

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
PROGRAMA DE MESTRADO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

ELISA PORTES DOS SANTOS AMORIM

AJUSTE AUTOMÁTICO DE HISTÓRICO EM RESERVATÓRIOS
DE PETRÓLEO UTILIZANDO O MÉTODO TSVD

JUIZ DE FORA
2009

Amorim, Elisa Portes dos Santos

Ajuste Automático de Histórico em Reservatórios de Petróleo Utilizando o Método TSVD/ Elisa Portes dos Santos Amorim;– 2009.
122 f. :il.

Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2009.

1. Reservatórios. 2. Modelos matemáticos. 3. Otimização. I. Título

CDU 62:725

ELISA PORTES DOS SANTOS AMORIM

AJUSTE AUTOMÁTICO DE HISTÓRICO EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO
UTILIZANDO O MÉTODO TSVD

Dissertação submetida ao Programa de Pós
graduação em Modelagem Computacional
da Universidade Federal de Juiz de Fora
como parte dos requisitos necessários para
a obtenção do grau de mestre em ciências
(m.sc.) em Modelagem Computacional.

Orientador: Rodrigo Weber Dos Santos

Co-orientador: Flavio Dickstein

JUIZ DE FORA

2009

AJUSTE AUTOMÁTICO DE HISTÓRICO EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO
UTILIZANDO O MÉTODO TSVD

Elisa Portes dos Santos Amorim

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM
MODELAGEM COMPUTACIONAL DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ
DE FORA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.SC.) EM MODELAGEM
COMPUTACIONAL.

Aprovada por:

Prof. Rodrigo Weber Dos Santos, D.Sc.
(Orientador)

Prof. Flavio Dickstein, D.Sc.
(Co-orientador)

Prof. Paulo Goldfeld, Ph.D.

Prof. Maicon Ribeiro Corrêa, D.Sc.

Prof. Regis Kruel Romeu, D.Sc.

JUIZ DE FORA, MG - BRASIL
AGOSTO DE 2009

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos ao meu marido Ronan que tem sido um grande amigo em todos os momentos de minha vida.

À minha mãe, que foi sempre um exemplo de perseverança e que me ensinou a nunca desistir dos meus sonhos.

Ao meu pai que me ensinou o gosto pelos estudos, pela matemática e pelos livros.

Aos meus queridos irmãos, acima de tudo amigos, que ajudaram a construir meu caráter.

Aos meus avós Delgy, Rachel e Elisabeth, por todo carinho que sempre dedicaram a mim.

Ao Professor Rodrigo pela paciência e conhecimento transmitidos.

Aos Professores Paulo e Flavio pelos momentos de grande aprendizado que me proporcionaram.

Aos amigos que sempre me apoiaram em todos os momentos.

Aos Professores Regis Kruehl Romeu e Maicon Ribeiro Corrêa por terem aceitado participar da minha banca.

Agradeço imensamente à Petrobras pela bolsa e pela oportunidade de trabalhar em um projeto tão interessante.

Enfim, agradeço a todos que de alguma forma me ajudaram a transformar este sonho em realidade.

RESUMO

A simulação de reservatórios é uma ferramenta amplamente utilizada por engenheiros de reservatório. É principalmente utilizada com o objetivo de prever o comportamento de reservatórios sob diferentes condições, auxiliando os engenheiros a tomarem importantes decisões que podem envolver custos financeiros elevados. A fim de obter previsões confiáveis, diferentes propriedades petrofísicas do reservatório, como a porosidade e a permeabilidade, devem ser conhecidas. Porém, medições diretas dessas propriedades são possíveis apenas nas proximidades dos poços. Uma forma de estimar essas propriedades é através do processo de ajuste de histórico. O processo de ajuste de histórico consiste no problema inverso de estimar as propriedades de um reservatório através do ajuste de dados simulados ao histórico do reservatório, o qual está disponível em reservatórios em operação já há algum tempo. Neste trabalho apresentamos um estudo para o ajuste de histórico automático baseado em um modelo de reservatório bifásico (óleo/água) e bidimensional. A taxa de produção de óleo e a pressão, medidas nos poços são tomadas como histórico do reservatório. Desejamos estimar a distribuição de permeabilidades do reservatório. O problema de ajuste de histórico consiste em minimizar uma função objetivo que quantifica o erro entre o histórico e os dados simulados, o que leva a um problema de mínimos quadrados não-linear. Para resolver este problema, utilizamos o método de Gauss-Newton combinado com o método de Decomposição em Valores Singulares Truncada (TSVD). O método TSVD reduz consideravelmente o número de parâmetros a serem estimados, reduzindo também o custo computacional envolvido na resolução do problema. A fim de utilizarmos o método TSVD eficientemente é necessário dispor da derivada e adjunta do problema direto. O desenvolvimento dessas ferramentas consistiu de parte importante no desenvolvimento deste trabalho.

Palavras-chave: Reservatórios. Modelos Matemáticos. Otimização.

ABSTRACT

Reservoir simulation is an essential tool extensively used by reservoir engineers. It is mostly employed to predict reservoir behavior under different circumstances, thus supporting decisions that frequently involve large financial costs. In order to use this tool properly different petro-physical properties of the reservoir must be well known, such as permeability and porosity. Unfortunately, direct measures of these properties are viable only near the wells. A way of estimating these properties is through the so called History Matching process. History matching process consists on the inverse problem of estimating reservoir properties through matching simulated data to reservoir history, which are available in reservoirs that are operating for some time. In this work we present a study for the automatic history matching based in a two-phase (oil/water), two dimensional reservoir model. The rate of oil production and the pressure measured at the wells are taken as the history of the reservoir. In this work, we aim to estimate the permeability distribution of the reservoir. The history matching problem consists on minimizing an objective function that measures the mismatch between reservoir history and simulated data, which turns the problem into a nonlinear least square problem. In order to solve this problem the Gauss-Newton method was employed combined with the Truncated Singular Value Decomposition (TSVD) technique. The TSVD technique reduces considerably the number of parameters to estimate, reducing also the computational effort involved in solving the problem. In order to use the TSVD method in an efficient way it is necessary to have the derivative and the adjoint of the direct problem. The development of these tools was an important part of this work.

Key-words: Reservoirs. Mathematical Models. Optimization.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	MODELAGEM	12
2.1	Reservatórios de petróleo	12
2.1.1	<i>Propriedades da rocha</i>	13
2.1.1.1	Porosidade	13
2.1.1.2	Permeabilidade	13
2.1.2	<i>Propriedades dos fluidos</i>	15
2.1.2.1	Viscosidade	15
2.1.2.2	Massa específica	16
2.2	Recuperação do óleo	16
2.3	Escoamento bifásico	17
2.3.1	<i>Equações básicas</i>	17
2.3.1.1	Lei da conservação de massa	17
2.3.1.2	Lei de Darcy	20
2.3.2	<i>Condições de contorno e inicial</i>	24
2.4	Exemplo	24
3	AJUSTE DE HISTÓRICO	28
3.1	Problema direto	30
3.2	Problema inverso	30
4	TSVD	32
4.1	Problema de mínimos quadrados não-linear	33

4.1.1	<i>O método de Gauss-Newton</i>	34
4.2	A decomposição SVD	35
4.2.1	<i>A decomposição SVD e o problema de mínimos quadrados</i>	36
4.3	Posto numérico	36
4.4	TSVD	37
4.4.1	<i>Sistema de equações com posto incompleto</i>	37
5	DERIVADA E ADJUNTA	39
5.1	Derivada $O'(m)$	39
5.1.1	<i>Cálculo de $u'(m)$</i>	39
5.1.1.1	<i>Cálculo de $\partial_m Sz$</i>	40
5.1.1.2	<i>Cálculo do jacobiano</i>	40
5.1.2	<i>Cálculo de $\partial_m O$ e $\partial_u O$</i>	42
5.2	Adjunta $O'(m)^T$	43
5.2.1	<i>Cálculo de $(\partial_u O)^t w$</i>	44
5.2.2	<i>Cálculo de $J^T w = z$</i>	44
5.2.3	<i>Cálculo de $(\partial_m S)^t$</i>	47
6	ESQUEMAS NUMÉRICOS	48
6.1	Problema direto	48
6.1.1	<i>IMPES</i>	48
6.1.2	<i>Discretização espacial</i>	51
6.1.2.1	<i>Método de diferenças finitas bloco-centradas</i>	51
6.1.2.2	<i>Operadores discretos</i>	52
6.1.2.3	<i>Tratamento nas interfaces</i>	53
6.1.3	<i>Equação da pressão</i>	55
6.1.4	<i>Condição de CFL</i>	57
6.2	Derivada $O'(m)z$	60
6.2.1	<i>Cálculo de $\partial_m Sz$</i>	60

6.2.2	<i>Cálculo do jacobiano</i>	60
6.3	Adjunta $(O'(m))^T w$	62
6.3.1	<i>Cálculo de $J^T w = y$</i>	63
6.3.2	<i>Cálculo de $(\partial_m S)^t$</i>	66
6.4	Validação	67
6.4.1	<i>Problema direto</i>	67
6.4.2	<i>Derivada</i>	69
6.4.3	<i>Adjunta</i>	71
7	METODOLOGIA	72
7.1	Detalhes de implementação	72
7.2	Testes	72
7.2.1	<i>Exemplo 1</i>	73
7.2.2	<i>Exemplo 2</i>	77
7.3	Otimizador	78
7.3.1	<i>Função objetivo</i>	78
7.3.2	<i>Parâmetros</i>	79
8	RESULTADOS	81
8.1	Resultados campo sintético 1	81
8.1.1	<i>Campo inicial igual à média geométrica do campo sintético</i>	81
8.1.2	<i>Campo inicial igual ao valor mínimo do campo sintético</i>	87
8.1.3	<i>Campo inicial igual ao valor máximo do campo sintético</i>	88
8.2	Resultados campo sintético 2	91
8.2.1	<i>Campo inicial igual a média geométrica do campo sintético</i>	91
8.2.2	<i>Exemplo 51×51</i>	97
9	DISCUSSÃO	104
9.1	Trabalhos futuros	106
10	CONCLUSÕES	107

A	CONTINUAÇÃO DOS RESULTADOS PARA O CAMPO SINTÉTICO 2	109
A.1	Campo inicial igual ao valor mínimo do campo sintético	109
A.2	Campo inicial igual ao valor máximo do campo sintético	110
	REFERÊNCIAS	114

LISTA DE FIGURAS

2.1	Meio poroso.	12
2.2	Porosidades absoluta e efetiva.	13
2.3	Esquema do experimento de Darcy.	14
2.4	Volume diferencial.	17
2.5	Curvas de permeabilidade relativa.	22
2.6	Reservatório <i>five-spot</i>	25
2.7	Vazão óleo x água - poço produtor.	26
2.8	Saturação de água (s_w) ao longo do tempo. (a) 20 dias; (b) 100 dias; (c) 400 dias; (d) 600 dias.	27
3.1	Processo iterativo do ajuste de histórico.	29
6.1	Reservatório discretizado	51
6.2	(a) Divergente discreto; (b) Gradiente discreto.	53
6.3	Média harmônica	54
6.4	Sistema pentadiagonal	58
6.5	Matriz jacobiano	65
6.6	Matriz jacobiano transposto	65
6.7	Solução do problema de Buckley Leverett para $N_x=100$	68
6.8	Solução do problema de Buckley Leverett para $N_x=1600$	69
6.9	Problema <i>2-spot</i>	69
7.1	Campo de permeabilidade objetivo 1.	74
7.2	Histórico do corte de água para o campo de permeabilidades sintético 1.	74

7.3	Histórico das diferenças de pressão para o campo de permeabilidades sintético 1	75
7.4	Campo objetivo 1 51×51	75
7.5	Histórico do corte de água para o campo de permeabilidades sintético 51×51	75
7.6	Histórico das diferenças de pressão para o campo de permeabilidades sintético 51×51	76
7.7	Campo de permeabilidade objetivo 2	77
7.8	Histórico das vazões de óleo nos poços produtores para o campo de permeabilidades objetivo 2	77
7.9	Histórico das diferenças de pressão para o campo de permeabilidades objetivo 2	78
8.1	Ajuste de produção para campo inicial igual à média geométrica.	82
8.2	Ajuste de pressão para campo inicial igual à média geométrica.	83
8.3	Campos de permeabilidades encontrados; (a)7 VS; (b)15 VS; (c)25 VS; (d)VS crescentes.	83
8.4	8 primeiros vetores singulares à direita da primeira iteração com VS=25.	84
8.5	8 primeiros vetores singulares à esquerda, relacionados à produção, da primeira iteração com VS=25.	85
8.6	8 primeiros vetores singulares à esquerda, relacionados à pressão, da primeira iteração com VS=25.	86
8.7	8 primeiros vetores singulares à direita da última iteração com VS=25.	86
8.8	8 primeiros vetores singulares à esquerda, relacionados à produção, da última iteração com VS=25.	87
8.9	8 primeiros vetores singulares à esquerda, relacionados à pressão, da última iteração com VS=25.	88
8.10	Ajuste de produção para campo inicial igual ao mínimo.	89
8.11	Ajuste de pressão para campo inicial igual ao mínimo.	90
8.12	Campos de permeabilidades encontrados; (a)7 VS; (b)15 VS; (c)25 VS; (d)VS crescentes.	90
8.13	Ajuste de produção para campo inicial igual ao máximo.	91

8.14	Ajuste de pressão para campo inicial igual ao máximo.	92
8.15	Campos de permeabilidades encontrados; (a)7 VS; (b)15 VS; (c)25 VS; (d)VS crescentes.	92
8.16	Ajuste de produção para campo inicial igual à média geométrica.	93
8.17	Ajuste de pressão para campo inicial igual à média geométrica.	94
8.18	Campos de permeabilidades para campo inicial igual à média geométrica; (a)7 VS; (b)15 VS; (c)25 VS; (d)VS crescentes.	94
8.19	8 primeiros vetores singulares à direita da primeira iteração com VS=25.	95
8.20	8 primeiros vetores singulares à esquerda, relacionados à produção, da primeira iteração com VS=25.	95
8.21	8 primeiros vetores singulares à esquerda, relacionados à pressão, da primeira iteração com VS=25.	96
8.22	8 primeiros vetores singulares à direita da última iteração com VS=25.	97
8.23	8 primeiros vetores singulares à esquerda, relacionados à produção, da última iteração com VS=25.	98
8.24	8 primeiros vetores singulares à esquerda, relacionados à pressão, da última iteração com VS=25.	99
8.25	Ajuste de produção para campo inicial igual ao mínimo.	100
8.26	Ajuste de produção para campo inicial igual ao mínimo.	101
8.27	Campo de permeabilidade estimado 51×51	101
8.28	2 primeiros vetores singulares à direita da primeira iteração, VS=2.	102
8.29	4 primeiros vetores singulares à direita da primeira iteração, VS=4.	102
8.30	8 primeiros vetores singulares à direita da primeira iteração, VS=8.	103
A.1	Ajuste de produção para campo inicial igual ao mínimo.	110
A.2	Ajuste de pressão para campo inicial igual ao mínimo.	110
A.3	Campos de permeabilidades para campo inicial igual ao mínimo; (a)7 VS; (b)15 VS; (c)25 VS; (d)VS crescentes.	111
A.4	Ajuste de produção para campo inicial igual ao máximo.	112
A.5	Ajuste de pressão para campo inicial igual ao máximo.	112

A.6 Campos de permeabilidades para campo inicial igual ao máximo; (a)7 VS; (b)15 VS; (c)25 VS; (d)VS crescentes.	113
---	-----

LISTA DE TABELAS

2.1	Permeabilidade e porosidade de alguns campos de óleo. Adaptado de TIAB e DONALDSON (1996)	15
6.1	Validação do problema direto - Buckley Leverett	68
6.2	Validação do problema direto - Two-spot	70
6.3	Erros relativos para o cálculo da derivada	70
6.4	Erros relativos Adjunta	71
8.1	Campo inicial igual a média geométrica	82
8.2	Norma dos vetores singulares à esquerda	84
8.3	Norma dos vetores singulares à esquerda	87
8.4	Campo inicial igual ao mínimo	88
8.5	Campo inicial igual ao máximo	89
8.6	Campo inicial igual a média geométrica	91
8.7	Norma dos vetores singulares à esquerda da primeira iteração	96
8.8	Norma dos vetores singulares à esquerda da última iteração	97
9.1	f_r do campo sintético 1	104
9.2	f_r do campo sintético 2	104
9.3	f_r malha 21×21 e 51×51	106
A.1	Campo inicial igual ao valor mínimo	109
A.2	Campo inicial igual ao valor máximo	111

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O petróleo encontra-se, em geral, a uma grande profundidade da superfície terrestre, incrustado em um meio poroso. Ao se perfurar um poço, parte do óleo pode ser expelida da rocha e atingir a superfície apenas pelo efeito do gradiente de pressão. Este é o chamado processo de recuperação primário. Apenas um pequeno percentual do óleo pode ser recuperado desta forma. O processo de recuperação secundário consiste em injetar um líquido (água) através de poços injetores para expulsar o óleo restante, recuperando-o nos poços produtores. Existem ainda modos mais sofisticados de recuperação, mas neste trabalho nos restringimos aos processos secundários. Vamos supor ainda que o óleo encontra-se apenas na fase líquida, tornando o escoamento bifásico (água-óleo).

Um processo secundário é modelado por um sistema de equações diferenciais parciais. A resolução numérica deste modelo integra a Simulação de Reservatórios de Petróleo, área essencial na Engenharia de Petróleo. Um de seus principais objetivos é auxiliar os engenheiros a obter melhores previsões do comportamento de um reservatório sob diferentes condições de operação. Em um projeto de recuperação de óleo, decisões envolvem custos financeiros muito elevados. A simulação de reservatórios pode fornecer informações que têm grande impacto no planejamento da recuperação de óleo.

O escoamento de fluidos em um meio poroso depende crucialmente das características petrofísicas do meio, como discutiremos no Capítulo 2. Em geral, o meio poroso está inacessível e, portanto, não se pode medir as propriedades que o caracterizam. Assim, usualmente o reservatório está mal caracterizado e o resultado efetivamente obtido em um campo após um período de operação difere do predito. Pode-se usar o *histórico* do campo (vazões e pressões medidos nos poços) para melhor estimar as propriedades do reservatório. Este é o chamado Ajuste de Histórico. Note-se que este é um *problema inverso*: conhecida a resposta, desejamos obter os parâmetros que descrevem o meio. Como é típico de problemas inversos, o Ajuste de Histórico é um problema de difícil

resolução.

O Ajuste de Histórico pode ser realizado manualmente, através de um processo de tentativa e erro. No entanto, este ajuste manual é custoso e frequentemente mal sucedido. Este trabalho trata do estudo de uma ferramenta computacional para o ajuste automático. Nesta abordagem, o problema de ajuste de histórico pode ser entendido como um problema de otimização baseado na minimização de uma função objetivo que quantifica o erro entre os dados observados e os dados obtidos a partir do simulador. Métodos de otimização eficientes são baseados no uso de derivadas da função objetivo. No caso, a derivada dos dados observados com relação aos parâmetros do modelo que se deseja estimar. Para problemas de grande porte como o nosso, o cálculo da derivada de todos os dados de observação com relação à propriedade de todos os blocos da malha que representa numericamente o reservatório, não é computacionalmente viável. Há na literatura algumas propostas para reduzir o número de parâmetros a serem estimados, como o trabalho de TAVAKOLI e REYNOLDS (2009). Nossa abordagem é o chamado método SVD truncado (TSVD), que reduz o espaço de busca do problema de minimização, diminuindo os custos computacionais associados à sua resolução. Esquemas TSVD de Ajuste de Histórico foram discutidos em TAVAKOLI e REYNOLDS (2009), RODRIGUES (2005) e RODRIGUES (2006).

O esquema TSVD requer não apenas a resolução do problema direto (o escoamento, conhecidos os parâmetros do reservatório), mas também de outros problemas auxiliares, para o cálculo do jacobiano e de sua transposta. Estas são ferramentas que em geral não estão disponíveis em simuladores, comerciais ou acadêmicos. Parte importante deste trabalho foi o desenvolvimento destas ferramentas.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: o Capítulo 2 apresenta os conceitos relacionados aos reservatórios de petróleo, suas propriedades e a modelagem matemática proposta para a resolução do problema de escoamento bifásico de fluidos em meios porosos; o Capítulo 3 apresenta o problema de Ajuste de Histórico proposto neste trabalho; o Capítulo 4 apresenta o método de otimização baseado em TSVD utilizado para a resolução do problema de Ajuste de Histórico; o Capítulo 5 apresenta a modelagem das ferramentas necessárias para a otimização; o Capítulo 6 apresenta os esquemas numéricos utilizados para a implementação dos modelos; o Capítulo 7 apresenta a metodologia utilizada a fim de testar o otimizador; o Capítulo 8 apresenta os resultados obtidos; o Capítulo 9 apresenta as conclusões do trabalho e possíveis trabalhos futuros.

Esta dissertação foi desenvolvida no âmbito do projeto de colaboração “Desenvolvimento de Código Computacional Eficiente para Ajuste Automático de Histórico Baseado em TSVD”, da rede SIGER, envolvendo a Petrobras, a UFRJ e a UFJF.

CAPÍTULO 2

MODELAGEM

A simulação de reservatórios consiste em inferir o comportamento de um reservatório real a partir de um modelo, que pode ser físico, estatístico ou matemático. Uma discussão mais detalhada sobre estes três modelos pode ser encontrada em ERTEKIN e KING (2001). O modelo matemático é o mais utilizado e é também o foco de nosso interesse. Ele é constituído de um sistema de equações diferenciais parciais que descrevem o escoamento de um ou mais fluidos em um meio poroso. A seguir, serão apresentados os conceitos fundamentais da Engenharia de Reservatórios de Petróleo e as equações que governam este escoamento.

2.1 Reservatórios de petróleo

Reservatórios de petróleo são meios porosos naturais, constituídos por rochas sedimentares, cujos poros contêm hidrocarbonetos, geralmente denominados "óleo". Um meio poroso é um sólido com espaços vazios, como ilustrado na Figura 2.1.

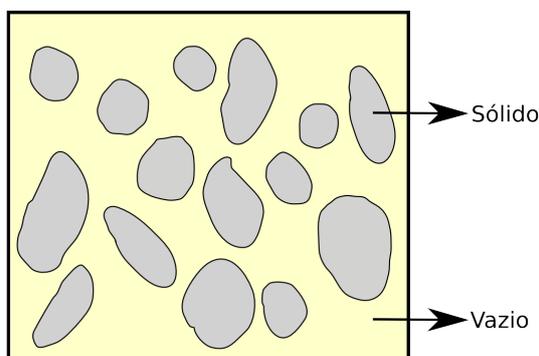


Figura 2.1: Meio poroso.

Importantes características de um reservatório são encontradas na natureza da rocha e dos fluidos que a preenchem.

As características macroscópicas do meio poroso mais relevantes na área de engenharia de petróleo são a porosidade e a permeabilidade.

2.1.1 Propriedades da rocha

2.1.1.1 Porosidade

A porosidade é a fração volumétrica do espaço vazio existente na rocha, ou seja, é o volume disponível para o fluido. Ela é dada pela seguinte relação

$$\phi = \frac{V_p}{V_t} = 1 - \frac{V_s}{V_t}, \quad (2.1)$$

onde ϕ é a porosidade, V_p é o volume de poros, V_s é o volume de sólido e V_t é o volume total.

Teoricamente, a porosidade pode assumir qualquer valor entre zero e um. Na prática, no entanto, em reservatórios de petróleo este valor é tipicamente menor que 0,5.

Na realidade a definição acima corresponde ao conceito de porosidade absoluta. No entanto, o conceito mais relevante em Engenharia de Petróleo é o de porosidade efetiva. Uma rocha pode ter alta porosidade e ainda assim não ser capaz de conduzir fluidos, por ter poucos poros interconectados. A porosidade efetiva leva em conta apenas os poros interconectados, sendo assim o parâmetro utilizado nos cálculos de engenharia de reservatórios, já que para haver produção de óleo é necessário que o mesmo escoe através dos canais de poros da rocha. (COSSE, 1993)

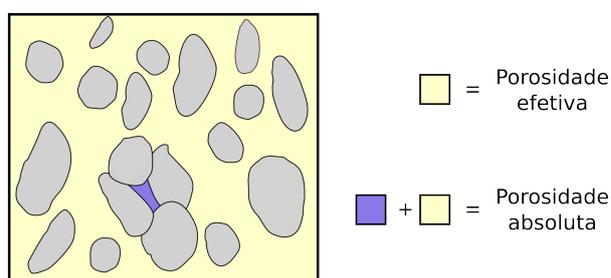


Figura 2.2: Porosidades absoluta e efetiva.

2.1.1.2 Permeabilidade

A porosidade não determina completamente a capacidade da rocha em permitir o escoamento de fluidos através de seus poros. A habilidade da rocha de conduzir fluidos é denominada permeabilidade (TIAB e DONALDSON, 1996).

A permeabilidade é extremamente importante pois sua distribuição dita a conectividade e o fluxo dos fluidos no reservatório. Ela geralmente varia com a posição e, em muitos casos práticos, é possível assumir que ela é um tensor diagonal, como no exemplo para duas dimensões a seguir (CHEN, 2007)

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & \\ & k_{22} \end{pmatrix}$$

O conceito de permeabilidade foi introduzido pelo engenheiro francês Henry Darcy (DARCY, 1856) que, através de um experimento clássico, obteve uma lei empírica para o escoamento de fluidos em um meio poroso. Esta lei é uma das ferramentas fundamentais para a modelagem de fluxo em meios porosos.

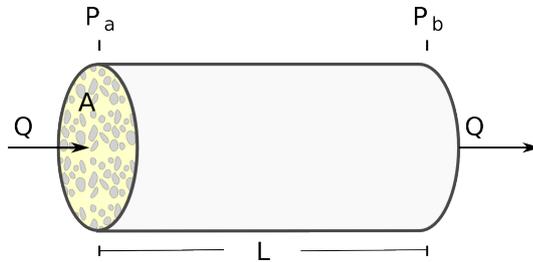


Figura 2.3: Esquema do experimento de Darcy.

Darcy observou que a taxa de escoamento (ou velocidade) da água através de um meio poroso específico, é diretamente proporcional à diferença de pressão entre a entrada e a saída deste meio. A constante de proporcionalidade é uma propriedade característica do meio, dita permeabilidade. A constante de proporcionalidade varia com diferentes fluidos, e deve ser escrita como a permeabilidade do meio dividida pela viscosidade do fluido. A lei de Darcy pode ser escrita da seguinte maneira:

$$Q = \frac{KA(P_b - P_a)}{\mu L}, \quad (2.2)$$

onde Q é a vazão do fluido (m^3/s), K é a permeabilidade do meio, μ é a viscosidade do fluido ($Pa.s$), A é a seção de área (m^2) e $P_b - P_a$ (Pa) é a diferença de pressão em uma distância dada por L (m). Através desta equação, uma análise dimensional para a permeabilidade pode ser feita

$$K = \frac{Q\mu L}{A(P_b - P_a)} = \frac{m^3/s \times Pa.s \times m}{m^2 Pa} = m^2, \quad (2.3)$$

A unidade mais utilizada para a permeabilidade é o Darcy, onde 1 Darcy corresponde

a $0,986923(\mu m)^2$. 1 Darcy é uma permeabilidade relativamente alta. Na maioria dos reservatórios de petróleo, esse valor é menor que 1 Darcy. Assim, uma menor unidade, o miliDarcy (mD), é amplamente utilizada na indústria de óleo e gás. Utilizando o SI, o micrômetro quadrado $(\mu m)^2$ é utilizado ao invés de m^2 . Os valores mais comuns para as rochas em reservatórios de petróleo estão na faixa de 0.1 a 1000 milidarcies. A Tabela 2.1 contém exemplos de valores para a porosidade e permeabilidade de alguns campos.

Tabela 2.1: Permeabilidade e porosidade de alguns campos de óleo. Adaptado de TIAB e DONALDSON (1996)

Nome do Campo	Porosidade %	Permeabilidade (mD)
"Second Wilcox", Oklahoma Co., OK	12.0	100.0
Clinch, Lee Co., VA	9.6	0.9
Strawn, Cook Co., TX	22.0	81.5
Bartlesville, Anderson Co., KS	17.5	25.0
Olympic, Hughes Co., OK	20.5	35.0
Nugget, Fremont Co., WY	24.9	147.5
Cut Bank, Glacier Co., MT	15.4	111.5
Woodbine, Tyler Co., TX	22.1	3390.0
Eutaw, Choctaw Co., AL	30.0	100.0
O'Hern, Dual Co., TX	28.4	130.0

A Equação (2.2) pode também ser escrita em termos da velocidade da seguinte forma

$$\frac{Q}{A} = v = \frac{K (P_b - P_a)}{\mu L}, \quad (2.4)$$

onde $v = \frac{Q}{A}$ é a chamada *velocidade de Darcy*.

Um conhecimento preciso da porosidade e da permeabilidade, juntamente com as propriedades dos fluidos é necessário para uma predição eficiente do desempenho do reservatório (TIAB e DONALDSON, 1996). A porosidade e a permeabilidade podem ser obtidas para algumas regiões do reservatório através de medições em grande escala como testes em poços ou por medição direta em laboratório.(FANCHI, 2005)

2.1.2 Propriedades dos fluidos

Existem diversas propriedades dos fluidos que são importantes para a modelagem de reservatório. Porém, neste trabalho foram feitas simplificações que desconsideram algumas destas propriedades. Discutiremos apenas duas propriedades importantes: a viscosidade e a massa específica.

2.1.2.1 Viscosidade

A viscosidade de um fluido é a medida da resistência do fluido ao escoamento resultante da aplicação de um gradiente de pressão e será referenciada neste texto por μ . Sua unidade

é $Pa \times s$. Para um fluido diluído (gasoso), as moléculas estão distantes umas das outras e oferecem pouca resistência ao escoamento, como consequência de seu movimento aleatório. Já um fluido denso oferece alta resistência ao escoamento. Devido à proximidade de suas moléculas, seu movimento aleatório retarda o escoamento.

2.1.2.2 Massa específica

A massa específica de um fluido é o quociente de sua massa pelo volume. Sua unidade é kg/m^3 e será referenciada neste texto por ρ . Na modelagem proposta neste trabalho, consideramos que os fluidos são incompressíveis. Um fluido incompressível é aquele cuja massa específica não se altera com a pressão. Ou seja

$$\frac{\partial V}{\partial p} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \rho}{\partial p} = 0. \quad (2.5)$$

Deste modo, a densidade é constante. (AHMED e MCKINNEY, 2004)

2.2 Recuperação do óleo

A saturação dos fluidos em um reservatório de petróleo depende fortemente do estágio de recuperação do óleo. Em um primeiro estágio, o reservatório contém, essencialmente, um único fluido como óleo ou gás (a presença de água pode ser desconsiderada). Frequentemente, a pressão neste estágio é tão alta que o gás ou óleo é produzido por uma simples descompressão natural, sem nenhum tipo de esforço de bombeamento nos poços. Este estágio é denominado *recuperação primária* e termina quando ocorre um equilíbrio entre a pressão do campo de óleo e da atmosfera. A recuperação primária geralmente deixa 70%-80% dos hidrocarbonetos no reservatório (CHEN *et al.*, 2006).

Para recuperar parte do óleo que permaneceu no reservatório, um fluido (geralmente água) é injetado através de alguns poços (*poços injetores*) enquanto o óleo é produzido através de outros poços (*poços produtores*). Este processo mantém uma alta pressão no reservatório e altas taxas de escoamento. Ele também desloca parte do óleo e o empurra em direção aos poços produtores. Este estágio de recuperação de óleo é chamado *recuperação secundária* e é o processo que propomos estudar. (CHEN *et al.*, 2006)

Existe ainda um estágio de *recuperação terciária* ou *Enhanced Oil Recovery* que compreende uma série de técnicas que foram desenvolvidas a fim de recuperar ainda mais hidrocarbonetos. Essas técnicas envolvem complexos efeitos químicos e térmicos. Mais detalhes podem ser encontrados em GREEN (1998).

Neste trabalho, o modelo que apresentamos está relacionado à recuperação secundária.

ria, ou seja, modelamos um reservatório de petróleo com produção de óleo nos poços produtores baseado na injeção de água através de poços injetores.

2.3 Escoamento bifásico

O problema apresentado neste trabalho é o do escoamento bifásico (óleo/água) de fluidos incompressíveis e imiscíveis (que não se misturam) em meios porosos, negligenciando-se os efeitos da gravidade. Nesta seção, serão desenvolvidas as equações básicas que regem este fenômeno.

2.3.1 Equações básicas

As leis que governam o escoamento de um fluxo bifásico em meios porosos são a *equação da conservação de massa* e a *lei de Darcy*. Antes de apresentá-los, é necessário introduzir o conceito de *saturação* de uma fase. A saturação de uma fase é definida como a fração de volume vazio de um meio poroso preenchida por esta fase. O fato de termos dois fluidos que preenchem os espaços vazios implica na relação

$$s_w + s_o = 1, \quad (2.6)$$

onde s_w e s_o são as saturações da água e do óleo respectivamente.

2.3.1.1 Lei da conservação de massa

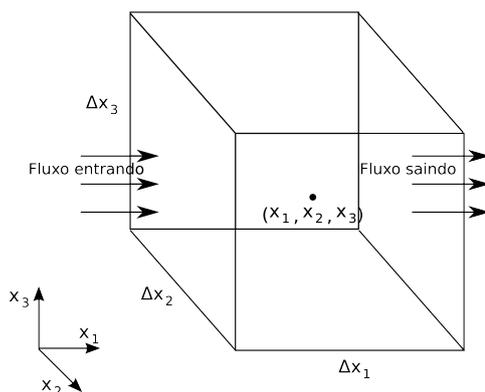


Figura 2.4: Volume diferencial.

Vamos deduzir a equação da conservação de massa para um único fluido. As variáveis espaciais e temporal serão representadas por (x_1, x_2, x_3) e t , respectivamente. Sejam ϕ a porosidade efetiva do meio poroso, ρ a densidade do fluido por unidade de volume,

$v = (v_1, v_2, v_3)$ a *velocidade de Darcy* e Q as fontes e sumidouros externos. Considere um cubo retangular de tal modo que suas faces sejam paralelas aos eixos de coordenadas, como o apresentado na Figura 2.4. O centróide do cubo é denotado por (x_1, x_2, x_3) e seu tamanho na direção da coordenada x_i é $\Delta x_i, i = 1, 2, 3$. A componente x_i do fluxo de massa (fluxo de massa por unidade de área por unidade de tempo) do fluido é ρv_i . De acordo com a Figura 2.4, a massa entrante através da interface $x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}$ por unidade de tempo é

$$(\rho v_1)_{x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3} \Delta x_2 \Delta x_3,$$

e a massa que sai na interface $x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}$ é

$$(\rho v_1)_{x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3} \Delta x_2 \Delta x_3.$$

Analogamente, nas coordenadas de direção x_2 e x_3 , as massas que entram e saem das interfaces são, respectivamente,

$$(\rho v_2)_{x_1, x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}, x_3} \Delta x_1 \Delta x_3, \quad (\rho v_2)_{x_1, x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}, x_3} \Delta x_1 \Delta x_3,$$

e

$$(\rho v_3)_{x_1, x_2, x_3 - \frac{\Delta x_3}{2}} \Delta x_1 \Delta x_2, \quad (\rho v_3)_{x_1, x_2, x_3 + \frac{\Delta x_3}{2}} \Delta x_1 \Delta x_2.$$

Seja $\frac{\partial}{\partial t}$ a diferenciação no tempo, o *acúmulo de massa* por unidade de tempo é

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3,$$

e a remoção de massa do cubo, isto é, o decréscimo de massa devido a uma fonte de intensidade Q (massa por unidade de volume por unidade de tempo) é

$$-Q \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3.$$

A diferença entre a massa que entra e a massa que sai é igual à soma do acúmulo de massa dentro do cubo:

$$\begin{aligned}
& \left[(\rho v_1)_{x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3} - (\rho v_1)_{x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3} \right] \Delta x_2 \Delta x_3 \\
+ & \left[(\rho v_2)_{x_1, x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}, x_3} - (\rho v_2)_{x_1, x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}, x_3} \right] \Delta x_1 \Delta x_3 \\
+ & \left[(\rho v_3)_{x_1, x_2, x_3 - \frac{\Delta x_3}{2}} - (\rho v_3)_{x_1, x_2, x_3 + \frac{\Delta x_3}{2}} \right] \Delta x_1 \Delta x_2 \\
= & \left(\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} - Q \right) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3.
\end{aligned}$$

Dividindo esta equação por $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ vemos que

$$\begin{aligned}
& \frac{(\rho v_1)_{x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3} - (\rho v_1)_{x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3}}{\Delta x_1} \\
& \frac{(\rho v_2)_{x_1, x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}, x_3} - (\rho v_2)_{x_1, x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}, x_3}}{\Delta x_2} \\
& \frac{(\rho v_3)_{x_1, x_2, x_3 + \frac{\Delta x_3}{2}} - (\rho v_3)_{x_1, x_2, x_3 - \frac{\Delta x_3}{2}}}{\Delta x_3} = \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} - Q.
\end{aligned}$$

Seja $\Delta x_i \rightarrow 0, i = 1, 2, 3$ obtemos a *equação da conservação de massa*

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho v) + Q \quad (2.7)$$

onde $\nabla \cdot$ é o operador de divergência:

$$\nabla \cdot v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}.$$

É importante observar que Q é negativo para sumidouros e positivo para fontes.

A Equação (2.7) foi deduzida para 3 dimensões mas ela é também válida para uma ou duas dimensões.

Deduzimos (2.7) para um exemplo monofásico. Derivação análoga se aplica ao caso de mais de uma fase. A acumulação de massa num volume diferencial por unidade de tempo para um sistema bifásico é dada por

$$\frac{\partial \phi \rho_\alpha s_\alpha}{\partial t} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3.$$

onde s_α é a saturação da fase α .

Com isto e a suposição de que não existe transferência de massa entre as fases no fluxo imiscível, a massa é conservada em cada uma das fases:

$$\frac{\partial \phi \rho_\alpha s_\alpha}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho_\alpha v_\alpha) + Q_\alpha, \quad \alpha = w, o. \quad (2.8)$$

Neste trabalho, assumimos a incompressibilidade dos fluidos (2.5) e também consideramos a porosidade constante ao longo do tempo. A Equação (2.8) é então reescrita como

$$\phi \rho_\alpha \frac{\partial s_\alpha}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho_\alpha v_\alpha) + Q_\alpha, \quad \alpha = w, o. \quad (2.9)$$

onde cada fase tem sua própria densidade (ρ_α), velocidade de Darcy (v_α) e taxa de fluxo de massa (Q_α). A Equação (2.9) é a lei de conservação de massa para a fase α .

2.3.1.2 Lei de Darcy

A lei de Darcy indica uma relação linear entre a velocidade do fluido e o gradiente de pressão. Esta equação já foi apresentada em (2.2) e sua forma diferencial para o escoamento monofásico é escrita da forma

$$v = -\frac{K}{\mu} \nabla p, \quad (2.10)$$

onde K é o tensor de permeabilidade absoluta, μ é a viscosidade do fluido e ∇ é o operador gradiente:

$$\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial x_2}, \frac{\partial p}{\partial x_3} \right).$$

A Lei de Darcy pode ser diretamente estendida para o fluxo bifásico:

$$v_\alpha = -\frac{K_\alpha}{\mu_\alpha} \nabla p_\alpha, \quad \alpha = w, o, \quad (2.11)$$

onde K_α , p_α e μ_α são a *permeabilidade efetiva*, pressão e viscosidade para a fase α ,

respectivamente.

A Equação (2.11) evidencia o fato de que a pressão da água e do óleo podem ser diferentes. Devido à curvatura e tensão na superfície da interface entre as duas fases, a pressão do fluido molhante (água) é menor que a do fluido não molhante (óleo). A diferença entre a pressão do óleo e a pressão da água é chamada *pressão capilar* CHEN *et al.* (2006):

$$p_c = p_o - p_w. \quad (2.12)$$

A pressão capilar resulta da descontinuidade de pressão na interface entre os fluidos que saturam a rocha.

Como o escoamento simultâneo entre dois fluidos causa a interferência de um no outro, as permeabilidades efetivas não são maiores que a permeabilidade absoluta K do meio poroso. A *permeabilidade relativa* $k_{r\alpha}$ é definida como a razão entre a permeabilidade efetiva de um fluido não saturado e a permeabilidade com saturação 100% (permeabilidade absoluta):

$$k_{r\alpha} = \frac{K_\alpha}{K}, \quad \alpha = w, o. \quad (2.13)$$

A função $k_{r\alpha}$ indica como o óleo e a água compartilham a permeabilidade disponível da rocha do reservatório, quando cada um dos fluidos ocupa parte do espaço poroso. Ela é uma função da saturação da fase. A Figura (2.5) mostra curvas típicas de permeabilidade relativa.

Pode ser observado que, quanto maior a saturação do óleo (s_o), maior sua permeabilidade relativa. Em outras palavras, quanto mais óleo existir nos poros, maior sua facilidade em se mover através deles. Da mesma forma, quanto mais água existir nos poros (s_w), menos facilmente o óleo irá se mover (DIKKERS, 1985). O valor de s_w em que a água começa a escoar é chamado *saturação irreduzível da água* (s_{wi}) e o valor de s_o em que o óleo pára de escoar é chamado de *saturação residual do óleo*.

São também introduzidas a *mobilidade das fases*

$$\lambda_\alpha(s) = \frac{k_{r\alpha}(s)}{\mu_\alpha}, \quad \alpha = w, o, \quad (2.14)$$

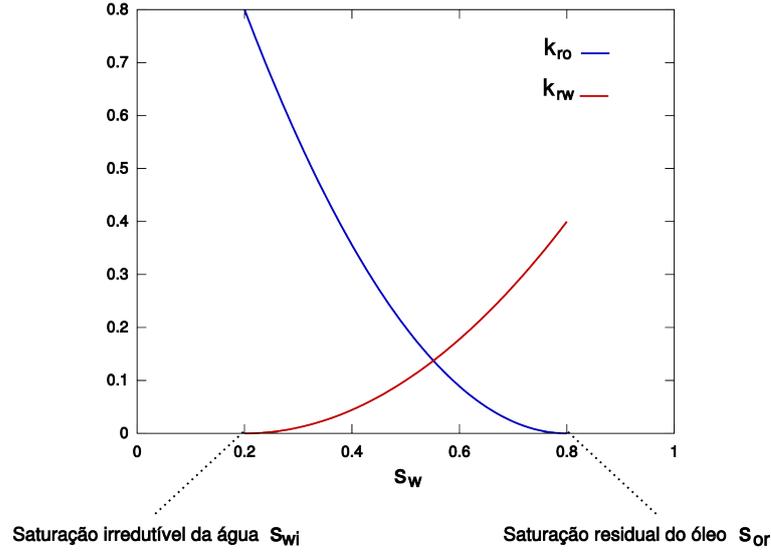


Figura 2.5: Curvas de permeabilidade relativa.

a mobilidade total

$$\lambda_t = \lambda_w + \lambda_o, \quad (2.15)$$

e as transmissibilidades

$$T_\alpha(s) = K\lambda_\alpha(s) = \frac{Kk_{r\alpha}(s)}{\mu_\alpha} \quad (2.16)$$

Desta forma, podemos escrever as velocidades dos fluidos como $v_w = -T_w \nabla p_w$ e $v_o = -T_o \nabla p_o$.

Combinando (2.8) e (2.11), obtemos um sistema de EDPs que modela o escoamento bifásico em um meio poroso. A Equação da conservação de massa (2.8) pode ser escrita para a água e óleo:

$$\begin{cases} \phi \rho_w \partial_t s_w + \nabla \cdot (\rho_w v_w) = Q_w, \\ \phi \rho_o \partial_t s_o + \nabla \cdot (\rho_o v_o) = Q_o. \end{cases} \quad (2.17)$$

Considerando ρ_α constante e $p_w = p_o$ (pressão capilar nula) podemos dividir a primeira Equação de (2.17) por ρ_w e a segunda por ρ_o :

$$\begin{cases} \phi \partial_t s_w + \nabla \cdot (v_w) = q_w, \\ \phi \partial_t s_o + \nabla \cdot (v_o) = q_o, \end{cases} \quad (2.18)$$

onde q_α é a vazão volumétrica da fase α , que denotaremos simplesmente por vazão da fase α . Somando as duas equações, obtemos:

$$\phi(\partial_t(s_w + s_o)) + \nabla \cdot v_t = q_t,$$

onde $v_t = v_w + v_o$ é a velocidade total e $q_t = q_w + q_o$ é a vazão total. Como $s_w + s_o = 1$, a equação anterior é reescrita da seguinte forma:

$$\nabla \cdot v_t = q_t. \quad (2.19)$$

Utilizando a primeira Equação de (2.18) e (2.19), obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \phi \partial_t s_w + \nabla \cdot v_w = q_w, \\ \nabla \cdot v_t = q_t. \end{cases} \quad (2.20)$$

Chamando de s a saturação da água, omitindo subscritos, a função *fluxo fracionário* é definida como

$$f(s) = \frac{T_w}{T_t} = \frac{\lambda_w}{\lambda_t}, \quad \alpha = w, o, \quad (2.21)$$

e (2.20) é reescrita como:

$$\begin{cases} \phi \partial_t s + \nabla \cdot (f(s)v_t(s, p)) = q_w, \\ \nabla \cdot v_t(s, p) = q_t. \end{cases} \quad (2.22)$$

É importante observar que a vazão total q_t de todos os poços, tanto produtores quanto injetores, é prescrita para todos os instantes de tempo. Nos poços injetores, temos $q_t = q_w$, e nos poços produtores, $q_t = q_o + q_w$. Assim sendo, q_w é conhecida nos poços injetores mas não o é nos poços produtores. A fim de completar o Sistema (2.22), é preciso acrescentar uma equação relacionando q_t e q_w nos poços produtores. Isto é feito através da relação

$$q_w = f(s)q_t. \quad (2.23)$$

Ou seja, q_w é uma fração de q_t . A função $f(s)$ é dada, e é dita o fluxo fracionário. Incluindo (2.23) em (2.22), obtemos um sistema de duas equações para o escoamento bifásico em meios porosos cujas incógnitas são a saturação da água (s) e a pressão do campo (p). As duas equações que compõem o sistema são fortemente acopladas e a maneira de resolvê-las será discutida no Capítulo 6. Para que o sistema fique completo é necessário introduzir as condições de contorno e inicial.

2.3.2 Condições de contorno e inicial

Para este problema, foi assumido um reservatório isolado, o que significa que v_w e v_o são nulos nos bordos de Ω . Temos, portanto, uma condição de fronteira do tipo Neumann do seguinte formato

$$v_{\alpha} \cdot \nu = 0, x \in \partial\Omega,$$

onde ν é o vetor normal à fronteira $\partial\Omega$ do domínio Ω .

Definimos também a condição inicial, dada por

$$s(x, 0) = s_0(x), x \in \Omega.$$

Temos, portanto, um sistema completo de equações diferenciais parciais dado por (2.24)

$$\begin{cases} \phi \partial_t s + \nabla \cdot (f(s)v_t(s, p)) = q_w, \\ \nabla \cdot v_t(s, p) = q_t, \\ v_{\alpha} \cdot \nu = 0, x \in \partial\Omega, \\ s(x, 0) = s_0(x), x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.24)$$

2.4 Exemplo

Nesta seção será apresentada uma simulação do modelo apresentado. Estes resultados foram obtidos através do simulador desenvolvido neste trabalho, cuja implementação será discutida no Capítulo 6.

Consideremos um reservatório de petróleo retangular bidimensional de área 200×200 m² e altura $h = 20$ m. Neste reservatório foram perfurados 5 poços: 4 injetores e 1 produtor. Este poços estão dispostos de modo a formar uma estrutura simétrica conhecida como *five-spot*, ilustrada na Figura 2.6.

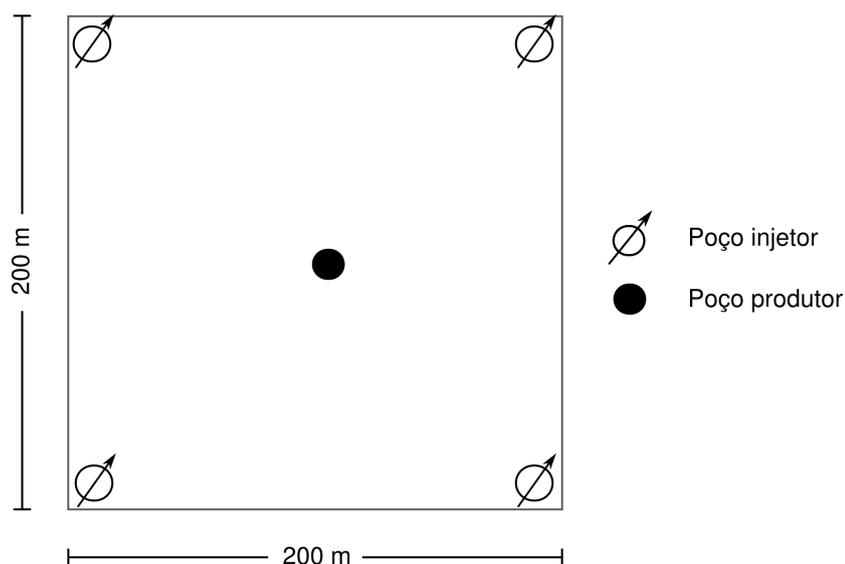


Figura 2.6: Reservatório *five-spot*.

Este reservatório possui as seguintes propriedades: permeabilidade (K) constante igual a $100 \mu D$; porosidade ϕ constante igual a 0.2 ; vazão total q_t em cada um dos poços injetores igual a $100 \text{ m}^3/\text{dia}$; vazão total no poço produtor igual a $400 \text{ m}^3/\text{dia}$; tempo total de produção igual a 600 dias.

A Figura 2.7 apresenta a evolução da vazão do óleo e da água no poço produtor.

Como pode ser observado, inicialmente há apenas produção de óleo, já que a água injetada no reservatório ainda não chegou ao poço produtor. Aproximadamente no 120 dia, acontece o chamado *breakthrough*. O *breakthrough* é a chegada de água no poço produtor. Neste instante a vazão de água Q_w deixa de ser nula e passa a aumentar, enquanto ocorre uma diminuição na vazão de óleo Q_o . A vazão total é prescrita e constante, e temos que

$$Q_t = Q_w + Q_o.$$

Já a Figura 2.8 apresenta o campo de saturação de água no reservatório em 4 instantes de tempo diferentes.

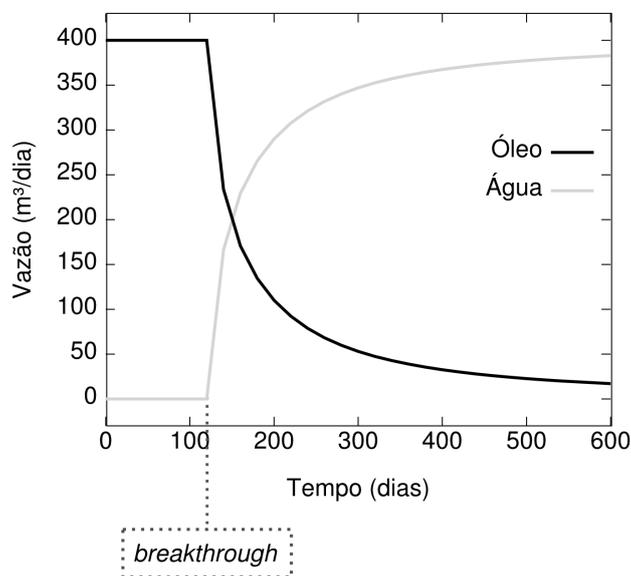


Figura 2.7: Vazão óleo x água - poço produtor.

Podemos observar que nos dias iniciais de produção a água está concentrada nas proximidades dos poços injetores. Já nos dias finais de produção a água já ocupa praticamente todo o reservatório e não resta mais muito óleo a ser produzido.

É interessante observar também que o exemplo apresentado corresponde a um reservatório totalmente simétrico, com propriedades físicas constantes. Portanto, o campo de saturação da água é também totalmente simétrico em todos os instantes de tempo de simulação.

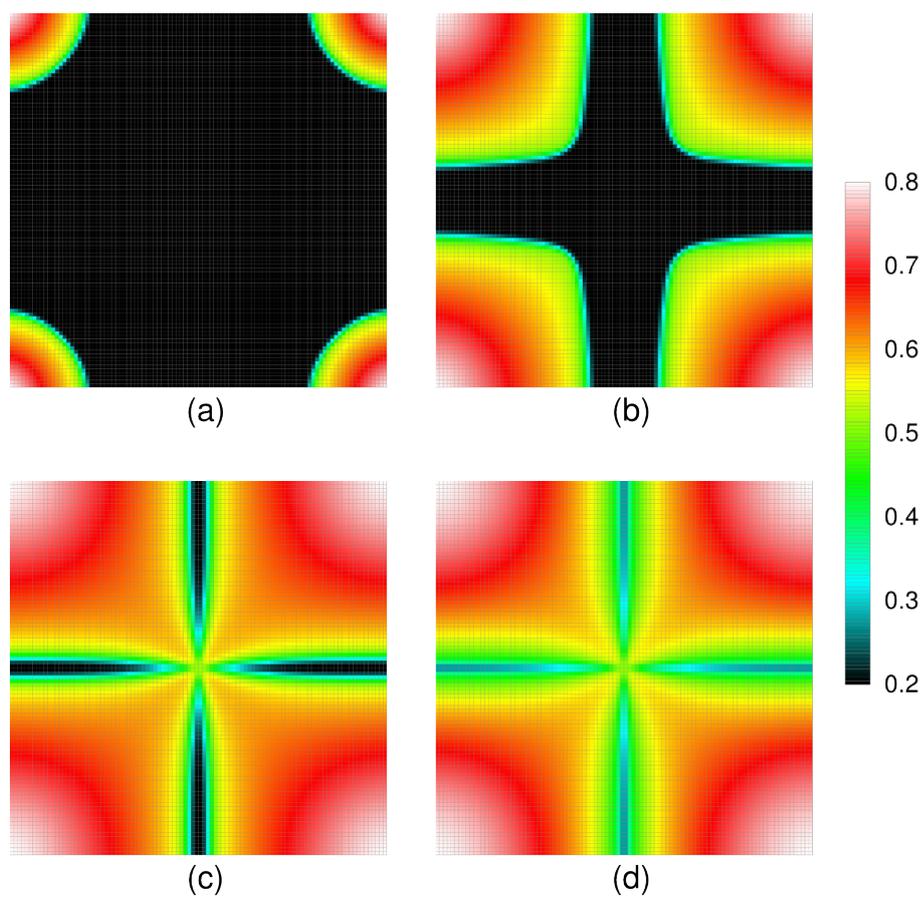


Figura 2.8: Saturação de água (s_w) ao longo do tempo. (a) 20 dias; (b) 100 dias; (c) 400 dias; (d) 600 dias.

CAPÍTULO 3

AJUSTE DE HISTÓRICO

Como vimos no capítulo anterior, a caracterização petrofísica de um reservatório é essencial para a determinação do escoamento dos fluidos em seu interior. Portanto, esta informação é valiosíssima para a otimização do processo de produção. Porém, é inviável determinar valores das propriedades de um reservatório em toda sua extensão. Medições diretas são viáveis apenas perto dos poços que, por sua vez, encontram-se a centenas de metros de distância um do outro.

Após alguns anos de operação, têm-se informações sobre a produção do reservatório. Tipicamente, taxas de produção de óleo e pressões nos poços. Este é o chamado *histórico do reservatório*. Com este histórico, pode-se tentar obter uma melhor caracterização do reservatório, ao se procurar um campo que forneça um melhor ajuste aos dados do histórico. Isto permite fazer melhores previsões futuras, e tomar melhores decisões. Este processo é denominado *Ajuste de Histórico*. Nosso interesse principal é o de construir uma ferramenta computacional de modo a fazer o Ajuste de Histórico de forma automática. É importante ressaltar que este é um problema muito difícil. Até onde vai o nosso conhecimento, tal ferramenta computacional não existe hoje.

O procedimento para realizar o Ajuste Automático de Histórico é iterativo e seus passos principais estão representados na Figura 3.1.

Exemplos típicos de dados utilizados para gerar o histórico do campo são a taxa de produção de óleo em cada poço produtor e a pressão associada aos poços. Já os parâmetros típicos a se determinar são a porosidade e a permeabilidade do reservatório.

Ainda hoje é prática corriqueira o ajuste manual. Ele exige uma grande experiência e depende fortemente do julgamento pessoal do engenheiro de reservatório. O profissional deve modificar manualmente os parâmetros do modelo que possuem maior incerteza e que tenham maior efeito na solução. A sensibilidade da solução a alguns parâmetros é

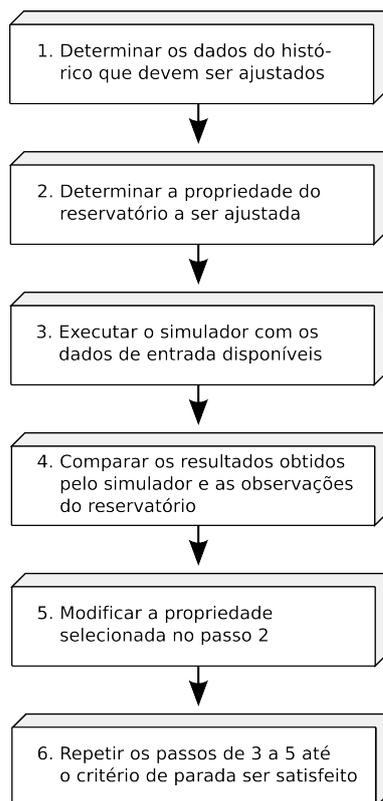


Figura 3.1: Processo iterativo do ajuste de histórico.

frequentemente estabelecida durante o próprio processo de Ajuste de Histórico. Apesar desta abordagem demandar uma quantidade considerável de tempo e estar sujeita a diversos erros, ela é ainda muito utilizada pelos profissionais da área. Recentemente, têm sido realizados esforços consideráveis em pesquisas a fim de desenvolver técnicas automáticas de ajuste de histórico.

O problema de ajuste de histórico consiste em um *problema inverso*. Nossa abordagem é resolvê-lo através de um problema de mínimos quadrados. Trata-se de minimizar uma função objetivo que é o erro quadrático entre os dados observados e os dados estimados. Algoritmos de mínimos quadrados baseados em derivadas são então utilizados a fim de acelerar o processo de estimativa de parâmetros. O problema de ajuste de histórico se transforma em um problema de minimização e torna-se possível criar ferramentas computacionais a fim de resolvê-lo de maneira sistemática.

O ajuste automático de histórico tem o potencial de economizar uma quantidade significativa de tempo e fornecer estimativas mais precisas para o modelo de parâmetros.

Neste trabalho discutimos um esquema de ajuste automático de histórico. Os detalhes do esquema serão apresentados nas próximas seções.

3.1 Problema direto

Em um problema direto, as propriedades físicas de algum sistema (ou modelo de parâmetros) são conhecidas, e um método determinístico permite calcular a resposta do sistema a um estímulo dado. As propriedades físicas são referidas como sistema ou modelo de parâmetros.

Neste trabalho, o problema direto consiste no Sistema de equações (2.24), apresentado no Capítulo 2, que rege o escoamento bifásico em meios porosos. Suas propriedades físicas são a permeabilidade K , porosidade ϕ , viscosidade μ e densidade ρ e gera como saída os campos de pressão p e saturação s e pode ser representado da seguinte maneira (OLIVER *et al.*, 2008)

$$S(K, \phi, \mu, \rho) = (s, p).$$

3.2 Problema inverso

Em sua forma mais geral, um problema inverso refere-se à determinação de propriedades físicas do sistema, dada a resposta observada do sistema a um estímulo.

O problema inverso proposto neste trabalho consiste em determinar o campo de permeabilidades (K) de um reservatório utilizando como histórico os dados de produção de óleo e de pressão nos poços.

Denotando por K o vetor de parâmetros a determinar, por O o vetor de observações do Histórico e definindo $u = (s, p)$ como o vetor incógnita do problema direto, pode-se escrever

$$u = u(K) \quad \text{e} \quad O(K) = O(K, u(K)).$$

Seja \bar{O} o conjunto de observações reais, o parâmetro K é determinado através da resolução do problema de mínimos quadrados

$$\min_{K \in R^{N+}} \|O(K) - \bar{O}\|^2, \quad (3.1)$$

onde N é o número de parâmetros que se deseja determinar e K deve ser um valor positivo.

Este problema de mínimos quadrados pode ser resolvido utilizando diversos métodos de otimização. Dado que o campo de permeabilidades pode variar com ordens de grandeza, é usual otimizar $m = \log K$ no lugar de K . Além disso, a utilização do logaritmo transforma o problema de minimização com restrição (3.1) em um problema de minimização sem restrição. Temos, da mesma forma

$$O(m) = O(m, u(m)),$$

e

$$\min_{m \in \mathbb{R}^N} \|O(m) - \bar{O}\|^2, \quad (3.2)$$

onde N é o número de parâmetros que se deseja estimar.

CAPÍTULO 4

TSVD

No Capítulo 3 foi apresentado o problema de Ajuste de Histórico que resulta na resolução de um problema de mínimos quadrados não linear. Neste capítulo, serão apresentados os métodos utilizados para a resolução deste problema. Antes disso é necessário introduzir alguns conceitos de Álgebra Linear importantes para a discussão que segue.

Posto de uma matriz

O *posto* de uma matriz é o número de colunas linearmente independentes dessa matriz. O posto de uma matriz $m \times n$ é, no máximo, igual a $\min(m, n)$. Uma matriz cujo posto é o maior possível é chamada de matriz de posto cheio; caso contrário a matriz é chamada de posto incompleto.

Problema de mínimos quadrados linear

O problema de mínimos quadrados linear é um problema de suma importância que surgiu devido à necessidade de ajustar um modelo matemático linear a dados observados. Em termos de matriz, dado um vetor $b \in \mathbb{R}^m$ e uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, desejamos encontrar um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ tal que Ax seja a “melhor” aproximação para b .

Existem diversas formas de definir a “melhor” solução. Uma possibilidade que leva a um problema computacional simples é ter x como a solução do problema de minimização

$$\min_x \|Ax - b\|_2, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^m, \quad (4.1)$$

onde $\|\cdot\|_2$ indica a norma euclidiana do vetor. O problema (4.1) é chamado *problema de mínimos quadrados linear* e x é a solução de mínimos quadrados linear para o sistema $Ax = b$. Chamamos de $r = b - Ax$ de vetor resíduo. Uma solução de mínimos quadrados minimiza $\|r\|_2^2 = \sum_{i=1}^m r_i^2$, isto é, a soma dos quadrados dos resíduos. Se o posto da matriz A for menor que n , então a solução x não é única. Entretanto, dentre todas as

soluções para o problema de mínimos quadrados existe uma única solução que minimiza $\|r\|_2$, apresentada no próximo tópico. (BJORCK, 1996)

Pseudoinversa de uma matriz

Se A é uma matriz $n \times n$ não singular, a solução para o problema linear $Ax = b$ pode ser escrita como $x = A^{-1}b$, onde A^{-1} é a (única) matriz inversa da matriz A .

Em problemas de mínimos quadrados lineares a matriz A tipicamente não é quadrada, mas possui dimensão $m \times n$. Portanto, para estes casos não existe uma matriz inversa A^{-1} . Existe, porém, uma matriz A^+ unicamente determinada por A tal que a solução de menor norma do problema de mínimos quadrados linear dado por (4.1) é igual a $x = A^+b$. A matriz A^+ é denominada pseudoinversa de A (LAWSON e HANSON, 1987). A pseudoinversa existe para uma matriz arbitrária $m \times n$. Caso a matriz seja invertível, $A^{-1} = A^+$.

4.1 Problema de mínimos quadrados não-linear

Como apresentado no Capítulo 3, o problema proposto neste trabalho consiste em determinar um mapa de permeabilidades de forma que o modelo (2.22) reproduza o melhor possível o histórico do campo. Sejam n_o e n_m o número de dados do histórico, ou observações, e o número de parâmetros a determinar, respectivamente. Seja o resíduo $r_i(m)$ o erro na predição do modelo para a observação i , dado por

$$r_i = \bar{O}_i - O_i(m), \quad i = 1, \dots, n_o. \quad (4.2)$$

O problema de otimização não linear sem restrição consiste em encontrar um minimizador global da soma de quadrados de n_o funções não lineares,

$$\min_{m \in \mathbb{R}^{n_m}} f(m), \quad f(m) = \frac{1}{2} \|r\|_2^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_o} r_i^2(m). \quad (4.3)$$

Os métodos básicos para o problema de mínimos quadrados não linear requerem informações de derivada sobre os componentes de $r_i(m)$. Podemos escrever o Jacobiano $J(m)$ do vetor resíduo $r(m) = (r_1(m), \dots, r_{n_o}(m))^T$ da seguinte forma

$$J(m) \in \mathbb{R}^{n_o \times n_m}, \quad J(m)_{ij} = \frac{\partial r_i(m)}{\partial m_j}, \quad (4.4)$$

$i = 1, \dots, n_o, j = 1, \dots, n_m.$

Substituindo (4.2) em (4.4) obtemos

$$J(m)_{ij} = \frac{\partial(\bar{O} - O(m_i))}{\partial m_j} = -\frac{\partial O(m_i)}{\partial m_j}. \quad (4.5)$$

A derivada primeira de $f(x) = \frac{1}{2}r(m)^T r(m) = \frac{1}{2}\|r(m)\|_2^2$ é dada por

$$\nabla f(m) = J(m)^T r(m) = -O'(m)^T r(m). \quad (4.6)$$

Uma condição necessária para que m^* seja um mínimo local de $f(x)$ é

$$\nabla f(m^*) = -O'(m^*)^T r(m^*) = 0. \quad (4.7)$$

É natural aproximar $r(m)$ por um modelo linear em uma vizinhança de um dado ponto m_c ,

$$r_c(m) = r(m_c) + J(m_c)(m - m_c). \quad (4.8)$$

Podemos então utilizar o problema de mínimos quadrados linear

$$\min_m \|r(m_c) + J(m_c)(m - m_c)\|_2, \quad (4.9)$$

a fim de derivar uma aproximação para a solução de (4.3). Esta abordagem, que utiliza apenas derivada de primeira ordem, leva ao método de Gauss-Newton apresentado na próxima seção.

4.1.1 O método de Gauss-Newton

O método Gauss-Newton para a resolução do problema (4.3) baseia-se em uma sequência de aproximações lineares para $r(m)$. Se m_k corresponde à aproximação corrente então a correção p_k é calculada como a solução do problema de mínimos quadrados linear

$$p_k = \arg \min_p \|r(m_k) + J(m_k)p\|_2. \quad (4.10)$$

Aplicando (4.4) em (4.10) escrevemos o problema de minimização da seguinte forma

$$p_k = \arg \min_p \|r(m_k) - O'(m_k)p\|_2 \quad (4.11)$$

e a nova aproximação para m é $m_{k+1} = m_k + p_k$.

A fim de obter um método que garanta descida na função objetivo podemos tomar

$$m_{k+1} = m_k + \alpha_k p_k, \quad (4.12)$$

onde p_k é a solução de (4.11) e α_k é um passo a ser determinado. O método resultante que utiliza p_k como uma direção de busca, é chamado *Damped Gauss-Newton* (BJORCK, 1996). O passo α_k é determinado através de métodos de busca linear.

$O'(m)$ é uma matriz de dimensão $n_o \times n_m$. O problema de mínimos quadrados não linear é reduzido à resolução de diversos problemas de mínimos quadrados lineares.

4.2 A decomposição SVD

A decomposição em valores singulares (SVD, do inglês *Singular Value Decomposition*) de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n_o \times n_m}$ é uma decomposição matricial de grande importância teórica e prática para o tratamento de problemas de mínimos quadrados. Esta decomposição fornece uma forma diagonal de A por meio de duas mudanças de base ortogonais (BJORCK, 1996).

A decomposição em valores singulares é dada da seguinte forma: seja $A \in \mathbb{R}^{n_o \times n_m}$ uma matriz retangular ou quadrada de posto = r . Então, existem matrizes unitárias $U \in \mathbb{R}^{n_o \times n_o}$ e $V \in \mathbb{R}^{n_m \times n_m}$ tais que

$$A = U\Sigma V^T, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

onde

$$\Sigma \in \mathbb{R}^{n_o \times n_m}, \quad \Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r), \quad (4.14)$$

e Σ_1 possui elementos não negativos na diagonal, que aparecem em ordem decrescente

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0. \quad (4.15)$$

Os valores σ_i são chamados de *valores singulares* de A . Temos também que $U \in \mathbb{R}^{n_o \times n_o}$ e $V \in \mathbb{R}^{n_m \times n_m}$ são matrizes com colunas ortonormais. Se escrevermos

$$U = (u_1, \dots, u_{n_o}), \quad V = (v_1, \dots, v_{n_m}), \quad (4.16)$$

os vetores u_i e v_i são, respectivamente, os *vetores singulares* à esquerda e à direita, associados a σ_i , $i = 1, \dots, r$.

Aplicando (4.14) e (4.16) em (4.13) escrevemos

$$A = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^r u_i \sigma_i v_i^t \quad (4.17)$$

A decomposição SVD está definida para quaisquer valores de n_m e n_o .

4.2.1 A decomposição SVD e o problema de mínimos quadrados

A utilização da decomposição SVD está ligada à resolução do problema de mínimos quadrados. Se A possui posto r e é invertível então sua *pseudoinversa* escrita em termos de SVD é

$$A^+ = \sum_{i=1}^r v_i \sigma_i^{-1} u_i^T \quad (4.18)$$

e a solução de norma mínima x_{LS} para o problema de mínimos quadrados $\|Ax = b\|_2$ é dada por

$$x_{LS} = A^+ b = \sum_{i=1}^r \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i. \quad (4.19)$$

A solução $x_{LS} = A^{-1}b$ é o caso especial de (4.19) em que $n_m = n_o = n$ e $\text{posto}(A) = n$. Tipicamente, σ_i é pequeno para i grande. Podemos perceber por (4.19) que é a divisão por valores singulares pequenos que amplifica os erros de b .

4.3 Posto numérico

O *posto* de uma matriz A é igual ao número de colunas linearmente independentes de A e é igual ao número de valores singulares de A estritamente positivos. Na presença de erros (erros de medição, aproximação, discretização e arredondamento) esta definição não é útil já que as colunas de A que, por um ponto de vista matemático, são estritamente linearmente independentes, podem ser consideradas quase linearmente dependentes de um ponto de vista prático. Logo, uma definição informal para o *posto numérico* é o número de colunas de A que, relativo a um nível de erro, são linearmente independentes na prática.

Um definição mais rigorosa para o posto numérico possui a seguinte forma. Definimos o *posto numérico- ϵ* r_ϵ de uma matriz A em relação à tolerância ϵ , por

$$r_\epsilon = r_\epsilon(A, \epsilon) \equiv \min_{\|E\|_2 < \epsilon} \text{posto}(A + E). \quad (4.20)$$

Em outras palavras, o *posto- ϵ* de A é igual ao número de colunas de A que garante-se serem linearmente independentes para qualquer perturbação de A com uma norma menor ou igual à tolerância ϵ . Em termos de valores singulares de A , o *posto numérico posto- ϵ* r_ϵ satisfaz

$$\sigma_{r_\epsilon} > \epsilon \geq \sigma_{r_\epsilon+1}. \quad (4.21)$$

4.4 TSVD

Tendo definido o posto numérico em termos de SVD podemos falar do uso desta decomposição para regularização de problemas que possuem posto incompleto ou numericamente incompleto, ou são mal-postos.

4.4.1 Sistema de equações com posto incompleto

Na situação ideal, sem perturbações e erros de arredondamento, o tratamento de problemas que possuem posto incompleto é simples: basta ignorar os componentes do SVD associados a valores singulares nulos e calcular a solução utilizando (4.19):

$$x_{LS} = \sum_{i=1}^{\text{posto}(A)} \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i.$$

Na prática, A nunca é uma matriz exatamente de posto incompleto, mas uma matriz de

posto *numericamente* incompleto; isto é, A possui um ou mais valores singulares pequenos mas não-nulos de tal forma que $r_\epsilon < \text{posto}(A)$. Este é o caso do jacobiano $J(m)$, em que esperamos encontrar valores singulares muito pequenos em relação ao seu maior valor singular. Valores singulares pequenos inevitavelmente causam dificuldades. Para ver um exemplo, a norma de x_{LS} é dada por

$$\|x_{LS}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\text{posto}(A)} \left(\frac{u_i^T b}{\sigma_i} \right)^2. \quad (4.22)$$

Então, $\|x_{LS}\|$ pode ser muito grande devido a pequenos valores de σ_i .

A abordagem mais comum para a regularização de problemas que possuem posto numericamente deficiente é considerar que a dada matriz A é uma representação com ruído de uma matriz matematicamente posto incompleto e substituir A por uma matriz próxima de A e matematicamente posto incompleto. A escolha padrão é a matriz de posto $= k$, A_k , definida como

$$A_k \equiv \sum_{i=1}^k u_i \sigma_i v_i^T. \quad (4.23)$$

Isto é, os pequenos valores singulares próximos de zero $\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n$ são substituídos por zeros. É natural escolher o posto k de A_k como o posto numérico ϵ de A , isto é, $k = r_\epsilon$, já que se $k < r_\epsilon$ então ocorrerá uma perda de informação associada à valores singulares maiores, enquanto que se $k > r_\epsilon$ acarreta em uma solução com uma norma grande. Então, a regularização da solução é alcançada projetando a matriz mal-condicionada A no conjunto de matrizes com posto- r_ϵ .

Quando A é substituída por A_k obtemos um novo problema de mínimos quadrados

$$\min \|A_k m - b\|_2. \quad (4.24)$$

A solução de menor norma para este problema, isto é, a única solução com norma-2 $\|m\|_2$ mínima é dada por

$$x_k = A_k^+ b = \sum_{i=1}^k \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i. \quad (4.25)$$

A solução x_k é denominada de solução de SVD truncado, por motivos óbvios. O método completo é denominado método de *SVD truncado* (TSVD, do inglês Truncated

SVD) e a matriz A_k é denominada matriz de TSVD.

Existem diversos métodos computacionais para o cálculo do TSVD. O método que utilizamos neste trabalho foi o de Lanczos que exige o cálculo de Ax e $A^T x$, onde $A = O'(m)$. Detalhes sobre o método de Lanczos podem ser encontrados em KOMZSIK (1987). Além disso, podemos ver pela Equação (4.6) que para calcularmos ∇f precisamos saber calcular $A^T x$.

CAPÍTULO 5

DERIVADA E ADJUNTA

Como apresentado no Capítulo 4 o método utilizado para computar o TSVD da matriz $O'(m)$ exige o cálculo de $O'(m)$ aplicado a um vetor e também $O'(m)^T$ aplicado a um vetor. Neste capítulo será apresentada a modelagem de $O'(m)z$ e $(O'(m))^T w$.

5.1 Derivada $O'(m)$

O vetor O de observações do histórico pode ser escrito como $O(m) = O(m, u(m))$, onde $u = (s, p)$ é o vetor incógnita do Sistema (2.24). Desta forma, a derivada $O'(m)$ pode ser escrita utilizando a regra da cadeia

$$O'(m) = \partial_m O(m, u(m)) + \partial_u O(m, u(m))u'(m). \quad (5.1)$$

Portanto, a fim de calcular $O'(m)$ é necessário computar: $\partial_m O$, $\partial_u O$ e $u'(m)$. O cálculo de $u'(m)$ é o mais delicado e será discutida a seguir.

5.1.1 Cálculo de $u'(m)$

A parcela $u'(m)$ é a parte mais delicada do cálculo de $O'(m)$, já que $u(m)$ é definido implicitamente por um sistema de equações diferenciais parciais. O sistema bifásico apresentado no Capítulo 2 pode ser reescrito da seguinte forma

$$S(m, u(m)) = 0. \quad (5.2)$$

Então, aplicando a regra da cadeia temos

$$S'(m) = \partial_m S + \partial_u S \partial_m u = 0. \quad (5.3)$$

Temos ainda que $J = \partial_u S$ é o jacobiano de S e escrevemos

$$u'(m) = -J^{-1} \partial_m S. \quad (5.4)$$

Aplicando (5.4) em (5.1) podemos escrever

$$O'(m) = \partial_m O - \partial_u O J^{-1} \partial_m S. \quad (5.5)$$

Na verdade, o que se deseja calcular é a derivada direcional $O'(m)z$ e, conseqüentemente, $u'(m)z = -J^{-1} \partial_m S z$. Portanto, para o cálculo de $u'(m)z$ é necessário obter $\partial_m S z$ e resolver um sistema do tipo $Jx = y$.

5.1.1.1 Cálculo de $\partial_m S z$

Seja $m = \log K$, \bar{m} um campo de log-permeabilidades dado, $\bar{u} = (\bar{s}, \bar{p})$ a saturação e pressão relativas a \bar{m} , z um vetor de log-permeabilidades e $\partial_m S z = (y_s, y_p)^t$, onde y_s e y_p possuem dimensão igual a de \bar{s} e \bar{p} , respectivamente. A derivada direcional $\partial_m S z$ que desejamos calcular pode ser escrita, utilizando a regra da cadeia, como

$$\partial_m S z = (\partial_K S \partial_m K) z. \quad (5.6)$$

Chamando de E_1 e E_2 a primeira e segunda equações de S , podemos escrever

$$\partial_K S = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial K} \\ \frac{\partial E_2}{\partial K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla \cdot (\lambda(s) \nabla p), \\ -\nabla \cdot (f(s) \lambda(s) \nabla p). \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

e escreveremos $\partial_m K z = K'(m)z$. A derivada direcional $\partial_m S z$ pode então ser escrita como

$$\begin{pmatrix} y_p \\ y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla \cdot (K'(\bar{m}) z \lambda(s) \nabla p) \\ -\nabla \cdot (f(s) K'(\bar{m}) z \lambda(s) \nabla p) \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

5.1.1.2 Cálculo do jacobiano

Vimos que $J(\bar{u}) = \partial_u S(\bar{u})$. Desejamos calcular a derivada direcional $J(\bar{u})x = y$, onde $x = (ds, dp)$ e $y = (y_s, y_p)$. Podemos escrever $J(\bar{u})x$ utilizando a definição de derivada

$$J(\bar{u})x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(\bar{u} + hx) - S(\bar{u})}{h} = y. \quad (5.9)$$

Aplicando (5.9) nas duas equações do sistema S, obtemos:

$$\begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0} \phi \frac{\partial (\bar{s} + hds - \bar{s})}{\partial t} \frac{1}{h} = \frac{\nabla \cdot (f(\bar{s})T_t(\bar{s})\nabla(\bar{p} + hdp))}{h} \\ \quad - \frac{\nabla \cdot (f(\bar{s})T_t(\bar{s})\nabla\bar{p})}{h} + \frac{f(\bar{s} + hds) - f(\bar{s})q_t}{h} + y_s \\ - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\nabla(T_t(\bar{s} + hds)\nabla(\bar{p} + hdp)) - \nabla(T_t(\bar{s})\nabla\bar{p})}{h} = y_p \end{cases} \quad (5.10)$$

Aplicando a Série de Taylor, escrevemos

$$\begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0} \phi \frac{\partial (\bar{s} + hds - \bar{s})}{\partial t} \frac{1}{h} = \frac{\nabla \cdot ((f(\bar{s})T_t(\bar{s}) + (f(\bar{s})T_t(\bar{s}))'hds + O(h^2))\nabla(\bar{p} + hdp))}{h} \\ \quad - \frac{\nabla(f(\bar{s})T_t(\bar{s})\nabla\bar{p})}{h} + \frac{(f(\bar{s}) + f'(\bar{s})hds + O(h^2) - f(\bar{s}))q_t}{h} + y_s \\ - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\nabla((T_t(\bar{s})T_t'(\bar{s})hds + O(h^2))\nabla(\bar{p} + hdp)) - \nabla(T_t(\bar{s})\nabla\bar{p})}{h} = y_p, \end{cases} \quad (5.11)$$

que resulta em

$$\begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0} \phi \frac{\partial ds}{\partial t} = \frac{\nabla \cdot (f(\bar{s})T_t(\bar{s})h\nabla dp) + \nabla((f(\bar{s})T_t(\bar{s}))'hds\nabla\bar{p}) + O(h^2)}{h} \\ \quad + \frac{f'(\bar{s})hdsq_t + O(h^2)}{h} + y_s \\ - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\nabla((T_t'(\bar{s})hds\nabla\bar{p}) - \nabla(T_t(\bar{s})\nabla\bar{p}) + O(h^2))}{h} = y_p \end{cases} \quad (5.12)$$

e

$$\begin{cases} \phi \frac{\partial ds}{\partial t} = \nabla \cdot (f(\bar{s})T_t(\bar{s})\nabla dp) + \nabla((f(\bar{s})T_t(\bar{s}))'ds\nabla\bar{p}) + f'(\bar{s})dsq_t + y_s \\ - \nabla((T_t'(\bar{s})ds\nabla\bar{p}) - \nabla(T_t(\bar{s})\nabla\bar{p})) = y_p. \end{cases} \quad (5.13)$$

A resolução de $Jx = y$ consiste na resolução do sistema de equações diferenciais parciais dado por (5.13), com as seguintes condições inicial e de fronteira

$$ds(x, 0) = 0, \quad v_\alpha \cdot \nu = 0, x \in \partial\Omega. \quad (5.14)$$

Logo, dados $\bar{u} = (\bar{s}, \bar{p})$, desejamos encontrar (ds, dp) tais que

$$\begin{cases} \phi \frac{\partial ds}{\partial t} = \nabla \cdot (f(\bar{s})T_t(\bar{s})\nabla dp) + \nabla \cdot ((f(\bar{s})T_t(\bar{s}))' ds \nabla \bar{p}) + f'(\bar{s}) ds q_t + y_s \\ -\nabla \cdot ((T_t'(\bar{s}) ds \nabla \bar{p}) - \nabla \cdot (T_t(\bar{s}) \nabla \bar{d}p) = y_p, \\ v_\alpha \cdot \nu = 0, x \in \partial\Omega, \\ ds(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (5.15)$$

5.1.2 Cálculo de $\partial_m O$ e $\partial_u O$

Como mostrado no Capítulo 3, o vetor de histórico utilizado contém informações sobre a vazão de óleo nos poços produtores e a pressão nos poços tanto injetores como produtores. Então, o vetor O pode ser escrito como

$$O = (q_o, p).$$

Para a observação da vazão de óleo, sabemos que $q_o = q_t - q_w = q_t(1 - f(s))$. Logo, temos

$$\partial_m q_o = 0, \quad (5.16)$$

e

$$\partial_u q_o = (-f'(s)q_t, 0). \quad (5.17)$$

Definimos no problema direto a condição de fronteira do tipo Neumann (2.24). Por isso, a pressão está definida a menos de uma constante. Assim, introduzimos o operador linear $M : \mathbb{R}^J \rightarrow \mathbb{R}^J$, onde J é número total de poços, injetores mais produtores, definido por

$$Mp = p - \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J p_j. \quad (5.18)$$

Desta a forma, a pressão torna-se unicamente determinada. A observação da pressão

nos poços será dada por Mp . Logo,

$$\partial_m(Mp) = 0, \quad (5.19)$$

e

$$\partial_u(Mp) = (0, M). \quad (5.20)$$

Logo, com $O = (q_t(1 - f(s)), Mp)$ temos

$$\partial_m O = 0, \quad (5.21)$$

e

$$\partial_u O(\bar{u}) = \begin{pmatrix} -f'(\bar{s})\bar{q}_{t,pr} & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

Reunindo todos os elementos apresentados anteriormente, podemos calcular $O'(m)z$. Os passos para este cálculo estão resumidos a seguir.

-
1. Calcule $(y_s, y_p)^T = \partial_m Sz$ utilizando (5.8).
 2. Calcule $(ds, dp)^T = J^{-1}(y_s, y_p)^T$ como discutido na Seção 5.1.1.2.
 3. Calcule $O'(m)z$ fazendo $\partial_u O \begin{pmatrix} ds \\ dp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f'(\bar{s})\bar{q}_{t,pr} & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ds \\ dp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f'(\bar{s})\bar{q}_{t,prod}ds \\ Mdp \end{pmatrix}$
-

5.2 Adjunta $O'(m)^T$

Nesta seção apresentaremos o cálculo de $O'(m)^T w$, onde w é um vetor que pertence ao espaço das observações. Por (5.5) podemos escrever $O'(m)^T$ como segue

$$O'(m)^T = \partial_m O(m, u(m))^T - (\partial_m S)^T (J^{-1})^T \partial_u O(m, u(m))^T. \quad (5.23)$$

Da Equação (5.21) temos que $(\partial_m O)^t = 0$. Portanto, para resolver $(O'(m))^t w$ precisamos calcular $(\partial_u O)^t$ aplicado ao vetor w , um sistema do tipo $J^t w = z$ e $(\partial_m S)^t$.

5.2.1 Cálculo de $(\partial_u O)^t w$

De (5.22) obtemos

$$(\partial_u O(\bar{u}))^T = \begin{pmatrix} -f'(\bar{s})\bar{q}_{t,pr} & V'_p(s) & 0 \\ 0 & 0 & M^t \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

A respeito de M^t , podemos escrever

$$\langle M^t p, \tilde{p} \rangle = \langle p, M \tilde{p} \rangle = \sum_k p_k (\tilde{p}_k - \frac{1}{J} \sum_j \tilde{p}_j) = \sum_k \tilde{p}_k p_k - \frac{1}{J} \sum_j \tilde{p}_j \left(\sum_k p_k \right).$$

Assim, M é simétrico, ou seja $M^t = M$.

Portanto, se $w = (w_q, w_{V_p}, w_p)$, então

$$\begin{pmatrix} z_s \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f'(\bar{s})\bar{q}_{t,pr} & V'_p(s) & 0 \\ 0 & 0 & M^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_q \\ w_{V_p} \\ w_p \end{pmatrix},$$

logo

$$\begin{pmatrix} z_s \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f'(\bar{s})w_s\bar{q}_{t,pr} + V'_p(s)w_{V_p} \\ M w_p \end{pmatrix}, \quad (5.25)$$

onde M é dado por (5.18).

5.2.2 Cálculo de $J^T w = z$

Podemos escrever o jacobiano transposto em termos do jacobiano utilizando a relação

$$\langle J^T(ws, wp), (ds, dp) \rangle = \langle (ws, wp), J(ds, dp) \rangle = \langle (ws, wp), (ys, yp) \rangle. \quad (5.26)$$

Já foi mostrado como calcular $J(ds, dp) = (ys, yp)$. Portanto, se escrevemos o produto interno (5.26) de modo a isolarmos os termos ds e dp podemos obter $J^T(ws, wp)$.

O produto interno é definido no contínuo como

$$\langle x, y \rangle = \int_0^T \int_{\Omega} xy dV dt. \quad (5.27)$$

Isolando os vetores ys e yp do Sistema de equações (5.15) temos

$$\begin{cases} ys = \phi \frac{\partial ds}{\partial t} - \nabla \cdot (f(\bar{s})T_t(\bar{s})\nabla dp) - \nabla \cdot ((f(\bar{s})T_t(\bar{s}))' ds \nabla \bar{p}) - f'(\bar{s}) ds q_t \\ yp = -\nabla \cdot ((T_t'(\bar{s}) ds \nabla \bar{p}) - \nabla \cdot (T_t(\bar{s})\nabla \bar{d}p)). \end{cases} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \langle w, Jx \rangle = \int_0^T \int_{\Omega} ws \left(\phi \frac{\partial ds}{\partial t} - \nabla \cdot (f(\bar{s})T_t(\bar{s})\nabla dp) - \nabla \cdot ((f(\bar{s})T_t(\bar{s}))' ds \nabla \bar{p}) - f'(\bar{s}) ds q_t \right) \\ + \int_0^T \int_{\Omega} wp \left(-\nabla \cdot ((T_t'(\bar{s}) ds \nabla \bar{p}) - \nabla \cdot (T_t(\bar{s})\nabla \bar{d}p)). \right) \end{aligned} \quad (5.29)$$

Vamos dar nomes a cada termo de (5.29), a fim de facilitar o entendimento

$$\begin{cases} \text{termo 1} = \int_0^T \int_{\Omega} ws \phi \frac{\partial ds}{\partial t} \\ \text{termo 2} = - \int_0^T \int_{\Omega} ws \nabla \cdot (f(\bar{s})T_t(\bar{s})\nabla dp) \\ \text{termo 3} = - \int_0^T \int_{\Omega} ws \nabla \cdot ((f(\bar{s})T_t(\bar{s}))' ds \nabla \bar{p}) \\ \text{termo 4} = - \int_0^T \int_{\Omega} ws f'(\bar{s}) ds q_t \\ \text{termo 5} = - \int_0^T \int_{\Omega} wp \nabla \cdot ((T_t'(\bar{s}) ds \nabla \bar{p}) \\ \text{termo 6} = - \int_0^T \int_{\Omega} wp \nabla \cdot (T_t(\bar{s})\nabla \bar{d}p). \end{cases} \quad (5.30)$$

Para o termo 1, podemos escrever

$$\phi \int_0^T \int_{\Omega} ws \frac{\partial ds}{\partial t} d\Omega dt = \phi \int_{\Omega} \int_0^T ws \frac{\partial ds}{\partial t} dt d\Omega. \quad (5.31)$$

Utilizando a regra do produto $(uv)' = u'v + v'u \rightarrow u'v = (uv)' - v'u$, a Equação 5.31 é escrita

$$\phi \int_{\Omega} (ws ds|_0^T - \left(\int_0^T \frac{\partial ws}{\partial t} ds \right) dt) d\Omega = - \int_{\Omega} \int_0^T \phi \frac{\partial ws}{\partial t} ds. \quad (5.32)$$

O primeiro termos da Equação 5.32 pode ser escrito como

$$\phi ws ds|_0^T = \phi ws(T) ds(T) - \phi ws(0) ds(0). \quad (5.33)$$

Sabemos que $ds(0) = 0$. A fim de cancelar este termo é necessário fazer $ws(T) = 0$.

Os termos 2 e 6 podem ser reescritos utilizando a segunda identidade de Green, que diz

$$\int_{\Omega} u \cdot \nabla \cdot (v \nabla x) d\Omega = \int_{\Omega} x \cdot \nabla \cdot (v \nabla u) d\Omega + \int_{\partial\Omega} v(u \nabla x - x \nabla u) \vec{\nu} d. \quad (5.34)$$

e eles ficam como

$$- \int_0^T \int_{\Omega} dp \nabla \cdot (f(\bar{s}) T_t(\bar{s}) \nabla ws) d\Omega dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} f(\bar{s}) T_t(\bar{s}) (ws \nabla dp - dp \nabla ws) \vec{\nu} dS, \quad (5.35)$$

e

$$- \int_0^T \int_{\Omega} wp \nabla \cdot (T_t(\bar{s}) \nabla dp) = - \int_{\Omega} dp \nabla \cdot (T_t(\bar{s}) \nabla wp) d\Omega - \int_{\partial\Omega} T_t(\bar{s}) (wp \nabla dp - dp \nabla wp) \vec{\nu} dS. \quad (5.36)$$

Os termos 3 e 5 podem ser reescritos utilizando o Teorema da Divergência, dado por

$$\int_0^T \int_{\Omega} g \nabla \cdot \vec{v} = - \int_0^T \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \nabla g + \int_{\partial\Omega} g \vec{v} \vec{\nu} dS. \quad (5.37)$$

e eles são reescritos como

$$\int_0^T \int_{\Omega} (((f(\bar{s}) T_t(\bar{s}))' ds \nabla \bar{p}) \nabla ws) d\Omega dt - \int_{\partial\Omega} ws \nabla \cdot ((f(\bar{s}) T_t(\bar{s}))' ds \nabla p) \vec{\nu} dS \quad (5.38)$$

$$- \int_0^T \int_{\Omega} (T_t'(\bar{s}) ds \nabla \bar{p}) \cdot \nabla wp - \int_{\partial\Omega} wp T_t'(\bar{s}) ds \nabla p \vec{\nu} dS \quad (5.39)$$

O termo 4 já encontra-se no formato em que desejamos.

$$- \int_0^T \int_{\Omega} ws f'(\bar{s}) ds q_t \quad (5.40)$$

Coletando os dados que multiplicam ds e dp nas integrais obtemos $J^T w = z$, onde $w = (ws, wp)$ e $z = (zs, zp)$. Mais uma vez temos um sistema de equações diferenciais

parciais.

$$\begin{cases} -\phi \frac{\partial ws}{\partial t} + \nabla \cdot (T_t(\bar{s}) \nabla wp) + (f(\bar{s}) T_t(\bar{s}))' \nabla \bar{p} \nabla ws \\ \quad - T_t'(\bar{s}) \nabla \bar{p} \nabla wp - f'(\bar{s}) ws q_t = zs \\ -\nabla \cdot (f(\bar{s}) T_t(\bar{s}) \nabla ws) + \nabla \cdot (T_t(\bar{s}) \nabla wp) = zp \\ v_\alpha \cdot \nu = 0, x \in \partial\Omega \\ ws(x, T) = 0. \end{cases} \quad (5.41)$$

Podemos perceber que, pela condição final, o sistema de equações 5.41 que calcula $J^T w$ deve ser resolvido começando no tempo $t = T$ e indo até o tempo $t = 0$, ou seja, de trás para frente no tempo.

5.2.3 Cálculo de $(\partial_m S)^t$

De (5.8) podemos escrever

$$(\partial_m S)^T = \begin{pmatrix} -\nabla \cdot (K'(\bar{m}) \lambda(s) \nabla p) & -\nabla \cdot (f(s) K'(\bar{m}) \lambda(s) \nabla p) \end{pmatrix}, \quad (5.42)$$

e

$$(\partial_m S)^T (w_s, w_p)^T = \begin{pmatrix} -\nabla \cdot (K'(\bar{m}) \lambda(s) \nabla p w_s) \\ -\nabla \cdot (f(s) K'(\bar{m}) \lambda(s) \nabla p w_p) \end{pmatrix}. \quad (5.43)$$

Utilizando as etapas mostradas anteriormente, podemos resumir o cálculo de $O'(m)^T w$ da seguinte forma,

-
1. Calcule $(z_s, z_p)^T = (\partial_u O)^T w$ utilizando (5.8).
 2. Calcule $(w_s, w_p)^T = (J^{-1})^T (z_s, z_p)^T$ como discutido na Seção 5.2.2.
 3. Calcule $O'(m)w = (\partial_m S)^T \begin{pmatrix} w_s \\ w_p \end{pmatrix}$ como apresentado em (5.43).
-

CAPÍTULO 6

ESQUEMAS NUMÉRICOS

Neste capítulo serão apresentados os esquemas numéricos utilizados para a resolução do modelo descrito no Capítulo 2. Serão também apresentados detalhes da implementação da derivada e adjunta, necessárias para a resolução do problema de otimização utilizando TSVD, como descrito no Capítulo 4.

6.1 Problema direto

O sistema de equações diferenciais apresentado no Capítulo 2 é não linear e acoplado. Existem diversas alternativas para a resolução deste sistema, como o método IMPES, SS (soluções simultâneas), métodos implícitos sequenciais e adaptativos, entre outros. Neste trabalho foi utilizado o método IMPES, que é ainda popular na indústria de petróleo e útil para resolver o problema de escoamento bifásico (particularmente para fluidos incompressíveis) CHEN *et al.* (2006). Na próxima seção este método será apresentado e discutido.

6.1.1 IMPES

Um método IMPES foi desenvolvido originalmente por SHELDON e CARDWELL (1959) e STONE e Jr. (1961). A idéia básica deste método clássico para a resolução de (2.24) é separar a computação da pressão da computação da saturação. Isto é, o sistema acoplado é dividido em uma equação da pressão e uma equação da saturação, e essas equações são resolvidas utilizando uma aproximação de tempo implícita e explícita, respectivamente (o nome IMPES significa "implícito para a pressão e explícito para a saturação"). Este método é simples e eficiente de ser implementado e requer menos memória do que outro métodos, como o SS. Entretanto, para que seja estável, ele requer passos de tempo muito pequenos para a saturação. Este requisito é caro e pode se tornar

proibitivo. Nesta seção iremos revisar o método IMPES clássico e então introduzir o método *IMPES aperfeiçoado* (CHEN *et al.*, 2004).

Desacoplando (2.24), obtemos uma equação elíptica para a pressão, e uma equação hiperbólica para a saturação, dadas por (6.1) e (6.2), respectivamente.

$$-\nabla \cdot v_t(s, p) = q_t, \quad (6.1)$$

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot (f(s)v_t(s, p)) = q_w. \quad (6.2)$$

É importante também observar que

$$v_t = -K \left(\frac{k_{ro}}{\mu_o} + \frac{k_{rw}}{\mu_w} \right) \nabla p. \quad (6.3)$$

Seja $I = (0, T](T > 0)$ um intervalo de tempo de interesse, e para um inteiro positivo N , seja $0 = t^0 < t^1 < \dots < t^N = T$ uma partição de I . Para a computação da pressão no método IMPES clássico, a saturação s em (6.1) é considerada conhecida e a Equação (6.1) é resolvida implicitamente para p . Ou seja, para cada $n = 0, 1, \dots, p^n$ satisfaz

$$-\nabla \cdot (T(s^n)\nabla p^n) = q_t, \quad (6.4)$$

onde s^n é dado.

Segue de (6.2) que

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} = -\nabla \cdot (f(s)T(s)\nabla p) + q_w. \quad (6.5)$$

No método IMPES, a Equação (6.2) é resolvida explicitamente para s ; isto é, para cada $n = 0, 1, 2, \dots$, utilizando diferenças finitas no tempo, s^{n+1} satisfaz

$$\phi \frac{s^{n+1} - s^n}{t^{n+1} - t^n} \approx \phi \frac{\partial s}{\partial t} \Big|_{t=t^{n+1}} = \nabla \cdot (f(s^n)v_t^n) + q_w^n,$$

logo,

$$s^{n+1} = s^n + (\nabla \cdot (f(s^n)v_t^n) + q_w^n) \frac{\Delta t^{n+1}}{\phi}. \quad (6.6)$$

O algoritmo do método IMPES clássico é apresentado a seguir:

IMPES

$s^0 \leftarrow s(x, 0)$

para $n \leftarrow 0, 1, \dots, N$ **faça**

Dado s^n , calcule p^n como solução de (6.4)

Calcule v^n utilizando (6.3)

Conhecidos p^n , s^n e v^n

Calcule s^{n+1} utilizando (6.6)

fim para

Como observado anteriormente, o passo de tempo $\Delta t^n = t^n - t^{n-1}$ deve ser suficientemente pequeno para que este método seja estável. A maior parte do tempo de computação no método IMPES clássico é gasto no cálculo implícito da pressão. Segue da mecânica do escoamento de fluidos em meios porosos que a pressão muda menos rapidamente em tempo que a saturação. Além disso, a restrição nos passos de tempo é primariamente utilizada no cálculo explícito da saturação. Por essas razões, é apropriado tomar um passo maior de tempo para a pressão do que para a saturação.

O método *IMPES aperfeiçoado* baseia-se nestas considerações para fazer uma discretização diferente no tempo. Novamente, para um inteiro positivo N , seja $0 = t^0 < t^1 < \dots < t^N = T$ uma partição J em subintervalos $J^n = (t^{n-1}, t^n]$, com tamanho $\Delta t_p^n = t^n - t^{n-1}$. Esta partição é utilizada para a pressão. Para a saturação, cada subintervalo J^n é dividido em sub-subintervalos $J^{n,l} = (t^{n-1,l-1}, t^{n-1,l}]$:

$$t^{n-1,l} = t^{n-1} + m \frac{\Delta t_p^n}{M^n}, \quad m = 1, \dots, L^n.$$

O tamanho de $J^{n,l}$ é denotado por $\Delta t_s^{n,l} = t^{n-1,l} - t^{n-1,l-1}$, $l = 1, \dots, L^n$, $n = 0, 1, \dots$. Temos portanto dois passos de tempo diferentes no método *IMPES aperfeiçoado*: um passo de tempo para a pressão (Δt_n) e outro para a saturação ($\Delta t_{n,l}$).

O algoritmo do método *IMPES aperfeiçoado* é apresentado a seguir.

Como a equação da saturação é resolvida explicitamente, é necessário que o passo de tempo a ela associado seja escolhido de forma a obedecer a condição de CFL, que será discutida na Seção 6.1.4.

IMPES aperfeiçoado
 $s^0 \leftarrow s(x, 0)$
para $n \leftarrow 0, 1, \dots, N$ **faça**

 Dado s^n , calcule p^n como solução de (6.4)

 Calcule v^n utilizando (6.3)

 Conhecidos p^n , $s^n = s^{n,0}$ e v^n
para $l \leftarrow 1, 2, \dots, L$ **faça**

 Calcule $s^{n,l}$ utilizando (6.6)

fim para
 $s^{n+1} \leftarrow s^{n,L}$
fim para
6.1.2 *Discretização espacial*

O modelo proposto no Capítulo 2 foi implementado utilizando duas dimensões no espaço. A fim de resolvê-lo, foi utilizada a discretização espacial conhecida como diferenças finitas bloco-centradas. Nesta seção será feita uma breve introdução a este método. Serão também discutidas algumas de suas particularidades no problema em questão.

6.1.2.1 Método de diferenças finitas bloco-centradas

A idéia básica por trás de qualquer método de aproximação é substituir o problema original por outro de resolução mais simples cuja solução é próxima da solução do problema original. No método de diferenças finitas buscamos aproximar valores da solução em um conjunto finito de pontos x_1, x_2, \dots, x_n no intervalo do domínio do problema, ao invés de buscarmos uma solução contínua. Os pontos x_i são denominados *pontos da malha* e o termo *bloco-centrada* refere-se à forma como estes pontos estão distribuídos na malha.

A fim de exemplificar esta distribuição, consideremos um reservatório retangular de domínio Ω e dimensões M_x e M_y . Os lados x e y de Ω são divididos em N_x e N_y partes, respectivamente, o que virtualmente cria a malha. A partir desta divisão são obtidos blocos de dimensões $\Delta x = \frac{M_x}{N_x}$ e $\Delta y = \frac{M_y}{N_y}$. Utilizando o método de diferenças finitas bloco-centrada, os pontos da malha são alocados no centro destes blocos, como ilustrado na Figura 6.1.

Os pontos da malha estão localizados em (x_i, y_j) , onde $x_i = (i + 1/2)\Delta x$, $y_j = (j + 1/2)\Delta y$ e $0 \leq i < N_x$ e $0 \leq j < N_y$ e i e j são valores inteiros. As interfaces estão localizadas nos pontos $(x_{i+1/2}, y_j)$ e $(x_i, y_{j+1/2})$. Assim, índices inteiros (i, j) estão relacionados aos pontos da malha ao passo que índices $(i + 1/2, j + 1/2)$ estão relacionados às interfaces.

Consideremos como exemplo o problema unidimensional dado por (6.7)

$$AU \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - q(x) = 0, \quad 0 < x < L, \quad U(0) = U(L) = 0 \quad (6.7)$$

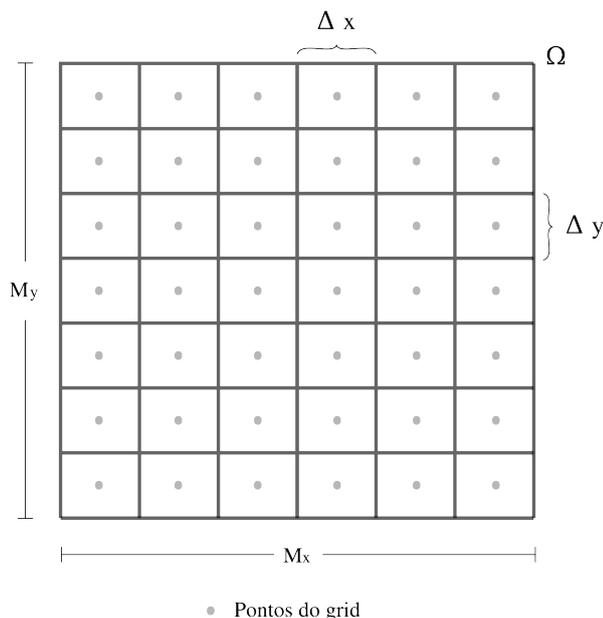


Figura 6.1: Reservatório discretizado

No método de diferenças finitas, ao invés de buscarmos uma função contínua $U(x)$ que satisfaça (6.7), buscamos apenas valores que aproximem a solução, chamados de u , em um conjunto de pontos finitos, x_1, x_2, \dots, x_n dentro do intervalo $[0, L]$. A equação diferencial é então substituída por um conjunto de equações algébricas que relacionam valores u_i com x_i para todos os pontos. Essas equações são chamadas *equações de diferenças finitas* e o problema diferencial é então reduzido a um problema algébrico. Se for possível mostrar que o problema discreto é próximo do problema original, então os valores u_i serão uma aproximação da solução verdadeira nos pontos da malha x_i .

6.1.2.2 Operadores discretos

No Sistema de equações (2.22) existem dois operadores diferenciais relacionados ao espaço, o gradiente e o de divergência.

Os operadores gradiente e de divergência, aplicados a uma função f em um domínio bidimensional são escritos, respectivamente, da seguinte forma:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \nabla \cdot f = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Utilizando os métodos de diferenças finitas, aproximamos as derivadas através do truncamento da série de Taylor. Seja F uma função definida nas interfaces $(i + 1/2, j)$ e $(i, j + 1/2)$. O operador de divergência discreto $(\nabla_h \cdot)$ é escrito como

$$\nabla_h \cdot F_{i,j} = \frac{F_{i+1/2,j} - F_{i-1/2,j}}{\Delta x} + \frac{F_{i,j+1/2} - F_{i,j-1/2}}{\Delta y}. \quad (6.8)$$

Para f definida nos centros dos blocos, ou seja, nos pontos da malha (i, j) , o gradiente discreto (∇_h) é definido como uma função de interface dada por

$$\nabla_h f_{i+1/2,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x}, \quad \nabla_h f_{i,j+1/2} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta y}. \quad (6.9)$$

Desta forma obtemos aproximações de segunda ordem para os operadores diferenciais. A Figura 6.2 ilustra os pontos da malha utilizados para o cálculo de cada uma dessas funções. As equações da pressão e saturação são escritas com os operadores discretos, respectivamente da seguinte forma

$$-\nabla_h \cdot (T_t(s^n) \nabla_h p^n) = q_t^n, \quad (6.10)$$

e

$$\phi \delta_t s^{n,l} = \nabla_h \cdot (f(s^{n,l}) v^n) + q_w^{n,l}. \quad (6.11)$$

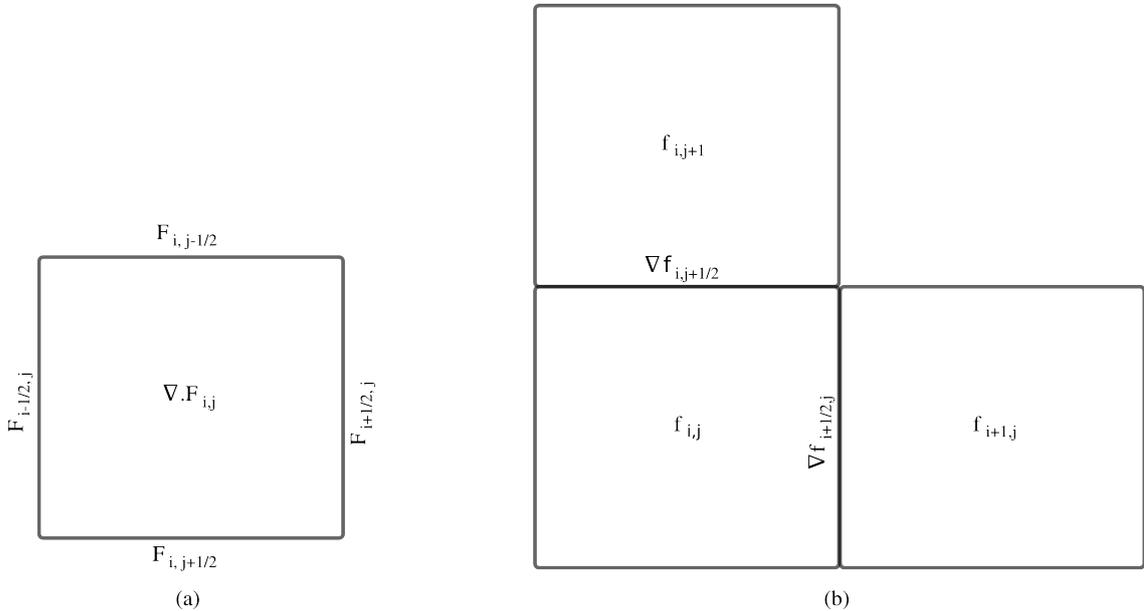


Figura 6.2: (a) Divergente discreto; (b) Gradiente discreto.

6.1.2.3 Tratamento nas interfaces

A fim de utilizar o operador de divergência discreto (6.8), é necessário calcular as funções de transmissibilidade (2.16) e fluxo fracionário (2.21) nas interfaces da malha. A

função de fluxo fracionário é a razão entre as transmissibilidades da água e total. Portanto basta discutirmos o cálculo da função de transmissibilidade nas interfaces. A função de transmissibilidade depende tanto da permeabilidade absoluta quanto da relativa e ambas estão definidas no centro de cada bloco da malha.

Para as permeabilidades absolutas, é necessário estimar seus valores nas interfaces, o que é feito utilizando a média harmônica, apresentada na Equação (6.12)

$$K_{i+1/2,j} = \frac{2K_{i,j}K_{i+1,j}}{K_{i,j} + K_{i+1,j}}, \quad K_{i,j+1/2} = \frac{2K_{i,j}K_{i,j+1}}{K_{i,j} + K_{i,j+1}}, \quad (6.12)$$

ou seja, as permeabilidades calculadas na interface dependem dos valores de permeabilidade das células vizinhas.

A justificativa para a utilização da média harmônica é baseada na continuidade do fluxo na face. Consideremos o problema unidimensional e uma malha uniforme com $\Delta x_i = \Delta x_{i+1} = h$, como ilustrado na Figura 6.3.

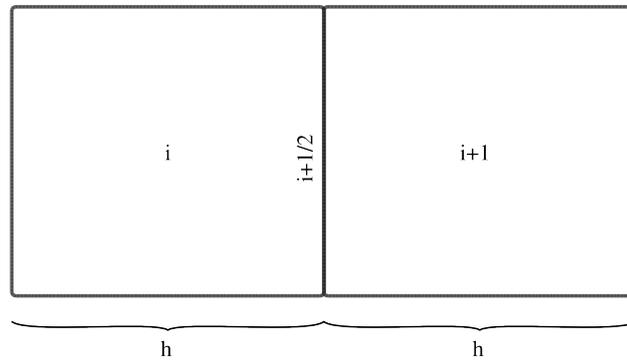


Figura 6.3: Média harmônica

Podemos escrever o seguinte a respeito da velocidade de Darcy (2.10) na interface $(i + 1/2)$

$$\frac{K_i(p_{i+1/2} - p_1)}{\frac{h}{2}} = \frac{K_{i+1}(p_{i+1} - p_{i+1/2})}{\frac{h}{2}},$$

de onde obtemos

$$p_{i+1/2} = \frac{K_i p_i + K_{i+1} p_{i+1}}{K_i + K_{i+1}}. \quad (6.13)$$

Podemos também escrever

$$\frac{K_{i+1/2}(p_{i+1} - p_i)}{h} = \frac{K_i p_{i+1/2} - p_i}{\frac{h}{2}}, \quad (6.14)$$

$$K_{i+1/2}(p_{i+1} - p_i) = 2K_i(p_{i+1/2} - p_i). \quad (6.15)$$

Substituindo $p_{i+1/2}$ em (6.14) por (6.13) obtemos

$$K_{i+1/2}(p_{i+1} - p_i) = 2K_i \frac{(K_i p_i + K_{i+1} p_{i+1})}{K_i + K_{i+1}} - p_i,$$

e finalmente

$$K_{i+1/2} = \frac{2K_i K_{i+1}}{K_i + K_{i+1}}$$

Fazendo de forma análoga para o problema bidimensional obtemos as equações descritas em (6.12).

Já as permeabilidades relativas são um função da saturação que também está definida no centro dos blocos. A fim de calcular as funções de permeabilidades relativas nas interfaces é necessário ter um critério para determinar o bloco cuja saturação deve ser utilizada. O critério utilizando neste trabalho é o chamado *esquema a montante* (*upwind*, em inglês) e é apresentado no Algoritmo a seguir para a interface $(i, i + 1/2)$. Tratamento análogo para as demais interfaces.

Algoritmo 1 Esquema a Montante para a Interface $(i + 1/2)$

Esquema a Montante

- 1: **se** $p_{i+1,j} > p_{i,j}$ **então**
 - 2: $(k_r)_{i+1/2,j} = k_r(s_{i+1,j})$
 - 3: **senão**
 - 4: $(k_r)_{i+1/2,j} = k_r(s_{i,j})$
 - 5: **fim se**
-

6.1.3 Equação da pressão

A Equação (6.10) é resolvida implicitamente para a pressão. Ela pode ser escrita da seguinte forma

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T_{tx} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_{ty} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = q_t(x, y). \quad (6.16)$$

Integrando a equação anterior em um bloco de centro i, j , temos

$$\begin{aligned} \int_{i,j-1/2}^{i,j+1/2} \int_{i-1/2,j}^{i+1/2,j} \frac{\partial}{\partial x} \left(T_{t_x} \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx dy + \int_{i-1/2,j}^{i+1/2,j} \int_{i-1/2,j}^{i+1/2,j} \frac{\partial}{\partial y} \left(T_{t_y} \frac{\partial p}{\partial y} \right) dy dx \\ = \int_{i-1/2,j}^{i+1/2,j} \int_{i,j-1/2}^{i,j+1/2} q_t(x, y) dy dx. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_{i,j-1/2}^{i,j+1/2} T_{t_{i+1/2,j}} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{i+1/2,j} dy - \int_{i,j-1/2}^{i,j+1/2} T_{t_{i-1/2,j}} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{i-1/2,j} dy \\ + \int_{i-1/2,j}^{i+1/2,j} T_{t_{i,j+1/2}} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{i,j+1/2} dx - \int_{i-1/2,j}^{i+1/2,j} T_{t_{i,j-1/2}} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{i,j-1/2} dx \\ = \int_{i-1/2,j}^{i+1/2,j} \int_{i,j-1/2}^{i,j+1/2} q_t(x, y) dy dx. \end{aligned}$$

Aproximando as integrais pela regra do ponto médio, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta y_j T_{t_{i+1/2,j}} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{i+1/2,j} - \Delta y_j T_{t_{i-1/2,j}} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{i-1/2,j} \\ + \Delta x_i T_{t_{i,j+1/2}} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{i,j+1/2} - \Delta x_i T_{t_{i,j-1/2}} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{i,j-1/2} \\ = \Delta x_i \Delta y_j q_t(x, y). \end{aligned}$$

Utilizando (6.9), escrevemos

$$\begin{aligned} \Delta y T_{t_{i+1/2,j}} \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta x} - \Delta y T_{t_{i-1/2,j}} \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\Delta x} \\ + \Delta x T_{t_{i,j+1/2}} \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\Delta y} - \Delta x T_{t_{i,j-1/2}} \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{\Delta y} \\ = \Delta x \Delta y q_t(x, y). \end{aligned}$$

Fazendo $T_{t_{i+1/2,j}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} T_{t_{i+1/2,j}}$, $T_{t_{i-1/2,j}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} T_{t_{i-1/2,j}}$, $T_{t_{i,j+1/2}} = \frac{\Delta x}{\Delta y} T_{t_{i,j+1/2}}$ e $T_{t_{i,j-1/2}} = \frac{\Delta x}{\Delta y} T_{t_{i,j-1/2}}$ escrevemos

$$\begin{aligned}
& T_{t_{i+1/2,j}}(p_{i+1,j} - p_{i,j}) - T_{t_{i-1/2,j}}(p_{i,j} - p_{i-1,j}) \\
& + T_{t_{i,j+1/2}}(p_{i,j+1} - p_{i,j}) - T_{t_{i,j-1/2}}(p_{i,j} - p_{i,j-1}) \\
& = \Delta x \Delta y q_t(x, y).
\end{aligned}$$

o que leva a

$$\begin{aligned}
& T_{t_{i,j-1/2}}p_{i,j-1} + T_{t_{i-1/2,j}}p_{i-1,j} + T_{t_{i+1/2,j}}p_{i+1,j} + T_{t_{i,j+1/2}}p_{i,j+1} \\
& - (T_{t_{i+1/2,j}} + T_{t_{i-1/2,j}} + T_{t_{i,j+1/2}} + T_{t_{i,j-1/2}})p_{i,j} \\
& = \Delta x \Delta y q_t(x, y).
\end{aligned}$$

Portanto, resolver implicitamente a equação da pressão utilizando o esquema numérico aqui apresentado é equivalente a resolver um sistema linear. Cada bloco da malha resulta em uma equação linear, ou seja, a pressão é determinada com $N_x \times N_y$ equações lineares. Para blocos no interior da malha, a equação envolve a pressão no próprio bloco e nos quatro nós vizinhos. Já para pontos na borda da malha, a equação envolve a pressão no próprio bloco e nos dois ou três vizinhos.

A fim de analisarmos o sistema, seja uma malha de dimensões 4×4 com numeração natural, como ilustrado na Figura 6.4. Como podemos observar temos um sistema linear pentadiagonal. Como utilizamos a condição de fronteira do tipo Neumann, o sistema linear é determinado a menos de uma constante. A fim de resolver esse sistema optamos por prescrever o valor da pressão em um dos blocos da malha de forma a obter um sistema linear determinado.

6.1.4 Condição de CFL

Escolhemos $(\Delta t)_{n,l}$ de modo a respeitar a condição de CFL, que discutimos a seguir. Seja $V_{i,j}$ um bloco da malha de discretização e considere o caso em que a velocidade total v é positiva em todas as interfaces. De acordo com o esquema a montante, a Equação (6.6) se escreve

$$\begin{aligned}
& s_{i,j}^{n,l+1} - s_{i,j}^{n,l} + \frac{(\Delta t)_{n,l}}{\phi \Delta x} (f(s_{i,j}^{n,l})v_{i+1/2,j}^n - f(s_{i-1,j}^{n,l})v_{i-1/2,j}^n) + \\
& \frac{(\Delta t)_{n,l}}{\phi \Delta y} (f(s_{i,j}^{n,l})v_{i,j+1/2}^n - f(s_{i,j-1}^{n,l})v_{i,j-1/2}^n) = \frac{(\Delta t)_{n,l}}{\phi} q_a^{n,l}.
\end{aligned}$$

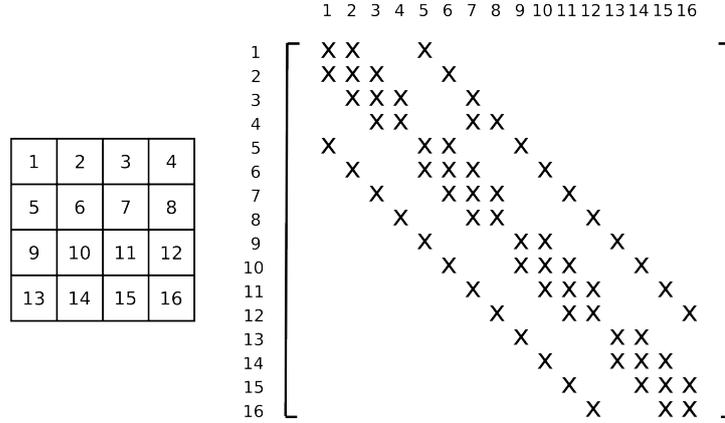


Figura 6.4: Sistema pentadiagonal

Mas $\nabla_h v = q_t$, isto é.

$$\frac{1}{\Delta x}(v_{i+1/2,j}^n - v_{i-1/2,j}^n) + \frac{1}{\Delta y}(v_{i,j+1/2}^n - v_{i,j-1/2}^n) = q_t^n.$$

Deduzimos que

$$s_{i,j}^{n,l+1} - s_{i,j}^{n,l} + \frac{(\Delta t)_{n,l}}{\phi \Delta x} (f(s_{i,j}^{n,l}) - f(s_{i-1,j}^{n,l})) v_{i-1/2,j}^n + \frac{(\Delta t)_{n,l}}{\phi \Delta y} (f(s_{i,j}^{n,l}) - f(s_{i,j-1}^{n,l})) v_{i,j-1/2}^n = \frac{(\Delta t)_{n,l}}{\phi} (q_a^{n,l} - f(s_{i,j}^{n,l}) q_t^n).$$

Começamos por considerar o caso em que o lado direito da equação acima é nulo. Isto ocorre nos blocos sem poços, mas também nos blocos com poços produtores.

Neste caso, usando o Teorema do Valor Médio, escrevemos

$$s_{i,j}^{n,l+1} = s_{i,j}^{n,l} \left(1 - \frac{(\Delta t)_{n,l}}{\phi \Delta x} f'(s_1) v_{i-1/2,j}^n - \frac{(\Delta t)_{n,l}}{\phi \Delta y} f'(s_2) v_{i,j-1/2}^n \right) + \frac{(\Delta t)_{n,l}}{\phi \Delta x} f'(s_1) v_{i-1/2,j}^n s_{i-1,j}^{n,l} + \frac{(\Delta t)_{n,l}}{\phi \Delta y} f'(s_2) v_{i,j-1/2}^n s_{i,j-1}^{n,l},$$

para algum s_1, s_2 . Assim, se

$$1 - \frac{(\Delta t)_{n,l}}{\phi \Delta x} f'(s_1) v_{i-1/2,j}^n - \frac{(\Delta t)_{n,l}}{\phi \Delta y} f'(s_2) v_{i,j-1/2}^n \geq 0, \quad (6.17)$$

garantimos que

$$\min\{s_{i-1,j}^{n,l}, s_{i,j}^{n,l}, s_{i,j-1}^{n,l}\} < s_{i,j}^{n,l+1} < \max\{s_{i-1,j}^{n,l}, s_{i,j}^{n,l}, s_{i,j-1}^{n,l}\}.$$

Nos blocos onde as velocidades interfaciais não são todas positivas, a condição (6.17) deve

ser modificada para

$$\sum_m \frac{(\Delta t)_{n,l}}{\phi \Delta_m} f'(s_m) |v_m^n| \leq 1, \quad (6.18)$$

onde o índice m indica as interfaces com fluxo entrante, Δ_m é igual a Δx em faces verticais, e igual a Δy em faces horizontais. Além disso, s_m está situado entre o menor e o maior valor das saturações no bloco e seus vizinhos, no instante associado a (n, l) . Na implementação do esquema, mudamos (6.18) para

$$\max f'(s_m) \sum_m \frac{(\Delta t)_{n,l}}{\phi \Delta_m} |v_m^n| \leq \rho_1, \quad (6.19)$$

onde $0 < \rho_1 < 1$ é um parâmetro a escolher e o máximo é tomado entre a menor e a maior saturação de cada bloco e seus vizinhos cuja interface seja de fluxo entrante no bloco.

Falta considerar blocos com poço injetor. É razoável admitir que não haja fluxo entrando nestes blocos. Neste caso, lembrando que $q_a = q_t$, obtemos

$$s_{i,j}^{n,l+1} - s_{i,j}^{n,l} = \frac{(\Delta t)_{n,l}}{\phi} q_a^{n,l} (1 - f(s_{i,j}^{n,l})).$$

Escolhemos $(\Delta t)_{n,l}$ de modo a garantir que

$$s_{i,j}^{n,l} + \rho_2 \frac{(\Delta t)_{n,l}}{\phi} (q_a^{n,l} (1 - f(s_{i,j}^{n,l}))) < 1 - s_{o,res}, \quad (6.20)$$

onde $\rho_2 > 1$ é um parâmetro a escolher e $s_{o,res}$ é a saturação residual do óleo.

Resumindo, escolhemos Δt de modo a satisfazer (6.19) e (6.20). Deste modo, garantimos que em cada instante a saturação da água e do óleo permanecem maiores que as respectivas saturações mínimas admissíveis (saturações residuais). Isto assegura, em particular, a estabilidade do esquema explícito.

Além disso, controlamos o passo de tempo da pressão $(\Delta t)_n$ da seguinte forma. Calculamos a variação percentual da pressão

$$VP^n = \frac{\|p^{n+1} - p^n\|_\infty}{\|p^n\|_\infty}.$$

Caso VP^n ultrapasse VP_{max} , uma variação máxima estabelecida, diminuimos o passo de tempo da pressão na próxima etapa, fazendo $(\Delta t)_{n+1} = \alpha(\Delta t)_n$, onde $\alpha < 1$ é dado. Da mesma forma, podemos aumentar $(\Delta t)_{n+1} = \beta(\Delta t)_n$, onde $\beta > 1$, caso VP^n seja menor que uma variação mínima estabelecida.

Note que, para compatibilizar os passos de tempo da saturação e da pressão, precisamos que $(\Delta t)_n = (\Delta t)_{n,1} + \dots + (\Delta t)_{n,L}$. Para isso, basta ajustar o último passo de tempo

da saturação $(\Delta t)_{n,L}$.

6.2 Derivada $O'(m)z$

Vimos na Seção 5.1 as etapas necessárias para o cálculo de $O'(m)z$. Nesta seção, serão apresentados os detalhes de implementação de cada uma dessas etapas.

6.2.1 Cálculo de $\partial_m Sz$

A expressão (5.8) pode ser escrita utilizando os operadores discretos (6.8) e (6.9)

$$\begin{pmatrix} y_p \\ y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla_h \cdot (K'(\bar{m})z \lambda(s) \nabla_h p) \\ -\nabla_h \cdot (f(s) K'(\bar{m})z \lambda(s) \nabla_h p) \end{pmatrix}. \quad (6.21)$$

É ainda necessário calcular $K'(m)z$. O cálculo de $K'(m)z$ em uma interface $(i+1/2, j)$ depende de z e K nas células (i, j) e $(i+1, j)$. Temos

$$K'(m)z = \partial_{m_{i,j}} K(m) z_{i,j} + \partial_{m_{i+1,j}} K(m) z_{i+1,j}. \quad (6.22)$$

Como K nas interfaces é calculado através da média harmônica, substituímos $K = e^m$ em (6.12) e obtemos

$$K_{i+1/2,j} = \frac{2e^{m_{i,j}} e^{m_{i+1,j}}}{e^{m_{i,j}} + e^{m_{i+1,j}}}.$$

Logo,

$$\partial_{m_{i,j}} K(m) = \frac{2K_{i,j} K_{i+1,j}^2}{(K_{i,j} + K_{i+1,j})^2} \quad \text{e} \quad \partial_{m_{i+1,j}} K(m) = \frac{2K_{i,j}^2 K_{i+1,j}}{(K_{i,j} + K_{i+1,j})^2}.$$

Finalmente,

$$K'(m)z = \frac{2K_{i,j} K_{i+1,j} (K_{i,j} z_{i+1,j} + K_{i+1,j} z_{i,j})}{(K_{i,j} + K_{i+1,j})^2}. \quad (6.23)$$

O mesmo estende-se para as interfaces $(i-1/2, j)$, $(i, j-1/2)$ e $(i, j+1/2)$.

6.2.2 Cálculo do jacobiano

Vimos na Seção 5.1.1.2 que o cálculo de $Jx = y$ é equivalente a resolver um sistema de EDPs, dado por (5.15). Aplicando os operadores gradiente e de divergência discretos,

podemos reescrever o Sistema (5.15) como

$$\begin{cases} -\nabla_h \cdot (T_t(\bar{s}) \nabla_h dp) = y_p + \nabla_h \cdot (T'_t(\bar{s}) ds \nabla_h \bar{p}), \\ \phi \delta_t ds = y_s + f'(\bar{s}) ds \bar{q}_{t,pr} + \nabla_h \cdot (f'(\bar{s}) ds (\bar{v}_t) \\ + f(\bar{s}) (T'_t(\bar{s}) ds \nabla_h \bar{p} + T_t(\bar{s}) \nabla_h dp)), \end{cases} \quad (6.24)$$

onde (\bar{s}, \bar{p}) são obtidos através da resolução do problema direto.

A fim de resolver o Sistema (6.24) corretamente, é necessário que todos os termos sejam avaliados no mesmo instante de tempo utilizado para a resolução do problema direto. Além disso, assim como no problema direto, os termos avaliados nas interfaces devem ter o mesmo tratamento *upwind* apresentado na Seção 6.1.2.3. A seguir é apresentado o Sistema (6.24) reescrito de forma a incluir esses detalhes importantes

$$\begin{cases} -\nabla_h \cdot (T_t(\bar{s}_{up}^n) \nabla_h dp) = y_p^n + \nabla_h \cdot (T'_t(\bar{s}_{up}^n) ds_{up}^n \nabla_h \bar{p}^n), \\ \phi \delta_t ds^{n,l} = y_s^{n,l} + f'(\bar{s}^{n,l}) ds^{n,l} \bar{q}_{t,pr} + \\ \nabla_h \cdot (f'(\bar{s}_{up}^{n,l}) ds_{up}^{n,l} (\bar{v}_t)_{up} + f(\bar{s}_{up}^{n,l}) (T'_t(\bar{s}_{up}^n) ds_{up}^n \nabla_h \bar{p} + T_t(\bar{s}_{up}^n) \nabla_h dp^n)), \end{cases} \quad (6.25)$$

onde o subscrito *up* indica tratamento *upwind*.

Um aspecto delicado e importante da implementação do jacobiano é consequência do tratamento *upwind*. Observe que $f'(\bar{s}) ds$ aparece como a derivada de $f(\bar{s})$. Quando f é avaliado em interfaces, o mesmo deve ser feito para derivada. Assim, se na interface $(i + 1/2, j)$ a avaliação de $f(\bar{s})$ é feita em (i, j) , além de $f(\bar{s})$, ds também é avaliado em (i, j) . O mesmo ocorre para o cálculo de $T'_t(\bar{s}_*) ds_*$ na equação de ds e de $T'_t(\bar{s}) ds$ na equação de dp .

De modo análogo ao problema direto, a resolução de (6.25) é feita através do método *IMPES aperfeiçoado*. Desta forma, desacoplamos os cálculos de ds e dp e obtemos uma EDP parabólica para dp , dada por

$$-\nabla_h \cdot (T_t(\bar{s}_{up}^n) \nabla_h dp) = y_p^n + \nabla_h \cdot (T'_t(\bar{s}_{up}^n) ds_{up}^n \nabla_h \bar{p}^n), \quad (6.26)$$

e uma EDP hiperbólica para ds , dada por

$$\begin{aligned} \phi \delta_t ds^{n,l} &= y_s^{n,l} + f'(\bar{s}^{n,l}) ds^{n,l} \bar{q}_{t,pr} + \\ \nabla_h \cdot (f'(\bar{s}_{up}^{n,l}) ds_{up}^{n,l} (\bar{v}_t^n)_{up} + f(\bar{s}_{up}^{n,l}) (T_t'(\bar{s}_{up}^n) ds_{up}^n \nabla_h \bar{p} + T_t(\bar{s}_{up}^n) \nabla_h dp^n)). \end{aligned} \quad (6.27)$$

A Equação (6.26) é resolvida implicitamente para dp e sua resolução equivale à resolução de um sistema linear pentadiagonal, como o apresentado na Seção 6.1.3 para a resolução de (6.10).

Já (6.27) é resolvido explicitamente para ds , de modo análogo ao apresentado para (6.11). O cálculo de $ds^{n,l+1}$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} ds^{n,l+1} &= ds^{n,l} (y_s^{n,l} + f'(\bar{s}^{n,l}) ds^{n,l} \bar{q}_{t,pr} + \\ \nabla_h \cdot (f'(\bar{s}_{up}^{n,l}) ds_{up}^{n,l} (\bar{v}_t^n)_{up} + f(\bar{s}_{up}^{n,l}) (T_t'(\bar{s}_{up}^n) ds_{up}^n \nabla_h \bar{p} + T_t(\bar{s}_{up}^n) \nabla_h dp^n))) \frac{\Delta t^{n,l}}{\phi}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Utilizando os mesmos passos de tempo do problema direto, a condição de CFL apresentada em 6.1.4 está automaticamente satisfeita para (6.27).

O algoritmo para a resolução de (6.25) é apresentado a seguir

Algoritmo 2 Cálculo de $Jx = y$

Jacobiano

- 1: $ds^0 \leftarrow 0$
 - 2: **para** $n \leftarrow 0, 1, \dots, N$ **faça**
 - 3: Calcule dp^n utilizando a Equação (6.26)
 - 4: **para** $l \leftarrow 0, 1, \dots, L - 1$ **faça**
 - 5: Calcule $ds^{n,l+1}$ utilizando (6.28)
 - 6: **fim para**
 - 7: $ds^{n+1} \leftarrow ds^{n,L}$
 - 8: **fim para**
-

6.3 Adjunta $(O'(m))^T w$

No Capítulo 5 foram mostradas as etapas necessárias para o cálculo de $O'(m)^T w$. Nesta seção serão apresentados os detalhes de implementação de cada uma dessas etapas.

6.3.1 Cálculo de $J^T w = y$

Determinamos J^t usando a relação

$$\langle J^t w, z \rangle = \langle Jz, w \rangle. \quad (6.29)$$

Aqui, $z = (ds, dp)$, onde $ds^0 = ds^{0,0} = 0$. O vetor $w = (w_s, w_p)^t$ está no espaço dual. Definimos $w_s^{N-1,L} = w_s^N = 0$ e introduzimos um novo operador de diferenças-finitas

$$d_t w^{n,l} = \frac{w^{n,l+1}}{(\Delta t)_{n,l+1}} - \frac{w^{n,l}}{(\Delta t)_{n,l}}.$$

Com isso, é válida a fórmula de integração por partes discreta

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{L-1} (\delta_t ds)^{n,\ell} w_s^{n,\ell} = - \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{L-1} (d_t w_s)^{n,\ell} ds^{n,\ell+1}. \quad (6.30)$$

Sejam F uma função de interface que se anula na fronteira ($F_{i+1/2,j} = F_{N_x-1/2,j} = F_{i,j+1/2} = F_{i,N_y-1/2} = 0$) e f uma função de bloco. Usando (6.8) e (6.9), temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla_h \cdot F, f \rangle &= \sum_{i=1}^{N_x-1} \sum_{j=1}^{N_y-1} \left(\frac{F_{i+1/2,j} - F_{i-1/2,j}}{\Delta x} + \frac{F_{i,j+1/2} - F_{i,j-1/2}}{\Delta y} \right) f_{i,j} = \\ &= \sum_{i=1}^{N_x-1} \sum_{j=1}^{N_y-1} F_{i+1/2,j} \left(\frac{f_{i,j} - f_{i+1,j}}{\Delta x} \right) + F_{i,j+1/2} \left(\frac{f_{i,j} - f_{i,j+1}}{\Delta y} \right) = -\langle F, \nabla_h f \rangle. \end{aligned} \quad (6.31)$$

(Estamos usando a mesma notação para produtos internos em espaços diferentes.) Usando (6.31) duas vezes, escrevemos

$$\langle \nabla_h \cdot (a \nabla f), g \rangle = -\langle a \nabla f, \nabla_h g \rangle = -\langle a \nabla g, \nabla_h f \rangle = \langle \nabla \cdot (a \nabla g), \nabla_h f \rangle \quad (6.32)$$

Para facilitar o cálculo, definimos

$$\begin{cases} f_1^{n,\ell} = f'(\bar{s}^{n,\ell}) \bar{q}_{t,pr}^n, \\ f_2^{n,\ell} = f'(\bar{s}_{up}^{n,\ell}) (\bar{v}_t)_{up}^n, \\ f_3^{n,\ell} = f(\bar{s}_{up}^{n,\ell}) T'_t(\bar{s}_{up}^n) \nabla_h \bar{p}^n, \\ f_4^{n,\ell} = f(\bar{s}_{up}^{n,\ell}) T_t(\bar{s}_{up}^n), \\ f_5^n = T'_t(\bar{s}_{up}^n) \nabla_h \bar{p}^n, \\ f_6^n = T_t(\bar{s}_{up}^n). \end{cases} \quad (6.33)$$

Usando (6.28), se $J(ds, dp)^t = (y_s, y_p)^t$, então

$$\begin{cases} y_s^{n,\ell} = \phi \delta_t ds^{n,\ell} - f_1^{n,\ell} ds^{n,\ell} - \nabla_h \cdot (f_2^{n,\ell} ds_{up}^{n,\ell} + f_3^{n,\ell} ds_{up}^n + f_4^{n,\ell} \nabla_h dp^n), \\ y_p^n = -\nabla_h \cdot (f_5^n ds_{up}^n) - \nabla_h \cdot (f_6^n \nabla_h dp^n). \end{cases} \quad (6.34)$$

De (6.29) temos

$$\langle J^t(w_s, w_p), (ds, dp) \rangle = \sum_{n=0}^N (-\nabla_h \cdot (f_5^n ds_{up}^n) - \nabla_h \cdot (f_6^n \nabla_h dp^n)) w_p^n +$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{L-1} (\phi \delta_t ds^{n,\ell} - f_1^{n,\ell} ds^{n,\ell} - \nabla_h \cdot (f_2^{n,\ell} ds_{up}^{n,\ell} + f_3^{n,\ell} ds_{up}^n + f_4^{n,\ell} \nabla_h dp^n)) w_s^{n,\ell}$$

Usamos agora (6.30) nos termos de acumulação (primeiro termo), (6.31) nos termos em f_2, f_3, f_5 e (6.32) nos termos em f_4, f_6 . Usando a convenção que $w_s^{N,\ell} = 0$, para todo ℓ , obtemos que

$$\begin{aligned} \langle J^t(w_s, w_p), (ds, dp) \rangle &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\ell=1}^{L-1} ds^{n,\ell} (-\phi d_t w_s^{n,\ell-1} - f_1^{n,\ell} w_s^{n,\ell}) + ds_{up}^{n,\ell} f_2^{n,\ell} \nabla_h w_s^{n,\ell} + \\ &\sum_{n=1}^N ds^n (-\phi d_t w_s^{n-1, L-1} - f_1^n w_s^n) + ds_{up}^n (f_2^n \nabla_h w_s^n + f_5^n \nabla_h w_p^n) + ds_{up}^n \sum_{\ell=0}^{L-1} f_3^{n,\ell} \nabla_h w_s^{n,\ell} \\ &- \sum_{n=0}^N dp^n \left(\sum_{\ell=0}^{L-1} \nabla_h \cdot (f_4^{n,\ell} \nabla_h w_s^{n,\ell}) + \nabla_h \cdot (f_6^n \nabla_h w_p^n) \right). \end{aligned}$$

Usando (6.33), vemos que $J^t(w_s, w_p)^t = (y_s, y_p)^t$ é equivalente a

$$\begin{cases} \phi \partial_t w_s = -z_s - f'(\bar{s}) w_s \bar{q}_{t,pr} + f'(\bar{s}) \bar{v}_t \cdot \nabla_h w_s + \\ T'_t(\bar{s}) \nabla_h \bar{p} (\nabla_h w_p + f(\bar{s}) \nabla_h w_s) \delta_{0,\ell}, \\ -\nabla_h \cdot (f(\bar{s}) T_t(\bar{s}) \nabla_h w_s) - \nabla_h \cdot (T_t(\bar{s}) \nabla_h w_p) = z_p, \end{cases} \quad (6.35)$$

De modo análogo à resolução do problema direto e de $Jd = y$, a resolução de (6.35) é feita com o método *IMPES aperfeiçoado*. As duas equações de (6.35) são desacopladas, de forma a obtermos uma equação para w_s e outra para w_p . Assim como em $Jd = y$, utilizando os mesmos passos de tempo utilizados no problema direto, a condição de CFL está automaticamente satisfeita para o problema (6.35).

Como apresentado na Seção 5.2.2 para o caso contínuo, a resolução de $J^T w = z$ deve ser feito de trás pra frente. Isto pode ser também observado no caso discreto, como ilustrado pelas Figuras 6.5 e 6.6 que apresentam a estrutura da matriz J e J^T , respectivamente.

Algoritmo 3 Cálculo de $J^T w = z$

Jacobiano Transposto

- 1: $w_s^{N,0} \leftarrow 0$
- 2: $A = B = 0$
- 3: **para** $n \leftarrow N, N-1, \dots, 0$ **faça**
- 4: Determine w_p^n utilizando

$$-\nabla_h \cdot (T_t(\bar{s}_{up}^n) \nabla_h w_p^n) = y_p^n + A.$$

- 5: Determine $w_s^{n-1, L-1}$ utilizando

$$\begin{aligned} \phi d_t w_s^{n-1, L-1} = & -y_s^n - f'(\bar{s}_{up}^n) w_s^n \bar{q}_{t,pr}^n + (f'(\bar{s}_{up}^n) (\bar{v}_t)_{up}^n \cdot \nabla_h w_s^n)_{up} + \\ & (T'_t(\bar{s}_{up}^n) \nabla_h \bar{p}^n \nabla_h w_p^n)_{up} + B_{up}. \end{aligned}$$

- 6: $A \leftarrow \nabla_h \cdot (T_t(\bar{s}_{up}^{n-1}) f(\bar{s}_{up}^{n-1, L-1}) \nabla_h w_s^{n-1, L-1})$
- 7: $B \leftarrow f(\bar{s}_{up}^{n-1, L-1}) \nabla_h w_s^{n-1, L-1}$
- 8: **para** $l \leftarrow L-1, \dots, 1$ **faça**
- 9: Determine $w_s^{n-1, l-1}$ utilizando

$$\begin{aligned} \phi d_t w_s^{n-1, l-1} = & -y_s^{n-1, l} - f'(\bar{s}_{up}^{n-1, l}) w_s^{n-1, l} \bar{q}_{t,pr}^{n-1} + \\ & (f'(\bar{s}_{up}^{n-1, l}) (\bar{v}_t)_{up}^{n-1} \cdot \nabla_h w_s^{n-1, l})_{up} \end{aligned}$$

- 10: $A \leftarrow A + \nabla_h \cdot (T_t(\bar{s}_{up}^{n-1}) f(\bar{s}_{up}^{n-1, l-1}) \nabla_h w_s^{n-1, l-1})$
 - 11: $B \leftarrow B + f(\bar{s}_{up}^{n-1, l-1}) \nabla_h w_s^{n-1, l-1}$
 - 12: **fim para**
 - 13: $B \leftarrow B \cdot T'_t(\bar{s}_{up}^{n-1}) \nabla_h \bar{p}^{n-1}$
 - 14: **fim para**
-

6.3.2 Cálculo de $(\partial_m S)^t$

Usando (6.21) e integração por partes, escrevemos

$$\begin{aligned} \langle (\partial_m S)^t(w_s, w_p), z \rangle &= \langle \partial_m S z, (w_s, w_p) \rangle = \langle -\nabla_h \cdot (f(\bar{s}) K'(\bar{m}) z \lambda_t(\bar{s}) \nabla_h \bar{p}), w_s \rangle + \\ & \langle -\nabla_h \cdot (K'(\bar{m}) z \lambda_t(\bar{s}) \nabla_h \bar{p}), w_p \rangle = \\ & \langle f(\bar{s}) K'(\bar{m}) z \lambda_t(\bar{s}) \nabla_h \bar{p}, \nabla_h w_s \rangle + \langle K'(\bar{m}) z \lambda_t(\bar{s}) \nabla_h \bar{p}, \nabla_h w_p \rangle. \end{aligned}$$

Usando (6.23), e coletando os termos que multiplicam cada $z_{i,j}$, obtemos

$$\langle (\partial_m S)^t(w_s, w_p), z \rangle = \langle \partial_{m_i} K(\bar{m}) \lambda_t(\bar{s}) \nabla_h \bar{p} \cdot (f(\bar{s}) \nabla_h w_s + \nabla_h w_p), z \rangle.$$

Aqui, $\partial_{m_i}K(\bar{m})$ é obtido para cada interface da célula (i, j) da malha. Para uma interface, se K_i é o valor de $K(\bar{m})$ na célula (i, j) e K_{i+1} é o valor na célula $(i + 1, j)$, então $\partial_{m_i}K(\bar{m})$ na interface $(i + 1/2, j)$ é dado por

$$\partial_{m_i}K(\bar{m}) = \frac{2K_iK_{i+1}^2}{(K_i + K_{i+1})^2}.$$

O mesmo cálculo é feito de forma análoga às outras interfaces do bloco. Com isto, escrevemos

$$(\partial_m S)^t(w_s, w_p)^t = K'(\bar{m})\lambda_t(\bar{s})\nabla_h \bar{p} \cdot (f(\bar{s})\nabla_h w_s + \nabla_h w_p). \quad (6.36)$$

6.4 Validação

Foram realizados alguns testes a fim de validar as implementações apresentadas neste trabalho. A seguir, os erros relativos utilizados são calculados através da norma L^2 . Isto é, o erro entre dois vetores a e b é dado por

$$e_r = \frac{\sqrt{\sum_n \|a_i - b_i\|^2}}{\sqrt{\sum_n \|a_i\|^2}}.$$

6.4.1 Problema direto

Para a validação do problema direto foram realizados dois conjuntos de testes, para os quais a solução analítica de parte do problema é conhecida.

O primeiro teste é baseado no problema de Buckley Leverett. O problema de Buckley Leverett consiste no problema de escoamento unidimensional a seguir

$$\frac{\partial s}{\partial t} = u(s)\frac{\partial s}{\partial x}, \quad (6.37)$$

onde

$$u(s) = \frac{Q}{A\phi} \frac{df}{ds}.$$

f é a função de fluxo fracionário, Q é a vazão total, ϕ é a porosidade e A é a área da seção transversal do volume.

A solução analítica para o problema de Buckley Leverett é conhecida e é da forma

$$s(x, t) = s(x - u(s)t). \quad (6.38)$$

Foram obtidas soluções numéricas para o problema de Buckley Leverett utilizando o simulador aqui descrito. O problema foi simulado com diferentes malhas, $Nx = 100$, $Nx = 200$, $Nx = 800$ e $Nx = 1600$. Além disso, fizemos $Q = 100m^3/dia$, $\phi = 0.2$, campo de permeabilidades constante igual a $100\mu D$, $\rho_w = 1.0$, $\rho_o = 0.8$, $\mu_w = 1.0$ e $\mu_o = 5.0$.

As Figuras 6.7 e 6.8 apresentam os perfis de saturação obtidos através da resolução numérica e a solução analítica, para os casos com $Nx = 100$ e $Nx = 1600$.

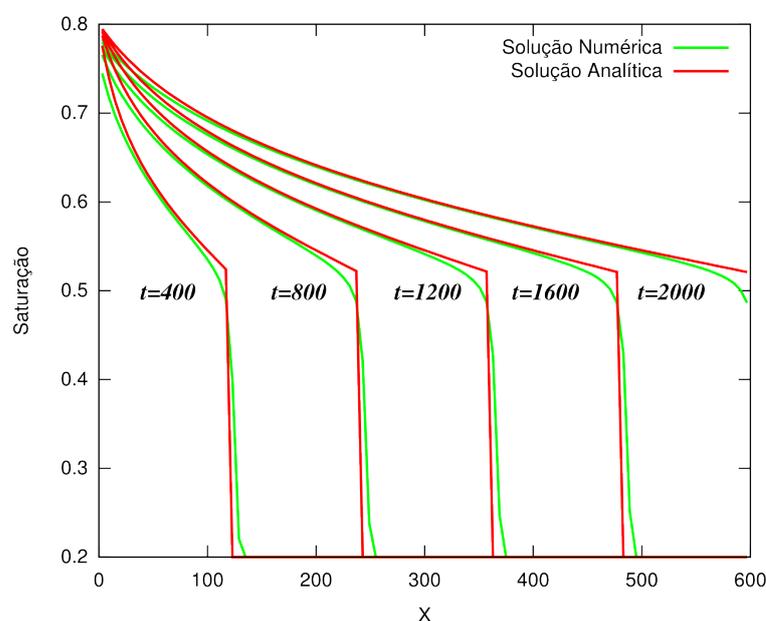


Figura 6.7: Solução do problema de Buckley Leverett para $Nx=100$

Os erros obtidos nesse teste são apresentados na Tabela 6.1.

Tabela 6.1: Validação do problema direto - Buckley Leverett

Nx	e_r
100	1.63e-02
200	1.32e-02
800	9.75e-03
1600	5.79e-03

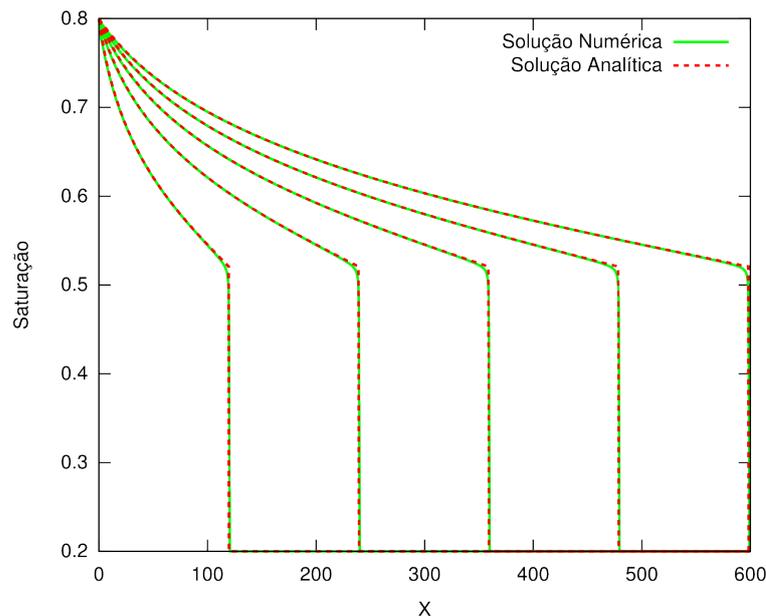


Figura 6.8: Solução do problema de Buckley Leverett para $N_x=1600$

O segundo teste realizado é o problema *2-spot* para um traçador em um reservatório com dimensões $L_x \times L_y$ com dois poços, um injetor na posição $(1, 1)$ e um produtor na posição (L_x, L_y) , como ilustrado na Figura 6.9.

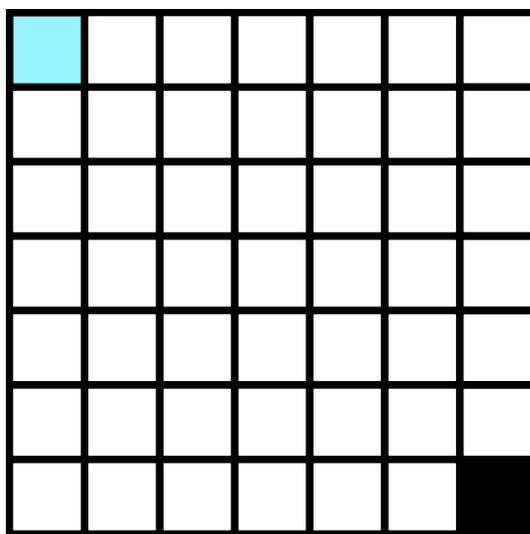


Figura 6.9: Problema *2-spot*

Para este problema a solução analítica do campo de pressões é conhecida. Foram analisados os erros relativos na norma L^2 para malhas de dimensão 25×25 , 50×50 , 100×100 , 200×200 , 400×400 . Os resultados são apresentados na Tabela 6.2.

6.4.2 Derivada

A fim de validar o cálculo de $O'(m)$ foi realizado o seguinte teste baseado em diferenças finitas: seja \bar{K} um campo de permeabilidade qualquer, $\bar{m} = \log \bar{K}$ e z um vetor de

Tabela 6.2: Validação do problema direto - Two-spot

Malha	e_r
25×25	2.10e-03
50×50	8.60e-04
100×100	2.45e-04
200×200	6.30e-05
400×400	1.58e-05

dimensão n_o . Calculamos $w_1 = O'(\bar{m})z$ utilizando (5.1), $\bar{O} = O(\bar{m})$ e $\bar{O}^+ = O(\bar{m} + hz)$ utilizando o problema direto, onde h é um escalar qualquer. Temos que $w_2 = \frac{\bar{O}^+ - \bar{O}}{h}$ é uma aproximação de primeira ordem de $O'(m)z$. É esperado que e_r seja da ordem de h .

Para o primeiro teste foi utilizado o problema 2-spot, com malha de dimensões 3×3 , campo de permeabilidades não homogêneo variando de $80\mu D$ a $110\mu D$ e o vetor z variando de -1.0 a 1.0 .

O segundo teste de validação da derivada foi com um problema 5-spot com malha de dimensões 25×25 , campo de permeabilidades não homogêneo variando de 80 a $120 \mu D$ e vetor z variando de 1.0 a -1.0 .

Os resultados obtidos para o primeiro e segundo testes são apresentados na Tabela 6.3, como e_{r1} e e_{r2} , respectivamente.

Tabela 6.3: Erros relativos para o cálculo da derivada

h	e_{r1}	e_{r2}
1.e-03	4.83e-03	4.82e-03
1.e-04	4.83e-04	4.82e-04
1.e-05	4.83e-05	4.82e-05
1.e-06	5.36e-06	5.00e-06

6.4.3 Adjunta

Sabemos que $(O(m))_{i,j}^T = (O(m))_{j,i}$, porém as matrizes $O'(m)$ e $(O'(m))^T$ não são conhecidas. O que conhecemos é a aplicação destas matrizes a um vetor. Podemos validar $(O'(m))^T w$ fazendo $v = O'(m)e_j$ e $u = (O'(m))^T e_i$, onde e_i e e_j são os vetores canônicos, e calculando o erro entre o elemento i de v e o elemento j de u .

O teste foi realizado com quatro problemas *5-spot*, três deles com malha de dimensões 25×25 e um de 27×27 e campos de permeabilidades com diferentes variações. Os resultados são apresentados na Tabela 6.4.3.

Tabela 6.4: Erros relativos Adjunta

Malha	Varição de K	Erro (ordem de grandeza)
25x25	constante	10^{-13}
25x25	10^4 a 10^7	10^{-13}
25x25	10^1 a 10^4	10^{-14}
27x27	10^1 a 10^3	10^{-15}

CAPÍTULO 7

METODOLOGIA

Neste capítulo serão apresentados os testes que foram realizados utilizando as ferramentas apresentadas neste trabalho em conjunto com o otimizador baseado em TSVD.

7.1 Detalhes de implementação

A implementação do simulador bifásico, de sua derivada e adjunta, além do otimizador, foram realizadas utilizando a linguagem de programação C. Além disso, a fim de resolver o sistema linear apresentado na Seção 6.1.3 foi utilizada a biblioteca PETSc (BALAY *et al.*, 2002). O sistema foi resolvido utilizando um método direto com reordenamento.

A implementação do otimizador foi realizada pelo Prof. Paulo Goldfeld, também com a linguagem de programação C. Como já apresentado no Capítulo 4, o método de otimização adotado foi o de Gauss-Newton e para o cálculo do TSVD foi utilizado o método de Lanczos.

Os testes foram realizados em uma plataforma com sistema operacional Linux 64-bits, processador AMD Turion 64 X2 TL-60 com 2 GHz e memória RAM de 2 GB.

7.2 Testes

Os primeiros testes realizados correspondem a uma malha uniforme de 21×21 blocos. As dimensões do reservatório são de $200m$ de largura por $200m$ de comprimento e uma espessura $h = 20m$. As dimensões de cada bloco da malha são iguais a $\Delta x = \Delta y \approx 9,52m$. Existem cinco poços no reservatório, distribuídos de forma simétrica. Um poço injetor (Inj), localizado no centro do reservatório, na posição (11,11) da malha e quatro poços

produtores (P1, P2, P3, P4) localizados nas "quinas" do reservatório, respectivamente nas posições (1,1), (1,21), (21,1) e (21,21) da malha. A porosidade do reservatório é constante e igual a 0.2. A saturação inicial do reservatório é igual à saturação irreduzível da água dada por $s_{wi} = 0.2$. A saturação residual do óleo é dada por $s_{or} = 0.2$. As viscosidades da água e do óleo são dadas respectivamente por $\mu_w = 1.0$ e $\mu_o = 5.0$ e as densidades por $\rho_w = 1.0$ e $\rho_o = 0.8$. As funções de permeabilidade relativa da água (k_{rw}) e do óleo (k_{ro}) são as chamadas curvas de Corey dadas por

$$k_{rw} = 0.4 \left(\frac{s - s_{wi}}{1 - s_{or} - s_{wi}} \right)^2,$$

e

$$k_{ro} = 0.8 \left(\frac{1 - s_{or} - s}{1 - s_{or} - s_{wi}} \right)^2.$$

As vazões totais dos poços injetor e produtores, em todos os instantes de tempo, são dadas por $Q_{t,inj} = 400m^3/dia$ e $Q_{t,prod} = 100m^3/dia$, respectivamente. Os dados do histórico foram obtidos em intervalos de 10 dias em um tempo total de 400 dias.

Foram gerados dois exemplos a partir de históricos sintéticos, obtidos com dois campos de permeabilidade diferentes. Os dados de histórico utilizados para realizar o ajuste de histórico foram obtidos de forma sintética, executando o problema direto uma vez. Os dois problemas testados são iguais, a não ser pelo campo de permeabilidade objetivo.

Esse mesmo teste, com as mesmas propriedades descritas acima, foram repetidos com uma discretização mais fina, de 51×51 . O campo sintético utilizado neste caso é equivalente ao do Exemplo 1 que será apresentado a seguir. Os históricos de produção e pressão são equivalentes ao caso com discretização de 21×21 .

7.2.1 Exemplo 1

O campo de permeabilidades objetivo do Exemplo 1 é apresentado na Figura 7.1. Todos os campos de permeabilidade são apresentados como $\log(K)$.

Este campo possui quatro quadrantes distintos, num dos quais existe um canal, ou seja, uma região com alta permeabilidade, alinhada entre o poço injetor e o poço P1.

A Figura 7.2 apresenta o histórico do corte de água nos poços produtores relativo a este campo. O corte de água nada mais é que a razão entre a vazão de água e a vazão total.

Podemos perceber que o *breakthrough* no poço P1 é o que ocorre mais cedo, devido ao canal alinhado entre o poço injetor e este poço. O segundo *breakthrough* ocorre no poço P4, que se encontra em um quadrante com alta permeabilidade. Em seguida, temos o

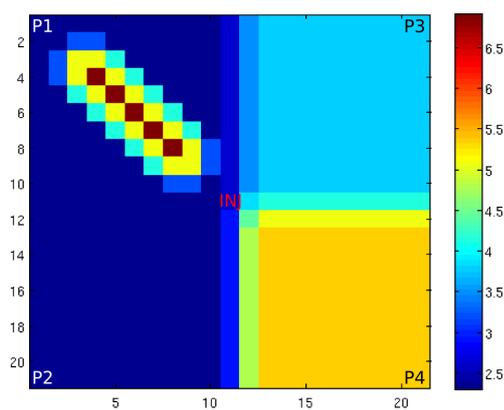


Figura 7.1: Campo de permeabilidade objetivo 1.

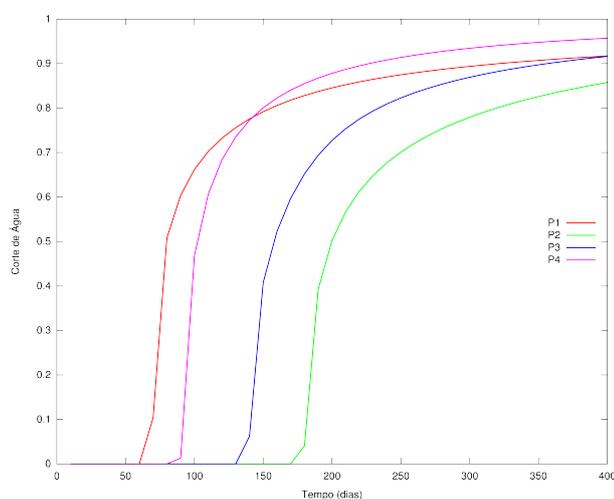


Figura 7.2: Histórico do corte de água para o campo de permeabilidades sintético 1.

breakthrough do poço P3 e, por último, o do poço P2, que se encontra em uma região de menor permeabilidade.

Por serem as pressões determinadas a menos de uma constante, o histórico dos cinco poços fornece uma informação redundante. Por isso, o que apresentamos é a diferença de pressão entre o poço injetor e os poços produtores. A Figura 7.3 apresenta o histórico de diferenças de pressão para o campo sintético 1.

O campo de permeabilidades com discretização 51×51 é apresentado na Figura 7.4

As Figuras 7.5 e 7.6 apresentam as curvas de corte de água e diferença de pressão para este caso.

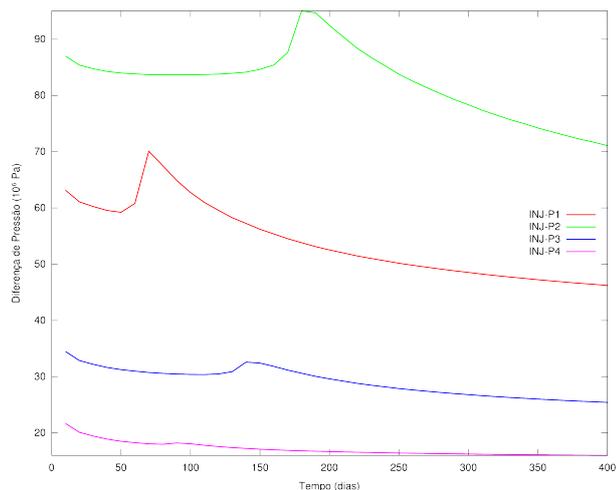


Figura 7.3: Histórico das diferenças de pressão para o campo de permeabilidades sintético 1

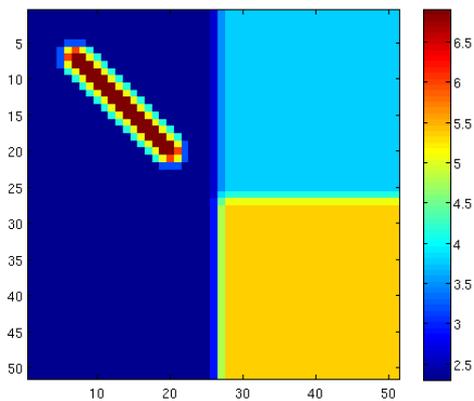


Figura 7.4: Campo objetivo 1 51×51 .

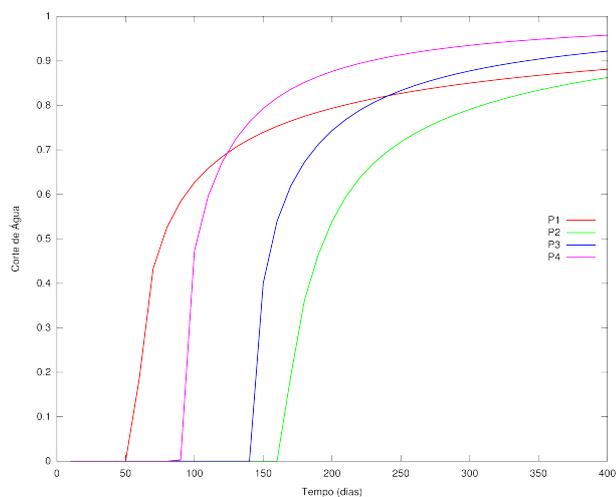


Figura 7.5: Histórico do corte de água para o campo de permeabilidades sintético 51×51

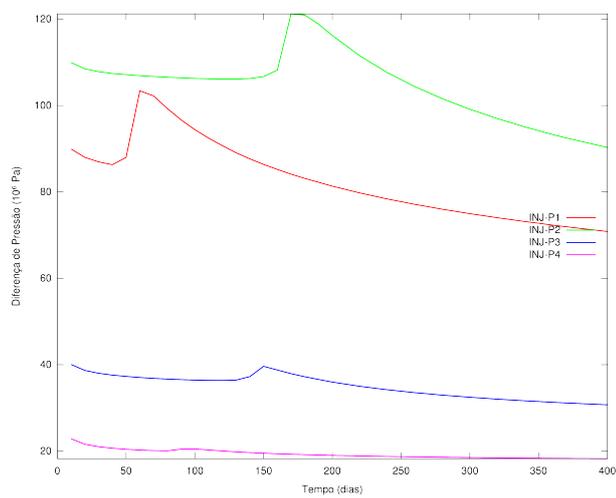


Figura 7.6: Histórico das diferenças de pressão para o campo de permeabilidades sintético 51×51

7.2.2 Exemplo 2

O campo de permeabilidades sintético do Exemplo 2 é apresentado na Figura 7.7.

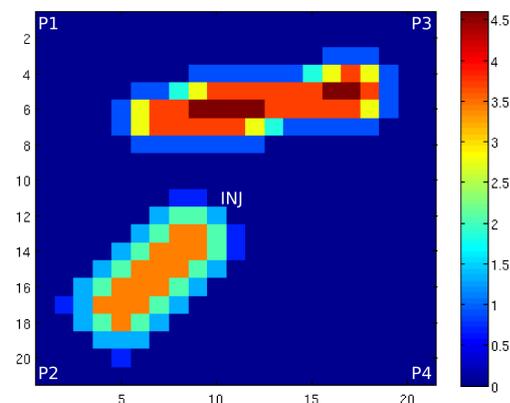


Figura 7.7: Campo de permeabilidade objetivo 2

A característica marcante deste campo de permeabilidades é a presença de dois canais com alta permeabilidade, um alinhado entre o poço injetor e o poço P2 e outro que atravessa os quadrantes onde se encontram os poços P1 e P3.

A Figura 7.8 apresenta os dados de corte de água nos poços produtores, obtidos a partir do campo de permeabilidades apresentado na Figura 7.7.

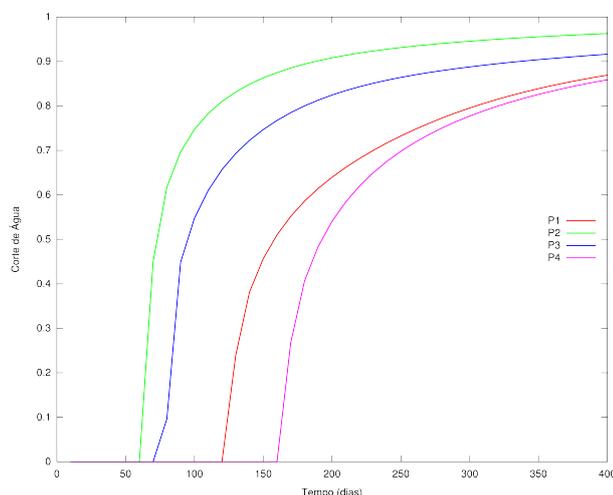


Figura 7.8: Histórico das vazões de óleo nos poços produtores para o campo de permeabilidades objetivo 2

O *breakthrough* no poço P2 ocorre mais cedo que o dos demais, devido ao canal de alta permeabilidade que liga o poço injetor a ele. Logo em seguida observamos *breakthrough* dos poços P3 e P1 que encontram-se em quadrantes "cortados" pelo segundo canal. Por último é observado o *breakthrough* do poço P4 que encontra-se em uma região de permeabilidade mais baixa.

A Figura 7.9 apresenta o histórico da diferença de pressão referentes ao campo sintético 2.

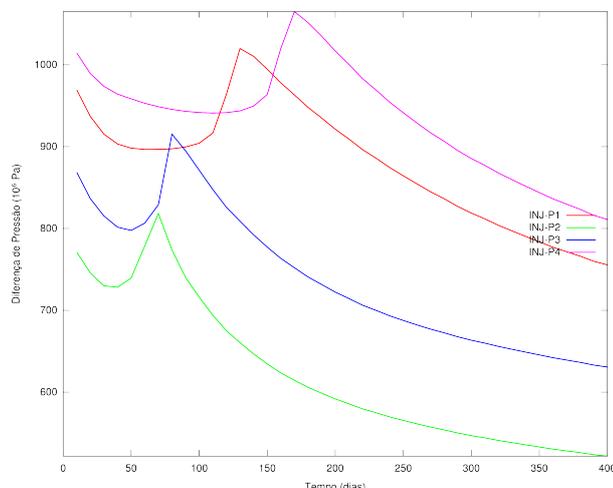


Figura 7.9: Histórico das diferenças de pressão para o campo de permeabilidades objetivo 2

7.3 Otimizador

Nesta Seção serão apresentados aspectos importantes do otimizador, como a formulação da função objetivo, os parâmetros utilizados e os critérios de parada adotados para os testes.

7.3.1 Função objetivo

Foi apresentado no Capítulo 4 o problema de mínimos quadrados não lineares, que consiste em minimizar a função $f(m) = \frac{1}{2} \|r(m)\|^2$, onde $r(m)$ é o resíduo associado ao ponto m . Temos dois conjuntos de dados distintos que desejamos ajustar: a vazão de óleo nos poços produtores e a pressão em todos os poços. Portanto, a função objetivo $f(m)$ pode ser dividida da seguinte forma

$$f_q(m) = \frac{1}{2} \|(\bar{O}_q - O_q(m))\|^2 \quad (7.1)$$

e

$$f_p(m) = \frac{1}{2} \|(\bar{O}_p - O_p(m))\|^2, \quad (7.2)$$

onde f_q e f_p correspondem às funções objetivo relacionadas à vazão e à pressão, respecti-

vamente.

A função objetivo total pode então ser escrita da seguinte maneira

$$f(m) = \alpha_q^2 f_q(m) + \alpha_p^2 f_p(m) = \frac{1}{2} (\|\alpha_q (\bar{O}_q - O_q(m))\|^2 + \|\alpha_p (\bar{O}_p - O_p(m))\|^2), \quad (7.3)$$

onde α_q e α_p são pesos que devem ser introduzidos na função objetivo devido às diferentes ordens de grandeza em que se apresentam os vetores O_q e O_p .

Neste trabalho fixamos α_β para todos os casos como

$$\alpha_\beta = \frac{1}{\|\bar{O}_\beta\|}, \quad \beta = p, q. \quad (7.4)$$

7.3.2 Parâmetros

Nos dois casos apresentados, temos uma malha de 21x21 blocos e, portanto, o número de parâmetros que desejamos estimar é 441. Os dados de histórico foram obtidos em um período total de 400 dias e em intervalos de tempo de 10 dias, o que nos dá um total de 40 pontos de observação. Como a vazão de óleo é obtida apenas nos poços produtores, que são quatro, temos $40 \times 4 = 160$ observações de vazão. Já a pressão é observada em todos os poços, que são cinco. Temos então $40 \times 5 = 200$ observações de pressão. O número de observações total para os exemplos apresentados é de 360.

Para cada um dos casos apresentados anteriormente, foram realizados testes com diferentes configurações para o otimizador. Consideramos três pontos iniciais diferentes, todos homogêneos, dados por

- Média Geométrica do campo de permeabilidades sintético (de K , não $\log K$). (O logaritmo neperiano da média geométrica de K é igual à média aritmética do logaritmo neperiano de K).
- O menor valor do campo de permeabilidades objetivo.
- O maior valor do campo de permeabilidades objetivo.

Para cada um desses pontos iniciais foram realizados experimentos com diferentes número de valores singulares, a saber, 7, 15 e 25.

Além disso, foi realizada uma estratégia utilizando número de valores singulares crescente. Esta estratégia consiste em fixar um número de valores singulares e rodar o programa até a convergência. Em seguida, aumentar este número. Realizamos estes teste com os seguintes números de valor singular: 2, 4, 8, 12, 16, 20 e 25.

Para o caso com malha 51×51 foi realizado apenas um teste com campo inicial igual à média geométrica do campo sintético e estratégia de valores singulares crescente, com os mesmos valores utilizados nos demais teste.

Critérios de parada

Os critérios de parada para os testes realizados são:

- Número máximo de iterações = 50.
- Função objetivo menor que $1.e - 6$.
- Norma do gradiente menor que $1.e - 6$.

CAPÍTULO 8

RESULTADOS

Neste Capítulo são apresentados os resultados obtidos nos testes descritos no Capítulo 7. Os termos f_0 , f_{q0} e f_{p0} referem-se aos valores das funções objetivo total, de produção e pressão, respectivamente, obtidas com o campo inicial, ou seja na primeira iteração do otimizador. Introduzimos também $f_r = \frac{f}{f_0}$, $f_{rq} = \frac{f_q}{f_{q0}}$ e $f_{rp} = \frac{f_p}{f_{p0}}$ a razão entre o valor função objetivo da última iteração e da primeira. Desta forma, são apresentados os valores relativos da função objetivo, ou seja, quanto o otimizador conseguiu decrescê-la com relação ao campo inicial. Além disso, NI é o número de iterações realizadas pelo otimizador até atingir um critério de parada e $T(s)/I$ é o tempo médio gasto em cada iteração da otimização.

8.1 Resultados campo sintético 1

Os resultados incluídos nesta seção referem-se aos testes realizados com campo sintético dado pela Figura 7.1.

8.1.1 Campo inicial igual à média geométrica do campo sintético

Nesta seção apresentamos os resultados obtidos com campo inicial igual à média geométrica do campo sintético. A Tabela 8.1 apresenta algumas informações com relação a este conjunto de testes. Os valores da função objetivo na primeira iteração são $f_0 = 8.066e - 01$, sendo $f_{q0} = 1.37261e - 01$ e $f_{p0} = 6.69339e - 01$.

Podemos ver que, quantitativamente, o caso que mais obteve sucesso foi com número de valores singulares igual a 25, em que a função objetivo relativa da última iteração é igual a $1.8974e - 04$. O caso com número de valores singulares crescente obteve resultado similar, tendo redução final de $2.0822e - 04$.

As Figuras 8.1 e 8.2 apresentam o ajuste obtido para a produção e pressão, onde

Tabela 8.1: Campo inicial igual a média geométrica

VS	f_r	f_{rq}	f_{rp}	NI	T(s)/I
7	1.5379e-02	5.0650e-02	8.1463e-03	33	29.36
15	2.3810e-03	3.9070e-03	2.0680e-03	29	63.59
25	1.8974e-04	2.9941e-04	1.6725e-04	34	92.02
Crescente	2.0822e-04	2.5547e-04	1.9853e-04	99	73.56

podemos visualizar os dados apresentados na Tabela 8.1. As Figuras apresentam uma simulação de 600 dias, 200 dias a mais que a obtenção do histórico, a fim de apresentar a previsão feita pelo simulador.

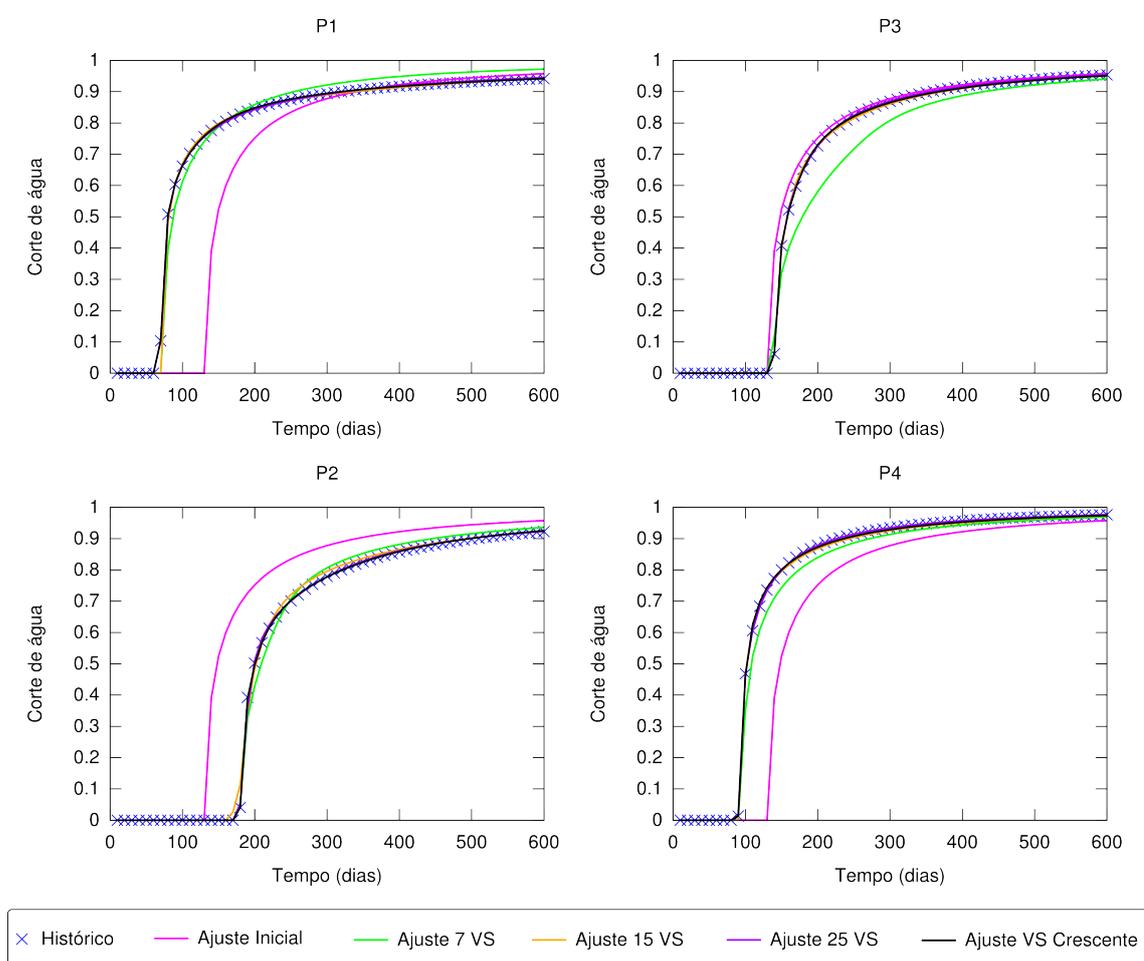


Figura 8.1: Ajuste de produção para campo inicial igual à média geométrica.

As curvas de ajuste podem indicar se a função objetivo foi realmente minimizada. Porém, elas não indicam o quão próximo do campo sintético o otimizador conseguiu chegar. A Figura 8.3 apresenta os campos de permeabilidades encontrados para cada caso.

Visualmente, todos os casos reproduziram de alguma forma o campo sintético. Os detalhes, como o canal, foram melhor reproduzidos com número de valores singulares

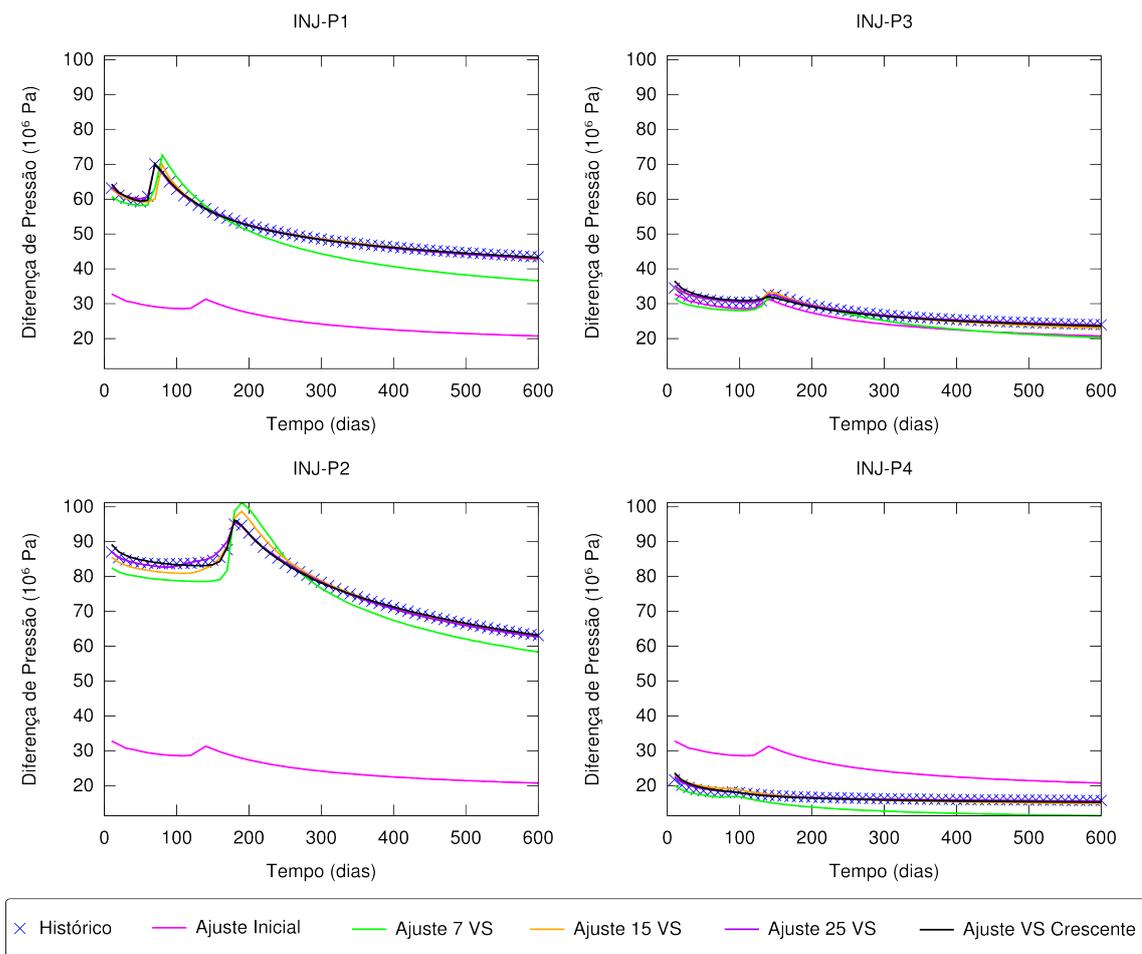


Figura 8.2: Ajuste de pressão para campo inicial igual à média geométrica.

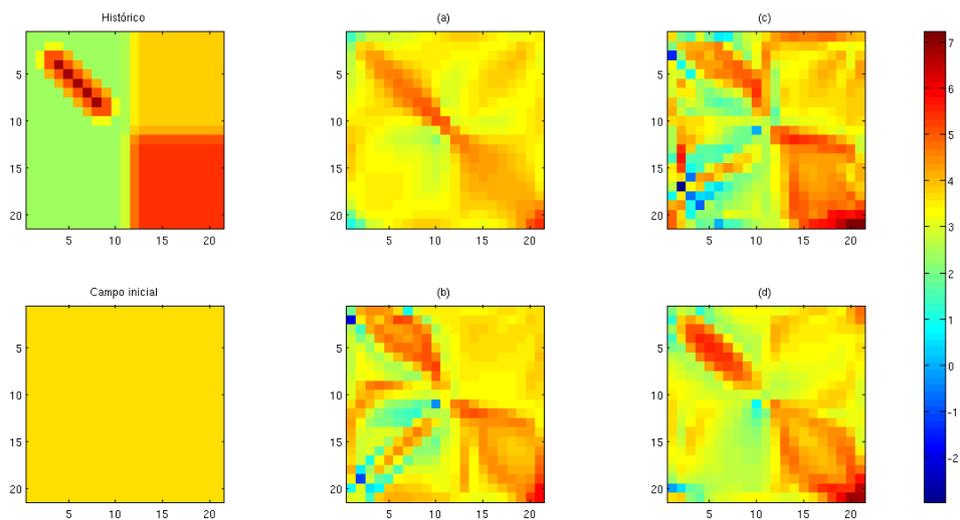


Figura 8.3: Campos de permeabilidades encontrados; (a)7 VS; (b)15 VS; (c)25 VS; (d)VS crescentes.

crecentes e feições de mais baixa resolução estão mais nítidas, como os quadrantes, no caso com 7 valores singulares.

Outras informações interessantes de serem visualizadas são os vetores singulares à direita (V_s) e à esquerda (U_s) obtidos através da decomposição SVD. Os primeiros formam a base do espaço de busca utilizado pelo otimizador e os outros representam a perturbação causada nas observações se aplicarmos aquele vetor. A Figura 8.4 apresenta os oito primeiros vetores singulares à direita da primeira iteração para o caso com 25 valores singulares.

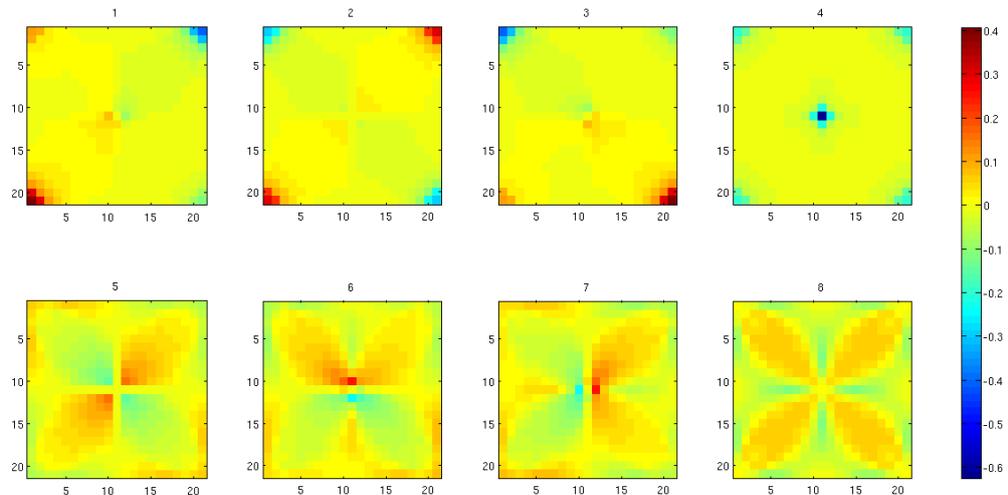


Figura 8.4: 8 primeiros vetores singulares à direita da primeira iteração com VS=25.

Observando a Figura 8.4, o algoritmo parece identificar o fato de que as células dos poços têm grande impacto nas observações, já que os primeiros quatro vetores singulares apresentam pontos isolados na região dos poços.

As Figuras 8.5 e 8.6 apresentam o resultado da aplicação de cada um destes vetores nos dados observados de produção (U_q) e pressão (U_p), respectivamente.

A Tabela 8.2 apresenta as normas $\|U_q\|$ e $\|U_p\|$ para a primeira iteração.

Tabela 8.2: Norma dos vetores singulares à esquerda

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8
$\ U_q\ $	1.26e-01	1.41e-01	1.26e-01	1.35e-02	9.61e-01	9.63e-01	9.63e-01	9.93e-01
$\ U_p\ $	9.92e-01	9.90e-01	9.92e-01	1.00e+00	2.77e-01	2.71e-01	2.71e-01	1.21e-01

Podemos perceber que os vetores singulares à direita têm seus efeitos concentrados ou na pressão ou na vazão. Os primeiros quatro vetores singulares tem grande efeito sobre a pressão e pouco sobre a vazão. Estes são justamente os campos que parecem priorizar

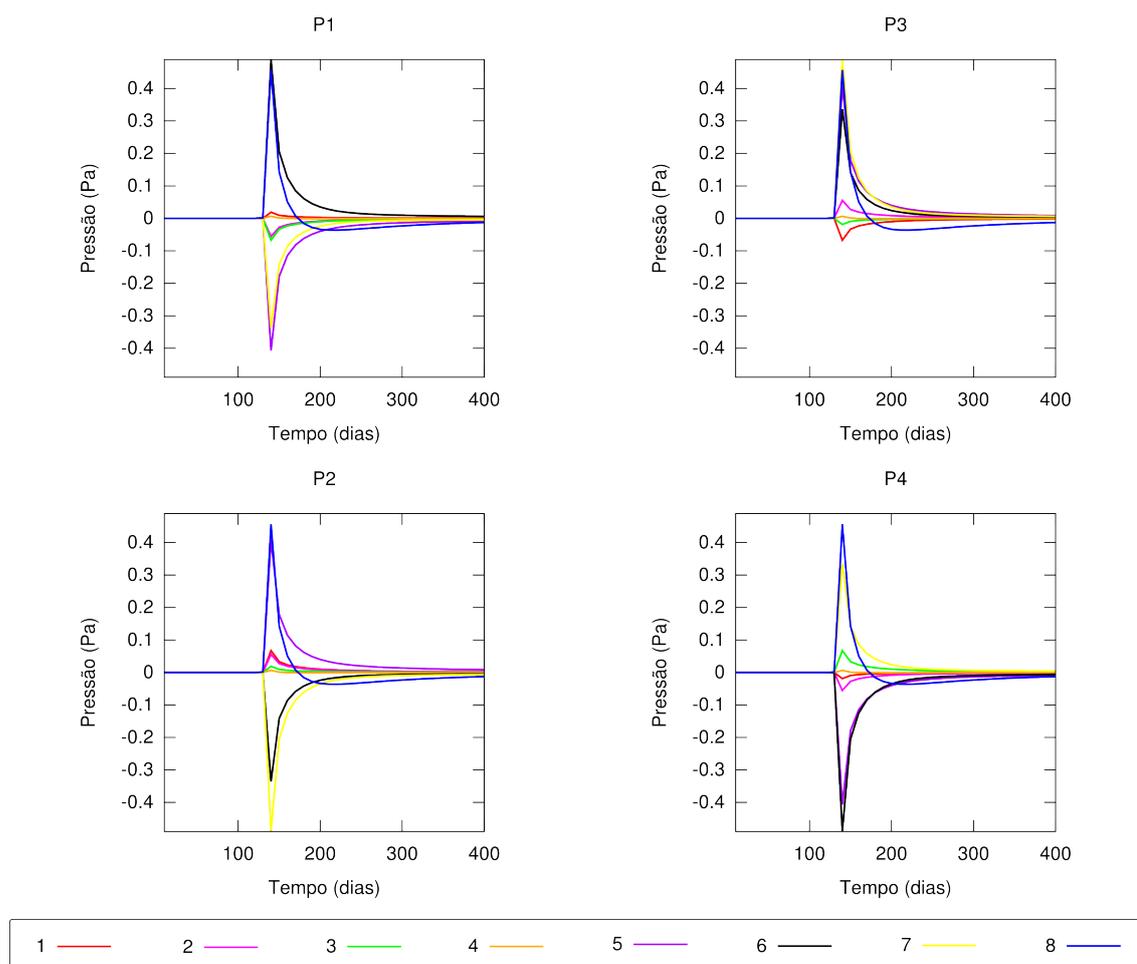


Figura 8.5: 8 primeiros vetores singulares à esquerda, relacionados à produção, da primeira iteração com $VS=25$.

as regiões dos poços. Já os quatro vetores singulares seguintes exercem maior efeito na vazão e menor na pressão. Estes são os vetores singulares à esquerda relativos aos vetores singulares à direita que identificam canais ligando o poço injetor aos poços produtores, como pode ser observado na Figura 8.4.

A Figura 8.7 apresenta os oito primeiros vetores singulares relativos à última iteração do otimizador com número de valores singulares igual a 25.

Podemos observar que novamente aparecem singularidades nas regiões dos poços, mais ainda que a observada na primeira iteração. De fato, estas células exercem grande impacto nas observações.

As Figuras 8.8 e 8.9 apresentam os vetores singulares à esquerda referentes à produção e pressão, respectivamente.

A Tabela 8.3 apresenta as normas dos vetores U_q e U_p para a última iteração.

Podemos observar nesta última iteração que os efeitos dos vetores singulares à direita

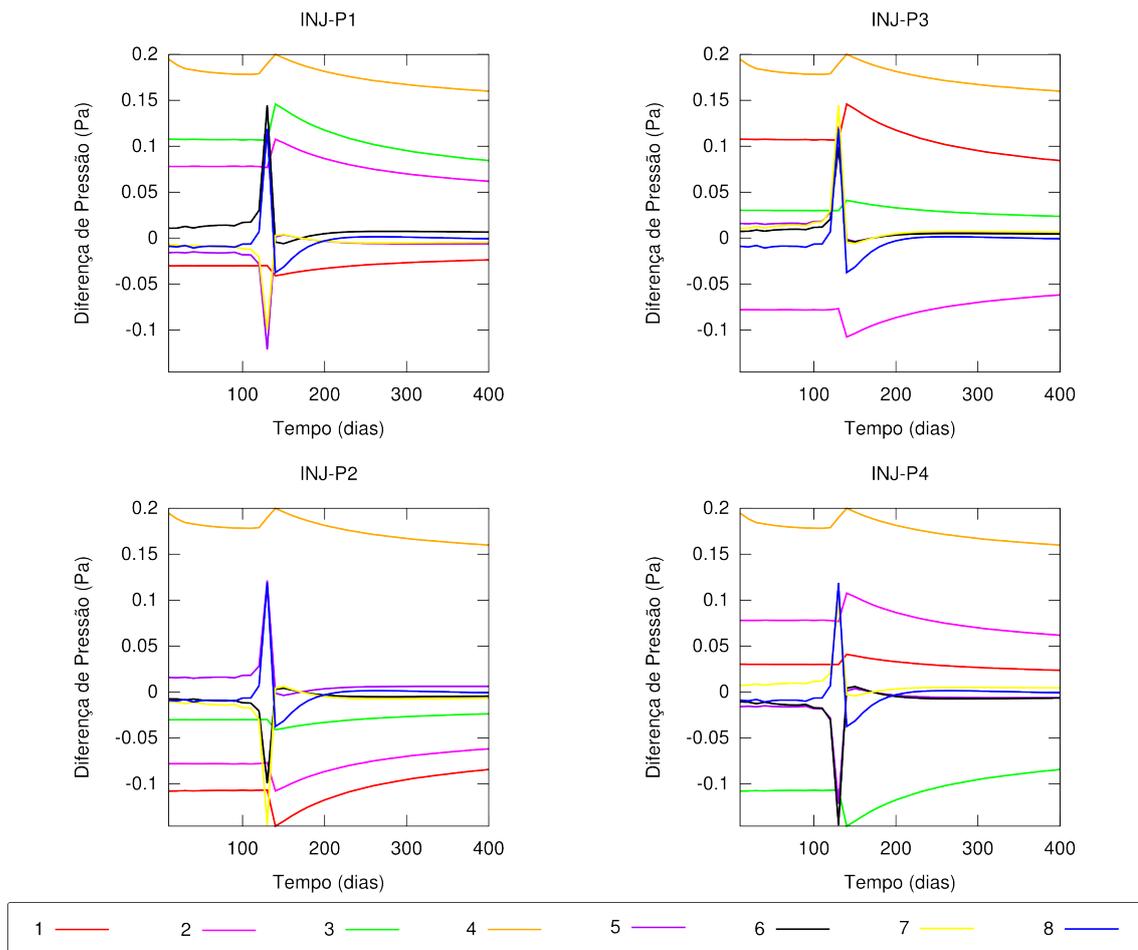


Figura 8.6: 8 primeiros vetores singulares à esquerda, relacionados à pressão, da primeira iteração com $VS=25$.

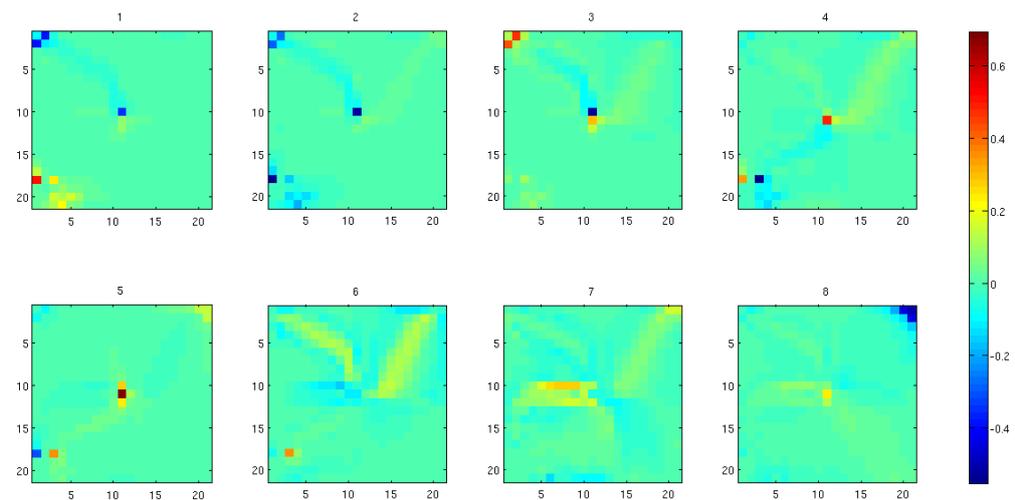


Figura 8.7: 8 primeiros vetores singulares à direita da última iteração com $VS=25$.

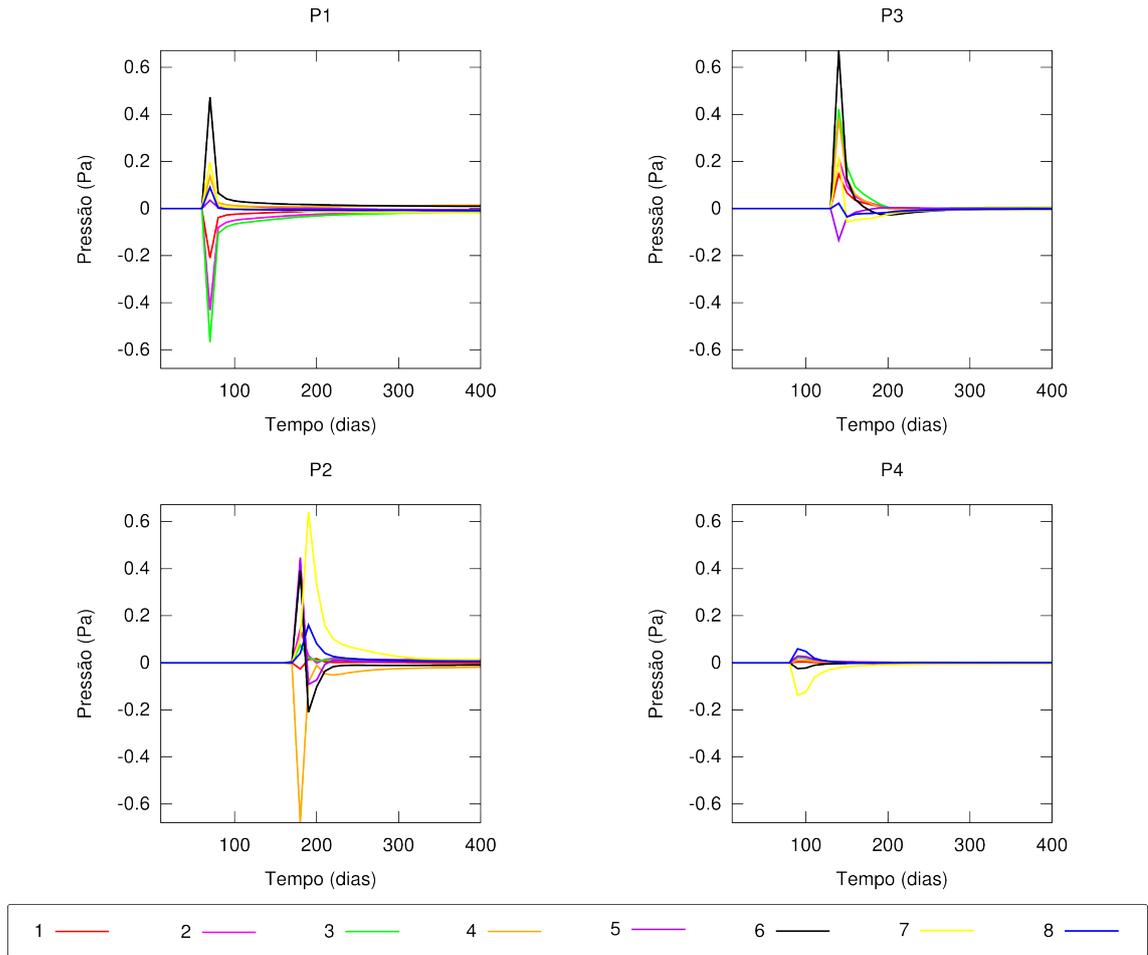


Figura 8.8: 8 primeiros vetores singulares à esquerda, relacionados à produção, da última iteração com $VS=25$.

Tabela 8.3: Norma dos vetores singulares à esquerda

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8
$\ u_q\ $	2.83e-01	5.52e-01	7.80e-01	8.24e-01	4.88e-01	9.61e-01	8.62e-01	2.43e-01
$\ u_p\ $	9.59e-01	8.34e-01	6.26e-01	5.67e-01	8.73e-01	2.75e-01	5.07e-01	9.70e-01

nas observações de vazão e pressão são mais distribuídos que na primeira iteração.

8.1.2 Campo inicial igual ao valor mínimo do campo sintético

Nesta seção serão apresentados alguns dos resultados obtidos para o campo inicial igual ao menor valor existente no campo sintético. A Tabela 8.4 apresenta dados referentes ao otimizador. O valor da função objetivo na primeira iteração é $f_0 = 1.22598e + 00$, sendo $f_{q0} = 1.37261e - 01$ e $f_{p0} = 1.08872e + 00$.

Neste caso obtemos resultados quantitativos semelhantes ao apresentado para o campo inicial igual à média geométrica. Mais uma vez, o melhor ajuste foi com 25 valores singulares.

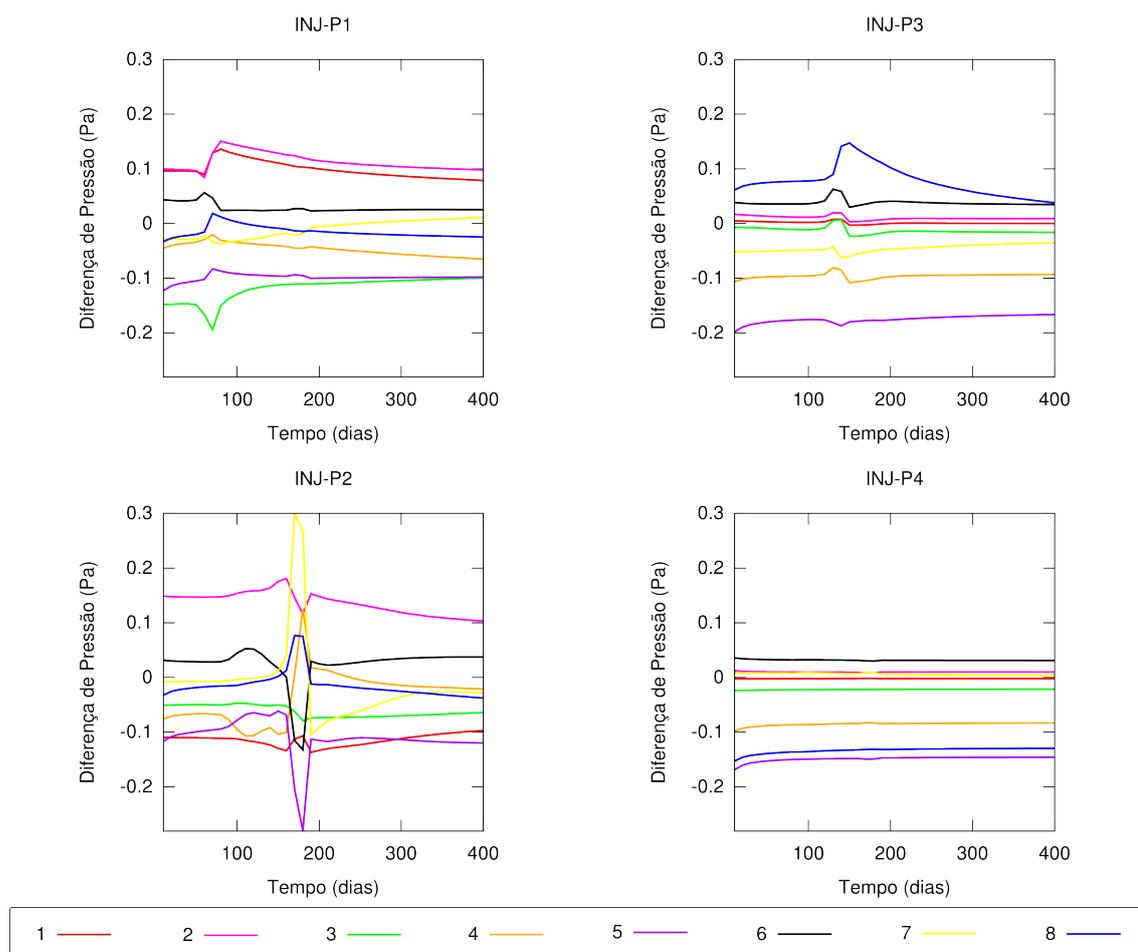


Figura 8.9: 8 primeiros vetores singulares à esquerda, relacionados à pressão, da última iteração com $VS=25$.

Tabela 8.4: Campo inicial igual ao mínimo

VS	f_r	f_{rq}	f_{rp}	NI	T(s)/I
7	6.2878e-03	2.6359e-02	3.7573e-03	24	28.72
15	9.1269e-04	5.7433e-04	9.5535e-04	34	56.38
25	1.1950e-04	1.8844e-04	1.1081e-04	36	94.93
Crescente	5.9831e-04	4.4024e-04	6.1823e-04	81	45.96

As Figuras 8.10 e 8.11 apresentam as curvas de ajuste para cada caso e uma predição de 200 dias.

A Figura 8.12 apresenta os campos de permeabilidade encontrados para cada caso.

Diferente do que foi mostrado para o caso anterior, os campos estimados ficaram mais distantes do sintético, apesar de o ajuste ter sido equivalente para os dois casos.

8.1.3 Campo inicial igual ao valor máximo do campo sintético

Nesta seção serão apresentados os resultados obtidos com campo inicial igual ao maior valor do campo sintético. A Tabela 8.5 apresenta os resultados obtidos neste caso. O valor

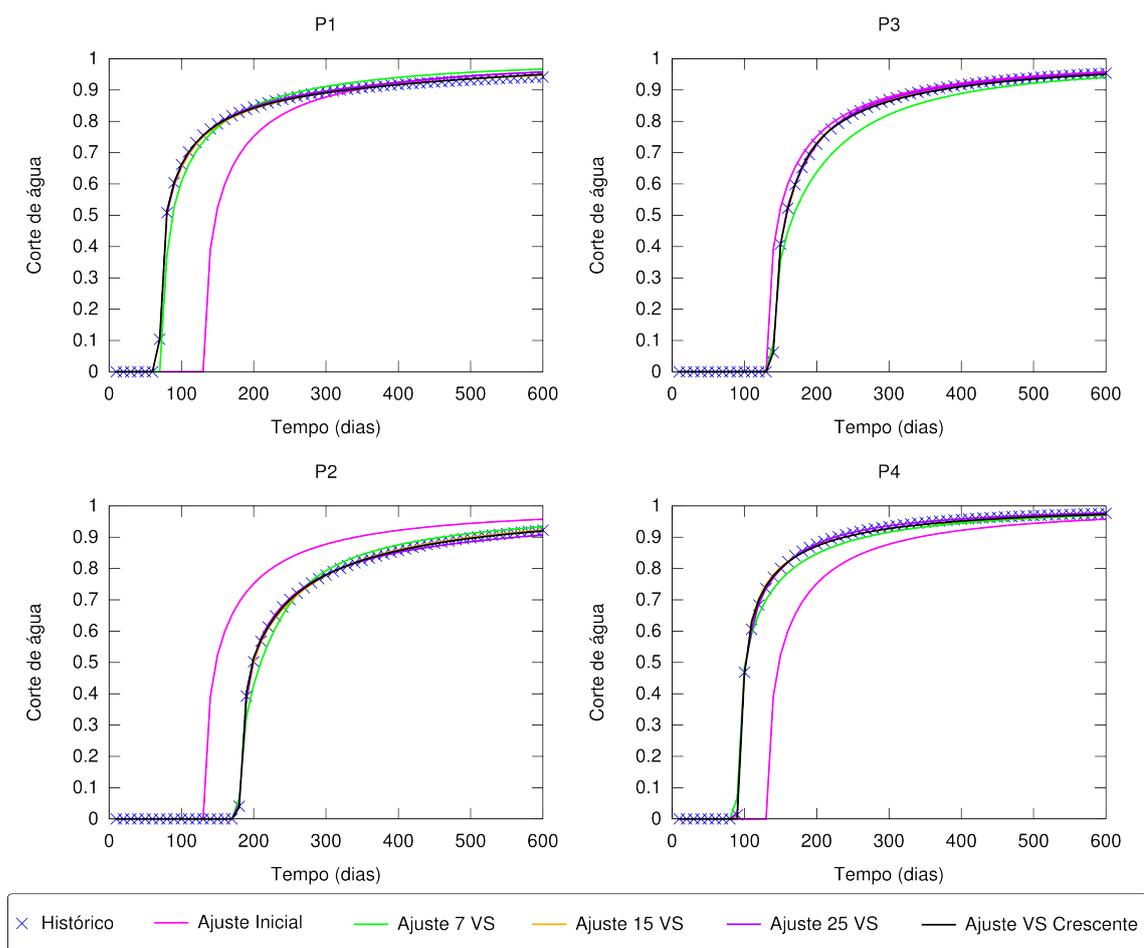


Figura 8.10: Ajuste de produção para campo inicial igual ao mínimo.

da função objetivo na primeira iteração é $f_0 = 1.12074e + 00$, sendo $f_{q0} = 1.37261e - 01$ e $f_{p0} = 9.83477e - 01$.

Tabela 8.5: Campo inicial igual ao máximo

VS	f_r	f_{rq}	f_{rp}	NI	T(s)/I
7	8.7664e-01	2.9829e-03	9.9857e-01	30	33.12
15	7.8881e-01	1.1746e-02	8.9727e-01	50	63.69
25	2.3996e-03	4.9945e-03	2.0375e-03	25	84.13
Crescente	1.6894e-02	3.4790e-03	1.8766e-02	115	60.77

As Figuras 8.13 e 8.14 apresentam as curvas de ajuste para a produção e pressão, respectivamente, além da predição de 200 dias.

Diferente dos casos anteriores, os ajustes obtidos não foram satisfatórios para todos os casos. O melhor ajuste foi obtido com 25 valores singulares. Com 7 e 15 valores singulares, o otimizador não consegue melhorar o ajuste da pressão com relação ao campo inicial.

A Figura 8.15 apresenta os campos de permeabilidade encontrados para cada caso.

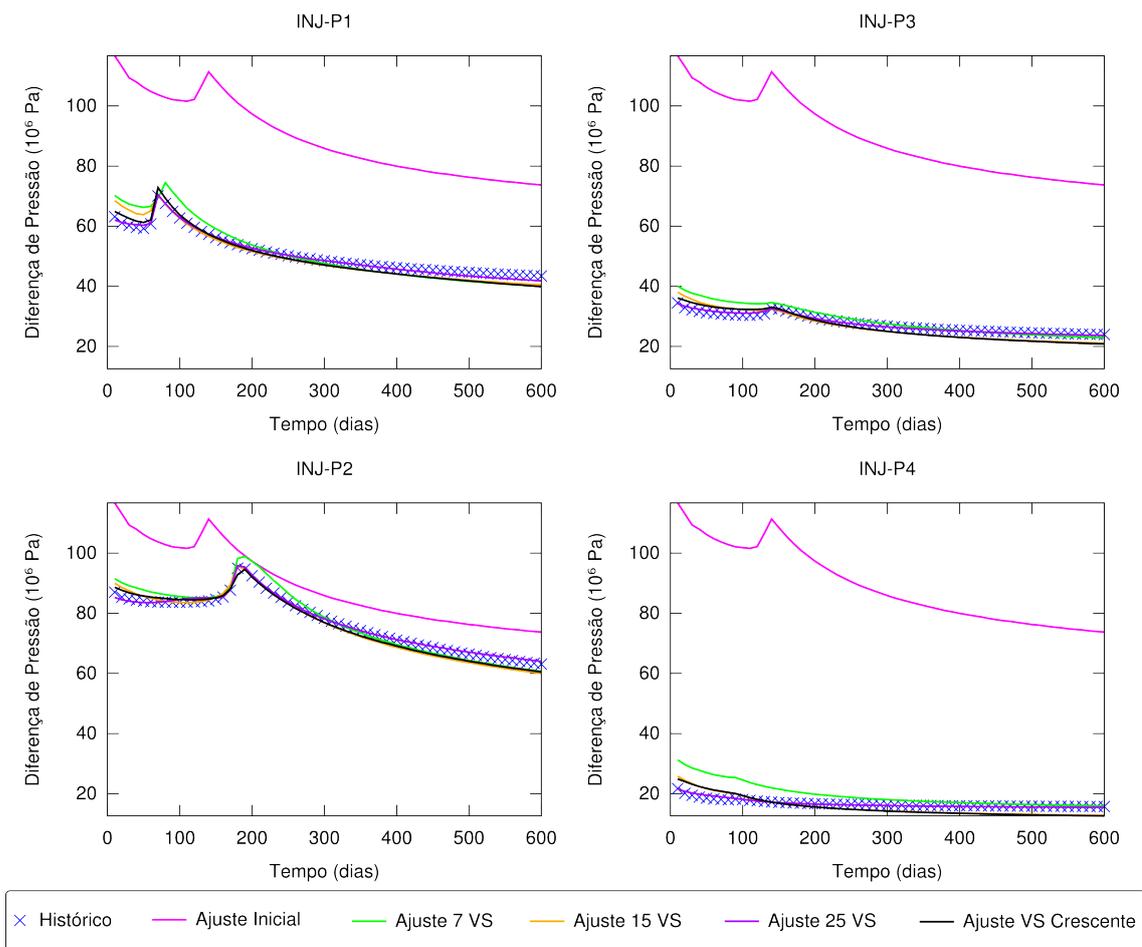


Figura 8.11: Ajuste de pressão para campo inicial igual ao mínimo.

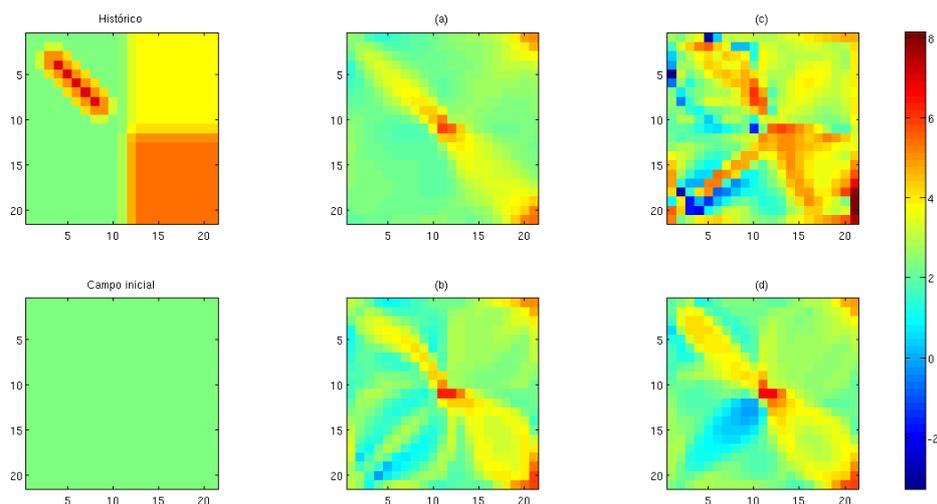


Figura 8.12: Campos de permeabilidades encontrados; (a)7 VS; (b)15 VS; (c)25 VS; (d)VS crescentes.

Podemos observar que nenhum dos campos encontrados retrata bem o campo sintético.

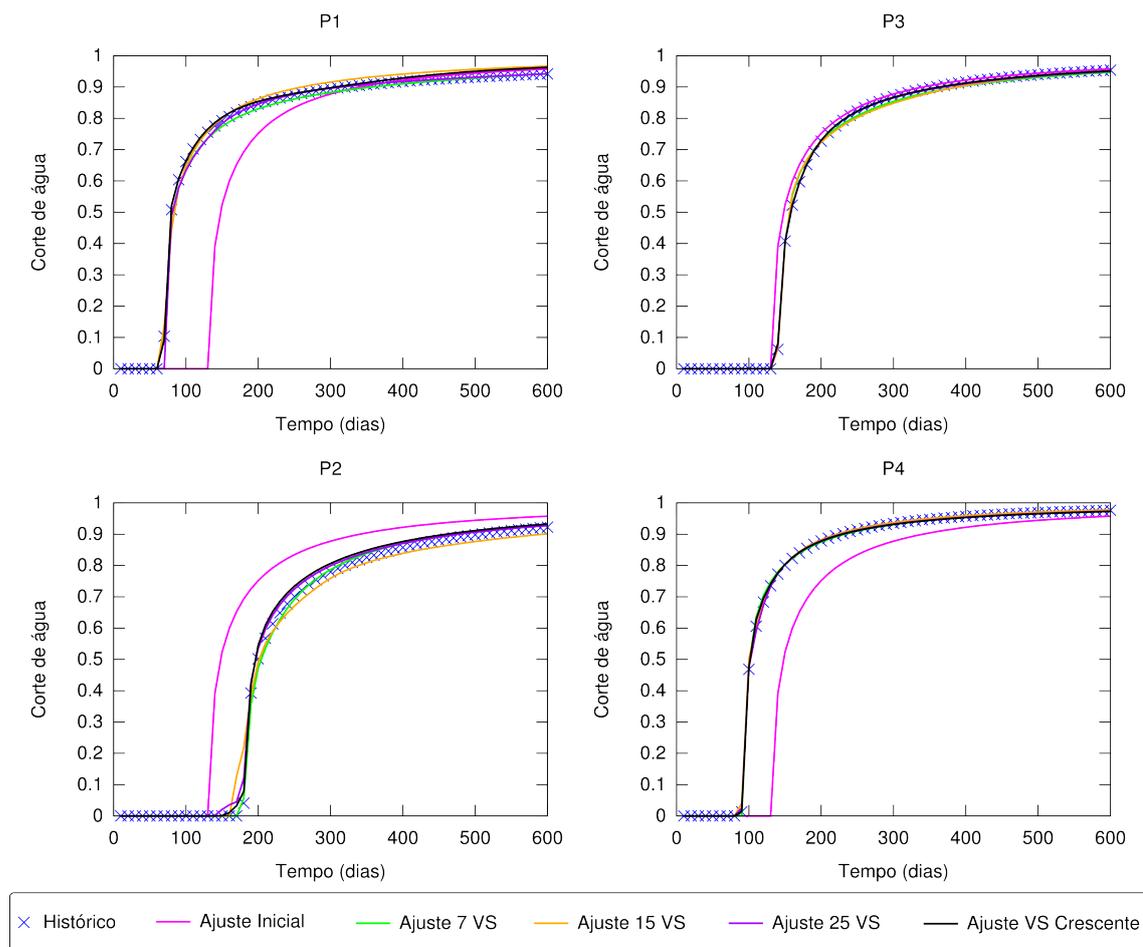


Figura 8.13: Ajuste de produção para campo inicial igual ao máximo.

8.2 Resultados campo sintético 2

Esta seção apresenta os resultados obtidos para o campo sintético apresentado na Figura 7.7. Os resultados são bastante similares aos obtidos para os casos anteriores. Por isso, aqui apresentamos apenas os dados referentes ao melhor caso obtido, com campo inicial igual à média geométrica. O restante dos resultados encontra-se no Apêndice A.

8.2.1 Campo inicial igual a média geométrica do campo sintético

A Tabela 8.6 apresenta os resultados obtidos para a otimização com campo inicial igual à média geométrica do campo sintético.

Tabela 8.6: Campo inicial igual a média geométrica

VS	f_r	f_{rq}	f_{rp}	NI	T(s)/I
7	3.3875e-02	6.3416e-02	1.1010e-02	20	29.60
15	1.0763e-03	8.0289e-04	1.2879e-03	15	60.28
25	1.7985e-03	8.4626e-04	2.5355e-03	20	105.76
Crescente	2.6641e-04	7.5795e-05	4.1395e-04	42	51.33

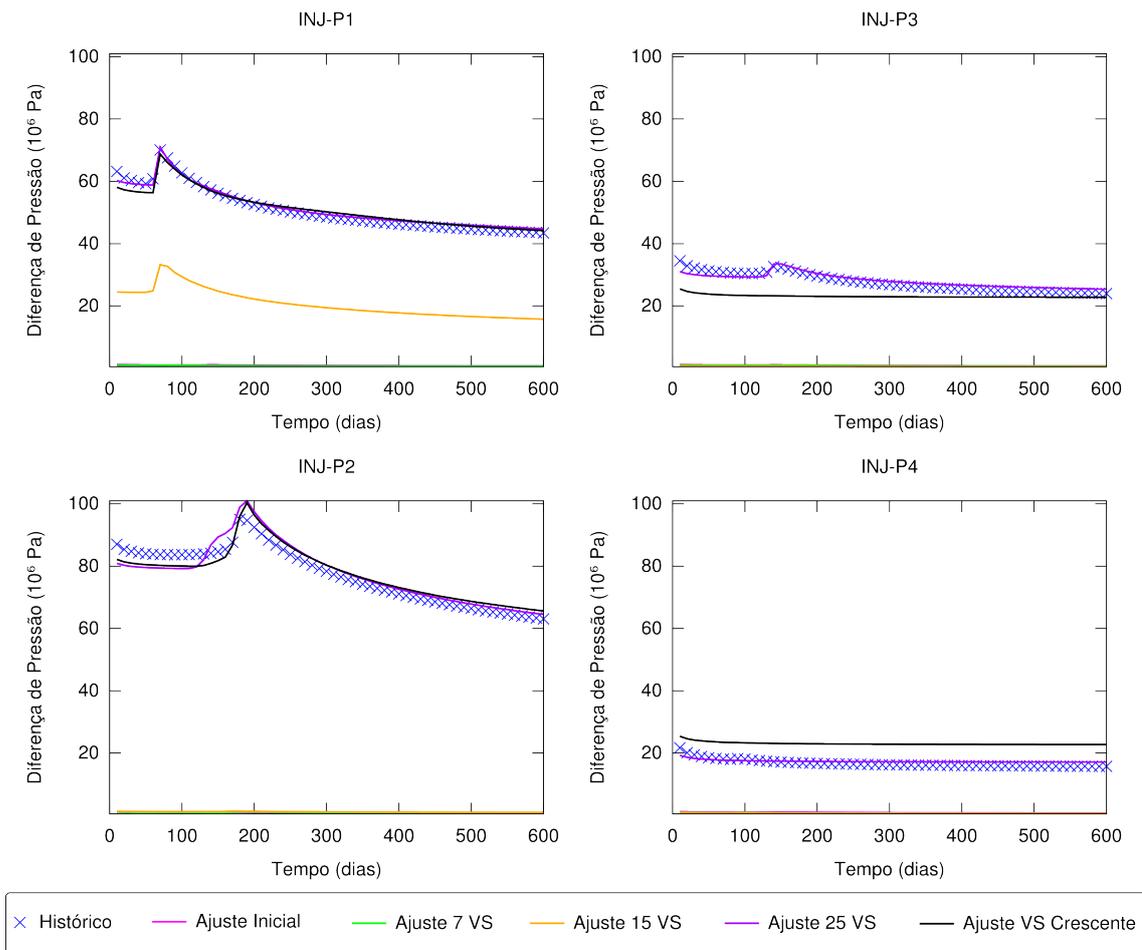


Figura 8.14: Ajuste de pressão para campo inicial igual ao máximo.

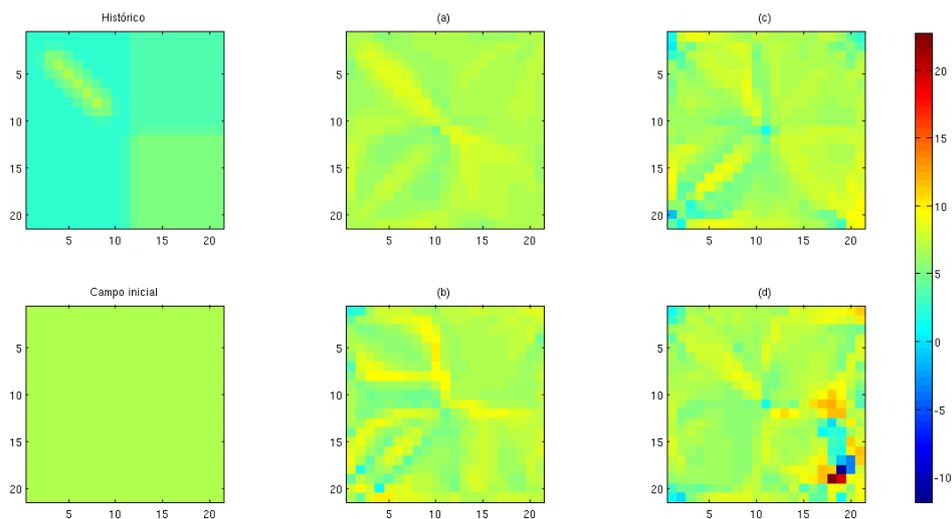


Figura 8.15: Campos de permeabilidades encontrados; (a)7 VS; (b)15 VS; (c)25 VS; (d)VS crescentes.

O melhor ajuste foi obtido com a estratégia de números singulares crescentes, onde a função objetivo decresceu $2.6641e-04$ vezes. As Figuras 8.16 e 8.17 apresentam as curvas de ajuste para a produção e pressão, respectivamente.

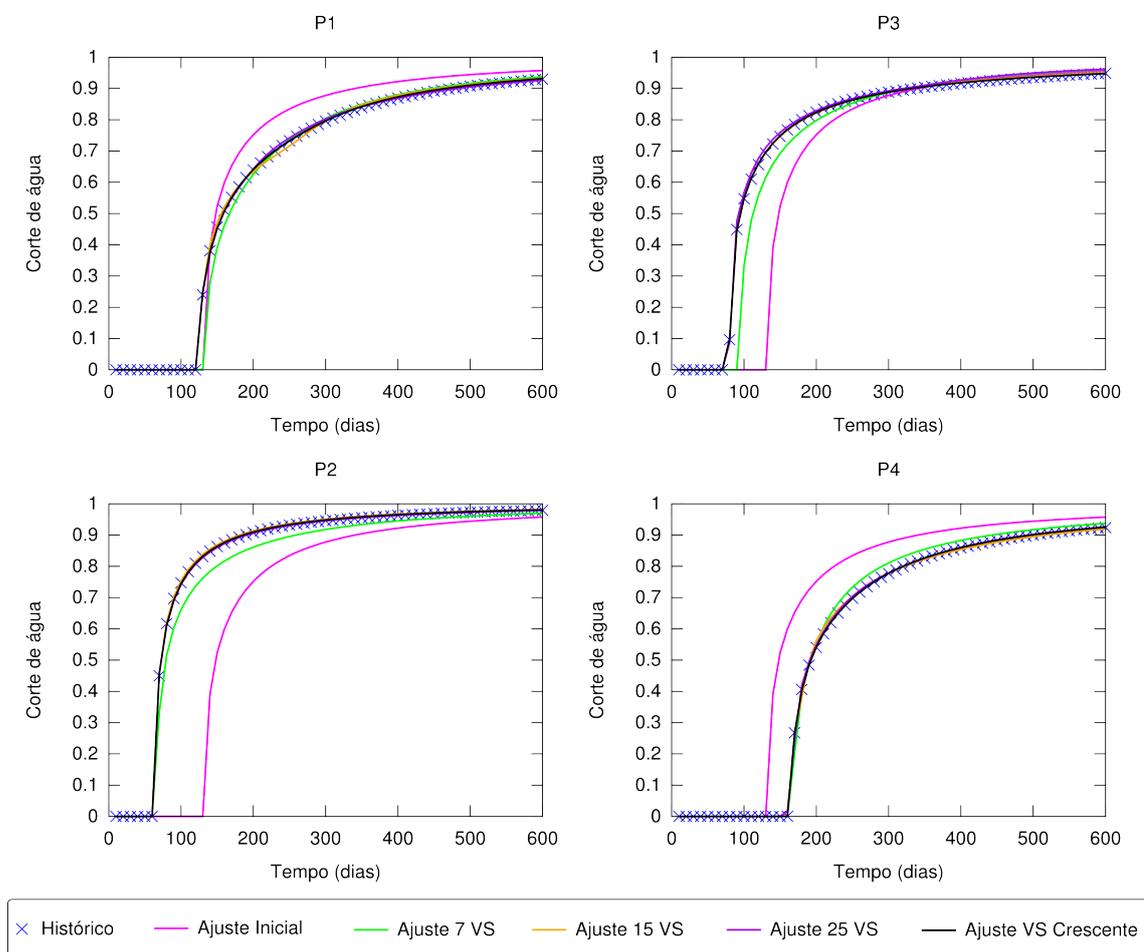


Figura 8.16: Ajuste de produção para campo inicial igual à média geométrica.

A Figura 8.18 apresenta os campos de permeabilidade estimados para todos os casos. Apenas o canal que apresenta conexão direta entre o poço injetor e um dos poços produtores é claramente detectado nos casos com 7 valores singulares e com valores singulares crescentes.

A forma como o algoritmo reproduz o segundo canal é com outros dois canais, que ligam o poço injetor aos poços P1 e P2. Isso pode ser entendido observando que os quatro últimos vetores singulares à direita que aparecem na Figura 8.19 parecem priorizar as conexões entre os poços.

Além disso, mais uma vez podemos verificar pela Figura 8.19 que os primeiros vetores singulares dão prioridade às células dos poços.

As Figuras 8.20 e 8.21 apresentam o resultado da aplicação de cada um destes vetores nos dados observados de produção e pressão, respectivamente.

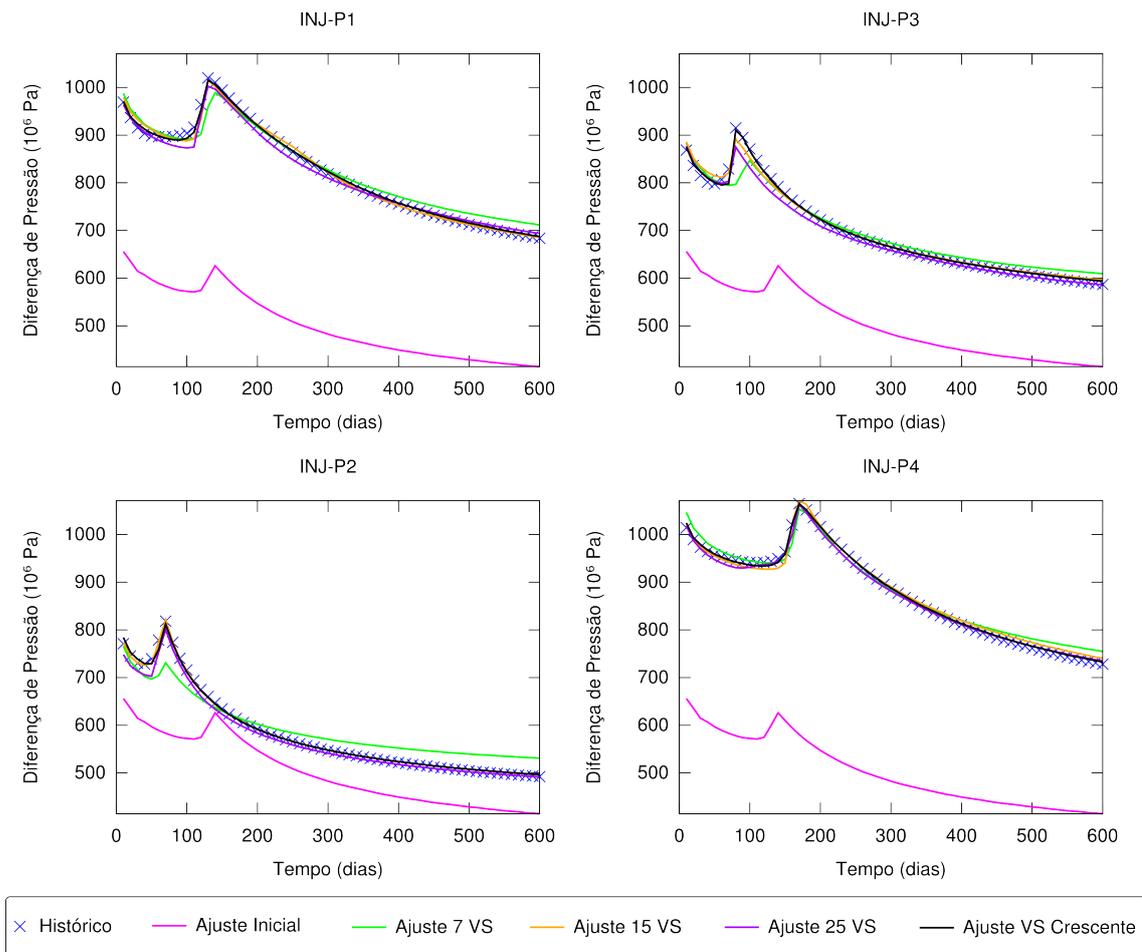


Figura 8.17: Ajuste de pressão para campo inicial igual à média geométrica.

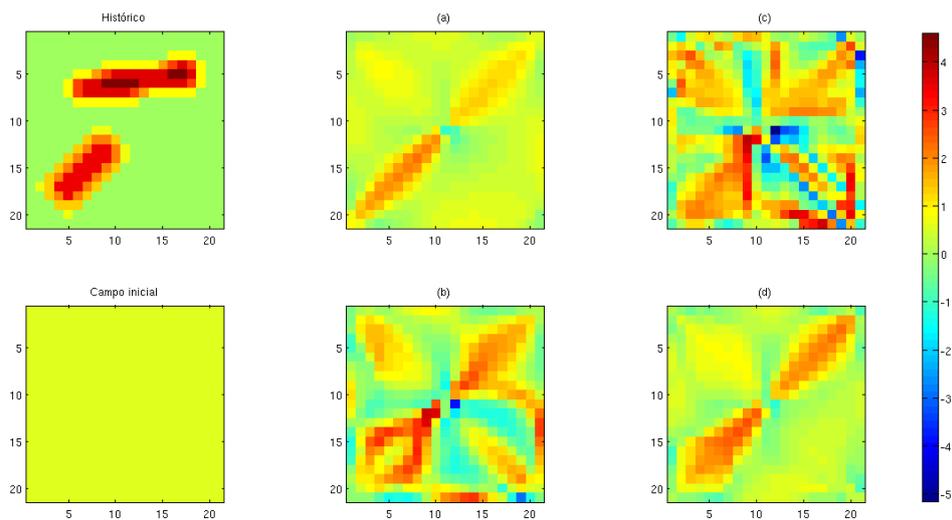


Figura 8.18: Campos de permeabilidades para campo inicial igual à média geométrica; (a)7 VS; (b)15 VS; (c)25 VS; (d)VS crescentes.

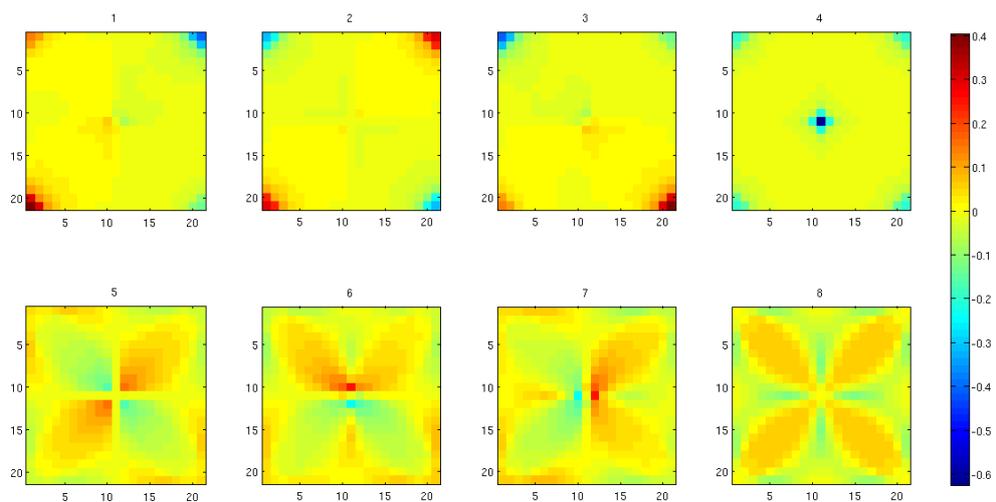


Figura 8.19: 8 primeiros vetores singulares à direita da primeira iteração com $VS=25$.

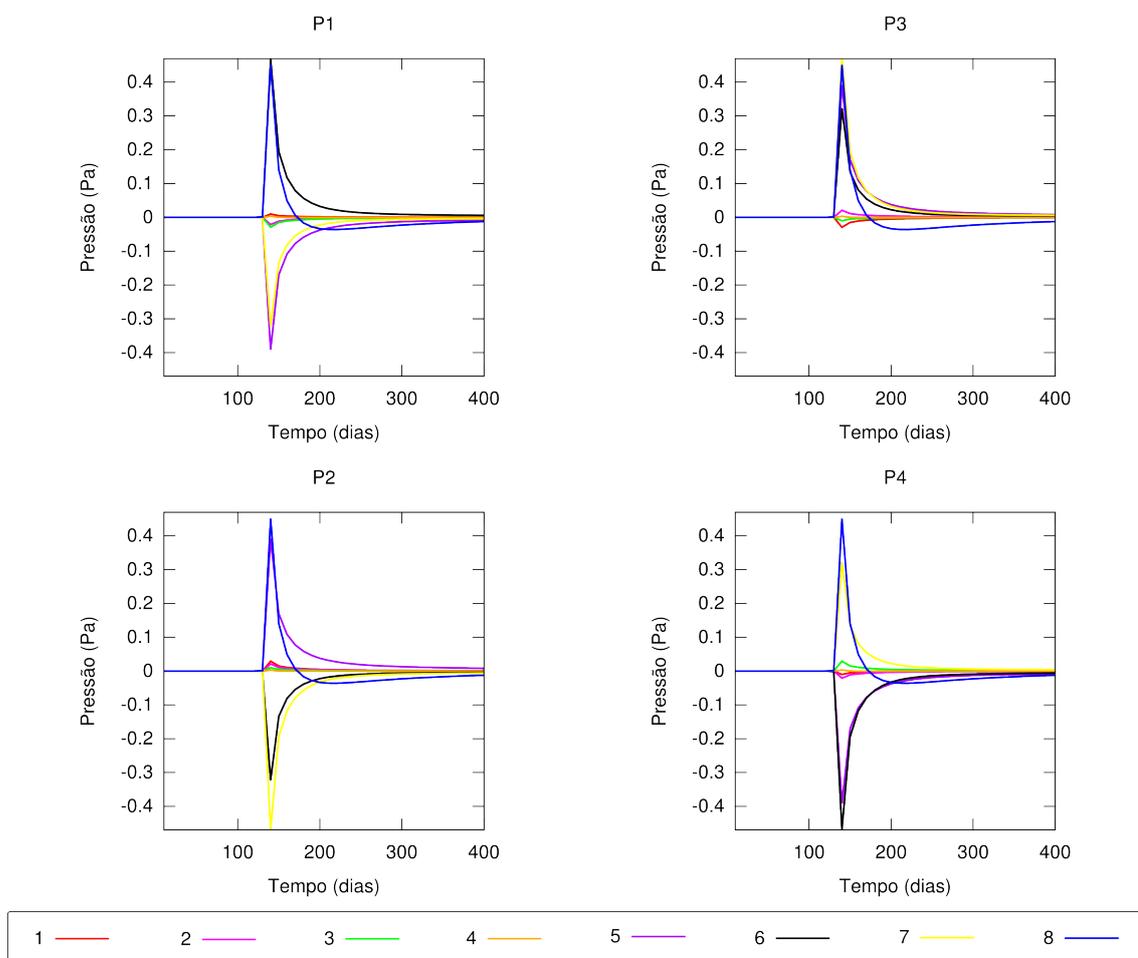


Figura 8.20: 8 primeiros vetores singulares à esquerda, relacionados à produção, da primeira iteração com $VS=25$.

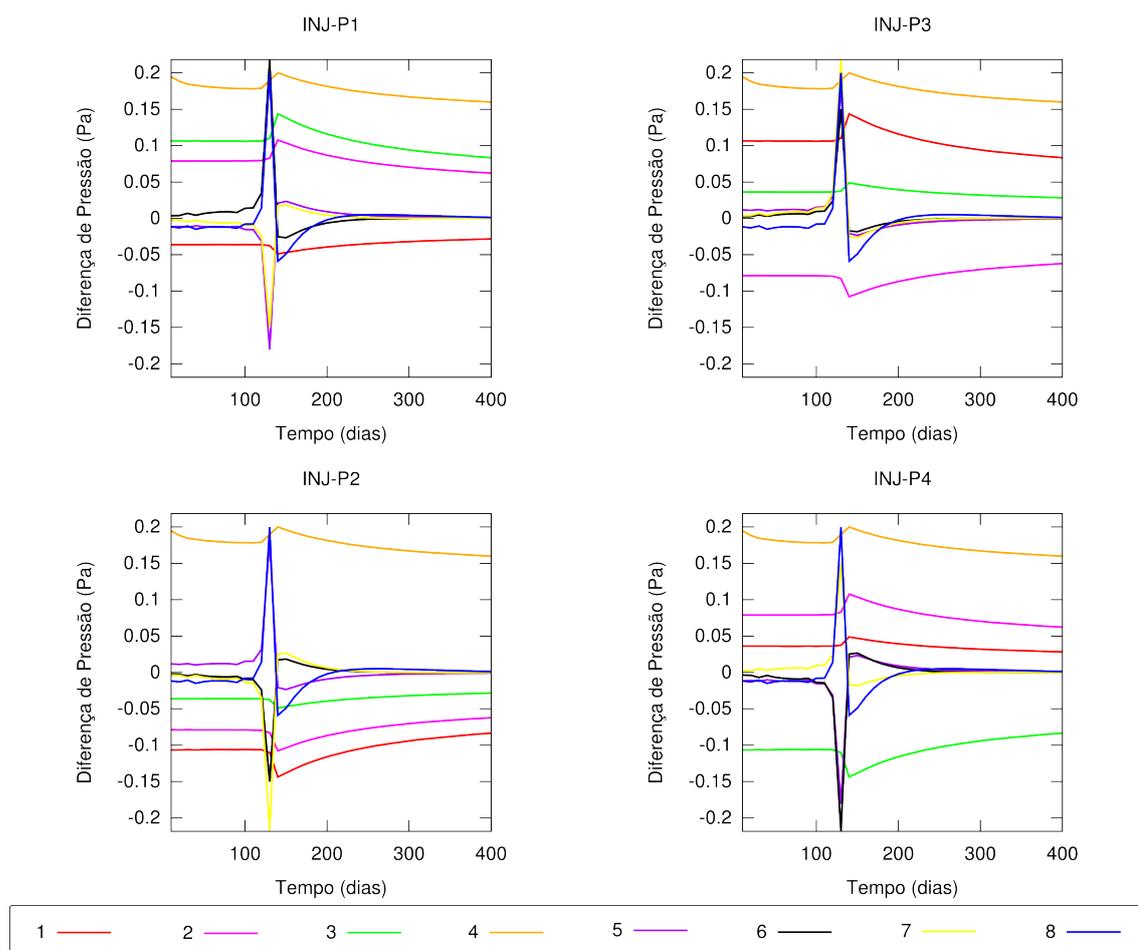


Figura 8.21: 8 primeiros vetores singulares à esquerda, relacionados à pressão, da primeira iteração com $VS=25$.

A Tabela 8.7 apresenta as normas dos vetores U_q e U_p para cada um dos vetores singulares à esquerda.

Tabela 8.7: Norma dos vetores singulares à esquerda da primeira iteração

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8
$\ u_q\ $	5.79e-02	5.64e-02	5.79e-02	6.47e-03	9.22e-01	9.20e-01	9.20e-01	9.78e-01
$\ u_p\ $	9.98e-01	9.98e-01	9.98e-01	9.99e-01	3.88e-01	3.92e-01	3.92e-01	1.99e-01

Mais uma vez, podemos verificar que, na primeira iteração, a influência exercida pelos vetores singulares à direita concentram-se ou na produção ou na pressão. A influência sobre a pressão é muito grande nos quatro primeiros vetores singulares, enquanto e os quatro restantes exercem influência muito maior na produção.

A Figura 8.22 apresenta os oito primeiros vetores singulares relativos à última iteração do otimizador com número de valores singulares igual a 25.

Observamos um caso muito semelhante ao do anterior, em que na última iteração da otimização aparecem nos vetores singulares à direita ainda mais singularidades nos

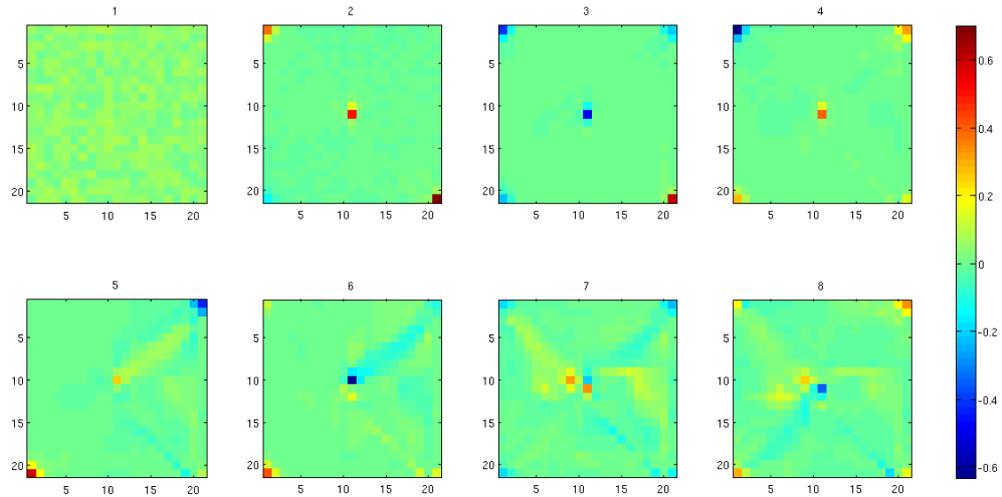


Figura 8.22: 8 primeiros vetores singulares à direita da última iteração com $VS=25$.

poços que na primeira iteração. Observemos as Figuras 8.23 e 8.24 apresentam os valores singulares à esquerda referentes à produção e pressão, respectivamente.

A Tabela 8.8 apresenta as normas dos vetores singulares à esquerda na última iteração.

Tabela 8.8: Norma dos vetores singulares à esquerda da última iteração

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8
$\ u_q\ $	2.60e-02	1.28e-01	2.75e-01	5.92e-01	2.24e-01	7.53e-01	7.54e-01	4.68e-01
$\ u_p\ $	1.00e+00	9.92e-01	9.61e-01	8.06e-01	9.75e-01	6.58e-01	6.57e-01	8.84e-01

Mais uma vez, podemos observar que existe um equilíbrio maior entre a influência exercida pelos vetores singulares à esquerda na pressão e produção, basta olharmos os valores de $\|U_q\|$ e $\|U_p\|$ de V_6 e V_7 , por exemplo.

8.2.2 Exemplo 51×51

Foi realizado apenas um teste para malha 51×51 . O campo inicial é igual à média geométrica do campo sintético e a mesma estratégia de valores singulares crescente utilizado nos demais testes foi aqui utilizado. Os valores das funções objetivos obtidas foram $f_r = 7.52926e - 04$, $f_{rq} = 8.7560e - 05$ e $f_{rp} = 6.6537e - 04$.

As Figuras 8.25 e 8.26 apresentam os ajustes obtidos neste teste.

A Figura 8.27 apresenta o campo de permeabilidade estimado para este caso.

Mesmo tendo 2061 parâmetros a estimar, o algoritmo se comportou de forma equivalente ao caso com 441 parâmetros, sem que fosse necessário aumentar o número de valores singulares utilizados.

As Figuras 8.28, 8.29, 8.30 apresentam os primeiros vetores singulares à direita da

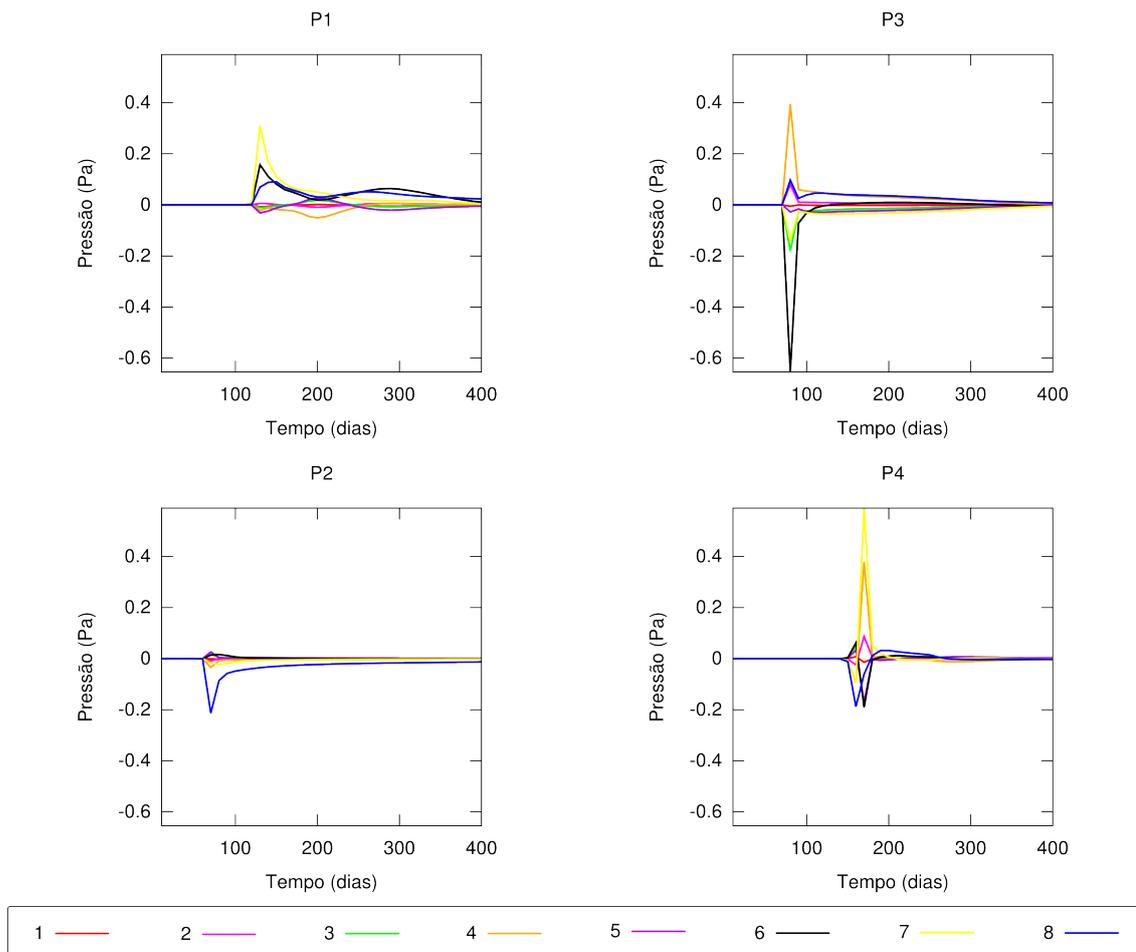


Figura 8.23: 8 primeiros vetores singulares à esquerda, relacionados à produção, da última iteração com $VS=25$.

primeira iteração com 2, 4 e 8 valores singulares, respectivamente.

Assim como nos casos analisados anteriormente, com malhas mais grosseiras, os vetores singulares à direita neste caso com malha mais refinada parecem priorizar as células dos poços e os canais entre poço injetor e produtores.

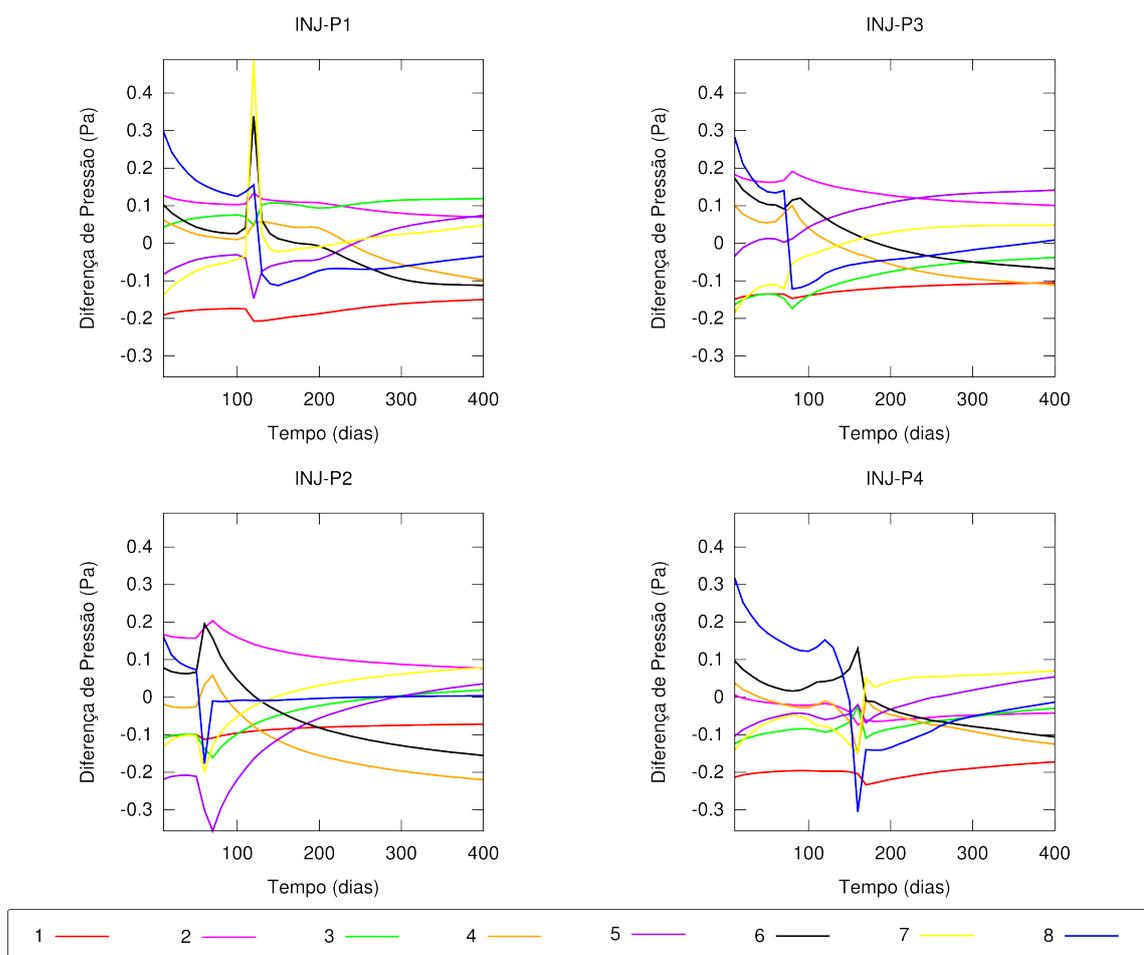


Figura 8.24: 8 primeiros vetores singulares à esquerda, relacionados à pressão, da última iteração com $VS=25$.

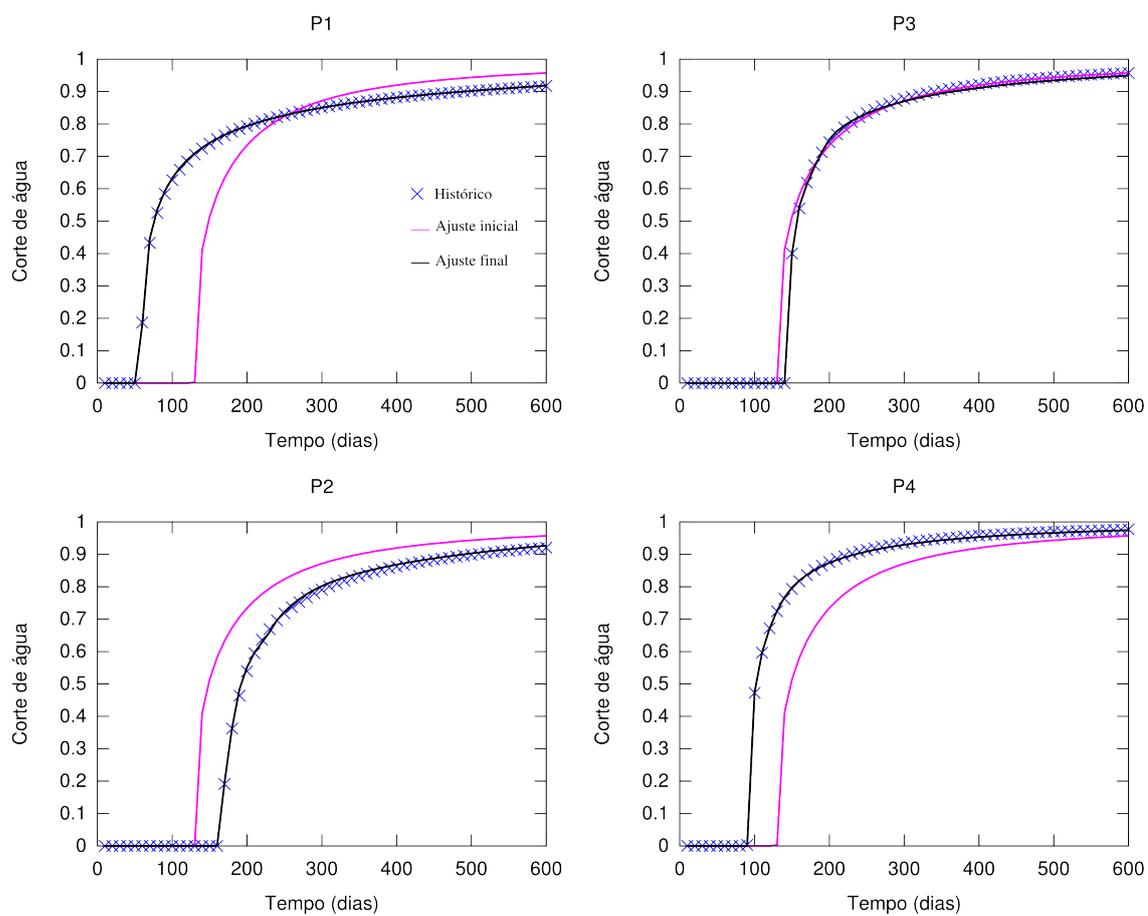


Figura 8.25: Ajuste de produção para campo inicial igual ao mínimo.

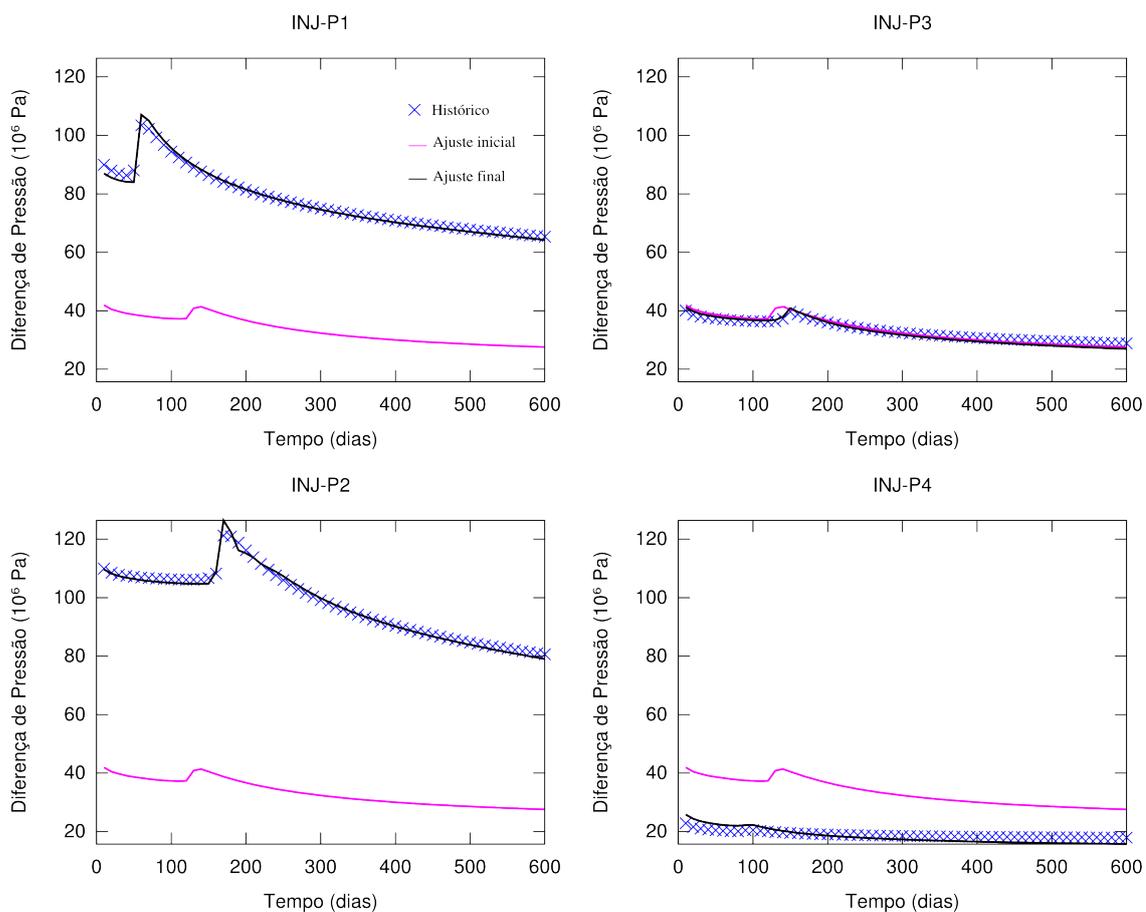


Figura 8.26: Ajuste de produção para campo inicial igual ao mínimo.

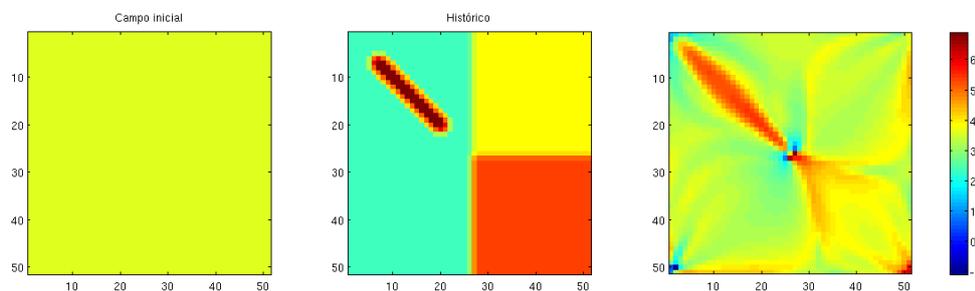


Figura 8.27: Campo de permeabilidade estimado 51 × 51.

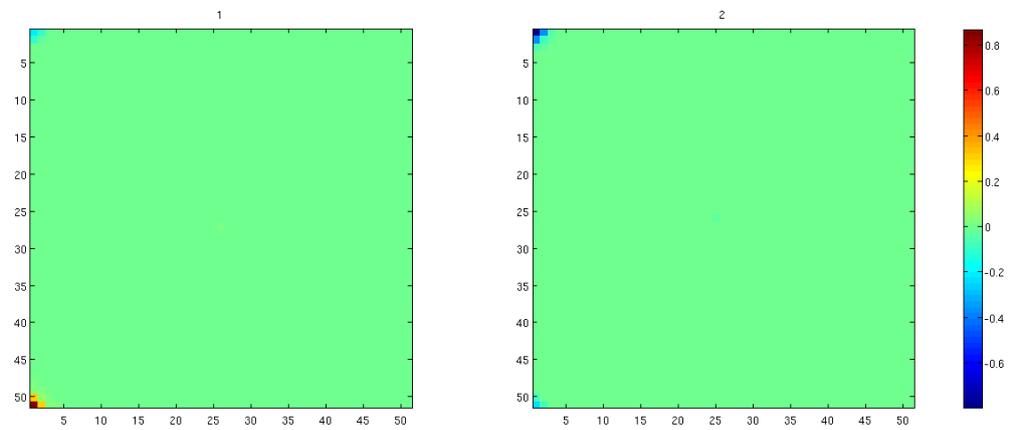


Figura 8.28: 2 primeiros vetores singulares à direita da primeira iteração, $VS=2$.

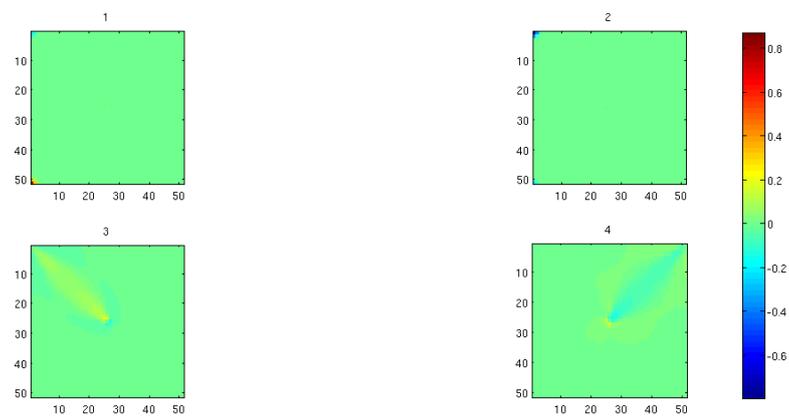


Figura 8.29: 4 primeiros vetores singulares à direita da primeira iteração, $VS=4$.

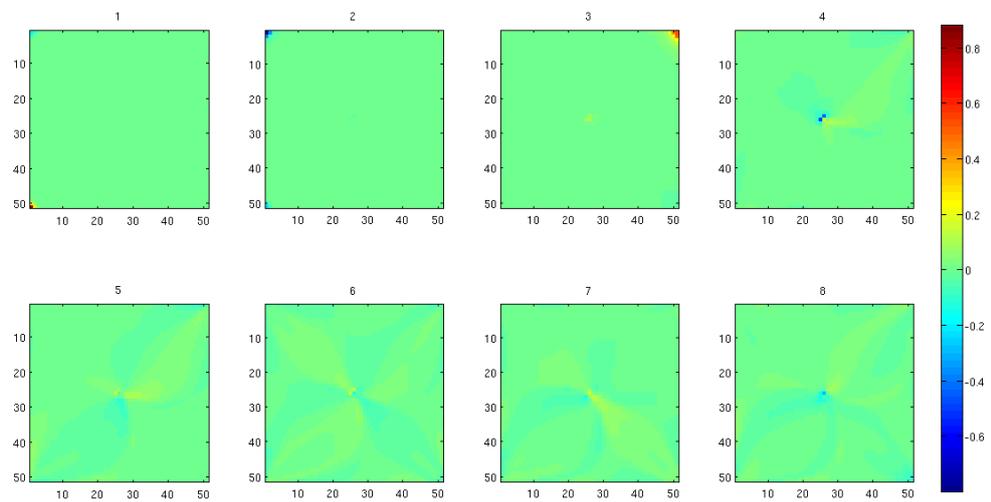


Figura 8.30: 8 primeiros vetores singulares à direita da primeira iteração, $VS=8$.

CAPÍTULO 9

DISCUSSÃO

No Capítulo 8 apresentamos dois conjuntos de testes com campos sintéticos diferentes, e ainda um teste complementar para observarmos o comportamento do método TSVD com malhas mais refinadas. Utilizamos três campos iniciais distintos e quatro estratégias distintas com relação ao número de valores singulares. As Tabelas 9.1 e 9.2 apresentam os valores da função objetivo total relativa para todos os campos iniciais utilizados referentes aos campos sintéticos 1 e 2, respectivamente, a fim de melhor observarmos o efeito do campo inicial escolhido e número de valores singulares utilizados para cada caso.

Tabela 9.1: f_r do campo sintético 1

Campo inicial	VS			
	7	15	25	Crescente
M. Geom.	1.5379e-02	2.3810e-03	1.8974e-04	2.0822e-04
Mínimo	6.2878e-03	9.1269e-04	1.1950e-04	5.9831e-04
Máximo	8.7664e-01	7.8881e-01	2.3996e-03	1.6894e-02

Tabela 9.2: f_r do campo sintético 2

Campo inicial	VS			
	7	15	25	Crescente
M. Geom.	3.3875e-02	1.0763e-03	1.7985e-03	2.6641e-04
Mínimo	1.3181e-02	4.0355e-03	2.7609e-03	1.6322e-03
Máximo	8.6106e-01	4.8827e-01	6.3315e-03	1.8490e-02

Em geral, os métodos de otimização apresentam convergência apenas local. Nos casos com o campo inicial igual ao máximo do campo sintético, o desempenho do algoritmo não foi satisfatório. Em casos reais, esperamos que uma estimativa inicial adequada esteja disponível.

Vemos também que o número de valores singulares exerce grande influência sobre o resultado final. De modo geral, os testes usando maior número de valores singulares

apresentaram maior decréscimo na função objetivo. Porém isso não significa que o campo foi melhor estimado, como pudemos ver nas Figuras 8.3 e 8.18 no Capítulo 8. É importante ainda observar que quanto mais valores singulares são utilizados, mais custoso torna-se o problema de otimização. Isto está de acordo com o esperado. De fato, um número excessivo de valores singulares não apenas implica em um maior custo computacional, mas também tende a produzir piores resultados, veja VOGEL (1987) e HANSEN (1998).

Outro aspecto importante é o fato de constataremos a existência de diversas soluções para o problema de ajuste de histórico. Nos resultados referentes ao campo sintético 1, por exemplo, vemos que grande parte dos casos conseguiu ajustar bem o histórico, mas cada um deles convergiu para campos diferentes. A incorporação de mais informação, como dados *hard, a priori* e de sísmica 4D, devem reduzir o número de soluções do problema.

Foram analisados também os vetores singulares à esquerda e à direita, os vetores chamados de U e V, respectivamente, na decomposição SVD, apresentada no Capítulo 4. Cada vetor singular à direita representa uma direção no espaço dos parâmetro. Em cada iteração do processo de otimização, a busca fica restrita ao espaço gerado pelos poucos vetores singulares à direita calculados. Os vetores singulares à esquerda mostram o efeito sobre as observações de uma perturbação no campo de parâmetros na direção dada pelo respectivo vetor singular à direita. Foi verificado que na primeira iteração da otimização, alguns dos vetores singulares mais importantes tendem a dar uma grande ênfase às células dos poços e outros às ligações existentes entre o poço injetor e os produtores. Os primeiros influenciam quase exclusivamente as observações de pressão, enquanto os últimos quase exclusivamente as de produção.

Cabe notar que, tanto no caso 1 como no caso 2, na primeira iteração do algoritmo, em que se parte de um campo homogêneo, os vetores singulares são os mesmos (pois estão relacionados à linearização do simulador em torno do mesmo campo). A informação do histórico não entra neste cálculo, de forma que os vetores singulares refletem a geometria do fluxo no campo. Canais ligando o poço injetor a cada um dos produtores aparecem, assim, naturalmente nos vetores singulares. Por esta razão, os canais alinhados com esta direção são melhor identificados pelo algoritmo. No caso 2, o algoritmo reproduziu o efeito do canal não-alinhado alocando dois canais ligando o injetor aos dois poços produtores.

Na última iteração do algoritmo, os vetores singulares à esquerda apresentam ainda mais singularidades nas regiões dos poços e suas proximidades. De fato, estas células possuem grande impacto nas observações. Mas gostaríamos de encontrar soluções sem este tipo de descontinuidades. Esperamos que a introdução da informação geoestatística ajude a regularizar a solução, diminuindo este efeito.

Fizemos ainda um terceiro teste utilizando o mesmo campo sintético 1, porém com uma malha mais refinada de 51×51 , ou seja, o número de parâmetros a serem estimados

aumentou de 441, no caso da malha mais grosseira, para 2601. Utilizamos campo inicial igual à média geométrica do campo sintético e aplicamos a estratégia do número de valores singulares crescente. O resultado obtido foi bastante similar ao obtido com o mesmo teste com malha 21×21 , como mostra a Tabela 9.3.

Tabela 9.3: f_r malha 21×21 e 51×51

Malha	f_r	f_{rq}	f_{rp}
21×21	2.0822e-04	2.5547e-04	1.9853e-04
51×51	7.5293e-04	8.7560e-05	6.6537e-04

Além dos resultados quantitativos serem equivalentes, qualitativamente obtemos um resultado bastante similar ao caso menos refinado, já o otimizador conseguiu detectar o canal ligando o poço injetor ao produtor P1 da mesma forma como o teste com malha mais grosseira. Estes resultados sugerem que o número de valores singulares necessários para a otimização com TSVD independe do número de parâmetros a serem estimados.

9.1 Trabalhos futuros

O problema de ajuste de histórico possui diversas soluções. Isto significa que apenas os dados de histórico não são suficientes para caracterizar bem o campo. A incorporação de dados *a priori* (geoestatística) e dados *hard* é uma idéia bastante promissora no sentido de diminuir o número de soluções do problema. Neste mesmo contexto, seria interessante estudarmos o impacto da incorporação de dados de sísmica 4D. Além disso, poderia ser feito um estudo a respeito de como se obter múltiplas soluções para o problema, em particular soluções que não superestimem as células dos poços.

A implementação de uma condição de pressão prescrita nos poços, em vez de vazão total prescrita, poderia tornar o problema de ajuste histórico mais interessante e mais próximo da realidade. Além disso, utilizar um método totalmente implícito, ao invés do método IMPES, para a resolução do problema direto, da derivada e da adjunta seria um importante avanço, já que os passos de tempo utilizados para o esquema explícito da saturação podem ser proibitivos para casos mais realistas, com uma discretização mais refinada.

Seria também muito interessante considerar modelos mais realistas que incluem, por exemplo, a compressibilidade de fluidos, pressão capilar não nula e efeitos gravitacionais, além de três dimensões no espaço.

Além disso, poderia ser feito um estudo no sentido de comparar o método aqui proposto baseado em TSVD com esquemas clássicos da literatura, como os do tipo Krylov-Newton.

CAPÍTULO 10

CONCLUSÕES

Neste trabalho, apresentamos um método para a resolução do problema de ajuste automático de histórico baseado em TSVD, para o problema de escoamento bifásico (óleo e água) bidimensional. O trabalho envolveu uma etapa preliminar, de desenvolvimento de um simulador-protótipo com as ferramentas necessárias ao método de ajuste (a derivada e a adjunta).

O problema que propomos é a determinação do campo de permeabilidade de um reservatório a partir de dados de produção e pressão observados nos poços. O número de parâmetros a serem estimados é o número de blocos da malha que discretiza o reservatório. Em geral são utilizados muitos blocos, a fim de melhor representar o campo. Por isso, existem muitos parâmetros a serem estimados e muitos métodos usuais de otimização baseados em derivada tornam-se inviáveis. O método TSVD reduz de forma muito significativa o espaço de busca durante o processo de otimização, reduzindo os custos computacionais associados ao problema.

Realizamos alguns testes baseados em campos de permeabilidade sintéticos. Verificamos em boa parte dos casos que o otimizador conseguiu bons ajustes aos dados de histórico e em alguns desses foi possível reproduzir características importantes dos campos de permeabilidade. Além disso, verificamos através de um exemplo com mais parâmetros, que o número de valores singulares necessários para a otimização independe do número de parâmetros a serem estimados.

Foi também constatado que o problema de ajuste de histórico possui inúmeras soluções, ou seja, existem diversos campos de permeabilidade que fornecem o mesmo histórico de pressão e produção. Isto reflete o fato de que apenas a informação do histórico não é suficiente para caracterizar o campo completamente e, portanto, a incorporação de mais informação tende a minorar o problema.

Em geral, a ferramenta desenvolvida foi capaz de identificar um campo que reproduzia muito bem o histórico, ainda que sem identificar tão bem o campo sintético a partir do qual o histórico foi originado. Esta ferramenta é completamente automática, o que é uma característica muito positiva em um processo tradicionalmente laborioso como o ajuste de histórico.

Apêndice A

CONTINUAÇÃO DOS RESULTADOS PARA O CAMPO SINTÉTICO 2

A.1 Campo inicial igual ao valor mínimo do campo sintético

A Tabela A.1 apresenta os resultados obtidos com campo inicial igual ao valor mínimo do campo sintético. O valor da função objetivo na primeira iteração é $f_0 = 0.31369$, onde $f_{q0} = 0.158857$ e $f_{p0} = 0.154832$.

Tabela A.1: Campo inicial igual ao valor mínimo

VS	f/f_0	f_q/f_{q0}	f_p/f_{p0}	NI	NC	T(s)/I
7	1.3181e-02	1.8415e-02	7.8122e-03	28		30.87
15	4.0355e-03	8.8538e-04	7.2676e-03	14		56.67
25	2.7609e-03	9.4168e-04	4.6275e-03	28		117.56
Crescente	1.6322e-03	2.0517e-04	3.0964e-03	53		51.66

O melhor resultado quantitativo foi obtido com 25 valores singulares. As Figuras A.1 e A.2 apresentam os ajustes obtidos para a produção e pressão, respectivamente.

Os campos de permeabilidades encontrados para cada caso são apresentados na Figura A.3.

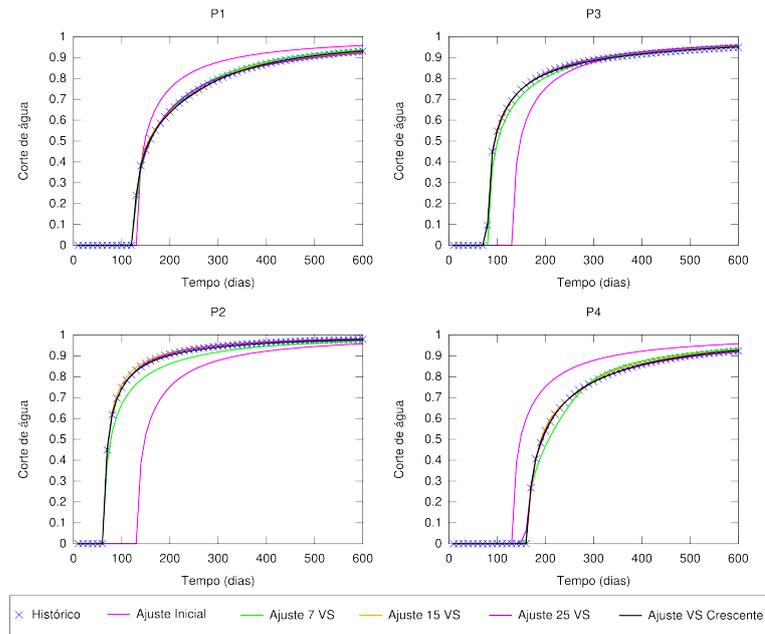


Figura A.1: Ajuste de produção para campo inicial igual ao mínimo.

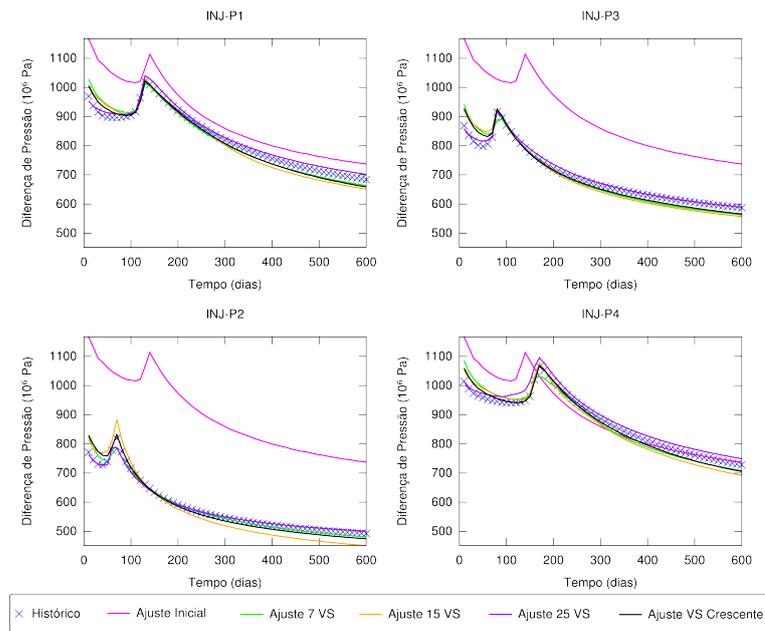


Figura A.2: Ajuste de pressão para campo inicial igual ao mínimo.

A.2 Campo inicial igual ao valor máximo do campo sintético

A Tabela A.2 apresenta os dados obtidos para o campo inicial igual ao valor máximo do campo sintético. O valor da função objetivo na primeira iteração é $f_0 = 1.13754$, sendo $f_{q0} = 0.158857$ e $f_{p0} = 0.978686$.

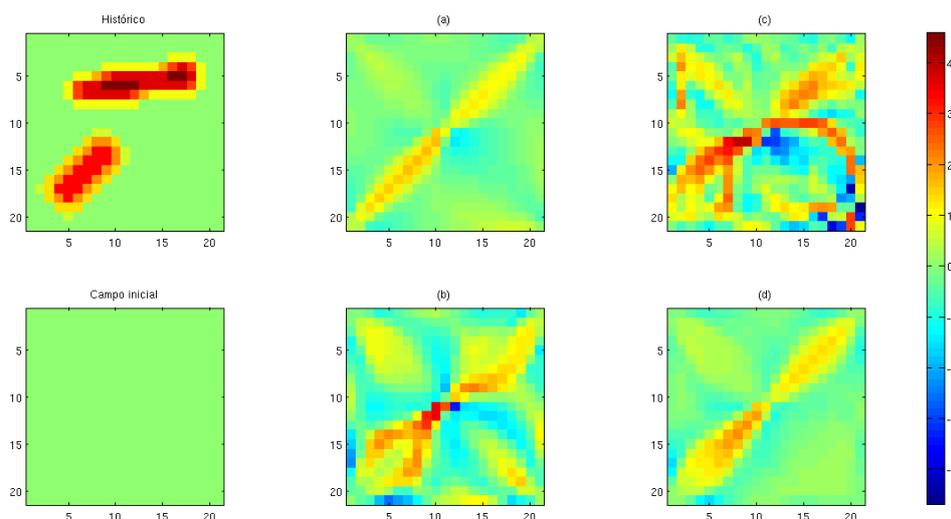


Figura A.3: Campos de permeabilidades para campo inicial igual ao mínimo; (a)7 VS; (b)15 VS; (c)25 VS; (d)VS crescentes.

Tabela A.2: Campo inicial igual ao valor máximo

VS	f/f_0	f_q/f_{q_0}	f_p/f_{p_0}	NI	NC	T(s)/I
7	8.6106e-01	4.1264e-03	1.0002e+00	11		34.77
15	4.8827e-01	2.6491e-02	5.6323e-01	10		68.33
25	6.3315e-03	4.3262e-04	7.2890e-03	24		101.65
Crescente	1.8490e-02	3.4663e-04	2.1435e-02	78		52.61

O número de valores singulares igual a 25 foi o que mais decresceu a função objetivo. As Figuras A.4 e A.5 apresentam os ajuste obtidos para cada caso.

Já a Figura A.5 apresenta o ajuste obtido para a pressão neste mesmo caso.

A Figura A.6 apresenta os campos de permeabilidade estimados para cada caso.

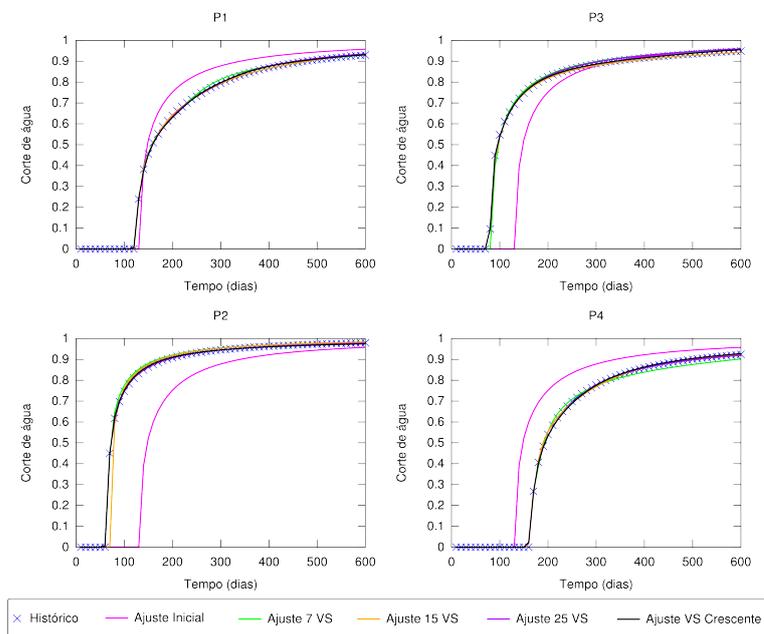


Figura A.4: Ajuste de produção para campo inicial igual ao máximo.

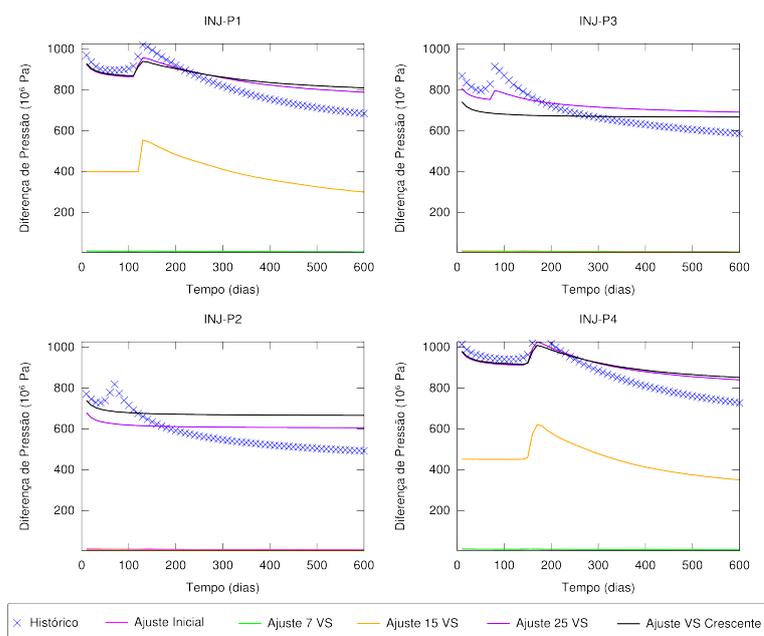


Figura A.5: Ajuste de pressão para campo inicial igual ao máximo.

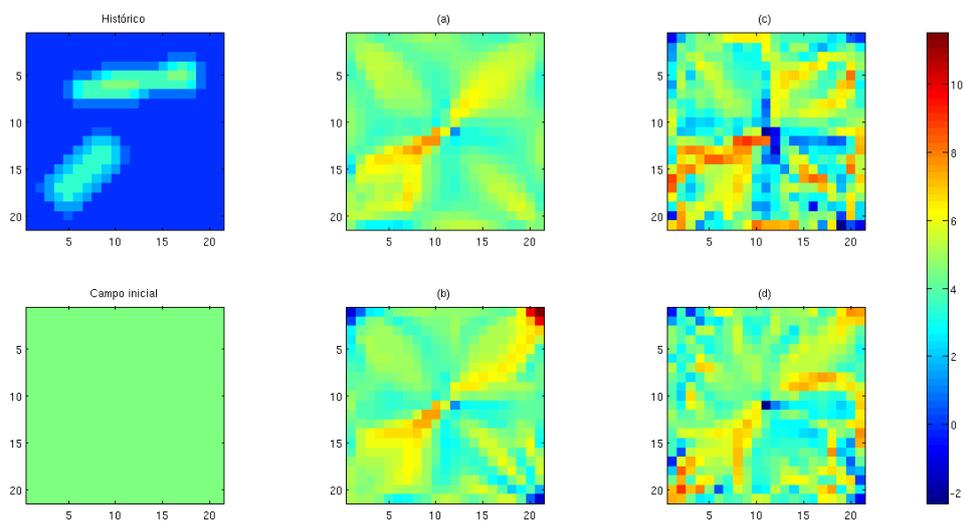


Figura A.6: Campos de permeabilidades para campo inicial igual ao máximo; (a)7 VS; (b)15 VS; (c)25 VS; (d)VS crescentes.

Referências Bibliográficas

- AHMED, T. e MCKINNEY, P. 2004, *Advanced Reservoir Engineering*, Gulf Professional Publishing, ISBN 0-7506-7733-3.
- BALAY, S., BUSCHELMAN, K., GROPP, W., KAUSHIK, D., KNEPLEY, M., MCINNES, L., SMITH, B. e ZHANG, H. 2002, *PETSc user manual*, Rel. Téc. ANL-95/11 - Revision 2.3.2, Argonne National Laboratory.
- BJORCK, A. 1996, *Numerical Methods Least Square Problems*, 1^o edic., Society for Industrial and Applied Mathematics, ISBN 0898713609.
- CHEN, Z. 2007, *Reservoir Simulation: Mathematical Techniques in Oil Recovery (CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics)*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, ISBN 0898716403, 9780898716405.
- CHEN, Z., HUAN, G. e LI, B. 2004, “An improved impes method for two-phase flow in porous media”, *Transport in Porous Media*, v. 54, n. 3, pp. 150.
- CHEN, Z., HUAN, G. e MA, Y. 2006, *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media (Computational Science and Engineering 2)*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, ISBN 0898716063.
- COSSE, R. 1993, *Basics of Reservoir Engineering*, Institut Francais Du Petrole Publications, ISBN 2-7108-0630-4.
- DARCY, H. 1856, “Les fontaines publiques de la ville de dijon: Exposition et application des principes à suivre et des formules à employer dans les questions de distribution d'eau”, *Victor Dalamont, Paris*, p. 150.
- DIKKERS, A. J. 1985, *Geology Petroleum Production*, Elsevier Publishing Company, ISBN 0444424504.
- ERTEKIN, T., A.-K. J. e KING, G. 2001, *Basic Applied Reservoir Simulation, Vol 7. SPE Textboo*, Society of Petroleum Engineers, ISBN 1-55563-089-8.
- FANCHI, J. R. 2005, *Principles of applied reservoir simulation*, 3^o edic., Gulf Professional Publishing, ISBN 0750679336.

- GREEN, D. W. 1998, *Enhanced oil recovery*, Society of Petroleum Engineers, ISBN 1555630774.
- GUNZBURGER, M. D. 2002, *Perspectives in Flow Control and Optimization*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, ISBN 089871527X.
- HANSEN, P. C. 1998, *Rank-deficient and discrete ill-posed problems: numerical aspects of linear inversion*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, ISBN 0-89871-403-6.
- KOMZSIK, L. 1987, *The Lanczos Method: Evolution and Application*, Society for Industrial Mathematics, ISBN 0898715377.
- LAWSON, C. L. e HANSON, R. J. 1987, *Solving Least Square Problems*, Society for Industrial Mathematics, ISBN 0898713560.
- OLIVER, D. S., REYNOLDS, A. C. e LIU, N. 2008, *Inverse Theory for Petroleum Reservoir Characterization and History Matching*, Cambridge University Press, ISBN 9780521881517.
- RODRIGUES, J. R. P. 2005, “Calculating derivatives for history matching in reservoir simulators”, *SPE Reservoir Simulation Symposium*.
- RODRIGUES, J. R. P. 2006, “Calculating derivatives for automatic history matching”, *Computational Geosciences*, v. 10, pp. 119–136.
- SHELDON, J. W., Z. B. e CARDWELL, W. T. 1959, “One-dimensional, incompressible noncapillary, two-phase fluid flow in a porous medium”, *T. SPE AIME*, n. 216, pp. 290–296.
- STONE, H. L. e Jr., G. 1961, “Analysis of gas-cap or dissolved-gas reservoirs”, *T. SPE AIME*, n. 222, pp. 92–104.
- TAVAKOLI, R. e REYNOLDS, A. C. 2009, “History matching with parametrization based on the svd of a dimensionless sensitivity matrix”, *Society of Petroleum Engineers*.
- TIAB, D. e DONALDSON, E. C. 1996, *Petrophysics : theory and practice of measuring reservoir rock and fluid transport properties*, Gulf Publ, ISBN 0-7506-7711-2.
- VOGEL, C. R. 1987, *Computational Methods for Inverse Problems (Frontiers in Applied Mathematics)*, Society for Industrial Mathematics, ISBN 0898715504.