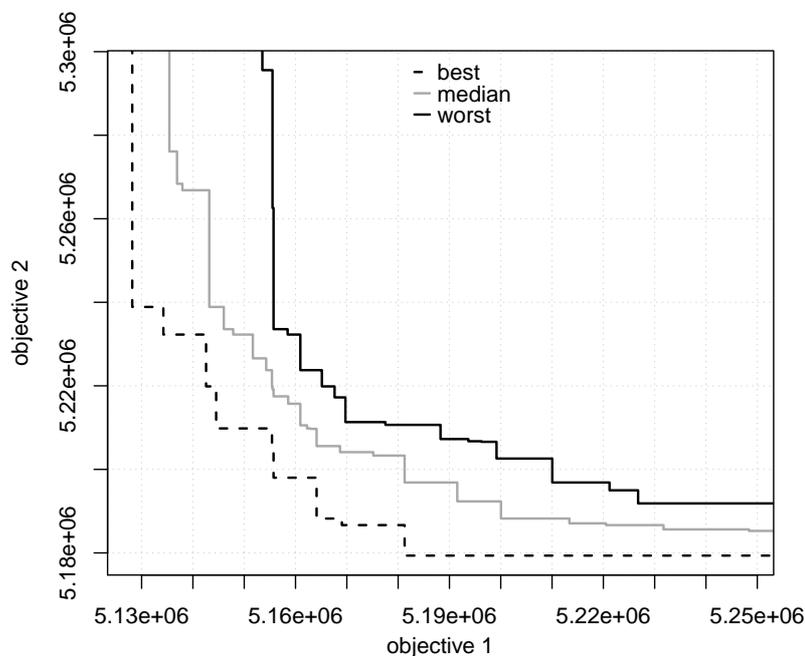


Figura 7.2: Exemplo do gráfico da EAF (*best*, *median* e *worst*) obtido pela ferramenta do software R construída por Manuel López-Ibáñez. A Figura foi extraída de (LÓPEZ-IBÁÑEZ et al., 2010)

Uma discussão mais detalhada sobre a obtenção do EAF pode ser encontrada em (FONSECA; FLEMING, 1996) e (COELLO et al., 2007), enquanto em (LÓPEZ-IBÁÑEZ et al., 2010) pode ser encontrado um tutorial bem detalhado sobre o uso da ferramenta baseada no software R construída por Manuel López-Ibáñez. Além da obtenção das curvas EAF *best*, *median* e *worst*, outras possíveis formas de se trabalhar com a medida EAF podem ser encontradas em <http://iridia.ulb.ac.be/~manuel/doc/gecco2010moworkshop.pdf>.

## 7.4 Outros Aspectos sobre Medidas de Desempenho

As medidas descritas anteriormente foram escolhidas devido às suas popularidades e suas capacidades de indicar, de fato, se um MOEA obteve melhor *SPO* do que outro. No caso das medidas unárias, foram escolhidas aquelas que são capazes de avaliar simultaneamente a convergência e diversidade de um *SPO*. Além de todas essas medidas, existem outras

análises que podem ser feitas para indicar a qualidade dos *SPOs* obtidos. Nesta tese optou-se pelo uso do teste não paramétrico de Wilcoxon para verificação da existência ou não de diferenças estatisticamente significativas entre os resultados e pelo uso dos perfis de desempenho (proposto por (DOLAN; MORE, 2002)) para identificar os algoritmos com melhores desempenhos globais em uma determinada medida.

O teste de Wilcoxon (WILCOXON, 1945) é um teste não paramétrico usado para comparar duas amostras quando os dados são obtidos através do esquema de pareamento. Ele fornece a probabilidade de se aceitar a hipótese nula (*p*-valor), isto é, a de que não há diferença estatisticamente significativa entre os dois conjuntos de dados analisados. Nesta tese, o *p*-valor foi calculado utilizando a função *ranksum* do MATLAB<sup>®</sup> e o nível de confiabilidade considerado foi de 95% (rejeita-se a hipótese nula sempre que o *p*-valor for menor que 0,05).

O sinal (+) indica que a diferença entre as medidas calculadas para cada uma das execuções realizadas é estatisticamente significativa (*p*-valor  $\leq 0.05$ ) quando comparado com os mesmos resultados obtidos pelo de melhor média. Para cada problema, o melhor resultado pode ser identificado por estar em negrito. A adoção de um teste não paramétrico é propícia aqui, uma vez que observou-se a ausência de evidências estatísticas para concluir que os resultados sejam normalmente distribuídos na maioria dos experimentos e problemas, segundo o teste de Shapiro-Wilk (SHAPIRO; WILK, 1965) com nível de significância de 5%.

Os perfis de desempenho propostos por (DOLAN; MORE, 2002) permitem avaliar o desempenho de um algoritmo em um grupo de problemas, segundo uma determinada medida. Para defini-lo, considere um conjunto *P* de problemas teste  $p_j$ , com  $j = 1, 2, \dots, n_p$ , *A* um conjunto de algoritmos  $a_i$  com  $i = 1, 2, \dots, n_a$  e  $t_{p,a}$  uma medida de desempenho. A razão de desempenho de um algoritmo *a* em um problema *p* é definida como

$$r_{p,a} = \frac{t_{p,a}}{\min\{t_{p,a}, a \in A\}}.$$

Repare que  $r_{p,a} \geq 1$  para qualquer par formado por um algoritmo *a* e um problema *p*. O perfil de desempenho do algoritmo *a* no conjunto *P* de problemas segundo a medida de desempenho  $t_{p,a}$  é dado por:

$$\rho_a(\tau) = \frac{1}{n_p} |\{p \in P : r_{p,a} \leq \tau\}|$$

que é a fração de problemas resolvidos pelo algoritmo com desempenho dentro de um fator  $\tau$  do melhor desempenho obtido considerando todos os algoritmos.

Aa função  $\rho_a(\tau)$  tem um gráfico na forma de degraus. (BARBOSA et al., 2010b) sugere que a área sob esse gráfico é um indicador global de desempenho do algoritmo: quanto maior a área, maior a eficiência do algoritmo. Além disso, o algoritmo que atinge primeiro o valor  $\rho(\tau) = 1$  é o mais confiável enquanto o que atinge o maior valor de  $\rho(1)$  é o de melhor resultado em um maior número de problemas.

Para o uso de medidas cujo conhecimento da Frente de Pareto real seja necessário (por exemplo a IGD), adota-se aqui uma recomendação de (KNOWLES et al., 2006): a Frente de Pareto real é o conjunto das soluções não-dominadas da união de todos os *SPOs* obtidos por todas as execuções de todos os MOEAs considerados para o problema em questão. Esse procedimento é devido ao fato de que em muitos problemas a Frente de Pareto real não é conhecida.

Além disso, as medidas unárias foram avaliadas sobre os *SPOs* normalizados com base nos maiores e menores valores observados para cada função objetivo (a Frente de Pareto real também foi normalizada). Esse procedimento evita que uma função objetivo seja mais valorizada em determinadas medidas do que a outra. Dessa forma, cada função objetivo de cada *SPO* ficou avaliada entre 0 e 1, e para o cálculo do Hipervolume, o ponto (1,1) foi tomado como ponto de referência.

As Medidas Unárias e Binárias utilizadas nessa tese foram implementadas no MATLAB<sup>®</sup> e os códigos utilizados foram obtidos em (KUKKONEN, 2012) (com exceção da medida  $\epsilon$ -Indicator, onde o código foi construído pelo autor dessa tese).

A experimentação computacional desse trabalho será apresentada nos Capítulos 8, 9, 10 e 11. A Tabela 7.1 mostra quais os algoritmos que serão avaliados e em quais situações, além das medidas adotadas e os objetivos do experimento.

Tabela 7.1: Organização dos Experimentos Computacionais.

| Experimento | Algoritmos                                      | Problemas                                                                                                    | Medidas                           | Preferências | Objetivo                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|-------------|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|--------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1           | GDE3+APM,<br>MOACS<br>MOAS <sup>e</sup>         | Caso Discreto das Treliças de 10, 25, 60, 72 e 942 barras                                                    | H e EAF                           | Não          | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Verificar se a ED é capaz de produzir resultados competitivos com os exibidos na literatura que já resolveram os mesmos POMs de OE. Essa análise é possível uma vez que os algoritmos GDE3+APM, MOACS e MOAS utilizam a mesma técnica APM.</li> </ul>                                                                                                                         |
| 2           | GDE3+APM,<br>NSGA-II <sup>e</sup><br>GDE3       | Casos Contínuo e Discreto das Treliças de 10, 25, 60, 72 e 942 barras                                        | H, IGD, CM,<br>$I_\epsilon$ e EAF | Não          | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Comparar os resultados obtidos pelo GDE3+APM com os obtidos pelo GDE3, a fim de verificar a influência da técnica APM nesses problemas.</li> <li>• Comparar os resultados obtidos pelo GDE3+APM com os resultados obtidos pelo NSGA-II, com o objetivo de analisar o desempenho do algoritmo proposto frente aquele que representa o estado da arte da literatura.</li> </ul> |
| 3           | R-GDE3+APM,<br>R-GDE3 <sup>e</sup><br>R-NSGA-II | Casos Contínuo e Discreto das Treliças de 60, 72 e 942 barras e Caso Contínuo das Treliças de 10 e 25 barras | H, IGD, CM,<br>$I_\epsilon$ e EAF | Sim          | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Refazer o Experimento 2 considerando cenários de inserção <i>a priori</i> de informações de preferências.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                          |
| 4           | I-GDE3+APM,<br>I-NSGA-II <sup>e</sup><br>I-GDE3 | Casos Contínuo e Discreto das Treliças de 60, 72 e 942 barras e Caso Contínuo das Treliças de 10 e 25 barras | H, IGD, CM,<br>$I_\epsilon$ e EAF | Sim          | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Refazer o Experimento 2 considerando cenários de inserção de informações de preferências de modo interativo.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                       |

# 8 EXPERIMENTO 1: GDE3+APM versus MOAS e MOACS

## 8.1 Delineamento

Nesta primeira seção de experimentos será apresentada uma análise comparativa do algoritmo proposto GDE3+APM (**Algoritmo 4**) com os resultados obtidos pelos algoritmos MOAS e MOACS em (ANGELO et al., 2012). Os problemas analisados por aqueles autores foram o caso discreto das Treliças de 10, 25, 60, 72 e 942 Barras, descritos no Capítulo 5. Em todos eles o objetivo é a obtenção da Frente de Pareto completa, ou seja, sem a inserção de preferências do usuário. Todos os algoritmos utilizam a mesma técnica de penalização adaptativa APM para o tratamento das restrições.

(ANGELO et al., 2012) analisaram dois algoritmos baseados em Colônia de Formigas em seus experimentos: MOAS *Multi-objective Ant System* e MOACS *Multi-objective Ant Colony System*. (ANGELO et al., 2012) executou 100 vezes cada um deles com 50 formigas e 1000 gerações. As medidas adotadas em (ANGELO et al., 2012) foram Hipervolume e *Empirical Attainment Function* (EAF).

O algoritmo GDE3+APM foi executado 100 vezes para cada problema com os parâmetros exibidos na Tabela 8.1, com tamanho da população de 50 indivíduos e 1000 gerações, perfazendo um total de 50000 avaliações de cada uma das funções objetivo. O experimento inicial que definiu a combinação de parâmetros mais promissora para ser adotada pelo algoritmo GDE3+APM está detalhado no Apêndice A. As mesmas medidas adotadas em (ANGELO et al., 2012) (Hipervolume e EAF) foram adotadas neste experimento<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>As demais medidas também foram calculadas neste experimento, mas optou-se pela não exibição dos seus resultados já que eles foram totalmente discrepantes. Entendeu-se aqui que o Hipervolume e a EAF foram suficientes para as análises.

Tabela 8.1: Valores dos parâmetros  $CR$  e  $F$  adotados pelo algoritmo GDE3+APM para cada uma das Treliças de 10, 25, 60, 72 e 942 Barras (caso discreto) no Experimento 1.

|      | 10 Barras | 25 Barras | 60 Barras | 72 Barras | 942 Barras |
|------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|
| $CR$ | 0,9       | 0,9       | 0,1       | 0,9       | 0,1        |
| $F$  | 0,4       | 0,2       | 0,7       | 0,3       | 0,7        |

## 8.2 Análise dos Resultados

As médias e os desvios-padrão do Hipervolume dos  $SPOs$  normalizados são apresentados na Tabela 8.2. As curvas EAF *best*, *median* e *worst* dos algoritmos MOACS, MOAS e GDE3+APM nos problemas analisados são apresentadas nas Figuras 8.1, 8.2 e 8.3. As Figuras 8.4 e 8.5 mostram as curvas EAF *best*, *median* e *worst* para cada um dos algoritmos MOACS, MOAS e GDE3+APM.

A comparação dos resultados indica que o GDE3+APM apresentou desempenho significativamente superior aos algoritmos MOACS e MOAS nas medidas adotadas. A Tabela 8.2 mostra que o GDE3+APM alcançou resultados melhores que os obtidos pelos algoritmos MOACS e MOAS no Hipervolume, com diferença estatisticamente significativa em todos os problemas, detectadas pelo teste de Wilcoxon. Em relação à medida *Empirical Attainment Function*, todas as curvas do GDE3+APM dominam uma área maior do que a dominada pelos algoritmos MOACS e MOAS, indicando que ele foi capaz de obter soluções melhores (Figuras 8.1, 8.2 e 8.3). A área entre as curvas EAFs relativas às probabilidades de 0% e 100% (denotada por *Dif* nas Figuras 8.4 e 8.5) do algoritmo GDE3+APM é menor quando comparada à área entre as curvas EAFs relativas às mesmas probabilidades dos algoritmos MOAS e MOACS, indicando que ele é um algoritmo bem estável. Um trabalho exibindo resultados da comparação do algoritmo proposto GDE3+APM com os resultados obtidos pelos algoritmos MOAS e MOACS em (ANGELO et al., 2012) foi publicado em (VARGAS et al., 2015)<sup>2</sup>.

A velocidade de convergência (característica da ED) também pode ser observada no GDE3+APM, um indicativo de sua robustez. A Tabela 8.3 mostra um comparativo do seu desempenho com 30000 avaliações<sup>3</sup>, mantendo todos os demais parâmetros inalterados. Os resultados indicam que o GDE3+APM apresentou desempenho significativamente superior

<sup>2</sup>No experimento do trabalho publicado foram adotados os parâmetros  $CR = 0,4$  e  $F = 0,3$ , mesmos valores adotados pelo GDE3 em (KUKKONEN, 2012) para problemas com restrições.

<sup>3</sup>Orçamento utilizado em (KAVEH; LAKNEJADI, 2011) na resolução do problema contínuo da Treliça de 25 Barras.

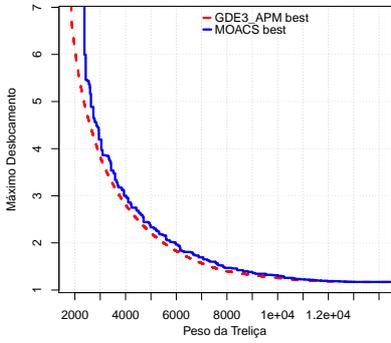
Tabela 8.2: Média e Desvio Padrão (DP) dos Resultados do Hipervolume (H) para o Experimento 1 considerando 50000 avaliações de cada uma das funções objetivo no GDE3+APM.

|            |       | GDE3+APM                | MOACS     | MOAS      |
|------------|-------|-------------------------|-----------|-----------|
| 10 barras  | Média | <b>0.8544</b>           | 0.7976(+) | 0.7573(+) |
|            | DP    | $5.3585 \times 10^{-4}$ | 0.0045    | 0.0186    |
| 25 barras  | Média | <b>0.8897</b>           | 0.8621(+) | 0.8565(+) |
|            | DP    | $6.5035 \times 10^{-5}$ | 0.0063    | 0.0042    |
| 60 barras  | Média | <b>0.7531</b>           | 0.5750(+) | 0.5507(+) |
|            | DP    | 0.0068                  | 0.0147    | 0.0272    |
| 72 barras  | Média | <b>0.9184</b>           | 0.8579(+) | 0.8562(+) |
|            | DP    | 0.0015                  | 0.0071    | 0.0041    |
| 942 barras | Média | <b>0.9413</b>           | 0.7624(+) | 0.7626(+) |
|            | DP    | 0.0075                  | 0.0157    | 0.0600    |

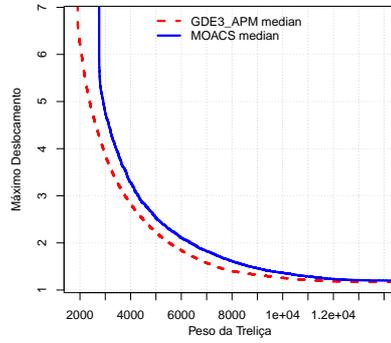
Tabela 8.3: Média e Desvio Padrão (DP) dos Resultados do Hipervolume (H) para o Experimento 1 considerando 30000 avaliações de cada uma das funções objetivo no GDE3+APM.

|            |       | GDE3+APM                | MOACS     | MOAS      |
|------------|-------|-------------------------|-----------|-----------|
| 10 barras  | Média | <b>0.8522</b>           | 0.7964(+) | 0.7557(+) |
|            | DP    | $6.6345 \times 10^{-4}$ | 0.0044    | 0.0188    |
| 25 barras  | Média | <b>0.8895</b>           | 0.8621(+) | 0.8565(+) |
|            | DP    | $1.3211 \times 10^{-4}$ | 0.0063    | 0.0042    |
| 60 barras  | Média | <b>0.7443</b>           | 0.5710(+) | 0.5446(+) |
|            | DP    | 0.0082                  | 0.0152    | 0.0273    |
| 72 barras  | Média | <b>0.9184</b>           | 0.8588(+) | 0.8572(+) |
|            | DP    | 0.0019                  | 0.0071    | 0.0041    |
| 942 barras | Média | <b>0.9227</b>           | 0.7420(+) | 0.7406(+) |
|            | DP    | 0.0104                  | 0.0166    | 0.0629    |

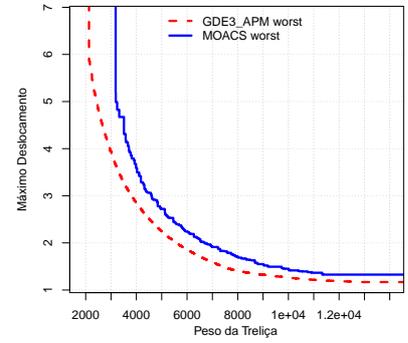
aos algoritmos MOACS e MOAS no Hipervolume com um orçamento 40% menor. Esse experimento mostra o potencial da ED na resolução de POMs em OE, já que todos os algoritmos utilizaram a mesma técnica APM. Verificou-se que o algoritmo proposto produz resultados competitivos com os apresentados na literatura que já resolveram os mesmos problemas.



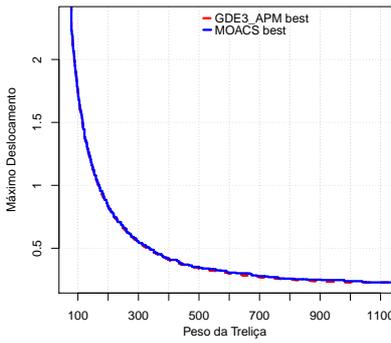
(a)  $H_1=0,8438$  e  $H_2=0,8138$



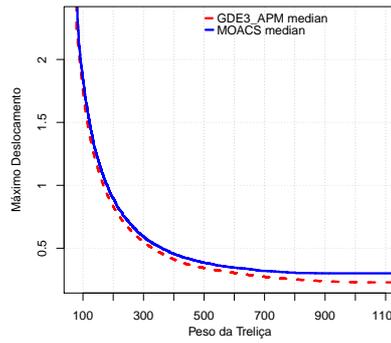
(b)  $H_1=0,8414$  e  $H_2=0,7795$



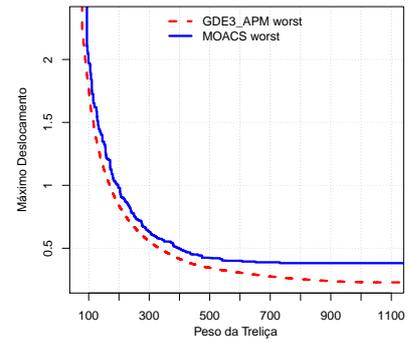
(c)  $H_1=0,8358$  e  $H_2=0,7440$



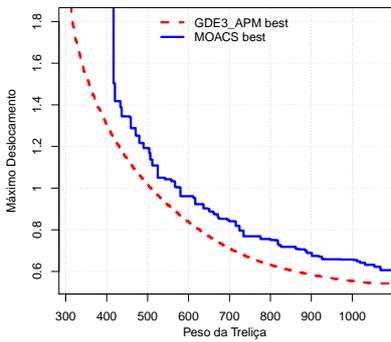
(d)  $H_1=0,8792$  e  $H_2=0,8752$



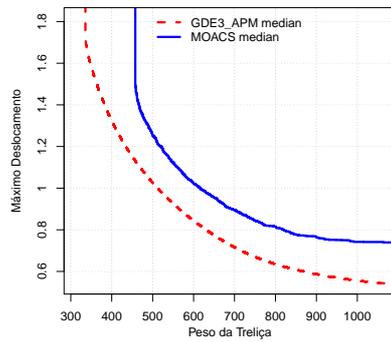
(e)  $H_1=0,8787$  e  $H_2=0,8513$



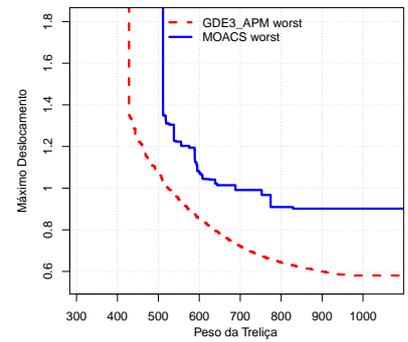
(f)  $H_1=0,8772$  e  $H_2=0,8183$



(g)  $H_1=0,7636$  e  $H_2=0,6452$



(h)  $H_1=0,7553$  e  $H_2=0,5773$



(i)  $H_1=0,7024$  e  $H_2=0,4804$

Figura 8.1: Curvas EAF dos algoritmos MOACS e GDE3+APM nas Treliças de 10 (a,b,c), 25 (d,e,f) e 60 (g,h,i) Barras (caso discreto). Hipervolumes normalizados:  $H_1$  para GDE3+APM e  $H_2$  para MOACS.

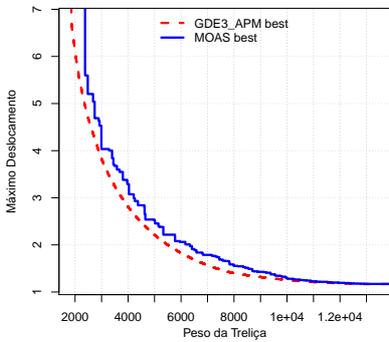
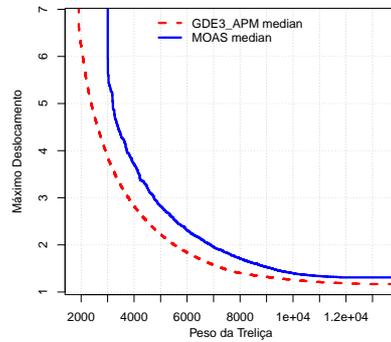
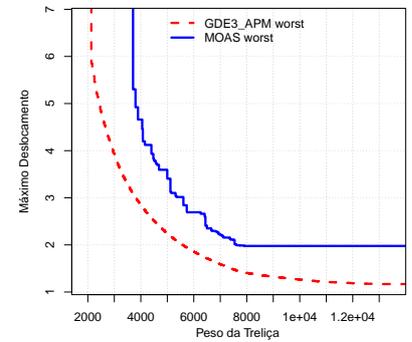
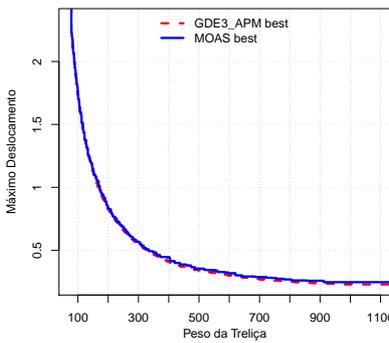
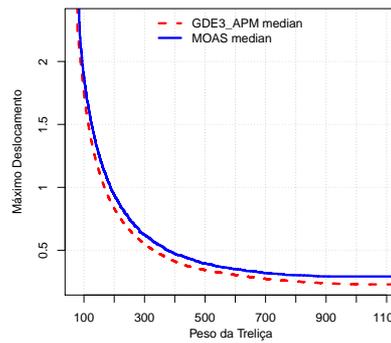
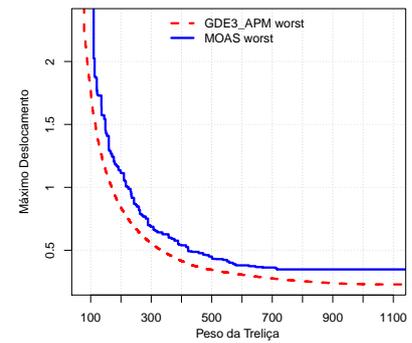
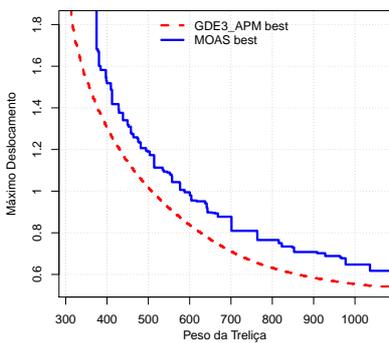
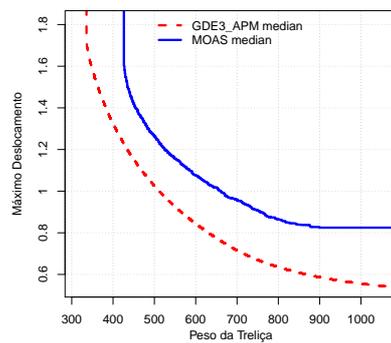
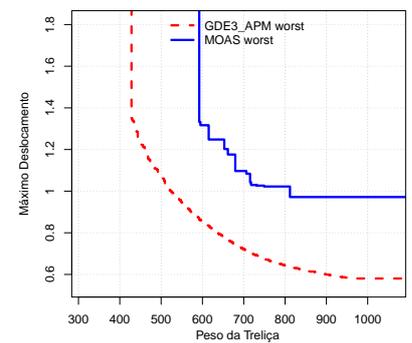
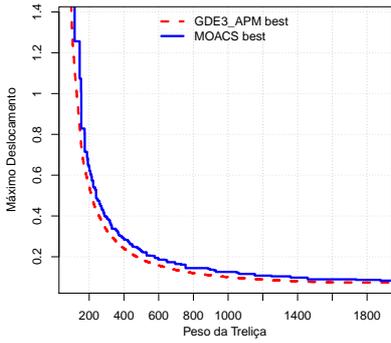
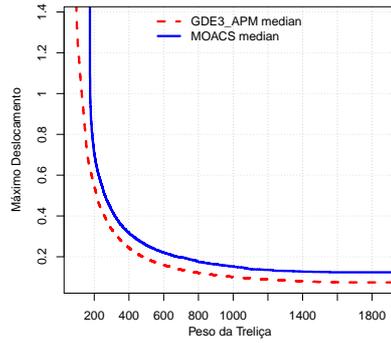
(a)  $H_1=0,8438$  e  $H_2=0,8006$ (b)  $H_1=0,8414$  e  $H_2=0,7455$ (c)  $H_1=0,8359$  e  $H_2=0,6452$ (d)  $H_1=0,8792$  e  $H_2=0,8719$ (e)  $H_1=0,8788$  e  $H_2=0,8451$ (f)  $H_1=0,8773$  e  $H_2=0,8063$ (g)  $H_1=0,7596$  e  $H_2=0,6438$ (h)  $H_1=0,7512$  e  $H_2=0,5506$ (i)  $H_1=0,6979$  e  $H_2=0,3788$ 

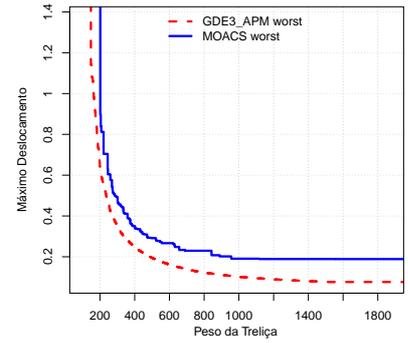
Figura 8.2: Curvas EAF dos algoritmos MOAS e GDE3+APM nas Treliças de 10 (a,b,c), 25 (d,e,f) e 60 (g,h,i) Barras (caso discreto). Hipervolumes normalizados:  $H_1$  para GDE3+APM e  $H_2$  para MOAS.



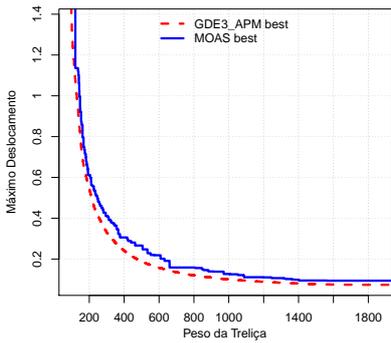
(a)  $H_1=0,9197$  e  $H_2=0,8910$



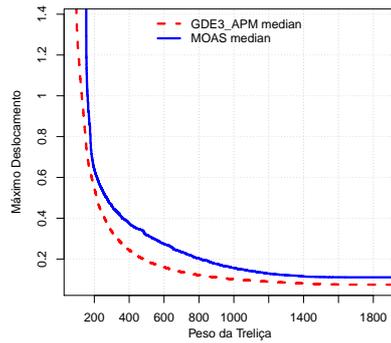
(b)  $H_1=0,9187$  e  $H_2=0,8593$



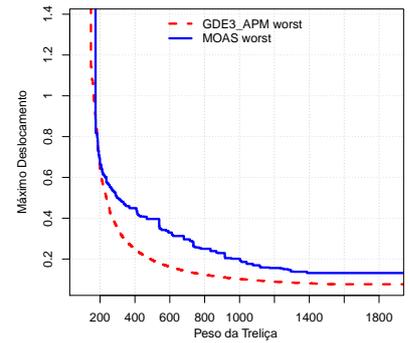
(c)  $H_1=0,9031$  e  $H_2=0,8142$



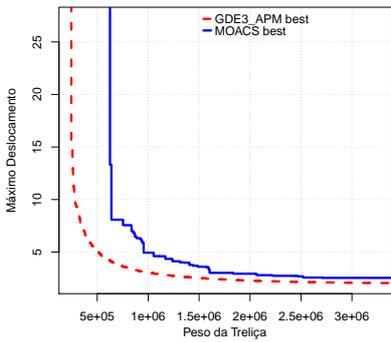
(d)  $H_1=0,9162$  e  $H_2=0,8846$



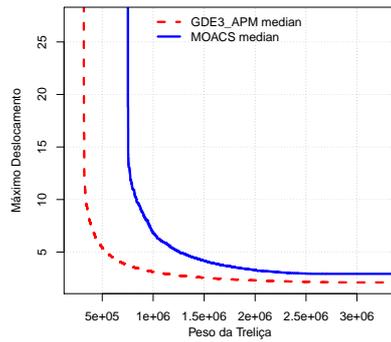
(e)  $H_1=0,9154$  e  $H_2=0,8515$



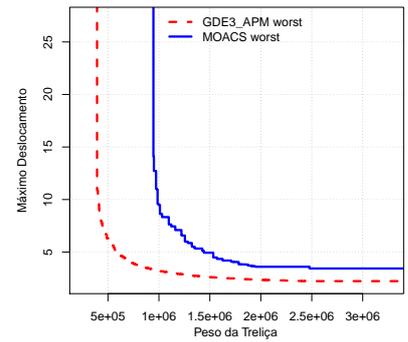
(f)  $H_1=0,8992$  e  $H_2=0,8202$



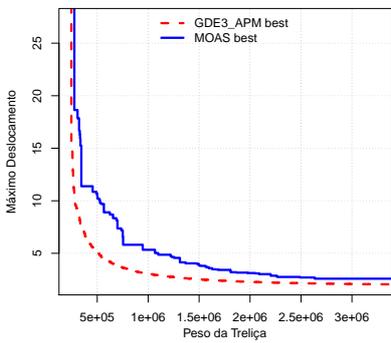
(g)  $H_1=0,9283$  e  $H_2=0,7681$



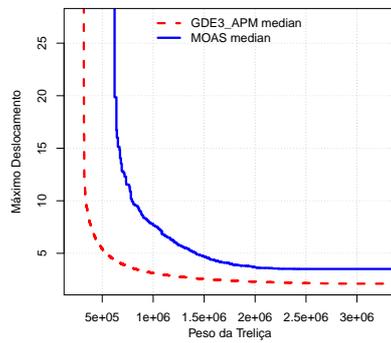
(h)  $H_1=0,9114$  e  $H_2=0,6995$



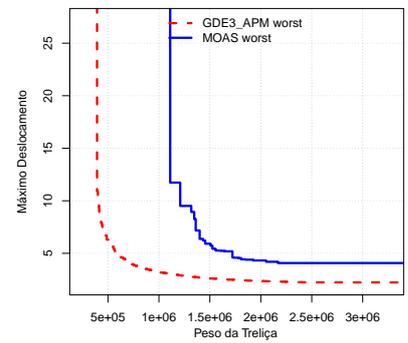
(i)  $H_1=0,8880$  e  $H_2=0,6304$



(j)  $H_1=0,9411$  e  $H_2=0,8326$



(k)  $H_1=0,9229$  e  $H_2=0,7110$



(l)  $H_1=0,8994$  e  $H_2=0,5797$

Figura 8.3: Curvas EAF dos algoritmos MOACS, MOAS e GDE3+APM nas Treliças de 72 (a,b,c,d,e,f) e 942 (g,h,i,j,k,l) Barras (caso discreto). Hipervolumes normalizados:  $H_1$  para GDE3+APM e  $H_2$  para MOACS e MOAS.

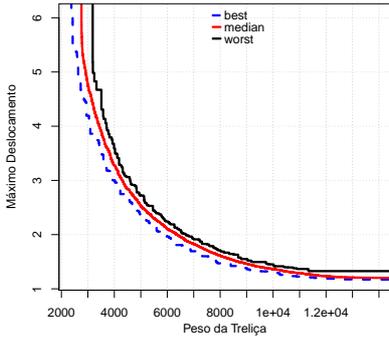
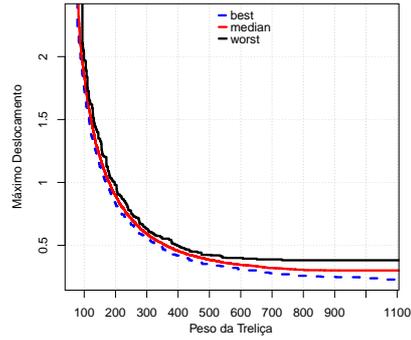
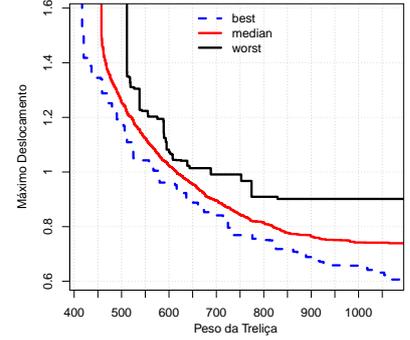
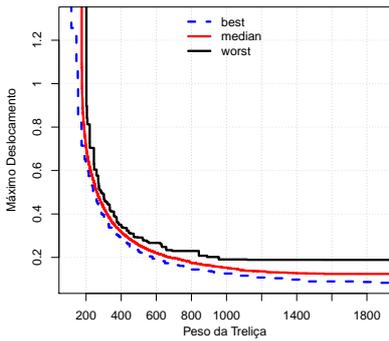
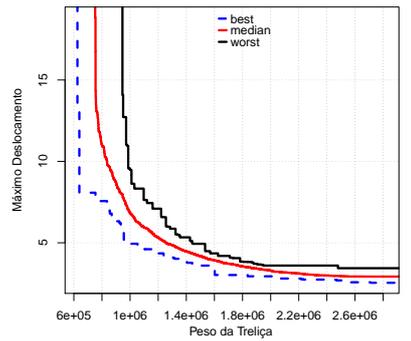
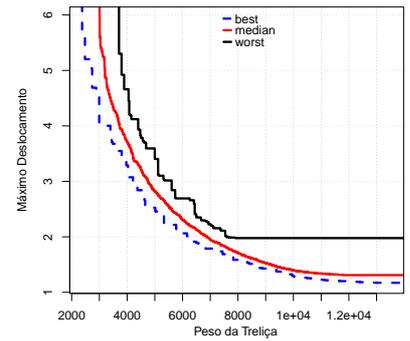
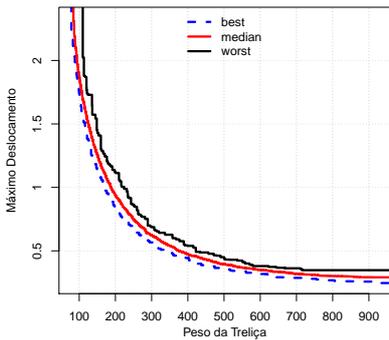
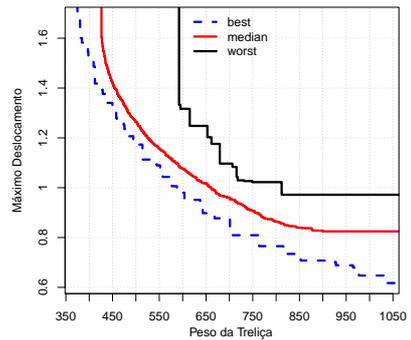
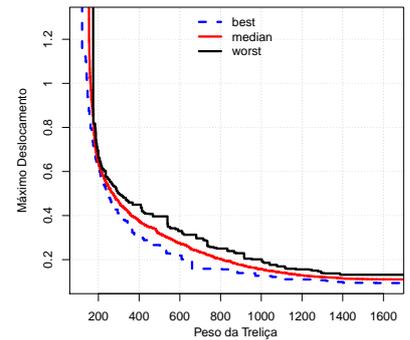
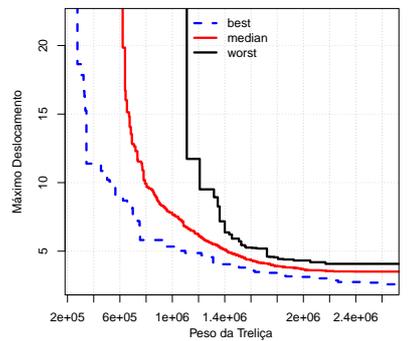
(a)  $Dif=0,0729$ (b)  $Dif=0,0570$ (c)  $Dif=0,2204$ (d)  $Dif=0,0811$ (e)  $Dif=0,1928$ (f)  $Dif=0,1716$ (g)  $Dif=0,0689$ (h)  $Dif=0,3045$ (i)  $Dif=0,0805$ (j)  $Dif=0,3083$ 

Figura 8.4: Curvas EAF dos algoritmos MOACS (a,b,c,d,e) e MOAS (f,g,h,i,j) nas Treliças de 10 (a,f), 25 (b,g), 60 (c,h), 72 (d,i) e 942 (e,j) Barras (caso discreto), onde  $Dif$  é a diferença entre o Hipervolume normalizado das curvas *best* e *worst*.

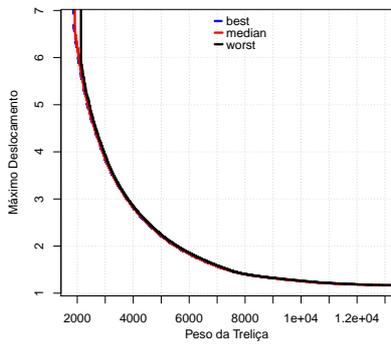
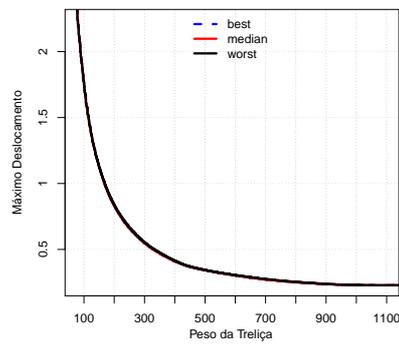
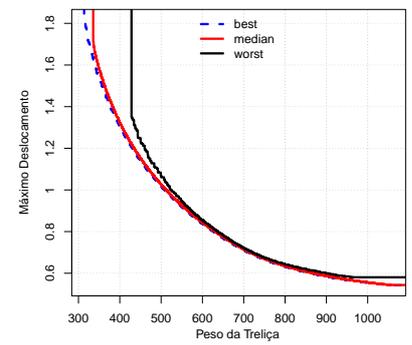
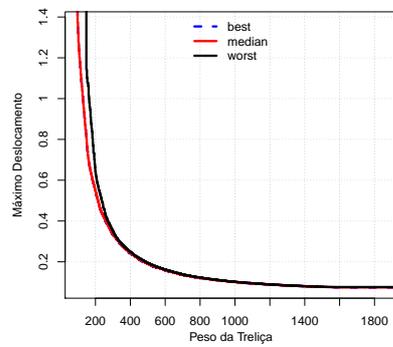
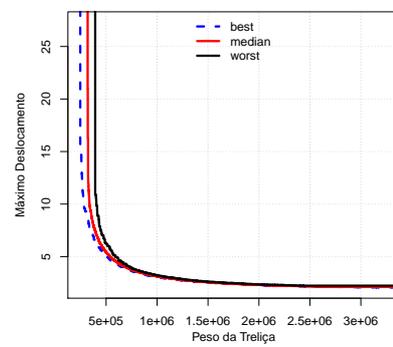
(a)  $Dif=0,0080$ (b)  $Dif=0,0019$ (c)  $Dif=0,0617$ (d)  $Dif=0,0172$ (e)  $Dif=0,0402$ 

Figura 8.5: Curvas EAF do algoritmo GDE3+APM nas Treliças de 10 (a), 25 (b), 60 (c), 72 (d) e 942 (e) Barras (caso discreto), onde  $Dif$  é a diferença entre o Hipervolume normalizado das curvas *best* e *worst*.

# 9 EXPERIMENTO 2: GDE3+APM versus NSGA-II e GDE3

## 9.1 Delineamento

Nesta segunda seção de experimentos será apresentada uma análise comparativa do algoritmo proposto GDE3+APM (**Algoritmo 4**) com algoritmos GDE3 (**Algoritmo 13**) e NSGA-II (**Algoritmo 7**). Os problemas analisados foram as Treliças de 10, 25, 60, 72 e 942 Barras nos casos contínuo e discreto, descritas no Capítulo 5. Tal como no Capítulo 8, o objetivo é a obtenção da Frente de Pareto completa. Cada um deles foi executado 100 vezes com tamanho da população de 50 indivíduos e 1000 gerações, perfazendo um total de 50000 avaliações de cada uma das funções objetivo. Pretende-se verificar como se comporta a técnica de penalização adaptativa APM frente às técnicas originalmente propostas com o GDE3 e com o NSGA-II.

Para cada algoritmo foram escolhidos parâmetros que maximizam suas performances, conforme experimento inicial detalhado no Apêndice A. O algoritmo GDE3+APM foi executado com os parâmetros exibidos nas Tabelas 8.1 e 9.1, o GDE3 com os parâmetros exibidos na Tabela 9.2 e o algoritmo NSGA-II foi executado com os parâmetros exibidos na Tabela 9.3. Neste experimento foram adotadas as medidas unárias Hipervolume e *Inverted Generational Distance* (IGD), as medidas binárias *Coverage Metric* (CM) e  $\epsilon$ -*Indicator* ( $I_\epsilon$ ) e a medida *Empirical Attainment Function* (EAF).

Tabela 9.1: Valores dos parâmetros  $CR$  e  $F$  adotados pelo algoritmo GDE3+APM para cada uma das Treliças de 10, 25, 60, 72 e 942 Barras (caso contínuo) no Experimento 2.

|      | 10 Barras | 25 Barras | 60 Barras | 72 Barras | 942 Barras |
|------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|
| $CR$ | 0,9       | 0,9       | 0,1       | 0,9       | 0,1        |
| $F$  | 0,2       | 0,2       | 0,8       | 0,3       | 0,7        |

Tabela 9.2: Valores dos parâmetros  $CR$  e  $F$  adotados pelo algoritmo GDE3 para cada uma das Treliças de 10, 25, 60, 72 e 942 Barras (casos contínuo e discreto) no Experimento 2.

| Problema   | Contínuo |     | Discreto |     |
|------------|----------|-----|----------|-----|
|            | $CR$     | $F$ | $CR$     | $F$ |
| 10 Barras  | 0,9      | 0,2 | 0,8      | 0,2 |
| 25 Barras  | 0,9      | 0,2 | 0,9      | 0,2 |
| 60 Barras  | 0,1      | 0,8 | 0,1      | 0,6 |
| 72 Barras  | 0,9      | 0,3 | 0,9      | 0,3 |
| 942 Barras | 0,1      | 0,9 | 0,1      | 0,7 |

Tabela 9.3: Valores dos parâmetros pelo algoritmo NSGA-II para cada uma das Treliças de 10, 25, 60, 72 e 942 Barras (casos contínuo e discreto) no Experimento 2.

| Problema   | Contínuo |          |          | Discreto |          |          |
|------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|            | $PC$     | $\eta_c$ | $\eta_m$ | $PC$     | $\eta_c$ | $\eta_m$ |
| 10 Barras  | 1        | 2        | 100      | 1        | 2        | 20       |
| 25 Barras  | 1        | 2        | 500      | 1        | 2        | 100      |
| 60 Barras  | 1        | 5        | 5        | 1        | 2        | 20       |
| 72 Barras  | 1        | 2        | 100      | 1        | 2        | 500      |
| 942 Barras | 1        | 2        | 500      | 1        | 2        | 500      |

## 9.2 Análise dos Resultados

As médias e os desvios-padrão do Hipervolume e da *Inverted Generational Distance* (IGD) dos *SPOs* normalizados são apresentados na Tabela 9.6. A Tabela 9.7 mostra as médias e os desvios-padrão obtidos das avaliações comparativas de cada uma das 100 execuções dos algoritmos GDE3+APM, GDE3 e NSGA-II, sem normalização, nas medidas binárias *Coverage Metric* (CM) e  $\epsilon$ -*Indicator* ( $I_\epsilon$ ). A Figura 9.5 apresenta os Perfis de Desempenho dos resultados das medidas unárias e binárias apresentadas por cada algoritmo GDE3+APM, GDE3 e NSGA-II, juntamente com as áreas abaixo das curvas, normalizadas pela maior delas.

As Figuras 9.6, 9.7, 9.8, 9.9 e 9.10 apresentam as curvas EAF *best*, *median* e *worst* dos algoritmos GDE3, NSGA-II e GDE3+APM nos problemas analisados. As curvas EAF *best*, *median* e *worst* para cada um dos algoritmos são apresentadas nas Figuras 9.11, 9.12 e 9.13, além da Figura 8.5 já exibida anteriormente. A seguir são apresentadas algumas considerações sobre a análise comparativa dos resultados obtidos pelos algoritmos neste experimento.

### 9.2.1 *GDE3+APM e NSGA-II*

O principal destaque do NSGA-II ocorreu na medida IGD. Seu desempenho superou o do GDE3+APM em ambos os casos nas Treliças de 10, 72 e 942 Barras e no caso contínuo da Treliça de 60 Barras, sendo as diferenças entre os resultados estatisticamente significativas em ambos os casos das Treliças de 10 e 72 Barras e no caso discreto da Treliça de 942 Barras, segundo o teste de Wilcoxon (Tabela 9.6). Entretanto, nessa mesma medida, o NSGA-II obteve desempenho pior que o algoritmo GDE3+APM em ambos os casos da Treliça de 25 Barras e no caso discreto da Treliça de 60 Barras, com todas as diferenças estatisticamente significativas, segundo o teste de Wilcoxon.

Uma explicação para esses resultados da medida IGD é a capacidade de espalhamento do NSGA-II, que alcança valores maiores do que o GDE3+APM em pelo menos uma função objetivo (Tabela 9.4). A Frente de Pareto real<sup>1</sup> então possui em suas extremidades soluções obtidas pelo NSGA-II predominantemente, favorecendo seu desempenho na medida IGD. A provável razão dessa característica do NSGA-II esta na natureza do operador SBX, que tende a criar filhos próximos aos pais (DEB; AGRAWAL, 1995; SHARMA et al., 2007). Por outro lado, o GDE3+APM dominou uma área muito maior do que o NSGA-II em todos os problemas, o que favoreceu seu desempenho nas medidas Hipervolume e CM (Figuras 9.1, 9.2 e 9.3).

Na medida CM, o GDE3+APM superou o NSGA-II em todos os problemas com diferenças estatisticamente significativas entre os resultados (Tabela 9.7) e em quase todos na medida Hipervolume (Tabela 9.6), segundo o teste de Wilcoxon. Nesta última, a exceção foi para o caso discreto da Treliça de 10 Barras, onde o teste de Wilcoxon não foi suficiente para detectar diferença estatisticamente significativa entre os resultados obtidos.

O desempenho do GDE3+APM também superou o desempenho do NSGA-II na medida  $I_\epsilon$  em ambos os casos das Treliças de 25 e 942 Barras e no caso discreto das Treliças de 60 e 72 Barras todos os resultados com diferenças estatisticamente significativas (Tabela 9.7) segundo o teste de Wilcoxon. Nos demais problemas, as diferenças entre os resultados só são estatisticamente significativas segundo o teste de Wilcoxon no caso discreto da Treliça de 10 Barras e no caso contínuo da Treliça de 72 Barras.

Os Perfis de Desempenho apresentados na Figura 9.5 apontam que o GDE3+APM

---

<sup>1</sup>Soluções não-dominadas da união de todos os *SPOs* obtidos por todas as execuções de todos os MOEAs considerados para o problema em questão.

obteve melhores resultados globais do que o NSGA-II nesses problemas na maioria das medidas, já que as áreas abaixo das curvas do GDE3+APM são maiores. A única exceção foi na medida IGD.

Com relação às curvas EAF, o GDE3+APM obteve Hipervolume maior do que o NSGA-II nas curvas *best* e *median* em todos os problemas, indicando que ele é capaz de convergir melhor para a Frente de Pareto real (Figuras 9.6, 9.7, 9.8, 9.9 e 9.10). Na curva *worst*, o GDE3+APM só obteve Hipervolume menor do que o NSGA-II nas Treliças de 10 e 60 Barras e no caso contínuo da Treliça de 72 Barras, indicando que ele não é tão estável nesses problemas (a diferença entre os Hipervolumes das curvas EAF *best* e *worst* é denotada por *Dif* nas Figuras 9.12, 9.13 e 8.5).

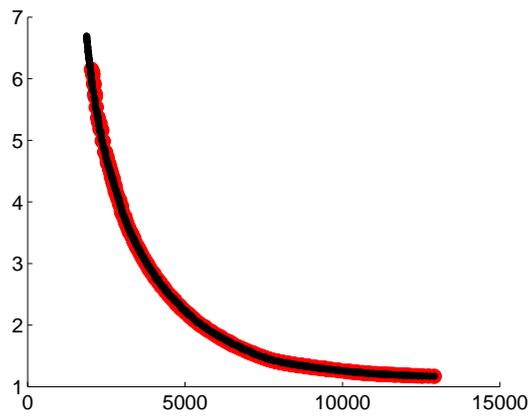
A velocidade de convergência do GDE3+APM pode ser observada em alguns problemas. As Tabelas 9.8, 9.9 e 9.10 mostram as médias e os desvios-padrão das medidas H, CM e  $I_\epsilon$  nos problemas onde o GDE3+APM com 30000<sup>2</sup> avaliações de cada uma das funções objetivo foi competitivo com o NSGA-II executado com 50000 avaliações, mantendo os demais parâmetros inalterados.

Conclui-se que o GDE3+APM obtém soluções melhores do que o NSGA-II nesse grupo de problemas com relação às medidas adotadas. No geral, o GDE3+APM domina uma área bem maior do que o NSGA-II nos problemas avaliados e o NSGA-II se mostrou mais hábil em obter soluções nas extremidades da Frente de Pareto real.

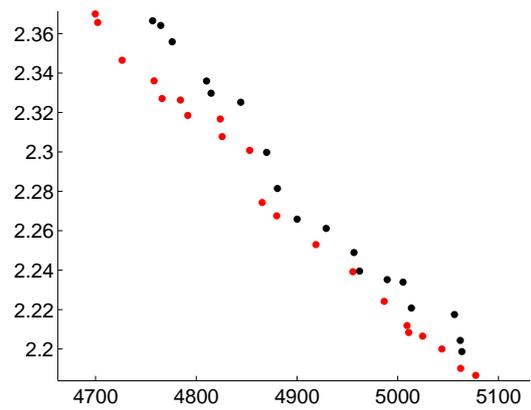
Tabela 9.4: Quantidade de execuções onde um algoritmo alcançou valores maiores em pelo menos uma função objetivo do que os obtidos pelo outro.

| NSGA-II alcançou valores maiores do que GDE3+APM |             |             |                  |             |             |                  |
|--------------------------------------------------|-------------|-------------|------------------|-------------|-------------|------------------|
| Problema                                         | Contínuo    |             |                  | Discreto    |             |                  |
|                                                  | só em $f_1$ | só em $f_2$ | em $f_1$ e $f_2$ | só em $f_1$ | só em $f_2$ | em $f_1$ e $f_2$ |
| 10 Barras                                        | 1           | 29          | 0                | 0           | 27          | 0                |
| 25 Barras                                        | 0           | 0           | 0                | 0           | 0           | 0                |
| 60 Barras                                        | 12          | 21          | 14               | 14          | 4           | 7                |
| 72 Barras                                        | 53          | 2           | 4                | 34          | 0           | 2                |
| 942 Barras                                       | 51          | 1           | 8                | 51          | 7           | 5                |
| GDE3+APM alcançou valores maiores do que NSGA-II |             |             |                  |             |             |                  |
| 10 Barras                                        | 0           | 4           | 0                | 0           | 5           | 0                |
| 25 Barras                                        | 0           | 0           | 0                | 0           | 0           | 0                |
| 60 Barras                                        | 0           | 13          | 0                | 0           | 25          | 0                |
| 72 Barras                                        | 7           | 0           | 0                | 7           | 0           | 1                |
| 942 Barras                                       | 1           | 30          | 0                | 4           | 41          | 0                |

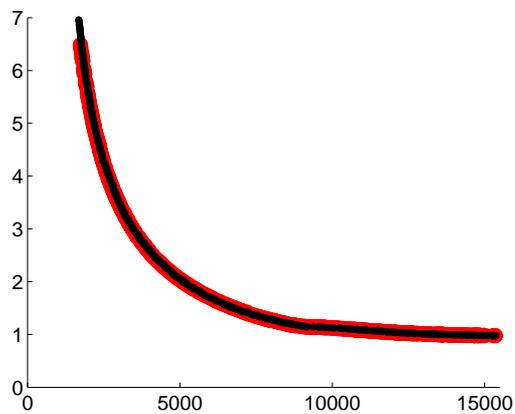
<sup>2</sup>Orçamento utilizado em (KAVEH; LAKNEJADI, 2011) na resolução do problema contínuo da Treliça de 25 Barras.



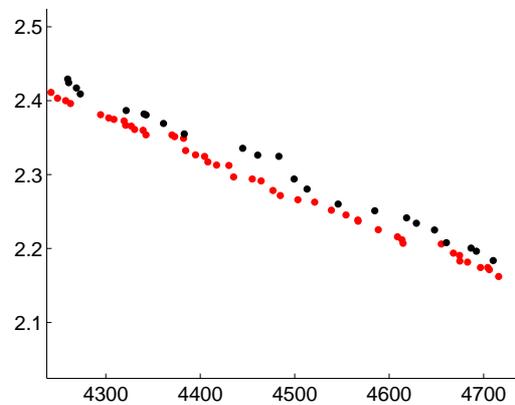
(a) 10 B. discreto



(b) Aproximação de 9.1a

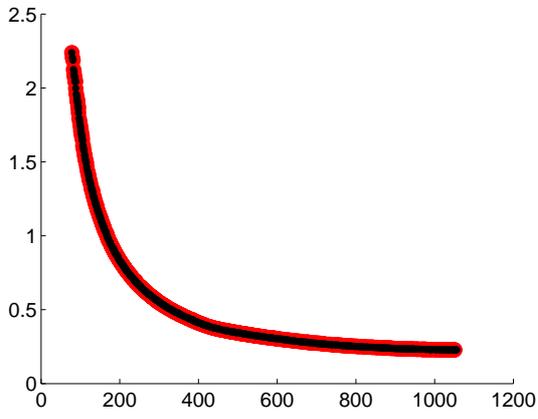


(c) 10 B. contínuo

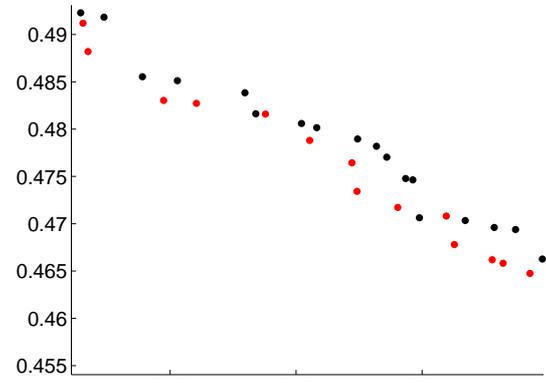


(d) Aproximação de 9.1c

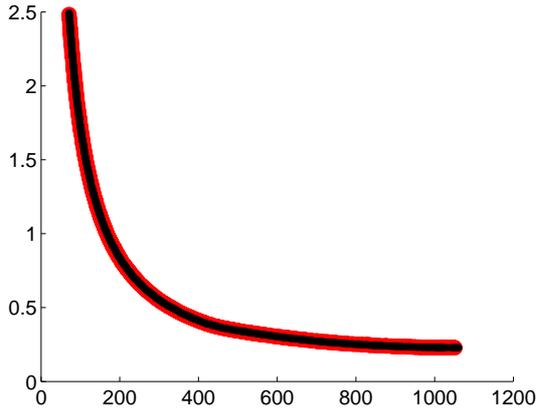
Figura 9.1: Exemplo de uma execução independente onde o GDE3+APM (vermelho) dominou uma área maior do que o NSGA-II (preto) na Treliça de 10 Barras.



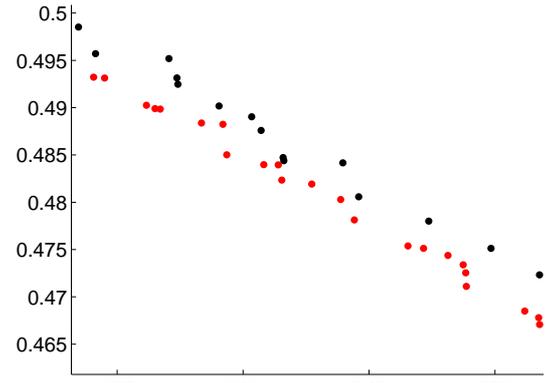
(a) 25 B. discreto



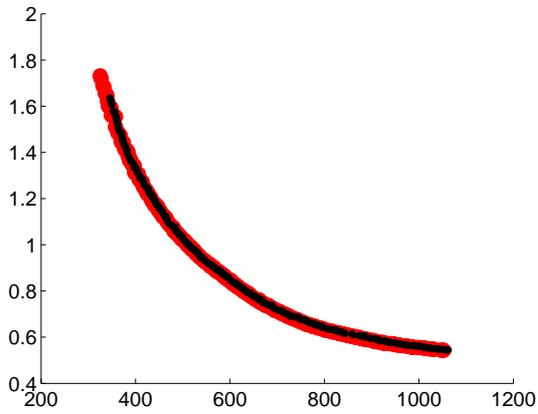
(b) Aproximação de 9.2a



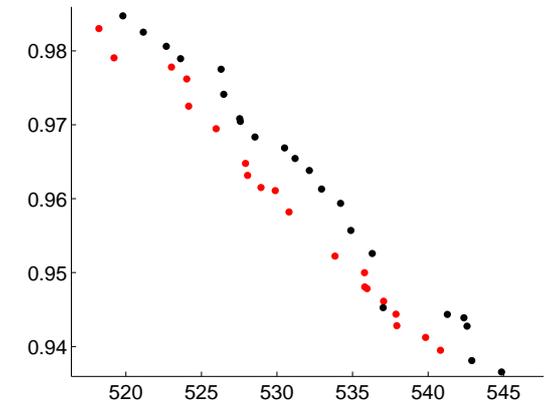
(c) 25 B. contínuo



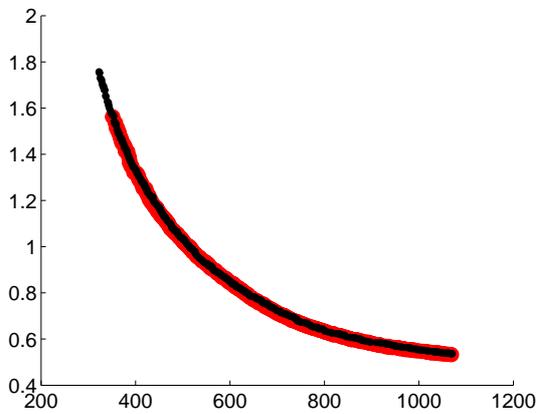
(d) Aproximação de 9.2c



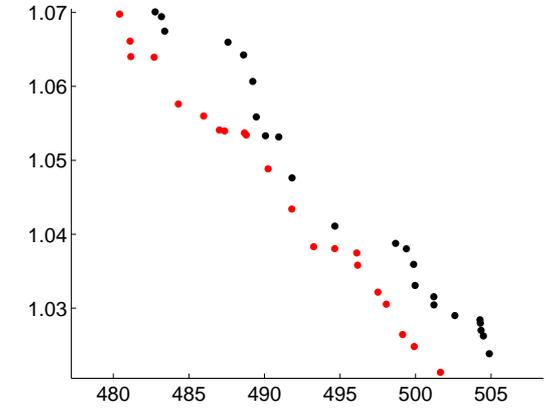
(e) 60 B. discreto



(f) Aproximação de 9.2e

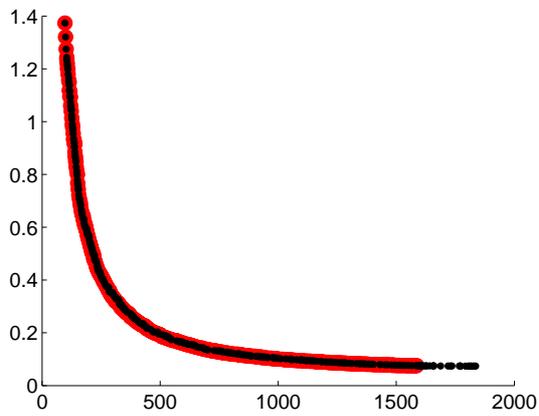


(g) 60 B. contínuo

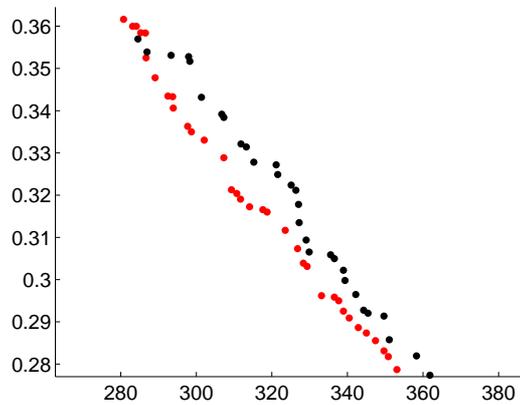


(h) Aproximação de 9.2g

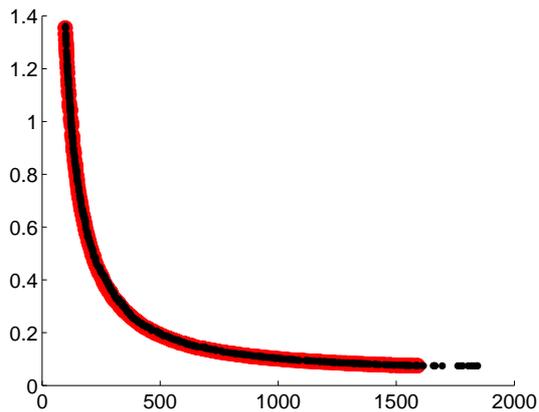
Figura 9.2: Exemplo de uma execução independente onde o GDE3+APM (vermelho) dominou uma área maior do que o NSGA-II (preto) nas Treliças de 25 e 60 Barras.



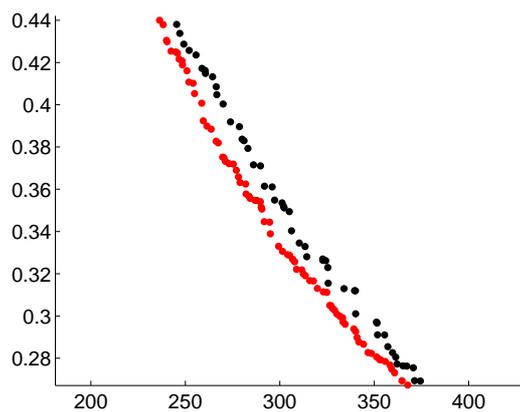
(a) 72 B. discreto



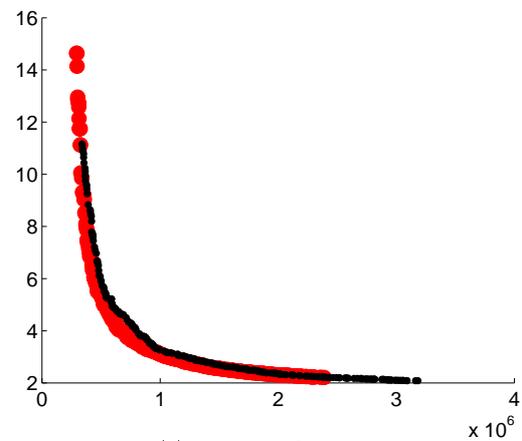
(b) Aproximação de 9.3a



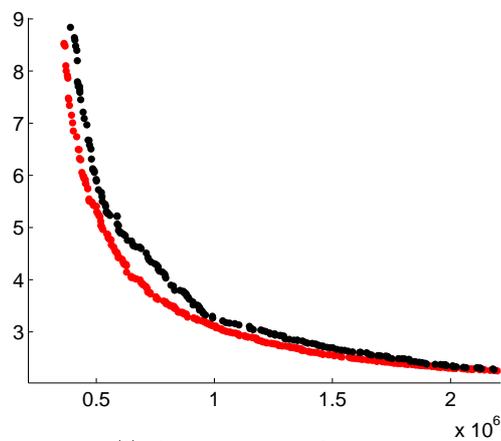
(c) 72 B. contínuo



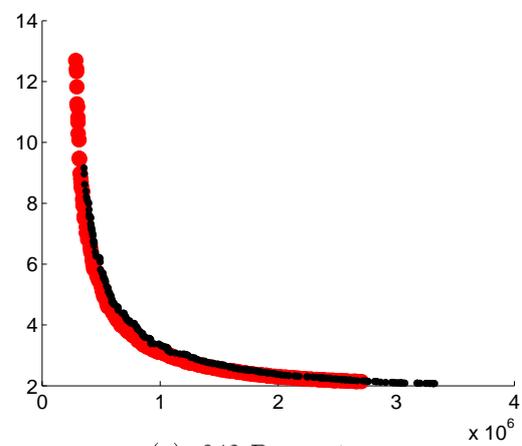
(d) Aproximação de 9.3c



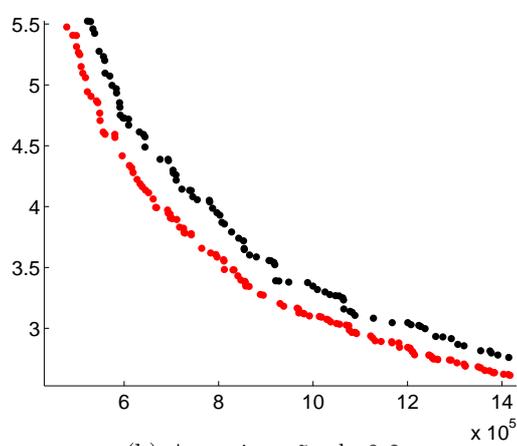
(e) 942 B. discreto



(f) Aproximação de 9.3e



(g) 942 B. contínuo



(h) Aproximação de 9.3g

Figura 9.3: Exemplo de uma execução independente onde o GDE3+APM (vermelho) dominou uma área maior do que o NSGA-II (preto) nas Treliças de 72 e 942 Barras.

### 9.2.2 GDE3+APM e GDE3

Nas Treliças de 25 e 72 Barras, o desempenho dos algoritmos GDE3+APM e GDE3 são praticamente idênticos em todas as medidas e o teste de Wilcoxon não foi capaz de encontrar significância nas poucas diferenças entre os resultados (Tabelas 9.6 e 9.7). Observa-se também que as curvas EAFs desses algoritmos nesses problemas são similares em todas as situações (Figuras 9.7 e 9.9).

A razão dessa pequena diferença no desempenho desses algoritmos foi o baixo número de indivíduos ineficazes na população na maioria das execuções. Como consequência, eles obtiveram grande parte de suas soluções coincidentes (Figura 9.4). A Tabela 9.5 mostra a média de indivíduos ineficazes de cada algoritmo por execução.

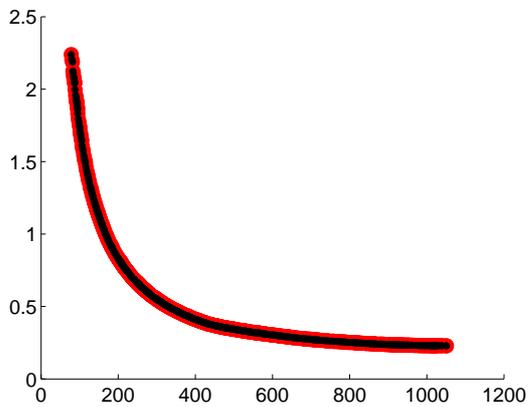
Tabela 9.5: Média do número de indivíduos ineficazes por execução.

|                           | GDE3+APM | GDE3 |
|---------------------------|----------|------|
| Treliça de 25 B. Discreto | 1,86     | 1,93 |
| Treliça de 25 B. Contínuo | 1,35     | 1,39 |
| Treliça de 72 B. Discreto | 3,43     | 3,58 |
| Treliça de 72 B. Contínuo | 3,10     | 3,28 |

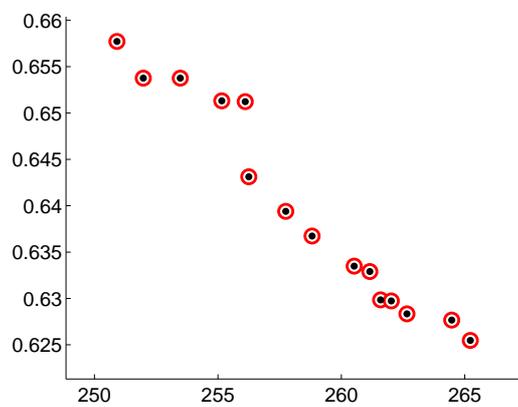
No caso contínuo da Treliça de 10 Barras, os desempenhos dos dois algoritmos foram semelhantes e o teste de Wilcoxon não detectou diferenças estatisticamente significativas em nenhum resultado. O desempenho do GDE3 foi melhor nas medidas IGD e CM e o desempenho do GDE3+APM foi melhor nas medidas H e  $I_\epsilon$  (Tabelas 9.6 e 9.7). Em se tratando do caso discreto, o desempenho do algoritmo GDE3+APM foi melhor em 3 das 4 medidas (H, IGD e CM), porém com diferenças estatisticamente significativas entre os resultados apenas na medida CM, segundo o teste de Wilcoxon.

Com relação à medida EAF da Treliça de 10 Barras, as curvas *best* e *median* dos dois algoritmos são similares em ambos os casos (Figura 9.6). A maior diferença entre os Hipervolumes das curvas EAF foi encontrada na curva *worst*, onde o algoritmo GDE3+APM dominou uma área um pouco maior, indicando uma melhor estabilidade.

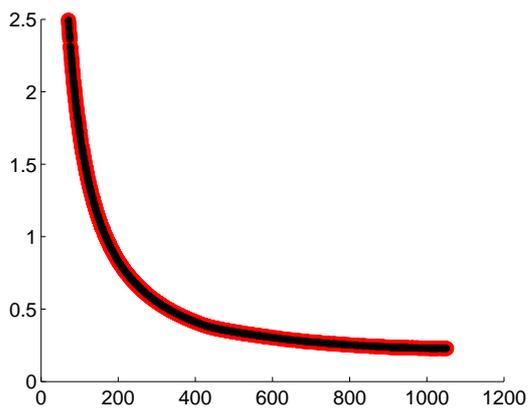
Na Treliça de 60 Barras os desempenhos dos dois algoritmos foram bastante semelhantes, com diferenças estatisticamente significativas entre os resultados obtidos apenas nas medidas IGD e CM, segundo o teste de Wilcoxon. O desempenho do GDE3 foi melhor na medida CM e o desempenho do GDE3+APM foi melhor na medidas IGD (Tabelas 9.6 e 9.7). Nas medidas H e  $I_\epsilon$ , o GDE3+APM obteve melhor desempenho no



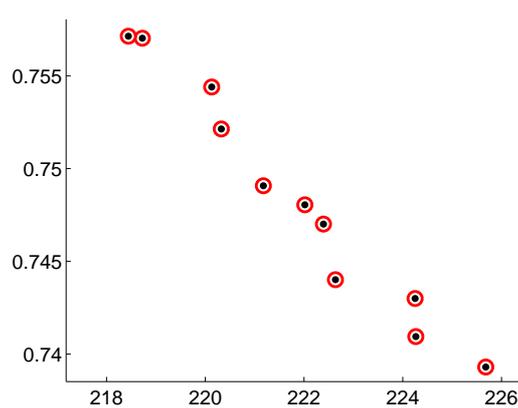
(a) 25 B. discreto



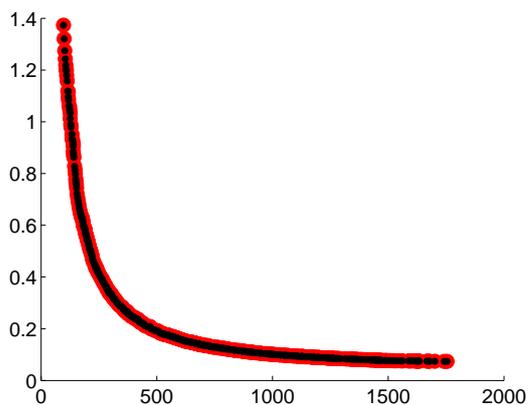
(b) Aproximação de 9.4a



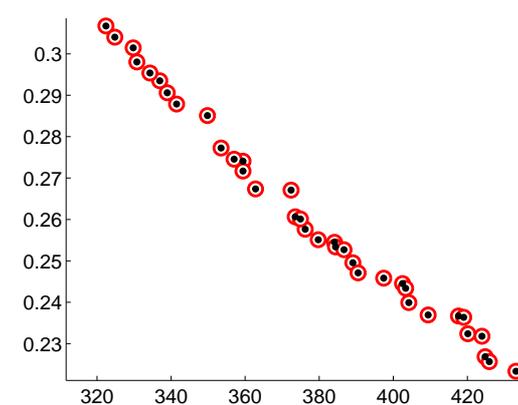
(c) 25 B. contínuo



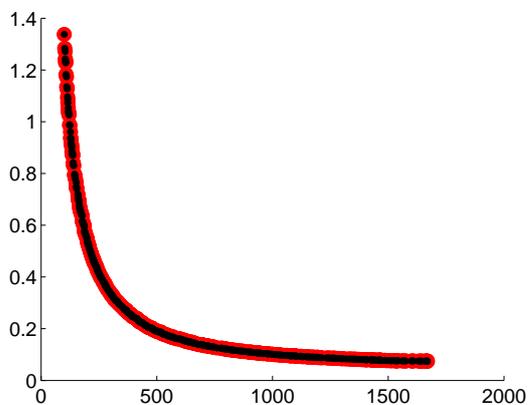
(d) Aproximação de 9.4c



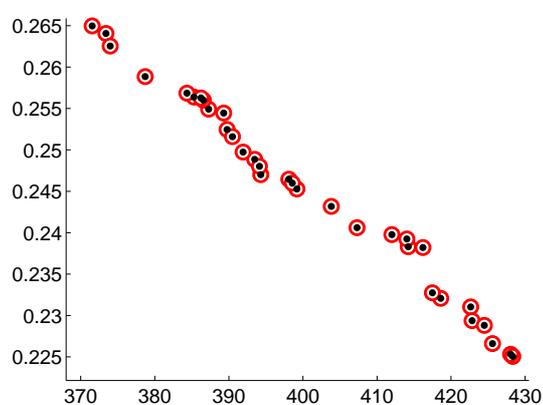
(e) 72 B. discreto



(f) Aproximação de 9.4e



(g) 72 B. contínuo



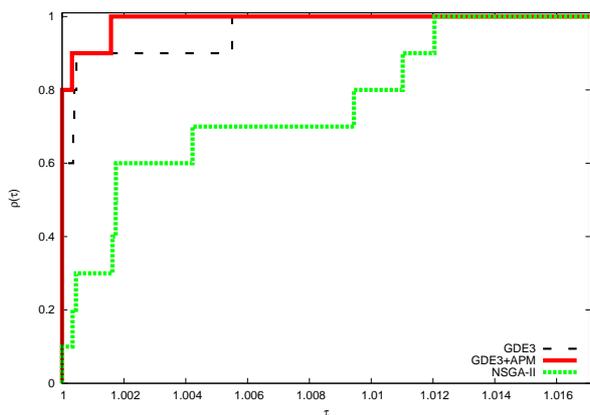
(h) Aproximação de 9.4g

Figura 9.4: Exemplo de uma execução independente em que o GDE3 (preto) e o GDE3+APM (vermelho) obtiveram as mesmas soluções nas Treliças de 25 e 72 Barras.

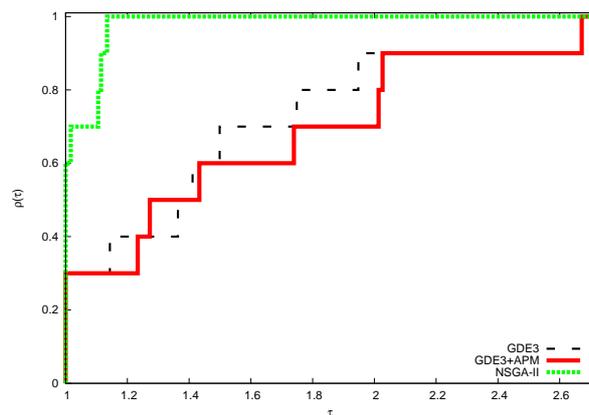
caso contínuo e o GDE3 no caso discreto. Novamente, o teste de Wilcoxon não detectou diferenças estatisticamente significativas entre os resultados. As curvas EAF da Treliça de 60 Barras dos dois algoritmos são similares em ambos os casos (Figura 9.8). Uma pequena diferença entre os Hipervolumes foi encontrada na curva *worst* em favor do algoritmo GDE3.

A maior diferença entre os dois algoritmos neste grupo de problemas foi observada no caso contínuo da Treliça de 942 Barras. O desempenho do GDE3+APM foi melhor nas medidas H, CM e  $I_\epsilon$ , enquanto o desempenho do GDE3 foi melhor apenas na medida IGD, todos com diferenças estatisticamente significativas entre os resultados segundo o teste de Wilcoxon (Tabelas 9.6 e 9.7). A situação se inverteu no caso discreto, onde o desempenho do GDE3 foi melhor nas medidas H, CM e  $I_\epsilon$ , enquanto o desempenho do GDE3+APM foi melhor apenas na medida IGD, mas sem nenhuma diferença estatisticamente significativa entre os resultados detectada pelo teste de Wilcoxon. Na Treliça de 942 Barras, as curvas EAF dos dois algoritmos são similares em ambos os casos, novamente com uma pequena diferença entre os Hipervolumes na curva *worst* em favor do algoritmo GDE3+APM.

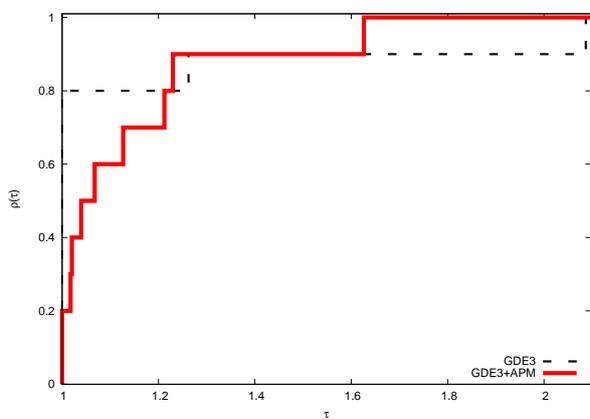
Em termos gerais, foi observado que o GDE3+APM apresenta desempenho praticamente idêntico ao GDE3 nestes problemas, com uma pequena melhora na performance do caso contínuo da Treliça de 942 Barras. Pode-se concluir que o GDE3 trabalha bem com ambas as técnicas de tratamento de restrições (a técnica da proposição original e a técnica APM). Entretanto, os Perfis de Desempenho (Figura 9.5) apontam que, em termos gerais, a inserção da técnica APM produz um ganho no desempenho do GDE3 quando comparado com sua proposição original (com excessão da medida IGD). Essa seção de experimentos ajuda a concluir que a ED é capaz de produzir resultados tão bons (ou até melhores) em POMs de OE quanto o NSGA-II. Além disso, o bom desempenho da técnica APM em problemas de OE se mostrou extensivo aos POMs.



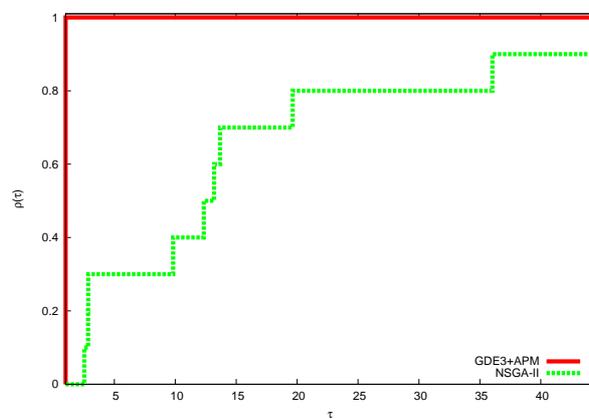
(a) Hipervolume: GDE3+APM=1; GDE3=0.9594; NSGA-II=0.6567



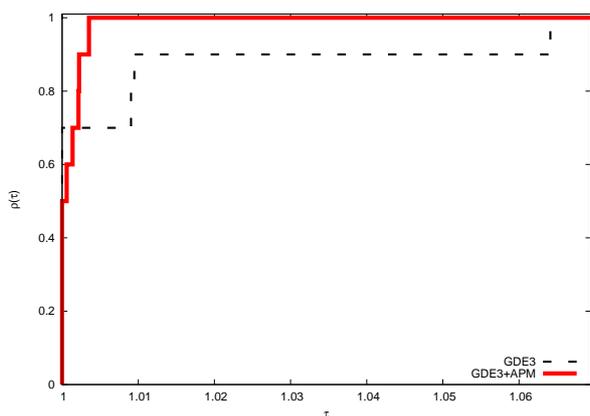
(b) IGD: GDE3+APM=0.6980; GDE3=0.7326; NSGA-II=1



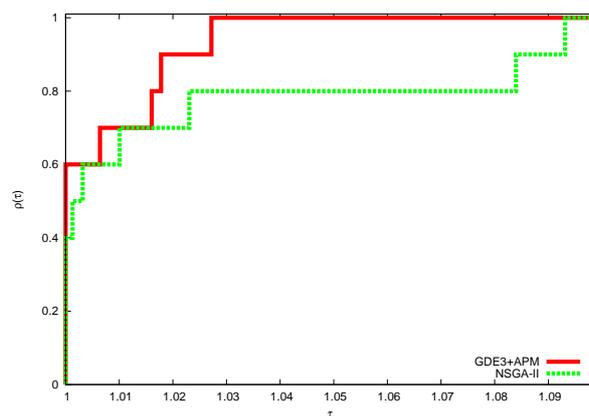
(c) CM: GDE3+APM=1; GDE3=0.9990



(d) CM: GDE3+APM=1; NSGA-II=0.6593

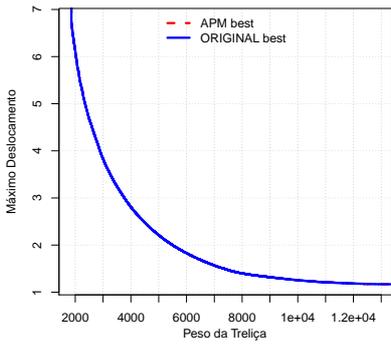


(e)  $I_\epsilon$ : GDE3+APM=1; GDE3=0.8847

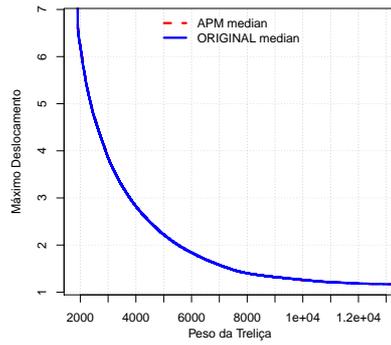


(f)  $I_\epsilon$ : GDE3+APM=1; NSGA-II=0.8296

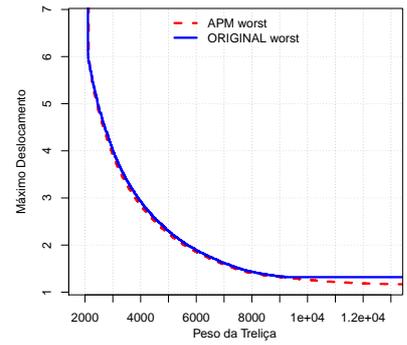
Figura 9.5: Perfis de Desempenho dos resultados obtidos por cada algoritmo GDE3+APM, GDE3 e NSGA-II. As áreas abaixo das curvas, normalizadas pela maior delas, estão indicadas em cada Figura.



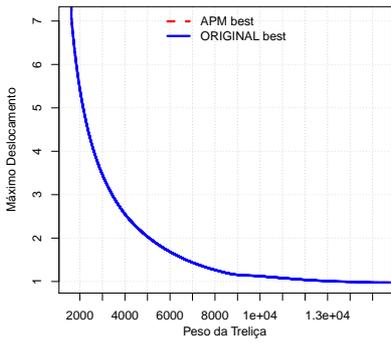
(a)  $H_1=0,8420$  e  $H_2=0,8421$



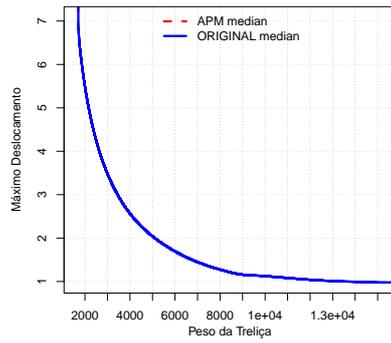
(b)  $H_1=0,8396$  e  $H_2=0,8399$



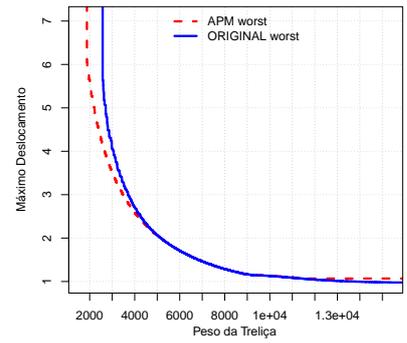
(c)  $H_1=0,8340$  e  $H_2=0,8230$



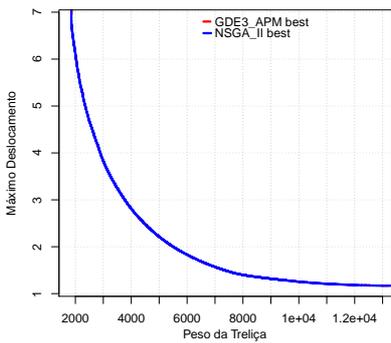
(d)  $H_1=0,8678$  e  $H_2=0,8679$



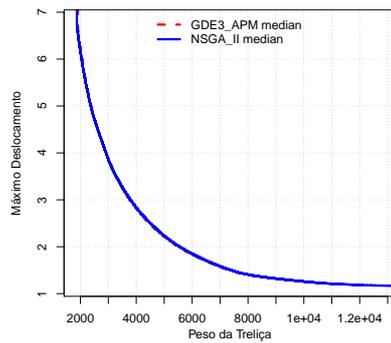
(e)  $H_1=0,8660$  e  $H_2=0,8659$



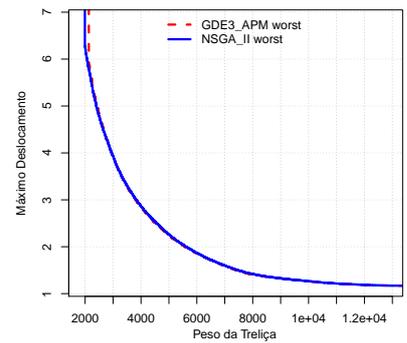
(f)  $H_1=0,8592$  e  $H_2=0,8358$



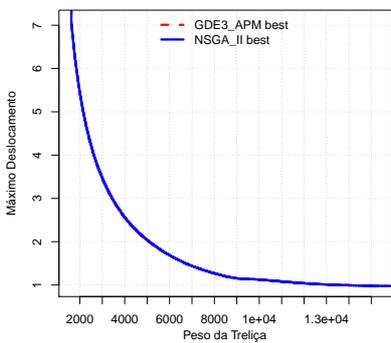
(g)  $H_1=0,8422$  e  $H_2=0,8421$



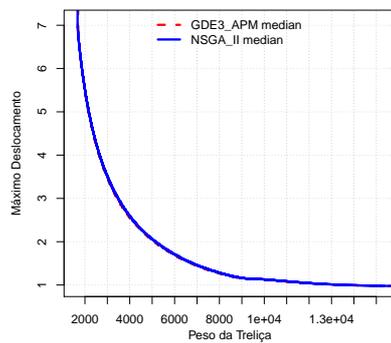
(h)  $H_1=0,8398$  e  $H_2=0,8397$



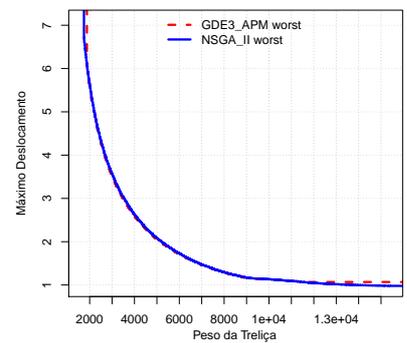
(i)  $H_1=0,8342$  e  $H_2=0,8354$



(j)  $H_1=0,8683$  e  $H_2=0,8677$



(k)  $H_1=0,8665$  e  $H_2=0,8649$



(l)  $H_1=0,8597$  e  $H_2=0,8612$

Figura 9.6: Curvas EAF da Treliça de 10 Barras: ORIGINAL refere-se ao GDE3 e APM ao GDE3+APM. As Figuras (a,b,c,g,h,i) tratam do caso discreto e (d,e,f,j,k,l) tratam do caso contínuo. Hipervolumes normalizados:  $H_1$  para GDE3+APM e  $H_2$  para GDE3 e NSGA-II.

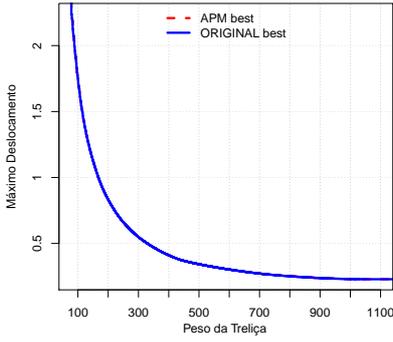
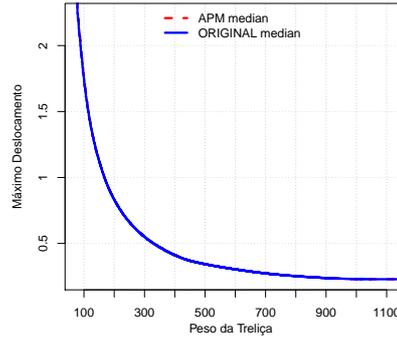
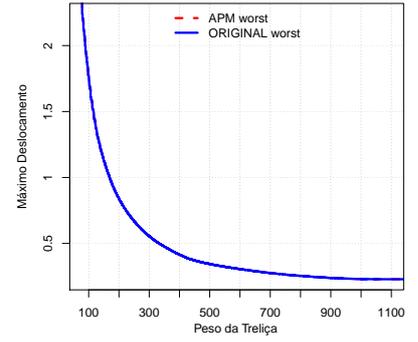
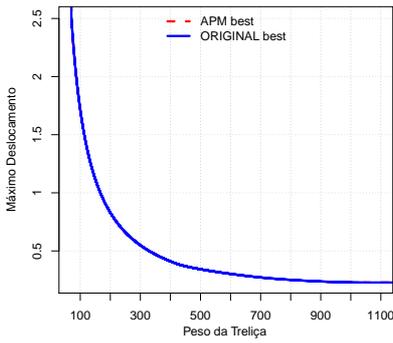
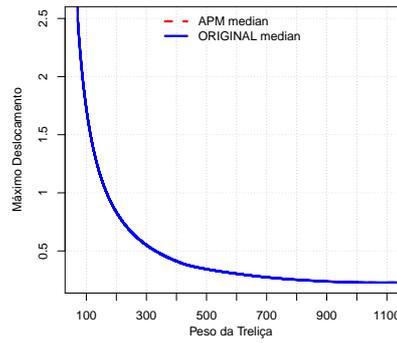
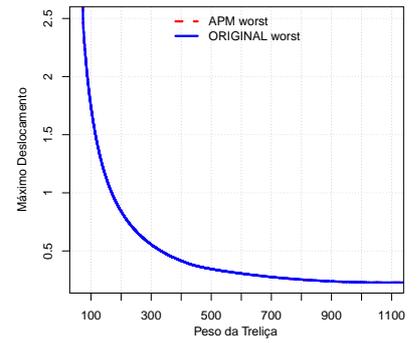
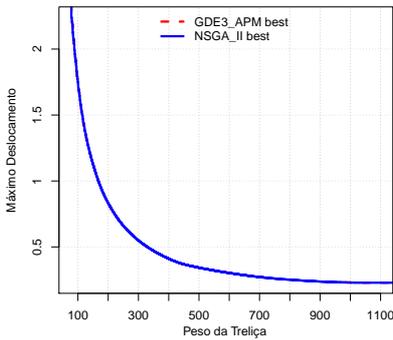
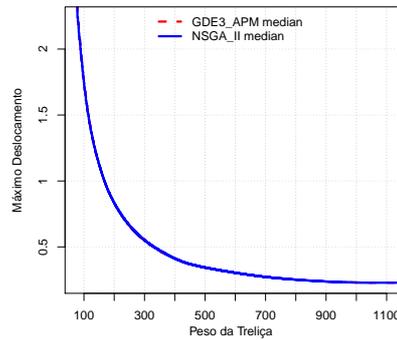
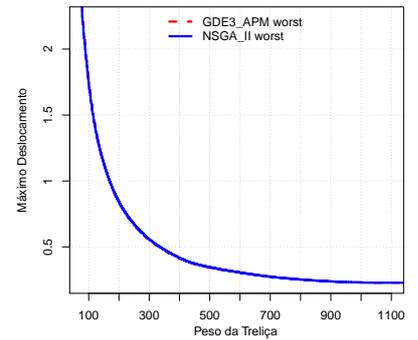
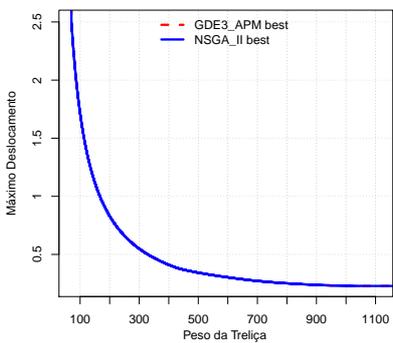
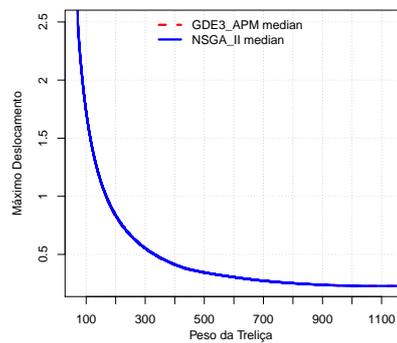
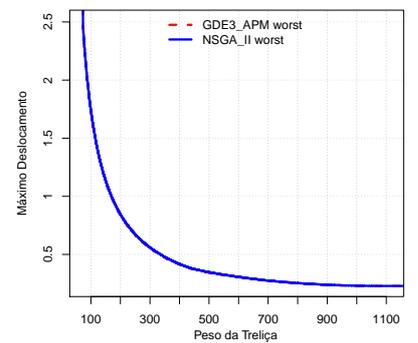
(a)  $H_1=0,8799$  e  $H_2=0,8799$ (b)  $H_1=0,8795$  e  $H_2=0,8795$ (c)  $H_1=0,8780$  e  $H_2=0,8780$ (d)  $H_1=0,8907$  e  $H_2=0,8907$ (e)  $H_1=0,8897$  e  $H_2=0,8897$ (f)  $H_1=0,8882$  e  $H_2=0,8882$ (g)  $H_1=0,8792$  e  $H_2=0,8792$ (h)  $H_1=0,8788$  e  $H_2=0,8785$ (i)  $H_1=0,8773$  e  $H_2=0,8770$ (j)  $H_1=0,8876$  e  $H_2=0,8875$ (k)  $H_1=0,8867$  e  $H_2=0,8863$ (l)  $H_1=0,8851$  e  $H_2=0,8844$ 

Figura 9.7: Curvas EAF da Treliça de 25 Barras: ORIGINAL refere-se ao GDE3 e APM ao GDE3+APM. As Figuras (a,b,c,g,h,i) tratam do caso discreto e (d,e,f,j,k,l) tratam do caso contínuo. Hipervolumes normalizados:  $H_1$  para GDE3+APM e  $H_2$  para GDE3 e NSGA-II.

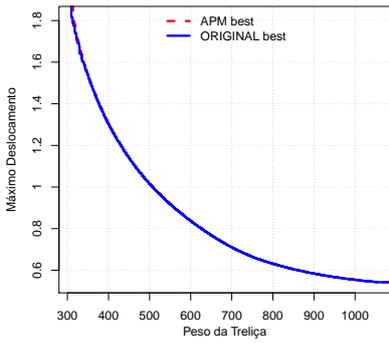
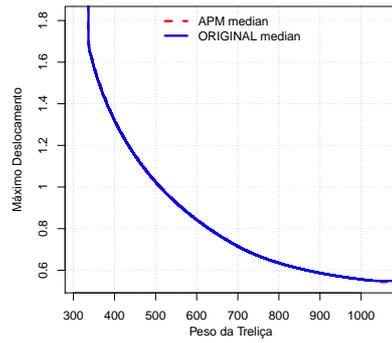
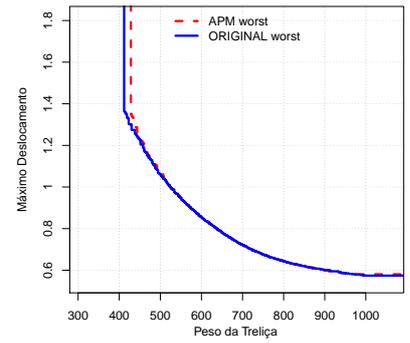
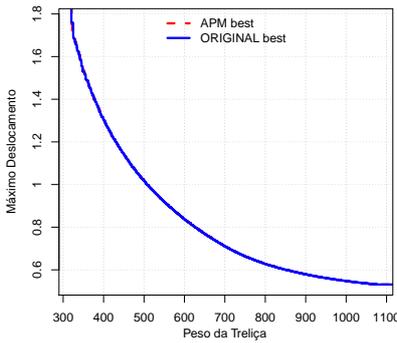
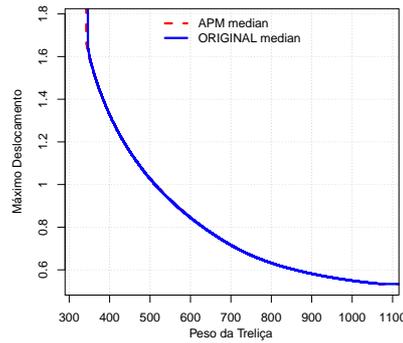
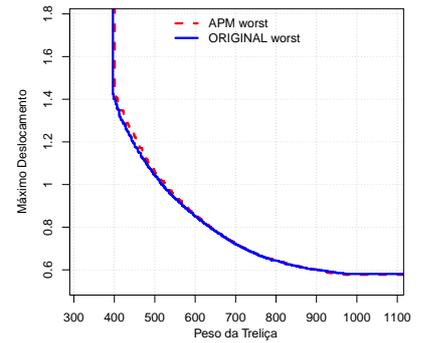
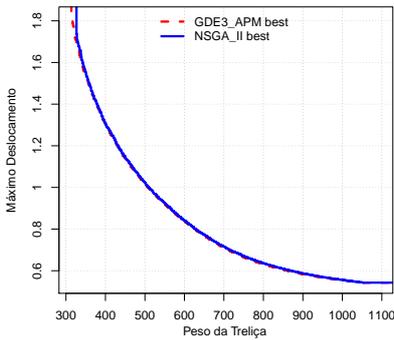
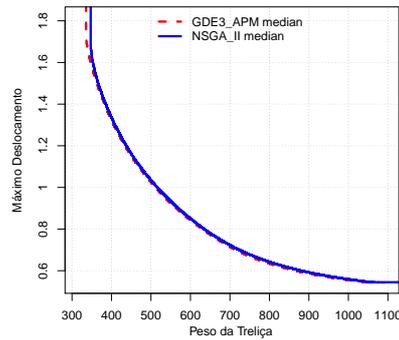
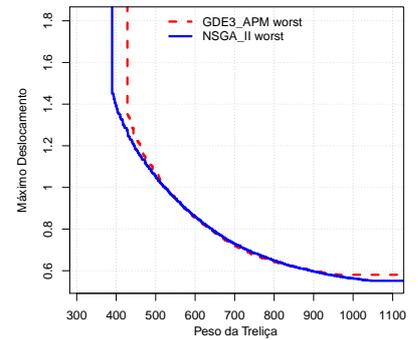
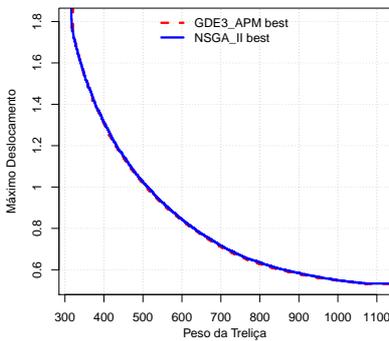
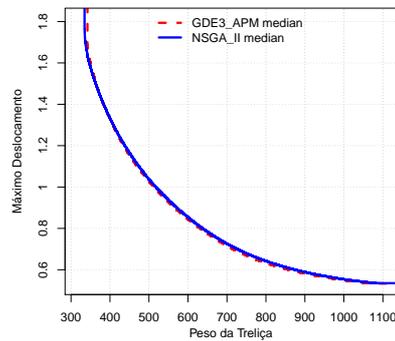
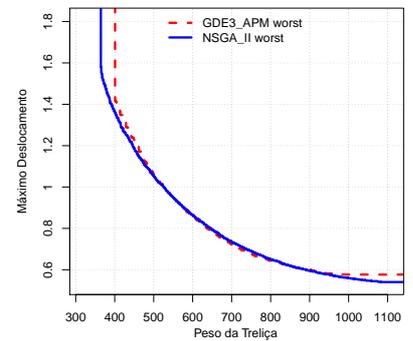
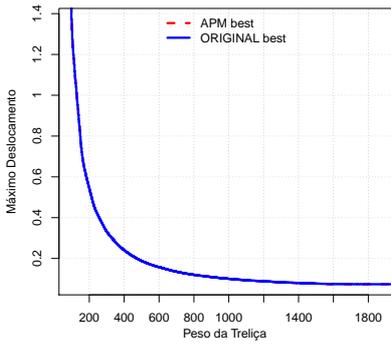
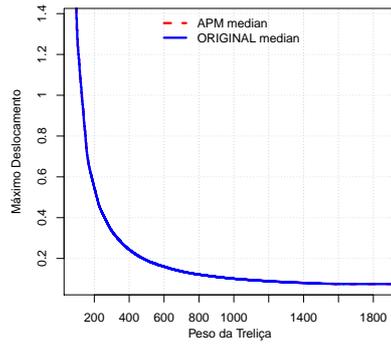
(a)  $H_1=0,7575$  e  $H_2=0,7585$ (b)  $H_1=0,7492$  e  $H_2=0,7500$ (c)  $H_1=0,6963$  e  $H_2=0,7066$ (d)  $H_1=0,7591$  e  $H_2=0,7593$ (e)  $H_1=0,7503$  e  $H_2=0,7500$ (f)  $H_1=0,7138$  e  $H_2=0,7202$ (g)  $H_1=0,7596$  e  $H_2=0,7551$ (h)  $H_1=0,7512$  e  $H_2=0,7433$ (i)  $H_1=0,6979$  e  $H_2=0,7212$ (j)  $H_1=0,7633$  e  $H_2=0,7598$ (k)  $H_1=0,7538$  e  $H_2=0,7495$ (l)  $H_1=0,7157$  e  $H_2=0,7338$ 

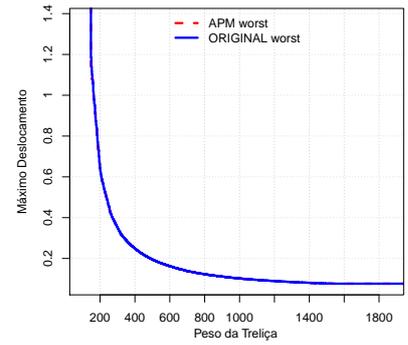
Figura 9.8: Curvas EAF da Treliça de 60 Barras: ORIGINAL refere-se ao GDE3 e APM ao GDE3+APM. As Figuras (a,b,c,g,h,i) tratam do caso discreto e (d,e,f,j,k,l) tratam do caso contínuo. Hipervolumes normalizados:  $H_1$  para GDE3+APM e  $H_2$  para GDE3 e NSGA-II.



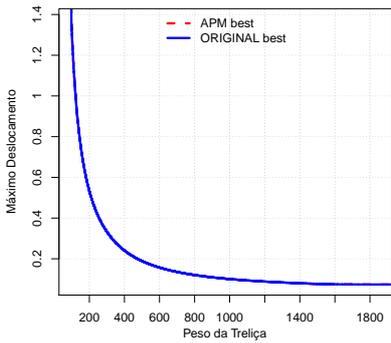
(a)  $H_1=0,9164$  e  $H_2=0,9164$



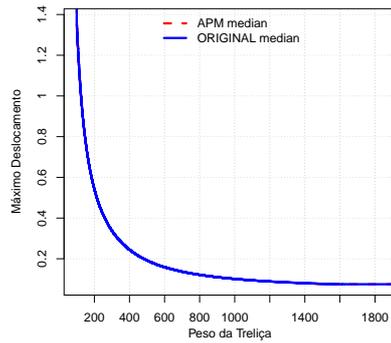
(b)  $H_1=0,9154$  e  $H_2=0,9154$



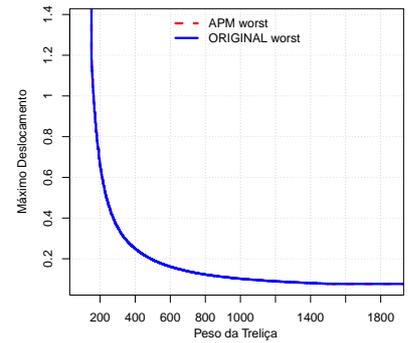
(c)  $H_1=0,8992$  e  $H_2=0,8988$



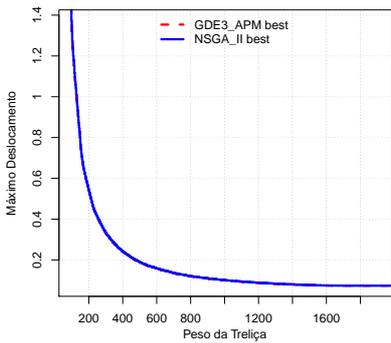
(d)  $H_1=0,9205$  e  $H_2=0,9205$



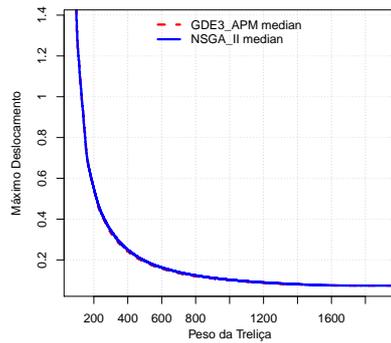
(e)  $H_1=0,9185$  e  $H_2=0,9186$



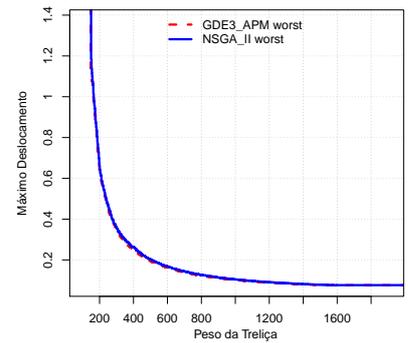
(f)  $H_1=0,9018$  e  $H_2=0,9018$



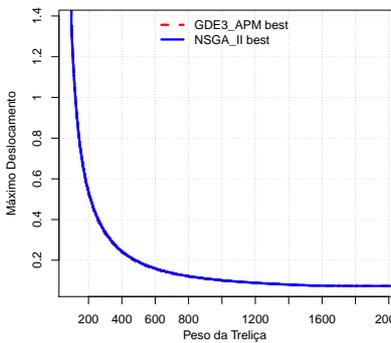
(g)  $H_1=0,9166$  e  $H_2=0,9159$



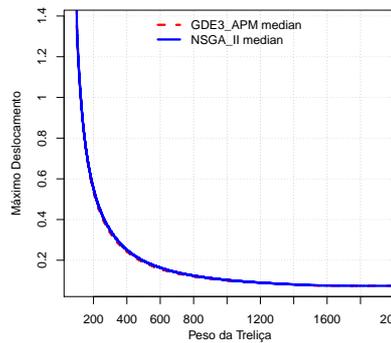
(h)  $H_1=0,9155$  e  $H_2=0,9138$



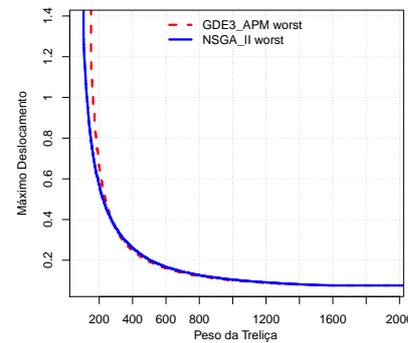
(i)  $H_1=0,8994$  e  $H_2=0,8957$



(j)  $H_1=0,9220$  e  $H_2=0,9209$

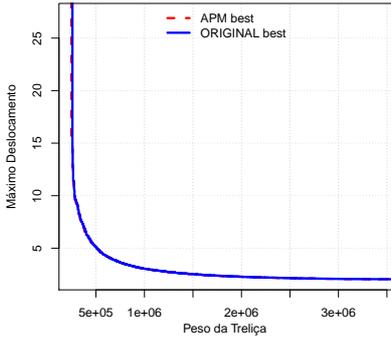


(k)  $H_1=0,9200$  e  $H_2=0,9180$

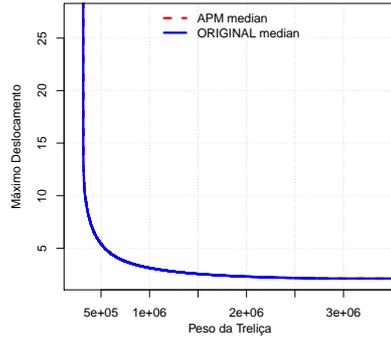


(l)  $H_1=0,9037$  e  $H_2=0,9144$

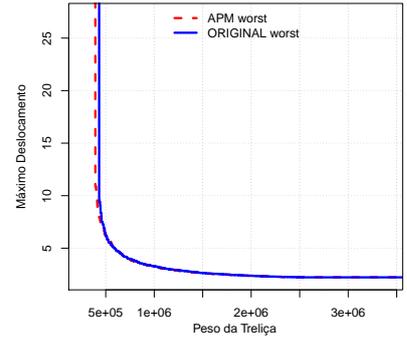
Figura 9.9: Curvas EAF da Treliça de 72 Barras: ORIGINAL refere-se ao GDE3 e APM ao GDE3+APM. As Figuras (a,b,c,g,h,i) tratam do caso discreto e (d,e,f,j,k,l) tratam do caso contínuo. Hipervolumes normalizados:  $H_1$  para GDE3+APM e  $H_2$  para GDE3 e NSGA-II.



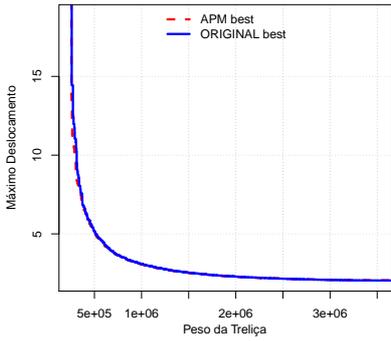
(a)  $H_1=0,9510$  e  $H_2=0,9498$



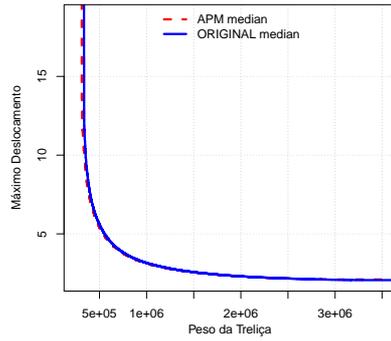
(b)  $H_1=0,9330$  e  $H_2=0,9340$



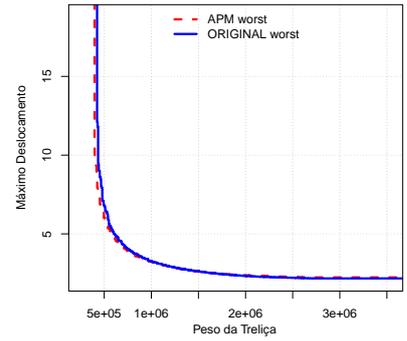
(c)  $H_1=0,9103$  e  $H_2=0,9018$



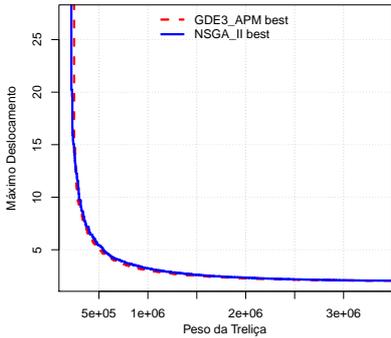
(d)  $H_1=0,9374$  e  $H_2=0,9337$



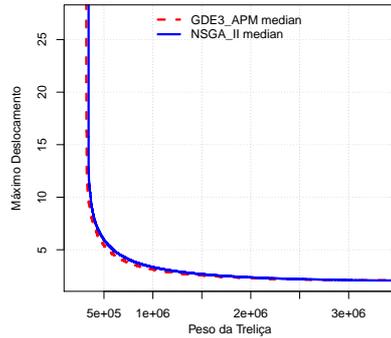
(e)  $H_1=0,9229$  e  $H_2=0,9180$



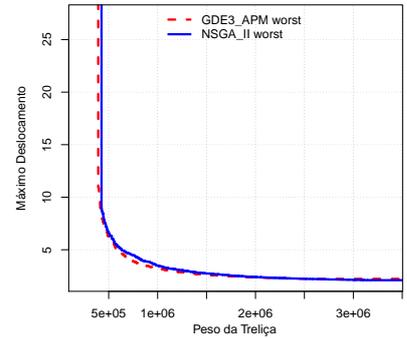
(f)  $H_1=0,8996$  e  $H_2=0,8925$



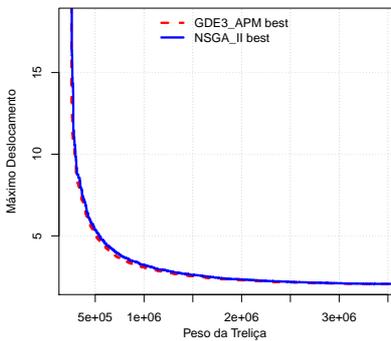
(g)  $H_1=0,9398$  e  $H_2=0,9351$



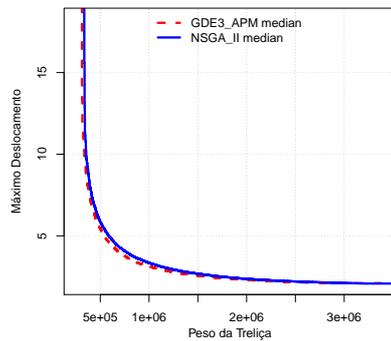
(h)  $H_1=0,9218$  e  $H_2=0,9101$



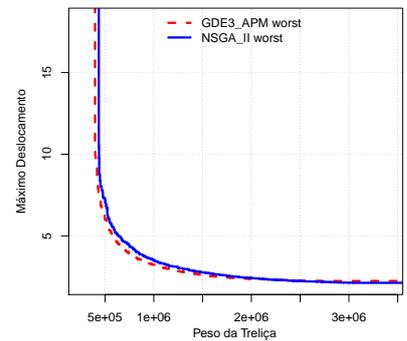
(i)  $H_1=0,8990$  e  $H_2=0,8874$



(j)  $H_1=0,9366$  e  $H_2=0,9280$



(k)  $H_1=0,9217$  e  $H_2=0,9086$



(l)  $H_1=0,8976$  e  $H_2=0,8824$

Figura 9.10: Curvas EAF da Treliça de 942 Barras: ORIGINAL refere-se ao GDE3 e APM ao GDE3+APM. As Figuras (a,b,c,g,h,i) tratam do caso discreto e (d,e,f,j,k,l) tratam do caso contínuo. Hipervolumes normalizados:  $H_1$  para GDE3+APM e  $H_2$  para GDE3 e NSGA-II.

Tabela 9.6: Média e Desvio Padrão (DP) dos Resultados do Hipervolume e IGD para o Experimento 2.

|                 |       | GDE3+APM                                  | GDE3                                      | NSGA-II                                   |
|-----------------|-------|-------------------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------|
| Hipervolume     |       |                                           |                                           |                                           |
| 10 B. Discreto  | Média | <b>0.8406</b>                             | 0.8403                                    | <b>0.8406</b>                             |
|                 | DP    | $6.0803 \times 10^{-4}$                   | 0.0021                                    | $4.3202 \times 10^{-4}$                   |
| 10 B. Contínuo  | Média | <b>0.8672</b>                             | 0.8668                                    | 0.8657(+)                                 |
|                 | DP    | $5.4247 \times 10^{-4}$                   | 0.0030                                    | $4.6380 \times 10^{-4}$                   |
| 25 B. Discreto  | Média | <b>0.8846</b>                             | <b>0.8846</b>                             | 0.8843(+)                                 |
|                 | DP    | $6.8171 \times 10^{-5}$                   | $6.8818 \times 10^{-5}$                   | $8.3655 \times 10^{-5}$                   |
| 25 B. Contínuo  | Média | <b>0.8939</b>                             | <b>0.8939</b>                             | 0.8935(+)                                 |
|                 | DP    | $1.2104 \times 10^{-4}$                   | $1.2165 \times 10^{-4}$                   | $1.4911 \times 10^{-4}$                   |
| 60 B. Discreto  | Média | 0.7580                                    | <b>0.7592</b>                             | 0.7521(+)                                 |
|                 | DP    | 0.0066                                    | 0.0054                                    | 0.0034                                    |
| 60 B. Contínuo  | Média | <b>0.7619</b>                             | 0.7616                                    | 0.7587(+)                                 |
|                 | DP    | 0.0056                                    | 0.0048                                    | 0.0023                                    |
| 72 B. Discreto  | Média | <b>0.9203</b>                             | <b>0.9203</b>                             | 0.9187(+)                                 |
|                 | DP    | 0.0015                                    | 0.0015                                    | 0.0015                                    |
| 72 B. Contínuo  | Média | <b>0.9220</b>                             | <b>0.9220</b>                             | 0.9205(+)                                 |
|                 | DP    | 0.0025                                    | 0.0026                                    | $3.2284 \times 10^{-4}$                   |
| 942 B. Discreto | Média | 0.9355                                    | <b>0.9358</b>                             | 0.9256(+)                                 |
|                 | DP    | 0.0071                                    | 0.0080                                    | 0.0077                                    |
| 942 B. Contínuo | Média | <b>0.9324</b>                             | 0.9273(+)                                 | 0.9213(+)                                 |
|                 | DP    | 0.0063                                    | 0.0069                                    | 0.0067                                    |
| IGD             |       |                                           |                                           |                                           |
| 10 B. Discreto  | Média | $1.3724 \times 10^{-4}(+)$                | $1.3865 \times 10^{-4}(+)$                | <b><math>5.1372 \times 10^{-5}</math></b> |
|                 | DP    | $1.2267 \times 10^{-4}$                   | $1.4024 \times 10^{-4}$                   | $2.9894 \times 10^{-5}$                   |
| 10 B. Contínuo  | Média | $7.0443 \times 10^{-5}(+)$                | $6.8141 \times 10^{-5}(+)$                | <b><math>3.4982 \times 10^{-5}</math></b> |
|                 | DP    | $1.4266 \times 10^{-4}$                   | $5.3357 \times 10^{-5}$                   | $7.6001 \times 10^{-6}$                   |
| 25 B. Discreto  | Média | <b><math>2.6183 \times 10^{-5}</math></b> | $2.6233 \times 10^{-5}$                   | $2.9193 \times 10^{-5}(+)$                |
|                 | DP    | $2.2816 \times 10^{-6}$                   | $2.3940 \times 10^{-6}$                   | $2.1445 \times 10^{-6}$                   |
| 25 B. Contínuo  | Média | <b><math>1.6979 \times 10^{-5}</math></b> | $1.6996 \times 10^{-5}$                   | $1.8772 \times 10^{-5}(+)$                |
|                 | DP    | $3.3789 \times 10^{-6}$                   | $3.3861 \times 10^{-6}$                   | $2.2014 \times 10^{-6}$                   |
| 60 B. Discreto  | Média | <b><math>3.5542 \times 10^{-4}</math></b> | $4.0631 \times 10^{-4}(+)$                | $4.0315 \times 10^{-4}(+)$                |
|                 | DP    | $2.1647 \times 10^{-4}$                   | $2.1419 \times 10^{-4}$                   | $1.3706 \times 10^{-4}$                   |
| 60 B. Contínuo  | Média | $3.5866 \times 10^{-4}$                   | $4.1028 \times 10^{-4}(+)$                | <b><math>2.9075 \times 10^{-4}</math></b> |
|                 | DP    | $2.0566 \times 10^{-4}$                   | $2.3266 \times 10^{-4}$                   | $6.6810 \times 10^{-5}$                   |
| 72 B. Discreto  | Média | $1.8875 \times 10^{-4}(+)$                | $1.9746 \times 10^{-4}(+)$                | <b><math>1.3173 \times 10^{-4}</math></b> |
|                 | DP    | $1.1392 \times 10^{-4}$                   | $1.0205 \times 10^{-4}$                   | $7.3004 \times 10^{-5}$                   |
| 72 B. Contínuo  | Média | $2.3236 \times 10^{-4}(+)$                | $2.3363 \times 10^{-4}(+)$                | <b><math>1.3360 \times 10^{-4}</math></b> |
|                 | DP    | $9.8994 \times 10^{-5}$                   | $1.0059 \times 10^{-4}$                   | $5.6524 \times 10^{-5}$                   |
| 942 B. Discreto | Média | 0.0014(+)                                 | 0.0015(+)                                 | <b>0.0011</b>                             |
|                 | DP    | $5.5948 \times 10^{-4}$                   | $4.6022 \times 10^{-4}$                   | $3.5911 \times 10^{-4}$                   |
| 942 B. Contínuo | Média | 0.0013(+)                                 | <b><math>6.4153 \times 10^{-4}</math></b> | $6.5217 \times 10^{-4}$                   |
|                 | DP    | $6.5390 \times 10^{-4}$                   | $2.9921 \times 10^{-4}$                   | $1.5506 \times 10^{-4}$                   |

Tabela 9.7: Média e Desvio Padrão (DP) dos Resultados da CM e do  $I_\epsilon$  para o Experimento 2. Os algoritmos GDE3+APM, GDE3 e NSGA-II são identificados respectivamente por A, B e C.

|                 |       | (A,B)         | (B,A)         | (A,C)         | (C,A)         |
|-----------------|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| CM              |       |               |               |               |               |
| 10 B. Discreto  | Média | <b>0.3700</b> | 0.2931        | <b>0.5098</b> | 0.1784(+)     |
|                 | DP    | 0.1806        | 0.1120        | 0.0778        | 0.0551        |
| 10 B. Contínuo  | Média | 0.3309        | <b>0.3367</b> | <b>0.7714</b> | 0.0564(+)     |
|                 | DP    | 0.0957        | 0.0968        | 0.0781        | 0.0310        |
| 25 B. Discreto  | Média | 0.0150        | <b>0.0169</b> | <b>0.3864</b> | 0.1523(+)     |
|                 | DP    | 0.0558        | 0.0625        | 0.0579        | 0.0393        |
| 25 B. Contínuo  | Média | 0.0126        | <b>0.0131</b> | <b>0.5340</b> | 0.1879(+)     |
|                 | DP    | 0.0631        | 0.0655        | 0.0962        | 0.0617        |
| 60 B. Discreto  | Média | 0.3066(+)     | <b>0.4986</b> | <b>0.8529</b> | 0.0647(+)     |
|                 | DP    | 0.1634        | 0.1699        | 0.1258        | 0.0848        |
| 60 B. Contínuo  | Média | 0.3629(+)     | <b>0.4399</b> | <b>0.8126</b> | 0.0827(+)     |
|                 | DP    | 0.1529        | 0.1713        | 0.1383        | 0.1057        |
| 72 B. Discreto  | Média | 0.3015        | <b>0.3076</b> | <b>0.7185</b> | 0.0366(+)     |
|                 | DP    | 0.0848        | 0.0811        | 0.0480        | 0.0291        |
| 72 B. Contínuo  | Média | 0.0848        | <b>0.1043</b> | <b>0.7738</b> | 0.0627(+)     |
|                 | DP    | 0.1512        | 0.1815        | 0.1004        | 0.0521        |
| 942 B. Discreto | Média | 0.4172        | <b>0.4454</b> | <b>0.8968</b> | 0.0203(+)     |
|                 | DP    | 0.2307        | 0.2302        | 0.0729        | 0.0370        |
| 942 B. Contínuo | Média | <b>0.5716</b> | 0.2739(+)     | <b>0.8898</b> | 0.0247(+)     |
|                 | DP    | 0.2156        | 0.2159        | 0.0880        | 0.0465        |
| $I_\epsilon$    |       |               |               |               |               |
| 10 B. Discreto  | Média | 1.0272        | <b>1.0250</b> | 1.0392(+)     | <b>1.0117</b> |
|                 | DP    | 0.0276        | 0.0275        | 0.0345        | 0.0077        |
| 10 B. Contínuo  | Média | <b>1.0227</b> | 1.0324        | 1.0321(+)     | <b>1.0158</b> |
|                 | DP    | 0.0243        | 0.0535        | 0.0304        | 0.0079        |
| 25 B. Discreto  | Média | <b>1.0001</b> | <b>1.0001</b> | <b>1.0076</b> | 1.0089(+)     |
|                 | DP    | 0.0020        | 0.0020        | 0.0016        | 0.0012        |
| 25 B. Contínuo  | Média | <b>1.0003</b> | <b>1.0003</b> | <b>1.0085</b> | 1.0117(+)     |
|                 | DP    | 0.0017        | 0.0016        | 0.0034        | 0.0051        |
| 60 B. Discreto  | Média | 1.0351        | <b>1.0328</b> | <b>1.0194</b> | 1.0429(+)     |
|                 | DP    | 0.0453        | 0.0337        | 0.0340        | 0.0333        |
| 60 B. Contínuo  | Média | <b>1.0273</b> | 1.0366        | 1.0410        | <b>1.0228</b> |
|                 | DP    | 0.0310        | 0.0404        | 0.0424        | 0.0180        |
| 72 B. Discreto  | Média | 1.0176        | <b>1.0162</b> | <b>1.0240</b> | 1.0343(+)     |
|                 | DP    | 0.0258        | 0.0061        | 0.0563        | 0.0515        |
| 72 B. Contínuo  | Média | 1.0096        | <b>1.0090</b> | 1.0367(+)     | <b>1.0301</b> |
|                 | DP    | 0.0432        | 0.0509        | 0.0858        | 0.0047        |
| 942 B. Discreto | Média | 1.0817        | <b>1.0779</b> | <b>1.0540</b> | 1.1425(+)     |
|                 | DP    | 0.0740        | 0.0890        | 0.0723        | 0.1011        |
| 942 B. Contínuo | Média | <b>1.0543</b> | 1.1219(+)     | <b>1.0470</b> | 1.1445(+)     |
|                 | DP    | 0.0495        | 0.1093        | 0.0566        | 0.0964        |

Tabela 9.8: Média e Desvio Padrão (DP) dos Resultados do Hipervolume (H) para o Experimento 2 considerando 30000 avaliações de cada uma das funções objetivo no GDE3+APM.

|                 |       | GDE3+APM      | NSGA-II                 |
|-----------------|-------|---------------|-------------------------|
| 10 B. Contínuo  | Média | <b>0.8661</b> | 0.8657(+)               |
|                 | DP    | 0.0012        | $4.6380 \times 10^{-4}$ |
| 60 B. Discreto  | Média | 0.7530        | <b>0.7537</b>           |
|                 | DP    | 0.0079        | 0.0032                  |
| 72 B. Discreto  | Média | <b>0.9199</b> | 0.9191(+)               |
|                 | DP    | 0.0019        | 0.0015                  |
| 72 B. Contínuo  | Média | <b>0.9209</b> | 0.9207(+)               |
|                 | DP    | 0.0030        | $3.2290 \times 10^{-4}$ |
| 942 B. Contínuo | Média | 0.9200        | <b>0.9223</b>           |
|                 | DP    | 0.0089        | 0.0070                  |

Tabela 9.9: Média e Desvio Padrão (DP) dos Resultados da CM para o Experimento 2 considerando 30000 avaliações de cada uma das funções objetivo no GDE3+APM.

|                 |       | (GDE3+APM,NSGA-II) | (NSGA-II,GDE3+APM) |
|-----------------|-------|--------------------|--------------------|
| 10 B. Contínuo  | Média | <b>0.6405</b>      | 0.1022(+)          |
|                 | DP    | 0.0991             | 0.0485             |
| 10 B. Discreto  | Média | <b>0.3954</b>      | 0.2620(+)          |
|                 | DP    | 0.0800             | 0.0780             |
| 25 B. Contínuo  | Média | <b>0.3917</b>      | 0.2892(+)          |
|                 | DP    | 0.0847             | 0.0753             |
| 25 B. Discreto  | Média | <b>0.2949</b>      | 0.2375(+)          |
|                 | DP    | 0.0597             | 0.0602             |
| 60 B. Contínuo  | Média | <b>0.7030</b>      | 0.1225(+)          |
|                 | DP    | 0.1291             | 0.1099             |
| 60 B. Discreto  | Média | <b>0.7090</b>      | 0.1256(+)          |
|                 | DP    | 0.1472             | 0.1269             |
| 72 B. Contínuo  | Média | <b>0.6418</b>      | 0.1235(+)          |
|                 | DP    | 0.0984             | 0.0639             |
| 72 B. Discreto  | Média | <b>0.6450</b>      | 0.0896(+)          |
|                 | DP    | 0.0598             | 0.0531             |
| 942 B. Contínuo | Média | <b>0.7383</b>      | 0.0564(+)          |
|                 | DP    | 0.0878             | 0.0445             |
| 942 B. Discreto | Média | <b>0.7547</b>      | 0.0473(+)          |
|                 | DP    | 0.0707             | 0.0426             |

Tabela 9.10: Média e Desvio Padrão (DP) dos Resultados do  $I_\epsilon$  para o Experimento 2 considerando 30000 avaliações de cada uma das funções objetivo no GDE3+APM.

|                |       | (GDE3+APM,NSGA-II) | (NSGA-II,GDE3+APM) |
|----------------|-------|--------------------|--------------------|
| 72 B. Contínuo | Média | 1.0567             | <b>1.0277</b>      |
|                | DP    | 0.1052             | 0.0050             |

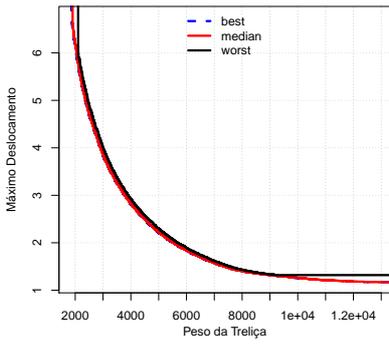
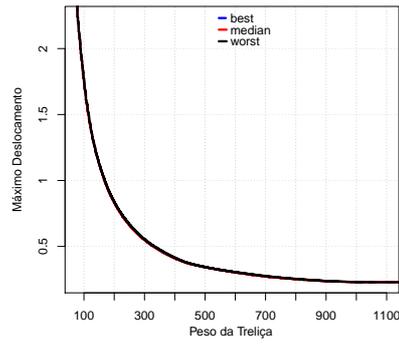
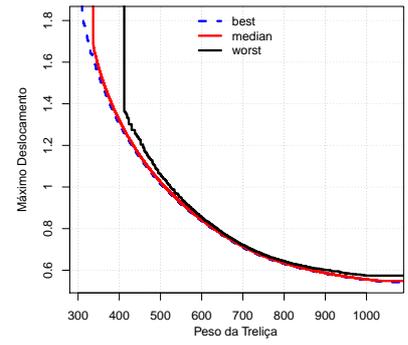
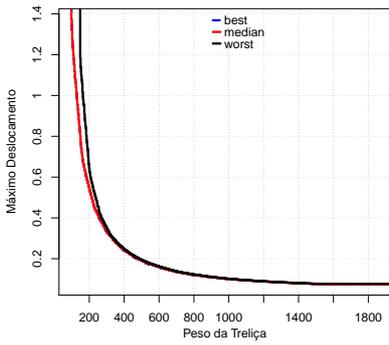
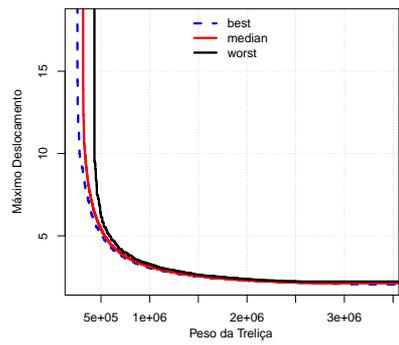
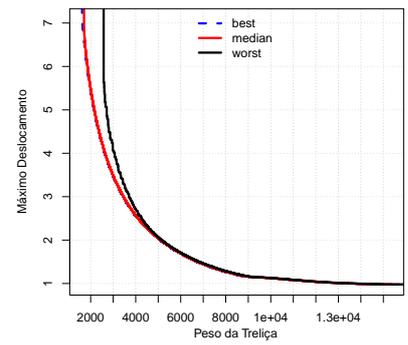
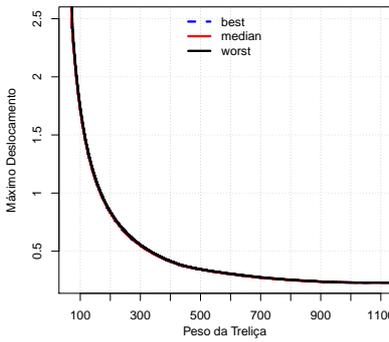
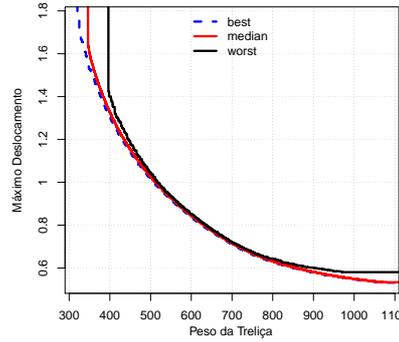
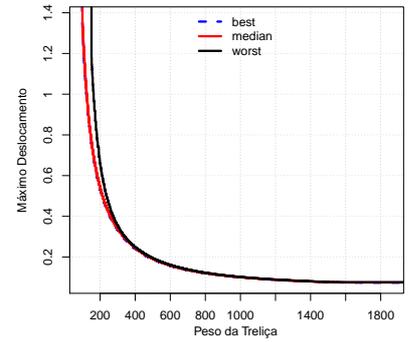
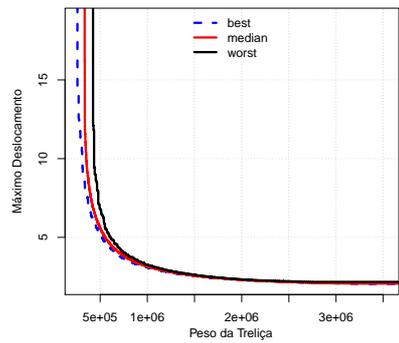
(a)  $Dif=0,0191$ (b)  $Dif=0,0019$ (c)  $Dif=0,0521$ (d)  $Dif=0,0176$ (e)  $Dif=0,0446$ (f)  $Dif=0,0321$ (g)  $Dif=0,0025$ (h)  $Dif=0,0391$ (i)  $Dif=0,0187$ (j)  $Dif=0,0413$ 

Figura 9.11: Curvas EAF do algoritmo GDE3 nas Treliças de 10 (a,f), 25 (b,g), 60 (c,h), 72 (d,i) e 942 (e,j), onde  $Dif$  é a diferença entre o Hipervolume normalizado das curvas *best* e *worst*. As Figuras (a,b,c,d,e) tratam do caso discreto e (f,g,h,i,j) tratam do caso contínuo.

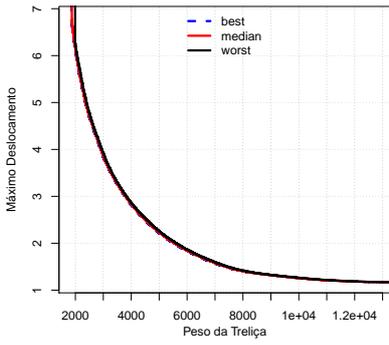
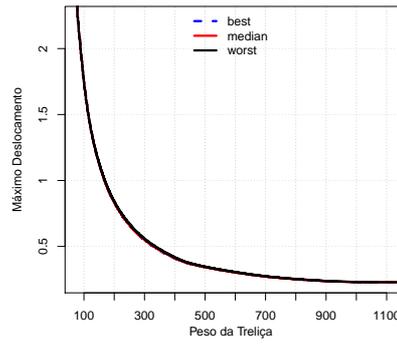
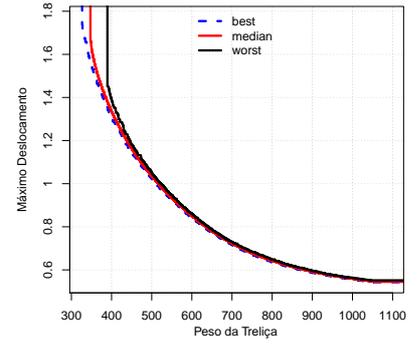
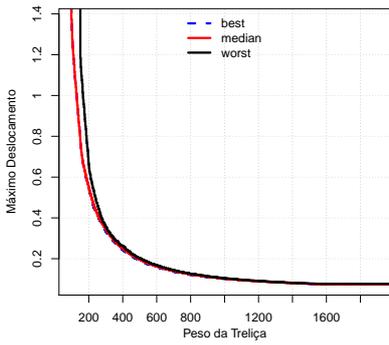
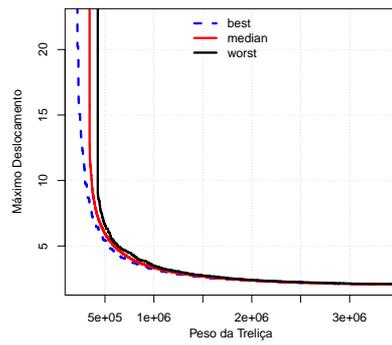
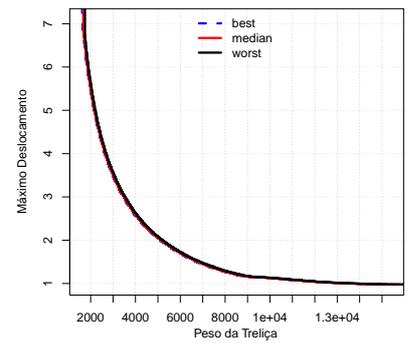
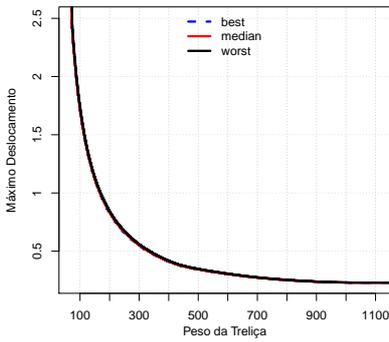
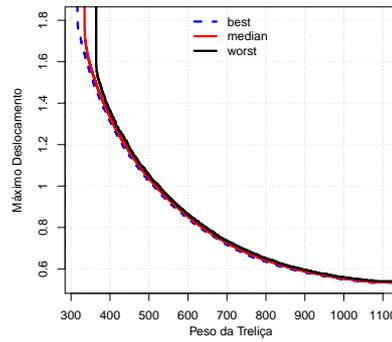
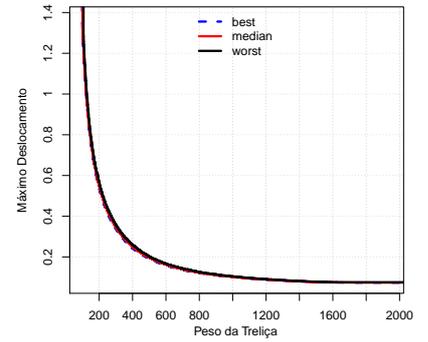
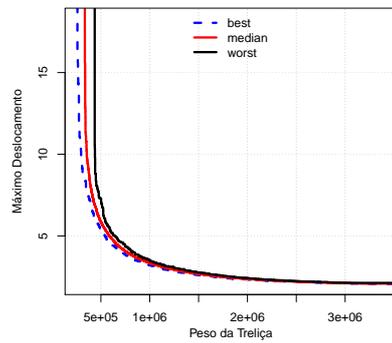
(a)  $Dif=0,0067$ (b)  $Dif=0,0021$ (c)  $Dif=0,0311$ (d)  $Dif=0,0202$ (e)  $Dif=0,0478$ (f)  $Dif=0,0065$ (g)  $Dif=0,0030$ (h)  $Dif=0,0259$ (i)  $Dif=0,0065$ (j)  $Dif=0,0457$ 

Figura 9.12: Curvas EAF do algoritmo NSGA-II nas Treliças de 10 (a,f), 25 (b,g), 60 (c,h), 72 (d,i) e 942 (e,j), onde  $Dif$  é a diferença entre o Hipervolume normalizado das curvas *best* e *worst*. As Figuras (a,b,c,d,e) tratam do caso discreto e (f,g,h,i,j) tratam do caso contínuo.

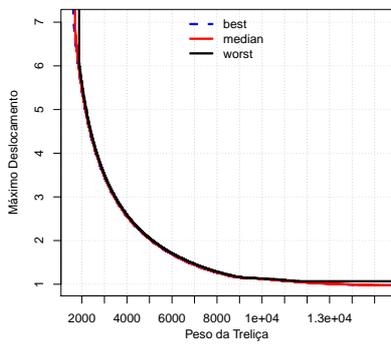
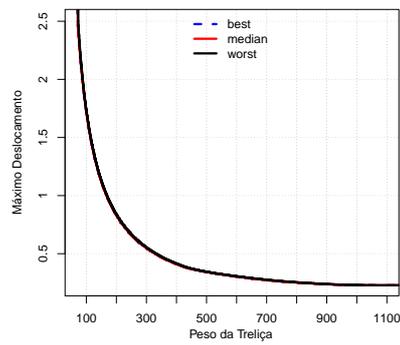
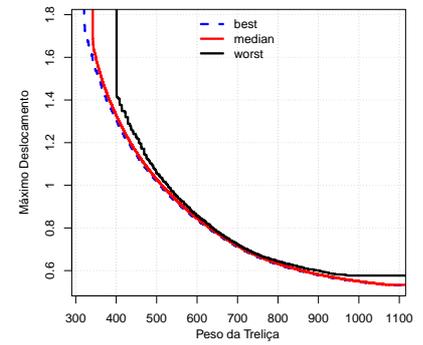
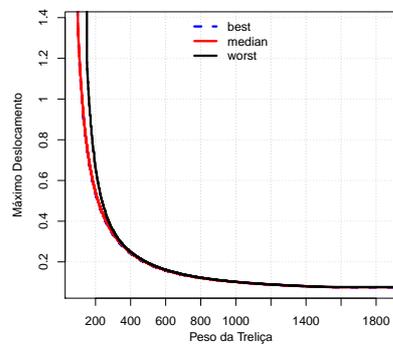
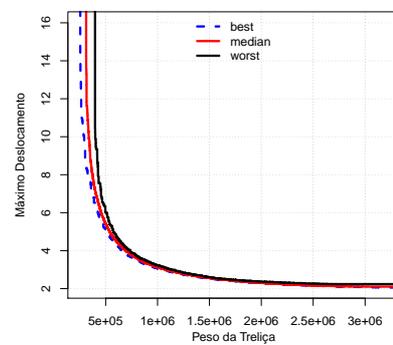
(a)  $Dif=0,0086$ (b)  $Dif=0,0026$ (c)  $Dif=0,0452$ (d)  $Dif=0,0186$ (e)  $Dif=0,0385$ 

Figura 9.13: Curvas EAF do algoritmo GDE3+APM nas Treliças de 10 (a), 25 (b), 60 (c), 72 (d) e 942 (e) Barras (caso contínuo), onde  $Dif$  é a diferença entre o Hipervolume normalizado das curvas *best* e *worst*.

# 10 EXPERIMENTO 3: PREFERÊNCIA DE MODO *A* *PRIORI*

## 10.1 Delineamento

Nesta terceira seção de experimentos será apresentada uma análise do algoritmo proposto GDE3+APM utilizando informações de preferência da mesma maneira que o algoritmo R-NSGA-II (indicado aqui por R-GDE3+APM e detalhado no **Algoritmo 5**). Seu desempenho será comparado ao desempenho dos algoritmos R-NSGA-II (**Algoritmo 8**) e R-GDE3 (**Algoritmo 15**). Neste Capítulo serão consideradas situações onde informações sobre as preferências dos usuários serão inseridas de modo *a priori*, isto é, os decisores devem informar suas preferências no início da execução do algoritmo e elas são mantidas fixas durante todo o processo de busca.

Do ponto de vista de engenharia, considera-se que as soluções apresentadas pelo NSGA-II, GDE3 e GDE3+APM no Capítulo 9 são boas quando comparadas com as encontradas na literatura. É muito difícil encontrar soluções explícitas<sup>1</sup> desses POMs na literatura para comparação<sup>2</sup>. Além das soluções obtidas em (ANGELO et al., 2012) (cedidas pelos autores), foram encontradas apenas 3 soluções explícitas para o caso contínuo do problema da Treliça de 25 Barras obtidas com 30000 avaliações das funções objetivo em (KAVEH; LAKNEJADI, 2011): [267;0,65], [348;0,49] e [457;0,37]. Em todas as execuções do GDE3+APM com 30000 avaliações das funções objetivo foram obtidas soluções que dominam essas três (Figura 10.1).

O objetivo desses experimentos é estudar o comportamento do algoritmo proposto quando informações sobre as preferências dos usuários serão inseridas. Partindo do princípio de que as soluções apresentadas pelo NSGA-II, GDE3 e GDE3+APM no Capítulo 9 são boas, pretende-se verificar o quanto elas podem ser melhoradas na região de

---

<sup>1</sup>Valores das funções objetivo de cada solução obtida.

<sup>2</sup>Em geral, os resultados apresentados na literatura são os valores obtidos pelas medidas utilizadas.

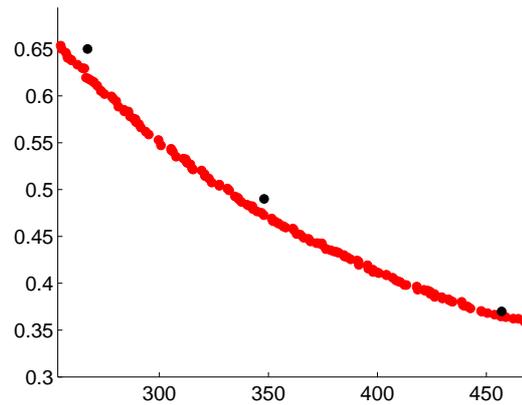


Figura 10.1: Comparação de uma das 100 execuções do GDE3+APM com 30000 avaliações das funções objetivo (em vermelho no gráfico) com as 3 soluções explícitas em (KAVEH; LAKNEJADI, 2011), as quais foram [267;0,65], [348;0,49] e [457;0,37] (em preto no gráfico), para o caso contínuo do problema da Treliça de 25 Barras.

interesse da Frente de Pareto, para satisfazer as preferências dos tomadores de decisão de um modo bem melhor. Pretende-se também fornecer uma contribuição para a literatura, uma vez que (ZAVALA et al., 2014) indica em seu trabalho que a incorporação de informações de preferência do usuário nos mecanismos de busca tem sido pouco explorada em POMs de OE.

Conforme já descrito no Capítulo 3, a inserção de um Ponto de Referência se adapta bem à resolução de problemas oriundos de áreas cujos decisores já acumulam larga experiência (PURSHOUSE et al., 2014). Como há problemas bastante tratados na literatura, especialmente na versão monobjetivo, a OE pode ser considerada uma dessas áreas. (ANGELO et al., 2012), por exemplo, sugere o bom desempenho dos algoritmos MOAS e MOACS (entre outras razões) pelas suas capacidades de gerarem uma diversidade de soluções nas proximidades de pontos de referência adotados por aqueles autores<sup>3</sup>. Eles consideraram  $\bar{z} = (z_1, z_2)$  como o ponto de referência de cada problema onde  $z_1$  é a solução e  $z_2$  o deslocamento máximo permitido do POMONO correspondente. O ponto de referência no formato  $\bar{z} = (z_1, z_2)$  utilizado em (ANGELO et al., 2012) foi também adotado aqui.

<sup>3</sup>Em (ANGELO et al., 2012), os pontos de referência adotados foram apenas para avaliação do desempenho dos algoritmos MOAS e MOACS e não como preferências no mecanismo de busca.

### 10.1.1 Definição das Preferências e Análise de Parâmetros

Mesmo considerando os POMs sobre variáveis discretas, (ANGELO et al., 2012) utilizou como pontos de referência soluções do POMONO correspondente de alguns deles sobre variáveis contínuas. Os autores adotaram os valores de  $z_1$  como a solução do POMONO correspondente exibida em (SILVA et al., 2011c) para as Treliças de 10, 25, 60 e 72 Barras e a exibida em (ERBATUR et al., 2000) para o problema da Treliça de 942 Barras, sendo os POMONOs correspondentes definidos sobre variáveis contínuas para as Treliças de 60, 72 e 942 Barras.

Para evitar essa situação, optou-se aqui por adotar como valores de  $z_1$  as melhores soluções exibidas em (SILVA et al., 2013), uma vez que os casos discreto e contínuo dos POMONOs correspondentes às Treliças de 10, 25, 60, 72 e 942 Barras foram utilizadas lá. Esses valores, juntamente com o deslocamento máximo permitido do POMONO correspondente, formam os pontos de referência que serão utilizados nos experimentos deste Capítulo (Tabela 10.1). Vale ressaltar que, na prática, o ponto de referência com base na solução do POMONO correspondente dificilmente poderá ser adotado. Do contrário, seria necessário resolver o POMONO antes do POM. Aqui ele foi apenas um artifício para simular a escolha das preferências do tomador de decisão, já que não foi encontrado na literatura nenhum trabalho envolvendo informações de preferência nos POMs de OE adotados.

Tabela 10.1: Pontos de Referência  $\bar{z} = (z_1, z_2)$ , onde  $z_1$  é a melhor solução do POMONO correspondente exibida em (SILVA et al., 2013) utilizando o mesmo tipo de variável e  $z_2$  o respectivo deslocamento máximo permitido.

| Problema            | Ponto de Referência |
|---------------------|---------------------|
| 10 Barras Contínuo  | [5060,85; 2]        |
| 10 Barras Discreto  | [5490,74; 2]        |
| 25 Barras Contínuo  | [484,05; 0,35]      |
| 25 Barras Discreto  | [484,85; 0,35]      |
| 60 Barras Contínuo  | [308,85; 1,75]      |
| 60 Barras Discreto  | [312,71; 1,75]      |
| 72 Barras Contínuo  | [379,62; 0,25]      |
| 72 Barras Discreto  | [385,54; 0,25]      |
| 942 Barras Contínuo | [147.575; 15]       |
| 942 Barras Discreto | [141.241; 15]       |

Mesmo que os pontos de referência estejam bem definidos no problema, não basta que um algoritmo forneça as soluções mais próximas deles para que o *SPO* obtido

seja considerado de boa qualidade do ponto de vista do tomador de decisão. Além da proximidade aos pontos de referência, outros aspectos para medir a qualidade do *SPO* obtido são desejáveis. (FLEMING et al., 2005) consideram 3 deles essenciais em um projeto de engenharia: convergência, diversidade e pertinência.

A convergência e a diversidade são discutidas no Capítulo 2. O aspecto da pertinência diz respeito ao *SPO* conter ou não soluções na região de interesse do tomador de decisão, pois existe pouco benefício em apresentar soluções ao tomador de decisão que não estejam nela. A qualidade do *SPO*, então, se mede pela convergência e a diversidade dentro dela (FLEMING et al., 2005).

Diante do exposto, deseja-se que o *SPO* contenha pontos que estejam não somente próximo aos pontos de referência como também bem espalhados em uma dada vizinhança em torno deles. Essa diversidade é controlada nos algoritmos R-NSGA-II, R-GDE3 e R-GDE3+APM pelo parâmetro  $\epsilon$  (Seção 3.4.2). Um exemplo que mostra o efeito de diferentes valores de  $\epsilon$  sobre a diversidade das soluções é exibido na Figura 10.2. Nele, uma execução do R-NSGA-II para cada um dos 4 valores de  $\epsilon$ , a saber, 0,0001 ; 0,001 ; 0,005 e 0,01 (valores utilizados no experimento original de sua proposição (DEB; SUNDAR, 2006)) foi realizada na Treliça de 10 Barras (caso contínuo). Os parâmetro em comum com o NSGA-II usados para esse problema são os mesmos anteriormente exibidos na Tabela 9.3 e as execuções consideraram 50000 avaliações de cada uma das funções objetivo. Este exemplo foi realizado com o R-NSGA-II por ele ser o algoritmo que serviu de inspiração para a proposição aqui do R-GDE3+APM e do R-GDE3.

No exemplo da Figura 10.2 a linha preta corresponde ao *SPO* obtido pelo NSGA-II e o quadrado preto é o ponto de referência. Os pontos vermelhos, azuis, verdes e amarelos representam, respectivamente, o *SPO* obtido pelo R-NSGA-II para  $\epsilon = 0,01$ ,  $\epsilon = 0,005$ ,  $\epsilon = 0,001$  e  $\epsilon = 0,0001$ . Pode-se perceber que cada valor de  $\epsilon$  corresponde a um *SPO* com uma diversidade diferente em torno do ponto de referência. Se o tomador de decisão prefere soluções mais concentradas na vizinhança do ponto de referência,  $\epsilon = 0,005$  parece ser o mais indicado (10.2b). Entretanto, se o tomador de decisão prefere soluções mais diversificadas do que as obtidas com  $\epsilon = 0,005$ , especialmente na região onde  $f_2$  é maior do que 2.05, o valor de  $\epsilon = 0,01$  atenderá melhor suas preferências (10.2c). Assim, a definição de  $\epsilon$  vai depender da proximidade e da diversidade desejada.

Há ainda situações onde o MOEA sem informações de preferência produz melhores

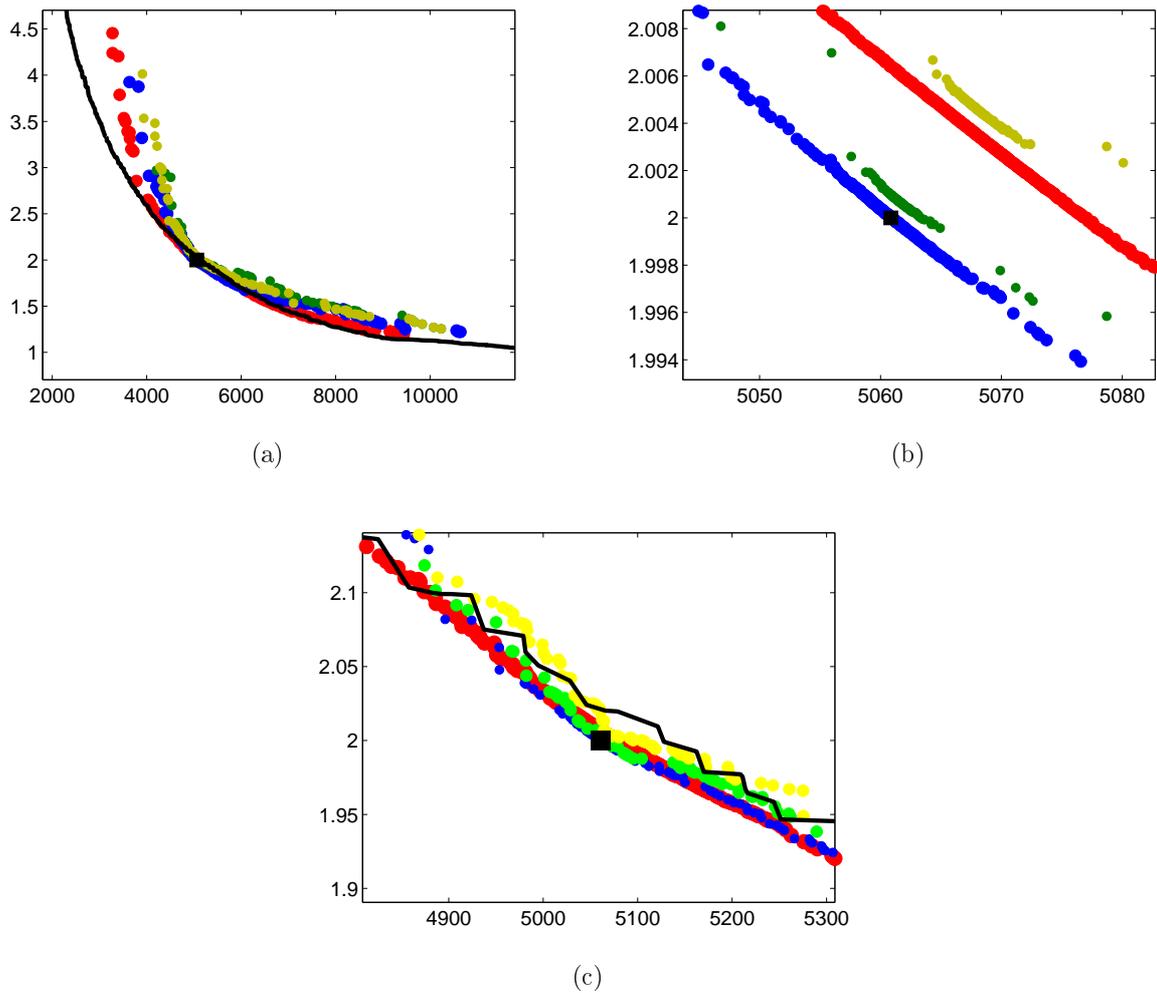


Figura 10.2: Efeito de diferentes valores de  $\epsilon$  sobre a diversidade das soluções obtidas pelo R-NSGA-II na Trelça de 10 Barras (caso contínuo). A linha preta corresponde ao *SPO* obtido pelo NSGA-II e o quadrado preto é o ponto de referência. Os pontos vermelhos, azuis, verdes e amarelos representam, respectivamente, o *SPO* obtido pelo R-NSGA-II para  $\epsilon = 0,01$ ,  $\epsilon = 0,005$ ,  $\epsilon = 0,001$  e  $\epsilon = 0,0001$ . As Figuras 10.2b e 10.2c são aproximações da Figura 10.2a.

soluções do que ele produziria com a inclusão dessas informações. Por exemplo, na Figura 10.2a é visível que o NSGA-II obtém soluções dominantes quando o valor de  $f_2$  esta acima de 2,5 e também abaixo de 1,25 quando comparado ao R-NSGA-II. No intuito de trabalhar apenas em regiões da Frente de Pareto real onde o R-NSGA-II tem condições de gerar soluções que dominam aquelas geradas pelo NSGA-II, foi definido aqui o que se chamou de Região de Cobertura do Ponto de Referência. Trata-se da região da Frente de Pareto real<sup>4</sup> para o qual o algoritmo com a informação do ponto de referência produz melhores soluções do que sem essa informação. Vale ainda reforçar que essa ideia da construção de uma Região de Cobertura é uma proposição do autor dessa tese, uma vez que não foi encontrado na literatura nenhum trabalho envolvendo informações de preferência nos POMs de OE adotados e/ou procedimentos para definir uma região de interesse (ROI, do inglês *Region of Interest* (PURSHOUSE et al., 2014)).

Para detectar a Região de Cobertura do Ponto de Referência de cada problema, um experimento inicial foi realizado da seguinte forma: para cada uma das Treliças de 10, 25, 60 e 72 Barras (casos contínuo e discreto) foram realizadas 10 execuções independentes do R-NSGA-II, do R-GDE3 e do R-GDE3+APM com  $\epsilon \in \{0,01; 0,005; 0,001; 0,0001\}$ . O mesmo procedimento foi feito para o problema da Treliça de 942 Barras (casos contínuo e discreto), entretanto com 5 execuções independentes devido ao alto custo computacional associado à resolução desse problema.

Após isso, comparou-se a Frente de Pareto real com as soluções não-dominadas da união de todos os *SPOs* obtidos do problema e estimou-se a Região de Cobertura do Ponto de Referência como a região onde predominava a dominância dessas soluções. A Figura 10.3 mostra essa comparação para o problema contínuo da Treliça de 10 Barras como exemplo, onde o gráfico em preto indica a Frente de Pareto real e o vermelho as soluções não-dominadas da união dos 120 *SPOs* obtidos. Os demais parâmetros dos algoritmos foram mantidos os mesmos.

A Região de Cobertura do Ponto de Referência foi definida em termos de intervalos da função objetivo  $f_2$ . Por exemplo, a Região de Cobertura do Ponto de Referência do problema contínuo da Treliça de 10 Barras foi definida como as soluções cujo valor da função objetivo  $f_2$  esteja dentro do intervalo  $[1,91; 2,085]$ . Isso porque as soluções da

---

<sup>4</sup>Soluções não-dominadas da união de todos os *SPOs* obtidos por todas as execuções de todos os MOEAs para cada problema, sem a inclusão de preferências. Ela foi obtida para o cálculo da medida IGD no Capítulo 9.

Frente de Pareto real cujo valor da função objetivo  $f_2$  esteja dentro desse intervalo são geralmente dominadas por uma ou mais soluções obtidas por um dos algoritmos avaliados: R-NSGA-II, R-GDE3 e R-GDE3+APM (Figura 10.3). Fora dessa região, a informação do ponto de referência não produziu soluções que dominassem as soluções da Frente de Pareto real. A Tabela 10.2 mostra a Região de Cobertura do Ponto de Referência estimada para cada problema.

Tabela 10.2: Região de Cobertura do Ponto de Referência das Treliças de 10, 25, 60, 72 e 942 Barras (casos contínuo e discreto) em termos de intervalo da função objetivo  $f_2$ .

| Problema            | Intervalo de $f_2$ |
|---------------------|--------------------|
| 10 Barras Contínuo  | [1,91; 2,085]      |
| 10 Barras Discreto  | -                  |
| 25 Barras Contínuo  | [0,3405; 0,362]    |
| 25 Barras Discreto  | -                  |
| 60 Barras Contínuo  | $\geq 0,96$        |
| 60 Barras Discreto  | $\geq 1,035$       |
| 72 Barras Contínuo  | [0,226; 0,283]     |
| 72 Barras Discreto  | [0,206; 0,3]       |
| 942 Barras Contínuo | $\geq 3,55$        |
| 942 Barras Discreto | $\geq 3,35$        |

Como pode ser visto na Tabela 10.2, as Regiões de Cobertura do Ponto de Referência das Treliças de 10 e 25 Barras (caso discreto) foram vazias. Isto significa que os algoritmos R-NSGA-II, R-GDE3 e R-GDE3+APM não produzem soluções melhores que os algoritmos NSGA-II, GDE3 e GDE3+APM na vizinhança do ponto de referência. Optou-se então de se retirar esses dois problemas do rol desse experimento, uma vez que a inclusão de informações de preferência não gerou nenhuma solução melhor do que as obtidas sem essas informações. A Figura 10.4 mostra essa situação.

Para os demais problemas, uma vez que a Região de Cobertura do Ponto de Referência foi definida, deve-se pensar em como construir as regiões de interesse para simular as preferências do tomador de decisão. Na literatura, não foi encontrado nenhum trabalho envolvendo alguma definição de regiões de interesse nas Treliças de 10, 25, 60, 72 e 942 Barras (casos contínuo e discreto). Como afirmado em (ZAVALA et al., 2014), existem poucos trabalhos na literatura que associam MOEAs com a incorporação de informações de preferências do usuário em POMs de OE. Em dois desses poucos trabalhos, (SANCHIS et al., 2008; SANCHIS et al., 2010) simulam a preferência do tomador de decisão em um problema de uma Treliça de 3- Barras através da definição de 6 intervalos de preferência

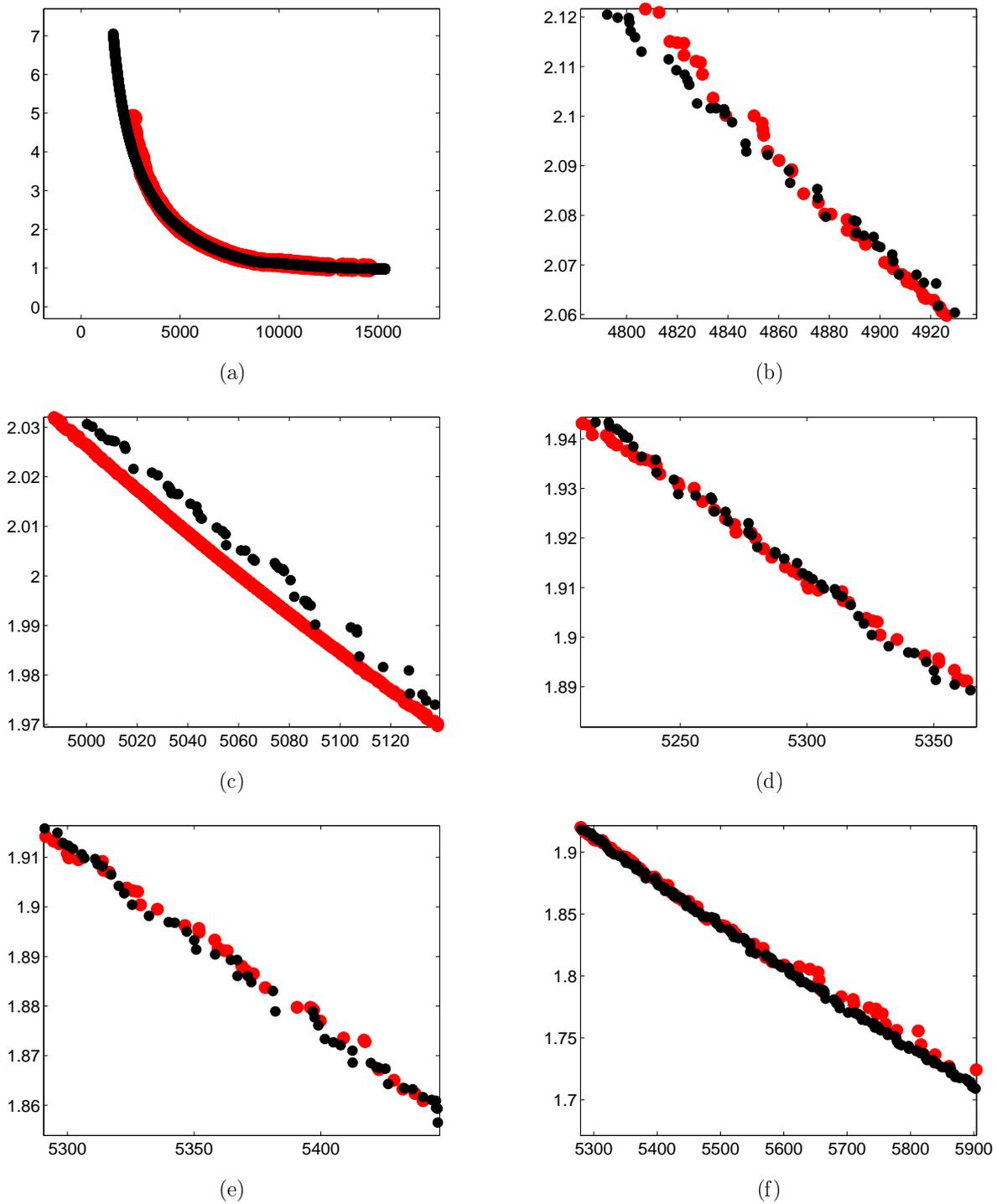
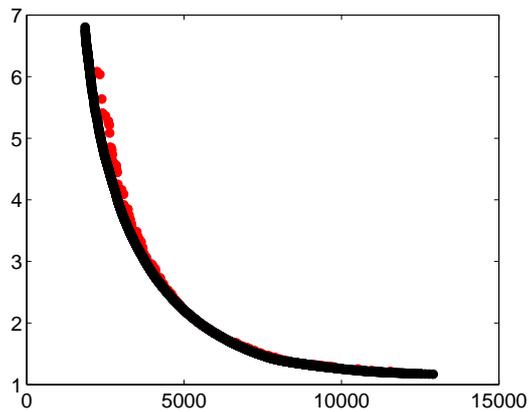
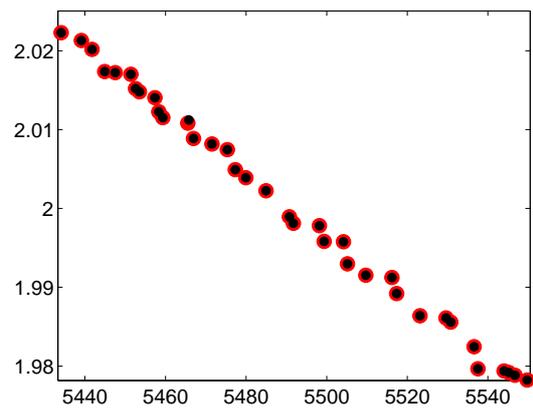


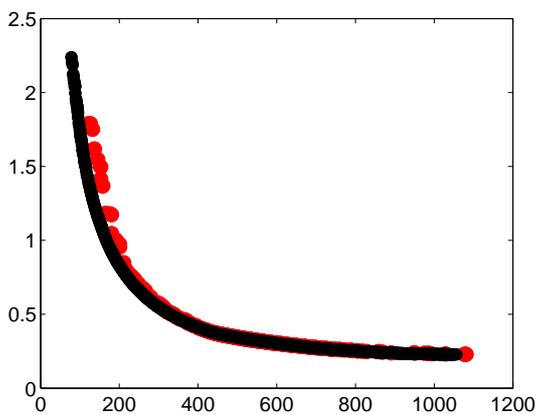
Figura 10.3: Região de Cobertura do Ponto de Referência do problema contínuo da Treliça de 10 Barras: em preto, aparece a Frente de Pareto real e em vermelho as soluções não-dominadas da união dos 120 *SPOs* obtidos por cada algoritmo R-NSGA-II, R-GDE3 e R-GDE3+APM para cada valor de  $\epsilon \in \{0,01; 0,005; 0,001; 0,0001\}$ . As Figuras 10.3b, 10.3c, 10.3d, 10.3e e 10.3f são aproximações da Figura 10.3a. Pode ser observado que soluções da Frente de Pareto real cujo valor da função objetivo  $f_2$  esteja dentro do intervalo  $[1,91; 2,085]$  são predominantemente dominadas por uma ou mais soluções obtidas por um dos algoritmos R-NSGA-II, R-GDE3 e R-GDE3+APM (Figuras 10.3b, 10.3c e 10.3d). Fora dessa região, as soluções obtidas com a utilização da informação do ponto de referência não-dominam as soluções da Frente de Pareto real (Figuras 10.3a, 10.3b, 10.3e e 10.3f).



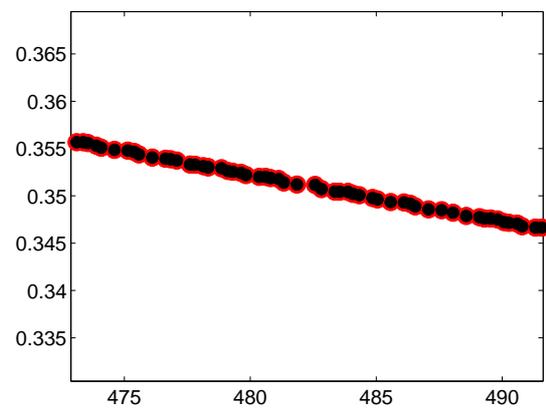
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 10.4: Soluções do Caso Discreto dos Problemas das Treliças de 10 (Figuras 10.4a e 10.4b) e 25 (Figuras 10.4c e 10.4d) Barras, onde as Figuras 10.4b e 10.4d são aproximações das Figuras 10.4a e 10.4c, respectivamente. Esses problemas tiveram suas Regiões de Cobertura do Ponto de Referência vazias. Isto porque os algoritmos R-NSGA-II, R-GDE3 e R-GDE3+APM não produzem soluções que dominam aquelas obtidas pelos algoritmos NSGA-II, GDE3 e GDE3+APM na vizinhança do ponto de referência (Figuras 10.4b e 10.4d) e soluções piores fora dessa vizinhança (Figuras 10.4a e 10.4c).

nas funções objetivos, os classificando como HD *Highly Desirable*, D *Desirable*, T *Tolerable*, U *Undesirable*, HU *Highly Undesirable* e UNA *Unacceptable*.

Assim, para simular preferências do tomador de decisão neste experimento optou-se por adotar um procedimento similar aos utilizados em (SANCHIS et al., 2008; SANCHIS et al., 2010). Como a Região de Cobertura do Ponto de Referência foi definida aqui em termos da função objetivo  $f_2$ , dois dos intervalos de preferência utilizados em (SANCHIS et al., 2008; SANCHIS et al., 2010) foram adotados: (HD *Highly Desirable* e UNA *Unacceptable*), ambos na função objetivo  $f_2$ . Definido então o intervalo de preferência HD pelo tomador de decisão, todas as soluções obtidas por um dos algoritmos R-NSGA-II, R-GDE3 e R-GDE3+APM são classificadas em dois grupos: aquelas cujo valor de  $f_2$  está dentro do intervalo HD e aquelas cujo valor de  $f_2$  está fora (neste caso, as soluções estão no intervalo UNA). Adota-se aqui como intervalo de preferência HD a Região de Cobertura do Ponto de Referência definida na Tabela 10.2. O valor de  $\epsilon$  foi então escolhido para cada algoritmo em cada problema como aquele cujo resultado do *SPO* obtiver o melhor desempenho neste intervalo.

É indicado em (PURSHOUSE et al., 2014) que, apesar da existência de diversos trabalhos na literatura sobre utilização de informações de preferências em MOEAs, existem poucos trabalhos tratando de medidas de desempenho específicas para este fim. Em seu texto ele cita o trabalho de (MOHAMMADI et al., 2013) como uma notável exceção, o qual conclui que medidas tradicionais podem ser usadas considerando apenas as soluções pertencentes à região de preferência do usuário. As medidas Hipervolume e IGD foram as adotadas nos experimentos de (MOHAMMADI et al., 2013).

Assim como feito para a escolha dos parâmetros no Capítulo 9 (Ver Apêndice A), a medida Hipervolume foi adotada aqui para a escolha do valor de  $\epsilon$ . Com os *SPOs* normalizados, novamente cada função objetivo ficou avaliada entre 0 e 1 e o ponto (1,1) foi tomado como ponto de referência para o cálculo do Hipervolume. O valor de  $\epsilon$  escolhido (Tabela 10.2) será aquele cuja média dos Hipervolumes foi a maior. Foram selecionadas apenas soluções do *SPO* que estão no intervalo de preferência HD. As Tabelas 10.3, 10.4 e 10.5 mostram as médias do Hipervolume normalizado obtido para cada  $\epsilon$  por cada algoritmo em cada problema, sendo escolhido para este experimento aquele que produziu maior média.

Tabela 10.3: Médias do Hipervolume normalizado obtido para cada  $\epsilon$  pelo R-GDE3+APM dentro do intervalo HD da Tabela 10.2.

| Problema            | $\epsilon = 0,01$ | $\epsilon = 0,005$ | $\epsilon = 0,001$ | $\epsilon = 0,0001$ |
|---------------------|-------------------|--------------------|--------------------|---------------------|
| 10 Barras Contínuo  | <b>0,81147</b>    | 0,63806            | 0,62663            | 0,64754             |
| 25 Barras Contínuo  | <b>0,62635</b>    | 0,60576            | 0,60483            | 0,59822             |
| 60 Barras Contínuo  | <b>0,72821</b>    | 0,71866            | 0,71048            | 0,71399             |
| 60 Barras Discreto  | 0,66069           | 0,65707            | 0,66125            | <b>0,66314</b>      |
| 72 Barras Contínuo  | <b>0,69366</b>    | 0,69139            | 0,67021            | 0,68715             |
| 72 Barras Discreto  | <b>0,66468</b>    | 0,65947            | 0,65384            | 0,66122             |
| 942 Barras Contínuo | 0,84684           | 0,84427            | <b>0,87137</b>     | 0,83319             |
| 942 Barras Discreto | <b>0,87369</b>    | 0,85967            | 0,83975            | 0,86681             |

Tabela 10.4: Médias do Hipervolume normalizado obtido para cada  $\epsilon$  pelo R-GDE3 dentro do intervalo HD da Tabela 10.2.

| Problema            | $\epsilon = 0,01$ | $\epsilon = 0,005$ | $\epsilon = 0,001$ | $\epsilon = 0,0001$ |
|---------------------|-------------------|--------------------|--------------------|---------------------|
| 10 Barras Contínuo  | 0,78884           | <b>0,80145</b>     | 0,75815            | 0,77110             |
| 25 Barras Contínuo  | <b>0,62412</b>    | 0,59165            | 0,60597            | 0,60483             |
| 60 Barras Contínuo  | <b>0,72614</b>    | 0,72413            | 0,70376            | 0,72191             |
| 60 Barras Discreto  | <b>0,66511</b>    | 0,65919            | 0,66328            | 0,65963             |
| 72 Barras Contínuo  | <b>0,69731</b>    | 0,67401            | 0,68501            | 0,69324             |
| 72 Barras Discreto  | <b>0,66033</b>    | 0,65875            | 0,65901            | 0,65913             |
| 942 Barras Contínuo | <b>0,87013</b>    | 0,85904            | 0,82803            | 0,84570             |
| 942 Barras Discreto | <b>0,86289</b>    | 0,85351            | 0,85973            | 0,85921             |

Tabela 10.5: Médias do Hipervolume normalizado obtido para cada  $\epsilon$  pelo R-NSGA-II dentro do intervalo HD da Tabela 10.2.

| Problema            | $\epsilon = 0,01$ | $\epsilon = 0,005$ | $\epsilon = 0,001$ | $\epsilon = 0,0001$ |
|---------------------|-------------------|--------------------|--------------------|---------------------|
| 10 Barras Contínuo  | <b>0,85221</b>    | 0,82170            | 0,81259            | 0,81078             |
| 25 Barras Contínuo  | <b>0,66406</b>    | 0,62673            | 0,58217            | 0,59309             |
| 60 Barras Contínuo  | <b>0,71866</b>    | 0,70666            | 0,70101            | 0,69567             |
| 60 Barras Discreto  | 0,67556           | <b>0,67582</b>     | 0,66687            | 0,66722             |
| 72 Barras Contínuo  | <b>0,71672</b>    | 0,67911            | 0,66430            | 0,64176             |
| 72 Barras Discreto  | <b>0,67601</b>    | 0,65846            | 0,64684            | 0,65298             |
| 942 Barras Contínuo | 0,87478           | <b>0,90190</b>     | 0,89459            | 0,89554             |
| 942 Barras Discreto | 0,88580           | <b>0,89856</b>     | 0,89172            | 0,89199             |

## 10.2 Análise dos Resultados

Cada algoritmo R-NSGA-II, R-GDE3 e R-GDE3+APM foi executado 100 vezes para cada um dos problemas com orçamento de 50000 avaliações de cada uma das funções objetivo (50 indivíduos e 1000 gerações). Os *SPOs* obtidos contém apenas as soluções não-dominadas factíveis que pertencem ao intervalo de preferência HD exibido na Tabela 10.2. As médias e os desvios-padrão do Hipervolume e do IGD dos *SPOs* normalizados

são exibidos na Tabela 10.6 e as médias e os desvios-padrão das avaliações comparativas de cada uma das 100 execuções dos algoritmos R-GDE3+APM, R-GDE3 e R-NSGA-II, sem normalização, nas medidas binárias *Coverage Metric* (CM) e  $\epsilon$ -*Indicator* ( $I_\epsilon$ ) são exibidos na Tabela 10.7. A Figura 10.6 apresenta os Perfis de Desempenho dos resultados das medidas unárias e binárias apresentadas por cada algoritmo R-GDE3+APM, R-GDE3 e R-NSGA-II, juntamente com as áreas abaixo das curvas, normalizadas pela maior delas.

Em relação às medida EAF, as Figuras 10.7, 10.8, 10.9 e 10.10 apresentam as curvas *best*, *median* e *worst* formadas pelas soluções encontradas pelos algoritmos R-NSGA-II, R-GDE3 e R-GDE3+APM nos problemas analisados aqui. As curvas EAF *best*, *median* e *worst* para o algoritmo R-GDE3+APM são apresentadas na Figura 10.11, enquanto as Figuras 10.12 e 10.13 apresentam o mesmo em relação ao R-GDE3 e ao R-NSGA-II. A seguir são apresentadas algumas considerações sobre essa análise.

### 10.2.1 R-GDE3+APM e R-GDE3

Com exceção da medida  $I_\epsilon$  na Treliça de 60 Barras (caso discreto), o teste de Wilcoxon não foi capaz de detectar diferenças estatisticamente significativas entre os resultados do algoritmo R-GDE3+APM e do algoritmo R-GDE3 (Tabelas 10.6 e 10.7). Mesmo assim, a inclusão da técnica APM fornece um melhoramento considerável no desempenho do algoritmo R-GDE3+APM em relação ao algoritmo R-GDE3 (Figura 10.6). A medida CM foi a única em que o R-GDE3 obteve melhor desempenho do que o R-GDE3+APM na maioria dos problemas (Tabela 10.7). Entretanto, o desempenho global nessa medida do algoritmo R-GDE3+APM foi melhor, o que pode ser visto na maior área alcançada pelo algoritmo R-GDE3+APM no Perfil de Desempenho da medida CM quando comparado ao R-GDE3 (Figura 10.6).

Em relação à medida EAF, as curvas *best* e *median* dos dois algoritmos foram similares em quase todos os problemas (Figuras 10.7, 10.8, 10.9 e 10.10). As maiores diferenças foram observadas nas curvas *worst*, onde o algoritmo R-GDE3+APM obteve uma curva com maior Hipervolume nas Treliças de 25 Barras (caso contínuo), 60 e 72 Barras (ambos os casos) e 942 Barras (caso discreto), indicando uma maior estabilidade do algoritmo R-GDE3+APM nesses problemas. Nos demais, o algoritmo R-GDE3 obteve uma curva com maior Hipervolume na curva *worst*.

Como o R-GDE3+APM obteve melhor desempenho nesse grupo de problemas com

relação às medidas adotadas (Figura 10.6) e menor diferença entre as curvas *best* e *worst* na maioria dos problemas, pode-se concluir que novamente o acoplamento da técnica APM produziu uma melhora nos resultados obtidos quando comparado à técnica de tratamento de restrições original do GDE3.

### 10.2.2 *R-GDE3+APM e R-NSGA-II*

Em todos os problemas e em todas as medidas unárias e binárias o desempenho do algoritmo R-NSGA-II é melhor que o desempenho do algoritmo R-GDE3+APM, com diferenças estatisticamente significativas entre os resultados segundo o teste de Wilcoxon (a única exceção foi na medida Hipervolume na Treliça de 60 Barras (caso contínuo) - Tabelas 10.6, 10.7 e Figura 10.6). Em relação à medida EAF, o algoritmo R-NSGA-II tem Hipervolume maior do que o algoritmo R-GDE3+APM em todas as curvas e em todos os problemas (Figuras 10.7, 10.8, 10.9 e 10.10).

Uma causa desse bom desempenho do R-NSGA-II está na natureza do operador SBX, que tende a criar filhos próximos aos pais (DEB; AGRAWAL, 1995; SHARMA et al., 2007). O operador SBX tem a habilidade de levar o R-NSGA-II a encontrar indivíduos bem mais próximos do ponto de referência do que os indivíduos obtidos pelo R-GDE3+APM. Para exemplificar essa capacidade do SBX, foi escolhido o caso contínuo do problema da Treliça de 10 Barras.

As Figuras 10.5a e 10.5b mostram as populações do R-GDE3+APM e R-NSGA-II comparadas em uma das 100 execuções independentes. Na 50<sup>a</sup> geração, a população do R-GDE3+APM já dominava a população do R-NSGA-II, além de estar mais próxima ao ponto de referência. Entretanto, o R-GDE3+APM perdeu diversidade, fazendo com que sua população se concentrasse naquela região. Por outro lado, o R-NSGA-II continuou a fazer aproximações cada vez melhores ao ponto de referência. Como consequência, na 250<sup>a</sup> geração a população do R-GDE3+APM já estava dominada pela população do R-NSGA-II.

Sabe-se que a Evolução Diferencial é uma poderosa ferramenta para otimização com variáveis contínuas, de convergência rápida e poucos parâmetros de controle, ideal para aplicações do mundo real. Entretanto, de acordo com *No Free Lunch Theorems for Optimization* (WOLPERT; MACREADY, 1997), nenhum algoritmo pode executar bem em todos os tipos de problemas. Uma característica da Evolução Diferencial que fez com

que o R-GDE3+APM tivesse um desempenho inferior ao R-NSGA-II foi a de que ela, frequentemente, perde diversidade devido à sua rápida convergência. Como ilustrado na Figura 10.5, em uma situação de orçamento mais limitado é bem provável que o algoritmo R-GDE3+APM obtenha melhor desempenho do que o R-NSGA-II.

Também é possível que possam existir outros valores de  $\epsilon$  que, pelo menos, diminua a diferença entre os resultados do R-GDE3+APM e do R-NSGA-II. Apesar dessa possibilidade, MOEAs geralmente costumam ser muito sensíveis a esse tipo de parâmetro (Figuras 10.5c e 10.5d), fazendo com que a busca por valores de  $\epsilon$  que otimizem seu desempenho seja árdua e pouco produtiva. Os valores adotados para o parâmetro  $\epsilon$  nesse experimento foram extraídos de (DEB; SUNDAR, 2006), onde o R-NSGA-II é proposto. Como este é um trabalho seminal envolvendo Evolução Diferencial e pontos de referência (no mesmo sentido do R-NSGA-II) nestes problemas, a adoção desses mesmos valores foi a alternativa encontrada para o ponto de partida.

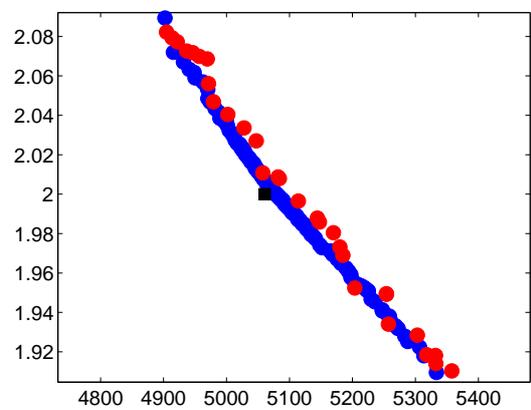
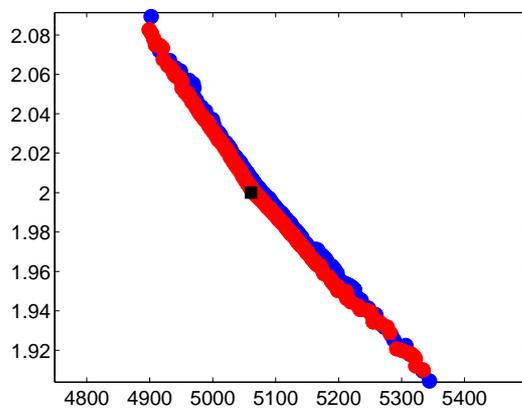
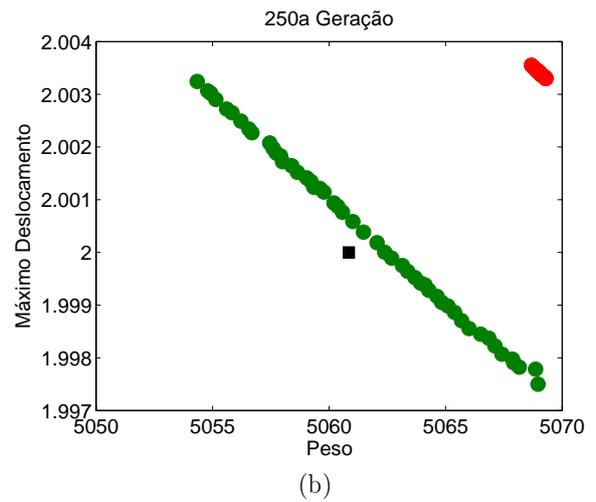
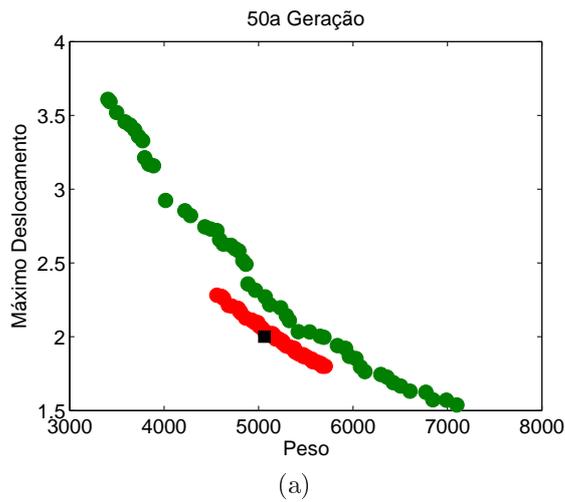


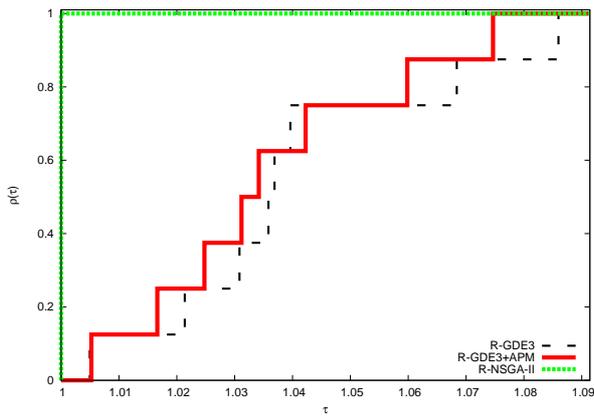
Figura 10.5: 10.5a e 10.5b: Comparação entre as populações do R-GDE3+APM (Vermelho) e R-NSGA-II (Verde) do caso contínuo do problema da Treliça de 10 Barras. 10.5c e 10.5d: R-GDE3+APM executado com  $\epsilon = 0,018$ ,  $\epsilon = 0,01$  e  $\epsilon = 0,02$ .

Tabela 10.6: Média e Desvio Padrão (DP) dos Resultados do Hipervolume (H) e do IGD para o Experimento 3.

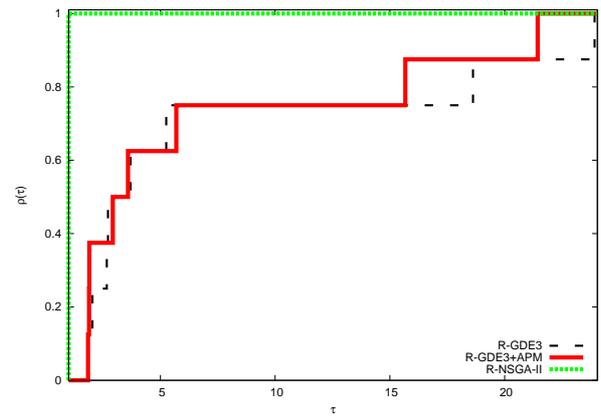
|                 |       | R-GDE3+APM                 | R-GDE3                     | R-NSGA-II                                 |
|-----------------|-------|----------------------------|----------------------------|-------------------------------------------|
| Hipervolume     |       |                            |                            |                                           |
| 10 B. Contínuo  | Média | 0.8345(+)                  | 0.8258(+)                  | <b>0.8968</b>                             |
|                 | DP    | 0.1206                     | 0.1027                     | 0.0105                                    |
| 25 B. Contínuo  | Média | 0.6367(+)                  | 0.6316(+)                  | <b>0.6748</b>                             |
|                 | DP    | 0.0381                     | 0.0468                     | 0.0031                                    |
| 60 B. Contínuo  | Média | 0.7264                     | 0.7266                     | <b>0.7302</b>                             |
|                 | DP    | 0.0239                     | 0.0279                     | 0.0105                                    |
| 60 B. Discreto  | Média | 0.6457(+)                  | 0.6388(+)                  | <b>0.6617</b>                             |
|                 | DP    | 0.0287                     | 0.0386                     | 0.0105                                    |
| 72 B. Contínuo  | Média | 0.6876(+)                  | 0.6858(+)                  | <b>0.7111</b>                             |
|                 | DP    | 0.0273                     | 0.0322                     | 0.0081                                    |
| 72 B. Discreto  | Média | 0.6252(+)                  | 0.6223(+)                  | <b>0.6356</b>                             |
|                 | DP    | 0.0108                     | 0.0185                     | 0.0026                                    |
| 942 B. Contínuo | Média | 0.8660(+)                  | 0.8682(+)                  | <b>0.9026</b>                             |
|                 | DP    | 0.0344                     | 0.0329                     | 0.0045                                    |
| 942 B. Discreto | Média | 0.8528(+)                  | 0.8531(+)                  | <b>0.8794</b>                             |
|                 | DP    | 0.0271                     | 0.0263                     | 0.0058                                    |
| IGD             |       |                            |                            |                                           |
| 10 B. Contínuo  | Média | $8.0556 \times 10^{-4}(+)$ | $8.9879 \times 10^{-4}(+)$ | <b><math>3.7570 \times 10^{-5}</math></b> |
|                 | DP    | 0.0017                     | 0.0014                     | $3.1399 \times 10^{-5}$                   |
| 25 B. Contínuo  | Média | $1.2627 \times 10^{-4}(+)$ | $1.5001 \times 10^{-4}(+)$ | <b><math>8.0553 \times 10^{-6}</math></b> |
|                 | DP    | $2.1195 \times 10^{-4}$    | $2.6417 \times 10^{-4}$    | $3.1533 \times 10^{-6}$                   |
| 60 B. Contínuo  | Média | 0.0013(+)                  | 0.0012(+)                  | <b><math>2.2831 \times 10^{-4}</math></b> |
|                 | DP    | 0.0012                     | 0.0013                     | $7.6953 \times 10^{-5}$                   |
| 60 B. Discreto  | Média | 0.0010(+)                  | 0.0014(+)                  | <b><math>5.2544 \times 10^{-4}</math></b> |
|                 | DP    | $7.6938 \times 10^{-4}$    | 0.0013                     | $2.2204 \times 10^{-4}$                   |
| 72 B. Contínuo  | Média | $1.6479 \times 10^{-4}(+)$ | $1.6983 \times 10^{-4}(+)$ | <b><math>4.5931 \times 10^{-5}</math></b> |
|                 | DP    | $2.3596 \times 10^{-4}$    | $2.6963 \times 10^{-4}$    | $1.6815 \times 10^{-5}$                   |
| 72 B. Discreto  | Média | 0.0013(+)                  | 0.0014(+)                  | <b><math>6.8698 \times 10^{-4}</math></b> |
|                 | DP    | $5.3741 \times 10^{-4}$    | $8.4912 \times 10^{-4}$    | $1.2999 \times 10^{-4}$                   |
| 942 B. Contínuo | Média | 0.0014(+)                  | 0.0013(+)                  | <b><math>4.7868 \times 10^{-4}</math></b> |
|                 | DP    | $8.1617 \times 10^{-4}$    | $7.7005 \times 10^{-4}$    | $1.3754 \times 10^{-4}$                   |
| 942 B. Discreto | Média | 0.0010(+)                  | 0.0010(+)                  | <b><math>5.4198 \times 10^{-4}</math></b> |
|                 | DP    | $5.5031 \times 10^{-4}$    | $5.1564 \times 10^{-4}$    | $1.3786 \times 10^{-4}$                   |

Tabela 10.7: Média e Desvio Padrão (DP) dos Resultados da CM e do  $I_\epsilon$  dos algoritmos R-GDE3+APM, R-GDE3 e R-NSGA-II, os quais são identificados respectivamente por A, B e C.

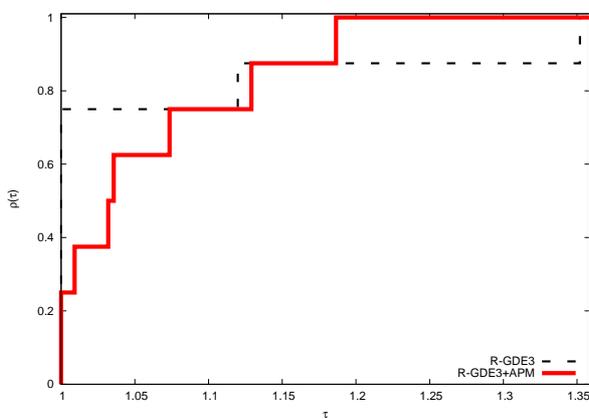
|                     |       | (A,B)         | (B,A)         | (A,C)     | (C,A)                   |
|---------------------|-------|---------------|---------------|-----------|-------------------------|
| CM                  |       |               |               |           |                         |
| 10 Barras Contínuo  | Média | <b>0.5252</b> | 0.4690        | 0.0423(+) | <b>0.9398</b>           |
|                     | DP    | 0.4950        | 0.4953        | 0.1826    | 0.2316                  |
| 25 Barras Contínuo  | Média | <b>0.4579</b> | 0.3387        | 0.0034(+) | <b>0.9423</b>           |
|                     | DP    | 0.4951        | 0.4693        | 0.0133    | 0.2043                  |
| 60 Barras Contínuo  | Média | 0.3928        | <b>0.4217</b> | 0.3495(+) | <b>0.5925</b>           |
|                     | DP    | 0.4068        | 0.4112        | 0.2192    | 0.3225                  |
| 60 Barras Discreto  | Média | 0.4033        | <b>0.4785</b> | 0.3680(+) | <b>0.5009</b>           |
|                     | DP    | 0.3538        | 0.3615        | 0.2615    | 0.3090                  |
| 72 Barras Contínuo  | Média | 0.4720        | <b>0.4871</b> | 0.0443(+) | <b>0.6264</b>           |
|                     | DP    | 0.4484        | 0.4490        | 0.0560    | 0.3888                  |
| 72 Barras Discreto  | Média | 0.1529        | <b>0.1543</b> | 0.0266(+) | <b>0.2933</b>           |
|                     | DP    | 0.1895        | 0.1882        | 0.0278    | 0.1673                  |
| 942 Barras Contínuo | Média | 0.4602        | <b>0.5196</b> | 0.3230(+) | <b>0.7490</b>           |
|                     | DP    | 0.4071        | 0.3979        | 0.1667    | 0.1738                  |
| 942 Barras Discreto | Média | 0.4676        | <b>0.4843</b> | 0.4123(+) | <b>0.6161</b>           |
|                     | DP    | 0.3649        | 0.3562        | 0.1745    | 0.1681                  |
| $I_\epsilon$        |       |               |               |           |                         |
| 10 Barras Contínuo  | Média | <b>1.0137</b> | 1.0165        | 1.0247(+) | <b>1.0002</b>           |
|                     | DP    | 0.0400        | 0.0275        | 0.0479    | 0.0023                  |
| 25 Barras Contínuo  | Média | <b>1.0020</b> | 1.0027        | 1.0074(+) | <b>1.0002</b>           |
|                     | DP    | 0.0024        | 0.0039        | 0.0057    | $8.8450 \times 10^{-4}$ |
| 60 Barras Contínuo  | Média | 1.0360        | <b>1.0333</b> | 1.0832(+) | <b>1.0275</b>           |
|                     | DP    | 0.0481        | 0.0516        | 0.0651    | 0.0136                  |
| 60 Barras Discreto  | Média | <b>1.0227</b> | 1.0399(+)     | 1.0585(+) | <b>1.0125</b>           |
|                     | DP    | 0.0335        | 0.0467        | 0.0475    | 0.0077                  |
| 72 Barras Contínuo  | Média | <b>1.0084</b> | 1.0087        | 1.0135(+) | <b>1.0056</b>           |
|                     | DP    | 0.0096        | 0.0093        | 0.0097    | 0.0045                  |
| 72 Barras Discreto  | Média | <b>1.0101</b> | 1.0121        | 1.0181(+) | <b>1.0055</b>           |
|                     | DP    | 0.0058        | 0.0084        | 0.0093    | 0.0039                  |
| 942 Barras Contínuo | Média | 1.1457        | <b>1.1386</b> | 1.3327(+) | <b>1.0541</b>           |
|                     | DP    | 0.2055        | 0.1984        | 0.2684    | 0.0208                  |
| 942 Barras Discreto | Média | 1.1464        | <b>1.1424</b> | 1.3582(+) | <b>1.0736</b>           |
|                     | DP    | 0.1937        | 0.1895        | 0.2637    | 0.0231                  |



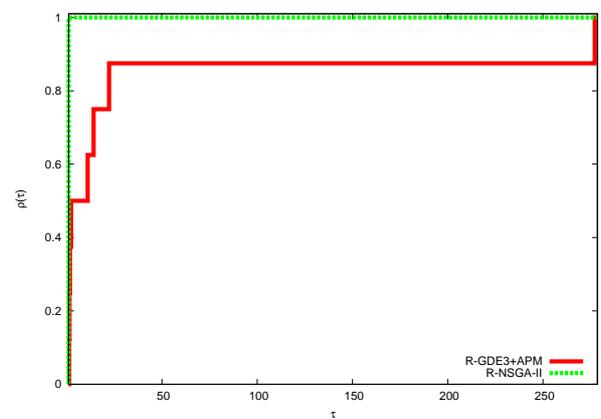
(a) Hipervolume: R-GDE3+APM=0,5802; R-GDE3=0,5291; R-NSGA-II=1



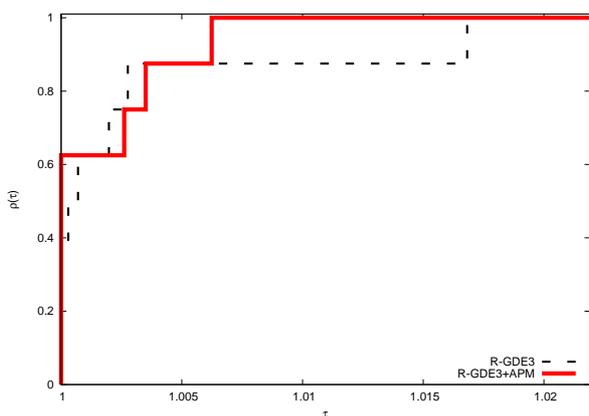
(b) IGD: R-GDE3+APM=0,7439; R-GDE3=0,7123; R-NSGA-II=1



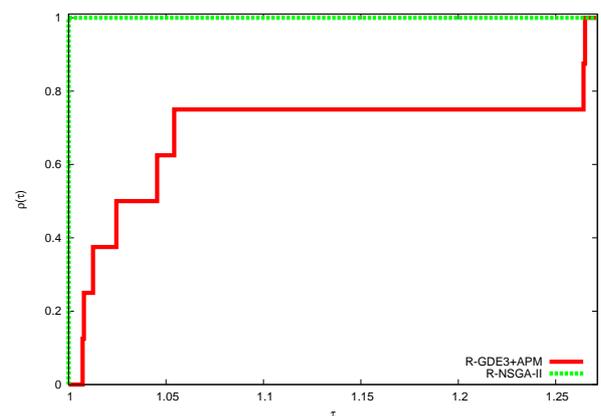
(c) CM: R-GDE3+APM=1; R-GDE3=0,9975



(d) CM: R-GDE3+APM=0,8536; R-NSGA-II=1

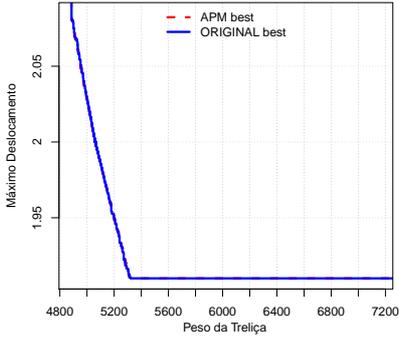


(e)  $I_e$ : R-GDE3+APM=1; R-GDE3=0,9165

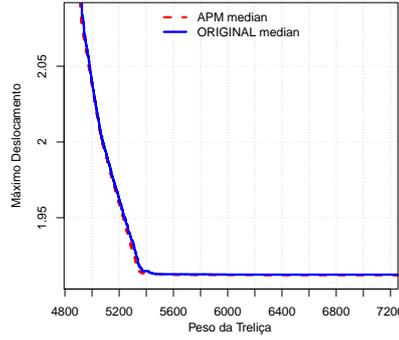


(f)  $I_e$ : R-GDE3+APM=0,6788; R-NSGA-II=1

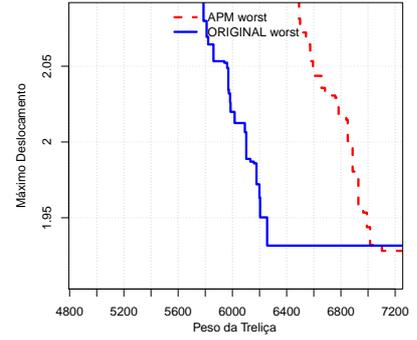
Figura 10.6: Perfis de Desempenho dos resultados obtidos por cada um dos algoritmos R-GDE3+APM, R-GDE3 e R-NSGA-II. As áreas abaixo das curvas, normalizadas pela maior delas, estão indicadas em cada Figura.



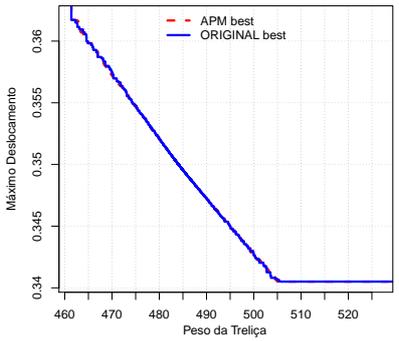
(a) 10 B.:  $H_1=0,9132$  e  $H_2=0,9130$



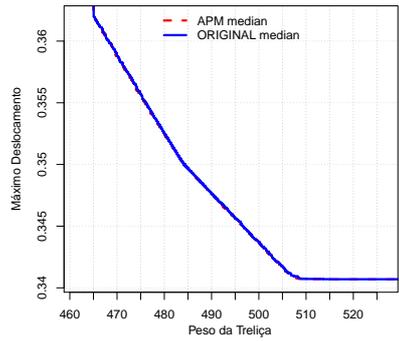
(b) 10 B.:  $H_1=0,8923$  e  $H_2=0,8867$



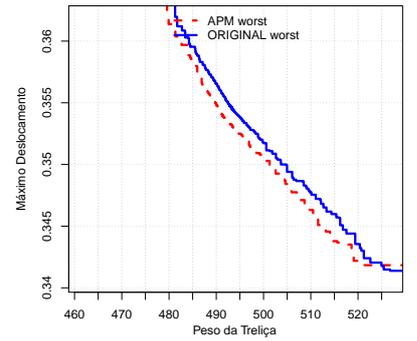
(c) 10 B.:  $H_1=0,1442$  e  $H_2=0,4265$



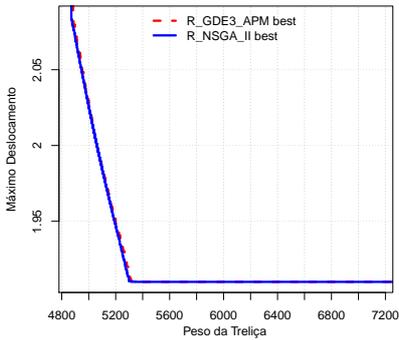
(d) 25 B.:  $H_1=0,6813$  e  $H_2=0,6809$



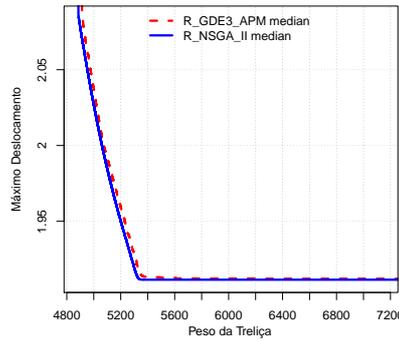
(e) 25 B.:  $H_1=0,6525$  e  $H_2=0,6506$



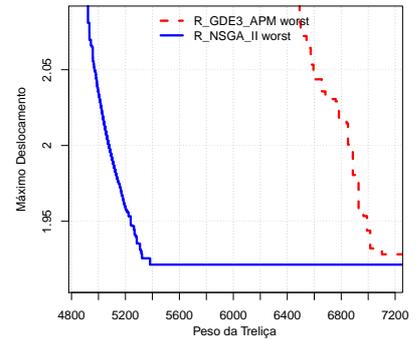
(f) 25 B.:  $H_1=0,4155$  e  $H_2=0,3739$



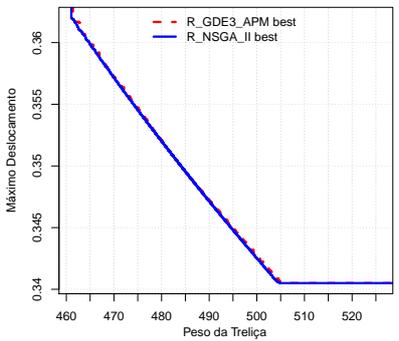
(g) 10 B.:  $H_1=0,9081$  e  $H_2=0,9114$



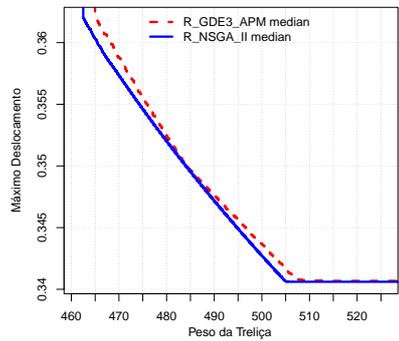
(h) 10 B.:  $H_1=0,8873$  e  $H_2=0,9013$



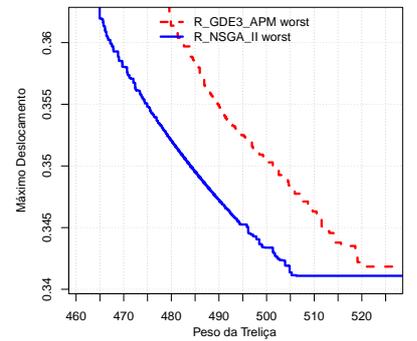
(i) 10 B.:  $H_1=0,1438$  e  $H_2=0,8441$



(j) 25 B.:  $H_1=0,6401$  e  $H_2=0,6449$

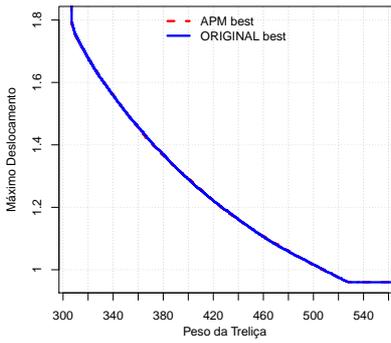


(k) 25 B.:  $H_1=0,6090$  e  $H_2=0,6385$

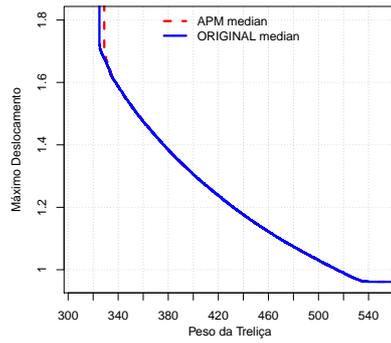


(l) 25 B.:  $H_1=0,3520$  e  $H_2=0,6176$

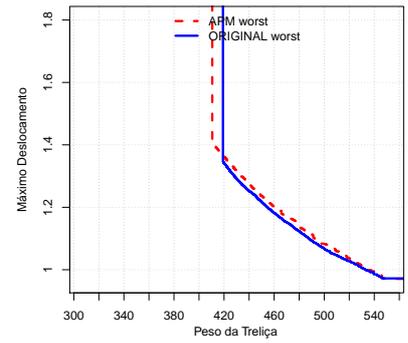
Figura 10.7: Curvas EAF das Treliças de 10 e 25 Barras (caso contínuo): ORIGINAL refere-se ao R-GDE3 e APM ao R-GDE3+APM. Hipervolumes normalizados:  $H_1$  para R-GDE3+APM e  $H_2$  para R-GDE3 e R-NSGA-II.



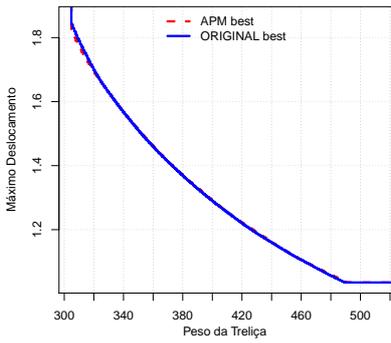
(a)  $H_1=0,6620$  e  $H_2=0,6619$



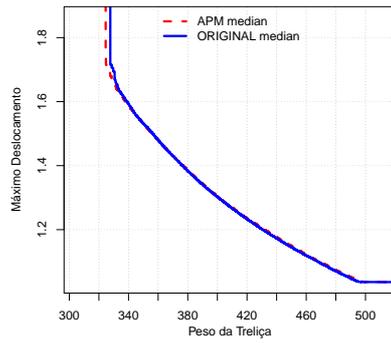
(b)  $H_1=0,6342$  e  $H_2=0,6359$



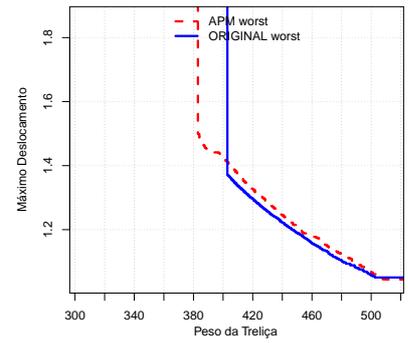
(c)  $H_1=0,4462$  e  $H_2=0,4394$



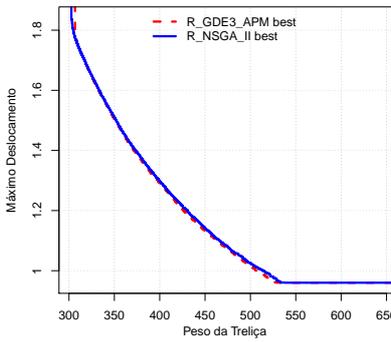
(d)  $H_1=0,6647$  e  $H_2=0,6649$



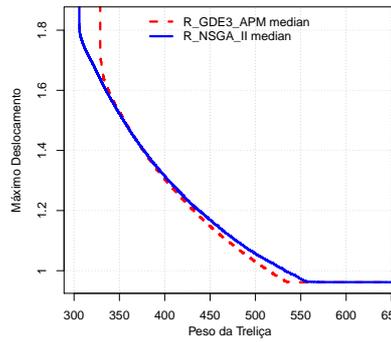
(e)  $H_1=0,6356$  e  $H_2=0,6340$



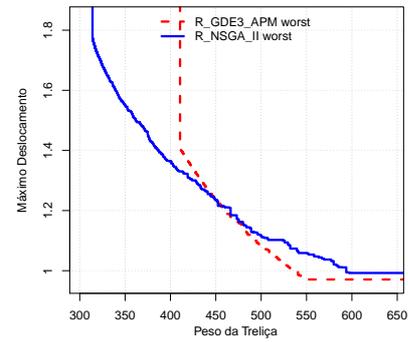
(f)  $H_1=0,4701$  e  $H_2=0,4368$



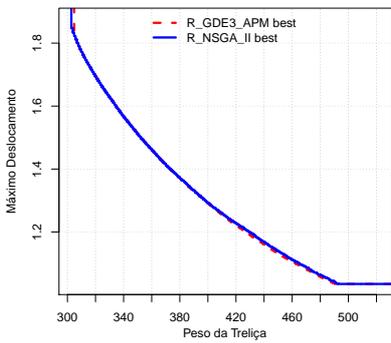
(g)  $H_1=0,7572$  e  $H_2=0,7525$



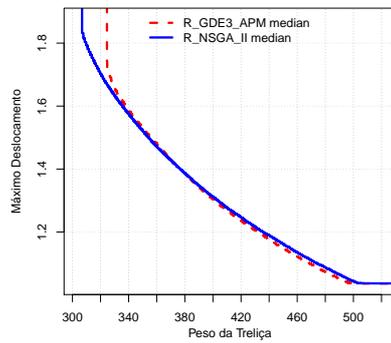
(h)  $H_1=0,7341$  e  $H_2=0,7338$



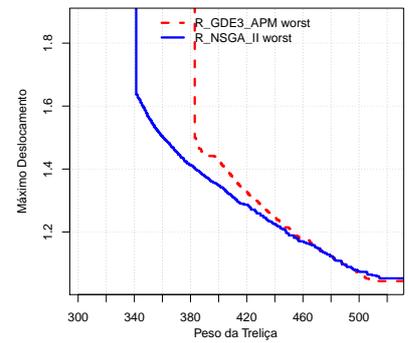
(i)  $H_1=0,5892$  e  $H_2=0,6734$



(j)  $H_1=0,6770$  e  $H_2=0,6744$

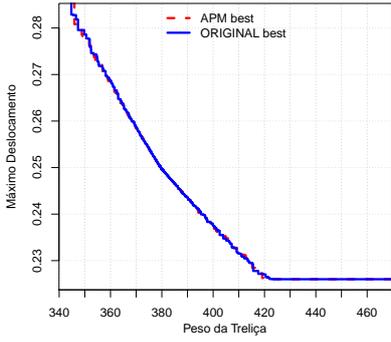


(k)  $H_1=0,6479$  e  $H_2=0,6557$

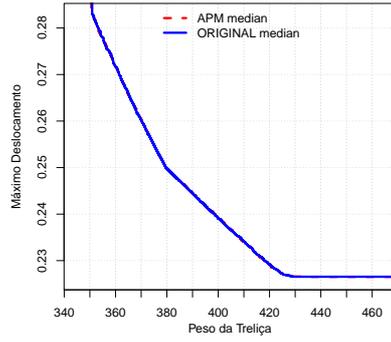


(l)  $H_1=0,4871$  e  $H_2=0,5880$

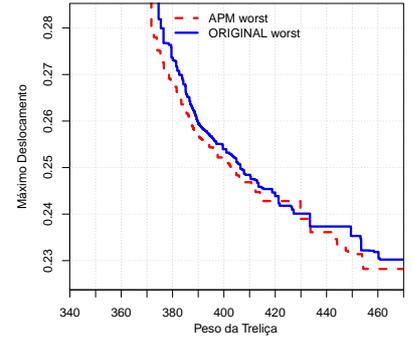
Figura 10.8: Curvas EAF da Treliça de 60 Barras: ORIGINAL refere-se ao R-GDE3 e APM ao R-GDE3+APM. As Figuras (a,b,c,g,h,i) tratam do caso contínuo e (d,e,f,j,k,l) tratam do caso discreto. Hipervolumes normalizados:  $H_1$  para R-GDE3+APM e  $H_2$  para R-GDE3 e R-NSGA-II.



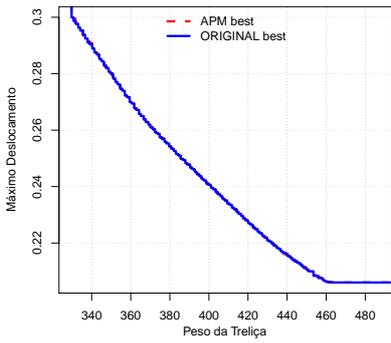
(a)  $H_1=0,7160$  e  $H_2=0,7152$



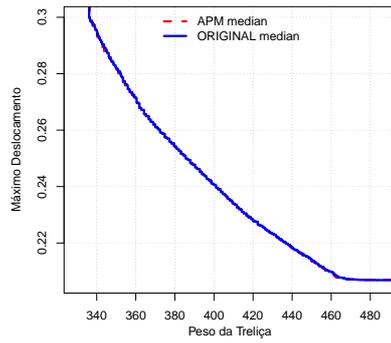
(b)  $H_1=0,6876$  e  $H_2=0,6876$



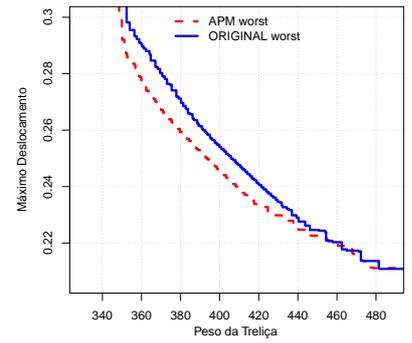
(c)  $H_1=0,4892$  e  $H_2=0,4535$



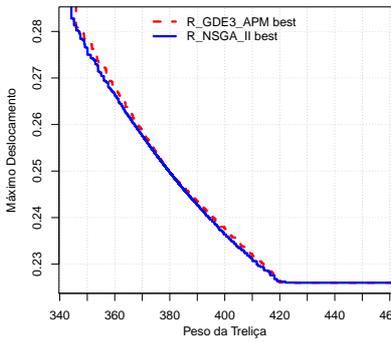
(d)  $H_1=0,6318$  e  $H_2=0,6320$



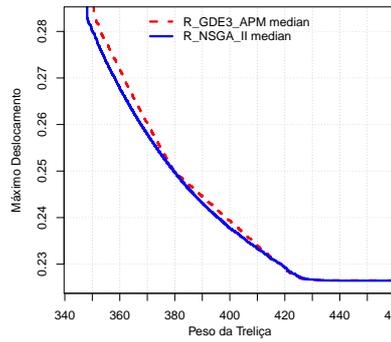
(e)  $H_1=0,6180$  e  $H_2=0,6166$



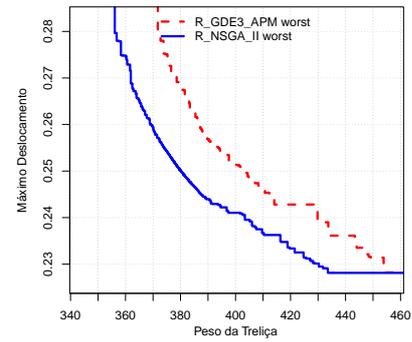
(f)  $H_1=0,5472$  e  $H_2=0,4868$



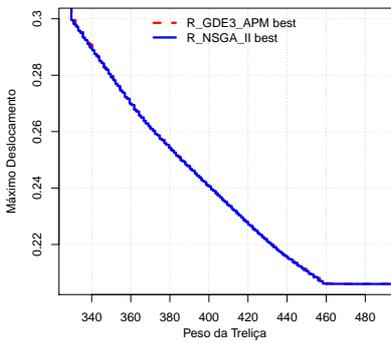
(g)  $H_1=0,6955$  e  $H_2=0,7073$



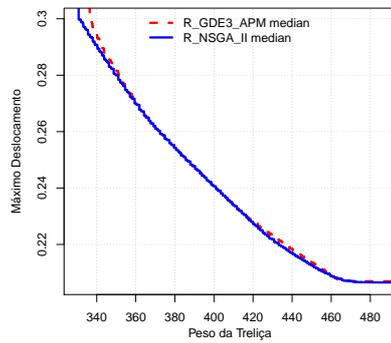
(h)  $H_1=0,6661$  e  $H_2=0,6858$



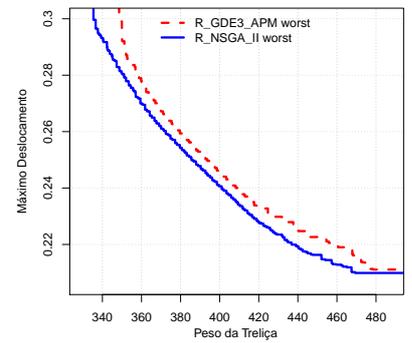
(i)  $H_1=0,4586$  e  $H_2=0,6387$



(j)  $H_1=0,6337$  e  $H_2=0,6349$

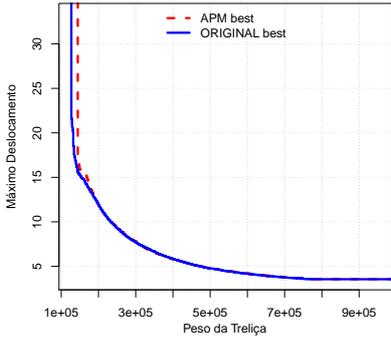


(k)  $H_1=0,6199$  e  $H_2=0,6283$

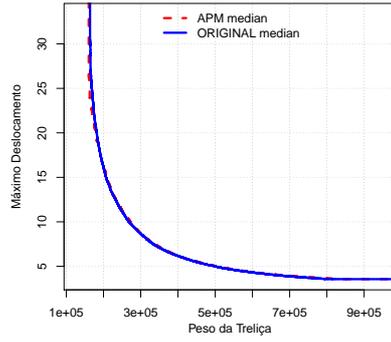


(l)  $H_1=0,5493$  e  $H_2=0,6125$

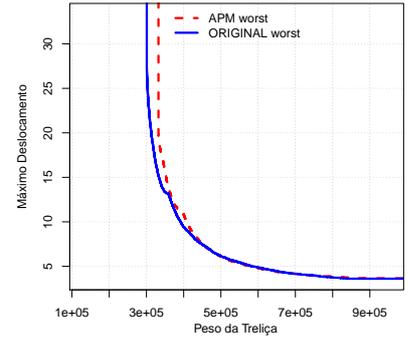
Figura 10.9: Curvas EAF da Treliça de 72 Barras: ORIGINAL refere-se ao R-GDE3 e APM ao R-GDE3+APM. As Figuras (a,b,c,g,h,i) tratam do caso contínuo e (d,e,f,j,k,l) tratam do caso discreto. Hipervolumes normalizados:  $H_1$  para R-GDE3+APM e  $H_2$  para R-GDE3 e R-NSQA-II.



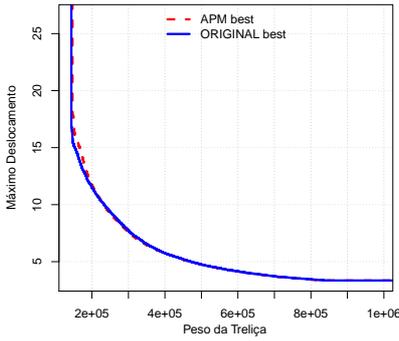
(a)  $H_1=0,8978$  e  $H_2=0,9092$



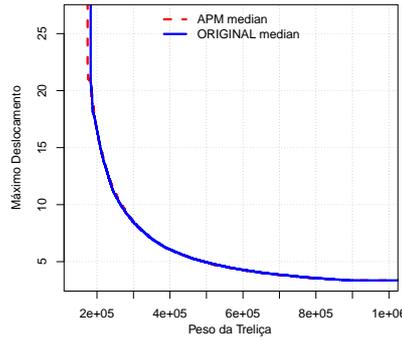
(b)  $H_1=0,8605$  e  $H_2=0,8599$



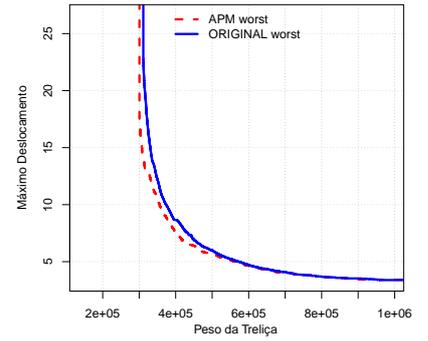
(c)  $H_1=0,6881$  e  $H_2=0,7099$



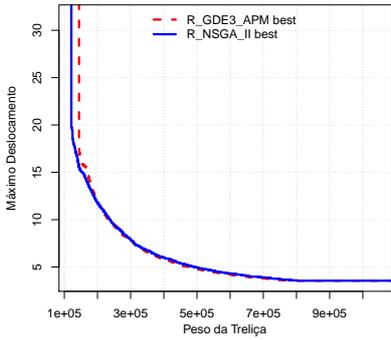
(d)  $H_1=0,8778$  e  $H_2=0,8810$



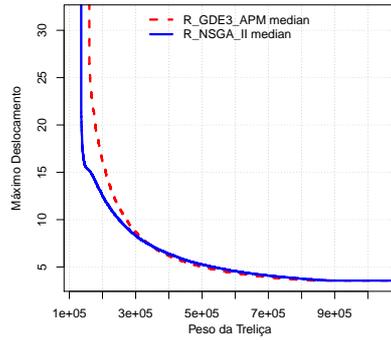
(e)  $H_1=0,8340$  e  $H_2=0,8331$



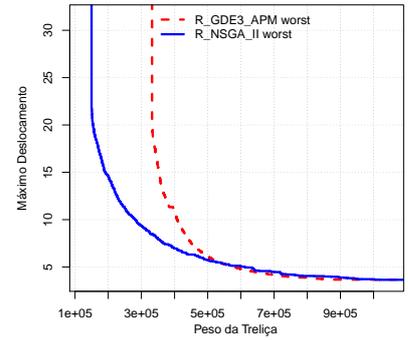
(f)  $H_1=0,7198$  e  $H_2=0,6963$



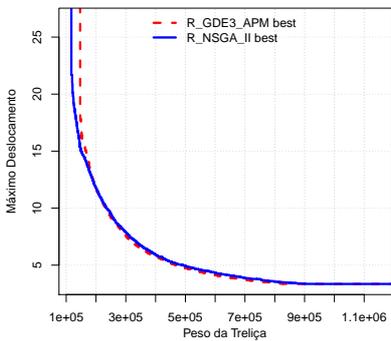
(g)  $H_1=0,8979$  e  $H_2=0,9076$



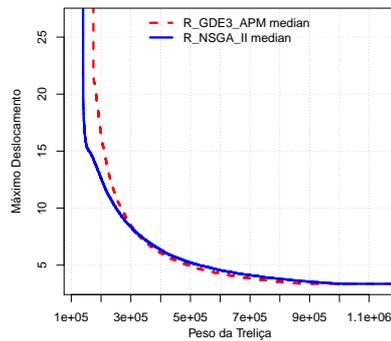
(h)  $H_1=0,8636$  e  $H_2=0,8900$



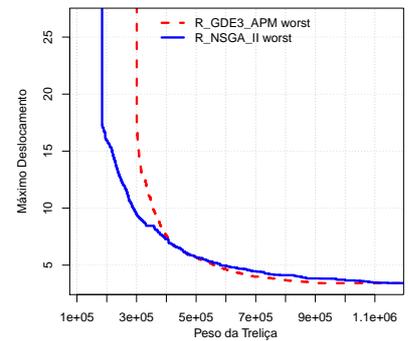
(i)  $H_1=0,7116$  e  $H_2=0,8579$



(j)  $H_1=0,8740$  e  $H_2=0,8758$



(k)  $H_1=0,8389$  e  $H_2=0,8567$



(l)  $H_1=0,7493$  e  $H_2=0,8060$

Figura 10.10: Curvas EAF da Treliça de 942 Barras: ORIGINAL refere-se ao R-GDE3 e APM ao R-GDE3+APM. As Figuras (a,b,c,g,h,i) tratam do caso contínuo e (d,e,f,j,k,l) tratam do caso discreto. Hipervolumes normalizados:  $H_1$  para R-GDE3+APM e  $H_2$  para R-GDE3 e R-NSQA-II.

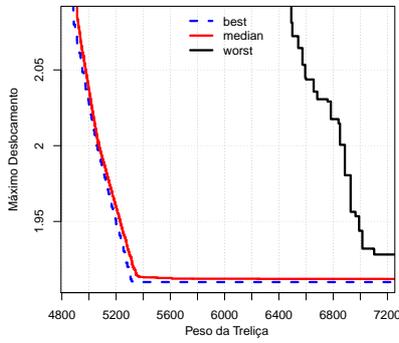
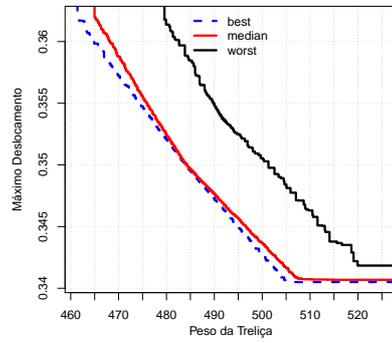
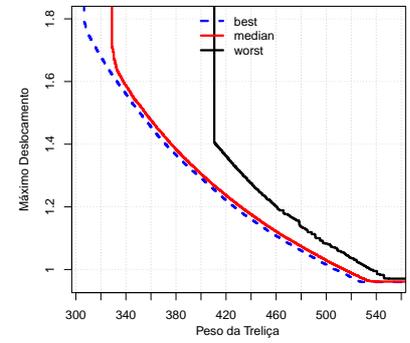
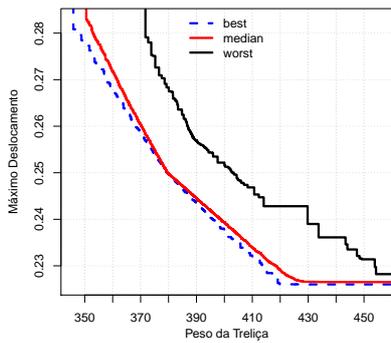
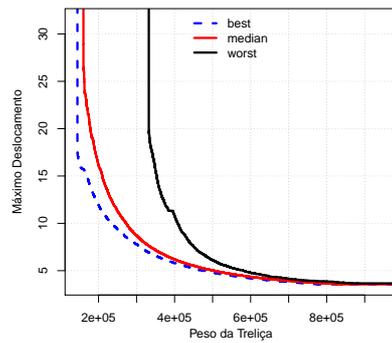
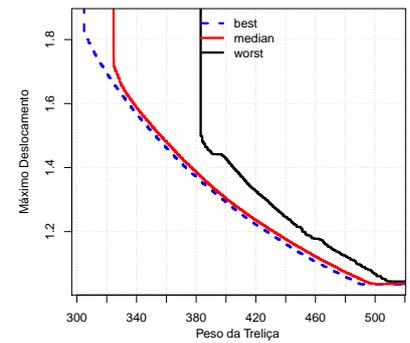
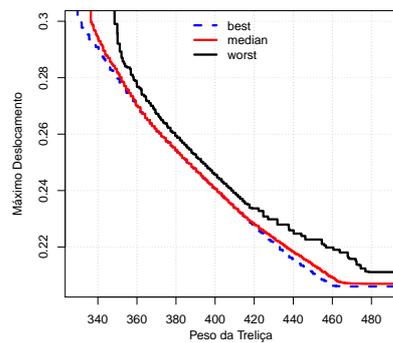
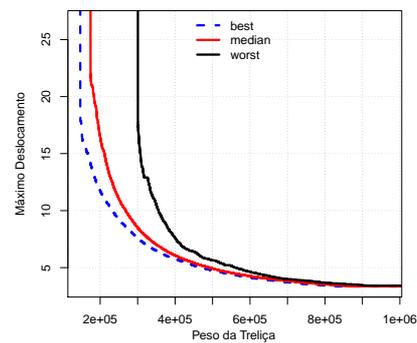
(a)  $Dif=0,7638$ (b)  $Dif=0,2643$ (c)  $Dif=0,1679$ (d)  $Dif=0,2258$ (e)  $Dif=0,1039$ (f)  $Dif=0,1957$ (g)  $Dif=0,0842$ (h)  $Dif=0,0772$ 

Figura 10.11: Curvas EAF do algoritmo R-GDE3+APM das Treliças de 10 (a), 25 (b), 60 (c), 72 (d) e 942 (e) Barras (caso contínuo) e 60 (f), 72 (g) e 942 (h) Barras (caso discreto), onde  $Dif$  é a diferença entre o Hipervolume normalizado das curvas *best* e *worst*.

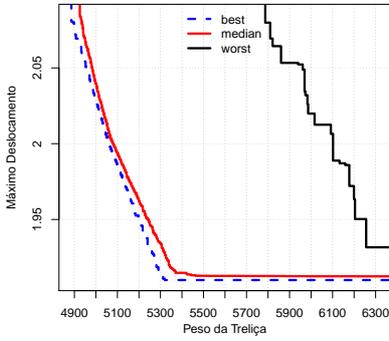
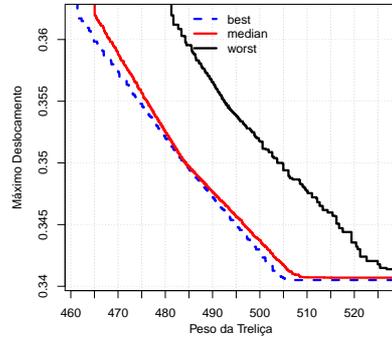
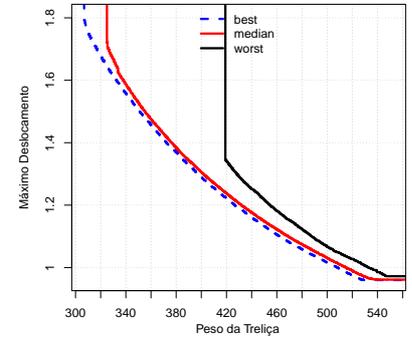
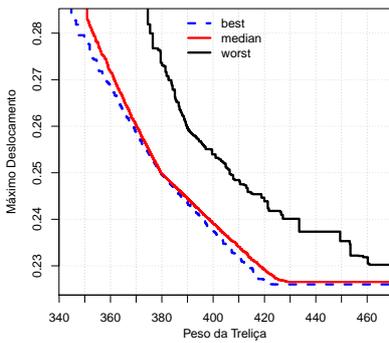
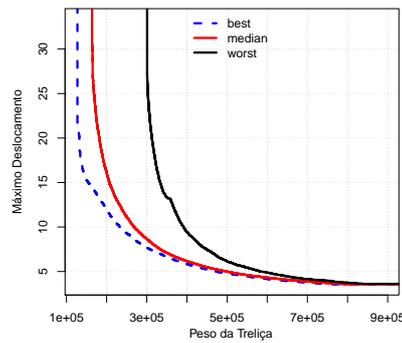
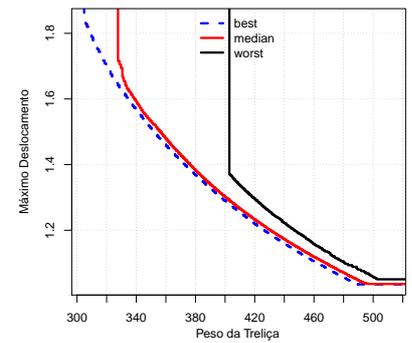
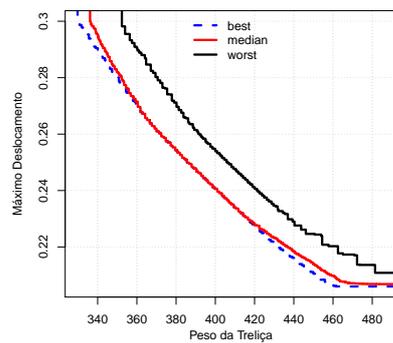
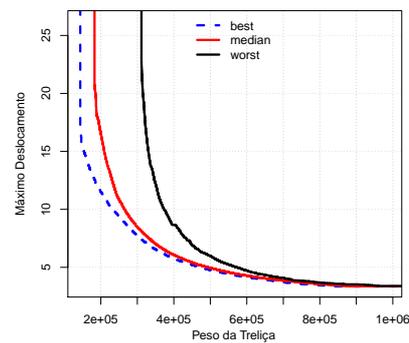
(a)  $Dif=0,7273$ (b)  $Dif=0,3071$ (c)  $Dif=0,2235$ (d)  $Dif=0,2617$ (e)  $Dif=0,2147$ (f)  $Dif=0,2281$ (g)  $Dif=0,1454$ (h)  $Dif=0,1847$ 

Figura 10.12: Curvas EAF do algoritmo R-GDE3 das Treliças de 10 (a), 25 (b), 60 (c), 72 (d) e 942 (e) Barras (caso contínuo) e 60 (f), 72 (g) e 942 (h) Barras (caso discreto), onde  $Dif$  é a diferença entre o Hipervolume normalizado das curvas *best* e *worst*.

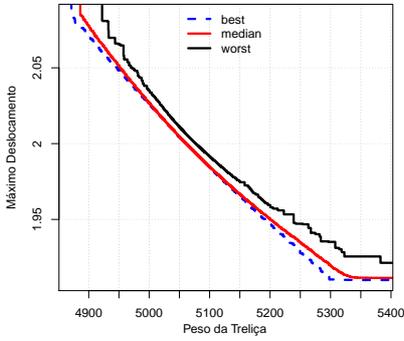
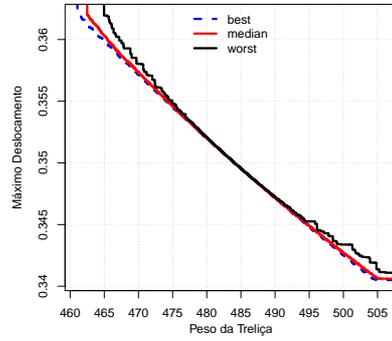
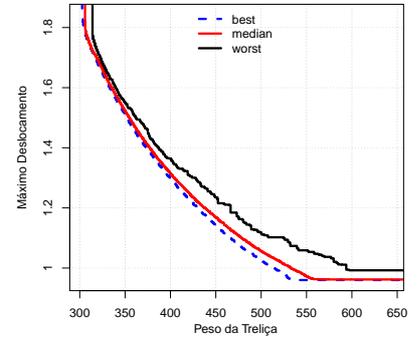
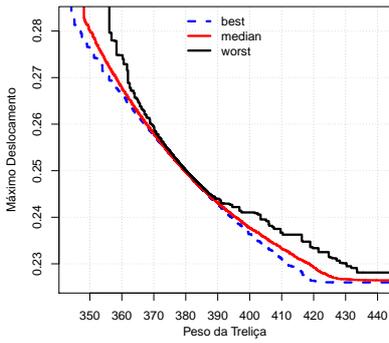
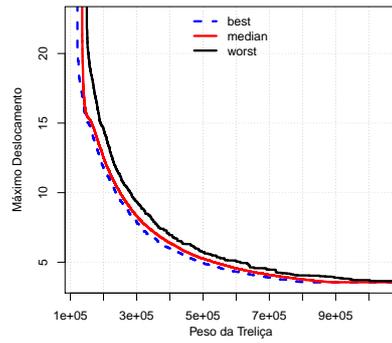
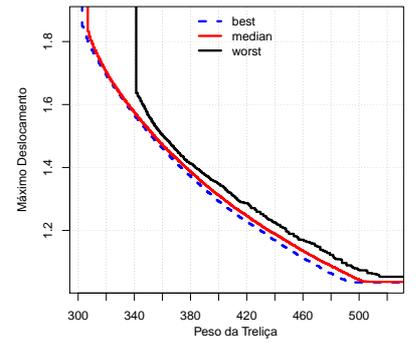
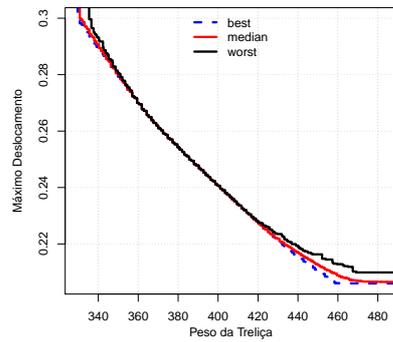
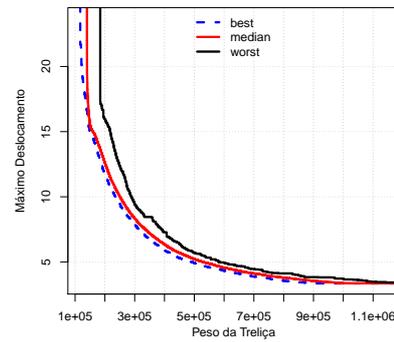
(a)  $Dif=0,0672$ (b)  $Dif=0,0273$ (c)  $Dif=0,0791$ (d)  $Dif=0,0668$ (e)  $Dif=0,0497$ (f)  $Dif=0,0895$ (g)  $Dif=0,0225$ (h)  $Dif=0,0698$ 

Figura 10.13: Curvas EAF do algoritmo R-NSGA-II das Treliças de 10 (a), 25 (b), 60 (c), 72 (d) e 942 (e) Barras (caso contínuo) e 60 (f), 72 (g) e 942 (h) Barras (caso discreto), onde  $Dif$  é a diferença entre o Hipervolume normalizado das curvas *best* e *worst*.

# 11 EXPERIMENTO 4: PREFERÊNCIA DE MODO INTERATIVO

## 11.1 Delineamento

Como descrito no Capítulo 6, (PURSHOUSE et al., 2014) afirmam que métodos classificados na literatura como *a priori* podem ser transformados em métodos interativos apenas permitindo que o tomador de decisão ajuste seus parâmetros durante o processo de evolução. Eles citam como exemplo o caso do trabalho de (KOKSALAN; KARAHAN, 2010), que propuseram o algoritmo denominado iTDEA, uma versão interativa do algoritmo *a priori* *The Territory Defining Multiobjective Evolutionary Algorithms* TDEA, proposto por eles mesmos em (KARAHAN; KOKSALAN, 2010).

No algoritmo iTDEA, assim como no TDEA, um território é definido na vizinhança de cada indivíduo a fim de controlar a densidade da população na região de preferência. Diferentemente do TDEA, o algoritmo iTDEA permite que o tomador de decisão altere informações de preferência durante sua execução para guiar a busca para uma região que melhor represente suas preferências. Analogamente, todos os três algoritmos propostos aqui (R-GDE3+APM, R-GDE3 e R-NSGA-II) podem ser transformados em métodos interativos apenas permitindo que o tomador de decisão ajuste seu ponto de referência e valores de  $\epsilon$  durante o processo de evolução.

Uma dificuldade de algoritmos *a priori* que utilizam pontos de referência em problemas do mundo real é que o tomador de decisão pode não ter ideia dos possíveis valores alcançados pelas funções objetivo. Para investigar o comportamento de algoritmos interativos sem a necessidade de fornecer um ponto de referência *a priori*, adota-se aqui o procedimento utilizado no I-MODE, proposto por (CHAUDHURI; DEB, 2010). O I-MODE é um MOEA que utiliza informações de preferências de forma interativa. Nele permite-se que o tomador de decisão, caso não tenha uma ideia *a priori* de suas preferências, utilize algum MOEA sem preferências para encontrar uma aproximação

inicial da Frente de Pareto. Assim, ele teria uma ideia mais clara dos possíveis valores que podem ser alcançados pelas funções objetivos e conseguiria uma informação parcial para tomar suas decisões de forma mais bem fundamentada.

Outro aspecto que deve ser observado em um método iterativo é o número de interações necessárias e/ou permitidas com o tomador de decisão e a frequência com que elas ocorrem. O mais comum encontrado nas propostas da literatura é realizar as interações após um certo número pré estabelecido de gerações. O iTDEA, por exemplo, faz sua primeira interação após 1/3 do número total de gerações e a última quando estiver faltando 1/6 desse número para finalizar a execução. As interações intermediárias ocorrerão em intervalos iguais entre a primeira e a última. Em seus experimentos, (KOKSALAN; KARAHAN, 2010) utilizaram 4 e 6 interações com o tomador de decisão.

Diante do exposto, os experimentos a seguir foram realizados utilizando os algoritmos I-GDE3+APM (**Algoritmo 6**), I-GDE3 (**Algoritmo 14**) e I-NSGA-II (**Algoritmo 9**) detalhados no Capítulo 6, que são versões propostas aqui de transformar os métodos *a priori* R-GDE3+APM, R-GDE3 e R-NSGA-II em iterativos. A frequência adotada aqui com que as interações ocorrem nos algoritmos será a mesma do iTDEA.

Será assumido também a ausência de um ponto de referência *a priori*. Essa informação será obtida após 1/3 do total de gerações pelo mesmo procedimento proposto no I-MODE, isto é, o MOEA será executado sem preferências para encontrar uma aproximação inicial da Frente de Pareto. Após esse período, o tomador de decisão fornecerá um ponto de referência e um valor de  $\epsilon$  que será utilizado até a próxima interação. Como nos experimentos de (KOKSALAN; KARAHAN, 2010) foram utilizados 4 e 6 interações, adota-se aqui a média, ou seja, 5 interações.

Finalmente, o perfil do usuário simulado neste experimento será aquele que escolhe a solução do POMONO correspondente obtida até o momento da interação. Em outras palavras, o ponto de referência adotado a cada interação será a solução do Arquivo Externo no momento da interação que soluciona o POMONO correspondente. Os valores de  $\epsilon$  serão mantidos fixos durante toda a execução e são os mesmos utilizados nos experimentos do Capítulo 10 (Tabelas 10.3, 10.4 e 10.5). Além disso, os parâmetros do NSGA-II, GDE3 e GDE3+APM utilizados nos experimentos do Capítulo 9 serão mantidos aqui.

Cada algoritmo I-NSGA-II, I-GDE3 e I-GDE3+APM foi executado 100 vezes para cada um dos problemas com 50000 avaliações (50 indivíduos e 1000 gerações). Com um

total de 1000 gerações, a 1ª interação ocorrerá na geração 333 e as 4 intermediárias nas gerações 458, 583, 708 e 833. Como já foi definido a Região de Dominância e, conseqüentemente, o intervalo de preferência HD no Capítulo 10 (Tabela 10.2), os algoritmos serão avaliados naquela região de interesse. Deseja-se avaliar o algoritmo que tem melhor capacidade de gerar soluções próximas às soluções monobjetivo sem, contudo, haver conhecimento de um ponto de referência *a priori*. Os *SPOs* obtidos contém apenas as soluções não-dominadas factíveis que pertencem ao intervalo de preferência HD exibido na Tabela 10.2. Vale reforçar que os algoritmos I-GDE3+APM, I-GDE3 e I-NSGA-II são proposições dessa tese e que não foram encontrados trabalhos na literatura envolvendo informações de preferência nos POMs de OE adotados.

## 11.2 Análise dos Resultados

As médias e os desvios-padrão do Hipervolume e do IGD dos *SPOs* normalizados no intervalo de preferência HD são exibidos na Tabela 11.2. As mesmas informações são exibidas na Tabela 11.3, dessa vez referentes às avaliações comparativas de cada uma das 100 execuções dos algoritmos I-GDE3+APM, I-GDE3 e I-NSGA-II, sem normalização, nas medidas binárias *Coverage Metric* (CM) e  $\epsilon$ -*Indicator* ( $I_\epsilon$ ) no intervalo de preferência HD. A Figura 11.2 apresenta os Perfis de Desempenho dos resultados das medidas unárias e binárias apresentadas por cada algoritmo, juntamente com as áreas abaixo das curvas, normalizadas pela maior delas.

As Figuras 11.3, 11.4, 11.5 e 11.6 apresentam as curvas EAF *best*, *median* e *worst* dos algoritmos I-GDE3+APM, I-GDE3 e I-NSGA-II nos problemas analisados e as curvas EAF *best*, *median* e *worst* são apresentadas nas Figuras 11.7, 11.8 e 11.9 para os algoritmos I-GDE3+APM, I-GDE3 e I-NSGA-II respectivamente. A seguir são apresentadas algumas considerações sobre essa análise.

### 11.2.1 I-GDE3+APM e I-GDE3

Com exceção da medida CM, houve, segundo o teste de Wilcoxon, diferenças estatisticamente significativas entre os resultados do algoritmo I-GDE3+APM e do algoritmo I-GDE3 nas Treliças de 10 e 942 Barras (caso contínuo). Nos demais problemas e nas demais medidas, o teste de Wilcoxon não foi capaz de detectar diferenças

estatisticamente significativas entre os resultados (Tabelas 11.2 e 11.3). Na medida CM, além dos dois problemas mencionados, houve diferenças estatisticamente significativas entre os resultados dos algoritmos I-GDE3+APM e I-GDE3 nas Treliças de 60 Barras (caso discreto) e da Treliça de 72 Barras (ambos os casos).

O desempenho global do algoritmo I-GDE3+APM foi pior do que do algoritmo I-GDE3 segundo mostram os Perfis de Desempenho (Figura 11.2). O problema da Treliça de 942 Barras (caso contínuo) foi o responsável por essa diferença, já que de fato o desempenho do algoritmo I-GDE3 nele foi superior em todas as medidas, com diferenças estatisticamente significativas entre os resultados segundo o teste de Wilcoxon.

Em relação à medida EAF, as curvas *best* e *median* dos dois algoritmos foram similares em quase todos os problemas (Figuras 11.3, 11.4, 11.5 e 11.6). As maiores diferenças foram observadas nas curvas *worst*, onde o algoritmo I-GDE3+APM obteve uma curva com maior Hipervolume nas Treliças de 10, 60 e 72 Barras (caso contínuo) e 942 Barras (caso discreto), indicando maior estabilidade na obtenção dos resultados. Nos demais problemas, o algoritmo I-GDE3 obteve uma curva com maior Hipervolume na curva *worst*.

Diferentemente dos experimentos anteriores, o acoplamento da técnica APM não gerou a mesma melhoria no desempenho do algoritmo. O I-GDE3+APM teve desempenho pior nesse grupo de problemas quando comparado aos demais.

### **11.2.2 I-GDE3+APM e I-NSGA-II**

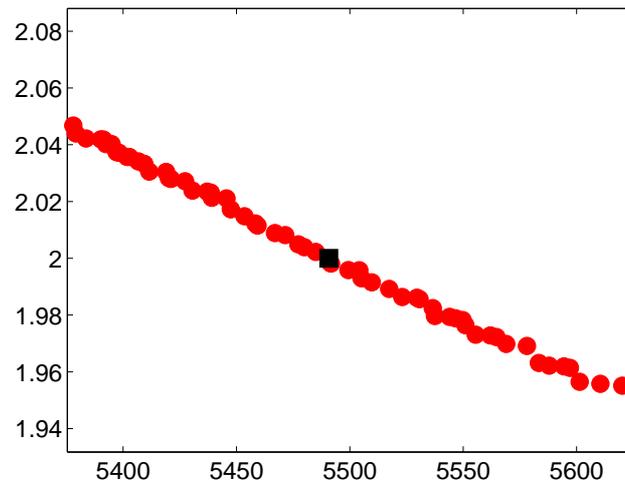
Em todos os problemas abordados aqui e em todas as medidas unárias e binárias consideradas nessa tese, o desempenho do algoritmo I-NSGA-II é melhor que o desempenho do algoritmo I-GDE3+APM, com diferenças estatisticamente significativas entre os resultados segundo o teste de Wilcoxon (a única exceção foi na medida CM na Treliça de 942 Barras (caso discreto) - Tabelas 11.2 e 11.3). Em relação à medida EAF, o algoritmo I-NSGA-II tem Hipervolume maior do que o algoritmo I-GDE3+APM em todas as curvas e em todos os problemas (a única exceção foi na curva *best* na Treliça de 60 Barras (caso contínuo) - Figuras 11.3, 11.4, 11.5 e 11.6). Novamente acredita-se que a causa principal desse bom desempenho do I-NSGA-II está na natureza do operador SBX, que tende a criar filhos próximos aos pais (DEB; AGRAWAL, 1995; SHARMA et al., 2007).

Os resultados obtidos pelo I-NSGA-II foram, de fato, muito bons nesses problemas.

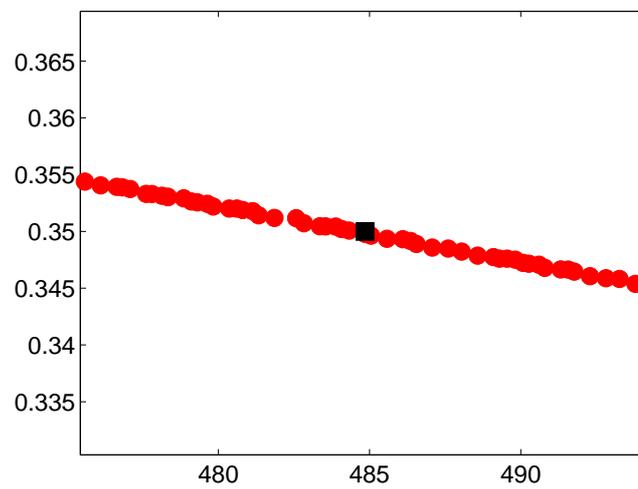
Uma prova disso é que ele produziu médias de resultados em alguns casos melhores do que os POMONOs correspondentes, como aconteceu nas Treliças de 10, 25 e 72 Barras (caso discreto). (SILVA et al., 2013) realizou 30 execuções independentes e um orçamento de 15000 avaliações da função objetivo. Executou-se então o I-NSGA-II 30 vezes para cada uma das Treliças de 10, 25 e 72 Barras (caso discreto) com o mesmo orçamento de 15000 avaliações de cada uma das funções objetivo (50 indivíduos e 300 gerações), sendo que a 1ª interação ocorreu na geração 100 e as 4 intermediárias nas gerações 140, 180, 220 e 260. O mesmo perfil do usuário simulado já descrito foi mantido o mesmo, assim como os valores de  $\epsilon$ , que foram mantidos fixos durante toda a execução (Tabela 10.5). A Tabela 11.1 mostra um comparativo entre a solução do POMONO obtida pelo I-NSGA-II e os melhores resultados exibidos em (SILVA et al., 2013). Além de obter melhores resultados e conter a solução do POMONO exibida em (SILVA et al., 2013), o I-NSGA-II ainda tem a vantagem de oferecer ao tomador de decisão outras opções para que ele escolha aquela que melhor se adapta às suas preferências (Figura 11.1).

Tabela 11.1: Solução do POMONO obtida pelo I-NSGA-II em comparação com as exibidas em (SILVA et al., 2013).

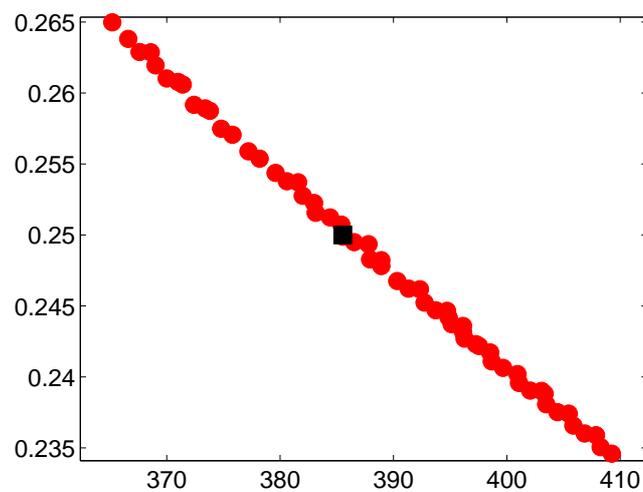
|       |                      | Melhor  | Mediana | Media   | Desvio Padrão          | Pior    |
|-------|----------------------|---------|---------|---------|------------------------|---------|
| 10 B. | I-NSGA-II            | 5490,74 | 5490,74 | 5491,98 | 4,57                   | 5513,32 |
|       | (SILVA et al., 2013) | 5490,74 | 5490,74 | 5493,49 | 8,74                   | 5525,53 |
| 25 B. | I-NSGA-II            | 484,85  | 484,85  | 484,85  | $3,47 \times 10^{-13}$ | 484,85  |
|       | (SILVA et al., 2013) | 484,85  | 484,85  | 484,90  | $1,62 \times 10^{-1}$  | 485,57  |
| 72 B. | I-NSGA-II            | 385,54  | 385,54  | 386,00  | 1,20                   | 390,34  |
|       | (SILVA et al., 2013) | 385,54  | 385,54  | 386,89  | 2,32                   | 397,81  |



(a) 10 Barras



(b) 25 Barras



(c) 72 Barras

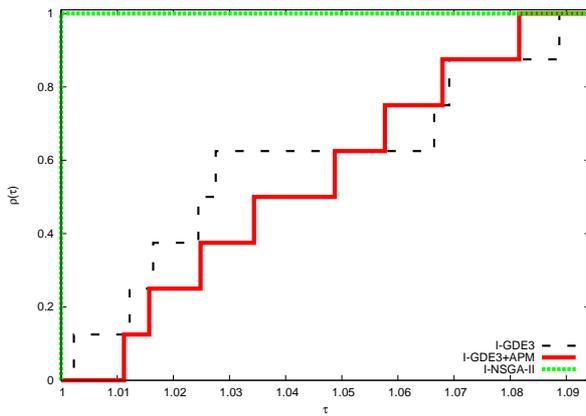
Figura 11.1: Exemplo do I-NSGA-II nas Trelças de 10, 25 e 72 Barras (caso discreto) com 15000 avaliações na vizinhança do ponto de referência (Tabela 10.1).

Tabela 11.2: Média e Desvio Padrão (DP) dos Resultados do Hipervolume (H) e do IGD para o intervalo de preferência HD da Tabela 10.2.

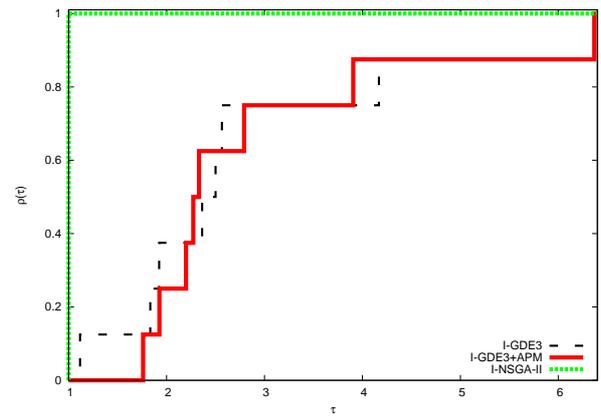
|                 |       | I-GDE3+APM                 | I-GDE3                     | I-NSGA-II                                 |
|-----------------|-------|----------------------------|----------------------------|-------------------------------------------|
| Hipervolume     |       |                            |                            |                                           |
| 10 B. Contínuo  | Média | 0.6135(+)                  | 0.6018(+)                  | <b>0.6434</b>                             |
|                 | DP    | 0.0148                     | 0.0363                     | 0.0083                                    |
| 25 B. Contínuo  | Média | 0.5004(+)                  | 0.5011(+)                  | <b>0.5344</b>                             |
|                 | DP    | 0.0172                     | 0.0172                     | 0.0034                                    |
| 60 B. Contínuo  | Média | 0.6080(+)                  | 0.6064(+)                  | <b>0.6231</b>                             |
|                 | DP    | 0.0305                     | 0.0307                     | 0.0094                                    |
| 60 B. Discreto  | Média | 0.6054(+)                  | 0.6161(+)                  | <b>0.6262</b>                             |
|                 | DP    | 0.0396                     | 0.0304                     | 0.0118                                    |
| 72 B. Contínuo  | Média | 0.5331(+)                  | 0.5296(+)                  | <b>0.5766</b>                             |
|                 | DP    | 0.0206                     | 0.0219                     | 0.0097                                    |
| 72 B. Discreto  | Média | 0.6075(+)                  | 0.6069(+)                  | <b>0.6143</b>                             |
|                 | DP    | 0.0071                     | 0.0064                     | 0.0018                                    |
| 942 B. Contínuo | Média | 0.7524(+)                  | 0.7940                     | <b>0.7958</b>                             |
|                 | DP    | 0.0308                     | 0.0254                     | 0.0243                                    |
| 942 B. Discreto | Média | 0.7963(+)                  | 0.7895(+)                  | <b>0.8088</b>                             |
|                 | DP    | 0.0242                     | 0.0264                     | 0.0139                                    |
| IGD             |       |                            |                            |                                           |
| 10 B. Contínuo  | Média | $1.1041 \times 10^{-4}(+)$ | $1.4329 \times 10^{-4}(+)$ | <b><math>5.7303 \times 10^{-5}</math></b> |
|                 | DP    | $4.6848 \times 10^{-4}$    | $1.1637 \times 10^{-4}$    | $3.5635 \times 10^{-5}$                   |
| 25 B. Contínuo  | Média | $7.5812 \times 10^{-5}(+)$ | $7.5808 \times 10^{-5}(+)$ | <b><math>1.1907 \times 10^{-5}</math></b> |
|                 | DP    | $3.9261 \times 10^{-5}$    | $4.0967 \times 10^{-5}$    | $5.4615 \times 10^{-6}$                   |
| 60 B. Contínuo  | Média | 0.0010(+)                  | 0.0011(+)                  | <b><math>4.2888 \times 10^{-4}</math></b> |
|                 | DP    | $6.2905 \times 10^{-4}$    | $6.6016 \times 10^{-4}$    | $2.0053 \times 10^{-5}$                   |
| 60 B. Discreto  | Média | 0.0016(+)                  | 0.0014(+)                  | <b><math>7.2765 \times 10^{-4}</math></b> |
|                 | DP    | 0.0013                     | 0.0012                     | $4.7517 \times 10^{-4}$                   |
| 72 B. Contínuo  | Média | $3.8908 \times 10^{-4}(+)$ | $4.1517 \times 10^{-4}(+)$ | <b><math>9.9613 \times 10^{-5}</math></b> |
|                 | DP    | $1.7894 \times 10^{-4}$    | $1.9939 \times 10^{-4}$    | $2.6231 \times 10^{-5}$                   |
| 72 B. Discreto  | Média | $8.3610 \times 10^{-4}(+)$ | $8.7105 \times 10^{-4}(+)$ | <b><math>4.7490 \times 10^{-4}</math></b> |
|                 | DP    | $3.5016 \times 10^{-4}$    | $3.7693 \times 10^{-4}$    | $1.7339 \times 10^{-4}$                   |
| 942 B. Contínuo | Média | 0.0025(+)                  | 0.0010(+)                  | <b><math>8.9543 \times 10^{-4}</math></b> |
|                 | DP    | $8.3461 \times 10^{-4}$    | $5.5965 \times 10^{-4}$    | $6.6514 \times 10^{-4}$                   |
| 942 B. Discreto | Média | 0.0025(+)                  | 0.0026(+)                  | <b>0.0011</b>                             |
|                 | DP    | 0.0011                     | 0.0011                     | $6.8230 \times 10^{-4}$                   |

Tabela 11.3: Média e Desvio Padrão (DP) dos Resultados da CM e do  $I_\epsilon$  para o intervalo de preferência HD da Tabela 10.2. Os algoritmos I-GDE3+APM, I-GDE3 e I-NSGA-II são identificados respectivamente por A, B e C.

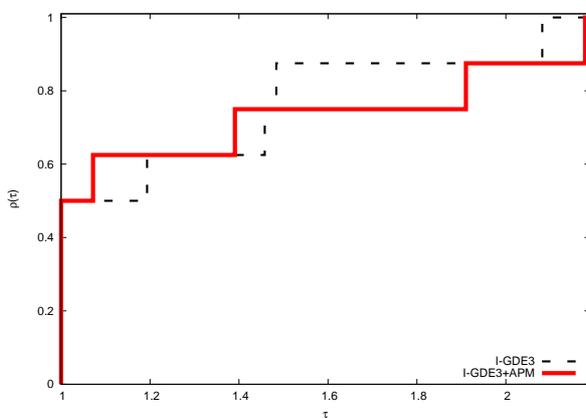
|                 |       | (A,B)         | (B,A)         | (A,C)         | (C,A)         |
|-----------------|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| CM              |       |               |               |               |               |
| 10 B. Contínuo  | Média | <b>0.3564</b> | 0.1712(+)     | 0.0374(+)     | <b>0.4352</b> |
|                 | DP    | 0.4197        | 0.3279        | 0.0916        | 0.4536        |
| 25 B. Contínuo  | Média | 0.3089        | <b>0.3311</b> | 0.0097(+)     | <b>0.5905</b> |
|                 | DP    | 0.3571        | 0.3726        | 0.0142        | 0.4326        |
| 60 B. Contínuo  | Média | 0.2144        | <b>0.2982</b> | 0.2001(+)     | <b>0.4509</b> |
|                 | DP    | 0.3092        | 0.3513        | 0.1541        | 0.3982        |
| 60 B. Discreto  | Média | 0.2409(+)     | <b>0.5247</b> | 0.3237(+)     | <b>0.4810</b> |
|                 | DP    | 0.2863        | 0.3533        | 0.2399        | 0.3287        |
| 72 B. Contínuo  | Média | <b>0.4776</b> | 0.3276(+)     | 0.0768(+)     | <b>0.5629</b> |
|                 | DP    | 0.3463        | 0.3341        | 0.0525        | 0.2537        |
| 72 B. Discreto  | Média | <b>0.1285</b> | 0.0866(+)     | 0.0404(+)     | <b>0.1592</b> |
|                 | DP    | 0.1213        | 0.1067        | 0.0426        | 0.1028        |
| 942 B. Contínuo | Média | 0.2115(+)     | <b>0.4040</b> | 0.2499(+)     | <b>0.4857</b> |
|                 | DP    | 0.2628        | 0.4148        | 0.1405        | 0.3819        |
| 942 B. Discreto | Média | <b>0.3691</b> | 0.3093        | <b>0.4384</b> | 0.3462        |
|                 | DP    | 0.3498        | 0.3541        | 0.2257        | 0.3518        |
| $I_\epsilon$    |       |               |               |               |               |
| 10 B. Contínuo  | Média | <b>1.0033</b> | 1.0046(+)     | 1.0052(+)     | <b>1.0018</b> |
|                 | DP    | 0.0023        | 0.0047        | 0.0023        | 0.0021        |
| 25 B. Contínuo  | Média | <b>1.0022</b> | 1.0023        | 1.0042(+)     | <b>1.0014</b> |
|                 | DP    | 0.0013        | 0.0018        | 0.0017        | 0.0018        |
| 60 B. Contínuo  | Média | <b>1.0320</b> | 1.0399        | 1.0819(+)     | <b>1.0224</b> |
|                 | DP    | 0.0416        | 0.0494        | 0.0671        | 0.0099        |
| 60 B. Discreto  | Média | 1.0402        | <b>1.0277</b> | 1.0647(+)     | <b>1.0186</b> |
|                 | DP    | 0.0482        | 0.0372        | 0.0607        | 0.0171        |
| 72 B. Contínuo  | Média | <b>1.0083</b> | 1.0093        | 1.0176(+)     | <b>1.0050</b> |
|                 | DP    | 0.0053        | 0.0047        | 0.0065        | 0.0047        |
| 72 B. Discreto  | Média | <b>1.0085</b> | 1.0094        | 1.0114(+)     | <b>1.0041</b> |
|                 | DP    | 0.0041        | 0.0052        | 0.0045        | 0.0035        |
| 942 B. Contínuo | Média | 1.2699(+)     | <b>1.0381</b> | 1.3208(+)     | <b>1.0669</b> |
|                 | DP    | 0.1780        | 0.0295        | 0.2157        | 0.0474        |
| 942 B. Discreto | Média | <b>1.0926</b> | 1.1244        | 1.2221(+)     | <b>1.0881</b> |
|                 | DP    | 0.1235        | 0.1252        | 0.2015        | 0.0571        |



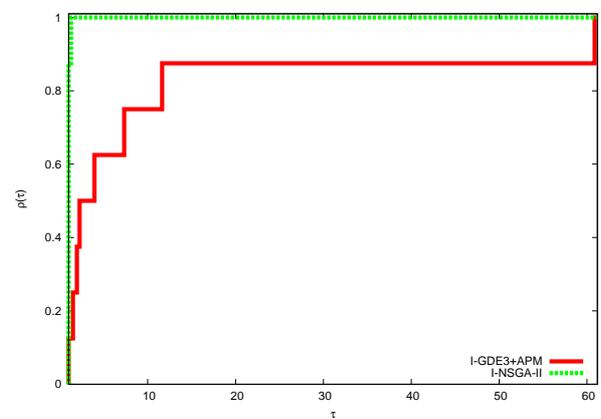
(a) Hipervolume: I-GDE3+APM=0,5182; I-GDE3=0,5674; I-NSGA-II=1



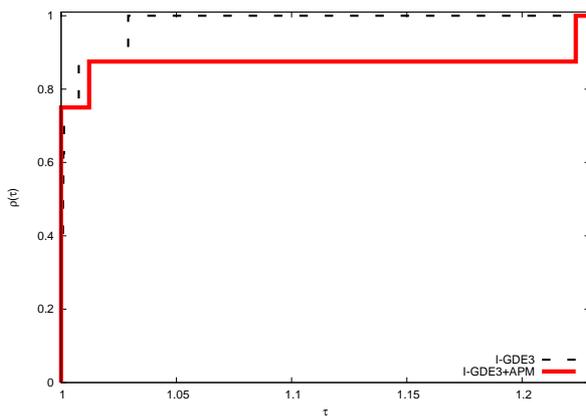
(b) IGD: I-GDE3+APM=0,6377; I-GDE3=0,6544; I-NSGA-II=1



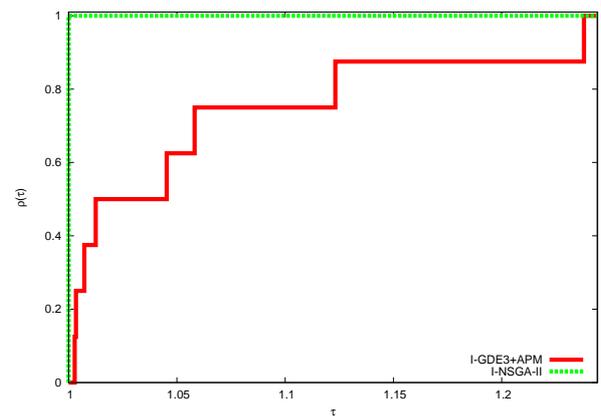
(c) CM: I-GDE3+APM=0,9536; I-GDE3=1



(d) CM: I-GDE3+APM=0,8283; I-NSGA-II=1

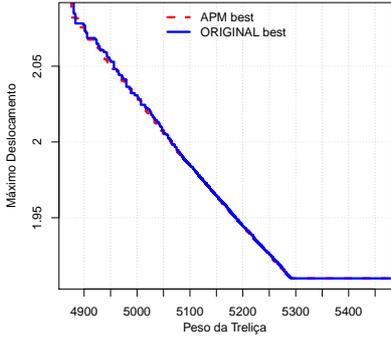


(e)  $I_\epsilon$ : I-GDE3+APM=0,8881; I-GDE3=1

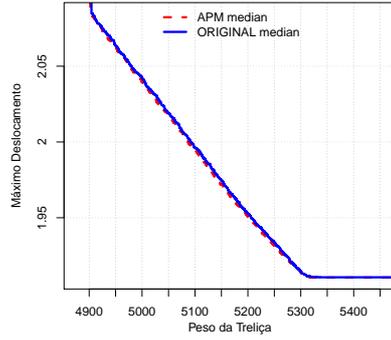


(f)  $I_\epsilon$ : I-GDE3+APM=0,7423; I-NSGA-II=1

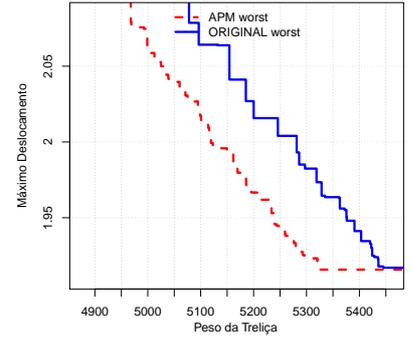
Figura 11.2: Perfis de Desempenho dos resultados obtidos por cada um dos três algoritmos: I-GDE3+APM, I-GDE3 e I-NSGA-II. As áreas abaixo das curvas, normalizadas pela maior delas, estão indicadas em cada Figura.



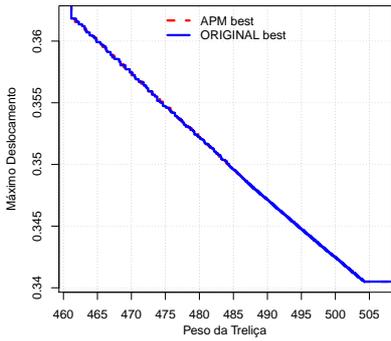
(a) 10 B.:  $H_1=0,6501$  e  $H_2=0,6466$



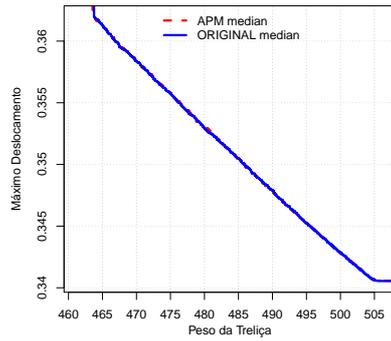
(b) 10 B.:  $H_1=0,6116$  e  $H_2=0,6036$



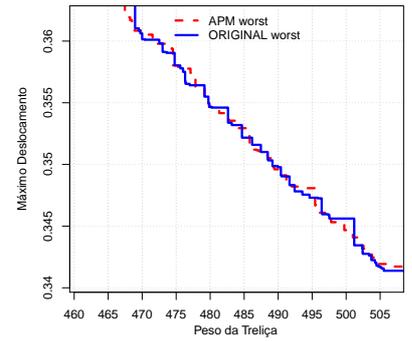
(c) 10 B.:  $H_1=0,5256$  e  $H_2=0,3082$



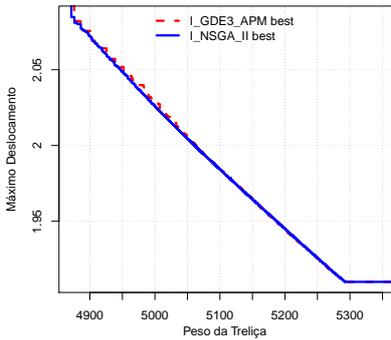
(d) 25 B.:  $H_1=0,5312$  e  $H_2=0,5312$



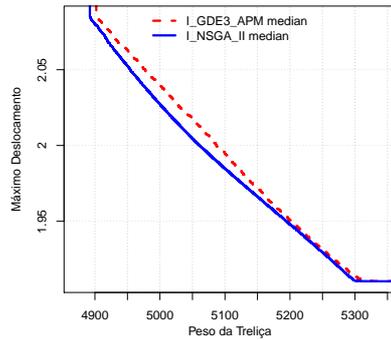
(e) 25 B.:  $H_1=0,4967$  e  $H_2=0,4974$



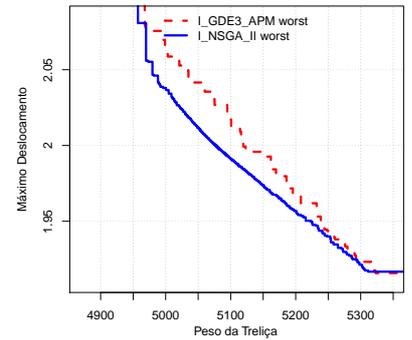
(f) 25 B.:  $H_1=0,4083$  e  $H_2=0,4097$



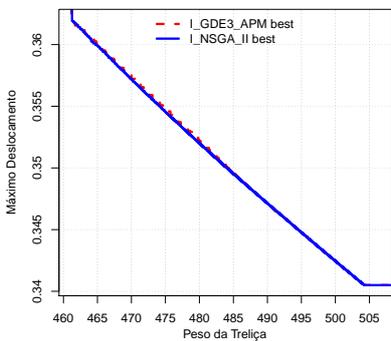
(g) 10 B.:  $H_1=0,5529$  e  $H_2=0,5582$



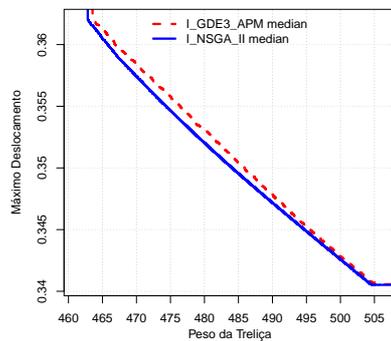
(h) 10 B.:  $H_1=0,5057$  e  $H_2=0,5438$



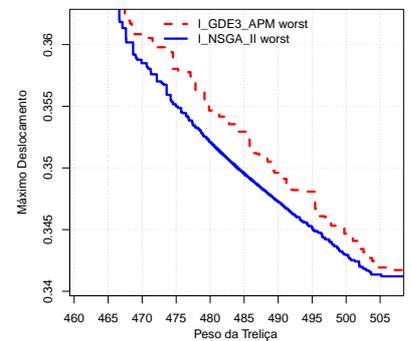
(i) 10 B.:  $H_1=0,4059$  e  $H_2=0,4850$



(j) 25 B.:  $H_1=0,5312$  e  $H_2=0,5355$



(k) 25 B.:  $H_1=0,4967$  e  $H_2=0,5280$



(l) 25 B.:  $H_1=0,4084$  e  $H_2=0,5044$

Figura 11.3: Curvas EAF das Treliças de 10 e 25 Barras (caso contínuo): ORIGINAL refere-se ao I-GDE3 e APM ao I-GDE3+APM. Hipervolumes normalizados:  $H_1$  para I-GDE3+APM e  $H_2$  para I-GDE3 e I-NSGA-II.

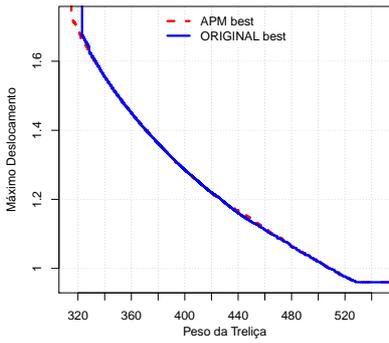
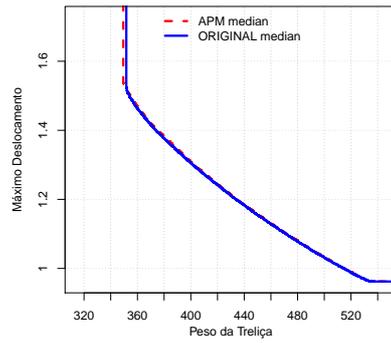
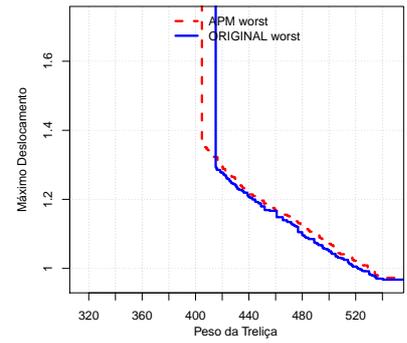
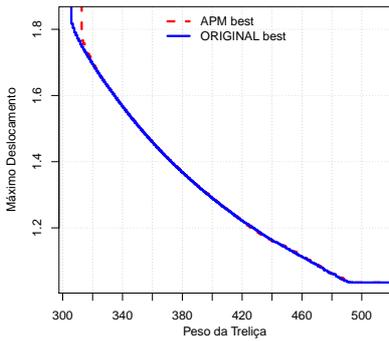
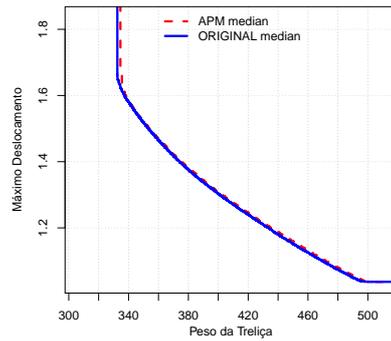
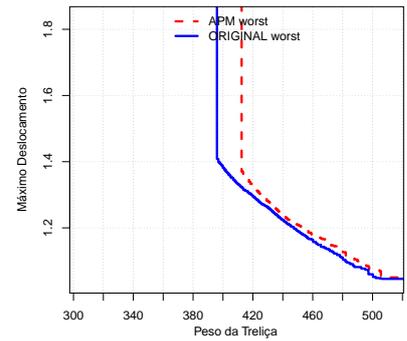
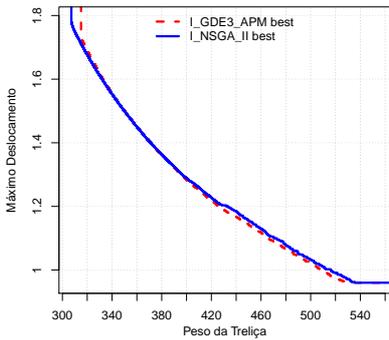
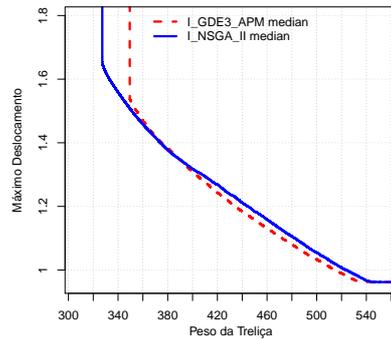
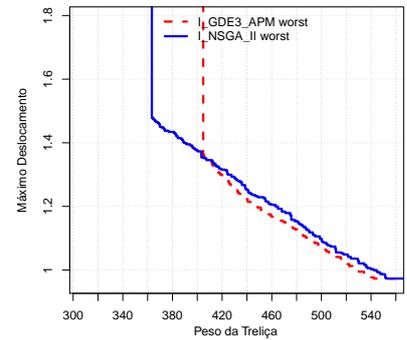
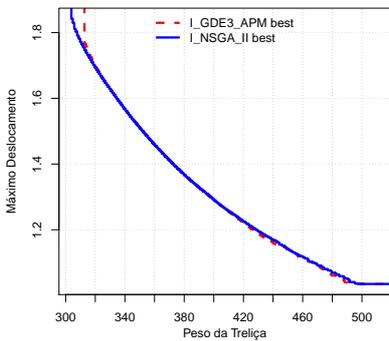
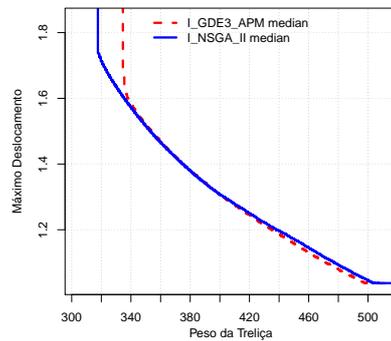
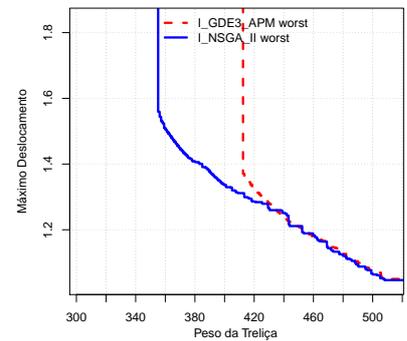
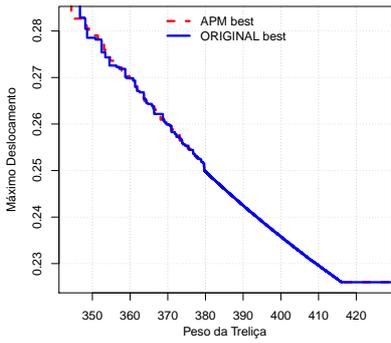
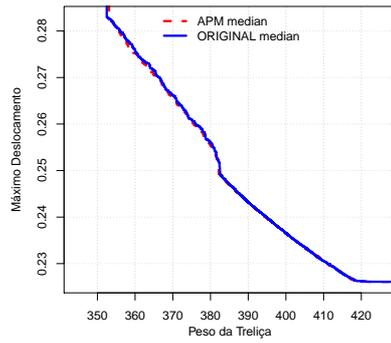
(a)  $H_1=0,6408$  e  $H_2=0,6400$ (b)  $H_1=0,5981$  e  $H_2=0,5985$ (c)  $H_1=0,4627$  e  $H_2=0,4523$ (d)  $H_1=0,6594$  e  $H_2=0,6629$ (e)  $H_1=0,6218$  e  $H_2=0,6294$ (f)  $H_1=0,3941$  e  $H_2=0,4537$ (g)  $H_1=0,6565$  e  $H_2=0,6511$ (h)  $H_1=0,6095$  e  $H_2=0,6190$ (i)  $H_1=0,4756$  e  $H_2=0,5320$ (j)  $H_1=0,6555$  e  $H_2=0,6560$ (k)  $H_1=0,6178$  e  $H_2=0,6311$ (l)  $H_1=0,3911$  e  $H_2=0,5462$ 

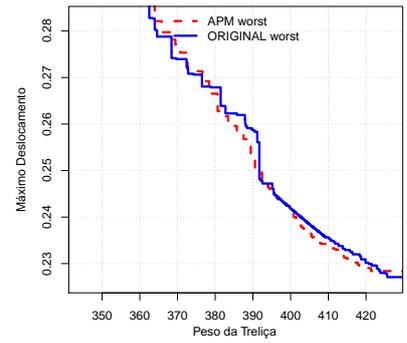
Figura 11.4: Curvas EAF da Treliça de 60 Barras: ORIGINAL refere-se ao I-GDE3 e APM ao I-GDE3+APM. As Figuras (a,b,c,g,h,i) tratam do caso contínuo e (d,e,f,j,k,l) tratam do caso discreto. Hipervolumes normalizados:  $H_1$  para I-GDE3+APM e  $H_2$  para I-GDE3 e I-NSGA-II.



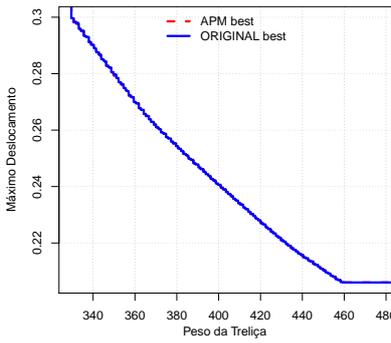
(a)  $H_1=0,5936$  e  $H_2=0,5950$



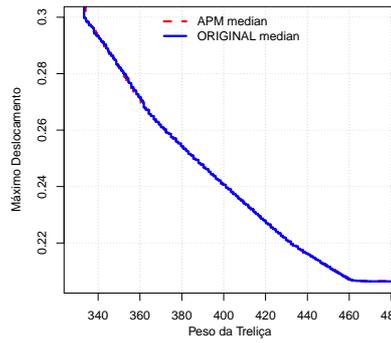
(b)  $H_1=0,5466$  e  $H_2=0,5430$



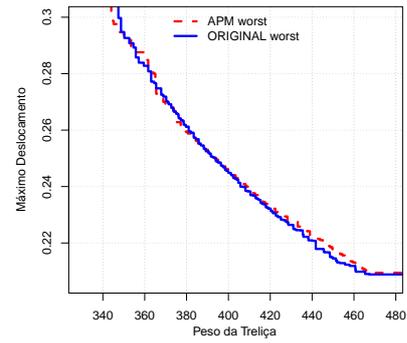
(c)  $H_1=0,4384$  e  $H_2=0,4261$



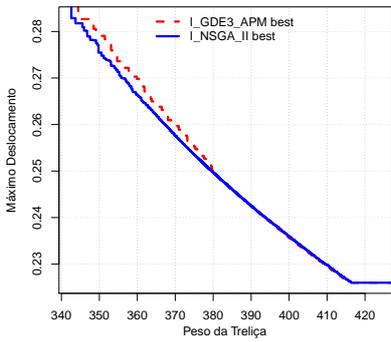
(d)  $H_1=0,6079$  e  $H_2=0,6078$



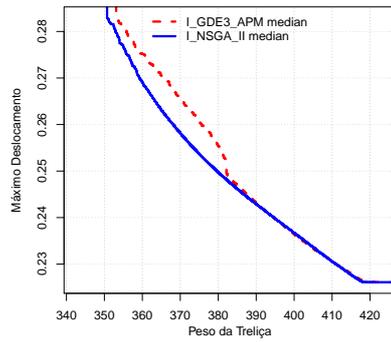
(e)  $H_1=0,5999$  e  $H_2=0,5993$



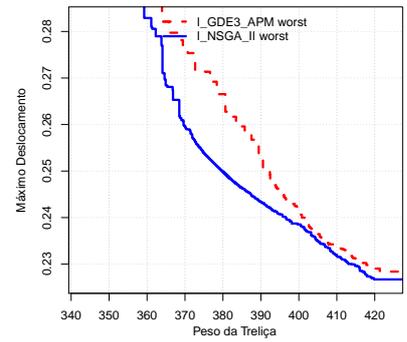
(f)  $H_1=0,5299$  e  $H_2=0,5380$



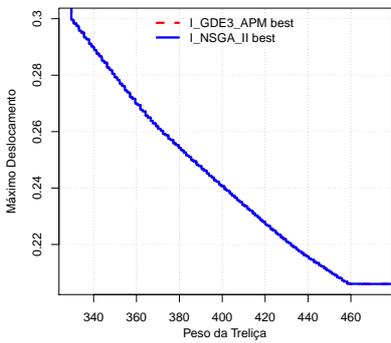
(g)  $H_1=0,5718$  e  $H_2=0,5909$



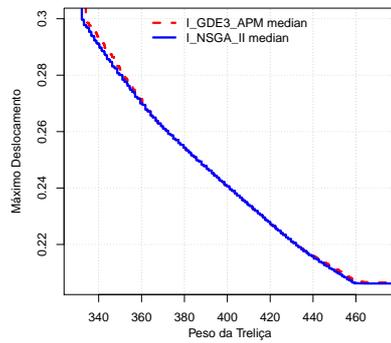
(h)  $H_1=0,5249$  e  $H_2=0,5662$



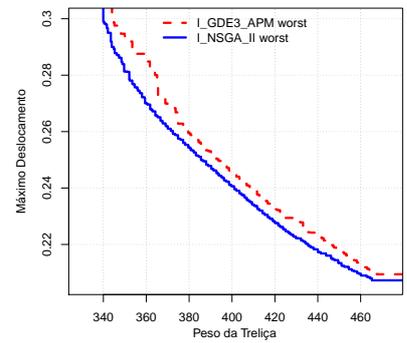
(i)  $H_1=0,4176$  e  $H_2=0,5238$



(j)  $H_1=0,6079$  e  $H_2=0,6080$

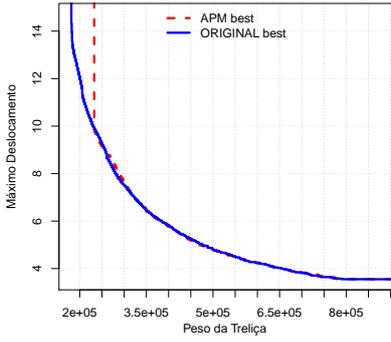


(k)  $H_1=0,5998$  e  $H_2=0,6057$

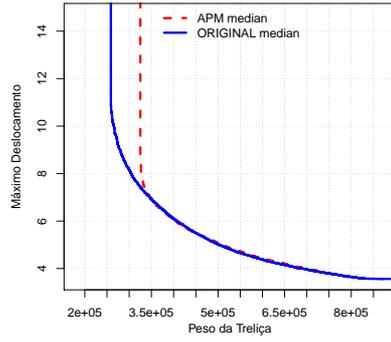


(l)  $H_1=0,5298$  e  $H_2=0,5906$

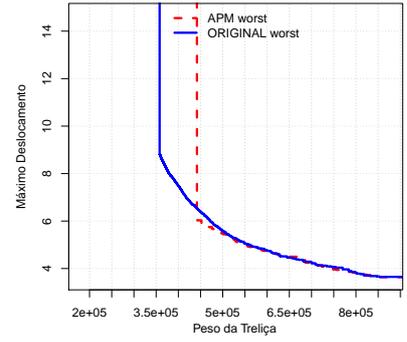
Figura 11.5: Curvas EAF da Treliça de 72 Barras: ORIGINAL refere-se ao I-GDE3 e APM ao I-GDE3+APM. As Figuras (a,b,c,g,h,i) tratam do caso contínuo e (d,e,f,j,k,l) tratam do caso discreto. Hipervolumes normalizados:  $H_1$  para I-GDE3+APM e  $H_2$  para I-GDE3 e I-NSGA-II.



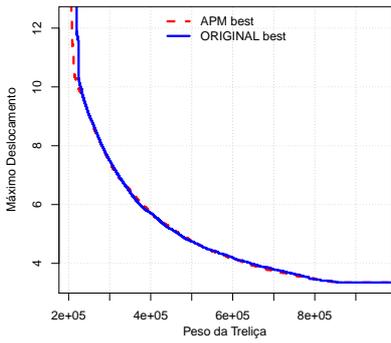
(a)  $H_1=0,7964$  e  $H_2=0,8162$



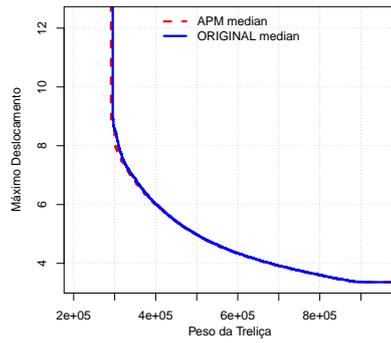
(b)  $H_1=0,7068$  e  $H_2=0,7589$



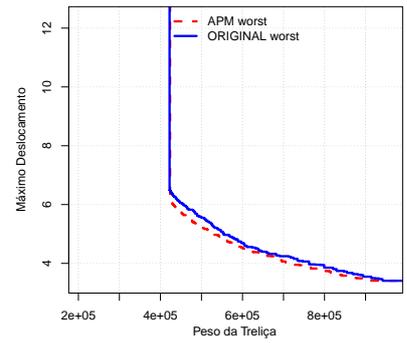
(c)  $H_1=0,5684$  e  $H_2=0,6409$



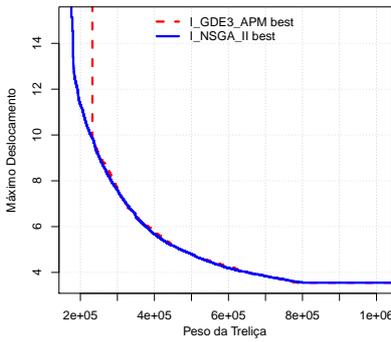
(d)  $H_1=0,8131$  e  $H_2=0,8082$



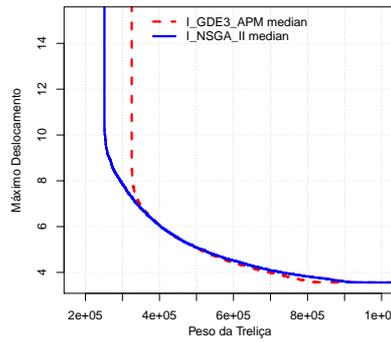
(e)  $H_1=0,7536$  e  $H_2=0,7489$



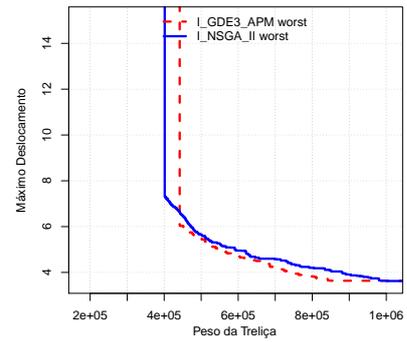
(f)  $H_1=0,6280$  e  $H_2=0,6152$



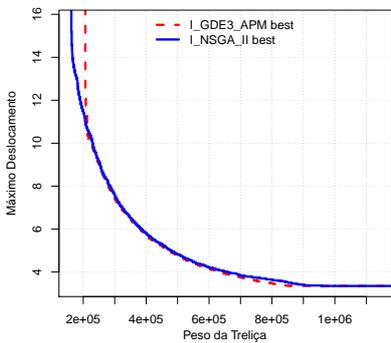
(g)  $H_1=0,8300$  e  $H_2=0,8541$



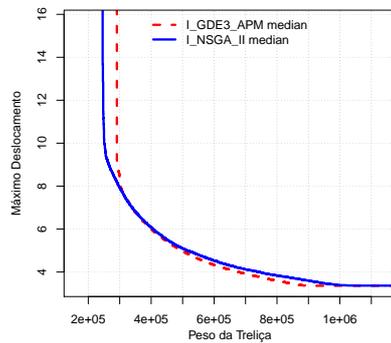
(h)  $H_1=0,7519$  e  $H_2=0,8009$



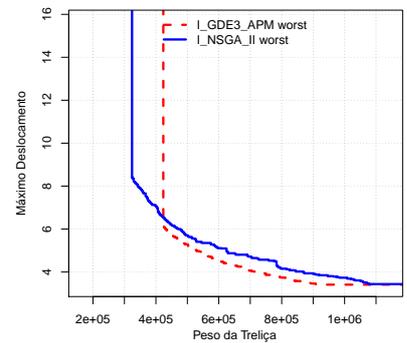
(i)  $H_1=0,6329$  e  $H_2=0,6513$



(j)  $H_1=0,8494$  e  $H_2=0,8537$



(k)  $H_1=0,7946$  e  $H_2=0,8089$



(l)  $H_1=0,6897$  e  $H_2=0,7291$

Figura 11.6: Curvas EAF da Treliça de 942 Barras: ORIGINAL refere-se ao I-GDE3 e APM ao I-GDE3+APM. As Figuras (a,b,c,g,h,i) tratam do caso contínuo e (d,e,f,j,k,l) tratam do caso discreto. Hipervolumes normalizados:  $H_1$  para I-GDE3+APM e  $H_2$  para I-GDE3 e I-NSGA-II.

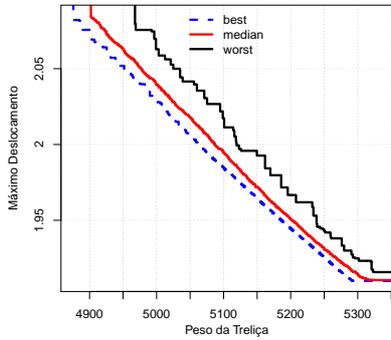
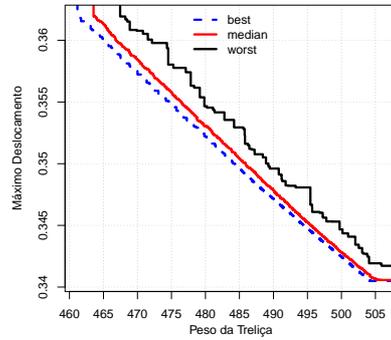
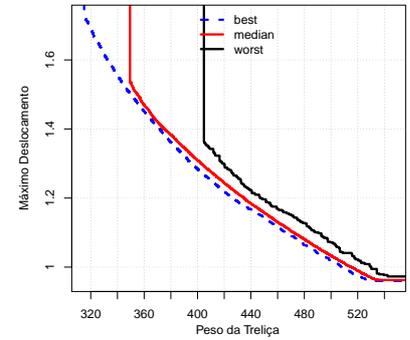
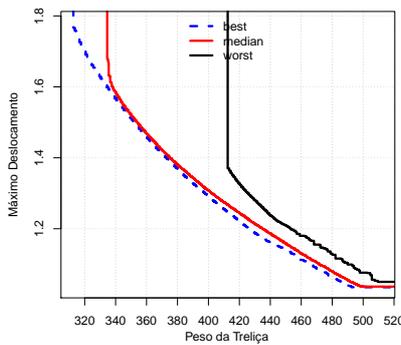
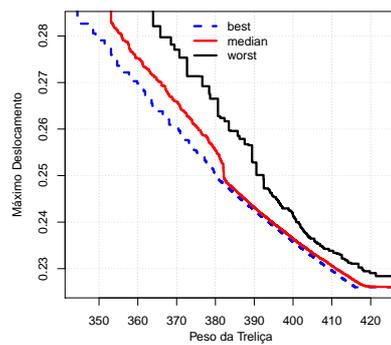
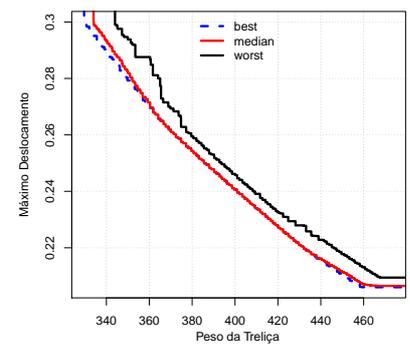
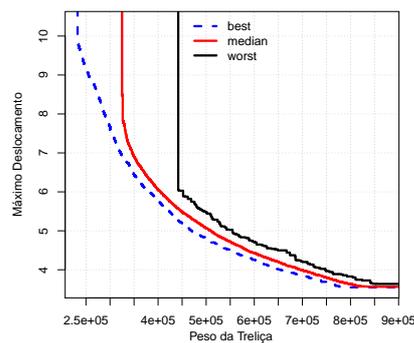
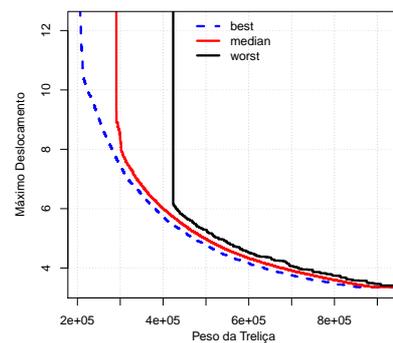
(a)  $Dif=0,1485$ (b)  $Dif=0,1229$ (c)  $Dif=0,1781$ (d)  $Dif=0,2541$ (e)  $Dif=0,1577$ (f)  $Dif=0,0780$ (g)  $Dif=0,1919$ (h)  $Dif=0,1884$ 

Figura 11.7: Curvas EAF do algoritmo I-GDE3+APM das Treliças de 10 (a), 25 (b), 60 (c) e (d), 72 (e) e (f) e 942 (g) e (h) Barras, onde (a), (b), (c), (e) e (g) referem-se ao caso contínuo e (d), (f) e (h) ao caso discreto e  $Dif$  é a diferença entre o Hipervolume normalizado das curvas *best* e *worst*.

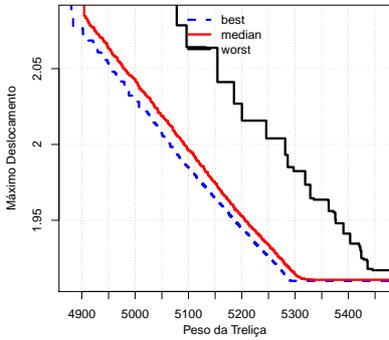
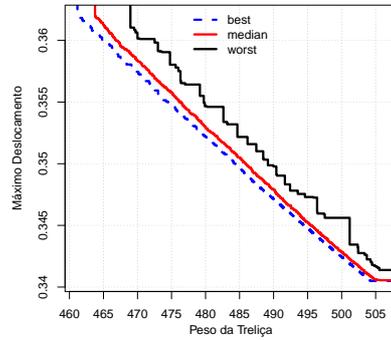
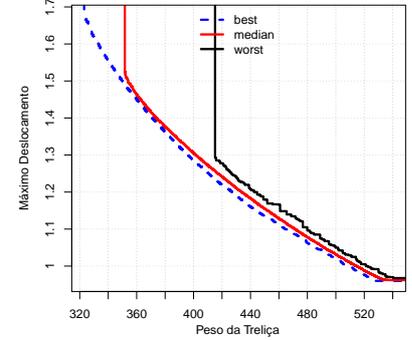
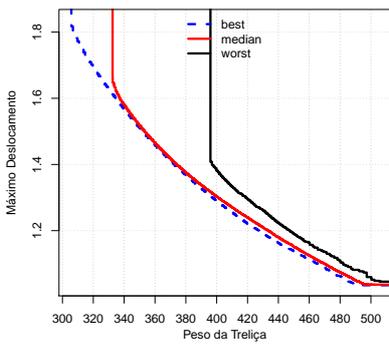
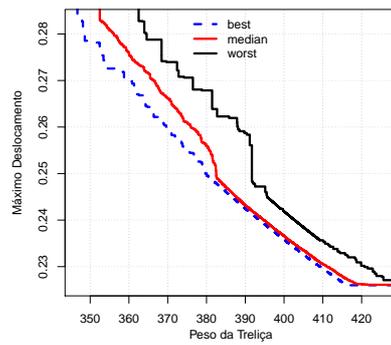
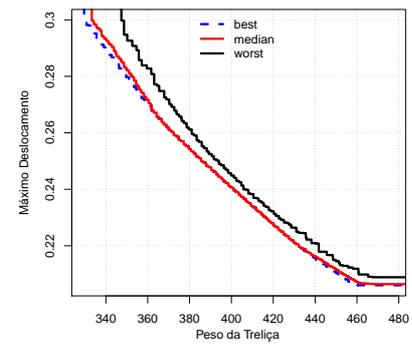
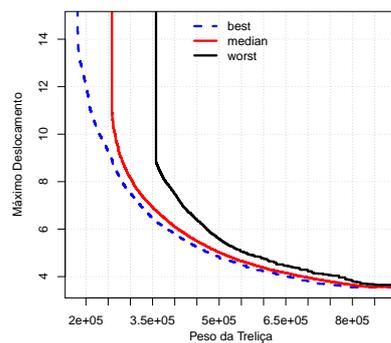
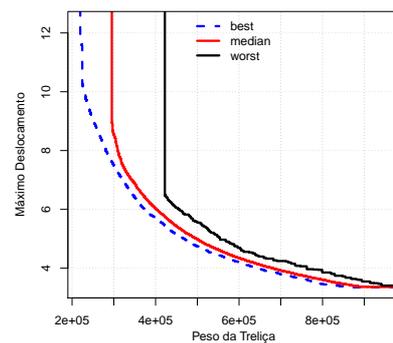
(a)  $Dif=0,3411$ (b)  $Dif=0,1218$ (c)  $Dif=0,1809$ (d)  $Dif=0,2154$ (e)  $Dif=0,1737$ (f)  $Dif=0,0709$ (g)  $Dif=0,1753$ (h)  $Dif=0,1928$ 

Figura 11.8: Curvas EAF do algoritmo I-GDE3 das Treliças de 10 (a), 25 (b), 60 (c) e (d), 72 (e) e (f) e 942 (g) e (h) Barras, onde (a), (b), (c), (e) e (g) referem-se ao caso contínuo e (d), (f) e (h) ao caso discreto e  $Dif$  é a diferença entre o Hipervolume normalizado das curvas *best* e *worst*.

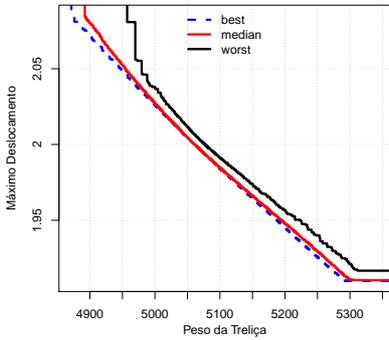
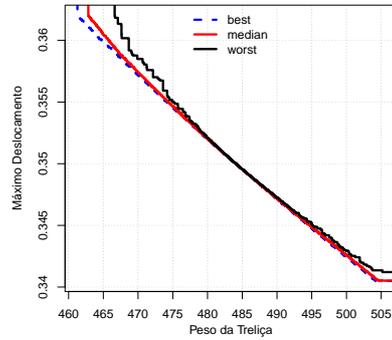
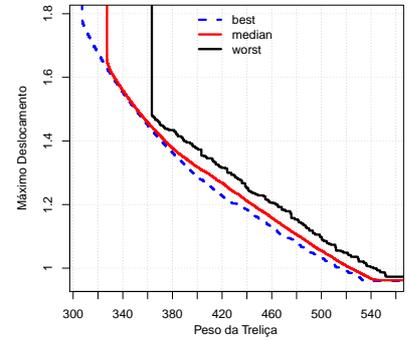
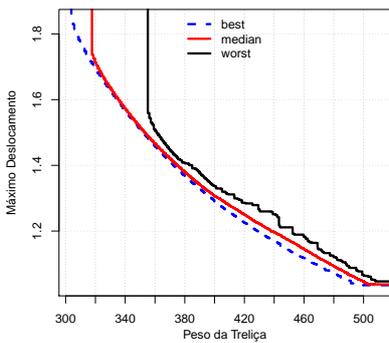
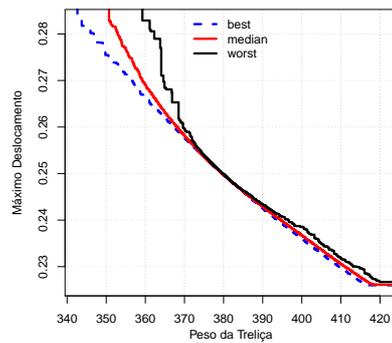
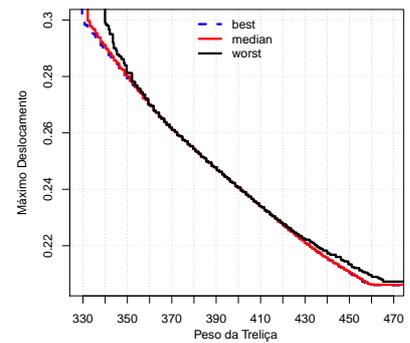
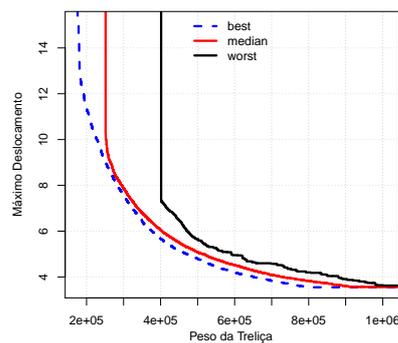
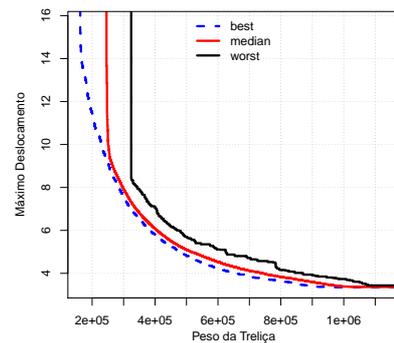
(a)  $Dif=0,0733$ (b)  $Dif=0,0311$ (c)  $Dif=0,1191$ (d)  $Dif=0,1108$ (e)  $Dif=0,0691$ (f)  $Dif=0,0174$ (g)  $Dif=0,2028$ (h)  $Dif=0,1246$ 

Figura 11.9: Curvas EAF do algoritmo I-NSGA-II das Treliças de 10 (a), 25 (b), 60 (c) e (d), 72 (e) e (f) e 942 (g) e (h) Barras, onde (a), (b), (c), (e) e (g) referem-se ao caso contínuo e (d), (f) e (h) ao caso discreto e  $Dif$  é a diferença entre o Hipervolume normalizado das curvas *best* e *worst*.

# 12 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

A presente tese se propôs a analisar o desempenho de um algoritmo baseado em ED acoplado com a técnica de tratamento de restrições APM na resolução de POMs em OE. Essa proposta foi motivada pelo fato de que algoritmos baseados em ED são atrativos para aplicações em problemas do mundo real por serem robustos, terem simplicidade de implementação e poucos parâmetros de controle, enquanto a técnica APM tem bom histórico no tratamento de restrições em problemas de OE. Como há uma carência de estudos avaliando a combinação desses elementos nesse tipo de problema e essa combinação tem potencial para se tornar um algoritmo promissor na resolução de POMs em OE, justificou-se então a realização deste trabalho.

O algoritmo baseado em ED adotado aqui para ser acoplado à técnica APM foi o GDE3. Sua escolha se deve ao fato de que, dentre os MOEAs baseados em ED citados em (ZAVALA et al., 2014) como aqueles que podem ser utilizados em trabalhos futuros de POMs em OE, o GDE3 é o que tem a mesma estrutura do NSGA-II (o MOEA mais usado para POMs em OE e que representa o estado da arte da literatura). Foram feitos 4 experimentos, sendo 2 deles objetivando a obtenção da Frente de Pareto completa e os outros 2 regiões da Frente de Pareto que simulam preferências do usuário.

## 12.1 Conclusões

Foi analisado o desempenho do GDE3+APM frente aos algoritmos MOAS e MOACS (ANGELO et al., 2012) e aos algoritmos GDE3 e NSGA-II. Nesta situação, quando comparado aos algoritmos MOAS e MOACS, o GDE3+APM apresentou desempenho significativamente superior nas medidas adotadas: Hipervolume e EAF. Como GDE3+APM, MOACS e MOAS utilizaram a mesma técnica APM, pode-se concluir que o principal responsável por essa melhora de desempenho foi a adoção de um algoritmo baseado em ED como mecanismo de busca, confirmando seu potencial na resolução de POMs do mundo real e agora verificado em POMs de OE.

O GDE3+APM também apresentou desempenho significativamente superior ao algoritmo NSGA-II em quase todas as medidas (a única exceção foi a medida IGD). Isso reforça a tese de que a combinação GDE3+APM é um algoritmo promissor na resolução de POMs em OE, uma vez que ele produziu resultados muito competitivos em relação ao algoritmo que representa o estado da arte. Quando comparado ao GDE3, foi observado que o GDE3+APM apresentou desempenho similar nestes problemas, com melhor performance do caso contínuo da Treliça de 942 Barras. Pode-se concluir que a inserção da técnica APM de fato melhora o desempenho do GDE3 como pode ser observado nos Perfis de Desempenho.

Quanto ao desempenho do R-GDE3+APM, concluiu-se que ele se mostrou com melhor desempenho do que o R-GDE3 mas inferior ao R-NSGA-II. As prováveis causas foram a convergência prematura da Evolução Diferencial, que fez com que a diversidade entre as soluções se perdesse rapidamente, e o fato do operador SBX gerar filhos próximos aos pais.

No cenário de inclusão de preferências de modo interativo, foram propostos os algoritmos I-GDE3+APM, I-GDE3 e I-NSGA-II, tendo o I-GDE3+APM apresentado pior desempenho entre eles. Na maioria dos problemas abordados aqui, o I-GDE3+APM e o I-GDE3 tiveram desempenhos semelhantes. A exceção foi no problema da Treliça de 942 Barras (caso contínuo), onde o algoritmo I-GDE3 teve desempenho superior em todas as medidas, com diferenças estatisticamente significativas entre os resultados, segundo o teste de Wilcoxon. Novamente, em todos os problemas abordados aqui e em quase todas as medidas adotadas, o desempenho do algoritmo I-NSGA-II foi melhor e com diferenças estatisticamente significativas entre os resultados, segundo o teste de Wilcoxon (a exceção foi na medida CM do caso discreto do problema da Treliça de 942 Barras).

Conclui-se que a combinação GDE3+APM se mostrou eficiente na resolução de POMs em OE para obter a Frente de Pareto completa. Entretanto, em cenários de inclusão de informações de preferência do usuário os algoritmos R-GDE3+APM e I-GDE3+APM não foram capazes de superar o operador SBX. No geral, a inclusão da técnica APM provocou uma melhora no desempenho do GDE3 quando comparado à sua proposição original.

Assim, esta tese contribui com a literatura nos seguintes aspectos:

1. Ajuda no preenchimento da lacuna levantada por (ZAVALA et al., 2014) de que nenhum trabalho envolvendo ED na resolução de POMs em OE foi encontrado.

2. Ajuda no preenchimento da lacuna observada de poucos trabalhos que utilizam a técnica APM na resolução de POMs.
3. Propõe a combinação GDE3+APM, que se mostrou promissora na resolução de POMs em OE em problemas cujo objetivo seja a obtenção da Frente de Pareto completa.
4. Descreve vantagens e desvantagens da ED e do SBX em cada cenário na resolução de POMs em OE.
5. Ajuda no preenchimento da lacuna levantada por (ZAVALA et al., 2014) de que a inclusão de informações de preferência do usuário no mecanismo de busca em POMs de OE tem sido mal explorada, inclusive exibindo bons resultados obtidos pelo algoritmo I-NSGA-II (que também foi proposto aqui) frente ao POMONO correspondente em alguns problemas.

## 12.2 Trabalhos Futuros

Trabalhos futuros envolverão pesquisar por modificações nos algoritmos propostos no sentido de melhorar seu desempenho em POMs de OE. Algumas modificações poderiam superar, por exemplo, a perda da diversidade da população em ED nos cenários de inclusão de informação de preferência. Uma modificação que pode ser usada no algoritmo proposto é utilizar soluções do arquivo externo para participar do cruzamento e mutação. Outras modificações possíveis podem englobar adaptação dos parâmetros  $CR$  e  $F$ , busca por mutação e cruzamento mais eficientes, além de hibridização com busca local e/ou com outros AEs.

Um exemplo é a possibilidade de melhorar os resultados utilizando valores de  $F$  em um conjunto de dados criados aleatoriamente a cada iteração com distribuição uniforme no intervalo  $[F_{min}, F_{max}]$ . Outra possibilidade é utilizar lógica *fuzzy* nas definições de preferência, em substituição aos pontos de referência. Essas modificações podem fazer com que o algoritmo consiga uma performance ainda mais competitiva.

Os próximos trabalhos poderão avaliar ainda o desempenho dos algoritmos propostos aqui em outros problemas de otimização estrutural, como por exemplo, os mesmos problemas utilizados nesta tese inserindo restrições de cardinalidade.

## Referências Bibliográficas

- ADELI, H.; CHENG, N. (1994). Concurrent genetic algorithms for optimization of large structures. *Journal of Aerospace Engineering*, 7(3):276–296.
- ANGELO, J.; BERNARDINO, H.; BARBOSA, H. (2012). Multi-objective ant colony approaches for structural optimization problems. In *Proceedings of the Eleventh International Conference on Computational Structures Technology*, Paper 66.
- ANGELO, J.; BERNARDINO, H.; BARBOSA, H. (2015). Ant colony approaches for multiobjective structural optimization problems with a cardinality constraint. *Advances in Engineering Software*, 80:101 – 115.
- ARORA, J. (2012). *Introduction to Optimum Design (Third Edition)*. Academic Press.
- BARBOSA, H.; LEMONGE, A.; FONSECA, L.; BERNARDINO, H. (2010a). Comparing two constraint handling techniques in a binary-coded genetic algorithm for optimization problems. volume 6457 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 125–134.
- BARBOSA, H. J. C.; BERNARDINO, H. S.; BARRETO, A. M. S. (2010b). Using performance profiles to analyze the results of the 2006 cec constrained optimization competition. In *2010 IEEE World Congress on Computational Intelligence - WCCI*.
- BARBOSA, H. J. C.; LEMONGE, A. C. C. (2002). An adaptive penalty scheme in genetic algorithms for constrained optimization problems. In *GECCO'02: Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference.*, pages 287–294, New York.
- BARBOSA, H. J. C.; LEMONGE, A. C. C. (2003a). An adaptive penalty scheme for steady-state genetic algorithms. In *Proceedings of the 2003 International Conference on Genetic and Evolutionary Computation: Part I GECCO'03*, pages 718–729.

- BARBOSA, H. J. C.; LEMONGE, A. C. C. (2003b). A new adaptive penalty scheme for genetic algorithms. *Information Sciences*, 156(3-4):215–251.
- BARBOSA, H. J. C.; LEMONGE, A. C. C. (2008). An adaptive penalty method for genetic algorithms in constrained optimization problems. In Lazinica, A., editor, *Frontiers in Evolutionary Robotics*, pages 9–34, Vienna. I-Tech Education and Publishing.
- BARBOSA, H. J. C.; LEMONGE, A. C. C.; BORGES, C. C. H. (2008). A genetic algorithm encoding for cardinality constraints and automatic variable linking in structural optimization. *Engineering Structures*, 30(12):3708–3723.
- BENTLEY, P. J.; WAKEFIELD, J. P. (1998). Finding acceptable solutions in the pareto-optimal range using multiobjective genetic algorithms. In Chawdhry, P., Roy, R., and Pant, R., editors, *Soft Computing in Engineering Design and Manufacturing*, pages 231–240. Springer London.
- BERNARDINO, H. (2008). *Hybridization of genetic algorithms and artificial immune systems for constrained optimization problems in engineering (in Portuguese)*. Masters thesis, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora.
- BERNARDINO, H. S. (2012). *Programação Imunológica Gramatical para Inferência Automática de Modelos e Projeto Ótimo de Estruturas*. PhD thesis, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Laboratório Nacional de Computação Científica, Brasil.
- BINITHA, S.; SATHYA, S. S. (2012). A survey of bio-inspired optimization algorithms. *International Journal of Soft Computing and Engineering (IJSCE)*, 2(2):137–151.
- BRADSTREET, L. (2011). *The hypervolume indicator for multi-objective optimisation: calculation and use*. PhD thesis, The University of Western, Australia.
- BRANKE, J.; DEB, K.; MIETTINEN, K.; SLOWINSKI, R.; [Editors] (2008). *Multiobjective Optimization, Interactive and Evolutionary Approaches [outcome of Dagstuhl seminars]*, volume 5252 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer.

- BUCHE, D. and DORNBERGER, R. (2001). New evolutionary algorithm for multi-objective optimization and its application to engineering design problems. In *Fourth world congress of structural and multidisciplinary optimization*.
- CARVALHO, E. C. R.; MONTA, B. G.; GARCIA, R. P.; BERNARDINO, H. S.; LEMONGE, A. C. C.; BARBOSA, H. J. C. (2013). Variants of the adaptive penalty methods (apm) for constrained optimization problems applied to engineering problems. In *Proceedings of Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE*.
- CHAFEKAR, D.; XUAN, J.; RASHEED, K. (2003). Constrained multi-objective optimization using steady state genetic algorithms. In *GECCO 2003*, volume 2723 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 813–824.
- CHAUDHURI, S. and DEB, K. (2010). An interactive evolutionary multi-objective optimization and decision making procedure. *Applied Soft Computing*, 10:496–511.
- COELLO, C. (2002). Theoretical and numerical constraint handling techniques used with evolutionary algorithms: a survey of the state of the art. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191:1245–1287.
- COELLO, C.; CHRISTIANSEN, A. (2000). Multiobjective optimization of trusses using genetic algorithms. *Comput. Struct.*, 75(6):647–660.
- COELLO, C. A. C.; LAMONT, G. B.; VELDHUIZEN, D. A. V. (2007). *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems (Genetic and Evolutionary Computation)*. Springer-Verlag New York, Inc., 2nd edition.
- CROSSLEY, W.; WILLIAMS, E. (1997). A study of adaptive penalty functions for constrained genetic algorithm based optimization. In *In Proceedings of the 35th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit (AIAA 97)*, Reno, Nevada.
- SILVA, E. K. (2009). Evolução diferencial para problemas de otimização restrita. Master's thesis, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Laboratório Nacional de Computação Científica, Brasil.
- DAS, S.; SUGANTHAN, P. (2011). Differential evolution: A survey of the state-of-the-art. *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on*, 15(1):4–31.

- DEB, K. (2000). An efficient constraint handling method for genetic algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 186:311–338.
- DEB, K. (2001). *MultiObjective Optimization using Evolutionary Algorithms*. John Wiley & Sons.
- DEB, K. (2008). Introduction to evolutionary multiobjective optimization. In Branke, J., Deb, K., Miettinen, K., and Slowinski, R., editors, *Multiobjective Optimization, Interactive and Evolutionary Approaches*, volume 5252 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 59–96. Springer.
- DEB, K.; AGRAWAL, S. (1995). Simulated binary crossover for continuous search space. *Complex System*, 2(9):115–148.
- DEB, K.; DATTA, R. (2010). A fast and accurate solution of constrained optimization problems using a hybrid bi-objective and penalty function approach. In *Evolutionary Computation (CEC), 2010 IEEE Congress on*, pages 1–8.
- DEB, K.; JAIN, H. (2014). An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach, part i: Solving problems with box constraints. *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on*, 18(4):577–601.
- DEB, K.; KARTHIK, S.; OKABE, T. (2007a). Self-adaptive simulated binary crossover for real-parameter optimization. In *GECCO'07: Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference.*, pages 1187–1194, London, UK.
- DEB, K.; PADMANABHAN, D.; GUPTA, S.; MALL, A. (2007b). Reliability-based multi-objective optimization using evolutionary algorithms. In *Evolutionary Multi-Criterion Optimization*, volume 4403 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 66–80. Springer.
- DEB, K.; PRATAP, A.; AGARWAL, S.; MEYARIVAN, T. (2002). A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2(6):182–197.
- DEB, K.; SRINIVAS, N. (1995). Multiobjective function optimization using nondominated sorting genetic algorithms. *Evolutionary Computation* 3, 2:221–248.

- DEB, K.; SUNDAR, J. (2006). Reference point based multi-objective optimization using evolutionary algorithms. In *GECCO'06: Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference.*, pages 635–642, New York.
- DOLAN, E. D.; MORE, J. (2002). Benchmarking optimization software with performance profiles. *Mathematical Programming*, 91:201–213.
- ERBATUR, F.; HASANÇEBİ, O.; TÛTÛNCÛ, I.; KILIÇ, H. (2000). Optimal design of planar and space structures with genetic algorithms. *Computers & Structures*, 75(2):209–224.
- FLEMING, P.; PURSHOUSE, R.; LYGOE, R. (2005). Many-objective optimization: An engineering design perspective. In Coello Coello, C., Hernández Aguirre, A., and Zitzler, E., editors, *Evolutionary Multi-Criterion Optimization*, volume 3410 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 14–32. Springer Berlin Heidelberg.
- FONSECA, C.; FLEMING, P. (1996). On the performance assessment and comparison of stochastic multiobjective optimizers. In *Proceedings of Parallel Problem Solving from Nature IV (PPSN-IV)*, pages 584–593.
- GALLET, C.; SALAUN, M.; BOUCHET, E. (2005). An example of global structural optimisation with genetic algorithms in the aerospace field. In *Proceedings of The VIII International Conference on Computational Plasticity COMPLAS VIII, Barcelona*, pages 1–4.
- GANG, W.; CHENMING, L.; YIXIN, L. (2013). A new method of optimal design on terminal trajectory correction projectile. In *2013 IEEE International Conference on Signal Processing, Communication and Computing (ICSPCC)*, pages 1–5.
- GOLDBERG, D. E. (1989). *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 1st edition.
- HADJ-ALOUANE, A.; BEAN, J. (1997). A genetic algorithm for the multiple-choice integer program. *Operations Research*, 45:92–101.

- HAIMES, Y. Y.; LASDON, U.; WISMER, D. A. (1971). On a bicriterion formulation of the problems of integrated system identification and system optimization. *IEEE Transactions on Syst Man Cybern*, 1(3):296–297.
- HAJELA, P.; LIN, C. (1992). Genetic search strategies in multicriterion optimal design. *Struct Multidiscip Optim*, 4(2):99–107.
- HAMDA, H.; SCHOENAUER, M. (2000). Adaptive techniques for evolutionary topological optimum design. In *In Proceedings of the Fourth International Conference on Adaptive Computing in Design and Manufacture (ACDM 2000)*, pages 123–136, Devon, UK.
- HAMIDA, S.; SCHOENAUER, M. (2002). Aschea: new results using adaptive segregational constraint handling. In *Proceedings of the Congress on Evolutionary Computation (CEC 2002)*, pages 884–889, Piscataway, New Jersey.
- HASANÇEBİ, O. (2008). Adaptive evolution strategies in structural optimization: Enhancing their computational performance with applications to large-scale structures. *Computers & Structures*, 86(1-2):119–132.
- HASANÇEBİ, O.; ERBATUR, F. (2002). On efficient use of simulated annealing in complex structural optimization problems. *Acta Mechanica*, 157:27–50.
- HE, Q.; WANG, L.; HUANG, F. (2008). Nonlinear constrained optimization by enhanced co-evolutionary pso. In *IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC 2008)*, pages 83–89.
- HOFFMEISTER, F.; SPRAVE, J. (1996). Problem-independent handling of constraints by use of metric penalty functions. In *In Proceedings of the Fifth Annual Conference on Evolutionary Programming (EP96)*, pages 289–294, San Diego, California.
- HOLLAND, J. (1975). *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press.
- HOMAIFAR, A.; LAI, S.; QI, X. (1994). Constrained optimization via genetic algorithms. *Simulation*, 62:242–254.

- HORN, J. (1997). Multicriterion decision making. In *Handbook of evolutionary computation*. University Press.
- IZUI, K.; NISHIWAKI, S.; YOSHIMURA, M.; NAKAMURA, M.; RENAUD, J. (2008). Enhanced multiobjective particle swarm optimization in combination with adaptive weighted gradient-based searching. *Eng. Optim.*, 40(9):789–804.
- JOINES, J.; HOUCK, C. (1994). On the use of non-stationary penalty functions to solve nonlinear constrained optimization problems with gas. In *In Proceedings of the first IEEE Conference on Evolutionary Computation (CEC 94)*, pages 579–584, Orlando, Florida.
- KARAHAN, I.; KOKSALAN, M. (2010). A territory defining multiobjective evolutionary algorithms and preference incorporation. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 14(4):636–664.
- KAVEH, A.; LAKNEJADI, K. (2011). A hybrid multi-objective optimization and decision making procedure for optimal design of truss structures. *IJST Trans. Civ. Eng.*, 35(C2):137–154.
- KAZARLIS, S.; PETRIDIS, V. (1998). Varying fitness functions in genetic algorithms: studying the rate of increase of the dynamic penalty terms. In *In Proceedings of the 5th Parallel Problem Solving from Nature (PPSN V)*, pages 211–220, Amsterdam, Netherlands.
- KNOWLES, J.; THIELE, L.; ZITZLER, E. (2006). A tutorial on the performance assessment of stochastic multiobjective optimizers. Tik report 214, Computer Engineering and Networks Laboratory, TIK, ETH, Zurich.
- KOKSALAN, M.; KARAHAN, I. (2010). An interactive territory defining evolutionary algorithm: itdea. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 14(5):702–722.
- KUKKONEN, S. (2012). *Generalized Differential Evolution for Global Multi-Objective Optimization with Constraints*. PhD thesis, Lappeenranta University of Technology, Finlandia.
- KUKKONEN, S.; LAMPINEN, J. (2004). A differential evolution algorithm for constrained multi-objective optimization: Initial assessment. In *In Proceedings of*

*the IASTED International Conference on Artificial Intelligence and Applications*, pages 96–102. ACTA Press.

KUKKONEN, S.; LAMPINEN, J. (2005). Gde3: The third evolution step of generalized differential evolution. In *IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC 2005)*, pages 443–450. IEEE.

KUKKONEN, S.; LAMPINEN, J. (2006). An empirical study of control parameters for the third version of generalized differential evolution (gde3). In *2006 Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation - CEC06*, pages 2002–2009.

KURI-MORALES, A.; QUEZADA, C. (1998). A universal eclectic genetic algorithm for constrained optimization. In *In Proceedings of the 6th European Congress on Intelligent Techniques & Soft Computing (EUFIT 98)*, pages 518–522, Aachen, Germany.

LAMPINEN, J. (2000). Multiobjective nonlinear pareto optimization. A pre-investigation report, Laboratory of Information Processing, Lappeenranta University of Technology, Lappeenranta, Finland.

LAMPINEN, J. (2001). De's selection rule for multiobjective optimization. Tech. rep., Lappeenranta University of Technology.

LEMONGE, A.; BARBOSA, H.; BERNARDINO, H. (2015). Variants of an adaptive penalty scheme for steady-state genetic algorithms in engineering optimization. *Engineering Computations*, 8(32).

LEMONGE, A.; BARBOSA, H.; (2004). An adaptive penalty scheme for genetic algorithms in structural optimization. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 59(5):703–736.

LI, H.; ZHANG, Q. (2009). Multiobjective optimization problems with complicated pareto sets, moea/d and nsga-ii. *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on*, 13(2):284–302.

LIU, X.; CHENG, G.; WANG, B.; LIN, S. (2012). Optimum design of pile foundation by automatic grouping genetic algorithms. *International Scholarly Research Network ISRN Civil Engineering*, 2012:1–16. Article ID 678329.

- LÓPEZ-IBÁÑEZ, M.; PAQUETE, L.; STÜTZLE, T. (2010). Exploratory analysis of stochastic local search algorithms in biobjective optimization. In Bartz-Beielstein, T., Chiarandini, M., Paquete, L., and Preuss, M., editors, *Experimental Methods for the Analysis of Optimization Algorithms*, pages 209–222. Springer, Berlin, Germany.
- LUH, G.; CHUEH, C. (2004). Multi-objective optimal design of truss structure with immune algorithm. *Comput Struct*, 82(11-12):829–844.
- MANI, A.; PATVARDHAN, C. (2009). A novel hybrid constraint-handling technique for evolutionary optimization. In *IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC 2009)*, pages 2577–2583.
- MEZURA-MONTES, E.; COELLO, C. A. C. (2011). Constraint-handling in nature-inspired numerical optimization: Past, present and future. *Swarm and Evolutionary Computation*, 1(4):173–194.
- MEZURA-MONTES, E.; REYES-SIERRA, M.; COELLO, C. A. C. (2008). Multi-objective optimization using differential evolution: A survey of the state-of-the-art. In Chakraborty, U., editor, *Advances in Differential Evolution*, pages 173–196. Springer Berlin Heidelberg.
- MICHALEWICZ, Z.; ATTIA, N. (1994). Evolutionary optimization of constrained problems. In *In Proceedings of the 3rd Annual Conference on Evolutionary Programming*, pages 98–108.
- MICHALEWICZ, Z.; FOGEL, D. B. (2004). *How to Solve It: Modern Heuristics*. Springer, enlarged 2nd edition.
- MIETTINEN, K. (1999). *Nonlinear Multiobjective Optimization*. International Series in Operations Research & Management Science. Springer US.
- MOHAMMADI, A.; OMIDVAR, M. N.; LI, X. (2013). A new performance metric for user-preference based multi-objective evolutionary algorithms. In *Proceedings of the Congress on Evolutionary Computation (CEC 2013)*, pages 2825–2832.
- NAUJOKS, B. (2011). *Design and Tuning of an Evolutionary Multiobjective Optimisation Algorithm*. PhD thesis, The University of Technology, Dortmund, Germany.

- PAQUET, E.; VIKTOR, H. (2013). Macromolecular structure comparison and docking: An algorithmic review. *Current Pharmaceutical Design*, 12(19):2183–2193.
- PARETO, V. (1896). *Cours d'économie politique: volume i and ii*. F. Rouge - Lausanne.
- PATNAIK, S.; HOPKINS, D.; CORONEOS, R. (1996). Structural optimization with approximate sensitivities. *Computer and Structures*, 58(2):407–418.
- PIERRE, D. A. (2012). *Optimization theory with applications*. Courier Dover Publications.
- POWELL, D.; SKOLNICK, M. (1993). Using genetic algorithms in engineering design optimization with non-linear constraints. In *In Proceedings of the Fifth International Conference on Genetic Algorithms*, pages 424–431, San Mateo, California.
- PURSHOUSE, R.; DEB, K.; MANSOR, M.; MOSTAGHIM, S.; WANG, R. (2014). A review of hybrid evolutionary multiple criteria decision making methods. In *Evolutionary Computation (CEC), 2014 IEEE Congress on*, pages 1147–1154.
- PUZZI, S.; CARPINTERI, A. (2008). A double-multiplicative dynamic penalty approach for constrained evolutionary optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 35:431–445.
- RAAD, D. N. (2011). *Multi-objective optimisation of water distribution systems design using metaheuristics*. PhD thesis, University of Stellenbosch, South Africa.
- RASHEED, K. (1998). An adaptive penalty approach for constrained genetic-algorithm optimization. In *In Proceedings of the Third Annual Genetic Programming Conference*, pages 584–590, San Francisco, California.
- RAY, T.; TAI, K.; SEOW, C. (2001). An evolutionary algorithm for multiobjective optimization. *Eng. Optim.*, 33(3):399–424.
- TAKAHASHI, R.H.C. (2009). Otimização escalar e vetorial - volume 3: Otimização vetorial. <http://www.mat.ufmg.br/~taka/Download/OTEV-Vol3.pdf>. Acessado em 01-10-2014.

- RICHE, R.; KNOPF-LENOIR, C.; HAFTKA, R. (1995). A segregated genetic algorithm for constrained structural optimization. In *In Proceedings of the Sixth International Conference on Genetic Algorithms (ICGA 95)*, pages 558–565, San Mateo, California.
- ROBIC, T.; FILIPIC, B. (2005). Demo: Differential evolution for multiobjective optimization. In *EMO 2005*, pages 520–533. Springer-Verlag.
- ROCHA, A.; FERNANDES, E. (2009). Self-adaptive penalties in the electromagnetism-like algorithm for constrained global optimization problems. In *Proceedings of The 8th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*, pages 1–10.
- SANCHIS, J.; MARTINEZ, M.; BLASCO, X. (2008). Multi-objective engineering design using preferences. *Eng Optim*, 40(3):253–269.
- SANCHIS, J.; MARTINEZ, M.; BLASCO, X.; REYNOSO-MEZA, G. (2010). Modelling preferences in multi-objective engineering design. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 23:1255–1264.
- SCHAFFER, J. (1984). *Some Experiments in Machine Learning Using Vector Evaluated Genetic Algorithms*. PhD thesis, Vanderbilt University, Nashville, TN.
- SHAPIRO, S. S.; WILK, M. B. (1965). An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples). *Biometrika*, 52(3/4):591–611.
- SHARMA, D.; KUMAR, A.; DEB, K.; SINDHYA, K. (2007). Hybridization of sbx based nsga-ii and sequential quadratic programming for solving multi-objective optimization problems. In *Evolutionary Computation, 2007. CEC 2007. IEEE Congress on*, pages 3003–3010.
- SIERRA, M. R.; COELLO, C. A. C. (2005). Improving pso-based multi-objective optimization using crowding, mutation and epsilon-dominance. In *EMO 2005*, pages 505–519. Springer-Verlag.
- SILVA, A.; LEMONGE, A. C. C.; LIMA, B. S. L. P.; JACOB, B.; BARBOSA, H. J. C. (2011a). Solving constrained optimization problems in mechanical engineering using a pso and an adaptive penalty method. In *Proceedings of Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE*.

- SILVA, E. K.; AUGUSTO, D. A.; BARBOSA, H. J. C. (2013). Improved surrogate model assisted differential evolution with an infill criterion. In *Proceedings of 10th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*.
- SILVA, E. K.; BARBOSA, H. J. C.; BERNARDINO, H. S. (2011b). An adaptive hybrid differential evolution and genetic algorithm for truss optimization problems. In *Proceedings of Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE*.
- SILVA, E. K.; BARBOSA, H. J. C.; LEMONGE, A. C. C. (2008). An adaptive constraint handling technique for differential evolution in engineering optimization. In *Proceedings of International Conference of Engineering Optimization - EngOpt 2008*.
- SILVA, E. K.; BARBOSA, H. J. C.; LEMONGE, A. C. C. (2011c). An adaptive constraint handling technique for differential evolution with dynamic use of variants in engineering optimization. *Optimization and Engineering*, 12(1-2):31–54.
- SILVA, M.; LEMONGE, A. C. C.; BARBOSA, H. J. C. (2011d). Structural optimization of geometrically nonlinear planar frames considering multiple cardinality constraints. In *Proceedings of Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE*.
- STORN, R.; PRICE, K. (1995). Differential evolution a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces. Tech. Rep. 95-012, Univ. of California, Berkeley, CA.
- STORN, R.; PRICE, K. (1997). Differential evolution a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*, 11(4):341–359.
- SU, R.; WANG, X.; GUI, L.; FAN, Z. (2010). Multi-objective topology and sizing optimization of truss structures based on adaptive multi-island search strategy. *Struct Multidiscip Optim*, 43(2):275–286.
- TASGETIREN, M. F.; SUGANTHAN, P. N. (2006). A multi-populated differential

- evolution algorithm for solving constrained optimization problem. In *IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC 2006)*, pages 340–354.
- TESSEMA, B.; YEN, G. (2006). A self adaptive penalty function based algorithm for constrained optimization. *Proceedings of the Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, pages 246–253.
- TESSEMA, B.; YEN, G. (2009). An adaptive penalty formulation for constrained evolutionary optimization. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics Part A-Systems and Humans*, 39.
- VARGAS, D.; LEMONGE, A.; BARBOSA, H.; BERNARDINO, H. (2013). Differential evolution with the adaptive penalty method for constrained multiobjective optimization. In *Evolutionary Computation (CEC), 2013 IEEE Congress on*, pages 1342–1349.
- VARGAS, D.; LEMONGE, A.; BARBOSA, H.; BERNARDINO, H. (2014). Análise do desempenho de algoritmos baseados em evolução diferencial acoplados a uma técnica de penalização adaptativa em problemas de otimização estrutural multiobjetivo com restrições. In *XI Simpósio de Mecânica Computacional SIMMEC 2014*, Juiz de Fora.
- VARGAS, D.; LEMONGE, A.; BARBOSA, H.; BERNARDINO, H. (2015). Um algoritmo baseado em evolução diferencial para problemas de otimização estrutural multiobjetivo com restrições. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo e Design em Engenharia (RIMNI)*, 31(3).
- VELDHUIZEN, D. A. V. (1999). *Multiobjective Evolutionary Algorithms: Classifications, Analyses, and New Innovations*. PhD thesis, Department of Electrical and Computer Engineering. Graduate School of Engineering. Air Force Institute of Technology, Ohio, EUA.
- VELDHUIZEN, D. A. V.; LAMONT, G. B. (1998). Evolutionary computation and convergence to a pareto front. In *Stanford University, California*, pages 221–228. Morgan Kaufmann.
- VENTER, G.; HAFTKA, R. (2010). Constrained particle swarm optimization using a bi-objective formulation. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 40:65–76.

- VON LUCKEN, C.; BARÁN, B.; BRIZUELA, C. (2014). A survey on multi-objective evolutionary algorithms for many-objective problems. *Computational Optimization and Applications*, 58(3):707–756.
- WILCOXON, F. (1945). Individual comparisons by ranking methods. *Biometrics Bulletin*, 1(6):80–83.
- WOLDESENBET, Y.; TESSEMA, B.; YEN, G. (2009). Constraint handling in multiobjective evolutionary optimization. In *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, volume 13(3), pages 514–525.
- WOLPERT, D.; MACREADY, W. (1997). No free lunch theorems for optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 1(1):67–82.
- WU, J. (2011). Solving constrained global optimization via artificial immune system. In *International Journal on Artificial Intelligence Tools*, number 20, pages 1–27.
- XUE, F. (2004). *Multiobjective Differential Evolution: Theory and Applications*. PhD thesis, Rensselaer Polytechnic Institute, New York.
- YEN, G. G. (2009). *Constraint-Handling in Evolutionary Optimization*, volume 198, chapter An adaptive penalty function for handling constraint in multi-objective evolutionary optimization, pages 121–143. Springer-Verlag Studies in Computational Intelligence Series.
- YOUNG, C.-T.; ZHENG, Y.; YEH, C.-W.; JANG, S.-S. (2007). Information-guided genetic algorithm approach to the solution of MINLP problems. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 46(5):1527–1537.
- YOUSEFI, M.; ENAYATIFAR, R.; DARUS, A. N.; ABDULLAH, A. H. (2012). A robust learning based evolutionary approach for thermal-economic optimization of compact heat exchangers. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 39(10):1605 – 1615.
- YOUSEFI, M.; ENAYATIFAR, R.; DARUS, A. N.; ABDULLAH, A. H. (2013). Optimization of plate-fin heat exchangers by an improved harmony search algorithm. *Applied Thermal Engineering*, 50(1):877 – 885.

- ZAVALA, G.; NEBRO, A. J.; LUNA, F.; COELLO, C. (2014). A survey of multi-objective metaheuristics applied to structural optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 49(4):537–558.
- ZHANG, Q.; LI, H. (2007). A multi-objective evolutionary algorithm based on decomposition. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, Accepted, 2007.
- ZHANG, Q.; LIU, W.; LI, H. (2009). The performance of a new version of moea/d on cec09 unconstrained mop test instances. In *Evolutionary Computation, 2009. CEC '09. IEEE Congress on*, pages 203–208.
- ZHANG, Q.; LIU, W.; TSANG, E.; VIRGINAS, B. (2010). Expensive multiobjective optimization by moea/d with gaussian process model. *Trans. Evol. Comp*, 14(3):456–474.
- ZHOU, A.; QU, B.; LI, H.; ZHAO, S. Z.; SUGANTHAN, P. N.; ZHANG, Q. (2011). Multiobjective evolutionary algorithms: A survey of the state of the art. *Swarm and Evolutionary Computation*, 1(1):32–49.
- ZITZLER, E.; DEB, K.; THIELE, L. (2000). Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: Empirical results. *Evolutionary Computation*, 8(2):173–195.
- ZITZLER, E.; KÜNZLI, S. (2004). Indicator-based selection in multiobjective search. In *in Proc. 8th International Conference on Parallel Problem Solving from Nature (PPSN VIII)*, pages 832–842. Springer.
- ZITZLER, E.; LAUMANN, M.; THIELE, L. (2001). Spea2: Improving the strength pareto evolutionary algorithm. Technical report, Swiss Federal Institute of Technology (ETH) Zurich.
- ZITZLER, E.; THIELE, L. (1999). Multiobjective evolutionary algorithms: A comparative case study and the strength pareto approach. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 3(4):257–271.
- ZITZLER, E.; THIELE, L.; LAUMANN, M.; FONSECA, C. M.; V.G.FONSECA (2003). Performance assessment of multiobjective optimizers: An analysis and review. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 7(2):117–132.

# APÊNDICE A - Análise Paramétrica

## Experimento 1

Para determinar a escolha dos parâmetros do GDE3+APM, uma experimentação preliminar para definir uma combinação promissora dos valores dos parâmetros  $CR$  e  $F$  foi realizada. Como sugerido em (KUKKONEN; LAMPINEN, 2006), os valores de  $CR$  e  $F$  foram delimitados nos intervalos de  $[0,1]$  e  $[0,3]$ , respectivamente. Para o caso discreto das Treliças de 10, 25, 60 e 72 Barras, foram realizadas 10 execuções independentes com cada par de valores de  $CR \in \{0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$  e  $F \in \{0,1; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3\}$ , obtendo um total de 350 *SPOs* para cada problema (10 execuções para cada uma das 35 combinações dos valores de  $CR$  e  $F$ ).

Assim como alguns trabalhos encontrados na literatura, por exemplo (NAUJOKS, 2011), a medida de desempenho aqui adotada para a escolha dos melhores parâmetros foi o Hipervolume. Isso porque trata-se de uma medida de desempenho bastante popular que não depende do conhecimento da Frente de Pareto real. Além disso, (BRADSTREET, 2011) afirma que um *SPO* com um Hipervolume maior é mais susceptível de apresentar melhores resultados em outras medidas de desempenho do que *SPOs* com menor Hipervolume.

Após a realização do procedimento de normalização, para cada uma das 35 combinações dos valores de  $CR$  e  $F$  foi realizado o cálculo do Hipervolume dos 10 *SPOs* normalizados. A Figura A.1 mostra a média do Hipervolume dos 10 *SPOs* normalizados para cada uma das 35 combinações dos valores de  $CR \in \{0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$  e  $F \in \{0,1; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3\}$  para cada um dos problemas das Treliças de 10, 25, 60 e 72 Barras (caso discreto).

Ao observar os resultados apresentados na Figura A.1, percebe-se que as combinações de parâmetros que fornecem médias do Hipervolume mais promissoras se encontram em regiões onde  $F \leq 1,5$ . Dessa forma, uma segunda análise com combinações mais refinadas nos intervalos de  $CR \in [0,1]$  e  $F \in [0; 1,5]$  foi realizada, novamente com 10 execuções. Os parâmetros  $CR$  e  $F$  foram definidos nos conjuntos  $CR \in \{0,1; 0,2; 0,3; \dots; 0,8; 0,9\}$  e  $F \in \{0,1; 0,2; 0,3; \dots; 1,4; 1,5\}$ . A Figura A.2 mostra a média do Hipervolume dos 10 *SPOs*

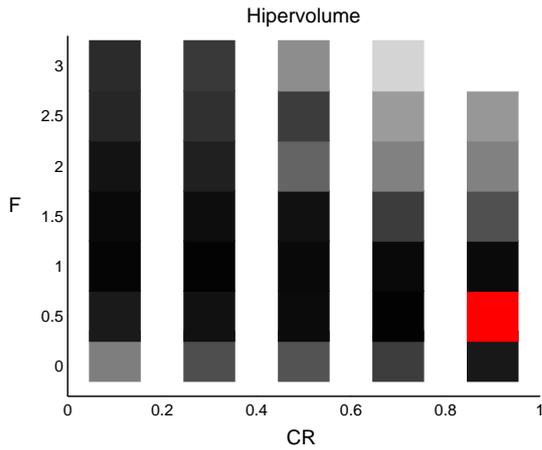
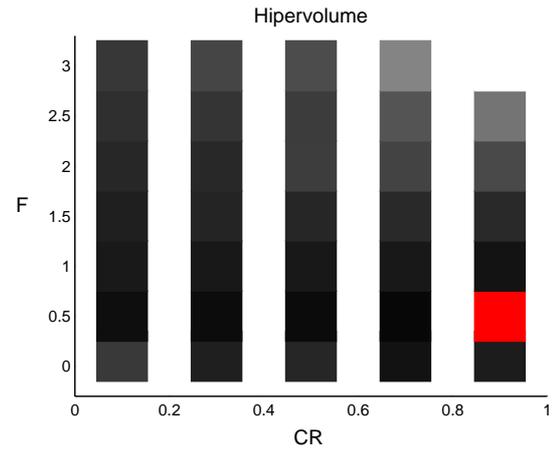
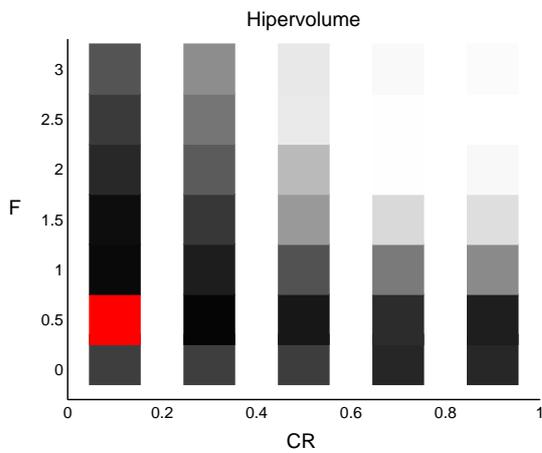
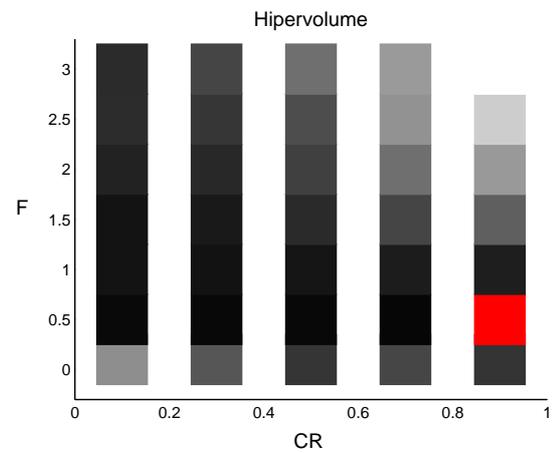
(a)  $H_{max} = 0.8397$  e  $H_{min} = 0.7978$ (b)  $H_{max} = 0.8885$  e  $H_{min} = 0.8766$ (c)  $H_{max} = 0.7559$  e  $H_{min} = 0.5556$ (d)  $H_{max} = 0.9206$  e  $H_{min} = 0.8831$ 

Figura A.1: Média do Hipervolume dos 10 *SPOs* normalizados obtidos pelo GDE3+APM para cada combinação dos valores de  $CR \in \{0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$  e  $F \in \{0,1; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3\}$  dos problemas das Treliças de 10 (a), 25 (b), 60 (c) e 72 (d) Barras (caso discreto). Quanto mais escuro, maior o Hipervolume, sendo que o vermelho representa a combinação que atingiu o Hipervolume Máximo.

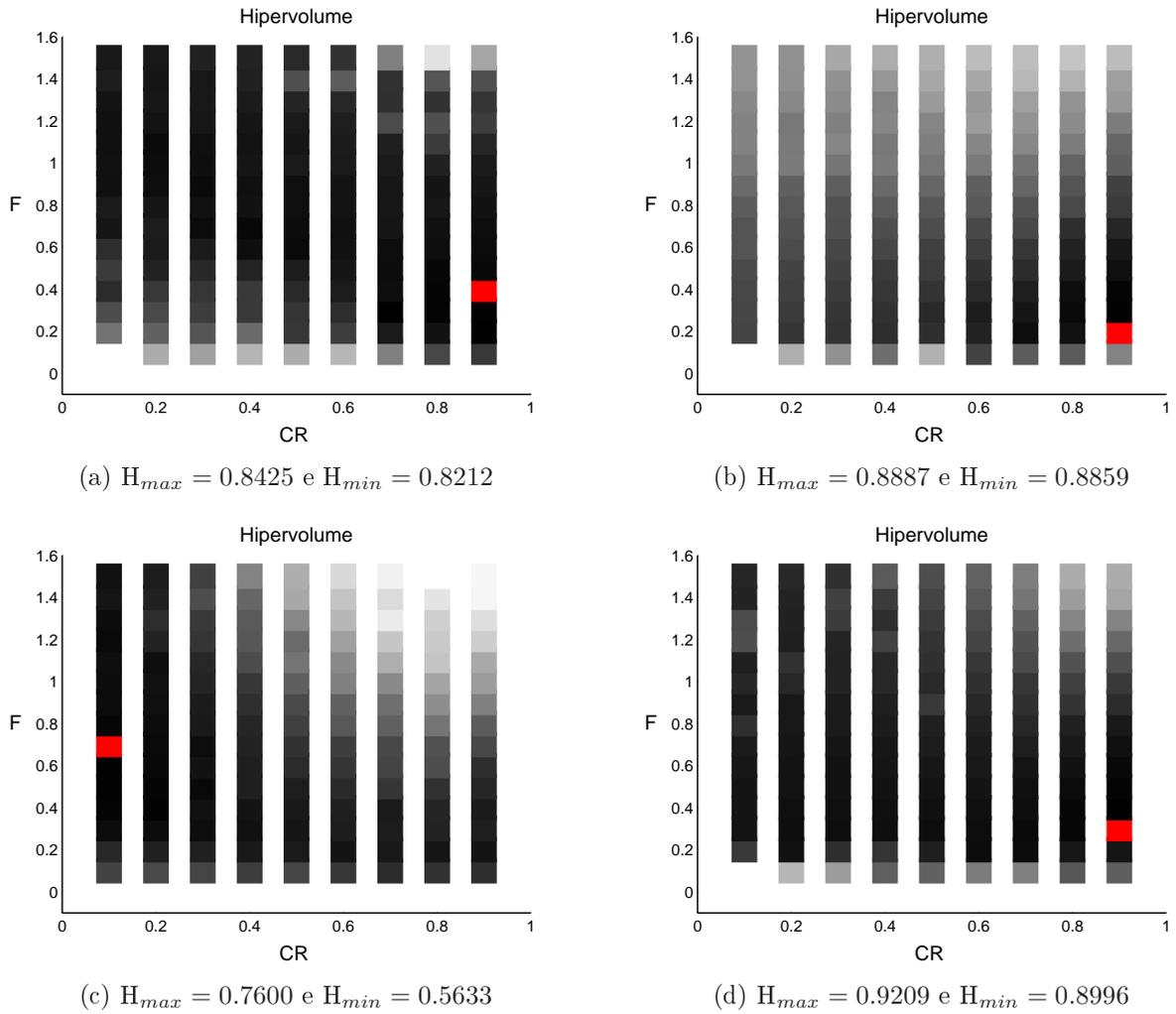


Figura A.2: Média do Hipervolume dos 10 *SPOs* normalizados obtidos pelo GDE3+APM para cada combinação dos valores de  $CR \in \{0,1; 0,2; 0,3; \dots; 0,8; 0,9\}$  e  $F \in \{0,1; 0,2; 0,3; \dots; 1,4; 1,5\}$  dos problemas das Treliças de 10 (a), 25 (b), 60 (c) e 72 (d) Barras (caso discreto). Quanto mais escuro, maior o Hipervolume, sendo que o vermelho representa a combinação que atingiu o Hipervolume Máximo.

normalizados para cada uma das novas 135 combinações dos valores de  $CR$  e  $F$  para cada um dos problemas das Treliças de 10, 25, 60 e 72 Barras (caso discreto). Os melhores resultados da Figura A.2 foram os valores de  $CR$  e  $F$  adotados nesse experimento (Tabela A.4).

Para o caso discreto da Treliça de 942 Barras, a escolha dos parâmetros também foi feita experimentalmente mas com um orçamento mais limitado, devido ao alto custo computacional relacionado à sua resolução. Em uma primeira busca, o valor de  $F = 0,5$  foi mantido fixo por ter sido um valor que apresentou excelentes resultados nos demais problemas (Figura A.1). Foram realizadas 5 execuções independentes com  $F = 0,5$  e

$CR \in \{0,1;0,3;0,5;0,7;0,9\}$ , no intuito de determinar qual o valor de  $CR$  seria mais adequado para fazer par com  $F = 0,5$ . A Tabela A.1 mostra a média do Hipervolume obtida por cada par. O melhor resultado está em negrito.

Tabela A.1: Média do Hipervolume (H) dos 5  $SPOs$  normalizados obtidos pelo GDE3+APM para cada combinação dos valores de  $CR \in \{0,1;0,3;0,5;0,7;0,9\}$  com  $F = 0,5$  para o problema da Treliça de 942 Barras (caso discreto).

| $CR$ | 0,1           | 0,3    | 0,5    | 0,7    | 0,9    |
|------|---------------|--------|--------|--------|--------|
| H    | <b>0.9325</b> | 0.9226 | 0.8966 | 0.8618 | 0.8546 |

Ao observar a Tabela A.1, observa-se que menores valores de  $CR$  produzem melhores resultados com  $F = 0,5$  do que valores maiores. Uma segunda partição do domínio é então feita: mantendo o valor de  $CR = 0,1$  fixo, são realizadas 5 execuções independentes com  $F \in \{0,1;0,3;0,5;0,7;0,9\}$ , no intuito de avaliar o comportamento do algoritmo com essa variação de parâmetros. A Tabela A.2 mostra a média do Hipervolume obtida por cada par. O melhor resultado está em negrito.

Tabela A.2: Média do Hipervolume (H) dos 5  $SPOs$  normalizados obtidos pelo GDE3+APM para cada combinação dos valores de  $F \in \{0,1;0,3;0,5;0,7;0,9\}$  com  $CR = 0,1$  para o problema da Treliça de 942 Barras (caso discreto).

| $F$ | 0,1    | 0,3    | 0,5    | 0,7           | 0,9    |
|-----|--------|--------|--------|---------------|--------|
| H   | 0.8389 | 0.9025 | 0.9227 | <b>0.9313</b> | 0.9245 |

Pela Tabela A.2, identifica-se  $CR = 0,1$  e  $F = 0,7$  como a melhor combinação dentre as testadas. Uma busca com combinações de parâmetros nessa vizinhança foi realizada. A Tabela A.3 mostra a média do Hipervolume obtida por cada uma dessas combinações, as quais também sugerem  $CR = 0,1$  e  $F = 0,7$  a combinação mais promissora para este problema. Estes parâmetros, juntamente com os mais promissores dos demais problemas analisados anteriormente, foram os valores de  $CR$  e  $F$  adotados nesse experimento (Tabela A.4).

Tabela A.3: Média do Hipervolume (H) dos 5  $SPOs$  normalizados obtidos pelo GDE3+APM para cada combinação de parâmetros na vizinhança de  $CR = 0,1$  e  $F = 0,7$  para o problema da Treliça de 942 Barras (caso discreto).

| $CR$ | 0,1    |               |        | 0,3    |        |        |
|------|--------|---------------|--------|--------|--------|--------|
| $F$  | 0,5    | 0,7           | 0,9    | 0,5    | 0,7    | 0,9    |
| H    | 0.9250 | <b>0.9335</b> | 0.9273 | 0.9089 | 0.8927 | 0.8813 |

Tabela A.4: Valores dos parâmetros  $CR$  e  $F$  adotados pelo algoritmo GDE3+APM para cada um dos problemas das Treliças de 10, 25, 60, 72 e 942 Barras (caso discreto) no Experimento 1.

| Problema   | $CR$ | $F$ |
|------------|------|-----|
| 10 Barras  | 0,9  | 0,4 |
| 25 Barras  | 0,9  | 0,2 |
| 60 Barras  | 0,1  | 0,7 |
| 72 Barras  | 0,9  | 0,3 |
| 942 Barras | 0,1  | 0,7 |

## Experimento 2

### *GDE3+APM*

A mesma variação de parâmetros feita na seção anterior para definir uma combinação promissora dos valores dos parâmetros  $CR$  e  $F$  para o GDE3+APM foi realizada aqui, dessa vez considerando o caso contínuo dos mesmos problemas. A Figura A.3 mostra a média do Hipervolume dos 10  $SPOs$  normalizados para cada uma das 35 combinações dos valores de  $CR \in \{0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$  e  $F \in \{0,1; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3\}$  para cada um dos problemas das Treliças de 10, 25, 60 e 72 Barras (caso contínuo).

Os resultados apresentados na Figura A.3 indicam que as combinações de parâmetros que fornecem médias do Hipervolume mais promissoras se encontram em regiões onde  $F \leq 1,5$ . Da mesma forma como foi feito na seção anterior, uma segunda análise com combinações nos conjuntos  $CR \in \{0,1; 0,2; 0,3; \dots; 0,8; 0,9\}$  e  $F \in \{0,1; 0,2; 0,3; \dots; 1,4; 1,5\}$  foi realizada. A Figura A.4 mostra os resultados, sendo os melhores deles adotados nesse experimento (Tabela A.8).

Para o caso contínuo da Treliça de 942 Barras, a escolha dos parâmetros foi feita da mesma maneira que no caso discreto. Foram realizadas 5 execuções independentes com  $F = 0,5$  e  $CR \in \{0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$ , no intuito de determinar qual o valor de  $CR$  seria mais adequado como par. A Tabela A.5 mostra a média do Hipervolume obtida por cada par, onde o melhor resultado está em negrito.

Tabela A.5: Média do Hipervolume (H) dos 5  $SPOs$  normalizados obtidos pelo GDE3+APM para cada combinação dos valores de  $CR \in \{0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$  com  $F = 0,5$  para o problema da Treliça de 942 Barras (caso contínuo).

| $CR$ | 0,1           | 0,3    | 0,5    | 0,7    | 0,9    |
|------|---------------|--------|--------|--------|--------|
| H    | <b>0.9272</b> | 0.9185 | 0.8782 | 0.8559 | 0.8550 |

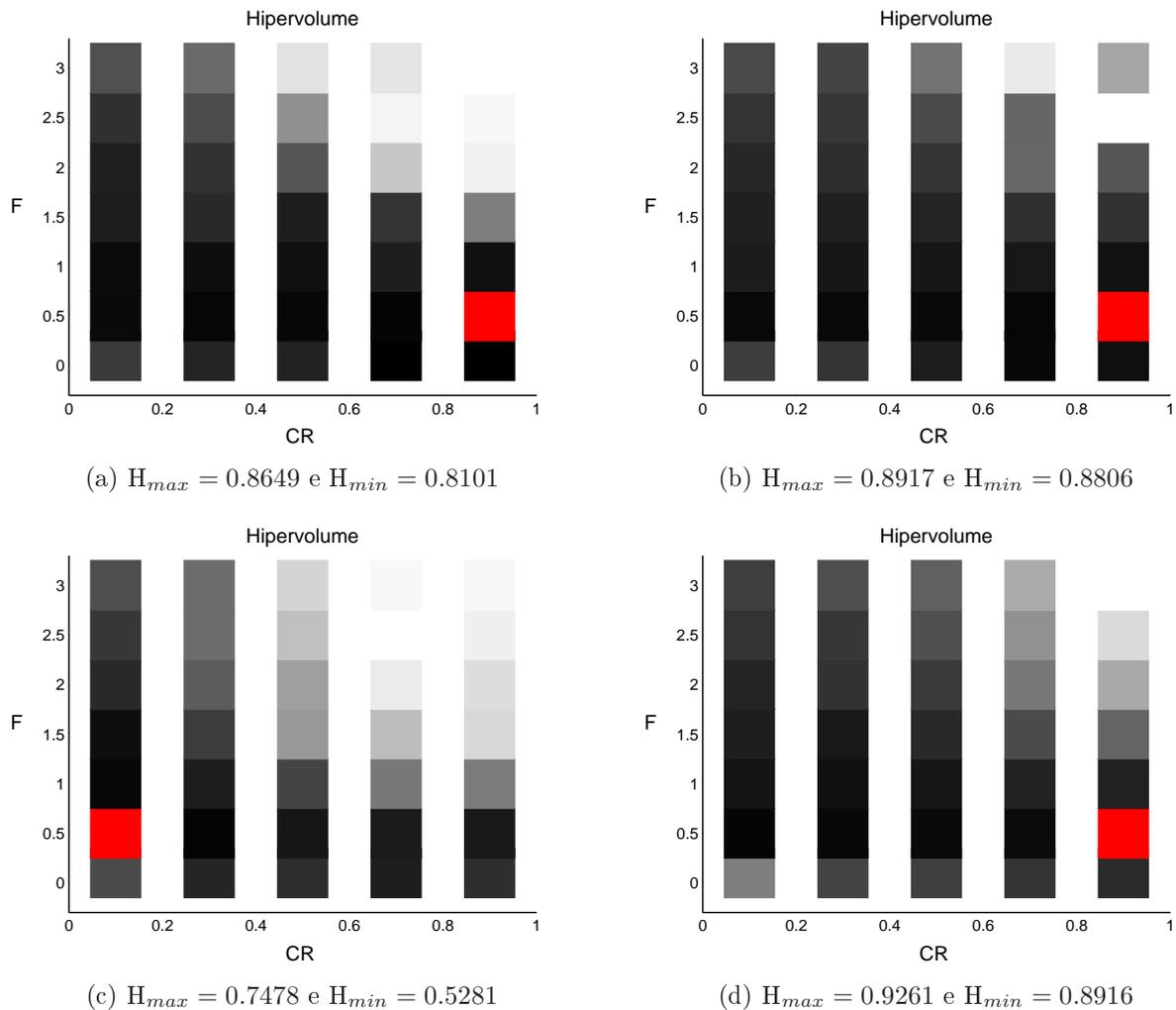


Figura A.3: Média do Hipervolume dos 10 *SPOs* normalizados obtidos pelo GDE3+APM para cada combinação dos valores de  $CR \in \{0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$  e  $F \in \{0,1; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3\}$  dos problemas das Treliças de 10 (a), 25 (b), 60 (c) e 72 (d) Barras (caso contínuo). Quanto mais escuro, maior o Hipervolume, sendo que o vermelho representa a combinação que atingiu o Hipervolume Máximo.

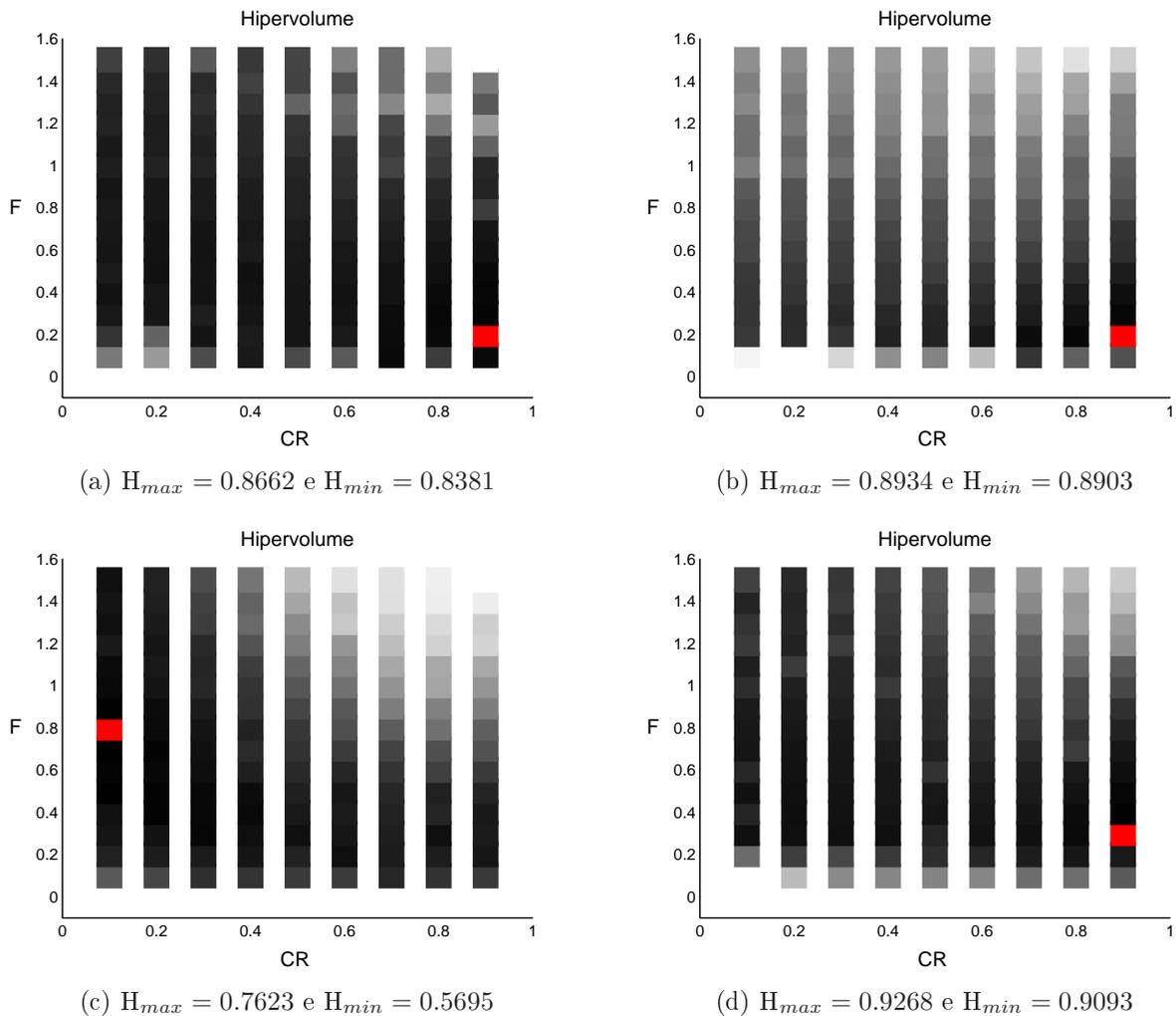


Figura A.4: Média do Hipervolume dos 10 *SPOs* normalizados obtidos pelo GDE3+APM para cada combinação dos valores de  $CR \in \{0,1; 0,2; 0,3; \dots; 0,8; 0,9\}$  e  $F \in \{0,1; 0,2; 0,3; \dots; 1,4; 1,5\}$  dos problemas das Treliças de 10 (a), 25 (b), 60 (c) e 72 (d) Barras (caso contínuo). Quanto mais escuro, maior o Hipervolume, sendo que o vermelho representa a combinação que atingiu o Hipervolume Máximo.

Baseado nos valores exibidos na Tabela A.5, uma segunda partição do domínio é então feita, mantendo o valor de  $CR = 0,1$  fixo. Foram realizadas 5 execuções independentes com  $F \in \{0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$ , no intuito de avaliar o comportamento do algoritmo com essa variação de parâmetros. A Tabela A.6 mostra a média do Hipervolume obtida por cada par, onde o melhor resultado está em negrito.

Tabela A.6: Média do Hipervolume (H) dos 5 *SPOs* normalizados obtidos pelo GDE3+APM para cada combinação dos valores de  $F \in \{0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$  com  $CR = 0,1$  para o problema da Treliça de 942 Barras (caso contínuo).

| $F$ | 0,1    | 0,3    | 0,5    | 0,7           | 0,9    |
|-----|--------|--------|--------|---------------|--------|
| H   | 0.8628 | 0.9031 | 0.9219 | <b>0.9310</b> | 0.9250 |

Com base nos valores apresentados nas Tabelas A.5 e A.6, uma terceira busca com combinações de parâmetros na vizinhança da melhor combinação obtida dentre as testadas até o momento ( $CR = 0,1$  e  $F = 0,7$ ) foi realizada. A Tabela A.7 mostra a média do Hipervolume obtida por cada uma dessas combinações nessa vizinhança, as quais confirmam  $CR = 0,1$  e  $F = 0,7$  como a combinação mais promissora para este problema. Estes parâmetros, juntamente com os mais promissores dos demais problemas analisados anteriormente, foram os valores de  $CR$  e  $F$  adotados nesse experimento para o caso contínuo (Tabela A.8).

Tabela A.7: Média do Hipervolume (H) dos 5 *SPOs* normalizados obtidos pelo GDE3+APM para cada combinação de parâmetros na vizinhança de  $CR = 0,1$  e  $F = 0,7$  para o problema da Treliça de 942 Barras (caso contínuo).

| $CR$ | 0,1    |               |        | 0,3    |        |        |
|------|--------|---------------|--------|--------|--------|--------|
| $F$  | 0,5    | 0,7           | 0,9    | 0,5    | 0,7    | 0,9    |
| H    | 0.9232 | <b>0.9322</b> | 0.9265 | 0.9142 | 0.8968 | 0.8806 |

Tabela A.8: Valores dos parâmetros  $CR$  e  $F$  adotados pelo algoritmo GDE3+APM para cada um dos problemas das Treliças de 10, 25, 60, 72 e 942 Barras (caso contínuo) no Experimento 2.

| Problema   | $CR$ | $F$ |
|------------|------|-----|
| 10 Barras  | 0,9  | 0,2 |
| 25 Barras  | 0,9  | 0,2 |
| 60 Barras  | 0,1  | 0,8 |
| 72 Barras  | 0,9  | 0,3 |
| 942 Barras | 0,1  | 0,7 |

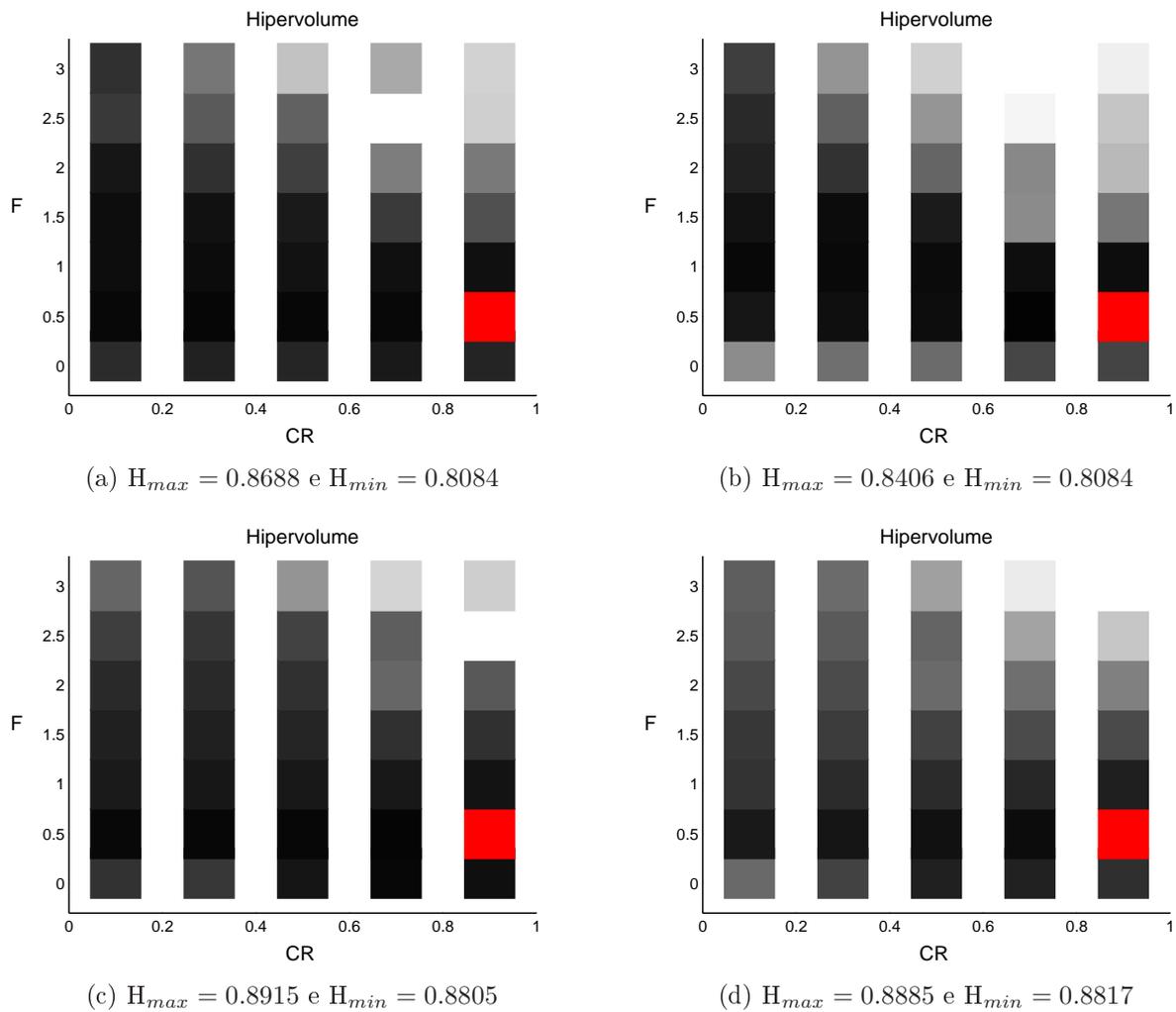


Figura A.5: Média do Hipervolume dos 10 *SPOs* normalizados obtidos pelo GDE3 para cada combinação dos valores de  $CR \in \{0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$  e  $F \in \{0,1; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3\}$  dos problemas das Treliças de 10 ( (a) contínuo e (b) discreto ) e 25 ( (c) contínuo e (d) discreto ) Barras. Quanto mais escuro, maior o Hipervolume, sendo que o vermelho representa a combinação que atingiu o Hipervolume Máximo.

### ***GDE3***

Para a definição dos parâmetros, a mesma variação de parâmetros feita para o GDE3+APM foi realizada para o GDE3, com o objetivo de definir uma combinação promissora dos valores dos parâmetros  $CR$  e  $F$ . A Figura A.5 mostra a média do Hipervolume dos 10 *SPOs* normalizados para cada uma das 35 combinações dos valores de  $CR \in \{0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$  e  $F \in \{0,1; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3\}$  para cada um dos problemas das Treliças de 10 e 25 Barras (casos contínuo e discreto), enquanto a Figura A.6 mostra o mesmo para cada um dos problemas das Treliças de 60 e 72 Barras (casos contínuo e discreto).

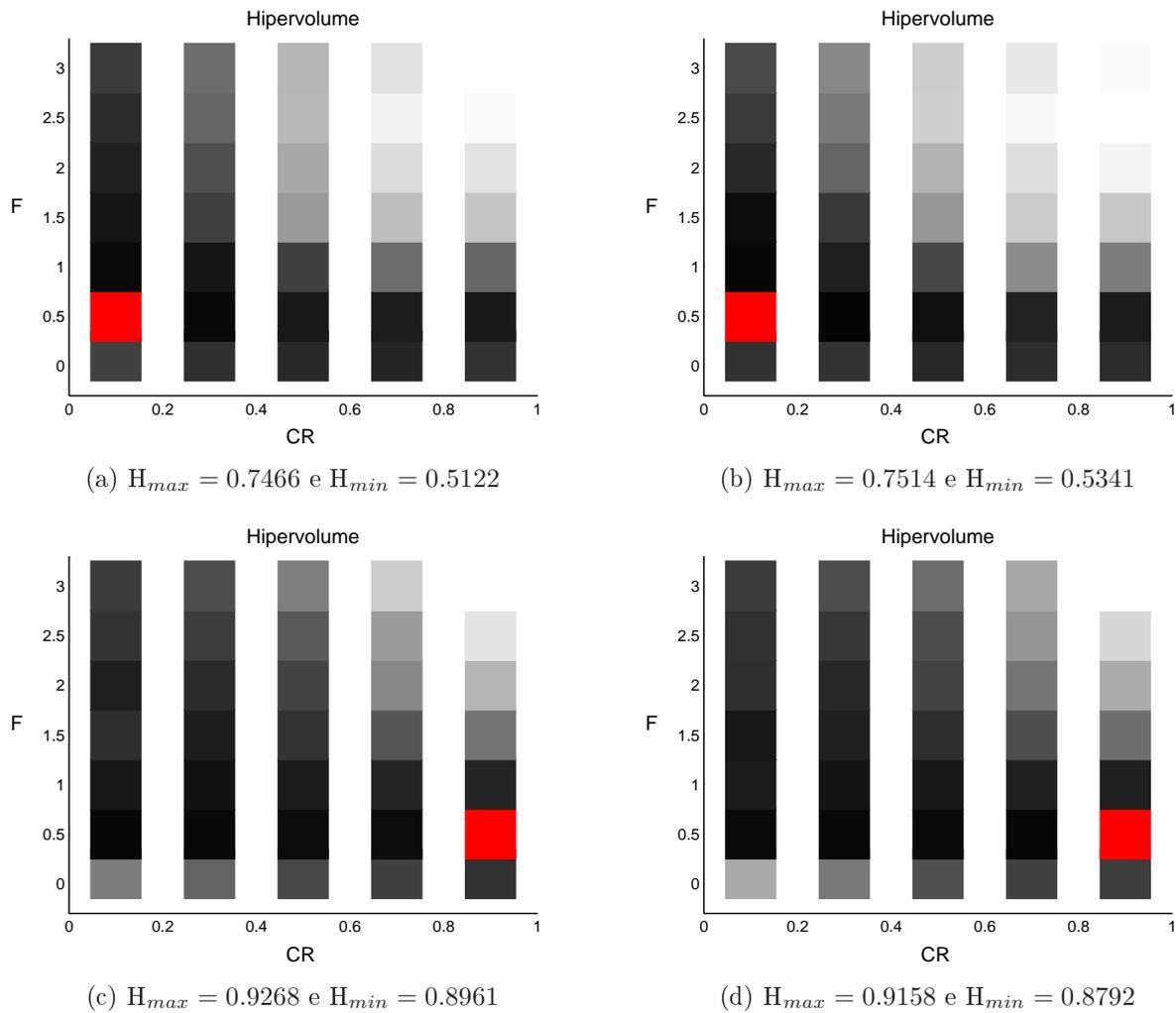


Figura A.6: Média do Hipervolume dos 10 *SPOs* normalizados obtidos pelo GDE3 para cada combinação dos valores de  $CR \in \{0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$  e  $F \in \{0,1; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3\}$  dos problemas das Treliças de 60 ( (a) contínuo e (b) discreto ) e 72 ( (c) contínuo e (d) discreto ) Barras. Quanto mais escuro, maior o Hipervolume, sendo que o vermelho representa a combinação que atingiu o Hipervolume Máximo.

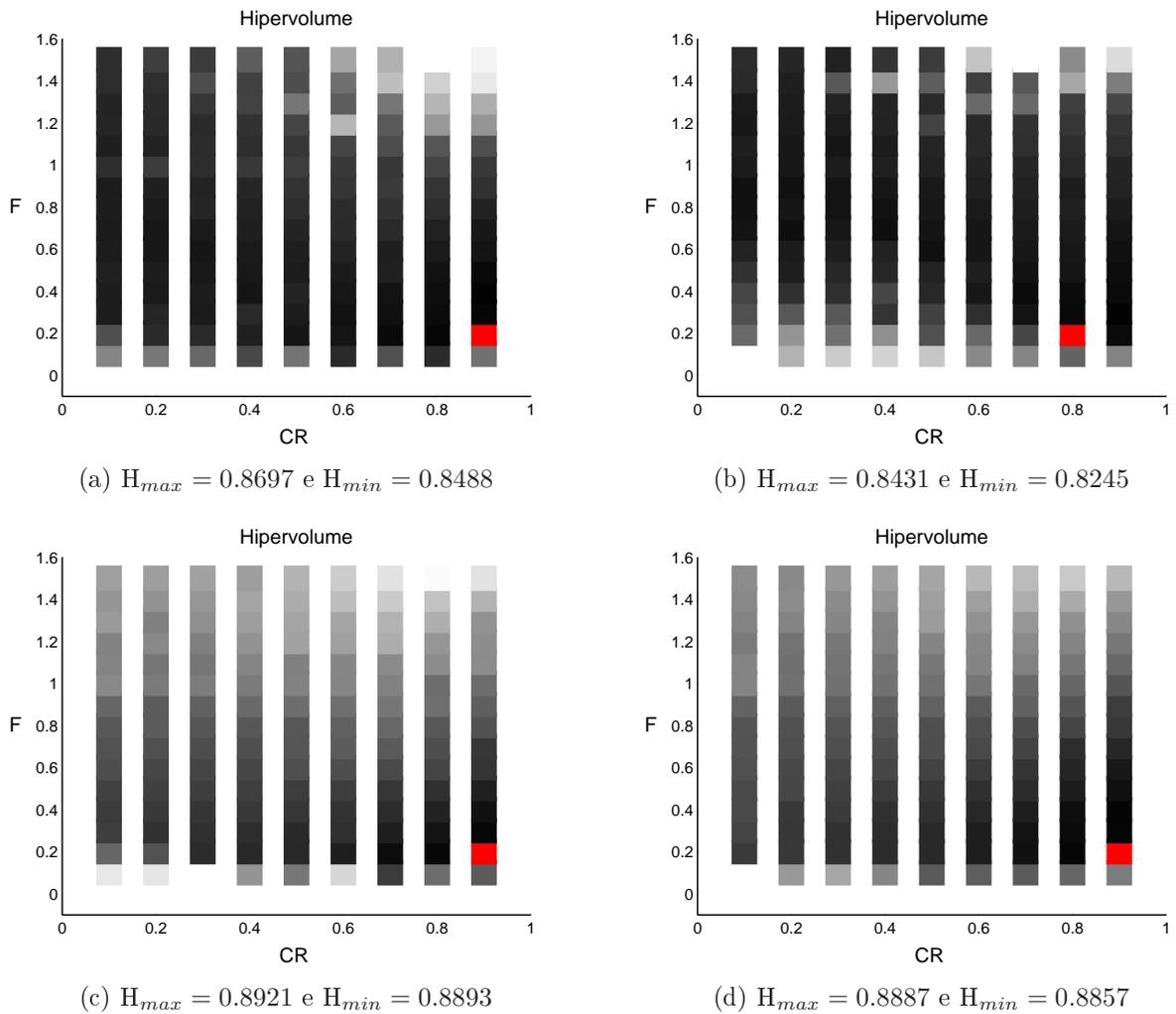


Figura A.7: Média do Hipervolume dos 10 *SPOs* normalizados obtidos pelo GDE3 para cada combinação dos valores de  $CR \in \{0,1; 0,2; 0,3; \dots; 0,8; 0,9\}$  e  $F \in \{0,1; 0,2; 0,3; \dots; 1,4; 1,5\}$  dos problemas das Trelças de 10 ( (a) contínuo e (b) discreto ) e 25 ( (c) contínuo e (d) discreto ) Barras. Quanto mais escuro, maior o Hipervolume, sendo que o vermelho representa a combinação que atingiu o Hipervolume Máximo.

Da mesma forma que o GDE3+APM, os resultados apresentados nas Figuras A.5 e A.6 indicam que as combinações de parâmetros que fornecem médias do Hipervolume mais promissoras também se encontram em regiões onde  $F \leq 1,5$ . Uma segunda análise com combinações nos conjuntos  $CR \in \{0,1; 0,2; 0,3; \dots; 0,8; 0,9\}$  e  $F \in \{0,1; 0,2; 0,3; \dots; 1,4; 1,5\}$  foi realizada. As Figuras A.7 e A.8 mostram os resultados, sendo os melhores deles adotados nesse experimento (Tabela A.13).

Novamente, devido ao alto custo computacional relacionado à resolução do problema da Trelça de 942 Barras, a escolha dos parâmetros para o GDE3 também foi feita com o mesmo orçamento e espaço de busca utilizado para o algoritmo GDE3+APM. Mantendo o

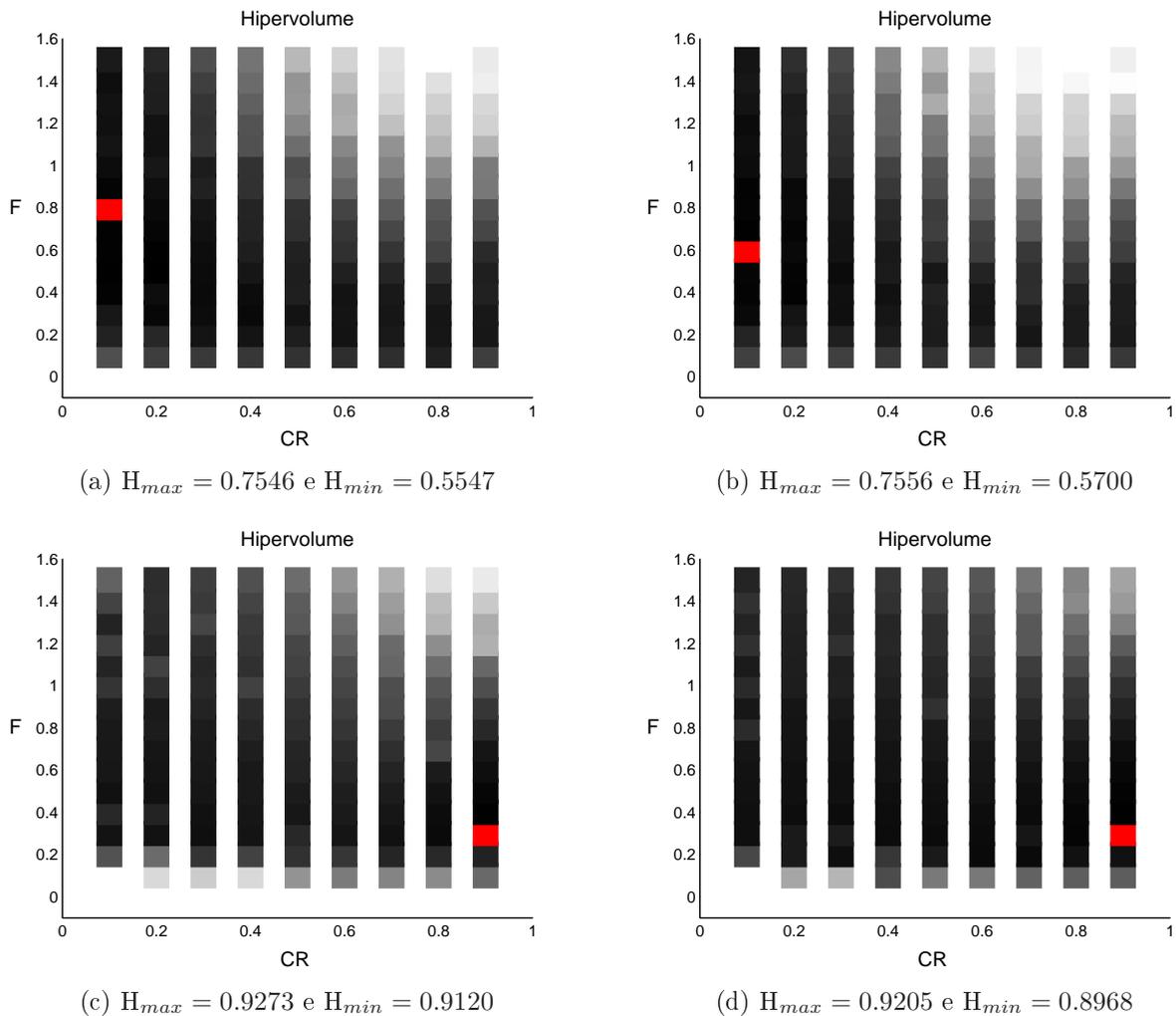


Figura A.8: Média do Hipervolume dos 10 *SPOs* normalizados obtidos pelo GDE3 para cada combinação dos valores de  $CR \in \{0,1; 0,2; 0,3; \dots; 0,8; 0,9\}$  e  $F \in \{0,1; 0,2; 0,3; \dots; 1,4; 1,5\}$  dos problemas das Treliças de 60 ( (a) contínuo e (b) discreto ) e 72 ( (c) contínuo e (d) discreto ) Barras. Quanto mais escuro, maior o Hipervolume, sendo que o vermelho representa a combinação que atingiu o Hipervolume Máximo.

valor de  $F = 0,5$  e variando  $CR \in \{0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$ , a média do Hipervolume obtida por cada par é mostrada na Tabela A.9.

Tabela A.9: Média do Hipervolume (H) dos 5 *SPOs* normalizados obtidos pelo GDE3 para cada combinação dos valores de  $CR \in \{0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$  com  $F = 0,5$  para o problema da Treliça de 942 Barras (casos contínuo e discreto).

| $CR$         | 0,1           | 0,3    | 0,5    | 0,7    | 0,9    |
|--------------|---------------|--------|--------|--------|--------|
| H (Contínuo) | <b>0.9382</b> | 0.9253 | 0.9026 | 0.8735 | 0.8580 |
| H (Discreto) | <b>0.9366</b> | 0.9291 | 0.8885 | 0.8553 | 0.8502 |

De acordo com os valores apresentados pela Tabela A.9, uma segunda partição do domínio é realizada: trata-se de manter o valor de  $CR = 0,1$  fixo e variar  $F \in \{0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$ , no intuito de avaliar o comportamento do algoritmo com essa variação de parâmetros. Isso porque o valor de  $CR = 0,1$  foi o mais promissor dentre os avaliados para ambos os casos do problema. A Tabela A.10 mostra a média do Hipervolume obtida por cada par.

Tabela A.10: Média do Hipervolume (H) dos 5 *SPOs* normalizados obtidos pelo GDE3 para cada combinação dos valores de  $F \in \{0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9\}$  com  $CR = 0,1$  para o problema da Treliça de 942 Barras (casos contínuo e discreto).

| $F$          | 0,1    | 0,3    | 0,5    | 0,7           | 0,9           |
|--------------|--------|--------|--------|---------------|---------------|
| H (Contínuo) | 0.8394 | 0.9200 | 0.9282 | 0.9349        | <b>0.9350</b> |
| H (Discreto) | 0.8406 | 0.9103 | 0.9313 | <b>0.9320</b> | 0.9296        |

Pela Tabela A.10, identifica-se  $CR = 0,1$  e  $F = 0,7$  como a melhor combinação dentre as testadas para o caso discreto e  $CR = 0,1$  e  $F = 0,9$  para o caso contínuo. Uma busca com combinações de parâmetros nessa vizinhança foi realizada. As Tabelas A.11 e A.12 mostram as médias dos Hipervolumes obtidos por cada uma dessas combinações. Estes parâmetros, juntamente com os mais promissores dos demais problemas, foram os valores de  $CR$  e  $F$  adotados nesse experimento para o algoritmo GDE3 (Tabela A.13).

Tabela A.11: Média do Hipervolume (H) dos 5 *SPOs* normalizados obtidos pelo GDE3 Original para cada combinação de parâmetros na vizinhança de  $CR = 0,1$  e  $F = 0,9$  para o problema da Treliça de 942 Barras (caso contínuo).

| $CR$         | 0,1    |               | 0,3    |        |
|--------------|--------|---------------|--------|--------|
| $F$          | 0,7    | 0,9           | 0,7    | 0,9    |
| H (Contínuo) | 0.9391 | <b>0.9394</b> | 0.9060 | 0.8878 |

Tabela A.12: Média do Hipervolume (H) dos 5 *SPOs* normalizados obtidos pelo GDE3 Original para cada combinação de parâmetros na vizinhança de  $CR = 0,1$  e  $F = 0,7$  para o problema da Treliça de 942 Barras (caso discreto).

| $CR$         | 0,1    |               |        | 0,3    |        |        |
|--------------|--------|---------------|--------|--------|--------|--------|
| $F$          | 0,5    | 0,7           | 0,9    | 0,5    | 0,7    | 0,9    |
| H (Discreto) | 0.9364 | <b>0.9376</b> | 0.9358 | 0.9288 | 0.9047 | 0.8958 |

Tabela A.13: Valores dos parâmetros  $CR$  e  $F$  adotados pelo algoritmo GDE3 para cada um dos problemas das Treliças de 10, 25, 60, 72 e 942 Barras (caso contínuo e discreto) no Experimento 2.

| Problema                        | $CR$ | $F$ |
|---------------------------------|------|-----|
| 10 Barras (Contínuo)            | 0,9  | 0,2 |
| 10 Barras (Discreto)            | 0,8  | 0,2 |
| 25 Barras (Contínuo e Discreto) | 0,9  | 0,2 |
| 60 Barras (Contínuo)            | 0,1  | 0,8 |
| 60 Barras (Discreto)            | 0,1  | 0,6 |
| 72 Barras (Contínuo e Discreto) | 0,9  | 0,3 |
| 942 Barras(Contínuo)            | 0,1  | 0,9 |
| 942 Barras(Discreto)            | 0,1  | 0,7 |

## NSGA-II

Para definir os parâmetros  $PC$ ,  $\eta_c$  e  $\eta_m$  que serão usados no algoritmo NSGA-II para este experimento, combinações de alguns dos seus valores mais utilizados na literatura foram analisadas. (KUKKONEN, 2012) compara a performance do algoritmo GDE3 com o NSGA-II em diversos problemas *benchmark*. Os valores utilizados em seus experimentos eram combinações de  $\eta_c \in \{5; 10; 15; 20\}$ ,  $\eta_m \in \{5; 20; 500\}$  e  $PC \in \{0,9; 1\}$ . No intuito de incrementar as opções desses parâmetros, foram adicionados à esses grupos o parâmetro  $\eta_m = 100$  e  $\eta_c = 2$ . Isso porque (DEB et al., 2002) utiliza  $\eta_c = 20$  e  $\eta_m = 100$  em seus experimentos em problemas com a presença de restrições e, embora  $\eta_c = 2$  seja mais comumente usado para SBX em POMONOs (DEB, 2008), pode ser encontrada na literatura a utilização desse parâmetro em POMs (DEB, 2001; DEB et al., 2007a; DEB et al., 2007b; RAAD, 2011). Por exemplo, ele é o valor inicial sugerido por (DEB et al., 2007a) para o SBX auto adaptativo proposto por aqueles autores. Esse parâmetro também foi utilizado por (DEB, 2001) para a aplicação do SBX em POM de variáveis inteiras.

Assim, a variação de parâmetros feita para o NSGA-II contou com combinações de  $\eta_c \in \{2; 5; 10; 15; 20\}$ ,  $\eta_m \in \{5; 20; 100; 500\}$  e  $PC \in \{0,9; 1\}$ . As Figuras A.9 e A.10 mostram a média do Hipervolume dos 10 *SPOs* normalizados para cada uma dessas 40

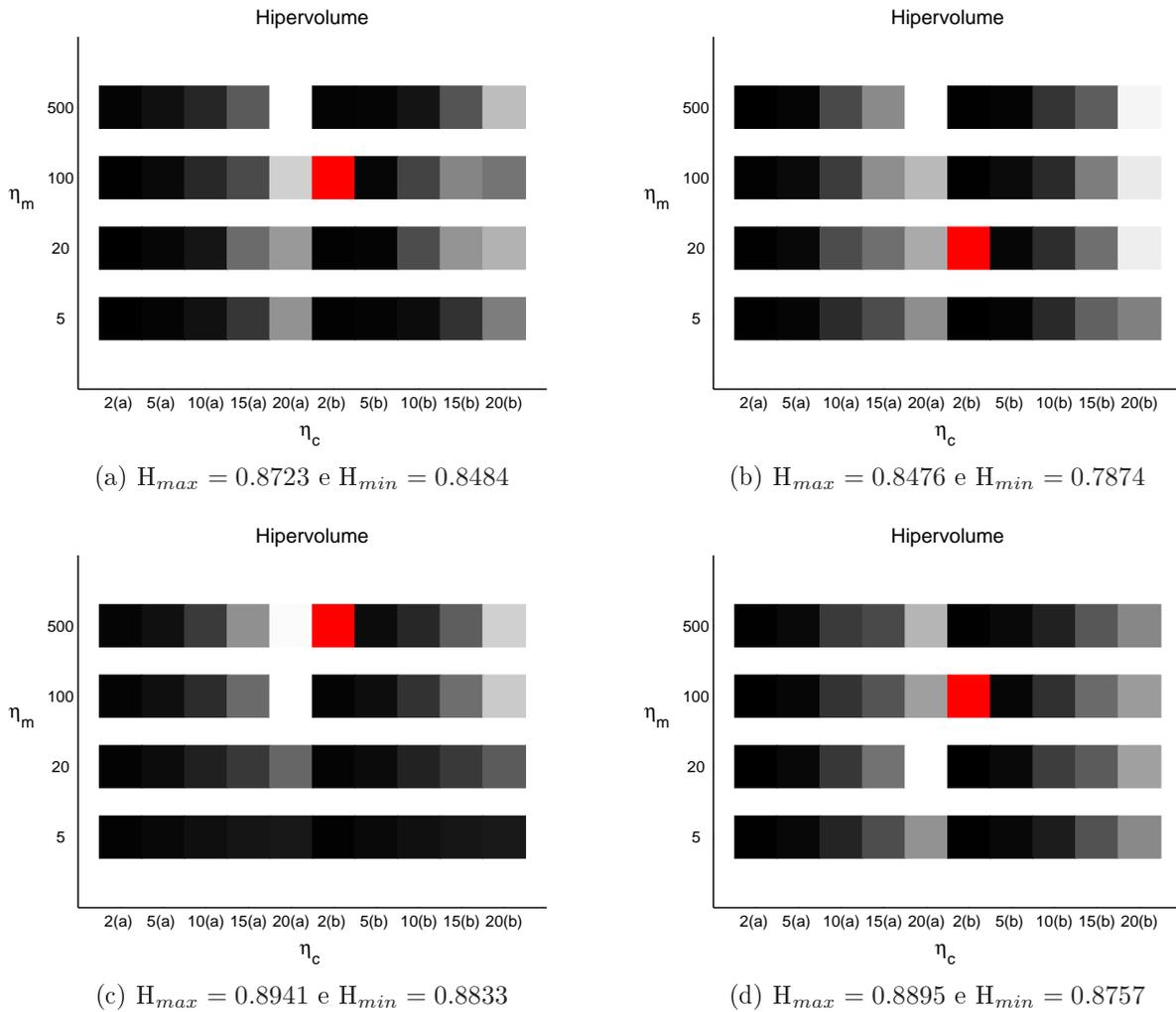


Figura A.9: Média do Hipervolume dos 10 *SPOs* normalizados obtidos pelo NSGA-II para cada combinação dos valores de  $\eta_c \in \{2; 5; 10; 15; 20\}$ ,  $\eta_m \in \{5; 20; 100; 500\}$  e  $PC \in \{0,9; 1\}$  dos problemas das Treliças de 10 ( (a) contínuo e (b) discreto ) e 25 ( (c) contínuo e (d) discreto ) Barras: (a) significa  $PC = 0,9$  e (b) significa  $PC = 1$ . Quanto mais escuro, maior o Hipervolume, sendo que o vermelho representa a combinação que atingiu o Hipervolume Máximo.

combinações de valores para cada um dos problemas das Treliças de 10, 25, 60 e 72 Barras (casos contínuo e discreto).

Apesar de não serem parâmetros usuais, a combinação  $PC = 1$  e  $\eta_c = 2$  com variações do parâmetro  $\eta_m$  foram as mais promissoras no desempenho do algoritmo NSGA-II para este experimento. Os resultados não mostraram diferenças significativas entre  $PC = 1$  e  $PC = 0,9$  quando  $\eta_c$  e  $\eta_m$  foram mantidos fixos, segundo o teste de Wilcoxon.

Para o problema da Treliça de 942 Barras, foram realizadas 5 execuções independentes de  $PC = 1$  e  $\eta_c = 2$  com variações do parâmetro  $\eta_m \in \{5; 20; 100; 500\}$ . A Tabela A.14 mostra a média do Hipervolume obtida por cada combinação, onde o melhor resultado é

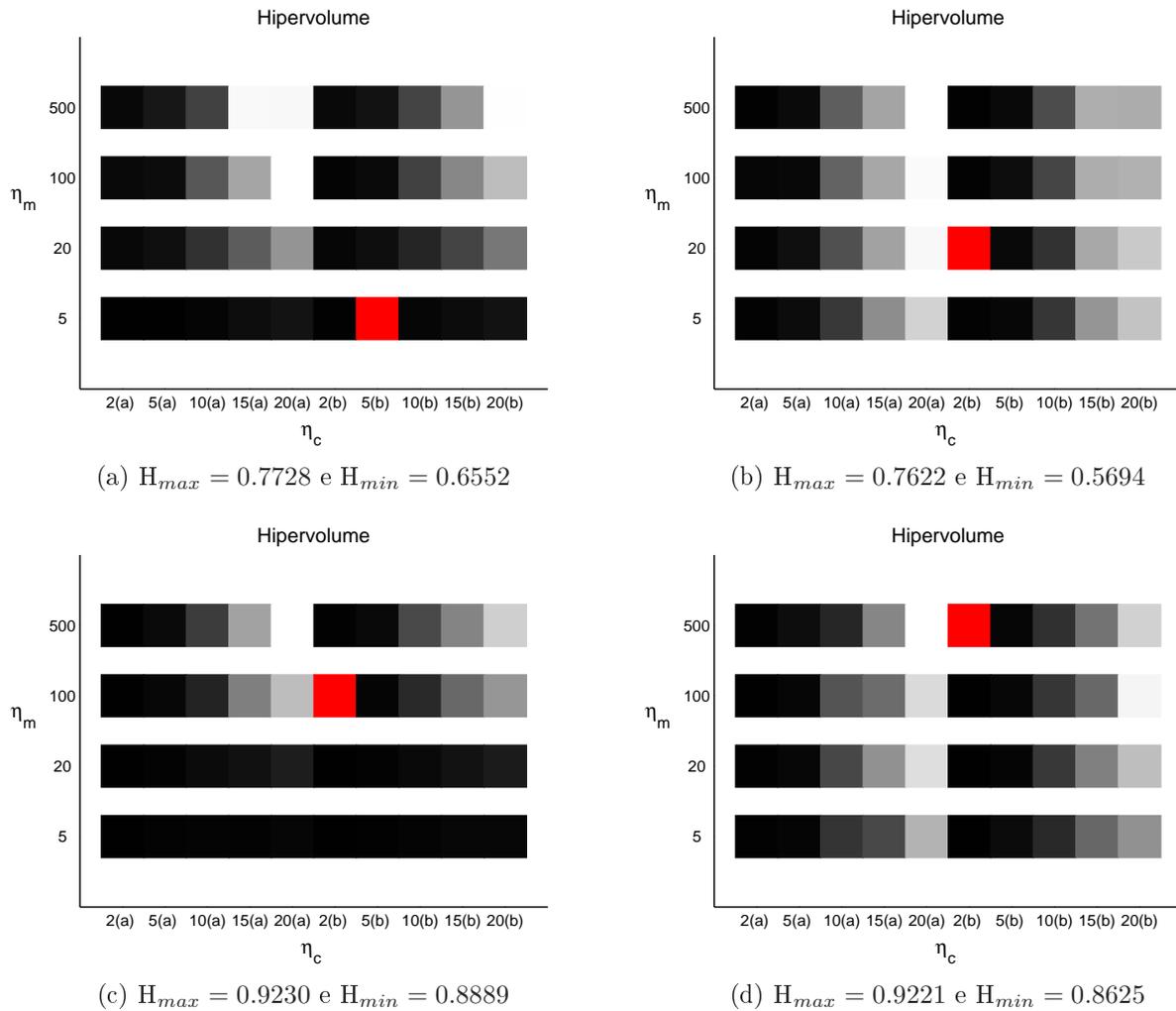


Figura A.10: Média do Hipervolume dos 10 *SPOs* normalizados obtidos pelo algoritmo NSGA-II para cada combinação dos valores de  $\eta_c \in \{2; 5; 10; 15; 20\}$ ,  $\eta_m \in \{5; 20; 100; 500\}$  e  $PC \in \{0,9; 1\}$  dos problemas das Treliças de 60 ( (a) contínuo e (b) discreto ) e 72 ( (c) contínuo e (d) discreto ) Barras: (a) significa  $PC = 0,9$  e (b) significa  $PC = 1$ . Quanto mais escuro, maior o Hipervolume, sendo que o vermelho representa a combinação que atingiu o Hipervolume Máximo.

exibido em negrito.

Tabela A.14: Média do Hipervolume (H) dos 5 *SPOs* normalizados obtidos pelo NSGA-II para cada combinação dos valores de  $\eta_m \in \{5; 20; 100; 500\}$  com  $PC = 1$  e  $\eta_c = 2$  para o problema da Treliça de 942 Barras.

| $\eta_m$     | 5      | 20     | 100    | 500           |
|--------------|--------|--------|--------|---------------|
| H (Contínuo) | 0.9004 | 0.8984 | 0.8986 | <b>0.9026</b> |
| H (Discreto) | 0.9054 | 0.9040 | 0.9079 | <b>0.9089</b> |

Pela Tabela A.14, identifica-se  $PC = 1$ ,  $\eta_c = 2$  e  $\eta_m = 500$  como a melhor combinação dentre as testadas. Uma segunda busca com combinações de parâmetros nessa vizinhança foi realizada. A Tabela A.15 mostra a média do Hipervolume obtida por cada uma dessas combinações, as quais sugerem  $PC = 1$ ,  $\eta_c = 2$  e  $\eta_m = 500$  a combinação mais promissora para este problema.

Tabela A.15: Média do Hipervolume (H) dos 5 *SPOs* normalizados obtidos pelo NSGA-II para cada combinação de parâmetros na vizinhança de  $PC = 1$ ,  $\eta_c = 2$  e  $\eta_m = 500$  para o problema da Treliça de 942 Barras.

| $PC$         | 1             |        |        |        | 0,9    |        |        |        |
|--------------|---------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\eta_c$     | 2             |        | 5      |        | 2      |        | 5      |        |
| $\eta_m$     | 500           | 100    | 500    | 100    | 500    | 100    | 500    | 100    |
| H (Contínuo) | <b>0.9110</b> | 0.9062 | 0.8975 | 0.9004 | 0.9044 | 0.9045 | 0.8995 | 0.8971 |
| H (Discreto) | <b>0.9227</b> | 0.9210 | 0.9101 | 0.9155 | 0.9128 | 0.9170 | 0.9100 | 0.9083 |

Os resultados na Tabela A.15 sugerem  $PC = 1$ ,  $\eta_c = 2$  e  $\eta_m = 500$  a combinação mais promissora para o problema da Treliça de 942 barras em ambos os casos. Estes parâmetros, juntamente com os parâmetros analisados anteriormente para os demais problemas, foram adotados nesse experimento para o algoritmo NSGA-II (Tabela A.16).

Tabela A.16: Valores dos parâmetros pelo algoritmo NSGA-II para cada um dos problemas das Treliças de 10, 25, 60, 72 e 942 Barras (casos contínuo e discreto) no Experimento 2.

| Problema                         | $PC$ | $\eta_c$ | $\eta_m$ |
|----------------------------------|------|----------|----------|
| 10 Barras (Contínuo)             | 1    | 2        | 100      |
| 10 Barras (Discreto)             | 1    | 2        | 20       |
| 25 Barras (Contínuo)             | 1    | 2        | 500      |
| 25 Barras (Discreto)             | 1    | 2        | 100      |
| 60 Barras (Contínuo)             | 1    | 5        | 5        |
| 60 Barras (Discreto)             | 1    | 2        | 20       |
| 72 Barras (Contínuo)             | 1    | 2        | 100      |
| 72 Barras (Discreto)             | 1    | 2        | 500      |
| 942 Barras (Contínuo e Discreto) | 1    | 2        | 500      |