

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Edwin Marcos Maraví Percca

Resolução do Problema de Riemann através de um Método Variacional

Juiz de Fora

2017

Edwin Marcos Maraví Percca

Resolução do Problema de Riemann através de um Método Variacional

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Matemática Aplicada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Grigori Chapiro

Juiz de Fora

2017

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Maraví, Edwin.

Resolução do Problema de Riemann através de um Método Variacional /
Edwin Marcos Maraví Percca. – 2017.

66 f. : il.

Orientador: Grigori Chapiro

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto
de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2017.

1. Problema de Riemann. 2. Espaços de Variação Limitada. 3. Leis de
Equilíbrio. I. Chapiro, Grigori, orient. II. Título.

Edwin Marcos Maraví Percca

Resolução do Problema de Riemann através de um Método Variacional

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Matemática Aplicada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Grigori Chapiro - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Eduard Toon
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Wanderson José Lambert
Universidade Federal de Alfenas

*Dedico este trabalho a minha mãe e a minha irmã, por serem minha maior motivação e
inspiração.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço o apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, que me permitiu concluir os estudos de mestrado satisfatoriamente. Ao corpo docente e discente do mestrado em matemática da UFJF pelo apoio incondicional e contínuo.

RESUMO

As leis de balanço expressam de uma maneira mais geral as leis de conservação e, portanto, é natural que coincidam em algumas definições ou resultados que vamos mostrar aqui. Um sistema de leis de conservação estritamente hiperbólico numa dimensão espacial sob certas condições é um sistema simetrizável, portanto, possui uma entropia convexa. Isto induz a definir o par entropia-fluxo de entropia e a produção de entropia, ingredientes mínimos para usar o critério de admissibilidade da taxa de entropia e conferir se a solução do problema de Riemann respectivo é ótimo. A taxa de entropia definida aqui em termos da entropia é um funcional que pode ser minimizada nos leques de ondas com estados constantes do problema de Riemann, usando as equações de Euler-Lagrange. Primeiramente, mostramos que as soluções do problema de Riemann são funções de variação limitada, resultando num método variacional para resolver o problema. Neste trabalho será mostrado que a solução obtida pelo método variacional, coincide com a solução obtida pelo método das curvas características.

Palavras-chave: Lei de conservação. Problema de Riemann. Par Entropia - Fluxo de entropia. Produção de entropia. Taxa de variação da entropia.

ABSTRACT

The balance laws express in a more general way the conservation laws and therefore it is natural that they coincide in some definitions or results that we will show here. The strictly hyperbolic systems of conservation laws in a spatial dimension under certain conditions is a symmetrizable system, therefore it has a convex entropy. This induces to define the entropy-entropy flux pair and the entropy production, minimum ingredients to use the Entropy rate admissibility criterion and check whether the solution of the respective Riemann problem is optimal. The entropy rate defined here in terms of entropy is a functional that can be minimized in the wave fans with constant states of the Riemann problem using the Euler-Lagrange equations, we show that the solutions of the Riemann problem are functions of bounded variation, resulting in a variational method to solve the respective problem. In this work it will be shown that the solution obtained by the variational method, coincides with the solution obtained by the method of characteristics.

Key-words: Conservation Law. Riemann Problem. Entropy - Entropy flux Pair. Entropy Production. Rate of Change of the Entropy.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Idéia da lei de balanço	15
Figura 2 – Idéia da propriedade do fluxo $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}_1}(\mathcal{C}) = \mathcal{Q}_{\mathcal{D}_2}(\mathcal{C})$	16
Figura 3 – Idéia da variedade \mathcal{F}	21
Figura 4 – Leque de ondas	46
Figura 5 – $\mathcal{D} \cap \mathcal{B}_r$	59
Figura 6 – Argumento do tetraedro de Cauchy 2-dimensional	60

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathcal{X}	Conjunto aberto em \mathbb{R}^k
\mathcal{D}	Domínio próprio contido em \mathcal{X}
\mathcal{P}	Produção de uma quantidade extensiva
$\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$	Função de fluxo em \mathcal{D}
L^1	Espaço das funções Lebesgue integráveis
L^1_{loc}	Espaço das funções Lebesgue integráveis localmente
L^∞	Espaço das funções essencialmente limitadas
S^{k-1}	Esfere de dimensão $k - 1$
\mathcal{H}^{k-1}	Medida de Hausdorff de dimensão $k - 1$
\mathcal{F}	Frente de choque
BV	Espaço das funções de variação limitada
BV_{loc}	Espaço das funções de variação limitada localmente
$TV_{\mathcal{X}} f$	Varição total de f em \mathcal{X}
C_0^∞	Espaço das funções infinitamente diferenciáveis e com suporte compacto
\mathcal{M}	Medida de Radon
$\widetilde{g \circ f}$	Composição normalizada de g e f
$\lim_{h \downarrow 0}$	Limite por acima do zero
$\limsup_{h \downarrow 0}$	Limite superior por acima do zero
$W_i(\tau, \bar{U})$	Curva i -choque através de \bar{U}
$s_i(\tau, \bar{U})$	Velocidade da curva i -choque $W_i(\tau, \bar{U})$
R_k	k -ésimo autovetor direito
L_k	k -ésimo autovetor esquerdo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	Introdução Histórica	11
1.2	Estrutura do texto	12
2	LEI DE CONSERVAÇÃO E LEI DE BALANÇO	14
2.1	Dedução da Lei de Balanço	14
2.2	Redução a Equações de Campo	16
2.3	Sistemas de Leis de Balanço	17
2.4	Lei de Balanço Companheira	18
2.5	Frente Fraca e Frente de Choque	20
2.6	Soluções de Variação Limitada de Sistemas de Leis de Balanço	21
3	SISTEMAS HIPERBÓLICOS DE LEIS DE BALANÇO	25
3.1	Hiperbolicidade	25
3.2	Par Entropia - Fluxo de Entropia	26
3.3	O Problema de Cauchy	27
3.4	Condição de admissibilidade da Entropia	29
4	SISTEMAS HIPERBÓLICOS DE LEIS DE BALANÇO NUMA DIMENSÃO ESPACIAL	31
4.1	Leis de Balanço numa dimensão espacial	31
4.2	Hiperbolicidade e Hiperbolicidade Estrita	32
4.3	Par Entropia - Fluxo de Entropia	33
4.4	Não Linearidade Genuína e Degeneração linear	34
4.5	Ondas Simples	35
4.6	Condições de Admissibilidade	37
4.6.1	Locus de Hugoniot	38
4.6.2	O Critério de Admissibilidade de Lax	39
4.6.3	O Critério de Admissibilidade do Choque de Liu	40
4.6.4	O Critério de Admissibilidade do Choque Entropia	41

5	RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE RIEMANN	42
5.1	Solução Auto-Semelhante do Problema de Riemann	42
5.2	Solução ao Problema de Riemann via Curvas Características	45
5.3	O Critério de Admissibilidade da Taxa de Entropia	49
6	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	55
6.1	Conclusões	55
6.2	Trabalhos futuros	55
	REFERÊNCIAS	56
	APÊNDICE A – TEOREMA A: Demonstração	58
	APÊNDICE B – TÓPICOS DE TEORIA DA MEDIDA . . .	62

1 INTRODUÇÃO

Vários fenômenos na natureza podem ser expressados como leis de conservação ou de balanço, que são formulados em termos de equações diferenciais parciais em forma de divergência; por este motivo, a busca de métodos de resolução para estas equações é de muita importância.

1.1 Introdução Histórica

No século XVIII, Antoine Lavoisier (1743-1794) formulou pela primeira vez a lei da conservação da massa para reações químicas, que hoje formulamos da seguinte forma para sistemas físicos em geral:

Num sistema isolado, a massa total permanece constante ao longo do tempo.

e no século XIX, o físico James Prescott Joule declarou o princípio da conservação da energia.

A energia não pode ser criada nem destruída: a energia pode apenas transformar-se.

Como exemplos clássicos de lei de balanço e lei de conservação podemos citar as equações de Euler para um gás compressível (século XVIII) e as equações de evolução de Maxwell (século XIX).

Estas leis de conservação enunciadas acima, são só algumas das que motivaram o desenvolvimento de um formalismo rigoroso pelos matemáticos até hoje. Alguns critérios de admissibilidade para a solução das leis de conservação e leis de balanço foram inspirados da física. Por exemplo a *entropia* (do grego, que significa transformação), que em termodinâmica é uma grandeza física que mede o grau de organização de um sistema em equilíbrio. O conceito foi introduzido e desenvolvido por Rudolf Clausius no ano 1865 em *Annalen der Physik und Chemie*. Ainda nesse trabalho, Clausius resumiu as Leis da Termodinâmica nas expressões: Primeira Lei da Termodinâmica

A energia do Universo é constante;

e a Segunda Lei da Termodinâmica

A entropia do Universo tende para um máximo.

A definição de entropia induz à existência de uma nova lei de conservação associada

com a original, que nós chamaremos de *par entropia-fluxo de entropia*. Na China, nos anos 1960's foram apresentados alguns artigos que mencionam a possível construção de uma solução do problema de Riemann com a ajuda do par entropia-fluxo de entropia, isto foi divulgado muitos anos depois na comunidade científica internacional por Chang e Hsiao em [5] e por Hsiao e Zhang em [12]. O *critério de admissibilidade da taxa de entropia* foi proposto por Constantine Dafermos em [11] no ano 1973, é com este critério que se conseguiu os fundamentos suficientes para resolver o problema de Riemann na versão unidimensional por métodos variacionais, que foi apresentado no artigo [8] em 2009.

Neste trabalho, apresentamos os principais resultados obtidos de acordo com Constantine Dafermos nos artigos [8], [11] e no livro [9], que induzem à resolução por um método variacional do problema de Riemann, no caso unidimensional. Portanto, não estão incluídos alguns temas e definições tais como o método do perfil viscoso ou as invariantes de Riemann (temas clássicos nos textos sobre leis de conservação).

1.2 Estrutura do texto

Este trabalho está dividido da seguinte maneira:

No capítulo 2 apresentaremos a teoria geral sobre leis de balanço e leis de conservação, começando com a dedução da *equação de campo*, a qual induz as leis anteriores. Além disso, apresenta-se uma fórmula para encontrar a lei de balanço companheira para sistemas de leis de balanço simetrizáveis e se conclui com definições e resultados necessários sobre espaços de variação limitada.

No capítulo 3 apresentaremos os sistemas hiperbólicos de leis de balanço e a dedução do *par entropia-fluxo de entropia* associado a partir da definição de lei de balanço companheira. Além disso, vamos enunciar o *problema de Cauchy*, fazer uma breve discussão sobre suas soluções e apresentar o *critério de admissibilidade da entropia* para a existência das soluções.

No capítulo 4 vamos particularizar as leis de balanço para uma dimensão espacial com a finalidade de interpretar as definições de hiperbolicidade e par entropia-fluxo de entropia, juntamente com alguns exemplos simples. Além disso, apresentaremos as condições de admissibilidade mais relevantes para a resolução dos sistemas hiperbólicos de leis de balanço unidimensionais.

No capítulo 5 abordaremos o *problema de Riemann* apresentando resultados propostos em [8], principalmente usando o *critério da taxa de entropia*. Finalizaremos o capítulo indicando de forma resumida a construção da solução do problema de Riemann pelo método variacional.

2 LEI DE CONSERVAÇÃO E LEI DE BALANÇO

A teoria matemática geral das leis de balanço, exposta neste capítulo, foi projetada para fornecer uma estrutura unificadora para a multitude de leis de balanço da física contínua clássica.

2.1 Dedução da Lei de Balanço

Nesta seção usaremos algumas definições sobre teoria da medida (veja Apêndice B), para deduzir a lei de balanço. A referência usada nesta seção é [9].

Definição 2.1. Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de \mathbb{R}^k , $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Dizemos que Ω é um *domínio de Lipschitz*, se para cada ponto $p \in \partial\Omega$, existe $r > 0$ e uma aplicação $h_p : B_r(p) \rightarrow B_1(0)$ (onde $B_r(p) \subseteq \mathbb{R}^k$ e $B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^k$) tais que:

- h_p é uma bijeção;
- h_p e h_p^{-1} são funções contínuas de Lipschitz;
- $h_p(\partial\Omega \cap B_r(p)) = B^0$;
- $h_p(\Omega \cap B_r(p)) = B^+$;

onde $B^0 = \{(x_1, \dots, x_k) \in B_r(p) | x_k = 0\}$ e $B^+ = \{(x_1, \dots, x_k) \in B_r(p) | x_k > 0\}$

Definição 2.2. Seja \mathcal{X} um subconjunto aberto de \mathbb{R}^k , $k \in \mathbb{Z}^+$. Um *domínio próprio* em \mathcal{X} é um conjunto $\Omega \subseteq \mathcal{X}$ que é um domínio de Lipschitz.

Uma lei de balanço sobre \mathcal{X} postula que a *produção* de uma certa quantidade extensiva em qualquer domínio próprio \mathcal{D} de \mathcal{X} é balanceada pelo *fluxo* desta quantidade através da fronteira $\partial\mathcal{D}$ de \mathcal{D} .

Uma característica sobressalente de uma quantidade extensiva, é que tanto sua produção como seu fluxo são aditivos sobre subconjuntos disjuntos. Assim, a produção no domínio próprio \mathcal{D} é dada pelo valor $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ de uma medida de Radon (com sinal) \mathcal{P} em \mathcal{X} (veja Apêndice B). Similarmente, com cada domínio próprio \mathcal{D} está associada uma função de conjuntos aditiva contável $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$, definida sobre os subconjuntos de Borel de $\partial\mathcal{D}$, tal que o

fluxo dentro ou fora de \mathcal{D} através de qualquer subconjunto de Borel \mathcal{C} de $\partial\mathcal{D}$ é dado por $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}(\mathcal{C})$. Assim, a lei de balanço simplesmente diz que

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}(\partial\mathcal{D}) = \mathcal{P}(\mathcal{D}), \quad (2.1)$$

para todo domínio próprio \mathcal{D} em \mathcal{X} .

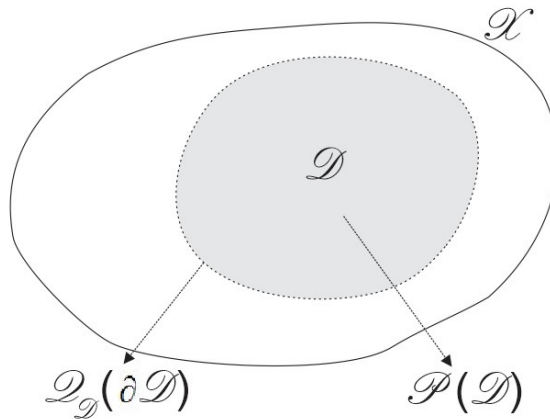


Figura 1 – Idéia da lei de balanço

Vamos considerar nesta seção as funções de fluxo $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$, que são absolutamente contínuas com respeito à medida de Hausdorff \mathcal{H}^{k-1} (veja Apêndice B). Assim, com cada domínio próprio \mathcal{D} em \mathcal{X} está associada a *função densidade de fluxo* $q_{\mathcal{D}} \in L^1(\partial\mathcal{D})$ tal que

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} q_{\mathcal{D}}(X) d\mathcal{H}^{k-1}(X), \quad (2.2)$$

para qualquer subconjunto de Borel \mathcal{C} de $\partial\mathcal{D}$. Os subconjuntos de Borel \mathcal{C} de $\partial\mathcal{D}$ são orientados por meio de uma normal unitária N exterior a \mathcal{D} , nos pontos de \mathcal{C} . O postulado fundamental na teoria de leis de balanço diz que o fluxo depende somente da superfície e de sua orientação, i.é., se \mathcal{C} é simultaneamente um subconjunto de Borel das fronteiras de dois domínios próprios diferentes \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 , compartilhando a mesma normal exterior sobre \mathcal{C} , então $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}_1}(\mathcal{C}) = \mathcal{Q}_{\mathcal{D}_2}(\mathcal{C})$. Assim, $q_{\mathcal{D}_1}(X) = q_{\mathcal{D}_2}(X)$ para quase todo ponto $X \in \mathcal{C}$ (com respeito a \mathcal{H}^{k-1}). Analogamente à função densidade de fluxo, pode ser definida a *função densidade de produção* $p \in L^1_{loc}(\mathcal{X})$:

$$\mathcal{P}(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} p(X) dX. \quad (2.3)$$

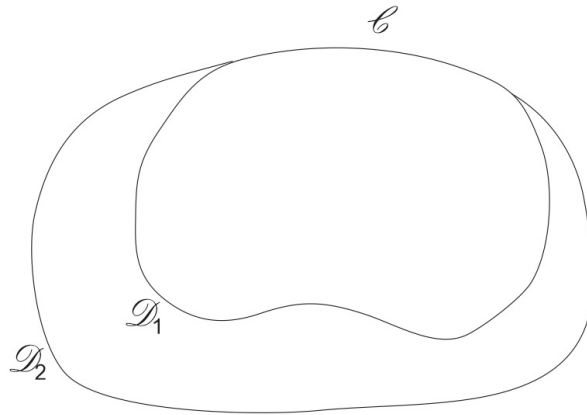


Figura 2 – Idéia da propriedade do fluxo $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}_1}(\mathcal{C}) = \mathcal{Q}_{\mathcal{D}_2}(\mathcal{C})$

2.2 Redução a Equações de Campo

Nesta seção apresentaremos um teorema onde se deduz a equação de campo para a lei de balanço. A demonstração do teorema citado será apresentado no Apêndice A. As referências para esta seção são [9] e [19].

Teorema 2.3 (A). *Considere a lei de balanço (2.1) sobre \mathcal{X} onde \mathcal{P} é uma medida de Radon com sinal e $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ é induzida através de (2.2), pela função densidade de fluxo $q_{\mathcal{D}}$ (que é limitada), $|q_{\mathcal{D}}(X)| \leq C$, para todo domínio próprio \mathcal{D} e qualquer ponto $X \in \partial\mathcal{D}$. Então,*

1. *com cada $N \in S^{k-1}$ está associada uma função mensurável limitada a_N em \mathcal{X} , com a seguinte propriedade: Seja \mathcal{D} um domínio próprio em \mathcal{X} e suponha que X é algum ponto de $\partial\mathcal{D}$ onde a normal exterior unitária existe e é N . Suponha que X é um ponto de Lebesgue de $q_{\mathcal{D}}$, relativo a \mathcal{H}^{k-1} , e que a derivada superior de $|\mathcal{P}|$ em X com respeito à medida de Lebesgue, é finita. Então*

$$q_{\mathcal{D}}(X) = a_N(X). \quad (2.4)$$

2. *Existe um campo vetorial $A \in L^\infty(\mathcal{X}; \mathbb{M}^{1 \times k})$ tal que, para cada N fixo em S^{k-1} ,*

$$a_N(X) = A(X)N, \quad \text{q.t.p de } \mathcal{X} \quad (2.5)$$

3. *A função A satisfaz a equação de campo*

$$\operatorname{div} A = \mathcal{P} \quad (2.6)$$

no sentido de distribuições em \mathcal{X} .

A demonstração deste teorema será apresentada no apêndice A.

2.3 Sistemas de Leis de Balanço

Nesta seção serão apresentados os sistemas de leis de balanço e algumas definições complementares. Os textos de referência nesta seção são [9] e [19].

Consideramos agora n leis de balanço distintas com medida de produção induzida por campos de densidade de produção que atuam simultaneamente em \mathcal{X} :

$$\operatorname{div}\mathbb{A}(X) = P(X), \quad (2.7)$$

onde \mathbb{A} é um campo matricial de ordem $n \times k$ e P é um campo vetorial n -coluna. O operador divergência age nos vetores linhas de \mathbb{A} , resultando a $\operatorname{div}\mathbb{A}$ num campo vetorial n -coluna. Suponhamos que o estado de um meio é descrito por um campo vetorial de estado U tomando valores num subconjunto aberto $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ que determina o campo densidade de fluxo \mathbb{A} e o campo de densidade de produção P no ponto $X \in \mathcal{X}$ usando equações constitutivas

$$\mathbb{A}(X) = G(U(X), X) \quad P = \Pi(U(X), X), \quad (2.8)$$

onde G e Π são funções suaves dadas definidas em $\mathcal{O} \times \mathcal{X}$ tomando valores em $\mathbb{M}^{n \times k}$ e \mathbb{R}^n respectivamente. De (2.7) e (2.8), resulta que

$$\operatorname{div}G(U(X), X) = \Pi(U(X), X). \quad (2.9)$$

Definição 2.4. A Equação (2.9) será denominada um *sistema de leis de balanço* se $n \geq 2$ ou uma *lei de balanço escalar* quando $n = 1$. No caso especial onde a produção seja nula, $\Pi \equiv 0$, então a Equação (2.9) será denominada um *sistema de leis de conservação* se $n \geq 2$ ou uma *lei de conservação escalar* quando $n = 1$. Quando G e Π não dependem explicitamente de X , o sistema de leis de balanço é chamado *homogêneo*.

Definição 2.5. Um campo Lipschitz contínuo U que satisfaz (2.9) em quase todo ponto de \mathcal{X} será chamado uma *solução clássica*. Um campo mensurável U que satisfaz (2.9) no sentido das distribuições, i.é., $G(U(X), X)$ e $\Pi(U(X), X)$ são localmente integráveis e

$$\int_{\mathcal{X}} [G(U(X), X) \operatorname{grad}\varphi(X) + \varphi(X)\Pi(U(X), X)] dX = 0, \quad (2.10)$$

para qualquer função teste $\varphi \in C_0^\infty$, é uma *solução fraca*.

Observação 2.6. Consideramos as seguintes notações:

- Para $\alpha = 1, 2, \dots, k$; $G_\alpha(U, X)$ denota o α -ésimo vetor coluna da matriz $G(U, X)$.
- D denotará a diferencial com respeito à variável U . Quando usarmos as notações matriciais, D será considerado o operador linha $D = \left[\frac{\partial}{\partial U^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial U^n} \right]$

2.4 Lei de Balanço Companheira

Nesta seção apresentaremos a dedução da lei de balanço companheira e uma condição para garantir sua existência. A referência para esta seção é [9].

Definição 2.7. Consideramos o Sistema de leis de balanço (2.9) sobre um conjunto aberto \mathcal{X} de \mathbb{R}^k . Uma função Q , definida em $\mathcal{O} \times \mathcal{X}$ e tomando valores em $\mathbb{M}^{1 \times k}$, é chamado uma *companheira* de G se existe uma função suave B , definida em $\mathcal{O} \times \mathcal{X}$ e tomando valores em \mathbb{R}^n , tal que, para todo $U \in \mathcal{O}$ e $X \in \mathcal{X}$,

$$DQ_\alpha(U, X) = B(U, X)^\top DG_\alpha(U, X), \quad \alpha = 1, 2, \dots, k. \quad (2.11)$$

A relevância de (2.11) decorre da observação de que qualquer solução clássica U , do Sistema de leis de balanço (2.9) é automaticamente também uma solução (clássica) da *Lei de Balanço Companheira*

$$\operatorname{div}Q(U(X), X) = h(U(X), X), \quad (2.12)$$

com

$$h(U, X) = B(U, X)^\top \Pi(U, X) + \nabla \cdot Q(U, X) - B(U, X)^\top \nabla \cdot G(U, X). \quad (2.13)$$

Em (2.13) “ $\nabla \cdot$ ” denota a divergência em relação a X , mantendo U fixo, por outro lado “ div ” trata a U como uma função de X .

Assim, a lei de balanço companheira (2.12) do Sistema de leis de balanço (2.9) fica determinada pelos fatores integradores B , que transforma o lado direito de (2.11) no gradiente de uma função de U . A condição de integrabilidade relevante é

$$DB(U, X)^\top DG_\alpha(U, X) = DG_\alpha(U, X)^\top DB(U, X), \quad \alpha = 1, \dots, k, \quad (2.14)$$

para todo $U \in \mathcal{O}$ e $X \in \mathcal{X}$. Claramente, pode-se satisfazer (2.14) empregando qualquer B que não depende de U . Neste caso, a lei de balanço companheira resultante (2.12) é apenas uma combinação linear trivial das equações do Sistema original (2.9). Para B não trivial,

que varia com U , (2.14) impõe $n(n-1)k/2$ condições sobre as n componentes desconhecidas de B . Assim, quando $n = 1$ e k é arbitrário, pode-se usar qualquer função (a valores reais) B . Quando $n = 2$ e $k = 2$, temos que (2.14) reduz-se a um sistema de EDPs de duas equações em duas incógnitas, das quais uma família de soluções B pode presumivelmente ser determinada. Em todos os outros casos, porém, (2.14) é determinado formalmente e a existência da lei de balanço companheira não trivial, não deve ser geralmente esperado.

Definição 2.8. O Sistema de leis de balanço (2.9) é chamado *simétrico* quando as matrizes de ordem $n \times n$, $DG_\alpha(U, X)$, $\alpha = 1, \dots, k$, são simétricas, para qualquer $U \in \mathcal{O}$ e $X \in \mathcal{X}$.

Suponha que (2.9) é simétrico, \mathcal{O} é simplesmente conexo e

$$G(U, X)^\top = D\Gamma(U, X)^\top, \quad (2.15)$$

para alguma função Γ , definida em $\mathcal{O} \times \mathcal{X}$ e tomando valores em $\mathbb{M}^{1 \times k}$. Neste caso então satisfaz (2.14) tomando $B(U, X) = U$, que induz a companheira

$$Q(U, X) = U^\top G(U, X) - \Gamma(U, X). \quad (2.16)$$

Por outro lado, se (2.11) é valido para algum B com a propriedade que, para cada $X \in \mathcal{X}$ fixado, $B(\cdot, X)$ aplica difeomorficamente \mathcal{O} em algum subconjunto aberto \mathcal{O}^* de \mathbb{R}^n . Então a mudança $U^* = B(U, X)$ do vetor estado, reduz (2.9) ao sistema equivalente de lei de balanço simétrico

$$\operatorname{div} G^*(U^*(X), X) = \Pi^*(U^*(X), X), \quad (2.17)$$

onde

$$G^*(U^*, X) = G(B^{-1}(U^*, X), X) \quad \text{e} \quad \Pi^*(U^*, X) = \Pi(B^{-1}(U^*, X), X). \quad (2.18)$$

De fato, ao fazer

$$Q^*(U^*, X) = Q(B^{-1}(U^*, X), X), \quad (2.19)$$

$$\Gamma^*(U^*, X) = U^{*\top} G^*(U^*, X) - Q^*(U^*, X), \quad (2.20)$$

e de (2.11) obtemos que

$$G^*(U^*, X)^\top = D\Gamma^*(U^*, X)^\top. \quad (2.21)$$

Demonstramos que um sistema de leis de balanço é associado a uma lei de balanço companheira não trivial se, e somente se, é simetrizável.

Além de satisfazer (2.11), um dos princípios da teoria de sistemas de leis de balanço é que as soluções fracas admissíveis tem que satisfazer a desigualdade

$$\operatorname{div}Q(U(X), X) \leq h(U(X), X). \quad (2.22)$$

2.5 Frente Fraca e Frente de Choque

Vamos denotar com \mathcal{F} a variedade suave $(k - 1)$ -dimensional, contida no subconjunto aberto \mathcal{X} de \mathbb{R}^k , com orientação induzida pelo campo normal N . U será uma solução (geralmente fraca) do Sistema de leis de balanço (2.9) em \mathcal{X} que é continuamente diferenciável em $\mathcal{X} \setminus \tilde{\mathcal{F}}$, mas é permitido que seja singular em \mathcal{F} . A referência para esta seção é [9].

Definição 2.9. \mathcal{F} é uma *frente fraca*, se para U Lipschitz contínua em \mathcal{X} e quando se aproxima a \mathcal{F} de cada lado, o gradiente de U atinge limites distintos grad^-U , grad^+U . Assim, $\operatorname{grad}U$ experimenta um salto $[[\operatorname{grad}U]] = \operatorname{grad}^+U - \operatorname{grad}^-U$ através de \mathcal{F} .

Como U é contínua, a derivada tangencial de U não pode saltar através de \mathcal{F} , logo $[[\operatorname{grad}U]] = [[\partial U/\partial N]]N^\top$, onde $[[\partial U/\partial N]]$ denota o salto da derivada normal $\partial U/\partial N$ através de \mathcal{F} . Portanto, tomando o salto de (2.9) através de \mathcal{F} em qualquer ponto $X \in \mathcal{F}$ conseguimos a seguinte condição em $[[\partial U/\partial N]]$:

$$D[G(U(X), X)N] \left[\left[\frac{\partial U}{\partial N} \right] \right] = 0. \quad (2.23)$$

Definição 2.10. \mathcal{F} é uma *frente de choque*, quando ao aproximar U de cada lado de \mathcal{F} , atinge limites distintos U_- , U_+ e assim experimenta um salto $[[U]] = U_+ - U_-$ através de \mathcal{F} .

Ambas U_- e U_+ são funções contínuas em \mathcal{F} . Como U é uma solução (fraca) de (2.9), podemos escrever (2.10) para qualquer $\varphi \in C_0^\infty(\mathcal{X})$. Em (2.10) a integração em \mathcal{X} pode ser substituída pela integração em $\mathcal{X} \setminus \tilde{\mathcal{F}}$. Como U é C^1 em $\mathcal{X} \setminus \tilde{\mathcal{F}}$, podemos integrar por partes em (2.10). Usando que φ tem suporte compacto em \mathcal{X} e que (2.9) se verifica para qualquer $X \in \mathcal{X} \setminus \tilde{\mathcal{F}}$, temos

$$\int_{\mathcal{F}} \varphi(X)[G(U_+, X) - G(U_-, X)]Nd\mathcal{H}^{k-1}(X) = 0, \quad (2.24)$$

de onde deduzimos que a seguinte *Condição de Salto* deve ser satisfeita em cada ponto X da frente de choque \mathcal{F} :

$$[G(U_+, X) - G(U_-, X)]N = 0. \quad (2.25)$$

Note que (2.25) pode ser reescrito como

$$\left\{ \int_0^1 D[G(\tau U_+ + (1 - \tau)U_-), X]N d\tau \right\} [[U]] = 0. \quad (2.26)$$

Comparando (2.26) com (2.23), concluímos que uma frente fraca pode ser considerada como uma frente de choque com força infinitesimal: $[[[U]]]$ muito pequeno.

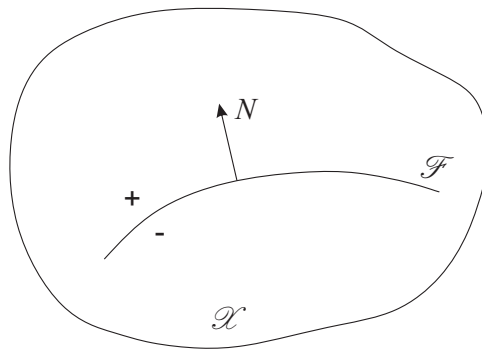


Figura 3 – Idéia da variedade \mathcal{F}

2.6 Soluções de Variação Limitada de Sistemas de Leis de Balanço

Apresentaremos nesta seção as definições e resultados mais importantes para este trabalho, sobre espaços de variação limitada. As referências para esta seção são [9] e [1].

Definição 2.11. Uma função escalar v é *localmente de variação limitada* num subconjunto aberto \mathcal{X} de \mathbb{R}^k , se $v \in L^1_{loc}(\mathcal{X})$ e $\mathbf{grad}v$ é uma medida de Radon $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_k)$ em \mathcal{X} , i.é.

$$- \int_{\mathcal{X}} v \mathbf{div} \Psi(X) dX = \int_{\mathcal{X}} \Psi(X) d\mathcal{M}(X), \quad (2.27)$$

para qualquer função teste $\Psi \in C_0^\infty(\mathcal{X}; \mathbb{M}^{1 \times k})$. Quando $v \in L^1(\mathcal{X})$ e \mathcal{M} é finito, v é uma função de *variação limitada* em \mathcal{X} , com *variação total*

$$TV_{\mathcal{X}} v = |\mathcal{M}|(\mathcal{X}) = \sup_{|\Psi(X)|=1} \int_{\mathcal{X}} v(X) \mathbf{div} \Psi(X) dX. \quad (2.28)$$

Denotaremos por $BV(\mathcal{X})$ o espaço das funções de variação limitada, e por $BV_{loc}(\mathcal{X})$ o espaço das funções localmente de variação limitada.

Teorema 2.12. *Seja $\{E_\alpha, \alpha = 1, \dots, k\}$ a base ortonormal padrão de \mathbb{R}^k . Se $v \in BV_{loc}(\mathcal{X})$, então*

$$\limsup_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\mathcal{Y}} |v(X + hE_\alpha) - v(X)| dX = |\mathcal{M}_\alpha|(\mathcal{Y}), \quad \alpha = 1, \dots, k, \quad (2.29)$$

para qualquer conjunto aberto limitado \mathcal{Y} com $\overline{\mathcal{Y}} \subset \mathcal{X}$. Por outro lado, se $v \in L^1_{loc}(\mathcal{X})$ e o lado esquerdo de (2.29) for finito para todo \mathcal{Y} como acima, então $v \in BV_{loc}(\mathcal{X})$.

Teorema 2.13. *Qualquer sequência v_μ em $BV_{loc}(\mathcal{X})$, tal que $\|v_\mu\|_{L^1(\mathcal{Y})}$ e $TV_{\mathcal{Y}}v_\mu$ são uniformemente limitadas em todo conjunto aberto limitado $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ contém uma subsequência que converge em $L^1_{loc}(\mathcal{X})$, em quase todo ponto em \mathcal{X} , para alguma função $v \in BV_{loc}(\mathcal{X})$, com $TV_{\mathcal{Y}}v \leq \liminf_{\mu \rightarrow \infty} TV_{\mathcal{Y}}v_\mu$.*

Observação 2.14. Quando $k=1$, o teorema anterior reduz-se ao *Teorema de Helly*. (veja [23]).

Teorema 2.15. *O domínio \mathcal{X} de qualquer função $v \in BV_{loc}(\mathcal{X})$ é a união de três subconjuntos disjuntos \mathcal{C} , \mathcal{J} e \mathcal{I} com as seguintes propriedades:*

- (a) \mathcal{C} é o conjunto de pontos de continuidade aproximada de v , i.é. com cada $\bar{X} \in \mathcal{C}$ está associado $v_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{r^k} \int_{\mathcal{B}_r(\bar{X})} |v(X) - v_0| dX = 0. \quad (2.30)$$

- (b) \mathcal{J} é o conjunto de pontos de descontinuidade de salto aproximado de v , i.é., com cada $\bar{X} \in \mathcal{J}$ está associado N em S^{k-1} e distintos v_-, v_+ em \mathbb{R} tais que

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{r^k} \int_{\mathcal{B}_r^+(\bar{X})} |v(X) - v_+| dX = 0, \quad (2.31)$$

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{r^k} \int_{\mathcal{B}_r^-(\bar{X})} |v(X) - v_-| dX = 0, \quad (2.32)$$

onde $\mathcal{B}_r^+(\bar{X}) = \mathcal{B}_r(\bar{X}) \cap \{X : (X - \bar{X}) \cdot N > 0\}$ e $\mathcal{B}_r^-(\bar{X}) = \mathcal{B}_r(\bar{X}) \cap \{X : (X - \bar{X}) \cdot N < 0\}$. Além disso, \mathcal{I} é contável retificável, i.e., ele é essencialmente coberto pela união contável de variedades C^1 $(k-1)$ -dimensionais $\{\mathcal{F}_i\}$ incluídos em \mathbb{R}^k : $\mathcal{H}^{k-1}(\mathcal{I} \setminus \cup \mathcal{F}_i) = 0$. Além disso, quando $\bar{X} \in \mathcal{I} \cap \mathcal{F}_i$ então N é normal a \mathcal{F}_i em \bar{X} .

$$(c) \mathcal{I} = \mathcal{X} \setminus (\mathcal{C} \cup \mathcal{J}).$$

Por razões técnicas, as demonstrações dos teoremas 2.12, 2.13 e 2.15 não serão apresentadas aqui, as demonstrações detalhadas destes teoremas podem ser encontradas no livro [1].

Definição 2.16. Suponha que g é uma função contínua em \mathbb{R} e seja $v \in BV_{loc}(\mathcal{X})$. A *composição normalizada* $\widetilde{g \circ v}$ de g e v é definida por

$$\widetilde{g \circ v}(X) = \begin{cases} g(v_0), & \text{se } X \in \mathcal{C} \\ \int_0^1 g(\tau v_- + (1 - \tau)v_+) d\tau, & \text{se } X \in \mathcal{J} \end{cases}, \quad (2.33)$$

e $\widetilde{g \circ v}(X)$ toma qualquer valor arbitrário em $X \in \mathcal{I}$. Em particular, pode-se normalizar v como

$$\tilde{v}(X) = \begin{cases} v_0, & \text{se } X \in \mathcal{C} \\ \frac{1}{2}(v_- + v_+), & \text{se } X \in \mathcal{J} \end{cases}, \quad (2.34)$$

assim, cada ponto de \mathcal{C} se torna um ponto de Lebesgue.

A adequação da normalização anterior é indicada pela seguinte generalização da regra de cadeia clássica:

Teorema 2.17. *Suponha que g é continuamente diferenciável em \mathbb{R} , com derivada Dg , e seja $v \in BV_{loc}(\mathcal{X}) \cap L^\infty(\mathcal{X})$. Então $g \circ v \in BV_{loc}(\mathcal{X}) \cap L^\infty(\mathcal{X})$. A função normalizada $\widetilde{Dg \circ v}$ é localmente integrável com respeito à medida $\mathcal{M} = \text{grad} v$ e*

$$\text{grad}(g \circ v) = (\widetilde{Dg \circ v}) \text{grad} v, \quad (2.35)$$

no sentido

$$- \int_{\mathcal{X}} g(v(X)) \text{div} \Psi(X) dX = \int_{\mathcal{X}} (\widetilde{Dg \circ v})(X) \Psi(X) d\mathcal{M}(X), \quad (2.36)$$

para qualquer função teste $\Psi \in C_0^\infty(\mathcal{X}; \mathbb{M}^{1 \times k})$.

A demonstração do Teorema 2.17 pode ser consultada no artigo [24].

Definição 2.18. Um subconjunto \mathcal{D} de \mathbb{R}^k tem (localmente) *perímetro finito* quando sua função indicadora $\chi_{\mathcal{D}}$ tem (localmente) variação limitada em \mathbb{R}^k .

Observação 2.19. Os conjuntos com fronteira de Lipschitz tem perímetro finito. Isto significa que podemos reformular a teoria de leis de balanço usando os conjuntos que tem perímetro finito.

Vamos considerar agora soluções fracas $U \in L^\infty(\mathcal{X})$ para o Sistema (2.9), que estão em $BV_{loc}(\mathcal{X})$. Do Teorema 2.17, temos que a função $G \circ U$ está em $BV_{loc}(\mathcal{X}) \cap L^\infty(\mathcal{X})$ e (2.9) é satisfeito como uma igualdade de medidas.

Teorema 2.20. *Uma função $U \in BV_{loc}(\mathcal{X}) \cap L^\infty(\mathcal{X})$ é uma solução fraca do Sistema (2.9) de leis de balanço se, e somente se,*

(a) *A igualdade em medida*

$$[DG(\tilde{U}(X), X), \text{grad}U(X)] + \nabla \cdot G(\tilde{U}(X), X) = \Pi(\tilde{U}(X), X), \quad (2.37)$$

é válida no conjunto \mathcal{X} de pontos de continuidade aproximada de U ; e

(b) *A condição de salto*

$$[G(U_+, X) - G(U_-, X)]N = 0, \quad (2.38)$$

é satisfeita para quase todo X (com respeito a \mathcal{H}^{k-1}) em \mathcal{J} de pontos de descontinuidade de salto aproximada de U , com vetor normal N e limites unilaterais U_-, U_+ .

Consequentemente, o conjunto de pontos de descontinuidade de salto aproximada de uma solução BV é a união contável das frentes de choque.

Teorema 2.21. *Suponha que o Sistema de leis de balanço (2.9) está dotado com uma lei de balanço companheira (2.12). Seja $U \in BV_{loc}(\mathcal{X}) \cap L^\infty(\mathcal{X})$ uma solução fraca de (2.9). Então, a medida*

$$\mathcal{N} = \text{div}Q(U(X), X) - h(U(X), X), \quad (2.39)$$

está concentrada no conjunto de pontos \mathcal{J} de descontinuidade de salto aproximado de U e a desigualdade (2.22) será satisfeita no sentido de medidas se, e somente se,

$$[Q(U_+, X) - Q(U_-, X)]N \geq 0, \quad (2.40)$$

para quase todo ponto (com respeito a \mathcal{H}^{k-1}) $X \in \mathcal{J}$.

As demonstrações dos teoremas 2.20 e 2.21 podem ser consultadas no livro [9].

3 SISTEMAS HIPERBÓLICOS DE LEIS DE BALANÇO

O espaço ambiente para os sistemas de leis de balanço, introduzido no capítulo anterior, será visualizado aqui como espaço-tempo, e a noção central de hiperbolicidade na direção temporal será motivada e definida. As companheiras para o fluxo, consideradas na Seção 2.4, serão agora realizadas como pares de entropia-fluxo de entropia.

Exemplos interessantes de sistemas hiperbólicos de leis de balanço são apresentados em [6], [9], [13] e em [19].

3.1 Hiperbolicidade

Nesta seção apresentaremos a definição de sistema de leis de balanço hiperbólico seguindo o texto [9].

Retornando com as notações do capítulo anterior, visualizamos \mathbb{R}^k como $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, $m = k - 1$, assim $X = (x, t)$, onde $x \in \mathbb{R}^m$ indica o espaço e $t \in \mathbb{R}$ indica o tempo. Denotaremos ∂_t por $\frac{\partial}{\partial t}$ e ∂_α por $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, m$. Usaremos o símbolo div para denotar a divergência em relação à variável $x \in \mathbb{R}^m$. Como no capítulo anterior, em operações matriciais div estará atuando em vetores linha. Como na Observação 2.6, D será considerado como um operador linha: $D = \left[\frac{\partial}{\partial U^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial U^n} \right]$. Denotaremos $H = G_k$, usaremos agora o símbolo G para denotar a matriz $n \times m$ como vetores coluna (G_1, \dots, G_m) , e reescreveremos o Sistema (2.9) na forma

$$\partial_t H(U(x, t), x, t) + \text{div} G(U(x, t), x, t) = \Pi(U(x, t), x, t). \quad (3.1)$$

Definição 3.1. O Sistema (3.1) é chamado *hiperbólico* na direção do tempo se, para qualquer U fixo em \mathcal{O} , $(x, t) \in \mathcal{X}$ e $\nu \in S^{m-1}$, a matriz $DH(U, x, t)$ (de ordem $n \times n$) é não singular e o problema de autovalor

$$\left[\sum_{\alpha=1}^m \nu_\alpha DG_\alpha(U, x, t) - \lambda DH(U, x, t) \right] R = 0, \quad (3.2)$$

tem autovalores reais $\lambda_1(\nu; U, x, t), \dots, \lambda_n(\nu; U, x, t)$, chamados *velocidades características*, e n autovetores linearmente independentes $R_1(\nu; U, x, t), \dots, R_n(\nu; U, x, t)$.

Uma classe de grande importância são os *sistemas hiperbólicos simétricos* de leis de balanço (3.1), em que, para qualquer $U \in \mathcal{O}$ e $(x, t) \in \mathcal{X}$, as matrizes $DG_\alpha(U, x, t)$ de ordem $n \times n$, para $\alpha = 1, \dots, m$, são simétricas e $DH(U, x, t)$ é simétrico definido positivo.

É claro que a hiperbolicidade é preservada sob qualquer mudança $U^* = U^*(U, x, t)$ de vetor estado com $U^*(\cdot, x, t)$ um difeomorfismo para cada $(x, t) \in \mathcal{X}$ fixado. Em particular, uma vez que $DH(U, x, t)$ é não singular, podemos empregar (pelo menos localmente) H como o novo vetor estado. Assim, sem perda de generalidade, pode-se limitar o estudo aos sistemas hiperbólicos de leis de balanço que têm a forma

$$\partial_t U(x, t) + \operatorname{div} G(U(x, t), x, t) = \Pi(U(x, t), x, t). \quad (3.3)$$

Por simplicidade e conveniência consideraremos doravante a forma especial (3.3) como *Canônica*.

Observação 3.2. Note que se \mathcal{F} é uma frente de choque para U , então (2.25) pode ser escrita com as respectivas notações como

$$-s[H(U_+, x, t) - H(U_-, x, t)] + [G(U_+, x, t) - G(U_-, x, t)]\nu = 0, \quad (3.4)$$

que é chamada a *Condição de Salto de Rankine-Hugoniot*.

3.2 Par Entropia - Fluxo de Entropia

Nesta seção apresentaremos o par entropia-fluxo de entropia para um sistema de lei de balanço e daremos uma condição para obtê-la. A referência para esta seção é [9].

Suponha que o Sistema (2.9), que agora escrevemos na forma (3.1), está associado com uma lei de balanço companheira (2.12). Denotaremos $Q_k = \eta$, e usaremos Q para denotar o vetor m-linha (Q_1, \dots, Q_m) e escrever (2.12) na nova notação:

$$\partial_t \eta(U(x, t), x, t) + \operatorname{div} Q(U(x, t), x, t) = h(U(x, t), x, t). \quad (3.5)$$

Aqui η é chamado *entropia* para o Sistema de lei de balanço (3.1) e Q é chamado de *fluxo de entropia* associado com η . A Equação (2.11), para $\alpha = k$, deve agora ser escrita como

$$D\eta(U, x, t) = B(U, x, t)^\top DH(U, x, t). \quad (3.6)$$

Suponha que o sistema está na forma canônica (3.3), de modo que (3.6) se reduz a $D\eta = B^\top$. Então, (2.11) e a condição de integrabilidade (2.14) tornam-se

$$DQ_\alpha(U, x, t) = D\eta(U, x, t)DG_\alpha(U, x, t), \quad \alpha = 1, \dots, m, \quad (3.7)$$

$$D^2\eta(U, x, t)DG_\alpha(U, x, t) = DG_\alpha(U, x, t)^\top D^2\eta(U, x, t), \quad \alpha = 1, \dots, m. \quad (3.8)$$

Temos que (3.8) impõe $\frac{1}{2}n(n-1)m$ condições na única função desconhecida η . Portanto, como já foi observado na última seção do capítulo anterior, o problema de determinar o par entropia-fluxo de entropia não trivial para (3.1) é formalmente determinado, a menos que ou $n = 1$ e m é arbitrária, ou $n = 2$ e $m = 1$. No entanto, quando o sistema é simétrico, podemos satisfazer (3.8) com $\eta = \frac{1}{2}|U|^2$. Por outro lado, se temos como hipótese (3.8) e que $\eta(U, x, t)$ é uniformemente convexa em U , então a mudança $U^* = D\eta(U, x, t)^T$ de vetor estado, torna o sistema simétrico. Assim, os sistemas de lei de balanço na forma canônica (3.3), que estão dotados de uma entropia convexa, são necessariamente hiperbólicos. Como exemplo, podemos ver que a lei de balanço simples ($n = 1$)

$$\partial_t u(x, t) + \operatorname{div} G(u(x, t), x, t) = \bar{\omega}(u(x, t), x, t), \quad (3.9)$$

é sempre hiperbólica. Qualquer função $\eta(u, x, t)$ pode servir como entropia, com fluxo entropia associado e produção de entropia computadas por

$$Q = \int^u \frac{\partial \eta}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial u} du, \quad (3.10)$$

$$h = \sum_{\alpha=1}^m \left[\frac{\partial \eta}{\partial u} \frac{\partial G_\alpha}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_\alpha} \right] + \bar{\omega} \frac{\partial \eta}{\partial u} + \frac{\partial \eta}{\partial t}. \quad (3.11)$$

A Lei de conservação escalar homogênea (3.9), e suas versões unidimensionais ($m = 1$), servirão como modelos para o desenvolvimento da teoria de sistemas gerais.

3.3 O Problema de Cauchy

Nesta seção apresentaremos o problema de Cauchy e as definições de solução clássica e solução fraca respectivas. A referência para esta seção é [9]. Vamos focar nosso estudo em sistemas hiperbólicos homogêneos de leis de conservação na forma canônica,

$$\partial_t U(x, t) + \operatorname{div} G(U(x, t)) = 0. \quad (3.12)$$

A mesma análise pode ser estendida de forma rotineira a sistemas hiperbólicos gerais de leis de balanço, onde a variável espacial x toma valores em \mathbb{R}^m e o tempo t toma valores em $[0, T)$ para algum $T > 0$ ou possivelmente $T = \infty$. O vetor estado U toma valores em algum subconjunto aberto \mathcal{O} de \mathbb{R}^n e $G = (G_1, \dots, G_m)$ é uma função suave de \mathcal{O} a $\mathbb{M}^{n \times m}$. O Sistema (3.12) é hiperbólico quando, para todo $U \in \mathcal{O}$ fixo e $\nu \in S^{m-1}$, a matriz $n \times n$

$$\Lambda(\nu; U) = \sum_{\alpha=1}^m \nu_\alpha D G_\alpha(U) \quad (3.13)$$

possui autovalores reais $\lambda_1(\nu; U), \dots, \lambda_n(\nu; U)$ e n autovetores linearmente independentes $R_1(\nu; U), \dots, R_n(\nu; U)$. Para formular o *Problema de Cauchy*, atribuímos as condições iniciais

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad (3.14)$$

onde U_0 é uma função de \mathbb{R}^m a \mathcal{O} .

Definição 3.3. Uma *solução clássica* de (3.12) é uma função localmente lipschitziana U , definida em $\mathbb{R}^n \times [0, T)$ e tomando valores em \mathcal{O} , que satisfaz (3.12) em quase todo ponto. Esta função resolve o problema de Cauchy, com dado inicial U_0 , se também satisfaz (3.14) para todo $x \in \mathbb{R}^m$.

Vamos supor agora que o Sistema (3.12) possui a entropia η com fluxo de entropia Q , com a relação

$$DQ_\alpha(U) = D\eta(U)DG_\alpha(U), \quad \alpha = 1, \dots, m. \quad (3.15)$$

Neste caso, qualquer solução clássica de (3.12) satisfaz a lei de conservação adicional

$$\partial_t \eta(U(x, t)) + \operatorname{div} Q(U(x, t)) = 0. \quad (3.16)$$

Teorema 3.4. *Suponha que (3.12) é um sistema hiperbólico com velocidades características $\lambda_1(\nu; U) \leq \dots \leq \lambda_n(\nu; U)$ que possui a entropia $\eta(U)$ associada com o fluxo de entropia $Q(U)$. Suponha que $U(x, t)$ é uma solução clássica de (3.12) em $\mathbb{R}^m \times [0, T)$, com dado inicial (3.14), onde U_0 é constante no semi-espaco $\{x \in \mathbb{R}^m : U_0(x) = \bar{U}, x \cdot \xi \geq 0 \text{ para algum } \xi \in S^{m-1}\}$. Além disso, suponha que $D^2\eta(\bar{U})$ é definida positiva. Então, para qualquer $t \in [0, T)$, $U(x, t) = \bar{U}$ sempre que $x \cdot \xi \geq \lambda_n(\xi; \bar{U})t$.*

Definição 3.5. Uma *solução fraca* para (3.12), é uma função U localmente limitada e mensurável definida em $\mathbb{R}^m \times [0, T)$ e tomando valores em \mathcal{O} que satisfaz (3.12) no sentido das distribuições. Ou seja, para toda função teste de Lipschitz $\Phi \in C_0^\infty$, com suporte compacto em $\mathbb{R}^m \times [0, T)$ e valores em $\mathbb{M}^{1 \times n}$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} \left[\partial_t \Phi U + \sum_{\alpha=1}^m \partial_\alpha \Phi G_\alpha(U) \right] dx dt + \int_{\mathbb{R}^m} \Phi(x, 0) U_0(x) dx = 0. \quad (3.17)$$

Teorema 3.6. *Seja U uma solução fraca limitada de (3.12) em $[0, T)$ tal que, para qualquer $t \in [0, T)$ fixo, $U(\cdot, t) \in BV(\mathbb{R}^m)$ e $TV_{\mathbb{R}^m} U(\cdot, t) \leq V$, para todo $t \in [0, T)$. Então, $t \rightarrow U(\cdot, t)$ é Lipschitz contínua em $L^1(\mathbb{R}^m)$ em $[0, T)$,*

$$\|U(\cdot, \sigma) - U(\cdot, \tau)\|_{L^1(\mathbb{R}^m)} \leq aV|\sigma - \tau|, \quad 0 \leq \tau < \sigma < T, \quad (3.18)$$

onde “ a ” depende unicamente da constante de Lipschitz de G . Em particular, U está em BV_{loc} , em $\mathbb{R}^m \times [0, T)$.

Demonstrações detalhadas dos teoremas 3.4 e 3.6 podem ser consultadas em [9].

Observação 3.7. Para as soluções BV_{loc} do Sistema (3.12), que estão na forma canônica, a condição de salto de Rankine-Hugoniot (3.4) se escreve como

$$-s[U_+ - U_-] + [G(U_+) - G(U_-)]\nu = 0, \quad (3.19)$$

onde $\nu \in \mathbb{S}^{m-1}$.

Observação 3.8. Estender a noção de solução clássica a solução fraca introduz uma nova dificuldade: não unicidade. Para ver isso, veja o seguinte:

Exemplo: Considere a família de soluções do problema de Cauchy para a equação de Burgers

$$\partial_t u(x, t) + \partial_x \left(\frac{1}{2} u^2(x, t) \right) = 0, \quad (3.20)$$

com dados iniciais

$$u(x, 0) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Este é um exemplo do *Problema de Riemann*, que admite infinitas soluções fracas, incluindo a família

$$u_\alpha(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ \frac{x}{t}, & \text{se } 0 < x \leq \alpha t \\ \alpha, & \text{se } \alpha t < x \leq \frac{\alpha+1}{2}t, \\ 1, & \text{se } \frac{\alpha+1}{2}t < x, \end{cases} \quad (3.22)$$

para qualquer $\alpha \in [0, 1]$. (veja [20])

Outros exemplos interessantes podem ser encontrados em [3] e [16].

Com a perda de unicidade, se faz necessário usar critérios ou condições de admissibilidade adicionais para garantir a unicidade, ou equivalentemente, selecionar a solução fisicamente correta dentre todas as soluções fracas existentes.

3.4 Condição de admissibilidade da Entropia

Apresentaremos nesta seção, uma condição de admissibilidade para as soluções de (3.12). As referências usadas aqui são [9] e [19]. Suponha agora que o Sistema (3.12) é

dotado com uma entropia η , associado com o fluxo entropia Q , satisfazendo (3.15). Uma solução fraca de (3.12), definida em $\mathbb{R}^m \times [0, T)$, satisfaça o *Cr terio de Admissibilidade da Entropia* relativo a η , se

$$\partial_t \eta(U(x, t)) + \operatorname{div} Q(U(x, t)) \leq 0, \quad (3.23)$$

no sentido das distribui es em $\mathbb{R}^m \times [0, T)$.

Observa o 3.9. Claramente, toda soluço clássica de (3.12)   admissível desde que satisfaz (3.16). Além disso, o critério de admissibilidade da entropia induz uma condi o de *irreversibilidade* nas solu es: se $U(x, t)$   uma soluço fraca admissível de (3.12) que satisfaz (3.23) como uma desigualdade estrita, então $\bar{U} = U(-x, -t)$, que   soluço, não   admissível.

Uma questão natural  : Como se pode designar uma entropia apropriada para o critério de admissibilidade?.   desejável que o critério de admissibilidade induzido pela entropia designada deve ser compatível com as condi es de admissibilidade induzidas pelos critérios alternativos, introduzidos posteriormente. Como veremos, os requisitos acima referidos são satisfeitos quando a entropia designada $\eta(U)$   convexa. Precisamos ter em mente que a convexidade   uma propriedade relevante da entropia somente quando o sistema estiver em forma canônica. No caso geral, a convexidade de η deve ser substituída pela condi o de que a derivada $DB(U, x, t)$ da fun o $B(U, x, t)$ em (3.6)   definida positiva.

Observa o 3.10. Sempre que uma soluço admissível U   de classe BV_{loc} , o Teorema 2.21 implica que a medida de produ o de entropia está concentrada no conjunto de pontos de descontinuidade de salto aproximada de U , i. ., nas frentes de choque. Neste caso, a Desigualdade (3.23) reduz-se   condi o local (2.40), que na presente notaq o assume a forma

$$-s[\eta(U_+) - \eta(U_-)] + [Q(U_+) - Q(U_-)]\nu \leq 0. \quad (3.24)$$

Para a admissibilidade de U relativa   entropia η , a desigualdade (3.24) deve ser testada em qualquer ponto de um choque que se propaga na dire o $\nu \in S^{m-1}$ com velocidade s .

4 SISTEMAS HIPERBÓLICOS DE LEIS DE BALANÇO NUMA DIMENSÃO ESPACIAL

4.1 Leis de Balanço numa dimensão espacial

Nesta seção apresentaremos dois exemplos clássicos sobre leis de balanço numa dimensão espacial. Os exemplos apresentados podem ser consultados com mais detalhe em [9]. Exemplos interessantes podem ser consultados em [7] e em [19].

Quando $m = 1$, o sistema geral de leis de balanço reduz-se a

$$\partial_t H(U(x, t), x, t) + \partial_x F(U(x, t), x, t) = \Pi(U(x, t), x, t), \quad (4.1)$$

Os sistemas (4.1) surgem naturalmente no estudo do fluxo de gás em dutos, vibração de barras ou cordas, etc., em que o próprio meio é modelado como unidimensional. O exemplo mais simples é o sistema homogêneo de leis de conservação escalar

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0. \quad (4.2)$$

Apesar de sua aparente simplicidade, a lei de conservação escalar fornece informações valiosas em processos complexos como na física e em outras ciências. Vamos ver agora dois exemplos de lei de balanço unidimensional deduzidos da Equação de Calor com Isolante Termoelástico.

Exemplo 1: *Versão Unidimensional da Equação de Calor com Isolante Termoelástico*

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x v = 0 \\ \partial_t v + \partial_x p(u, s) = 0 \\ \partial_t [\epsilon(u, s) + \frac{1}{2}v^2] + \partial_x [vp(u, s)] = 0, \end{cases} \quad (4.3)$$

onde u é o volume específico ($u = 1/\rho$), v denota a velocidade, ϵ é a energia interna e p representa a pressão. Este sistema é hiperbólico se

$$\epsilon_s(u, s) > 0, \quad \epsilon_{uu}(u, s) > 0. \quad (4.4)$$

Exemplo 2: No caso isentrópico, (4.3) reduz-se a

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x v = 0 \\ \partial_t v - \partial_x \sigma(u) = 0, \end{cases} \quad (4.5)$$

que é hiperbólico quando $\sigma'(u) > 0$.

Para maiores detalhes sobre os exemplos anteriores, consultar [9].

4.2 Hiperbolicidade e Hiperbolicidade Estrita

Apresentaremos nesta seção as definições sobre hiperbolicidade seguindo o texto [9]. Consideramos o sistema homogêneo de leis de conservação da forma canônica:

$$\partial_t U(x, t) + \partial_x F(U(x, t)) = 0, \quad (4.6)$$

onde $U \in \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$, com \mathcal{O} aberto e convexo e a função $F : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^3 . Note que o Sistema (4.6) pode ser escrito como $\partial_t U + DF(U)U_x = 0$, quando U for contínuo. No caso que $DF(U)$ é uma matriz $n \times n$ constante, dizemos que (4.6) é um *sistema de leis de conservação linear*.

Definição 4.1. O Sistema (4.6) é *hiperbólico*, se para todo $U \in \mathcal{O}$, a matriz jacobiana $DF(U)$ tem autovalores reais $\lambda_1(U) \leq \lambda_2(U) \leq \dots \leq \lambda_n(U)$ e n autovetores linearmente independentes $R_1(U), R_2(U), \dots, R_n(U)$.

Definição 4.2. O Sistema (4.6) é *estritamente hiperbólico*, se para qualquer $U \in \mathcal{O}$, o Jacobiano $DF(U)$ possui autovalores reais distintos

$$\lambda_1(U) < \lambda_2(U) < \dots < \lambda_n(U). \quad (4.7)$$

Se o Sistema (4.6) é estritamente hiperbólico, então vamos ter associado a cada autovalor λ_i os autovetores direito e esquerdo associados $R_i(U) \in \mathbb{R}^n$ e $L_i(U)$ respectivamente tais que:

$$L_i DF(U) = \lambda_i L_i, \quad DF(U) R_i = \lambda_i R_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (4.8)$$

normalizados por:

$$L_i(U) R_j(U) = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j, \\ 0, & \text{if } i \neq j. \end{cases} \quad (4.9)$$

Daqui em diante vamos reservar as notações λ_i , R_i e L_i para estes objetos. Assim, para o Sistema (4.5) temos que

$$\lambda_1 = -\sigma'(u)^{1/2}, \quad \lambda_2 = \sigma'(u)^{1/2}, \quad (4.10)$$

$$R_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sigma'(u)^{-1/2} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sigma'(u)^{-1/2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

$$L_1 = (-\sigma'(u)^{1/2}, -1), \quad L_2 = (-\sigma'(u)^{1/2}, 1). \quad (4.12)$$

Definição 4.3. O autovalor λ_i de DF é chamado a *i-velocidade característica*, $i = 1, 2, \dots, n$, do Sistema (4.6). Este termo deriva da seguinte definição.

Definição 4.4. Uma *i-característica*, $i = 1, 2, \dots, n$, do Sistema (4.6), associado com a solução clássica U , é uma função $x = x(t)$ de classe C^1 , com seu gráfico contido no domínio de U , que é uma curva integral da equação diferencial ordinária

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i(U(x, t)). \quad (4.13)$$

4.3 Par Entropia - Fluxo de Entropia

Nesta seção apresentaremos uma fórmula explícita para computar o par entropia-fluxo de entropia. As referências usadas são [9] e [19].

Adaptando a discussão da Seção 3.2 nas condições atuais, inferimos que as funções η e q em \mathcal{O} constituem um par entropia-fluxo de entropia para o Sistema (4.6) se

$$Dq(U) = D\eta(U)DF(U), \quad U \in \mathcal{O}. \quad (4.14)$$

Além disso, a condição de integrabilidade (3.8) aqui reduz-se a

$$D^2\eta(U)DF(U) = DF(U)^T D^2\eta(U), \quad U \in \mathcal{O}. \quad (4.15)$$

Ao multiplicar (4.15) na esquerda por $R_j(U)^T$ e na direita por $R_k(U)$, $j \neq k$, deduzimos que (4.15) é equivalente a

$$R_j(U)^T D^2\eta(U)R_k(U) = 0, \quad j, k = 1, \dots, n; \quad j \neq k \quad (4.16)$$

se $\lambda_j(U) \neq \lambda_k(U)$. Observe que a exigência que alguma entropia η seja convexa, pode agora ser convenientemente expressada como

$$R_j(U)^T D^2\eta(U)R_j(U) > 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.17)$$

Quando o Sistema (4.6) é simétrico,

$$DF(U)^T = DF(U), \quad U \in \mathcal{O}, \quad (4.18)$$

admite dois pares de entropia-fluxo de entropia interessantes:

$$\eta = \frac{1}{2}|U|^2, \quad q = U \cdot F(U) - h(U), \quad (4.19)$$

$$\eta = h(U), \quad q = \frac{1}{2}|F(U)|^2, \quad (4.20)$$

onde h é definido pela condição

$$Dh(U) = F(U)^\top. \quad (4.21)$$

Assim, os sistemas (4.3) e (4.5) estão dotados com os seguintes pares de entropia-fluxo de entropia, respectivamente

$$\eta = -s, \quad q = 0, \quad (4.22)$$

$$\eta = \frac{1}{2}v^2 + e(u), \quad q = -v\sigma(u), \quad e(u) = \int^u \sigma(\omega)d\omega, \quad (4.23)$$

4.4 Não Linearidade Genuína e Degeneração linear

Uma característica que distingue o comportamento dos sistemas hiperbólicos lineares e não-lineares de leis de conservação é que, na primeira, as velocidades características são constantes, ou seja, as ondas da mesma família se propagam com velocidade fixa. No segundo, as velocidades das ondas variam com a amplitude da onda. Em nosso estudo encontraremos manifestações de não-linearidade, e em todos os casos notaremos que seus efeitos são particularmente pronunciados quando as velocidades características λ_i variam na direção dos correspondentes autovetores R_i . A referência usada para esta seção é [9].

Definição 4.5. Para o Sistema hiperbólico de leis de conservação (4.6) em \mathcal{O} , U em \mathcal{O} é chamado um *estado genuinamente não linear da i -família característica* se

$$D\lambda_i(U)R_i(U) \neq 0, \quad (4.24)$$

ou um *estado linearmente degenerado da i -família característica* se

$$D\lambda_i(U)R_i(U) = 0. \quad (4.25)$$

Quando (4.24) é válido para todo $U \in \mathcal{O}$, i - é uma *família característica genuinamente não-linear*, enquanto que se (4.25) é satisfeita para todo $U \in \mathcal{O}$, então i - é uma *família característica linearmente degenerada*. Quando toda família característica é genuinamente não-linear, (4.6) é um *sistema genuinamente não-linear*.

É claro que a i -família característica é linearmente degenerada se, e somente se, a i -velocidade característica λ_i é constante ao longo da curva integral do campo vetorial R_i .

Teorema 4.6. *Se no Sistema hiperbólico de leis de conservação (4.6), as j - e k -velocidades características coincidem: $\lambda_j(U) = \lambda_k(U)$, $U \in \mathcal{O}$, então as j - e k -famílias características são linearmente degeneradas.*

A demonstração do Teorema 4.6 pode ser consultada em [2].

4.5 Ondas Simples

A teoria apresentada nesta seção sobre ondas simples segue de [9].

No contexto das soluções clássicas, a Lei de conservação escalar (4.2), com velocidades características $\lambda = f'(u)$, toma a forma

$$\partial_t u(x, t) + \lambda(u(x, t)) \partial_x u(x, t) = 0. \quad (4.26)$$

Em virtude de (4.26), u permanece constante ao longo das características e isso, por sua vez, implica que cada característica se propaga com velocidade constante, i.é., é uma linha reta. Os sistemas hiperbólicos do tipo (4.6) das leis de conservação admitem soluções especiais com as mesmas características:

Definição 4.7. Uma Solução U de classe C^1 do Sistema hiperbólico de leis de conservação (4.6) é chamada uma *i -onda simples* se U permanece constante ao longo da i -característica associada com ela.

Assim, uma função U de classe C^1 , definida num subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 e tomando valores em \mathcal{O} , é uma i -onda simples se satisfaz (4.6) junto com

$$\partial_t U(x, t) + \lambda_i(U(x, t)) \partial_x U(x, t) = 0. \quad (4.27)$$

Em particular, em uma i -onda simples, cada i -característica se propaga com velocidade constante e, portanto, é uma linha reta.

Se U é uma i -onda simples, de (4.6) com (4.27) deduzimos

$$\begin{cases} \partial_x U(x, t) = a(x, t) R_i(U(x, t)) \\ \partial_t U(x, t) = -a(x, t) \lambda_i(U(x, t)) R_i(U(x, t)), \end{cases} \quad (4.28)$$

onde a é um campo escalar. Inversamente, qualquer função U de C^1 que satisfaz (4.28) é uma i -onda simples.

Seja (x, t) um ponto do domínio da i -onda simples U de (4.6), denotaremos com $\xi(x, t)$ a inclinação em (x, t) , da i -característica associada com U , i.é.

$$\xi(x, t) = \lambda_i(U(x, t)). \quad (4.29)$$

A derivada de ξ na direção da linha com inclinação ξ é zero, i.é.,

$$\partial_t \xi + \xi \partial_x \xi = 0. \quad (4.30)$$

Assim, ξ satisfaz a equação de Burgers.

Definição 4.8. Na vizinhança de qualquer ponto (\bar{x}, \bar{t}) no domínio de U , vamos dizer que a i -onda simples é uma i -rarefação se $\partial_x \xi(\bar{x}, \bar{t}) > 0$ (se a i -característica diverge), ou uma i -compressão se $\partial_x \xi(\bar{x}, \bar{t}) < 0$ (se a i -característica converge).

Desde que em uma onda i -simples U permanece constante ao longo da i -característica, numa pequena vizinhança \mathcal{X} de qualquer ponto (\bar{x}, \bar{t}) onde $\partial_x \xi(\bar{x}, \bar{t}) \neq 0$, podemos usar a única variável ξ para rotular U , i.é., existe uma função V_i , definida em um intervalo $(\bar{\xi} - \epsilon, \bar{\xi} + \epsilon)$, com $\bar{\xi} = \lambda_i(U(\bar{x}, \bar{t}))$, tomando valores em \mathcal{O} e tais que

$$U(x, t) = V_i(\xi(x, t)), \quad (x, t) \in \mathcal{X}. \quad (4.31)$$

Além disso, em virtude de (4.28) e (4.29), V_i satisfaz

$$V_i^\bullet(\xi) = b(\xi)R_i(V_i(\xi)), \quad \xi \in (\bar{\xi} - \epsilon, \bar{\xi} + \epsilon), \quad (4.32)$$

$$\lambda_i(V_i(\xi)) = \xi, \quad \xi \in (\bar{\xi} - \epsilon, \bar{\xi} + \epsilon), \quad (4.33)$$

onde b é uma função escalar e o ponto (\bullet) denota a derivada com respeito a ξ .

Inversamente, se V_i satisfaz (4.32), (4.33) e ξ é uma solução C^1 de (4.30), tomando valores no intervalo $(\bar{\xi} - \epsilon, \bar{\xi} + \epsilon)$, então $U = V_i(\xi(x, t))$ é uma i -onda simples. (veja [9]).

Definição 4.9. Uma *Curva de Onda da i -rarefação* no espaço estado \mathbb{R}^n , para o Sistema hiperbólico (4.6), é uma curva $U = V_i(\cdot)$, onde a função V_i satisfaz (4.32) e (4.33).

Teorema 4.10. *Suponha que $\bar{U} \in \mathcal{O}$ é um estado de não linearidade genuína da i -família característica do Sistema hiperbólico (4.6) de leis de conservação. Então existe uma única curva de onda da i -rarefação V_i através de \bar{U} . Se R_i for normalizado em uma vizinhança de \bar{U} através de*

$$D\lambda_i(U)R_i(U) = 1, \quad (4.34)$$

e V_i é reparametrizado por $\tau = \xi - \bar{\xi}$, onde $\bar{\xi} = \lambda_i(\bar{U})$, então V_i é a solução da equação diferencial ordinária

$$V_i^\bullet = R_i(V_i), \quad (4.35)$$

com condição inicial $V_i(0) = \bar{U}$. Em particular, V_i é C^3 .

A notação $V_i(\tau; \bar{U})$ será empregada quando for necessário indicar o ponto de origem desta curva de onda de rarefação.

A demonstração detalhada deste teorema pode ser consultada em [9].

4.6 Condições de Admissibilidade

As definições e resultados apresentados nesta seção seguem de [9]. Como textos de referência adicionais se recomenda consultar [3], [16] e [19].

Considere o sistema hiperbólico

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0, \quad (4.36)$$

Em uma dimensão espacial, a condição de salto de Rankine Hugoniot é

$$F(U_+) - F(U_-) = s(U_+ - U_-). \quad (4.37)$$

Definição 4.11. Quando (4.37) é válido, dizemos que o estado U_- , à esquerda, está unido ao estado U_+ , à direita, por um choque de velocidade s . O salto $U_+ - U_-$ é a amplitude e seu módulo $|U_+ - U_-|$ é a força do choque. Os choques estabelecidos sem restrição da força de choque, são chamadas de *choques fortes*. Quando a força de choque possui a restrição: $|U_+ - U_-| < \delta$, com δ dependendo unicamente do módulo das primeiras derivadas dos λ_i e R_i , o choque é chamado de *força moderada*; enquanto que δ também depende do módulo das segundas derivadas, o choque é denominado um *choque fraco*.

Observe que (4.37) pode ser escrito como

$$[A(U_-, U_+) - sI](U_+ - U_-) = 0, \quad (4.38)$$

onde

$$A(V, U) = \int_0^1 \mathbf{D}F(\tau U + (1 - \tau)V) d\tau. \quad (4.39)$$

Assim, s deve ser um autovalor real de $A(U_-, U_+)$, com autovetor associado $U_+ - U_-$. Se para algum $\bar{U} \in \mathcal{O}$ a velocidade característica $\lambda_i(\bar{U})$ é um autovalor simples de

$DF(\bar{U})$, então para V e U perto de \bar{U} , $A(V, U)$ terá um autovalor real simples $\mu_i(V, U)$ com autovetor associado $S_i(V, U)$. Em particular $A(U, U) = DF(U)$ de onde obtemos $\mu_i(U, U) = \lambda_i(U)$, $S_i(U, U) = R_i(U)$. Note que $A(V, U)$, $\mu_i(V, U)$ e $S_i(V, U)$ são simétricas em (V, U) . Portanto, a expansão (finita) de Taylor destas funções sobre o ponto médio $\frac{1}{2}(V + U)$ produz

$$\mu_i(V, U) = \lambda_i\left(\frac{1}{2}(V + U)\right) + O(|V - U|^2), \quad (4.40)$$

$$S_i(V, U) = R_i\left(\frac{1}{2}(V + U)\right) + O(|V - U|^2). \quad (4.41)$$

Suponha que para um choque de força moderada

$$s = \mu_i(U_-, U_+), \quad (4.42)$$

$$U_+ - U_- = \zeta S_i(U_-, U_+). \quad (4.43)$$

Assim, s estará perto da velocidade característica λ_i . Tal choque é então chamado de *i-choque*.

4.6.1 Locus de Hugoniot

O conjunto de pontos U no espaço de estado \mathbb{R}^n que pode ser unido a um ponto fixo \bar{U} por um choque é chamado o *Locus de Hugoniot* de \bar{U} . Ele tem uma estrutura geométrica simples na vizinhança de qualquer ponto U de hiperbolicidade estrita do sistema.

Teorema 4.12. *Para um estado dado $\bar{U} \in \mathcal{O}$, suponha que a velocidade característica $\lambda_i(\bar{U})$ é um autovalor simples de $DF(\bar{U})$. Então existe uma curva $U = W_i(\tau)$ de classe C^3 no espaço de estado, chamado a curva *i-choque* através de \bar{U} , e uma função $s = s_i(\tau)$ de classe C^2 , ambas definidas para τ em alguma vizinhança de 0, com a seguinte propriedade: Um estado U pode ser unido a \bar{U} por um *i-choque* de força moderada e velocidade s se, e somente se, $U = W_i(\tau)$, $s = s_i(\tau)$, para algum τ . Além disso, $W_i(0) = \bar{U}$ e*

$$s_i(0) = \lambda_i(\bar{U}), \quad (4.44)$$

$$s_i^\bullet(0) = \frac{1}{2}D\lambda_i(\bar{U})R_i(\bar{U}), \quad (4.45)$$

$$W_i^\bullet(0) = R_i(\bar{U}), \quad (4.46)$$

$$W_i^{\bullet\bullet}(0) = DR_i(\bar{U})R_i(\bar{U}). \quad (4.47)$$

A notação $W_i(\tau; \bar{U})$, $s_i(\tau; \bar{U})$ vai ser empregada quando se precisa identificar o ponto de origem desta curva de choque.

Uma demonstração elegante deste teorema pode ser consultada em [22].

Em particular, se \bar{U} é um ponto de hiperbolicidade estrita de (4.36), o Teorema 4.12 implica que o Locus Hugoniot de \bar{U} é a união de n curvas de choque, uma para cada família característica.

4.6.2 O Critério de Admissibilidade de Lax

Consideremos uma solução de (4.36), no semiplano superior, constituído por um estado constante U_- (à esquerda) unido a uma estado constante U_+ (à direita) por um choque $x = st$. Suponha que a velocidade s do choque satisfaça

$$\begin{cases} \lambda_1(U_-) \leq \dots \leq \lambda_{i-1}(U_-) < s < \lambda_i(U_-) \leq \dots \leq \lambda_n(U_-) \\ \lambda_1(U_+) \leq \dots \leq \lambda_j(U_+) < s < \lambda_{j+i}(U_+) \leq \dots \leq \lambda_n(U_+), \end{cases} \quad (4.48)$$

para algum $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, n$, com o entendimento que se $i = 1$ então $\lambda_{i-1}(U_-) = -\infty$ e se $j = n$ então $\lambda_{n+1}(U_+) = \infty$.

Comumente, os choques satisfazem (4.48) com $i = j$ de modo que

$$\begin{cases} \lambda_{i-1}(U_-) < s < \lambda_i(U_-) \\ \lambda_i(U_+) < s < \lambda_{i+1}(U_+). \end{cases} \quad (4.49)$$

Neste caso, o choque é chamado *compressivo*.

Um choque que satisfaz (4.48) com $i < j$ é chamado *sobre compressivo*. No caso que o choque satisfaz (4.48) com $i > j$, o choque é chamado *sub compressivo*. No entanto, quando choques desse tipo surgem nas aplicações, as condições de salto de Rankine-Hugoniot são complementadas com equações da forma $G(U_-, U_+, s) = 0$ que tornam a solução única.

As condições (4.48) excluem choques que viajam com velocidade característica mas tais choques existem. Em particular, qualquer choque que une U_- (à esquerda) com U_+ (à direita) e viajando com velocidade s será chamado de *i-descontinuidade de contato esquerdo* se $s = \lambda_i(U_-)$, uma *i-descontinuidade de contato direita* se $s = \lambda_i(U_+)$ e simplesmente uma *i-descontinuidade de contato* se $s = \lambda_i(U_-) = \lambda_i(U_+)$.

No que segue, assumimos que λ_i é um autovalor simples de DF e a atenção com foco em choques *i*-compressivos de força moderada. Nesse caso, $|s - \lambda_i|$ é pequena comparada

com $\lambda_{i+1} - \lambda_i$ e $\lambda_i - \lambda_{i-1}$, de modo que a primeira e a quarta desigualdades em (4.49) sempre valem. As duas desigualdades restantes, permitem para as i -descontinuidades de contato esquerda e/ou direita, combinar em

$$\lambda_i(U_+) \leq s \leq \lambda_i(U_-), \quad (4.50)$$

que é a *E-condição de Lax*. Além disso, como $U_+ - U_-$ é quase colinear a $R_i(U_\pm)$, (4.50) segue da hiperbolicidade. No caso da lei de conservação escalar (4.2) a velocidade é $\lambda(u) = f'(u)$ e assim (??) se escreve como

$$f'(u_+) \leq s \leq f'(u_-), \quad (4.51)$$

onde s é a velocidade de choque computada através da condição de salto de Rankine-Hugoniot:

$$s = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}. \quad (4.52)$$

4.6.3 O Critério de Admissibilidade do Choque de Liu

O critério de admissibilidade de choque de Liu é mais restrito que a E-condição de Lax. Pela construção, faz sentido apenas no contexto de choques que unem estados que podem ser conectados por curvas de choque.

Para um estado dado U_- , suponha $\lambda_i(U_-)$ é um autovalor simples de $DF(U_-)$ de modo que a curva do i -choque $W_i(\tau; U_-)$ através de U_- está bem definida, pelo Teorema 4.12. O i -choque que liga U_- , à esquerda, a um estado $U_+ = W_i(\tau_+; U_-)$, à direita, de velocidade s , satisfaz a E-condição de Liu se

$$s = s_i(\tau_+; U_-) \leq s_i(\tau; U_-). \quad \text{para todo } \tau \text{ entre } 0 \text{ e } \tau_+. \quad (4.53)$$

Como U_- e U_+ são unidos por um i -choque, U_- também deve estar na curva i -choque emanando de U_+ , digamos $U_- = W_i(\tau_-; U_+)$. A justificativa do critério de admissibilidade de Liu, é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 4.13. *Suponha que a i -família característica é genuinamente não linear e λ_i é uma velocidade característica simples. Então os i -choques fracos satisfazem a E-condição de Liu se, e somente se, satisfazem a E-condição de Lax.*

A demonstração deste teorema é apresentada por Liu em [18].

4.6.4 O Critério de Admissibilidade do Choque Entropia

A ideia de empregar desigualdades de entropia para eliminar soluções fracas e espúrias de sistemas hiperbólicos gerais das leis de conservação foi introduzida no capítulo anterior. Para o Sistema (4.36), em uma dimensão espacial, (3.24) assume a forma

$$-s[\eta(U_+) - \eta(U_-)] + q(U_+) - q(U_-) \leq 0, \quad (4.54)$$

onde (η, q) é o par entropia-fluxo de entropia satisfazendo (4.14), $Dq = D\eta DF$. A quantidade no lado esquerdo de (4.54) será denominada doravante, a *produção de entropia através do choque*.

O fato de que a condição de entropia se reduz a um teste pontual em choques desempenhou um papel importante na opinião de que a admissibilidade só deve ser testada para os choques, isto é, que uma solução *BV* geral fraca será admissível se, e somente se, cada um dos seus choques é admissível.

Teorema 4.14. *Quando a i -família característica é linearmente degenerada, a produção de entropia através de qualquer i -choque (i -descontinuidade de contato) é zero.*

A demonstração do Teorema 4.14 pode ser revisada em [10].

Teorema 4.15. *Quando a i -família característica é genuinamente não linear e λ_i é uma velocidade característica simples, a condição de admissibilidade de entropia e a E -condição de Lax para i -choques fracos são equivalentes.*

Lax apresenta uma demonstração para este Teorema em [15].

5 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE RIEMANN

5.1 Solução Auto-Semelhante do Problema de Riemann

Apresentaremos nesta seção algumas propriedades das soluções auto-semelhantes, seguindo os textos [8] e [9].

O sistema de leis de conservação

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0, \quad (5.1)$$

é invariante sob alongamento uniforme de coordenadas: $(x, t) \rightarrow (\alpha x, \alpha t)$; daí admite soluções auto-similares, definidas no plano espaço-tempo e constantes ao longo de linhas retas, saindo da origem. Uma vez que (5.1) também é invariante sob translações de coordenadas: $(x, t) \rightarrow (x + \bar{x}, t + \bar{t})$, o ponto focal de soluções auto-similares pode ser trasladado da origem para qualquer ponto fixo (\bar{x}, \bar{t}) no espaço-tempo. A solução auto-similar U de (5.1) (geralmente fraca), definida na parte superior ou sobre o semi-plano inferior e focado na origem admite a representação

$$U(x, t) = V\left(\frac{x}{t}\right), \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty, \quad (5.2)$$

onde V é uma função mensurável limitada em $(-\infty, \infty)$, que satisfaz a equação diferencial ordinária

$$(F \circ V)^\bullet(\xi) - \xi V^\bullet(\xi) = 0, \quad (5.3a)$$

onde $\xi = \frac{x}{t}$ e o ponto denota a diferenciação com respeito a ξ . A equação anterior é equivalente a

$$[F(V(\xi)) - \xi V(\xi)]^\bullet + V(\xi) = 0, \quad (5.3b)$$

no sentido das distribuições. De fato, se U é dado por (5.2) e $\phi \in C^\infty$ é uma função teste com suporte compacto em $(-\infty, \infty) \times (0, \infty)$, então

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [\partial_t \phi(x, t) U(x, t) + \partial_x \phi(x, t) F(U(x, t))] dx dt \\ &= \int_{-\infty}^\infty \{\psi^\bullet(\xi) [F(V(\xi)) - \xi V(\xi)] - \psi(\xi) V(\xi)\} d\xi, \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde

$$\psi(\xi) = \int_0^\infty \phi(\xi t, t) dt, \quad -\infty < \xi < \infty. \quad (5.5)$$

A restrição de U para $t < 0$ na forma (5.2) é tratado de modo semelhante, produzindo novamente (5.3a).

De (5.3b) inferimos que $F(V) - \xi V$ é Lipschitz contínua em $(-\infty, \infty)$ e, além disso,

$$[F(V(\xi)) - \xi V(\xi)] - [F(V(\zeta)) - \zeta V(\zeta)] = - \int_{\zeta}^{\xi} V(\theta) d\theta, \quad (5.6)$$

para todo ζ e ξ em $(-\infty, \infty)$.

O domínio $(-\infty, \infty)$ de qualquer solução mensurável limitada V de (5.3a) é particionado nos conjuntos

$$\mathcal{S} = \{\xi \in \mathbb{R} | V \text{ é descontínua em } \xi\}, \quad (5.7a)$$

$$\mathcal{W} = \{\xi \in \mathbb{R} | V \text{ é contínua em } \xi \text{ e } \lambda_i(V(\xi)) = \xi \text{ com } i = 1, \dots, n\}, \quad (5.7b)$$

$$\mathcal{C} = \{\xi \in \mathbb{R} | V \text{ é contínua em } \xi \text{ e } \lambda_i(V(\xi)) \neq \xi \text{ com } i = 1, \dots, n\}. \quad (5.7c)$$

Toda sequência crescente $\{\zeta_k\}$ e decrescente $\{\xi_k\}$ convergindo ao ponto ξ de \mathcal{S} contém subsequências que abusando da notação denotaremos novamente por $\{\zeta_k\}$ e $\{\xi_k\}$, tais que $\{V(\zeta_k)\}$ e $\{V(\xi_k)\}$ convergem aos respectivos limites V_- e V_+ . De (5.6) temos que

$$F(V_+) - F(V_-) = \xi[V_+ - V_-]. \quad (5.8)$$

Em particular, quando os limites laterais $V(\xi \pm)$ existem, ξ marca um choque e (5.8) expressa a *Condição de Salto de Rankine Hugoniot*. No entanto, no atual nível de generalidade, não podemos excluir a possibilidade de que sequências diferentes convergindo para ξ podem gerar valores limitantes distintos V_- e/ou V_+ . Em qualquer caso, de (5.8) segue que, sempre que $|V_+ - V_-|$ é suficientemente pequeno, ξ deve estar perto de $\lambda_i(V \pm)$ para algum $i \in \{1, \dots, n\}$. Isso, por sua vez, implica que qualquer ponto de continuidade de V no fecho de \mathcal{S} deve pertencer a \mathcal{W} . Ao mesmo tempo, qualquer ponto de continuidade de V no fecho de \mathcal{W} também pertence a \mathcal{W} . Assim, $\mathcal{S} \cup \mathcal{W}$ é fechado e \mathcal{C} é aberto.

Como um conjunto aberto, \mathcal{C} é a (no máximo) união contável de intervalos abertos disjuntos. Vamos fixar ξ e ζ em qualquer destes intervalos abertos, digamos \mathcal{S} . Reescreveremos (5.6) na forma

$$(A - \xi I)[V(\xi) - V(\zeta)] = - \int_{\zeta}^{\xi} [V(\theta) - V(\zeta)] d\theta, \quad (5.9)$$

onde A é a matriz $n \times n$

$$A = \int_0^1 [s \mathbf{D}F(V(\zeta)) + (1-s) \mathbf{D}F(V(\xi))] ds. \quad (5.10)$$

Tome $\zeta \rightarrow \xi$, como ξ é delimitado pelos autovalores de A e o lado direito de (5.9) comporta-se como $O(1)$ em $|\xi - \zeta|$. Assim, (5.9) implica que V é Lipschitz em \mathcal{S} e sua derivada desaparece em quase todo ponto, i.é., V é constante em \mathcal{S} .

Vamos supor que o Sistema (5.1) é estritamente hiperbólico, e que a imagem de V está contida numa esfera $B_\delta(\bar{U})$, com raio pequeno δ , centrado em algum estado \bar{U} . O tamanho de δ está sujeito ao mesmo tipo de restrições que caracterizam os choques de força moderada do capítulo anterior. Sob estas suposições, os conjuntos \mathcal{S} e \mathcal{W} são confinados na união de n intervalos de comprimento $O(\delta)$ centrados nos pontos $\lambda_1(\bar{U}), \dots, \lambda_n(\bar{U})$; se \mathcal{S}_i e \mathcal{W}_i denotam as partes de \mathcal{S} e \mathcal{W} situadas na vizinhança de $\lambda_i(\bar{U})$, e identificamos a envoltória convexa $[\zeta_i, \xi_i]$ do conjunto fechado $\mathcal{S}_i \cup \mathcal{W}_i$. Assim, V toma valores constantes U_0, U_1, \dots, U_n em os intervalos $(-\infty, \zeta_1), (\xi_1, \zeta_2), \dots, (\xi_n, \infty)$. Cada intervalo pode conter um subconjunto aberto de \mathcal{C} que denotaremos com \mathcal{C}_i . Aqui cada $[\zeta_i, \xi_i]$ representa a i -onda do leque de ondas V . Concluimos que sob as suposições acima V compreende um leque de n ondas, uma de cada família característica, propagando-se a uma velocidade quase característica e separados por estados constantes. O leque de onda está saindo da origem quando a solução auto-semelhante é definida no meio-plano superior, ou entrando na origem quando a solução auto-semelhante é definida no semi-plano inferior. A estrutura da i -onda torna-se particularmente clara quando a função V tem variação limitada. Neste caso \mathcal{S}_i é contável e os limites laterais $V_\pm = V(\xi_\pm)$ existem em cada $\xi \in \mathcal{S}_i$, satisfazendo a condição de salto (5.8). Assim, \mathcal{S}_i consiste de i -choques. Além disso, se V é diferenciável em um ponto $\xi \in \mathcal{W}_i$, de (5.3a) e de (5.7b) resulta que

$$[DF(V(\xi)) - \xi I]V^\bullet(\xi) = 0, \quad (5.11)$$

$$D\lambda_i(V(\xi))V^\bullet(\xi) = 1. \quad (5.12)$$

Assim, $V^\bullet(\xi)$ é um vetor não nulo, colinear com o autovetor $R_i(V(\xi))$ de $DF(V(\xi))$. Além disso, $V(\xi)$ é necessariamente um estado genuinamente não linear da i -família característica. Consequentemente, a i -onda será uma onda de rarefação no caso de um leque de ondas de saída ou uma onda de compressão no caso de um leque de ondas de entrada.

Demonstramos agora que V tem variação limitada em $[\zeta_i, \xi_i]$, pelo menos quando a i -onda é *unidirecional*, no sentido de que o i -ésimo autovetor esquerdo $L_i(\bar{U})$ de $DF(\bar{U})$ pode ser orientado de tal forma que

$$L_i(\bar{U})[V(\xi) - V(\zeta)] \geq 0, \quad (5.13)$$

para qualquer par (ζ, ξ) de pontos de continuidade de V com $\xi_{i-1} < \zeta < \xi < \zeta_{i+1}$ (onde $\xi_0 = -\infty$ e $\zeta_{n+1} = \infty$).

Fixando pontos de continuidade ζ e ξ , com $\xi_{i-1} < \zeta < \xi < \zeta_{i+1}$, de (5.6) e de (5.9) temos que

$$[DF(\bar{U}) - \lambda_i(\bar{U})I][V(\xi) - V(\zeta)] = O(\delta)[V(\xi) - V(\zeta)] - \int_{\zeta}^{\xi} [V(\theta) - V(\zeta)]d\theta, \quad (5.14)$$

escrevemos

$$V(\xi) - V(\zeta) = \sum_{k=1}^n a_k R_k(\bar{U}). \quad (5.15)$$

Multiplicando (5.15) à esquerda por $L_i(\bar{U})$ e lembrando que os autovetores estão normalizados, de (4.9) e de (5.13) deduzimos que $a_i \geq 0$. Por outro lado, de (5.14) e de (5.15) temos que

$$\sum_{k \neq i} |a_k| \leq c\delta a_i + c\delta(\zeta - \xi), \quad (5.16)$$

portanto,

$$TV_{[\zeta_i, \xi_i]} V(\cdot) \leq L_i(\bar{U})[U_i - U_{i-1}] + c\delta^2. \quad (5.17)$$

Observação 5.1. No que segue, vamos considerar nosso estudo somente no *Problema de Riemann*, que consiste em determinar uma solução auto semelhante (geralmente fraca) U de (5.1) em $(-\infty, \infty) \times (0, \infty)$, com a condição inicial

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_L, & x < 0 \\ U_R, & x > 0, \end{cases} \quad (5.18)$$

onde U_L e U_R são estados dados em \mathcal{O} . Continuando com nossa discussão acima, procuraremos uma solução do problema de Riemann na forma (5.2), onde V satisfaz a equação diferencial ordinária (5.3a) em $(-\infty, \infty)$, com as condições de fronteira

$$V(-\infty) = U_L, \quad V(\infty) = U_R. \quad (5.19)$$

5.2 Solução ao Problema de Riemann via Curvas Características

O objetivo aqui é construir uma solução do problema de Riemann reunindo estados constantes, ondas de rarefação centradas e choques admissíveis. Limitamos nosso estudo para o caso em que as velocidades das ondas de diferentes famílias características estão estritamente separados. Isto abrangerá ondas de pequena amplitude em sistemas de hiperbolicidade estrita, bem como ondas de qualquer amplitude em sistemas especiais

como (4.5), em que todas as 1-ondas viajam para a esquerda e todas as 2-ondas viajam para a direita. Os textos de referência para esta seção se seguem de [8] e [9].

Teorema 5.2. *Suponha que a velocidade de onda de famílias características distintas estão estritamente separadas. Qualquer solução auto semelhante (5.2) do problema de Riemann (5.1), (5.18), com choques satisfazendo a E-condição de Lax, compreende $n + 1$ estados constantes $U_L = U_0, U_1, \dots, U_{n-1}, U_n = U_R$. Para $i = 1, \dots, n$, U_{i-1} está unido a U_i por uma i -onda, especificamente uma sequência de i -ondas de rarefação centradas e/ou i -choques com a propriedade que o i -choque cercado na esquerda (e/ou na direita) por uma i -onda de rarefação são i -descontinuidades de contato esquerdo (e/ou direito). (ver Figura 2)*

Para uma demonstração detalhada deste teorema, ver [14].

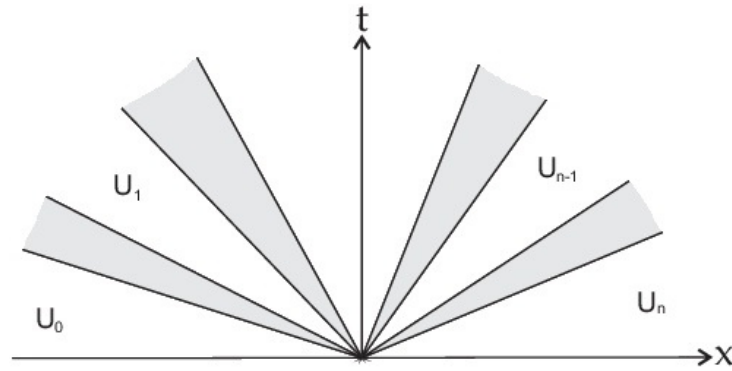


Figura 4 – Leque de ondas

Os i -choques e i -rarefações simples serão chamadas *i -ondas elementares*. O termo *i -onda composta* será empregada quando for necessário lembrar ou enfatizar que a i -onda pode conter mais de uma i -onda elementar. Em [9] se mostra que o locus de estados que podem ser unido à direita (ou esquerda) de um estado fixo $\bar{U} \in \mathcal{O}$ por uma i -onda admissível, composta de i -rarefações e i -choques admissíveis, é uma curva de Lipschitz $\Phi_i(\tau; \bar{U})$ (ou $\Psi_i(\tau; \bar{U})$), chamada a *curva da i -onda para frente (ou para trás) através de \bar{U}* , que pode ser parametrizada como

$$\Phi_i(\tau; \bar{U}) = \bar{U} + \tau R_i(\bar{U}) + P_i(\tau; \bar{U}), \quad (5.20)$$

$$\Psi_i(\tau; \bar{U}) = \bar{U} + \tau R_i(\bar{U}) + Q_i(\tau; \bar{U}), \quad (5.21)$$

onde P_i e Q_i são funções contínuas de Lipschitz de (τ, U) que se anulam em $\tau = 0$. A constante de Lipschitz torna-se arbitrariamente pequena se τ estiver restrita a uma pequena vizinhança do origem.

Considerando a existência das curvas de onda com as propriedades anteriores, para resolver o problema de Riemann, temos que determinar $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \mathbb{R}^n$, tal que começando de $U_0 = U_L$ e computando sucessivamente $U_i = \Phi(\epsilon_i; U_{i-1})$, $i = 1, \dots, n$, terminamos com $U_n = U_R$. Conseqüentemente, definimos a função

$$\Omega(\epsilon; \bar{U}) = \Phi_n(\epsilon_n; \Phi_{n-1}(\epsilon_{n-1}; \dots \Phi_1(\epsilon_1; \bar{U}) \dots)), \quad (5.22)$$

claramente,

$$\Omega(\epsilon; \bar{U}) = \bar{U} + \sum_{i=1}^n \epsilon_i R_i(\bar{U}) + G(\epsilon; \bar{U}), \quad (5.23)$$

onde G é uma função de Lipschitz que é nula em $\epsilon = 0$ e cuja constante de Lipschitz torna-se arbitrariamente pequena quando ϵ pertence a uma vizinhança suficientemente pequena do origem. Quando U_R está suficientemente próximo de U_L , existe um único ϵ próximo de 0 tal que $\Omega(\epsilon; U_L) = U_R$. Na verdade, este ϵ pode ser construído através do esquema de iteração: $\epsilon^{(0)} = 0$ e para $m = 1, 2, \dots$

$$\epsilon_i^{(m)} = L_i(U_L)[U_R - U_L] - L_i(U_L)G(\epsilon^{(m-1)}; U_L), \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.24)$$

que converge por um argumento de contração óbvio. Isso gera uma solução para o problema de Riemann que é única dentro da classe de soluções auto-similares com ondas de força moderada. O leque de onda que une U_L com U_R é convenientemente identificado por seu estado esquerdo U_L e a n -tupla $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$. O valor de ϵ_i determina a *amplitude* da i -onda e a medida $|\epsilon_i|$ a *força* da i -onda.

Teorema 5.3. *Suponha que o Sistema (5.1) é estritamente hiperbólico e que cada família característica ou é genuinamente não linear ou linearmente degenerada. Para $|U_R - U_L|$ suficientemente pequeno, existe uma única solução auto semelhante (5.2) do problema de Riemann (5.1), (5.18), com variação total pequena. Esta solução compreende $n + 1$ estados constantes $U_L = U_0, U_1, \dots, U_{n-1}, U_n = U_R$. Quando a i -família característica é linearmente degenerada, U_i está unido a U_{i-1} por uma i -descontinuidade de contato. Por outro lado, quando a i -família característica é genuinamente não linear, U_i está unido a U_{i-1} por ou uma i -onda de rarefação centrada ou um i -choque compressivo.*

A demonstraçãõ deste teorema pode ser consultada em [14].

Com a finalidade de continuar com nosso estudo, para o caso de sistemas que sãõ genuinamente nãõ linear por partes, apresentamos o seguinte teorema (que generaliza ao Teorema 5.3).

Teorema 5.4. *Suponha que o Sistema (5.1) é estritamente hiperbólico. Para $|U_R - U_L|$ suficientemente pequeno, existe uma única soluçãõ auto-semelhante (5.2) do problema de Riemann (5.1), (5.18), com variaçãõ total pequena. Esta soluçãõ compreende $n + 1$ estados constantes $U_L = U_0, U_1, \dots, U_{n-1}, U_n = U_R$ e U_i está unido a U_{i-1} por uma i -onda admissível, composta de i -rarefações e (pelo menos contável) i -choques que satisfazem a E -condiçãõ de Liu.*

A prova deste teorema é apresentada em [17]

Vamos ver a importânciã de usar choques de força moderada no seguinte exemplo.

Exemplo Considerando o sistema:

$$\begin{cases} u_t - v_x = 0, \\ v_t + \left(\frac{e^{-2u}}{2}\right)_x = 0, \end{cases}$$

temos que $F(u, v) = (-v, \frac{e^{-2u}}{2})$, além disso

$$DF = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -e^{-2u} & 0 \end{bmatrix}$$

e os respectivos autovalores e autovetores de DF sãõ

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -e^{-u}, & \lambda_2 &= e^{-u}, \\ R_1 &= \begin{bmatrix} -e^u & 1 \end{bmatrix}^\top, & R_2 &= \begin{bmatrix} e^u & 1 \end{bmatrix}^\top. \end{aligned}$$

Consideremos agora

$$\nabla\lambda_1 = \begin{bmatrix} e^{-u} & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla\lambda_2 = \begin{bmatrix} -e^{-u} & 0 \end{bmatrix},$$

portanto,

$$\begin{aligned} \nabla\lambda_1 \cdot R_1 &= \begin{bmatrix} e^{-u} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -e^u & 1 \end{bmatrix} = -1 \neq 0, \\ \nabla\lambda_2 \cdot R_2 &= \begin{bmatrix} -e^{-u} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^u & 1 \end{bmatrix} = -1 \neq 0. \end{aligned}$$

Assim, o sistema é estritamente hiperbólico e genuinamente não linear, consideremos agora os estados $U_L = (0, 0)$ e $U_R = (0, 2k)$. Então a equação para a 1-rarefação é

$$v = \int_0^u e^{-x} dx = 1 - e^{-u},$$

e para a 2-rarefação é

$$v = 2k - 1 + e^{-u}.$$

Portanto, estas curvas nunca se encontram se $k \geq 1$. Assim, o problema de Riemann não possui solução. Para maiores detalhes sobre este e outros exemplos interessantes, consultar [21].

5.3 O Critério de Admissibilidade da Taxa de Entropia

Os resultados apresentados nesta seção seguem de [8], [9] e [11].

Suponha que o Sistema (5.1) está dotado com o par entropia-fluxo de entropia $(\eta(U), q(U))$ e considere o leque de ondas admissíveis $U(x, t) = V(x/t)$, com estados finais $V(-\infty) = U_L$ e $V(\infty) = U_R$. A produção combinada de entropia dos choques em V é dada por

$$\mathcal{P}_V = \sum_{\xi} \{q(V(\xi_+)) - q(V(\xi_-)) - \xi[\eta(V(\xi_+)) - \eta(V(\xi_-))]\}, \quad (5.25)$$

onde a soma é efetuada no conjunto de pontos ξ de descontinuidade salto de V . O par entropia-fluxo de entropia $(\eta(U), q(U))$ induz uma família de pares de entropia-fluxo de entropia $(\eta(U) + \Theta U + a, q(U) + \Theta F(U))$ para $\Theta \in \mathbb{M}^{1 \times n}$ e $a \in \mathbb{R}$, devido à condição de salto Rankine Hugoniot, que eles produzem o mesmo valor da entropia. Podemos considerar, sem perder a generalidade, que

$$\eta(U_L) = \eta(U_R) = 0. \quad (5.26)$$

Após esta normalização, a taxa de variação da entropia total no leque de ondas é dada por

$$\mathcal{H}_V^\bullet = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(U(x, t)) dx = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(V(\frac{x}{t})) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(V(\xi)) d\xi. \quad (5.27)$$

Na verdade, \mathcal{P} e \mathcal{H}^\bullet estão relacionados por

$$\mathcal{H}_V^\bullet = \mathcal{P}_V + q(U_L) - q(U_R). \quad (5.28)$$

Podemos conferir isso começando com a identidade

$$\eta(V(\xi)) = [\xi\eta(V(\xi)) - q(V(\xi))]^\bullet + (q \circ V)^\bullet(\xi) - \xi(\eta \circ V)^\bullet(\xi), \quad (5.29)$$

no sentido de medidas. Note que do Teorema 2.17 temos que

$$(q \circ V)^\bullet - \xi(\eta \circ V)^\bullet = [\widetilde{Dq \circ V} - \xi\widetilde{D\eta \circ V}]V^\bullet, \quad (5.30)$$

de (4.14), (5.6) e (5.30) segue que a medida $(q \circ V)^\bullet - \xi(\eta \circ V)^\bullet$ está concentrada no conjunto de pontos de descontinuidade de salto de V . Portanto, de (5.25), (5.26) e (5.29), obtemos (5.28).

Definição 5.5. Um leque de ondas $U(x, t) = V(x/t)$, com estados finais $V(-\infty) = U_L$, $V(\infty) = U_R$ satisfaz o *critério de admissibilidade da taxa de entropia* se $\mathcal{P}_V \leq \mathcal{P}_{\bar{V}}$, ou equivalentemente $\mathcal{H}_V^\bullet \leq \mathcal{H}_{\bar{V}}^\bullet$, para qualquer outro leque de ondas $\bar{U}(x, t) = \bar{V}(x/t)$ com os mesmos estados finais $\bar{V}(-\infty) = U_L$ e $\bar{V}(\infty) = U_R$.

Teorema 5.6. *Considere um Sistema estritamente hiperbólico (5.1) de leis de conservação, dotado de um par entropia-fluxo de entropia (η, q) , onde η é (localmente) uniformemente convexo. Um leque de ondas com ondas de força moderada satisfaz o critério de admissibilidade da taxa de entropia se cada choque satisfaz a E-condição de Liu.*

Demonstração. Vamos mostrar a afirmação do teorema por contradição: dado qualquer leque de ondas contendo um choque que viola a E-Condição de Liu, construiremos um leque de ondas com taxa de entropia menor. Apresentaremos somente o caso de um leque de ondas composto de um único choque, o caso geral pode ser consultado em [8]. Suponha que os estados U_L e U_R , com $|U_R - U_L| = \delta$ positivo e pequeno, estão unidos por um i -choque de velocidade s ,

$$F(U_R) - F(U_L) = s[U_R - U_L], \quad (5.31)$$

que viola a E-Condição de Liu. Sob a premissa de normalização (5.26), a taxa de entropia para este choque é zero. O objetivo é construir um leque de ondas V , com os mesmos estados finais U_L , U_R e $\mathcal{H}_V^\bullet < 0$.

Seja $U_R = W_i(\tau_R; U_L)$, com $\tau_R > 0$. Como a E-Condição de Liu é violada, o conjunto de $T = \{\tau \in (0, \tau_R), \text{ tal que } s_i(\tau; U_L) < s\}$ é não vazio. Seja $\tau_L = \inf T$, e suponha que $\tau_L > 0$, pois o caso $\tau_L = 0$ é simples. Assim, $s_i(\tau_L; U_L) = s$, e $s_i(\tau; U_L)$ é decrescente em τ_L . Consideramos o caso genérico $s^\bullet(\tau_L; U_L) < 0$.

Estabelecendo $U_M = W_i(\tau_L; U_L)$, temos que

$$F(U_M) - F(U_L) = s[U_M - U_L]. \quad (5.32)$$

De (5.31) e (5.32),

$$F(U_R) - F(U_M) = s[U_R - U_M], \quad (5.33)$$

que mostra que U_M também está na curva i -choque que passa por U_R , ou seja, $U_M = W_i(\tau_R; U_R)$ e $s_i(\tau_R; U_R) = s$. Pode-se considerar o i -choque juntando U_L com U_R como a superposição de dois i -choques, um que une U_L com U_M e outro que une U_M com U_R , ambos propagando com a mesma velocidade s . O objetivo é realizar uma perturbação que divide o choque original em dois choques, um com velocidade ligeiramente inferior a s e outro com velocidade ligeiramente superior a s , e depois mostrar que o leque de onda resultante tem taxa de entropia negativa.

Começamos fixando um pequeno número positivo τ . O leque de ondas V consistirá de $(n + 2)$ estados constantes $U_L = U_0, \dots, U_{i-1}, \tilde{U}, U_i, \dots, U_N = U_R$, unidos por choques. Para $j = 1, \dots, i - 1$, U_j está unido a U_{j-1} por um j -choque, $U_j = W_j(\epsilon_j; U_{j-1})$ de velocidade s_j :

$$F(U_j) - F(U_{j-1}) = s_j[U_j - U_{j-1}], \quad j = 1, \dots, i - 1. \quad (5.34)$$

\tilde{U} está unido a U_{i-1} por um i -choque, $\tilde{U} = W_i(\tau_L + \tau; U_{i-1})$, de velocidade s_- :

$$F(\tilde{U}) - F(U_{i-1}) = s_-[\tilde{U} - U_{i-1}]. \quad (5.35)$$

\tilde{U} está unido a U_i por um i -choque, $\tilde{U} = W_i(\tau_R + \epsilon_i; U_i)$, de velocidade s_+ :

$$F(\tilde{U}) - F(U_i) = s_+[\tilde{U} - U_i]. \quad (5.36)$$

Finalmente, para $j = i + 1, \dots, n$, U_{j-1} está unido a U_j por um j -choque, $U_{j-1} = W_j(\epsilon_j; U_j)$ de velocidade s_j :

$$F(U_{j-1}) - F(U_j) = s_j[U_{j-1} - U_j], \quad j = i + 1, \dots, n. \quad (5.37)$$

As amplitudes $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ das ondas são computadas da equação

$$\Omega(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n; \tau) = 0, \quad (5.38)$$

onde

$$\begin{aligned} \Omega(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n; \tau) = & W_i(\tau_R + \epsilon_i; W_{i+1}(\epsilon_{i+1}; \dots W_n(\epsilon_n; U_R) \dots)) \\ & - W_i(\tau_L + \tau; W_{i-1}(\epsilon_{i-1}; \dots W_1(\epsilon_1; U_L) \dots)). \end{aligned} \quad (5.39)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \Omega(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n; \tau) &= - \sum_{j=1}^{i-1} \epsilon_j R_j(U_L) + \sum_{j=i+1}^n \epsilon_j R_j(U_R) \\ &\quad - \tau W_i^\bullet(\tau_L; U_L) + \epsilon_i W_i^\bullet(\tau_R; U_R) + G(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n; \tau), \end{aligned} \quad (5.40)$$

onde G e sua primeira derivada se anulam em $(0, \dots, 0; 0)$, concluímos que, para τ suficientemente pequeno, (5.38) terá uma solução única. Ainda falta verificar que $s_- = s_i(\tau_L + \tau; U_{i-1})$ é menor que $s_+ = s_i(\tau_R + \epsilon_i; U_i)$.

De (5.31), (5.34), (5.35), (5.36) e (5.37), deduzimos que

$$\begin{aligned} &(s - s_-)[\tilde{U} - U_L] + (s - s_+)[U_R - \tilde{U}] \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} (s_j - s_-)[U_j - U_{j-1}] + \sum_{j=i+1}^n (s_j - s_+)[U_j - U_{j-1}]. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Para $j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$,

$$U_j - U_{j-1} = a_j R_j(U_L) + S_j, \quad |S_j| = O(\delta)|a_j|. \quad (5.42)$$

Assim, denotando

$$\gamma = |(s - s_-)L_i(U_L)[\tilde{U} - U_L]|, \quad (5.43)$$

deduzimos de (5.41)

$$|a_j| = O(\delta)\gamma, \quad j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n, \quad (5.44)$$

$$(s - s_-)[\tilde{U} - U_L] + (s - s_+)[U_R - \tilde{U}] = O(\delta^2)\gamma, \quad (5.45)$$

que implica em particular, que $(s - s_-)$ e $(s - s_+)$ têm sinais opostos. Lembrando que $s_i^\bullet(\tau_L; U_i) < 0$, concluímos que $s_- < s < s_+$.

Computamos agora \mathcal{H}_V^\bullet de (5.27):

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_V^\bullet &= \sum_{j=1}^{i-2} (s_{j-1} - s_j)\eta(U_j) + (s_- - s_{i-1})\eta(U_{i-1}) + (s_+ - s_-)\eta(\tilde{U}) \\ &\quad + (s_{i+1} - s_+)\eta(U_i) + \sum_{j=i+1}^{n-1} (s_{j+1} - s_j)\eta(U_j). \end{aligned} \quad (5.46)$$

Ao reorganizar os termos nas somas acima:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_V^\bullet &= \sum_{j=1}^{i-1} (s_- - s_j)[\eta(U_j) - \eta(U_{j-1})] + (s_+ - s_-)\eta(\tilde{U}) \\ &\quad + \sum_{j=i+1}^n (s_+ - s_j)[\eta(U_j) - \eta(U_{j-1})]. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Adicionando e subtraindo termos, a equação anterior pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_V^\bullet &= (s - s_-) \left\{ \eta(\tilde{U}) - \mathbf{D}\eta(\tilde{U})[\tilde{U} - U_L] - \eta(U_L) \right\} \\
&\quad + (s_+ - s) \left\{ \eta(\tilde{U}) - \mathbf{D}\eta(\tilde{U})[\tilde{U} - U_R] - \eta(U_R) \right\} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{i-1} (s_- - s_j) \left\{ \eta(U_j) - \eta(U_{j-1}) - \mathbf{D}\eta(\tilde{U})[U_j - U_{j-1}] \right\} \\
&\quad + \sum_{j=1+1}^n (s_+ - s_j) \left\{ \eta(U_j) - \eta(U_{j-1}) - \mathbf{D}\eta(\tilde{U})[U_j - U_{j-1}] \right\}.
\end{aligned} \tag{5.48}$$

Como η é estritamente convexa, e lembrando (5.43) e (5.45),

$$\begin{cases} -(s - s_-) \left\{ \eta(\tilde{U}) - \mathbf{D}\eta(\tilde{U})[\tilde{U} - U_L] - \eta(U_L) \right\} \geq \alpha\gamma|\tilde{U} - U_L| \\ -(s_+ - s) \left\{ \eta(\tilde{U}) - \mathbf{D}\eta(\tilde{U})[\tilde{U} - U_R] - \eta(U_R) \right\} \geq \alpha\gamma|\tilde{U} - U_R|, \end{cases} \tag{5.49}$$

com $\alpha > 0$. Por outro lado, de (5.44) temos que

$$\begin{cases} |\eta(U_j) - \eta(U_{j-1}) - \mathbf{D}\eta(\tilde{U})[U_j - U_{j-1}]| \leq O(\delta)\gamma|\tilde{U} - U_L|, & j = 1, \dots, i-1 \\ |\eta(U_j) - \eta(U_{j-1}) - \mathbf{D}\eta(\tilde{U})[U_j - U_{j-1}]| \leq O(\delta)\gamma|\tilde{U} - U_R|, & j = 1+1, \dots, n. \end{cases} \tag{5.50}$$

Portanto, $\mathcal{H}_V^\bullet < 0$, o que estabelece o teorema no caso especial onde o leque de onda consiste em um único choque violando a E-condição de Liu. \square

Além de fornecer um critério de admissibilidade do leque de onda, o princípio da taxa de entropia (Definição 5.5) sugere um método alternativo para construir soluções para o problema de Riemann (5.1), (5.18) minimizando a funcional taxa de entropia \mathcal{H}_V^\bullet sob todos os leques de ondas com estados finais U_L e U_R , usando as equações de Euler-Lagrange. (veja [4]).

Teorema 5.7. *Considere um Sistema estritamente hiperbólico (5.1), dotado com uma entropia uniformemente convexa $\eta(U)$. Quando $|U_R - U_L|$ é suficientemente pequeno, existe uma solução $U(x, t) = V(\frac{x}{t})$ do problema de Riemann (5.1), (5.12), onde $V(\xi)$ minimiza a taxa de entropia \mathcal{H}_V^\bullet , ou equivalentemente a produção total de entropia \mathcal{P}_V , sob todos os leques de ondas com i -ondas unidirecionais de força moderada e estados finais U_L e U_R . Além disso, esta solução é idêntica à solução única com choques satisfazendo a E-condição de Liu, estabelecida pelo Teorema 5.4.*

Demonstração. Suponha que U_L e U_R estão em uma bola $\mathcal{B}_{\delta^2}(\bar{U})$ com centro em algum estado \bar{U} e raio δ^2 , onde δ é um número positivo pequeno. Consideramos a família do leque

de ondas saindo com valores na bola $\mathcal{B}_\delta(\bar{U})$, estados finais U_L, U_R e i -ondas unidirecionais. Esta família é não vazia, pois contém o leque de onda com estados finais U_L e U_R cujas i -ondas são (não necessariamente admissíveis) i -choques. Na verdade, para construir este leque de ondas definimos, no lugar de (5.22),

$$\Omega(\epsilon; U) = W_n(\epsilon; W_{n-1}(\epsilon; \cdots W_1(\epsilon, U) \cdots)), \quad (5.51)$$

onde W_i denota a curva i -choque, e observe que (5.23) permanece com G e sua primeira derivada desaparecendo em $\epsilon = 0$. Além disso, para δ suficientemente pequeno existe $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ com $\Omega(\epsilon; U_L)$, tal que o leque de ondas toma valores em $\mathcal{B}_\delta(\bar{U})$.

Fixando algum leque de ondas V na família anterior, que como mostramos na Seção 5.1, compreende de n ondas $[\zeta_1, \xi_1], \dots, [\zeta_n, \xi_n]$ separadas por estados constantes U_0, U_1, \dots, U_n . No que se segue, c representa uma constante positiva genérica que não depende de δ e de V .

Escrevendo a diferença dos estados como combinação linear dos autovetores direitos

$$U_i - U_{i-1} = \sum_{k=1}^n a_{ik} R_k(\bar{U}) \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.52)$$

notamos que $|a_{ik}| \leq c\delta$, para $i, k = 1, \dots, n$. Além disso, por (5.6), $|a_{ik}| \leq c\delta^2$, para $i \neq k$. Por outro lado, como

$$\sum_{i=1}^n (U_i - U_{i-1}) = U_R - U_L, \quad (5.53)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ik} = L_k(\bar{U})[U_R - U_L], \quad k = 1, \dots, n, \quad (5.54)$$

portanto, $|U_i - U_{i-1}| \leq c\delta^2$, para $i = 1, \dots, n$, que implica

$$TV_{(-\infty, \infty)} V(\cdot) \leq c\delta^2, \quad (5.55)$$

em virtude de (5.17).

Resulta agora do teorema de Helly que, dentro da família de leque de ondas em consideração, qualquer sequência minimizante V_ν para o funcional (5.27) contém uma subsequência convergindo para um minimizador V . Devido ao Teorema 5.6, qualquer choque de V deve satisfazer a E-condição de Liu e assim V coincide com a única solução admissível para o problema de Riemann estabelecido pelo Teorema 5.4. \square

6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

6.1 Conclusões

Apresentamos de forma geral parte da teoria de leis de conservação e leis de balanço englobando \mathbb{R}^n .

1. No caso de sistemas de leis de conservação estritamente hiperbólicos numa dimensão espacial sobre certas condições é possível encontrar o par entropia-fluxo de entropia. Portanto, nestes casos podemos aplicar o método variacional para resolver o problema de Riemann respectivo, com choque de força moderada.
2. A solução pelo método variacional coincide com a solução pelo método das curvas características.
3. Quando o problema de Riemann é estritamente hiperbólico e não possui choque de força moderada, então pode acontecer que o problema não tenha solução. (veja o exemplo da seção 5.2)

6.2 Trabalhos futuros

1. Quais são os requerimentos mínimos para aplicar o método variacional em leis de conservação de duas dimensões?
2. Seguindo o comentário anterior podemos formular a pergunta: Será possível aplicar o método variacional, no caso de leis de conservação que não sejam estritamente hiperbólicos? Quais seriam os requerimentos mínimos para aplicá-lo?
3. Será possível aplicar o método variacional para problemas com choques de força forte? Sob quais condições?

REFERÊNCIAS

- [1] AMBROSIO, L., FUSCO, N. and PALLARA, D. *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000
- [2] BOILLAT, G. *Chocs caractéristiques*, C. R. Acad. Sci. Paris. Série I, 274 (1972), p 1018-1021.
- [3] BRESSAN, A. *Hyperbolic Conservation Laws An Illustrated Tutorial*, Department of Mathematics, Penn State University, 2009.
- [4] BRUNT, B. V. *The Calculus of Variations*, Springer, Institute of Fundamental Sciences, Massey University, 2004 New York, 2004.
- [5] CHANG, T. and HSIAO, L. *The Riemann problem and interaction of waves in gas dynamics*, Harlow: Longman, 1989.
- [6] CHAPIRO, G., MARCHESIN, D., and SCHECTER, D. *Combustion waves and Riemann solutions in light porous foam*. Journal of Hyperbolic Differential Equations, v 11, (2014).
- [7] CHAPIRO, G., GUTIERREZ, A. E. R., HERSKOVITS, J., MAZORCHE, S. R. and PEREIRA, W. S. *Numerical Solution of a Class of Moving Boundary Problems with a Nonlinear Complementarity Approach*. Journal of Optimization Theory and Applications, v. 168 (2016), p. 534-550.
- [8] DAFERMOS, C. M. *A variational approach to the Riemann problem for conservation laws*, Discrete and Continuous Dynamical Systems v. 23, p. 185-195, 2009.
- [9] DAFERMOS, C. M. *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Springer-Verlag, Berlin, 2016.
- [10] DAFERMOS, C. M. *Hyperbolic systems of conservation laws*, Systems of Nonlinear partial Differential Equations, ed. J. M. Ball. Dordrecht: D. Reidel 1983, p. 25-70.
- [11] DAFERMOS, C. M. *The Entropy rate admissibility criterion for solutions of hyperbolic conservation laws*, J. Diff. Eqs. v 14 (1973), p 202-212.
- [12] HSIAO, L. and ZHANG T. *Riemann problem for 2×2 quasilinear hyperbolic system without convexity*, Ke Xue Tong Bao v 8 (1978), p 465-469.
- [13] LAMBERT, W., MARCHESIN, D. and BRUINING, J. *The Riemann Solution for the Injection of Steam and Nitrogen in Porous Medium*. Transport in Porous media, v. 11 (2010), p 505-526.
- [14] LAX, P. D. *Hyperbolic systems of conservation laws*, Comm. Pure. Appl. Math. v 10 (1957), p 537-566.
- [15] LAX, P. D. *Shocks waves and entropy*, Contributions to Functional Analysis. ed. E. A. Zarantonello. New York: Academic Press, 1971, p 603-634.

- [16] LEVEQUE, R. J. *Numerical Methods for Conservation Laws* (Second Edition), Birkhäuser, 1992
- [17] LIU, T. P. *The Riemann problem for general system of conservation laws*, J. Diff. Appl. v 18 (1975), p 218-234.
- [18] LIU, T. P. *The entropy condition and the admissibility of shocks*, J. Math. Anal. Appl. v 53 (1976), 78-88.
- [19] PLAZA, R. G. *Sistemas Hiperbólicos de Leyes de Conservación*, Departamento de Matemáticas y Mecánica, Universidad Autónoma de México, 2000.
- [20] BIEZUNER, R. J. *Equações Diferenciais Parciais*, Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais., 2010.
- [21] SMOLLER, J. A. *On the solution of the Riemann problem with general step data for an extended class of hyperbolic systems*, Michigan Math. J. 16 (1969), no. 3, p 201-210.
- [22] SERRE, D. *Systèmes de Lois de Conservation*, v I-II. Paris: Diderot, 1996. English translations: *Systems of Conservation Laws*, v 1-2. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [23] VAN D., C. J. *An introduction to Conservation Laws: Theory and Applications to Multi-Phase Flow*, Dept. of mathematics and Computer Science, Eindhoven University Technology, The Netherlands, 2003.
- [24] VOLPERT, A. I. *The Spaces BV and quasilinear equations*, Mat Sbornik v. 73 (1967), p 255-302. English translation: USSR Sbornik v. 2 (1967), p 225-267.

APÊNDICE A – TEOREMA A: Demonstração

Neste capítulo apresentaremos a demonstração do Teorema 2.3 da Seção 2.2 seguindo os passos de [9].

Demonstração. Seja $N \in S^{k-1}$ fixo e qualquer hiperplano \mathcal{C} , de codimensão um, com normal N e interseção não vazia com \mathcal{X} . Para cada $X \in \mathcal{C} \cap \mathcal{X}$, \mathcal{B}_r^- denota a semi bola $\{Y \in \mathcal{B}_r(X) : (Y - X) \cdot N < 0\}$. O limite

$$a_N(X) = \lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{\mathcal{H}^{k-1}(\mathcal{C} \cap \mathcal{B}_r(X))} \int_{\mathcal{C} \cap \mathcal{B}_r(X)} q_{\mathcal{B}_r^-(X)}(Y) d\mathcal{H}^{k-1}(Y), \quad (\text{A.1})$$

existe para quase todo (com respeito a \mathcal{H}^{k-1}) $X \in \mathcal{C} \cap \mathcal{X}$ e define uma função \mathcal{H}^{k-1} -mensurável limitada. Repetindo a construção acima para cada hiperplano com normal N , definimos a_N em todo \mathcal{X} .

Para estudar as propriedades de a_N , fixamos $N \in S^{k-1}$, junto com um hiperplano \mathcal{C} com normal N , e uma bola \mathcal{B} em \mathcal{X} , centrado em algum ponto $\mathcal{C} \cap \mathcal{X}$. Então, aplicamos a lei de balanço aos domínios cilíndricos

$$\mathcal{D} = \bigcup_{-\delta < \tau < \varepsilon} \mathcal{A}_\tau, \quad \mathcal{A}_\tau = \{X : X - \tau N \in \mathcal{C} \cap \mathcal{B}\}, \quad (\text{A.2})$$

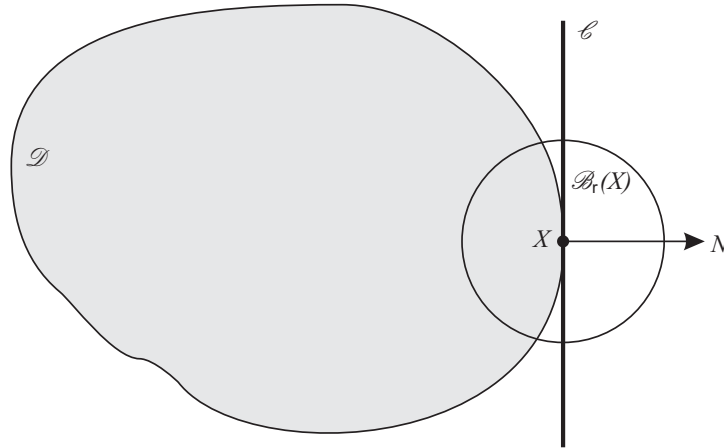
onde δ e ε são números pequenos não negativos. Isto produz

$$\int_{\mathcal{A}_\varepsilon} a_N(X) d\mathcal{H}^{k-1}(X) + \int_{\mathcal{A}_{-\delta}} a_{-N}(X) d\mathcal{H}^{k-1}(X) = \mathcal{P}(\mathcal{D}) + O(\delta) + O(\varepsilon), \quad (\text{A.3})$$

onde os termos $O(\delta)$ e $O(\varepsilon)$ representam a contribuição do fluxo através da fronteira lateral do domínio cilíndrico. Tomando $\delta = 0$ e fazendo $\varepsilon \downarrow 0$, derivamos de (A.3) uma estimativa que, aplicada a todas as bolas \mathcal{B} , implica que, como $\tau \downarrow 0$, $a_N(X + \tau N) \rightarrow -a_{-N}(X)$, em $L^\infty(\mathcal{C} \cap \mathcal{X})$ fraca*. Similarmente, tomando $\varepsilon = 0$ e fazendo $\delta \downarrow 0$, deduzimos que, como $\tau \uparrow 0$, $a_{-N}(X + \tau N) \rightarrow -a_N(X)$, de novo em $L^\infty(\mathcal{C} \cap \mathcal{X})$ fraca*. Em particular, isto implica que a_N é Lebesgue mensurável em \mathcal{X} .

Retornando a (A.3), e agora fazendo $\delta \downarrow 0$ e $\varepsilon \downarrow 0$, concluímos que $a_N(X) = -a_{-N}(X)$, para quase todo (com respeito a \mathcal{H}^{k-1}) $X \in \mathcal{C} \cap \mathcal{X}$, a menos que \mathcal{C} pertença (como máximo) a uma família contável de hiperplanos com normal N para o qual $|\mathcal{P}(\mathcal{C} \cap \mathcal{X})| > 0$. Doravante, nos referiremos a estes hiperplanos excepcionais como *singular*.

Para mostrar (2.4), consideramos qualquer domínio próprio \mathcal{D} em \mathcal{X} e fixamos $X \in \partial\mathcal{D}$, onde a normal unitária exterior é N e o hiperplano tangencial é \mathcal{C} . Suponha

Figura 5 – $\mathcal{D} \cap \mathcal{B}_r$

além disso que X é um ponto de Lebesgue de $q_{\mathcal{D}}$ e que a derivada superior de $|\mathcal{P}|$ em X , com respeito à medida de Lebesgue, é finita. Para r positivo e pequeno, escreveremos a lei de balanço, primeiro para o domínio $\mathcal{D} \cap \mathcal{B}_r(X)$, então para a semi-bola $\{Y \in \mathcal{B}_r(X) : (Y - X) \cdot N < 0\}$; veja a figura (5).

Combinando o resultado das duas equações, temos que

$$\int_{\partial \mathcal{D} \cap \mathcal{B}_r(X)} q_{\mathcal{D}}(Y) d\mathcal{H}^{k-1}(Y) - \int_{\mathcal{C} \cap \mathcal{B}_r(X)} a_N(Y) d\mathcal{H}^{k-1}(Y) = o(r^{k-1}). \quad (\text{A.4})$$

Dividindo (A.4) por r^{k-1} , fazendo $r \downarrow 0$, lembrando (A.1), obtemos (2.4), assim temos estabelecido a afirmação (1) do teorema.

Vamos mostrar (2.5) empregando o célebre *argumento do tetraedro de Cauchy*. Consideramos a base ortonormal padrão $\{E_{\alpha} : \alpha = 1, \dots, k\}$ em \mathbb{R}^k e além disso o campo vetorial m -linha $A \in L^{\infty}(\mathcal{X}; \mathbb{M}^{1 \times k})$ com componentes $a_{E_{\alpha}}$:

$$A(X) = [a_{E_1}(X), \dots, a_{E_k}(X)]. \quad (\text{A.5})$$

Seja $N \in S^{k-1}$ com componentes diferentes de zero $N_{\alpha} \in \mathbb{R}$, e tome $X \in \mathcal{X}$ com a seguinte propriedade: X é um ponto de Lebesgue de $k + 1$ funções a_{E_1}, \dots, a_{E_k} e a_N ; a derivada superior de $|\mathcal{P}|$ em X , com respeito à medida de Lebesgue, é finita. Para r positivo e pequeno, consideramos o simplex

$$\mathcal{D} = \{Y : (Y_{\alpha} - X_{\alpha}) \operatorname{sgn} N_{\alpha} > -r, \alpha = 1, \dots, k; (Y - X) \cdot N < r\}. \quad (\text{A.6})$$

Observe que $\partial \mathcal{D}$ é composto por uma face \mathcal{C} com normal exterior N e k faces \mathcal{C}_{α} , para $\alpha = 1, \dots, k$, com suas respectivas normais exteriores $(-\operatorname{sgn} N_{\alpha})E_{\alpha}$. Além disso, temos

$\mathcal{H}^{k-1}(\mathcal{C}_\alpha) = |N_\alpha| \mathcal{H}^{k-1}(\mathcal{C})$. Escolhemos r tal que nenhuma das faces de \mathcal{D} esteja situado em um hiperplano singular. A lei de balanço para \mathcal{D} então se escreve como

$$\int_{\mathcal{C}} a_N d\mathcal{H}^{k-1} - \sum_{\alpha=1}^k (\text{sgn} N_\alpha) \int_{\mathcal{C}_\alpha} a_{E_\alpha} d\mathcal{H}^{k-1} = \mathcal{P}(\mathcal{D}). \quad (\text{A.7})$$

Dividindo (A.7) por $\mathcal{H}^{k-1}(\mathcal{C})$ e depois passando para o limite ao longo de qualquer sequência de r que tende a zero, evitando ao mesmo tempo o conjunto de valores (no máximo contável) para que alguma face de \mathcal{D} se encontra em um hiperplano singular, chega-se a

$$a_N(X) = \sum_{\alpha=1}^k a_{E_\alpha}(X) N_\alpha = A(X)N, \quad (\text{A.8})$$

que estabelece (2.5).

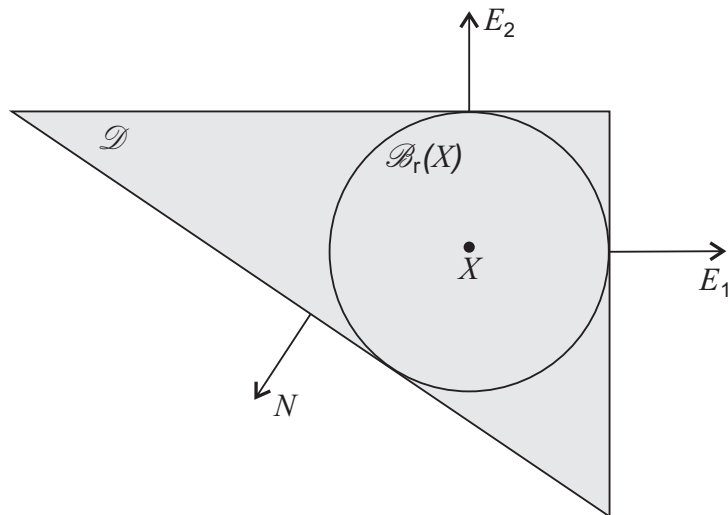


Figura 6 – Argumento do tetraedro de Cauchy 2-dimensional

Resta mostrar (2.6). Para A Lipschitz contínua, pode-se conseguir (2.6), aplicando o teorema da divergência à lei de balanço. No caso geral em que A está meramente em L^∞ , nós recorremos ao amolecimento. Fixamos uma função de teste $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ com massa total um, suportado na esfera unitária e ajustamos isto por ε ,

$$\psi_\varepsilon(X) = \varepsilon^{-k} \psi(\varepsilon^{-1} X), \quad (\text{A.9})$$

e a usamos para amolecer, na forma habitual, \mathcal{P} e A no conjunto $\mathcal{X}_\varepsilon \subset \mathcal{X}$ de pontos cuja distância de \mathcal{X}^c excede a ε ,

$$p_\varepsilon = \psi_\varepsilon * \mathcal{P}, \quad A_\varepsilon = \psi_\varepsilon * A. \quad (\text{A.10})$$

Para qualquer hipercubo $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}_\varepsilon$, aplicamos o teorema da divergência ao campo suave A_ε e usamos o teorema de Fubini para obter

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{D}} \operatorname{div} A_\varepsilon(X) dX &= \int_{\partial \mathcal{D}} A_\varepsilon(X) N(X) d\mathcal{H}^{k-1}(X) \\
&= \int_{\partial \mathcal{D}} \int_{\mathbb{R}^k} \psi_\varepsilon(Y) A(X - Y) N(X) dY d\mathcal{H}^{k-1}(X) \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} \psi_\varepsilon(Y) \int_{\partial \mathcal{D}_Y} A(Z) N(Z) d\mathcal{H}^{k-1}(Z) dY, \tag{A.11}
\end{aligned}$$

onde \mathcal{D}_Y denota a Y -translação de \mathcal{D} , isto é $\mathcal{D}_Y = \{Z : Z + Y \in \mathcal{D}\}$. Em virtude da lei de balanço,

$$\int_{\partial \mathcal{D}_Y} A(Z) N(Z) d\mathcal{H}^{k-1}(Z) = \int_{\partial \mathcal{D}_Y} a_N(Z) d\mathcal{H}^{k-1}(Z) = \mathcal{P}(\mathcal{D}_Y), \tag{A.12}$$

para quase todo Y na bola $\{Y : |Y| < \varepsilon\}$. Portanto, de (A.11) resulta

$$\int_{\mathcal{D}} \operatorname{div} A_\varepsilon(X) dX = \int_{\mathbb{R}^k} \psi_\varepsilon(Y) \mathcal{P}(\mathcal{D}_Y) dY = \int_{\mathcal{D}} p_\varepsilon(X) dX, \tag{A.13}$$

daqui inferimos

$$\operatorname{div} A_\varepsilon(X) = p_\varepsilon(X), \quad X \in \mathcal{X}_\varepsilon. \tag{A.14}$$

Fazendo $\varepsilon \downarrow 0$ obtemos (2.6), no sentido das distribuições em \mathcal{X} . Isto completa a demonstração do teorema. \square

APÊNDICE B – TÓPICOS DE TEORIA DA MEDIDA

Apresentaremos aqui algumas noções básicas sobre a teoria da medida, que serão necessárias para o desenvolvimento deste trabalho. A referência usada para este capítulo é [1].

Definição B.1 (σ -álgebras e espaços de medida). Seja X um conjunto não vazio e seja \mathcal{E} a coleção de subconjuntos de X .

- (a) \mathcal{E} é um *álgebra* se, $\emptyset \in \mathcal{E}$, $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{E}$ e $X \setminus E_1 \in \mathcal{E}$, sempre que $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$.
- (b) Uma álgebra \mathcal{E} é um σ -*álgebra* se, para qualquer sequência $(E_h) \subset \mathcal{E}$ sua união $\bigcup_h E_h$ pertence a \mathcal{E} .
- (c) Para qualquer coleção \mathcal{G} de subconjuntos de X , a σ -álgebra gerada por \mathcal{G} é a menor σ -álgebra contendo \mathcal{G} . Se (X, τ) é um espaço topológico, denotamos por $\mathcal{B}(X)$ a σ -álgebra de Borel de subconjuntos de X , i.e., a σ -álgebra gerada pelos subconjuntos abertos de X .
- (d) Se \mathcal{E} é uma σ -álgebra em X , chamamos o par (X, \mathcal{E}) um *espaço de medida*.

Definição B.2 (Medidas positivas). Seja (X, \mathcal{E}) um espaço de medida e $\mu : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$.

- (a) μ é *aditiva* se, para $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$,

$$E_1 \cap E_2 = \emptyset \implies \mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2).$$

- (b) μ é σ -*subaditiva* se, para $E \in \mathcal{E}$, $(E_h) \subset \mathcal{E}$,

$$E \subset \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h \implies \mu(E) \leq \sum_{h=0}^{\infty} \mu(E_h).$$

- (c) μ é uma *medida positiva* se, $\mu(\emptyset) = 0$ e μ é σ -aditiva em \mathcal{E} , i.e., para qualquer sequência (E_h) de elementos disjuntos por pares de \mathcal{E}

$$\mu\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\right) = \sum_{h=0}^{\infty} \mu(E_h).$$

dizemos que μ é finita se $\mu < \infty$.

- (d) Um conjunto $E \subset X$ é σ -finita com respeito à medida positiva μ se, ele é a união de uma sequência crescente de conjuntos com medida finita. Se X mesmo é σ -finito, então dizemos que μ é σ -finita.

Definição B.3 (Medida real e vetorial). Seja (X, \mathcal{E}) um espaço de medida e seja $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$.

- (a) $\mu : \mathcal{E} \longmapsto \mathbb{R}^m$ é uma medida se, $\mu(\emptyset) = 0$ e para qualquer sequência (E_h) de elementos disjuntos por pares de \mathcal{E}

$$\mu \left(\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h \right) = \sum_{h=0}^{\infty} \mu(E_h).$$

se $m = 1$ dizemos que μ é uma *medida real*, se $m > 1$ dizemos que μ é uma *medida vetorial*.

- (b) Se μ é uma medida, definiremos sua *variação total* $|\mu|$ para todo $E \in \mathcal{E}$ como segue:

$$|\mu|(E) := \sup \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} |\mu(E_h)| : E_h \in \mathcal{E} \text{ disjuntos por pares, } E = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h \right\}.$$

- (c) Se μ é uma medida real, definiremos sua *parte positiva* e sua *parte negativa* respectivamente como segue:

$$\mu^+ := \frac{|\mu| + \mu}{2} \quad \text{e} \quad \mu^- := \frac{|\mu| - \mu}{2}.$$

Teorema B.4. *Seja μ uma medida em (X, \mathcal{E}) ; então $|\mu|$ é uma medida finita positiva.*

Proposição B.5 (Critério de coincidência). *Sejam μ, ν medidas positivas no espaço de medida (X, \mathcal{E}) , e seja $\mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ uma família fechada baixo interseções finitas; suponha que $\mu(E) = \nu(E)$ para cada $E \in \mathcal{G}$, e que exista uma sequência (X_h) em \mathcal{G} tal que $X = \bigcup_h X_h$ e $\mu(X_h) = \nu(X_h) < \infty$ para todo h . Então μ e ν coincidem na σ -álgebra gerada por \mathcal{G} .*

Definição B.6 (Função mensurável). Seja (X, \mathcal{E}) um espaço de medida e (Y, d) um espaço métrico

- (a) Uma função $f : X \rightarrow Y$ é \mathcal{E} -mensurável se $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ para cada conjunto aberto $A \subset Y$.
- (b) Se μ é uma medida positiva em (X, \mathcal{E}) , dizemos que a função f é μ -mensurável se ela é \mathcal{E}_μ -mensurável

Definição B.7 (Integrais). Seja (X, \mathcal{E}) um espaço de medida.

(a) Para $E \subset X$ definimos a *função característica* de E , denotado por χ_E , por

$$\chi_E(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E. \end{cases}$$

Dizemos que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *função simples* se a imagem de f é finita, i.é., se f pertence ao espaço vetorial gerado pelas funções características.

(b) Seja μ uma medida positiva em (X, \mathcal{E}) ; a *integral* de uma função simples μ -mensurável $u : X \rightarrow [0, \infty)$ é definida por

$$\int_X u d\mu := \sum_{z \in \text{Im}(u)} z \mu(u^{-1}(z)),$$

onde adotamos a convenção que quando $z = 0$ e $\mu(u^{-1}(z)) = \infty$, então $z \cdot \mu(u^{-1}(z)) = 0$. A definição é estendida a qualquer função mensurável $u : X \rightarrow [0, \infty]$ definindo

$$\int_X u d\mu := \sup \left\{ \int_X v d\mu : v \text{ } \mu\text{-mensurável, simples, } v \leq u \right\}.$$

Dizemos que uma aplicação $u : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ μ -mensurável é *μ -somável* se

$$\int_X |u| d\mu < \infty.$$

Dizemos que uma aplicação $u : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ μ -mensurável é *μ -integrável* se cada

$$\int_X u^+ d\mu < \infty \quad \text{ou} \quad \int_X u^- d\mu < \infty.$$

se u é integrável, então

$$\int_X u d\mu := \int_X u^+ d\mu - \int_X u^- d\mu$$

Definição B.8. Seja μ uma medida positiva e ν uma medida real ou vetorial no espaço de medida (X, \mathcal{E}) . Dizemos que ν é *absolutamente contínua* com respeito a μ e escreveremos $\nu \ll \mu$, se para cada $B \in \mathcal{E}$ temos

$$\mu(B) = 0 \implies |\nu|(B) = 0.$$

Definição B.9. Seja X um espaço métrico localmente compacto, $\mathcal{B}(X)$ sua σ -álgebra de Borel, e considere o espaço de medida $(X, \mathcal{B}(X))$.

(a) Uma medida positiva em $(X, \mathcal{B}(X))$ é chamada uma *medida de Borel*. Se a medida de Borel é finita sob conjuntos compactos, ela é chamada de *medida positiva de Radon*.

- (b) Uma função de conjuntos (real ou vetorial) definida nos subconjuntos relativamente compactos de Borel de X que é uma medida em $(K, \mathcal{B}(K))$ para cada conjunto compacto $K \subset X$, é chamada uma (real ou vetorial) *medida de Radon* em X .

Definição B.10 (Medida de Hausdorff). Seja $k \in [0, \infty)$, $\omega_k = \pi^{k/2}/\Gamma(1 + k/2)$ (onde $\Gamma(t) = \int_0^\infty s^{t-1}e^{-s}ds$) e $E \subset \mathbb{R}^N$. A k -dimensional medida de Hausdorff de E é dado por

$$\mathcal{H}^k(E) := \lim_{\delta \downarrow 0} \mathcal{H}_\delta^k(E),$$

onde, para $0 < \delta \leq \infty$, $\mathcal{H}_\delta^k(E)$ é definido por

$$\mathcal{H}_\delta^k(E) := \frac{\omega_k}{2^k} \inf \left\{ \sum_{i \in I} [\text{diam}(E_i)]^k : \text{diam}(E_i) < \delta, E \subset \bigcup_{i \in I} E_i \right\},$$

para coberturas finitas ou contáveis $\{E_i\}_{i \in I}$, com a convenção $\text{diam}(\emptyset) = 0$.

Definição B.11 (Funções de Borel). Sejam X, Y espaços métricos, e seja $f : X \rightarrow Y$. Dizemos que f é uma *função de Borel* se $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(X)$ para todo conjunto aberto $A \subset Y$.

Definição B.12 (Medida exterior). Seja X um espaço métrico e μ uma função definida em todos os subconjuntos de X com valores em $[0, \infty]$; dizemos que μ é uma *medida exterior* se $\mu(\emptyset) = 0$, μ é σ -subaditiva e além disso, vale a seguinte condição de aditividade segue-se:

$$\text{dist}(E, F) > 0 \implies \mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F), \quad (\text{B.1})$$

para todo $E, F \subset X$.

Teorema B.13 (Critério de Caratheodory). *Seja μ uma medida exterior num espaço métrico X ; então μ é σ -positiva em $\mathcal{B}(X)$, portanto, a restrição de μ aos conjuntos Borel de X é uma medida positiva.*

Observação B.14. O critério de Caratheodory mostra que, uma medida exterior sempre define uma medida de Borel.

Exemplo Seja $Q_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^N : \max_i |x_i - y_i| < r\}$ o cubo aberto de lado $2r$ e centro em x . Definamos

$$\mu(E) := \inf \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} (2r_h)^N : E \subset \bigcup_{h=0}^{\infty} Q_{r_h}(x_h) \right\} \quad (\text{B.2})$$

para todo $E \subset \mathbb{R}^N$. μ é uma medida exterior.

Definição B.15 (Medida de Lebesgue). Seja μ a medida exterior do exemplo anterior, chamaremos μ *medida de Lebesgue exterior* e denotaremos por \mathcal{L}^N . Como μ é finita em conjuntos compactos, de acordo com o critério de Caratheodory sua restrição em $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ é uma medida de Radon; dizemos que $E \subset \mathbb{R}^N$ é *Lebesgue mensurável* se E pertence ao completamento de $\mathcal{B}_{\mathcal{L}^N}(\mathbb{R}^N)$.

Proposição B.16 (Pontos de Lebesgue). *Seja μ uma medida de Radon positiva num conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $f \in L^1(\Omega, \mu)$. Então, para μ q.t.p. $x \in \Omega$ vale a seguinte equação:*

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| d\mu = 0. \quad (\text{B.3})$$

Todo ponto $x \in \Omega$ satisfazendo (B.3) é chamado um ponto de Lebesgue de f .