

Denis Pires Rodrigues Alves

**Modelagem do comportamento termomecânico de treliças espaciais em  
regime de grandes deslocamentos e deformações**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional, da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Modelagem Computacional.

Orientador: Prof. D.Sc. Luis Paulo da Silva Barra

Coorientador: Prof. D.Sc. Bernardo Martins Rocha

Juiz de Fora

2016

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Alves, Denis Pires Rodrigues.

Modelagem do comportamento termomecânico de treliças espaciais em regime de grandes deslocamentos e deformações / Denis Pires Rodrigues Alves. -- 2016.

71 p. : il.

Orientador: Luis Paulo da Silva Barra

Coorientador: Bernardo Martins Rocha

Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Juiz de Fora, ICE/Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, 2016.

1. Treliça espacial. 2. Situações de incêndio. 3. Acoplamento termomecânico. 4. Grandes deslocamentos e deformações. 5. Comportamento termo-elastoplástico. I. Barra, Luis Paulo da Silva, orient. II. Rocha, Bernardo Martins, coorient. III. Título.

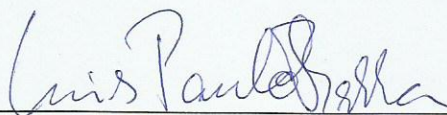
Denis Pires Rodrigues Alves

Modelagem do comportamento termomecânico de treliças espaciais em regime de grandes deslocamentos e deformações

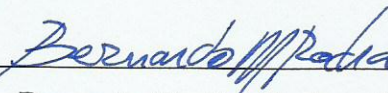
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional, da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Modelagem Computacional.

Aprovada em 2 de Setembro de 2016.

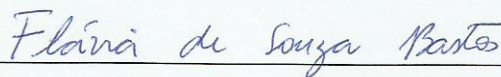
BANCA EXAMINADORA



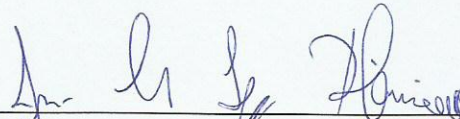
Prof. D.Sc. Luis Paulo da Silva Barra - Orientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora



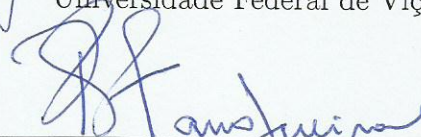
Prof. D.Sc. Bernardo Martins Rocha - Coorientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof<sup>a</sup>. D.Sc. Flávia de Souza Bastos  
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. D.Sc. José Carlos Lopes Ribeiro  
Universidade Federal de Viçosa



Prof. D.Sc. Roque Luiz da Silva Pitangueira  
Universidade Federal de Minas Gerais

*Dedico este trabalho a minha  
família e a todos que me  
apoiaram nessa jornada.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela minha existência, por me permitir enfrentar meus medos e me iluminar em todos os momentos difíceis em que pensei em desistir dos meus sonhos.

Agradeço também à minha família, por todo amor, apoio e suporte para que eu tenha chegado até aqui. À minha mãe Terezinha pelos ensinamentos e pela força que sempre me deu, me fazendo acreditar no meu potencial e seguir em frente com coragem. Ao meu pai José Raimundo, pelo exemplo de vida, responsabilidade e por me incentivar nas minhas escolhas e a vencer as dificuldades da vida. Ao meu irmão Ciro, por sempre exaltar minhas qualidades e me auxiliar em questões de seu domínio.

Aos amigos de Santos Dumont, agradeço pelo apoio e pelas horas de descontração para aliviar dos estresses do dia-a-dia. Aos amigos feitos na graduação na UFV, agradeço pelo compartilhamento das experiências vividas, me mostrando que todos temos obstáculos mas com perseverança e fé podemos superá-los. E aos amigos feitos no PGMC, um agradecimento especial pelas ajudas prestadas nas disciplinas e no desenvolvimento deste trabalho, além do convívio e das confraternizações, pois sem eles tudo seria mais difícil.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, meu muito obrigado por passarem os seus conhecimentos, em especial os meus orientadores Luis Paulo e Bernardo, que não mediram esforços para me ensinarem tudo que sabiam em prol da realização de um bom trabalho de mestrado. Agradeço também a todos os funcionários do programa que contribuíram, cada um à sua maneira, para que tivéssemos um bom ambiente para trabalhar com muita dedicação.

Por fim, agradeço às instituições de fomento que possibilitaram a conclusão deste projeto: FAPEMIG, CAPES, UFJF e CNPq.

*“Só fazemos melhor aquilo que  
repetidamente insistimos em  
melhorar. A busca da excelência  
não deve ser um objetivo. E,  
sim, um hábito.”*

*(Aristóteles)*

## RESUMO

As treliças espaciais são estruturas compostas de barras usualmente metálicas (aço ou alumínio) que são utilizadas para diversas finalidades, mas principalmente para sustentar a cobertura de grandes vãos presentes em galpões e pavilhões. O presente trabalho tem como objetivo a modelagem computacional do comportamento termo-elastoplástico de treliças espaciais em regime de grandes deslocamentos e deformações, utilizando o modelo da equação de transferência de calor e um modelo constitutivo elastoplástico modificado para incluir a influência térmica. Simulações computacionais do modelo resultante podem ser usadas para o desenvolvimento de projetos de estruturas submetidas a grandes variações de temperatura, como as que ocorrem em um incêndio. O método dos elementos finitos (MEF) foi utilizado para determinar o campo de temperaturas na seção transversal das barras, enquanto que para encontrar os deslocamentos e as deformações nas barras em função da variação térmica e do carregamento foi utilizado o método da rigidez direta. Para resolver as equações de equilíbrio não-lineares resultantes do modelo constitutivo termomecânico foi utilizado o método de Newton-Raphson. O código desenvolvido foi inicialmente validado através de simulações computacionais em estruturas simples onde variações de temperatura alteram o módulo de elasticidade, o módulo plástico e a tensão de escoamento do material e podem causar a plastificação e até a ruptura das barras. Posteriormente são apresentados e discutidos os resultados obtidos a partir de treliças mais complexas, com geometria similar às usualmente utilizadas em aplicações de engenharia, submetido a uma situação simplificada de incêndio-padrão. A alta temperatura causa a diminuição da resistência e da rigidez das barras e informações importantes como o tempo de incêndio suportado pela estrutura e o número de barras plastificadas são extraídas das simulações e podem servir como uma medida de segurança para evitar danos maiores em locais com grandes aglomerados de pessoas.

**Palavras-chave:** Treliça espacial. Situações de incêndio. Acoplamento termomecânico. Grandes deslocamentos e deformações. Comportamento termo-elastoplástico.

## ABSTRACT

Space trusses are structures usually composed of metallic rods (steel or aluminum) that are used for several purposes, but mainly to sustain the roof of large spans present in sheds and pavilions. The present work has the aim of computationally model the coupled thermo-elastoplastic behavior of space trusses under large displacements and large strains, using the heat transfer equation model and an elastoplastic constitutive model modified to include the thermal influence. Computer simulations of the resulting mathematical model can be used for the development of structural projects under large variations of temperature, as occurs in fire situations. The finite element method (FEM) was used to determine the temperature field in transversal section of rods. In order to find the displacements and strains due to thermal variation and loadings, it was used the direct stiffness method. The Newton-Raphson method was used to solve the resulting non-linear equilibrium equations of the thermomechanic constitutive model. The developed code was initially validated through computational simulations of simple structures where thermal variations affect the Young modulus, the plastic modulus and the yield stress of the material. The results of more complex trusses, with a geometry similar to the ones usually adopted in engineering applications, under a simplified standard fire situation are also presented. The high temperature causes a decrease in the rods' resistance and stiffness and important informations such as the fire time supported by the structure and the number of plastified rods are achieved from the simulations and can be used as a security measure to avoid greater damage in places with large crowds of people.

**Keywords:** Space trusses. Fire situations. Thermomechanic coupling. Large displacements and strains. Thermo-elastoplastic behavior.



## SUMÁRIO

1	Introdução .....	14
1.1	Motivação .....	14
1.2	Objetivos .....	16
1.3	Organização do texto .....	17
2	Formulação do método dos elementos finitos para o problema de transferência de calor .....	19
2.1	Introdução .....	19
2.2	A equação de difusão de calor .....	19
2.3	Método numérico .....	22
2.4	Geração da malha .....	29
3	Comportamento físico e geometricamente não-linear de treliças espaciais .....	30
3.1	Introdução .....	30
3.2	Modelo constitutivo .....	30
3.2.1	<i>Comportamento elastoplástico</i> .....	33
3.3	Equações de equilíbrio não-lineares e o Método de Newton-Raphson	38
3.3.1	<i>Método de Newton-Raphson</i> .....	39
4	Acoplamento termomecânico .....	42
4.1	Introdução .....	42
4.2	Desenvolvimento do modelo acoplado .....	42
4.3	Características do acoplamento proposto .....	46
5	Resultados numéricos .....	47
5.1	Descrição da implementação realizada .....	47
5.2	Problema térmico .....	47
5.3	Problema mecânico .....	51
5.4	Acoplamento termomecânico .....	54
5.4.1	<i>Propriedades do material utilizado</i> .....	55

<i>5.4.2 Exemplo de três barras acopladas</i> .....	57
<i>5.4.3 Treliças espaciais de cobertura</i> .....	61
<i>5.4.3.1 Treliça espacial 1</i> .....	61
<i>5.4.3.2 Treliça espacial 2</i> .....	64
<b>6 Conclusões</b> .....	67
<b>6.1 Trabalhos futuros</b> .....	68

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1.1	Centro de Exposições do Anhembi. Fonte: <a href="http://www.anhembi.com.br">www.anhembi.com.br</a> . . . . .	14
1.2	Conformação das treliças. Adaptado de Maiola (1999, p. 33). . . . .	15
2.1	Volume de controle para análise de condução em coordenadas cartesianas. . .	20
2.2	Condição de contorno de Dirichlet. . . . .	23
2.3	Condição de contorno de Neumann. . . . .	23
2.4	Condição de contorno de Robin. . . . .	24
2.5	Função chapéu $\varphi_j$ em uma malha triangular genérica. Adaptado de Larson e Bengzon (2013, p. 51). . . . .	26
2.6	Variação da temperatura no intervalo de tempo $\Delta t$ . . . . .	28
3.1	Força externa axial aplicada a uma barra. . . . .	31
3.2	Forças internas em uma barra. . . . .	32
3.3	Configurações de alongamento da barra. . . . .	34
3.4	Cinemática incremental da barra. . . . .	36
4.1	Configurações de alongamento da barra no modelo acoplado. . . . .	43
4.2	Configurações de alongamento da barra no modelo acoplado. . . . .	44
5.1	Configuração e condições de contorno do problema térmico 1. . . . .	48
5.2	Discretização do problema térmico 1 onde o ponto em destaque ( $x = 0,08$ metros) é avaliado. . . . .	48
5.3	Evolução da temperatura no ponto $x = 0,08$ metros. . . . .	49
5.4	Malha e condições do problema. . . . .	50
5.5	Evolução da temperatura dos gases e da barra no incêndio-padrão. . . . .	51
5.6	Configuração inicial do problema. Adaptado de Bonet e Wood (2008, p. 90). .	52
5.7	Comportamento elastoplástico da barra sob efeito da força $\mathbf{F}$ . . . . .	52
5.8	Variação da tensão em função da deformação. . . . .	53
5.9	Posição da barra nos pontos considerados. . . . .	54
5.10	Conformação do problema de três barras. . . . .	57
5.11	Deslocamento vertical do nó principal devido às cargas acidentais. . . . .	58

5.12	Evolução da temperatura com o tempo de incêndio. . . . .	59
5.13	Deslocamento vertical do nó principal durante o tempo de incêndio para a barra com área $\phi$ 60x2,0. . . . .	59
5.14	Deslocamento vertical do nó principal durante o tempo de incêndio para a barra com área $\phi$ 76x2,0. . . . .	60
5.15	Treliça espacial 1 (vista em perspectiva). . . . .	61
5.16	Treliça espacial 1 (vista superior). . . . .	62
5.17	Deslocamento vertical do nó 1. . . . .	62
5.18	Distribuição espacial da solicitação nas barras da treliça 1 a partir do valor de p (vista em perspectiva). . . . .	63
5.19	Distribuição espacial da solicitação nas barras da treliça 1 a partir do valor de p (vista superior). . . . .	64
5.20	Treliça espacial 2 (vista superior). . . . .	64
5.21	Deslocamento vertical do nó 2. . . . .	65
5.22	Distribuição espacial da solicitação nas barras da treliça 2 a partir do valor de p (vista em perspectiva). . . . .	65
5.23	Distribuição espacial da solicitação nas barras da treliça 2 a partir do valor de p (vista superior). . . . .	66

## LISTA DE TABELAS

5.1	Propriedades do material simulado. . . . .	48
5.2	Parâmetros do material. . . . .	52
5.3	Propriedades do aço carbono 1040 (valores à temperatura ambiente). . . . .	55
5.4	Fatores de redução para os aços laminados. . . . .	57

# 1 Introdução

## 1.1 Motivação

As treliças espaciais, também denominadas estruturas espaciais ou treliças tridimensionais, são um caso particular das estruturas reticuladas tridimensionais e são muito utilizadas em galpões e pavilhões com o objetivo de sustentar a cobertura desses locais. A partir da década de 1960, a pesquisa e utilização de treliças espaciais de aço e alumínio passou a ser muito difundida em vários países do mundo (de Souza, 2003). No Brasil, passou a ganhar interesse a partir da construção, no final da década de 1960, do Centro de Exposições do Anhembi, na cidade de São Paulo, mostrado na Figura 1.1.

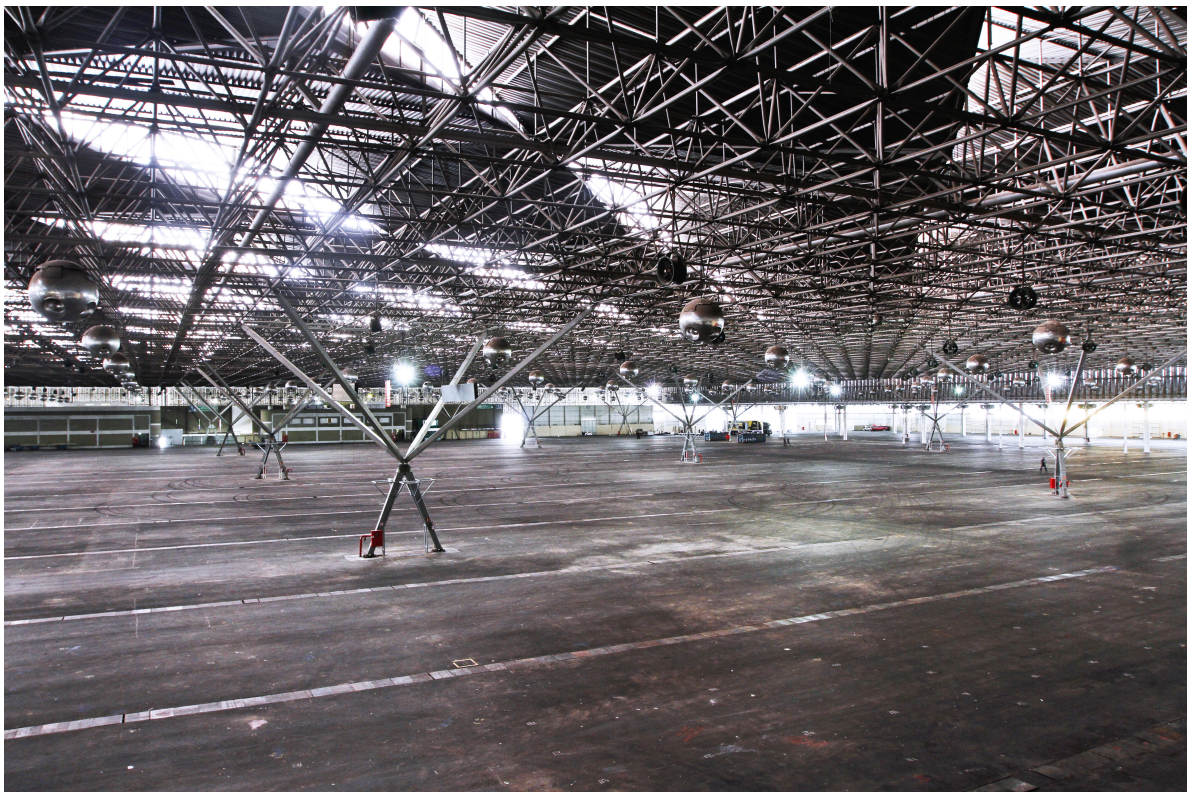


Figura 1.1: Centro de Exposições do Anhembi. Fonte: [www.anhembi.com.br](http://www.anhembi.com.br)

A Figura 1.2 mostra esquematicamente a visão de cima e a visão lateral de uma das formas mais comuns dessas estruturas, onde são indicados os pontos de aplicação de força e os pontos de apoio. No Brasil, a predominância é de adotar uma altura entre os banzos de  $\frac{l}{20}$  a  $\frac{l}{15}$ , onde  $l$  é o maior vão da treliça (de Souza, 2003).

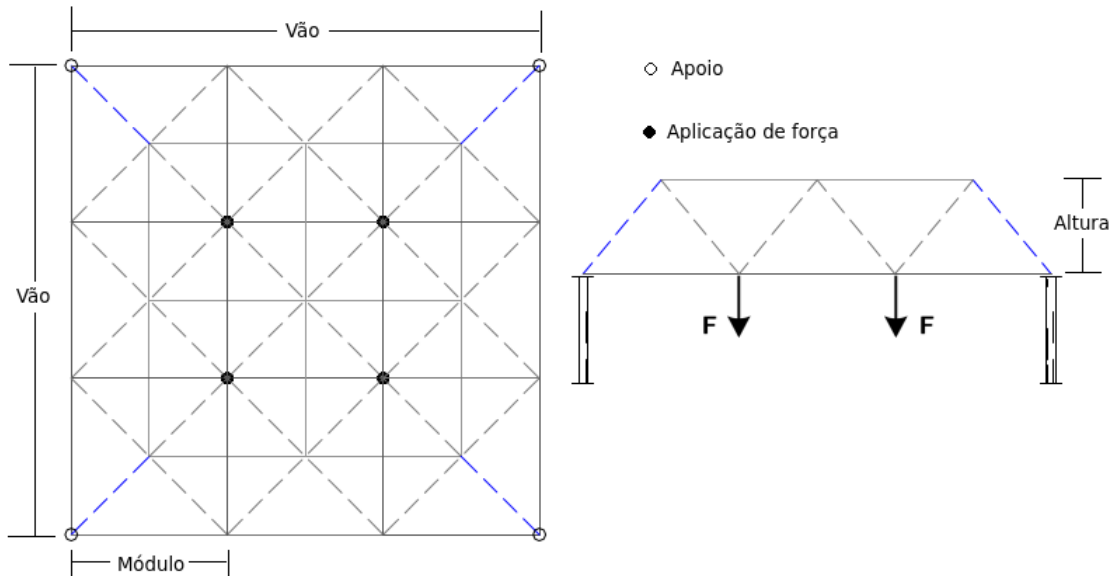


Figura 1.2: Conformação das treliças. Adaptado de Maiola (1999, p. 33).

A crescente utilização de tais estruturas impulsionou o estudo de seu comportamento sob o efeito de carregamentos (peso próprio e forças externas) e sob o efeito de variações de temperatura. Ambos podem causar mudanças na conformação das estruturas e gerar efeitos desastrosos, como a ruptura das barras, se as consequências não forem previstas adequadamente.

Uma das causas mais comuns de acidentes em treliças utilizadas nesses ambientes cobertos e muitas vezes fechados ocorrem em situações de incêndio. Segundo pesquisas do Instituto Sprinkler Brasil (ISB), uma organização dedicada à divulgação de informações relativas ao combate a incêndios por meio da utilização de chuveiros automáticos (sprinklers), houve um aumento considerável de 45% no número de incêndios estruturais no Brasil em 2013 em relação ao ano anterior. De um total de 1.095 casos, 31,2% ocorreram em prédios comerciais como lojas e supermercados. Em segundo lugar, aparecem os incêndios em depósitos e galpões, com 26,5% do total (Jornal do Comercio RJ, 2014).

Segundo Seito *et al.* (2008), o número de casos de incêndio no Brasil vem aumentando cada vez mais. Esse fato se deve muito ao rápido crescimento das cidades brasileiras e à urbanização ocorrida no último século. Conseqüentemente, o planejamento para a construção de edifícios e de infraestruturas especializadas não foi o ideal, causando falhas em questões como segurança e manutenção.

Daí vem a importância de se conhecer as características e propriedades físicas dos

materiais e de que forma as estruturas se comportam em situações adversas, para minimizar a chance de ocorrência de tragédias. Dentre as análises que devem ser feitas, está a do comportamento mecânico elastoplástico acoplado ao comportamento térmico, considerando que a estrutura pode ser submetida a cargas e a variações de temperatura em combinação excepcional de ações.

O comportamento elastoplástico de um material pode ser entendido como uma combinação dos comportamentos elástico e plástico. No comportamento elástico, quando um carregamento é aplicado a uma estrutura, resultando em deformação, e em seguida esse carregamento é retirado, a estrutura retorna à sua configuração inicial sem nenhuma deformação permanente. Já no comportamento plástico, ocorre uma deformação permanente mesmo após a retirada do carregamento.

Nos casos de incêndio, as estruturas sofrem elevadas variações de temperatura e, em consequência disto, as suas propriedades mecânicas se alteram. Logo, nestes casos, faz-se necessário uma análise mais elaborada para se considerar a redução na resistência dos materiais utilizados.

Tanto o problema mecânico quanto o térmico podem ser descritos matematicamente por meio de equações diferenciais. Essas equações, na maioria dos casos, não possuem solução analítica e com isso torna-se necessário aplicar algum método numérico para sua resolução. Com as considerações usuais da análise estrutural de treliças, pode-se determinar o campo de deformações mecânicas nas barras a partir da solução de um sistema de equações algébricas, que descrevem o equilíbrio, em termos dos deslocamentos nodais. Levando em conta a possibilidade da ocorrência de grandes deformações e de um comportamento elastoplástico, este sistema de equações fica não-linear e, para resolvê-lo, pode ser utilizado o método de Newton-Raphson. O problema da transferência de calor se desenvolve ao longo do tempo e do espaço e é descrito por uma equação diferencial parcial que, no presente trabalho, é resolvida através do método dos Elementos Finitos (MEF).

## 1.2 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo desenvolver e implementar um modelo de acoplamento termomecânico simplificado para simular computacionalmente o comportamento de



treliças espaciais em regime de grandes deslocamentos e deformações a partir de um modelo constitutivo elastoplástico com a influência da temperatura.

A variação térmica será primeiramente avaliada nas seções transversais das barras que sofrem um aumento de temperatura por conta do contato com os gases do incêndio. Este aquecimento é modelado utilizando-se a equação do calor baseada na Lei de Fourier, sendo resolvida pelo MEF.

Os resultados da avaliação térmica inicial serão acoplados ao problema mecânico e este será resolvido considerando-se também as cargas de peso próprio e a carga acidental estática da cobertura somadas à variação de temperatura em cada instante de tempo analisado.

A partir disso, será possível prever um tempo de incêndio capaz de ser suportado pela treliça sem que haja ruptura das barras, evitando tragédias inesperadas no local.

### **1.3 Organização do texto**

A apresentação do restante deste trabalho se dará começando pela resolução do problema de transferência de calor a partir da formulação do método dos elementos finitos, no Capítulo 2. Será introduzido o conceito de transferência de calor e a equação que rege o problema geral. A partir daí serão feitas as considerações para se chegar ao modelo de estudo e as discretizações no espaço e no tempo, mostradas detalhadamente. Ao final é descrito como as malhas são geradas para utilização e resolução dos problemas térmicos.

No Capítulo 3, será apresentado o modelo constitutivo para o problema mecânico envolvendo uma haste sujeita exclusivamente à esforço normal submetida a grandes deslocamentos e deformações. Serão explicitados as forças internas, as equações constitutivas, o comportamento elastoplástico do material da haste, as equações de equilíbrio e a solução numérica pelo método de Newton-Raphson.

O Capítulo 4 apresenta o desenvolvimento do acoplamento dos modelos térmico e mecânico. São apresentadas as suas limitações e explicitada a influência da variação térmica no modelo constitutivo mecânico e as suas consequências.

No Capítulo 5, serão apresentados os resultados numéricos obtidos nas simulações feitas a partir dos modelos propostos. Primeiramente, as validações dos modelos do problema térmico e do problema mecânico serão separadamente apresentadas a partir

de exemplos simples. Para o problema térmico, foi feito um estudo de duas situações envolvendo transferência de calor no espaço e no tempo, para casos onde se dispõem de solução conhecida, para se comparar com a solução numérica. No problema mecânico, a validação foi feita através de comparações com a solução apresentada na literatura. Em seguida, foi feito um estudo do modelo acoplado com um caso simples de três barras, para se verificar de maneira qualitativa a influência do efeito do acoplamento proposto, e, posteriormente, são analisados dois casos mais próximos das aplicações usuais de engenharia.

Por fim, o Capítulo 6 traz as conclusões a que se pode chegar a partir dos casos estudados, a avaliação do trabalho como um todo e as sugestões para pesquisas futuras.

## 2 Formulação do método dos elementos finitos para o problema de transferência de calor

Neste capítulo é abordada a questão da transferência de calor, desde os seus princípios até a modelagem da equação de difusão do calor, que descreve o fenômeno. Feito isso, é apresentado o método dos elementos finitos e sua formulação para a resolução da equação de transferência de calor e todas as suas especificações e considerações a respeito da discretização no espaço e no tempo e das condições iniciais e de contorno. Por último, é descrito como foi feita a geração das malhas e de que forma elas são utilizadas nas situações estudadas neste trabalho.

### 2.1 Introdução

A transferência de calor é um dos assuntos mais importantes na engenharia, devendo ser considerada em todo e qualquer projeto, visto que sua ocorrência se dá em qualquer processo na natureza. São três os mecanismos de transferência de calor: difusão (ou condução), quando existe um gradiente de temperatura em um meio, seja ele sólido ou fluido; convecção, que ocorre entre uma superfície e um fluido em movimento quando eles estão a diferentes temperaturas; e radiação, que é a transferência de calor entre duas superfícies em diferentes temperaturas e que pode ocorrer mesmo na ausência de um meio interveniente (Bergman *et al.*, 2011).

### 2.2 A equação de difusão de calor

O objetivo principal da análise da condução de calor consiste na determinação do campo de temperaturas em um meio resultante de condições impostas em seu contorno e de uma condição inicial. Ou seja, deseja-se conhecer como a temperatura varia com a posição e com o tempo, em um determinado meio, denominado volume de controle.

Para a formulação da equação de difusão de calor será considerado, por simplicidade, um meio homogêneo no qual a transferência de energia se dê somente pelo movimento aleatório das moléculas (difusão). A distribuição de temperatura  $T(x, y, z)$  será expressa em coordenadas cartesianas. Parte-se do princípio da conservação de energia, que estabelece que a taxa (variação no tempo) de energia no interior de um volume de controle é igual ao transporte líquido (entrada - saída) de energia para dentro desse volume de controle somada à taxa de energia gerada nesse meio. Este princípio pode ser representado matematicamente como:

$$\dot{E}_a = \dot{E}_e - \dot{E}_s + \dot{E}_g, \quad (2.1)$$

onde  $\dot{E}_a$  é a taxa de energia armazenada,  $\dot{E}_e$  é a taxa de energia que entra,  $\dot{E}_s$  é a taxa de energia que sai,  $\dot{E}_g$  é a taxa de energia gerada no meio considerado (unidade de  $W = J/s$ ) e define-se um volume de controle diferencial,  $dx dy dz$ , como mostrado na Figura 2.1.

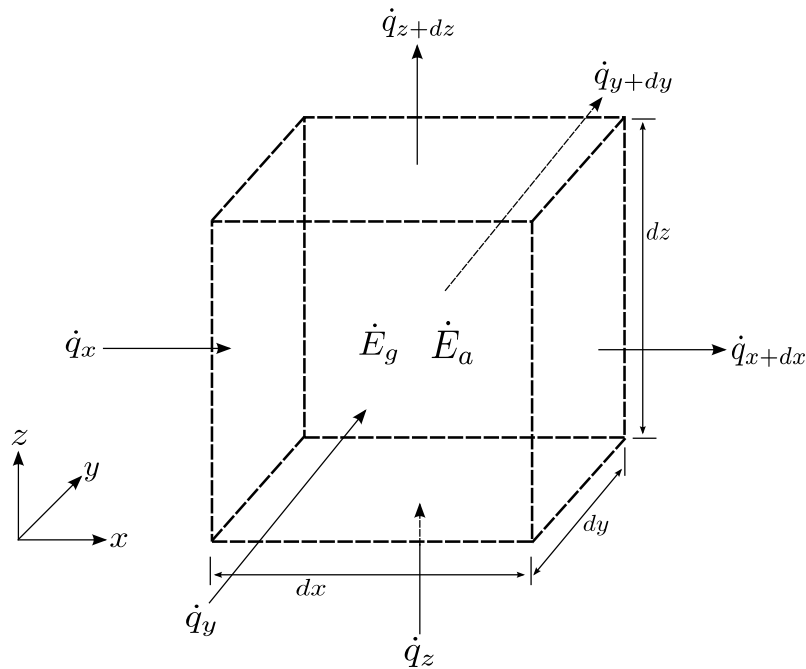


Figura 2.1: Volume de controle para análise de condução em coordenadas cartesianas.

Levando em conta que há um gradiente de temperatura nas direções dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , ocorrerá condução de calor em cada uma dessas direções. As taxas de condução de calor através das superfícies perpendiculares a cada um dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  são indicadas pelos termos  $\dot{q}_x$ ,  $\dot{q}_y$  e  $\dot{q}_z$ , respectivamente. As taxas de condução de calor nas superfícies opostas podem ser expressas como uma expansão em série de Taylor onde, desconsiderando os

termos de mais alta ordem, tem-se:

$$\dot{q}_{x+dx} = \dot{q}_x + \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} dx, \quad (2.2)$$

$$\dot{q}_{y+dy} = \dot{q}_y + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} dy, \quad (2.3)$$

$$\dot{q}_{z+dz} = \dot{q}_z + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z} dz. \quad (2.4)$$

No interior do volume de controle pode também existir um termo de fonte de energia associado com a taxa de geração de energia térmica, o qual é representado por:

$$\dot{E}_g = \dot{Q} dx dy dz, \quad (2.5)$$

onde  $\dot{Q}$  é a taxa de geração de energia por unidade de volume ( $\text{W}/\text{m}^3$ ). Também podem ocorrer mudanças na quantidade de energia térmica interna armazenada pelo material no volume de controle. Desconsiderando mudança de fase do material, o termo de energia armazenada pode ser expresso por:

$$\dot{E}_a = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (2.6)$$

onde  $\rho$  é a massa específica ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ) e  $c_p$  é o calor específico do meio ( $\text{J}/\text{kg } ^\circ\text{C}$ ) e o termo  $\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$  representa a taxa de mudança de energia térmica no meio por unidade de volume.

Assim, substituindo os termos da equação (2.1) pelos termos de taxa de entrada e saída de energia e pelos termos das equações (2.5) e (2.6) obtém-se:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz = \dot{q}_x + \dot{q}_y + \dot{q}_z - \dot{q}_{x+dx} - \dot{q}_{y+dy} - \dot{q}_{z+dz} + \dot{Q} dx dy dz \quad (2.7)$$

Substituindo na equação (2.7) as equações (2.2), (2.3) e (2.4) segue que:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz = -\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} dx - \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} dy - \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z} dz + \dot{Q} dx dy dz \quad (2.8)$$

As taxas de condução de calor podem ser avaliadas pela Lei de Fourier, que estabelece que o fluxo de calor através de um material é proporcional ao gradiente (negativo) de

temperatura, isto é:

$$\dot{q}_x = -kdydz \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (2.9)$$

$$\dot{q}_y = -kdx dz \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (2.10)$$

$$\dot{q}_z = -kdx dy \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (2.11)$$

onde  $k$  é a condutividade térmica do material (W/m °C).

Substituindo as equações (2.9), (2.10) e (2.11) na equação (2.8) e dividindo pelas dimensões do volume de controle ( $dx dy dz$ ), tem-se:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{Q} \quad (2.12)$$

que é a forma geral, em coordenadas cartesianas, da equação de difusão de calor em um meio homogêneo isotrópico de condutividade térmica  $k$ .

## 2.3 Método numérico

A solução numérica da equação (2.12) será obtida, neste trabalho, pelo método dos elementos finitos (MEF) e depende de condições de contorno preestabelecidas e de uma condição inicial para se obter a distribuição de temperaturas  $T(x, y, z)$  em função do tempo (Hughes, 1987). Considerando  $k$ ,  $\rho$  e  $c_p$  constantes no espaço e rearranjando os termos chega-se em:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{k}{\rho c_p} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \frac{\dot{Q}}{\rho c_p} \quad (2.13)$$

que pode ser também representada por:

$$\dot{T} - \nabla \cdot (\alpha \nabla T) = f \quad (2.14)$$

onde  $\dot{T} = \frac{\partial T}{\partial t}$ ,  $f = \frac{\dot{Q}}{\rho c_p}$ ,  $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$  é a difusividade térmica e foram utilizados os operadores gradiente e divergente na representação das derivadas espaciais.

Os três tipos de condições de contorno mais simples para esta equação (Dirichlet,

Neumann ou Robin) podem ser escritos de forma compacta como:

$$-\mathbf{n} \cdot (\alpha \nabla T) = \kappa(T - g_D) - g_N \quad (2.15)$$

onde  $\kappa = \frac{h_{eq}}{\rho c_p} > 0$ ,  $g_D$  e  $g_N = \frac{q_s''}{\rho c_p}$  são funções dadas, específicas para cada tipo de contorno, sendo  $h_{eq}$  o coeficiente combinado de transmissão de calor por convecção e radiação do fluido que está em contato com a superfície (Ribeiro, 2009),  $q_s''$  o fluxo térmico na superfície e  $\mathbf{n}$  o vetor normal à superfície de contorno.

No contorno de Dirichlet, assume-se que a temperatura da superfície se mantém constante, adotando para isso um valor de  $\kappa$  muito alto,  $g_N$  igual a zero e  $g_D$  igual ao valor da temperatura da superfície. A Figura 2.2 mostra a representação dessa situação em um contexto unidimensional.

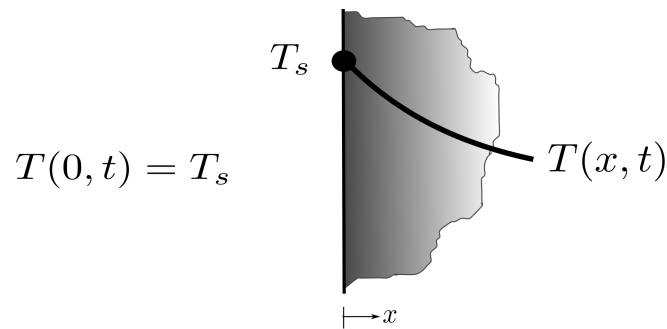


Figura 2.2: Condição de contorno de Dirichlet.

No contorno de Neumann, existe um fluxo de calor constante na superfície. Nessa situação adota-se o valor de  $\kappa$  igual a zero e o valor de  $g_N$  igual ao fluxo de calor desejado, conforme mostra a Figura 2.3.

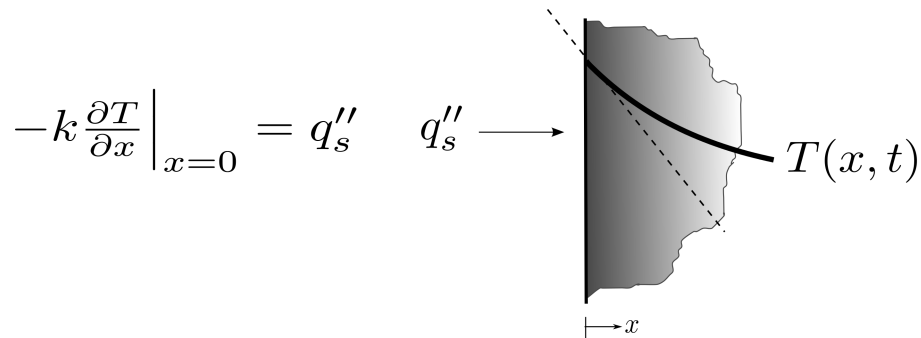


Figura 2.3: Condição de contorno de Neumann.

E no contorno de Robin é assumida uma condição de convecção e radiação na superfície (Ribeiro, 2009). Dessa maneira, o valor de  $\kappa$  é o valor de  $h_{eq}$ , dividido pela densidade,  $\rho$ ,

e pelo calor específico,  $c_p$ , e  $g_N$  é igual a zero. A Figura 2.4 mostra essa configuração.

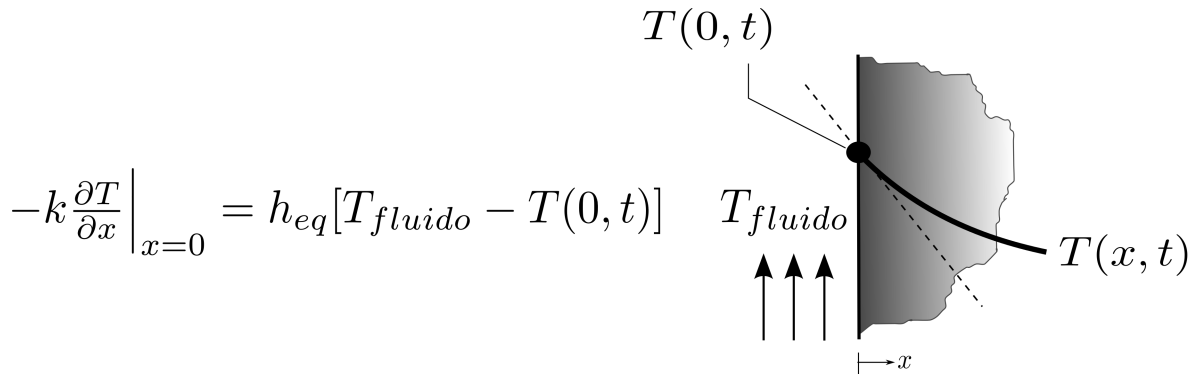


Figura 2.4: Condição de contorno de Robin.

Procura-se uma solução para esse problema no espaço  $V = \{v : \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} < \infty\}$ , onde a norma  $L^2(\Omega)$  é definida, para qualquer função quadrada integrável  $T$  em  $\Omega$ , por:

$$\|T\|_{L^2(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} T^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.16)$$

onde  $T = T(x, y)$  para o caso da transferência de calor bidimensional na seção transversal de uma barra, objeto de estudo desse trabalho.

Multiplicando a equação (2.14) por uma função  $v \in V$  e integrando usando a fórmula de Green, tem-se que:

$$\int_{\Omega} fvd\Omega = \int_{\Omega} \dot{T}vd\Omega - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\alpha \nabla T)vd\Omega \quad (2.17)$$

$$\int_{\Omega} fvd\Omega = \int_{\Omega} \dot{T}vd\Omega + \int_{\Omega} \alpha \nabla T \cdot \nabla vd\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot (\alpha \nabla T) v ds \quad (2.18)$$

$$\int_{\Omega} fvd\Omega = \int_{\Omega} \dot{T}vd\Omega + \int_{\Omega} \alpha \nabla T \cdot \nabla vd\Omega + \int_{\partial\Omega} (\kappa(T - g_D) - g_N) v ds, \quad (2.19)$$

onde na passagem da equação (2.18) para a (2.19) foi utilizada a equação (2.15).

Reagrupando os termos, obtem-se a formulação variacional que enseja encontrar  $T \in V$



tal que:

$$\int_{\Omega} \dot{T} v d\Omega + \int_{\Omega} \alpha \nabla T \cdot \nabla v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \kappa T v ds = \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\kappa g_D + g_N) v ds, \quad \forall v \in V. \quad (2.20)$$

A solução da equação (2.20) pelo MEF envolve, inicialmente, a determinação de uma malha de elementos no domínio do problema. Será considerado nesse trabalho a utilização de elementos triangulares, que permitem a construção de espaços de funções polinomiais por partes.

Seja  $K$  um triângulo e seja  $P_1(K)$  o espaço de funções lineares em  $K$ , definido por:

$$P_1(K) = \{v : v = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2, (x_1, x_2) \in K, c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} \quad (2.21)$$

o que significa dizer que  $P_1(K)$  contém todas as funções da forma  $v = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2$  em  $K$ .

Considerando agora uma malha  $\mathbf{Q} = \{K\}$ , em cada triângulo  $K$  qualquer função  $v$  deve pertencer à  $P_1(K)$ . Somando a isso a exigência de continuidade de  $v$  entre triângulos vizinhos, obtém-se o espaço de todos os polinômios lineares contínuos por partes  $V_h$ , definido por:

$$V_h = \{v : v \in C^0(\Omega), v|_K \in P_1(K), K \in \mathbf{Q}\} \quad (2.22)$$

onde  $C^0(\Omega)$  denota o espaço de todas as funções contínuas em  $\Omega$ .

Sabendo que uma função  $v$  em  $V_h$  é unicamente determinada por seus valores nodais e que para cada conjunto de valores nodais existe uma única função  $v$  em  $V_h$  com esses valores, utiliza-se esses valores para serem os graus de liberdade e pode-se definir uma base correspondente  $\{\varphi_j\}_{j=1}^{n_p} \subset V_h$  tal que:

$$\varphi_j(N_i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, i, j = 1, 2, \dots, n_p \quad (2.23)$$

onde  $\varphi_j$  é a função base,  $N_i$  é o nó sob análise e  $n_p$  é o número de nós da malha.

A Figura 2.5 ilustra uma função base típica  $\varphi_j$ , também chamada de função chapéu, onde é possível notar que cada função base é contínua, linear por partes e com suporte apenas ao pequeno conjunto de triângulos compartilhando o nó  $N_j$ .

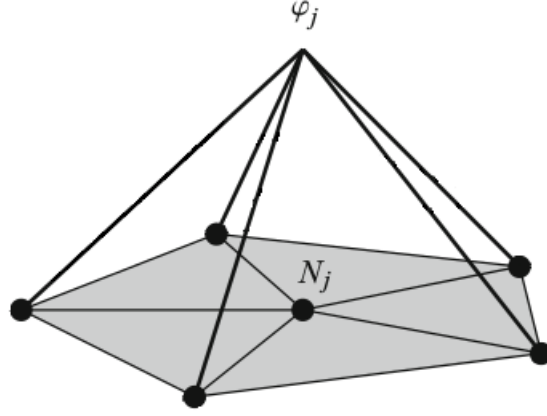


Figura 2.5: Função chapéu  $\varphi_j$  em uma malha triangular genérica. Adaptado de Larson e Bengzon (2013, p. 51).

Desta forma, usando a função chapéu, pode-se notar que qualquer função  $v$  em  $V_h$  pode ser escrita como:

$$v = \sum_{i=1}^{n_p} \alpha_i \varphi_i \quad (2.24)$$

onde  $\alpha_i = v(N_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_p$  são os valores nodais de  $v$ .

Voltando à equação (2.20) e substituindo  $V$  por  $V_h$  obtem-se o método dos elementos finitos que procura encontrar  $T_h \in V_h \subset V$  tal que:

$$\int_{\Omega} \dot{T}_h v d\Omega + \int_{\Omega} \alpha \nabla T_h \cdot \nabla v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \kappa T_h v ds = \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\kappa g_D + g_N) v ds, \quad \forall v \in V_h. \quad (2.25)$$

A fim de calcular as aproximações por elementos finitos  $T_h$ , usa-se  $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n_i}$  como sendo a base para  $V_h$  consistindo das funções chapéu associadas com os nós interiores  $n_i$  da malha. Dessa forma, usando essas bases, pode-se escrever a equação (2.25) equivalentemente como:

$$\int_{\Omega} \dot{T}_h \varphi_i d\Omega + \int_{\Omega} \alpha \nabla T_h \cdot \nabla \varphi_i d\Omega + \int_{\partial\Omega} \kappa T_h \varphi_i ds = \int_{\Omega} f \varphi_i d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\kappa g_D + g_N) \varphi_i ds, \quad (2.26)$$

onde  $i = 1, 2, \dots, n_i$ .

Sendo  $T_h$  pertencente a  $V$  ele pode ser escrito como uma combinação linear:

$$T_h = \sum_{j=1}^{n_i} \xi_j(t) \varphi_j \quad (2.27)$$

com  $n_i$  valores desconhecidos de  $\xi_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_i$ , em cada passo de tempo a serem determinados.

Inserindo a equação (2.27) na equação (2.26) obtem-se:

$$\sum_{j=1}^{n_i} \dot{\xi}_j(t) \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i d\Omega + \sum_{j=1}^{n_i} \xi_j(t) \left( \int_{\Omega} \alpha \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i d\Omega + \int_{\partial\Omega} \kappa \varphi_j \varphi_i ds \right) = \int_{\Omega} f \varphi_i d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\kappa g_D + g_N) \varphi_i ds \quad (2.28)$$

que nada mais é do que um sistema de EDOs semi-discreto, cuja forma matricial é dada por:

$$\mathbf{M}\dot{\xi}(t) + (\mathbf{A} + \mathbf{R})\xi(t) = (\mathbf{b} + \mathbf{r})(t), \quad (2.29)$$

onde as entradas das matrizes e dos vetores envolvidos são dadas por:

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i d\Omega \quad (2.30)$$

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \alpha \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j d\Omega \quad (2.31)$$

$$R_{ij} = \int_{\partial\Omega} \kappa \varphi_i \varphi_j ds \quad (2.32)$$

$$b_i = \int_{\Omega} f \varphi_i d\Omega \quad (2.33)$$

$$r_i = \int_{\partial\Omega} (\kappa g_D + g_N) \varphi_i ds \quad (2.34)$$

para  $i, j = 1, 2, \dots, n_i$ , sendo  $n_i$  o número de nós da malha computacional. A montagem

das matrizes  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{R}$  e dos vetores  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{r}$  pode ser vista com mais detalhes em Larson e Bengzon (2013).

Para resolver a equação (2.29) é adotado uma estratégia numérica de integração no tempo baseada no Método de Diferenças Finitas. Este método é baseado na suposição de que a equação (2.29) é satisfeita somente em pontos discretos  $t_{n+\beta}$  de cada intervalo de tempo  $\Delta t$  no qual o domínio no tempo foi discretizado e que as temperaturas variam linearmente ao longo do intervalo de tempo  $\Delta t$ , desde o instante  $t_n$  até  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ . A Figura 2.6 mostra essas considerações e mais detalhes podem ser encontrados em Ribeiro (2009).

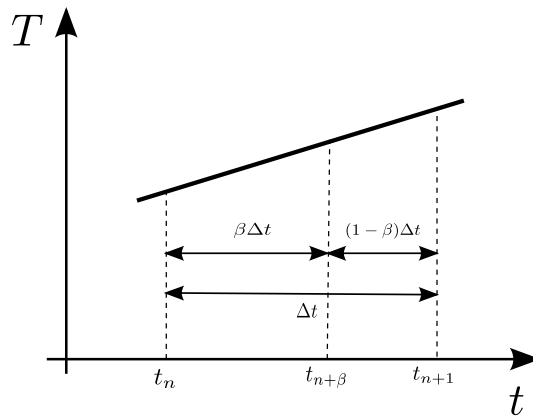


Figura 2.6: Variação da temperatura no intervalo de tempo  $\Delta t$ .

Após a manipulação, a equação adotada para o cálculo das temperaturas a cada passo de tempo é:

$$[\mathbf{M}_{n+\beta} + \beta\Delta t(\mathbf{A} + \mathbf{R})]\mathbf{T}_{n+\beta} = \mathbf{M}_{n+\beta}\mathbf{T}_n + \beta\Delta t(\mathbf{b}_{n+\beta} + \mathbf{r}_{n+\beta}), \quad (2.35)$$

onde  $\beta \in [0, 1]$  é um parâmetro de integração no tempo. Após o sistema de equações (2.35) é resolvido para  $\mathbf{T}_{n+\beta}$ , as temperaturas no fim de cada intervalo de tempo  $t_{n+1}$  são dadas por:

$$\mathbf{T}_{n+1} = \frac{1}{\beta}\mathbf{T}_{n+\beta} + \left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\mathbf{T}_n. \quad (2.36)$$

Para situações de incêndio Ribeiro (2009) e Vila Real (1988) sugerem  $\beta = \frac{2}{3}$ , que é denominado esquema de integração temporal de Galerkin, e que será o valor adotado nesse trabalho. Se a condutividade térmica e o calor específico variarem com a temperatura o problema se torna não-linear. Problemas lineares e não-lineares envolvendo a equação

(2.35) podem ser resolvidos por vários processos iterativos, sendo usado nesse trabalho o método iterativo simples, que usa como critério de convergência a norma euclidiana. Este e outros processos iterativos podem ser encontrados com mais detalhes em Vila Real (1988).

## 2.4 Geração da malha

Com o objetivo de obter mais praticidade na resolução do problema proposto utilizou-se o programa gerador de malhas Gmsh (Geuzaine e Remacle, 2009). Esse programa gera malhas de elementos finitos triangulares em que o número de pontos no contorno são pré-definidos e os elementos gerados automaticamente. Além disso, também possui o recurso de refinamento por divisão das arestas dos elementos pela metade.

Construída a geometria do problema, definidos os contornos e os pontos neles contidos, gera-se a malha de elementos finitos e a saída com as coordenadas dos pontos, os pontos que constituem os elementos e os elementos pertencentes a cada contorno e em todo o domínio.

Por fim, esses dados são lidos pelo código e utilizados na resolução da equação de difusão do calor para o problema transiente. As temperaturas encontradas em cada passo de tempo, ao longo de todo o intervalo considerado para a situação de incêndio, serão posteriormente utilizadas para integrar o problema acoplado, de forma que as barras da treliça espacial sofram deformações causadas pela grande variação de temperatura. Essa abordagem completa será apresentada no Capítulo 4.

# 3 Comportamento físico e geometricamente não-linear de treliças espaciais

Neste capítulo é abordado o problema mecânico de análise de esforços em barras e seu comportamento elastoplástico em regime de grandes deslocamentos e deformações. Primeiramente é apresentado o modelo constitutivo e sua formulação, juntamente com condições para se considerar o regime elástico ou plástico e suas equações. Depois é mostrado o modo de resolução das equações de equilíbrio não-lineares resultantes a partir do método de Newton-Raphson.

Para um entendimento mais detalhado do capítulo recomenda-se uma leitura adicional do assunto em Bonet e Wood (2008) (de onde foi tirado a maioria dos conceitos apresentados) e em de Souza Neto *et al.* (2011).

## 3.1 Introdução

Apesar da grande maioria das estruturas ser projetada para utilização em regime elástico, a análise do comportamento de uma estrutura quando submetida a solicitações capazes de promover deformações permanentes é um problema relevante para a análise de situações extremas. Para que essas análises possam ser feitas utilizam-se modelos constitutivos criados especialmente para representar os fenômenos observados em experimentos, de modo que possam ser reproduzidos através de simulações computacionais (Bonet e Wood, 2008).

## 3.2 Modelo constitutivo

Um modelo constitutivo sólido de tensão-deformação é um conjunto de equações que descreve a tensão a qualquer instante  $t$  em função do histórico de deformações até aquele

instante:

$$\sigma(t) = \mathbf{F}(\varepsilon^t) \quad (3.1)$$

A Figura 3.1 mostra a configuração de um problema mecânico envolvendo uma barra metálica, onde uma força externa  $F$  é aplicada na direção axial, gerando assim uma força interna axial  $T_i$ , que dividida pela área da seção transversal deformada,  $a$ , resulta na tensão de Cauchy,  $\sigma$ .

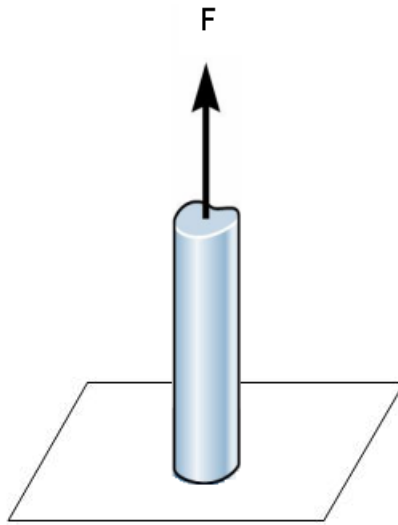


Figura 3.1: Força externa axial aplicada a uma barra.

Entretanto, para grandes deformações o comportamento elastoplástico é melhor caracterizado pela tensão de Kirchhoff  $\tau$ , que é dada para o caso unidimensional por:

$$\tau = \sigma \frac{v}{V} \quad (3.2)$$

onde  $v$  é o volume da barra deformada e  $V$  é o volume da barra indeformada e a razão entre os dois valores ( $\frac{v}{V}$ ) é chamada razão volumétrica e é representada por  $J$ .

Assumindo que a barra sofre grandes deformações, essa medida pode ser expressa a partir da deformação logarítmica definida como:

$$\varepsilon = \ln \lambda = \ln \left( \frac{l}{L} \right) \quad (3.3)$$

onde  $\lambda$  é chamado de alongamento da barra,  $l$  é o comprimento da barra deformada e  $L$  é o comprimento da barra indeformada.

O comprimento da barra deformada pode ser encontrado em termos das coordenadas atualizadas de seus pontos final e inicial,  $\mathbf{x}_b$  e  $\mathbf{x}_a$ , como:

$$l = \{(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a) \cdot (\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a)\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.4)$$

O alongamento ( $\lambda = \frac{l}{L}$ ) e a razão volumétrica ( $J = \frac{v}{V}$ ) podem ser relacionados pelo coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) em materiais transversalmente isotrópicos, ou seja, cujas propriedades não variam com relação à direção considerada. Essa relação é dada por:

$$J = \lambda^{(1-2\nu)} \quad (3.5)$$

Forças nodais,  $\mathbf{T}_a$  e  $\mathbf{T}_b$ , mostradas na Figura 3.2, podem ser determinadas em termos da tensão de Cauchy, da área da seção transversal deformada e do vetor unitário  $\mathbf{n}$ , que aponta na direção da barra, como:

$$\mathbf{T}_a = -\mathbf{T}_b = -\sigma a \mathbf{n}, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{l}(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a). \quad (3.7)$$

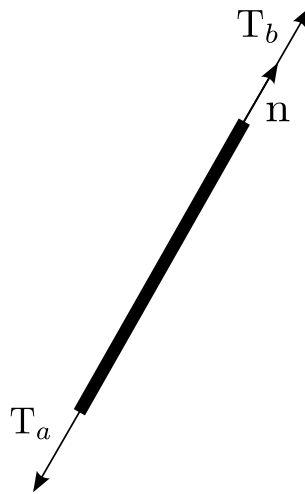


Figura 3.2: Forças internas em uma barra.

O parâmetro, característico de cada material, que relaciona a tensão  $\tau$  com a



deformação  $\varepsilon$  é o módulo de Young ou módulo de elasticidade,  $E$ , definido como:

$$E = \frac{d\tau}{d\varepsilon}, \quad (3.8)$$

onde se assume inicialmente que esse valor é constante para um mesmo material sem variação de temperatura. Logo, tem-se que a tensão de Kirchhoff  $\tau$  pode ser determinada como uma função do logaritmo do alongamento  $\lambda = \frac{l}{L}$ :

$$\tau = E \ln \lambda. \quad (3.9)$$

Dessa maneira as forças internas  $\mathbf{T}_a$  e  $\mathbf{T}_b$  podem ser reescritas como:

$$\mathbf{T}_b = \frac{VE}{l} \ln\left(\frac{l}{L}\right) \mathbf{n} = \tau \frac{V}{l} \mathbf{n} = -\mathbf{T}_a \quad (3.10)$$

### 3.2.1 *Comportamento elastoplástico*

Para se analisar o comportamento elastoplástico, a cinemática da barra deve ser reconsiderada para se distinguir entre a deformação elástica e a plástica permanente. Bonet e Wood (2008) e J. C. Simo (1998) apresentam detalhes sobre o estudo da plasticidade e podem ser consultados para maiores esclarecimentos.

A deformação total passa a ser escrita como:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p, \quad (3.11)$$

onde  $\varepsilon_e$  e  $\varepsilon_p$  são, respectivamente, a deformação elástica e a deformação plástica que podem ser definidas por:

$$\varepsilon_e = \ln \lambda_e = \ln \left( \frac{l}{l_p} \right), \quad (3.12)$$

$$\varepsilon_p = \ln \lambda_p = \ln \left( \frac{l_p}{L} \right). \quad (3.13)$$

em que  $\lambda_e$  e  $\lambda_p$  representam, respectivamente, os alongamentos elástico e plástico e  $l$ ,  $l_p$  e  $L$  representam, respectivamente, o comprimento atual da barra, o comprimento permanente após o descarregamento e o comprimento da barra indeformada. A Figura 3.3 mostra a barra em questão nos três diferentes comprimentos considerados.

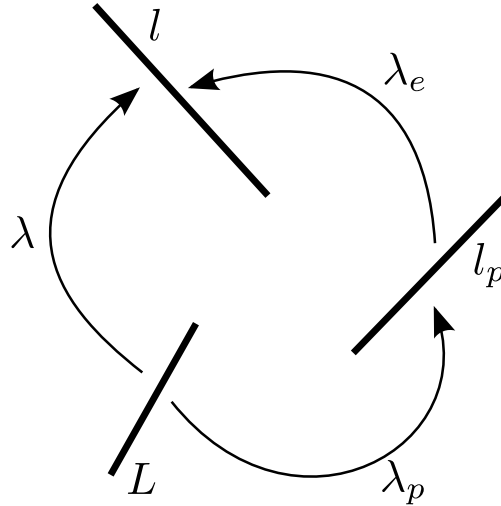


Figura 3.3: Configurações de alongamento da barra.

Essa forma de representação teórica das configurações da barra enseja mostrar que assumindo uma força na barra tal que a tensão de Kirchhoff,  $\tau$ , tenha atingido a capacidade máxima de ser sustentada pelo material (tensão de escoamento,  $\tau_y$ ), a barra sofrerá uma deformação plástica. Considerando, após isso, um completo descarregamento na barra, ela sofrerá uma mudança de comprimento mas não recuperará totalmente o comprimento original,  $L$ . Na verdade, ela irá recuperar parcialmente (componente elástica) até um comprimento descarregado,  $l_p$ . Essa configuração se manterá como o comprimento permanente da barra até que um novo carregamento seja efetuado.

A tensão normal ao longo da barra depende apenas da componente elástica da deformação:

$$\tau = E\varepsilon_e = E(\varepsilon - \varepsilon_p). \quad (3.14)$$

A avaliação da deformação plástica é obtida pela integração da taxa de deformação plástica,  $\dot{\varepsilon}_p$ , ao longo do processo. Apesar da análise em questão tratar de um comportamento estático, ou quase estático, é conveniente associar o desenvolvimento da deformação plástica a um parâmetro análogo ao tempo, tratado daqui para frente como tal, desta forma:

$$\varepsilon_p = \int_0^t \dot{\varepsilon}_p dt, \quad (3.15)$$

A taxa de deformação plástica pode ser expressa por:

$$\dot{\epsilon}_p = |\dot{\epsilon}_p| \text{sign}(\tau); \quad \text{onde } \text{sign}(\tau) = \begin{cases} +1 & \text{se } \tau > 0 \\ -1 & \text{se } \tau < 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

e também pode ser representada por:

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \tau}, \quad (3.17)$$

onde  $\dot{\gamma}$  é chamado de parâmetro de consistência ou multiplicador plástico. A função  $f(\tau, \bar{\epsilon}_p)$  é utilizada para se determinar a natureza do comportamento e é chamada de condição de escoamento:

$$f(\tau, \bar{\epsilon}_p) = |\tau| - (\tau_y^0 + H\bar{\epsilon}_p) \leq 0; \quad \bar{\epsilon}_p \geq 0, \quad (3.18)$$

onde  $\bar{\epsilon}_p$  é o parâmetro de endurecimento,  $\tau_y^0$  é a tensão de escoamento inicial e  $H$  é a propriedade do material chamada de módulo plástico.

Se  $f(\tau, \bar{\epsilon}_p) < 0$ , a deformação é elástica. Alternativamente, se  $f(\tau, \bar{\epsilon}_p) = 0$ , uma deformação adicional pode ser tanto plástica quanto elástica dependendo do carregamento subsequente.

O parâmetro de endurecimento,  $\bar{\epsilon}_p$ , é definido como a deformação plástica absoluta acumulada no tempo, isto é:

$$\bar{\epsilon}_p = \int_0^t \dot{\bar{\epsilon}}_p dt; \quad \text{onde } \dot{\bar{\epsilon}}_p = |\dot{\epsilon}_p| \quad (3.19)$$

A deformação plástica,  $\dot{\epsilon}_p \neq 0$ , somente irá ocorrer quando a tensão se igualar à tensão de escoamento, isto é,  $f(\tau, \bar{\epsilon}_p) = 0$ . Se  $f(\tau, \bar{\epsilon}_p) < 0$  então a resposta é elástica e ambos,  $\dot{\gamma}$  e  $\dot{\epsilon}_p$ , são nulos.

Essas afirmações podem ser combinadas dentro das condições de carregamento/descarregamento:

$$\dot{\gamma} \geq 0; \quad (3.20)$$

$$f(\tau, \bar{\epsilon}_p) \leq 0; \quad (3.21)$$

$$\dot{\gamma}f(\tau, \bar{\varepsilon}_p) = 0. \quad (3.22)$$

Para se avaliar o comportamento do material estudado no tempo e no espaço é preciso considerar passos de tempo discretos  $\Delta t$  durante os quais a haste se move de uma posição  $n$  em um tempo  $t$  até uma posição  $n + 1$  em um tempo  $t + \Delta t$ . Com isso o comprimento da haste nos tempos  $t$  e  $t + \Delta t$  são  $l_n$  e  $l_{n+1}$  respectivamente.

A cada passo incremental, uma configuração descarregada da haste pode ser definida, onde o comprimento da haste é  $l_{p,n}$  e  $l_{p,n+1}$  para o passo anterior e atual, respectivamente. Se não houver deformação plástica durante o incremento então  $l_{p,n+1} = l_{p,n}$ . A Figura 3.4 mostra essa cinemática.

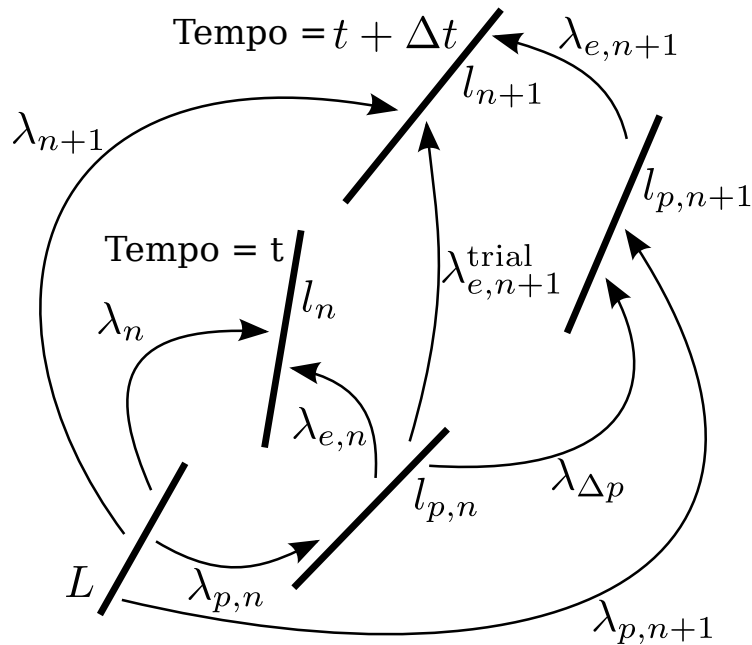


Figura 3.4: Cinemática incremental da barra.

Essa forma de representação incremental indica os possíveis passos que a barra pode seguir de acordo com a deformação sofrida. Em um primeiro momento (tempo =  $t$ ), como já detalhado anteriormente, após o descarregamento, a barra adquire um comprimento  $l_{p,n}$  devido à uma possível deformação plástica sofrida, que é permanente. Assumindo, então, que houve deformação plástica nesse primeiro incremento, o próximo incremento (ao longo do passo de tempo  $\Delta t$ ) é avaliado a partir desse novo comprimento,  $l_{p,n}$ , como sendo uma deformação puramente elástica, como uma tentativa (trial) de obter a real deformação, em vista não haver maiores informações.

Desse modo, para uma avaliação inicial como uma forma de tentativa, no intervalo de

tempo  $\Delta t$ , calcula-se o valor da função  $f(\tau_{n+1}^{trial}, \bar{\varepsilon}_{p,n})$ , que indicará que a tentativa inicial foi correta e a deformação foi puramente elástica ( $f \leq 0$ ) ou que deve-se adicionar a deformação plástica pois a tentativa inicial não foi adequada ( $f > 0$ ):

$$f(\tau_{n+1}^{trial}, \bar{\varepsilon}_{p,n}) = |\tau_{n+1}^{trial}| - (\tau_y^0 + H\bar{\varepsilon}_{p,n}), \quad (3.23)$$

sendo usado para a primeira iteração  $\bar{\varepsilon}_{p,n} = 0$ , já que na primeira tentativa assume-se um comportamento elástico, e:

$$\tau_{n+1}^{trial} = E\varepsilon_{e,n+1}^{trial}, \quad (3.24)$$

$$\varepsilon_{e,n+1}^{trial} = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{p,n}, \quad (3.25)$$

onde:

$$\varepsilon_{n+1} = \ln\left(\frac{l_{n+1}}{L}\right) \quad \text{e} \quad (3.26)$$

$$\varepsilon_{p,n} = \ln\left(\frac{l_{p,n}}{L}\right). \quad (3.27)$$

Caso seja verificada a deformação plástica no intervalo de tempo  $\Delta t$  o caminho correto a ser seguido pela barra na Figura 3.4 é levando em conta o alongamento plástico incremental,  $\lambda_{\Delta p}$ , resultando no comprimento  $l_{p,n+1}$ , que é o comprimento relativo à deformação plástica permanente, após o descarregamento, no tempo  $t + \Delta t$ . Mais detalhes sobre essa análise incremental elastoplástica podem ser encontrados em Bonet e Wood (2008).

Resumindo a análise, pode-se determinar em um passo de tempo considerado se o comportamento é elástico ou plástico e, a partir disso, atualizar as variáveis:

Elástico:

$$f(\tau_{n+1}^{trial}, \bar{\varepsilon}_{p,n}) \leq 0 \implies \begin{cases} \Delta\gamma = 0 \\ \tau_{n+1} = \tau_{n+1}^{trial} \\ \varepsilon_{p,n+1} = \varepsilon_{p,n} \\ \bar{\varepsilon}_{p,n+1} = \bar{\varepsilon}_{p,n} \end{cases} \quad (3.28)$$

Plástico:

$$f(\tau_{n+1}^{trial}, \bar{\varepsilon}_{p,n}) > 0 \implies \begin{cases} \Delta\gamma = \frac{f_{n+1}^{trial}}{E+H} \\ \Delta\varepsilon_p = \Delta\gamma \text{sign}(\tau_{n+1}) \\ \tau_{n+1} = \tau_{n+1}^{trial} - E\Delta\varepsilon_p \\ \varepsilon_{p,n+1} = \varepsilon_{p,n} + \Delta\varepsilon_p \\ \bar{\varepsilon}_{p,n+1} = \bar{\varepsilon}_{p,n} + \Delta\gamma \end{cases} \quad (3.29)$$

A avaliação das deformações a cada passo de tempo utilizando as equações (3.23), (3.28) e (3.29) configura o que é chamado de *Return-Mapping* (Bonet e Wood, 2008).

### 3.3 Equações de equilíbrio não-lineares e o Método de Newton-Raphson

As equações de equilíbrio de um nó da barra são estabelecidas em relação à posição atual pela montagem das forças internas típicas  $\mathbf{T}_a$  e das forças externas  $\mathbf{F}_a$  em todos os nós da treliça. A montagem é feita pela contribuição de cada elemento associado a um nó típico e é expresso pelo resíduo  $\mathbf{R}_a$ , como o balanço entre as forças internas e externas:

$$\mathbf{R}_a = \sum_{\substack{e=1 \\ e \ni a}}^{m_a} \mathbf{T}_n^a - \mathbf{F}_a = \mathbf{0}, \quad (3.30)$$

onde a notação não usual  $e \ni a$  é usada para denotar os elementos que estão conectados ao nó  $a$  e  $m_a$  é o número total de tais elementos. As equações de equilíbrio acima descritas são funções não-lineares da posição nodal já que a força nodal interna é uma função do comprimento  $l$  e do vetor unitário  $\mathbf{n}$  do elemento e esses são funções da posição (equações (3.4) e (3.7), respectivamente). Consequentemente, as equações de equilíbrio podem ser resolvidas pelo método de Newton-Raphson. A equação (3.30) pode ser escrita para todos os nós da estrutura na forma compacta em termos de um vetor de forças residuais  $\mathbf{R}(\mathbf{x})$  que são função da posição nodal atual  $\mathbf{x}$  resultando:

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}; \quad \text{onde } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{T}_N \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_N \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

### 3.3.1 Método de Newton-Raphson

O procedimento de Newton-Raphson de resolução de equações não-lineares envolve a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ , os deslocamentos incrementais  $\mathbf{u}$  e as forças residuais em desequilíbrio  $\mathbf{R}$  e são escritas para um passo iterativo  $k$  como:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}_k)\mathbf{u} = -\mathbf{R}(\mathbf{x}_k); \quad (3.32)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{u}; \quad (3.33)$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}_k)\mathbf{u} = D\mathbf{R}(\mathbf{x}_k)[\mathbf{u}], \quad (3.34)$$

em que o termo  $D\mathbf{R}(\mathbf{x}_k)[\mathbf{u}]$  representa a derivada direcional de  $\mathbf{R}(\mathbf{x})$  na iteração  $k$  e na direção de  $\mathbf{u}$ .

A matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$  é montada da maneira usual a partir da contribuição da matriz de rigidez de cada elemento individual  $\mathbf{K}^{(e)}$ , onde:

$$\mathbf{K}^{(e)}(\mathbf{x}_k^{(e)}) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa}^{(e)} & \mathbf{K}_{ab}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{ba}^{(e)} & \mathbf{K}_{bb}^{(e)} \end{bmatrix}; \quad \text{onde } \mathbf{x}_k^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix}_k \quad (3.35)$$

Para o caso em que as forças externas são independentes da deformação, a contribuição de rigidez do elemento para  $\mathbf{K}(\mathbf{x}_k)\mathbf{u}$  na equação (3.32) é a derivada direcional de  $\mathbf{T}^{(e)}$ , ou seja:

$$\mathbf{K}^{(e)}(\mathbf{x}_k^{(e)})\mathbf{u}^{(e)} = D\mathbf{T}^{(e)}(\mathbf{x}^{(e)})[\mathbf{u}]; \quad \text{onde } \mathbf{T}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_a \\ \mathbf{T}_b \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_k^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{u}_b \end{bmatrix}_k, \quad (3.36)$$

e  $a$  e  $b$  são os nós de um elemento típico ( $e$ ).

Para se determinar a rigidez tangente é preciso calcular a derivada direcional  $D\mathbf{T}^{(e)}(\mathbf{x}^{(e)})[\mathbf{u}^{(e)}]$ . A derivada direcional de  $\mathbf{T}_b$  é dada por:

$$D\mathbf{T}_b(\mathbf{x})[\mathbf{u}] = D\tau(\mathbf{x})[\mathbf{u}]\frac{V}{l}\mathbf{n} + \tau D\left(\frac{V}{l}\right)[\mathbf{u}]\mathbf{n} + \tau\frac{V}{l}D\mathbf{n}(\mathbf{x})[\mathbf{u}], \quad (3.37)$$

onde após uma sequência de etapas de cálculos das derivadas, de substituições e de

rearranjos, chega-se ao seguinte resultado (Bonet e Wood, 2008):

$$D\mathbf{T}_b(\mathbf{x})[\mathbf{u}] = \left( \frac{V}{v} \frac{d\tau}{d\varepsilon} \frac{a}{l} - \frac{2\sigma a}{l} \right) (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})_{3 \times 3} (\mathbf{u}_b - \mathbf{u}_a) + \frac{\sigma a}{l} \mathbf{I}_{3 \times 3} (\mathbf{u}_b - \mathbf{u}_a), \quad (3.38)$$

onde  $(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})_{3 \times 3}$  é a multiplicação do vetor unitário  $\mathbf{n}$  pelo vetor transposto dele,  $\mathbf{I}_{3 \times 3}$  é a matriz identidade de ordem 3 e  $\frac{d\tau}{d\varepsilon}$  é o módulo tangente que no regime elástico é igual a  $E$  e no regime plástico é igual a  $\frac{EH}{E+H}$ .

Como  $\mathbf{T}_a = -\mathbf{T}_b$ , então  $D\mathbf{T}_a(\mathbf{x})[\mathbf{u}] = -D\mathbf{T}_b(\mathbf{x})[\mathbf{u}]$ . Colocando a equação acima na forma matricial resulta em:

$$D\mathbf{T}^{(e)}(\mathbf{x}^{(e)})[\mathbf{u}^{(e)}] = \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa}^{(e)} & \mathbf{K}_{ab}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{ba}^{(e)} & \mathbf{K}_{bb}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{u}_b \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

onde, em função do termo de rigidez  $k_r$  e da força axial  $T_i = \sigma a$ , as componentes da matriz de rigidez tangente consistente são:

$$\mathbf{K}_{aa}^{(e)} = \mathbf{K}_{bb}^{(e)} = k_r \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \frac{T_i}{l} \mathbf{I}_{3 \times 3}; \quad (3.40)$$

$$\mathbf{K}_{ab}^{(e)} = \mathbf{K}_{ba}^{(e)} = -\mathbf{K}_{bb}^{(e)}. \quad (3.41)$$

em que o termo de rigidez é dado por:

$$k_r = \left( \frac{V}{v} \frac{d\tau}{d\varepsilon} \frac{a}{l} - \frac{2T_i}{l} \right) = \frac{V}{l^2} \left( \frac{d\tau}{d\varepsilon} - 2\tau \right) \quad (3.42)$$

O pseudocódigo 1 elucida as principais etapas da resolução do problema mecânico, adotando-se um controle de carregamento ( $\Delta\mathbf{F}$ ). O marcador *incr* indica o número de incrementos que se deseja realizar e *iter* o número de iterações realizadas para a convergência do método de Newton-Raphson, que é atingida quando a norma do resíduo, *res*, se torna menor do que um valor de tolerância previamente definido, *tol*.

A montagem da matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  necessária para a resolução do problema mecânico depende da análise do comportamento de cada elemento em cada incremento, segundo o algoritmo de *Return-Mapping*, mostrado no pseudocódigo 2.



---

**Pseudocódigo 1:** Algoritmo resumido dos passos para resolução do problema mecânico.

---

```

1 início
2    $\mathbf{F} \leftarrow \mathbf{0}$ 
3    $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{X}$ 
4    $\mathbf{R} \leftarrow \mathbf{0}$ 
5    $incr \leftarrow 0$ 
6   enquanto  $incr < total_{incr}$  faça
7     iter  $\leftarrow 0$ 
8      $incr = incr + 1$ 
9      $\mathbf{F} = \mathbf{F} + \Delta\mathbf{F}$ 
10    Calcula  $\mathbf{T}(x)$  (equação (3.10))
11    Monta  $\mathbf{K}$  (equações (3.35), (3.40), (3.41) e (3.42))
12    Calcula Resíduo:  $\mathbf{R}(x) = \mathbf{T}(x) - \mathbf{F}$ 
13    Calcula a norma do Resíduo:  $res = \|\mathbf{R}\|$ 
14    enquanto  $(res > tol)$  e  $(iter < max_{iter})$  faça
15      iter = iter + 1
16      Resolve  $\mathbf{K}\mathbf{u} = -\mathbf{R}$ 
17       $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{u}$ 
18      Calcula  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{T}$ 
19      Calcula  $\mathbf{R}$ 
20      Calcula  $res = \|\mathbf{R}\|$ 
21    fim enqto
22  fim enqto
23 fim

```

---



---

**Pseudocódigo 2:** Algoritmo de Return-Mapping.

---

```

1 início
2   se  $f(\tau_{n+1}^{trial}, \bar{\varepsilon}_{p,n}) \leq 0$  então
3      $\Delta\gamma = 0$ 
4      $\frac{d\tau}{d\varepsilon} = E$ 
5   fim se
6   senão
7      $\Delta\gamma = \frac{f_{n+1}^{trial}}{E+H}$ 
8      $\frac{d\tau}{d\varepsilon} = \frac{EH}{E+H}$ 
9   fim se
10   $\Delta\varepsilon_p = \Delta\gamma sign(\tau_{n+1})$ 
11   $\tau_{n+1} = \tau_{n+1}^{trial} - E\Delta\varepsilon_p$ 
12   $\varepsilon_{p,n+1} = \varepsilon_{p,n} + \Delta\varepsilon_p$ 
13   $\bar{\varepsilon}_{p,n+1} = \bar{\varepsilon}_{p,n} + \Delta\gamma$ 
14 fim

```

---

## 4 Acoplamento termomecânico

Neste capítulo é abordada a questão do acoplamento termomecânico, onde é apresentada a forma como se dará o seu desenvolvimento. Ao final, as limitações que podem surgir devido às simplificações adotadas são relatadas.

### 4.1 Introdução

Analizados o comportamento térmico de transferência de calor e o comportamento elastoplástico com grandes deformações em hastes metálicas separadamente, é necessário se acoplar os dois modelos para avaliar o comportamento de treliças espaciais em situações como a presença de incêndio. O modelo acoplado é relevante para casos em que a estrutura está submetida a grandes variações de temperatura, pois isso altera as propriedades do material como o módulo de elasticidade e a tensão de escoamento. Essas situações podem se dar, por exemplo, em galpões estruturados com treliças espaciais.

### 4.2 Desenvolvimento do modelo acoplado

O modelo de estudo final, que engloba o acoplamento das partes térmica e mecânica, tem como principal característica a consideração da influência da temperatura na deformação das barras, que passa a ser escrita como:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p + \varepsilon_{th}, \quad (4.1)$$

onde  $\varepsilon_{th}$  é a deformação térmica devido às variações de temperatura na barra. Seguindo o raciocínio apresentado no Capítulo 3 e adicionando a deformação térmica, obtém-se as seguintes definições:

$$\varepsilon_e = \ln \lambda_e = \ln \left( \frac{l}{l_p} \right) , \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_p = \ln \lambda_p = \ln \left( \frac{l_p}{l_{th}} \right) , \quad (4.3)$$

$$\varepsilon_{th} = \ln \lambda_{th} = \ln \left( \frac{l_{th}}{L} \right). \quad (4.4)$$

e o alongamento total passa a ser escrito como:

$$\lambda = \lambda_p \lambda_{th} \lambda_e. \quad (4.5)$$

Desse modo, a barra segue o caminho descrito pela Figura 4.1, com a inclusão da etapa térmica:

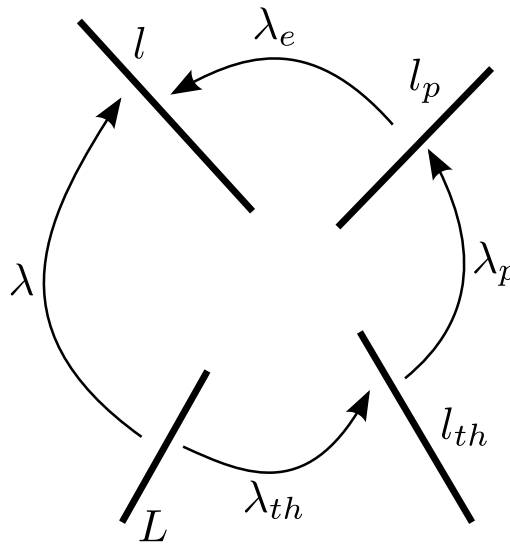


Figura 4.1: Configurações de alongamento da barra no modelo acoplado.

A equação (4.4) também pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\varepsilon_{th} = \ln \left( \frac{\Delta l}{L} + 1 \right), \quad (4.6)$$

onde  $\Delta l = l_{th} - L$  e o termo  $\frac{\Delta l}{L}$  representa o alongamento térmico relativo.

A tensão normal ao longo da barra passa a ser determinada por:

$$\tau = E\varepsilon_e = E(\varepsilon - \varepsilon_p - \varepsilon_{th}). \quad (4.7)$$

Feitas essas modificações, a cinemática incremental segue o mesmo modelo do Capítulo 3 com a diferença que no modelo acoplado as deformações térmicas passam a ser consideradas em todos os passos, como mostra a Figura 4.2 nos instantes de tempo  $t$  e  $t + \Delta t$ , para o comprimento da barra  $l_n$  e  $l_{n+1}$ , respectivamente.

A inclusão da etapa térmica gera uma nova possibilidade de caminho a ser seguido

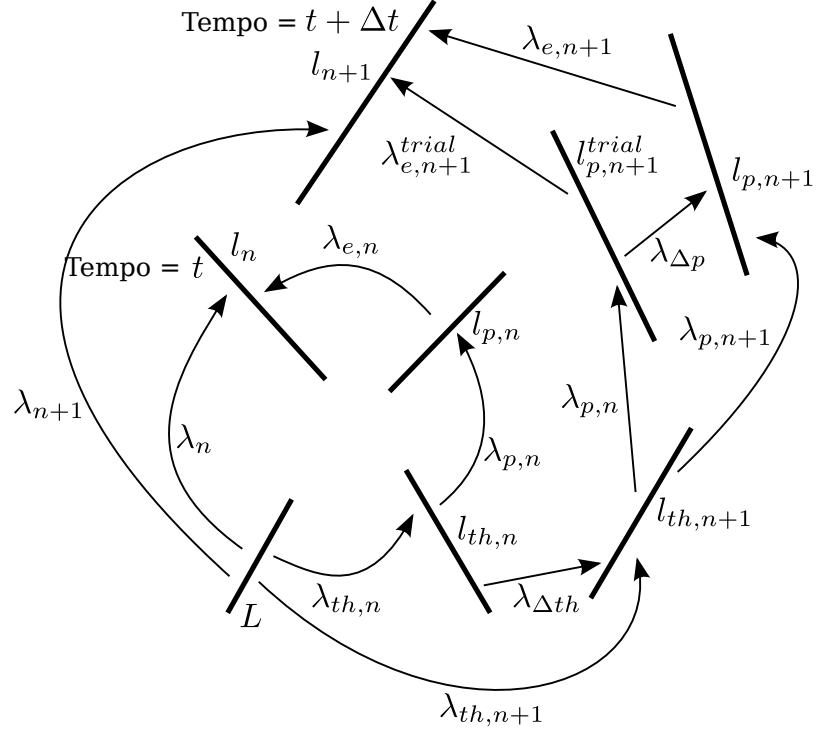


Figura 4.2: Configurações de alongamento da barra no modelo acoplado.

pela barra ao longo do intervalo de tempo  $\Delta t$ . Partindo do comprimento  $l_{th,n}$ , em um novo incremento térmico a barra se alonga de um valor  $\lambda_{\Delta th}$ , adquirindo um comprimento  $l_{th,n+1}$ . Em uma análise no mesmo intervalo de tempo a barra pode se comportar elástica ou plasticamente, o que é avaliado a partir de uma função  $f^{trial}$  análoga à descrita na equação (3.23) e que será mostrada ainda nesse capítulo.

O alongamento da barra no incremento  $n + 1$  passa a ser:

$$\lambda_{n+1} = \lambda_{th,n+1} \lambda_{p,n} \lambda_{e,n+1}^{trial}. \quad (4.8)$$

Logo,  $\lambda_{e,n+1}^{trial}$  é dado por:

$$\lambda_{e,n+1}^{trial} = \lambda_{n+1} \lambda_{th,n+1}^{-1} \lambda_{p,n}^{-1}. \quad (4.9)$$

A equação (4.9) pode ser reescrita como:

$$\ln \lambda_{e,n+1}^{trial} = \ln \lambda_{n+1} + \ln \lambda_{th,n+1}^{-1} + \ln \lambda_{p,n}^{-1}, \quad (4.10)$$

ou, em função das deformações, como:

$$\varepsilon_{e,n+1}^{trial} = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{th,n+1} - \varepsilon_{p,n}. \quad (4.11)$$

Assim, a tensão teste para o incremento  $n + 1$ ,  $\tau_{e,n+1}^{trial}$ , é dada por:

$$\tau_{e,n+1}^{trial} = E(T_{n+1})\varepsilon_{e,n+1}^{trial} = E(T_{n+1})(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{p,n} - \varepsilon_{th,n+1}), \quad (4.12)$$

onde  $E(T_{n+1})$  é o módulo de elasticidade dependente da temperatura  $T$ , no incremento  $n + 1$ .

A função  $f$ , descrita no Capítulo 3 pela equação (3.23), que avalia o comportamento da barra, também passa a considerar a influência da temperatura, da seguinte forma:

$$f(\tau_{n+1}^{trial}, \bar{\varepsilon}_{p,n}) = |\tau_{n+1}^{trial}| - (\tau_y^0(T_{n+1}) + H(T_{n+1})\bar{\varepsilon}_{p,n}), \quad (4.13)$$

onde  $\tau_y^0(T_{n+1})$  e  $H(T_{n+1})$  são, respectivamente, a tensão de escoamento e o módulo plástico, dependentes da temperatura  $T$ , no incremento  $n + 1$ .

Utilizando a equação (4.13) e atualizando as variáveis das equações (3.28) e (3.29) de acordo com o procedimento de Return-Mapping modificado para se considerar o efeito térmico, descrito no pseudocódigo 3, fecha-se o modelo acoplado e sua resolução é feita, novamente, pelo método de Newton-Raphson, descrito no Capítulo 3.

---

**Pseudocódigo 3:** Algoritmo de Return-Mapping modificado para o acoplamento.

---

```

1 início
2   se  $f(\tau_{n+1}^{trial}, \bar{\varepsilon}_{p,n}) \leq 0$  então
3      $\Delta\gamma = 0$ 
4      $\frac{d\tau}{d\varepsilon} = E(T_{n+1})$ 
5   fim se
6   senão
7      $\Delta\gamma = \frac{f_{n+1}^{trial}}{E(T_{n+1}) + H(T_{n+1})}$ 
8      $\frac{d\tau}{d\varepsilon} = \frac{E(T_{n+1})H(T_{n+1})}{E(T_{n+1}) + H(T_{n+1})}$ 
9   fim se
10   $\Delta\varepsilon_p = \Delta\gamma \text{sign}(\tau_{n+1})$ 
11   $\tau_{n+1} = \tau_{n+1}^{trial} - E(T_{n+1})\Delta\varepsilon_p$ 
12   $\varepsilon_{p,n+1} = \varepsilon_{p,n} + \Delta\varepsilon_p$ 
13   $\bar{\varepsilon}_{p,n+1} = \bar{\varepsilon}_{p,n} + \Delta\gamma$ 
14 fim

```

---

### 4.3 Características do acoplamento proposto

O acoplamento termomecânico proposto utiliza resultados da simulação de transferência de calor para serem usados na resolução do problema mecânico modificado para considerar a influência térmica, assim como é feito por Ribeiro (2009), que adota um procedimento de resolução consecutiva de dois sistemas de equações em cada intervalo de tempo. Já neste trabalho é feita uma abordagem separada dos dois modelos e a conexão é feita na versão atual de uma forma simplificada, onde o resultado térmico influencia o mecânico mas a volta não é considerada. Mas como o foco desse trabalho é o resultado global da influência da temperatura e de cargas atuantes na estrutura para se verificar a variação nas tensões e deformações, a possível plastificação das barras e o tempo aproximado que um modelo de treliça resiste a uma situação de incêndio, a presente estratégia de resolução satisfaz o problema proposto.

## 5 Resultados numéricos

Neste capítulo, são abordados os problemas térmico e mecânico separadamente, em um primeiro instante, com o propósito de validar os modelos. Depois é feito o acoplamento termomecânico para simular uma situação mais próxima das aplicações usuais da engenharia em que treliças são submetidas a variações de temperatura que ocorrem em casos de incêndio. Com isso é possível analisar o comportamento elastoplástico dessa estrutura e extrair informações de segurança importantes como o número e quais barras se plastificam em cada temperatura, o deslocamento de cada nó da estrutura para cada instante de tempo e o tempo aproximado que a treliça resiste a uma situação de incêndio-padrão.

### 5.1 Descrição da implementação realizada

A implementação e a resolução dos modelos estudados nesse trabalho foi feita utilizando a linguagem de programação *Python* (Python, 2016), utilizando-se das bibliotecas *numpy* (The Scipy community, 2016) e *matplotlib* (The matplotlib development team, 2016). A biblioteca *numpy* fornece estruturas de dados eficientes para vetores e matrizes, além de diversas operações sobre estes como, por exemplo, a função *numpy.linalg.solve()* que resolve um sistema de equações linear usando um método direto. A biblioteca *matplotlib* foi utilizada para confecção de gráficos e visualização dos resultados. Para os experimentos computacionais foi utilizado um computador com um processador Intel Core<sup>TM</sup> i5-2450M CPU @ 2.50GHz x 4 equipado com 4 GB de memória RAM.

As próximas seções trazem os problemas estudados nesse trabalho.

### 5.2 Problema térmico

A validação do código para o problema térmico foi feita a partir de duas situações envolvendo transferência de calor. Na primeira delas foi verificada a proximidade das soluções analítica e numérica na condução de calor transiente em uma barra, com condição de contorno variável, encontrado como um exemplo de referência em Huang e Usmani

(1994). A Figura 5.1 mostra a configuração do problema e as condições de contorno adotadas.

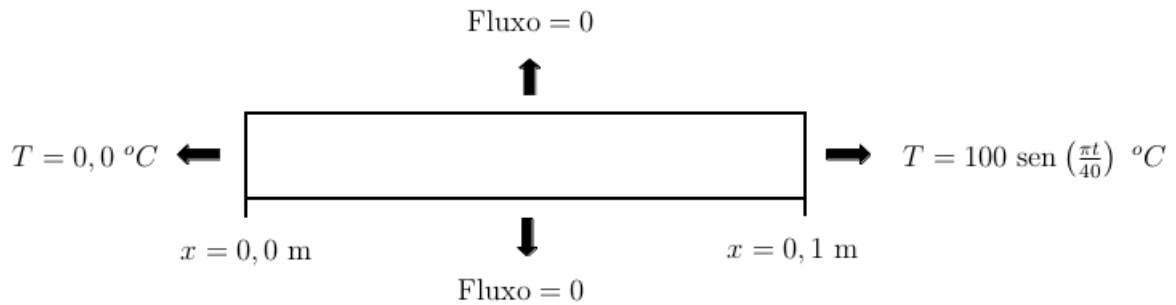


Figura 5.1: Configuração e condições de contorno do problema térmico 1.

Para uma análise unidimensional do problema adotou-se fluxo zero nos contornos da direção  $y$  e como condição inicial  $T(0, x) = 0, 0^\circ C$ .

Os parâmetros desse problema se encontram na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Propriedades do material simulado.

Parâmetro	Símbolo	Unidade	Valor
Massa específica	$\rho$	$(kg/m^3)$	7200,00
Condutividade térmica	$k$	$(W/m^\circ C)$	35,00
Calor específico	$c_p$	$(J/kg^\circ C)$	440,50

A comparação da solução analítica (Huang e Usmani, 1994) e da solução numérica obtida por elementos finitos foi feita para o problema no ponto  $x = 0,08$  metros. A Figura 5.3 mostra que a solução utilizando o método dos elementos finitos com uma malha uniforme de 80 elementos triangulares, mostrada na Figura 5.2, e com um passo de tempo de 1 segundo produziu um resultado muito próximo ao da solução analítica.

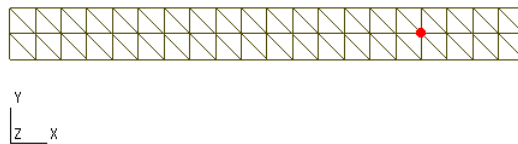


Figura 5.2: Discretização do problema térmico 1 onde o ponto em destaque ( $x = 0,08$  metros) é avaliado.



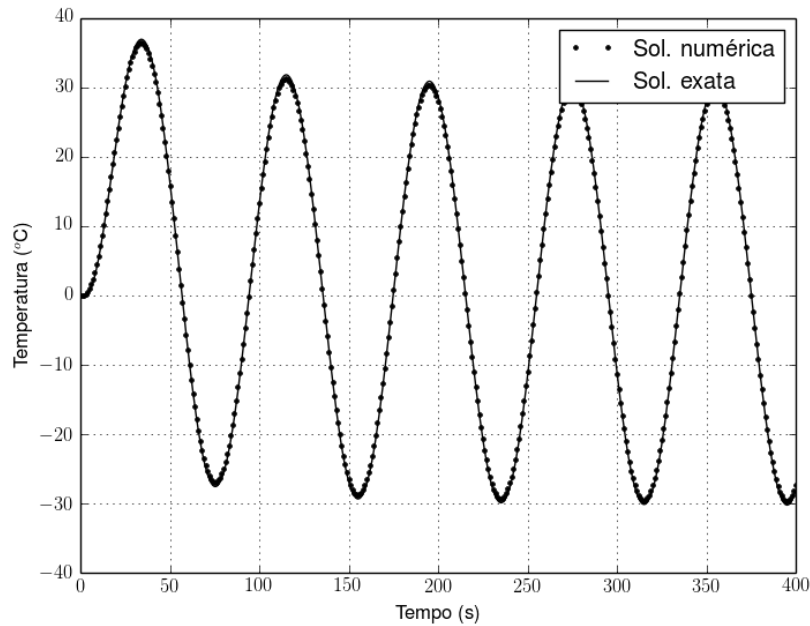


Figura 5.3: Evolução da temperatura no ponto  $x = 0,08$  metros.

Na segunda situação considerou-se a transferência de calor entre uma barra tubular de seção circular e gases provenientes de um incêndio-padrão. A equação da temperatura desses gases é dada pelo EN 1991-1-2:2002 (2002):

$$T_g = T_o + 345 \log_{10}(8t + 1), \quad (5.1)$$

onde  $T_g$  é a temperatura dos gases (em  $^{\circ}C$ ),  $T_o$  é a temperatura inicial, adotada como  $20^{\circ}C$ , e  $t$  é o tempo decorrido após o início do incêndio (em minutos).

A análise do problema foi feita em uma seção de  $10^{\circ}$  da seção transversal de uma barra com  $60mm$  de diâmetro e  $2mm$  de espessura. Devido à simetria e pequena espessura da barra a média das temperaturas foram calculadas segundo a equação (5.2) e assumidas como a temperatura da barra em cada instante de tempo.

$$T_b = \frac{\sum_{i=1}^n T_{M_i} A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad (5.2)$$

onde  $T_b$  é a temperatura média da barra,  $T_{M_i}$  é a temperatura média dos três pontos que constituem o elemento triangular  $i$ ,  $n$  é o número de elementos da malha e  $A_i$  é a área do elemento  $i$ .

A malha utilizada e as condições de contorno e iniciais adotadas são mostradas na

Figura 5.4.

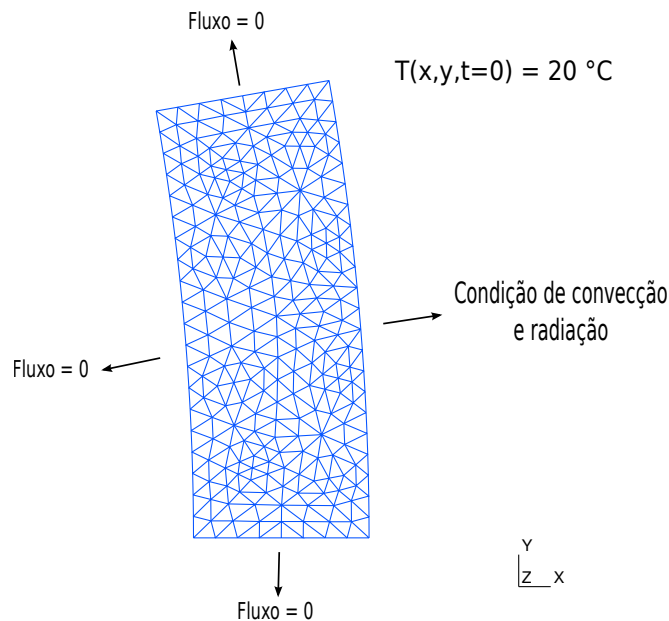


Figura 5.4: Malha e condições do problema.

O material da barra utilizado foi aço carbono, cuja massa específica é  $7850\text{kg}/\text{m}^3$  (William D. Callister, 2008). Adotou-se nesse trabalho uma emissividade para a radiação de 0,7 e um coeficiente de convecção de  $25\text{W}/\text{m}^2\text{ }^\circ\text{C}$ , que é o valor recomendado pela EN 1991-1-2:2002 (2002). A condutividade térmica e o calor específico do aço foram considerados dependentes da temperatura segundo as equações (5.3) e (5.4) (EN 1994-1-2:2005, 2005):

$$k[\text{W}/\text{m}^\circ\text{C}] = \begin{cases} 54 - 3,33 \times 10^{-2}T_b & 20^\circ\text{C} \geq T_b \leq 800^\circ\text{C} \\ 27,3 & 800 < T_b \leq 1200^\circ\text{C} \end{cases} \quad (5.3)$$

$$c_p[\text{J}/\text{kg}^\circ\text{C}] = \begin{cases} 425 + 7,73 \times 10^{-1}T_b - 1,69 \times 10^{-3}T_b^2 + \\ 2,22 \times 10^{-6}T_b^3 & 20^\circ\text{C} \geq T_b \leq 600^\circ\text{C} \\ 666 - \left(\frac{13002}{T_b - 738}\right) & 600^\circ\text{C} < T_b \leq 735^\circ\text{C} \\ 545 + \left(\frac{17820}{T_b - 731}\right) & 735^\circ\text{C} < T_b < 900^\circ\text{C} \\ 650 & 900^\circ\text{C} < T_b \leq 1200^\circ\text{C} \end{cases} \quad (5.4)$$

onde  $T_b$  é a temperatura média da barra em graus Celsius.

A Figura 5.5 mostra o gráfico da temperatura dos gases em função do tempo em uma situação de incêndio-padrão de 20 minutos e as temperaturas da barra analisada a partir

do algoritmo usado para implementar o problema de transferência de calor nesse trabalho em comparação com as temperaturas obtidas pelo software Thersys 2.0, implementado e validado por Ribeiro (2009).

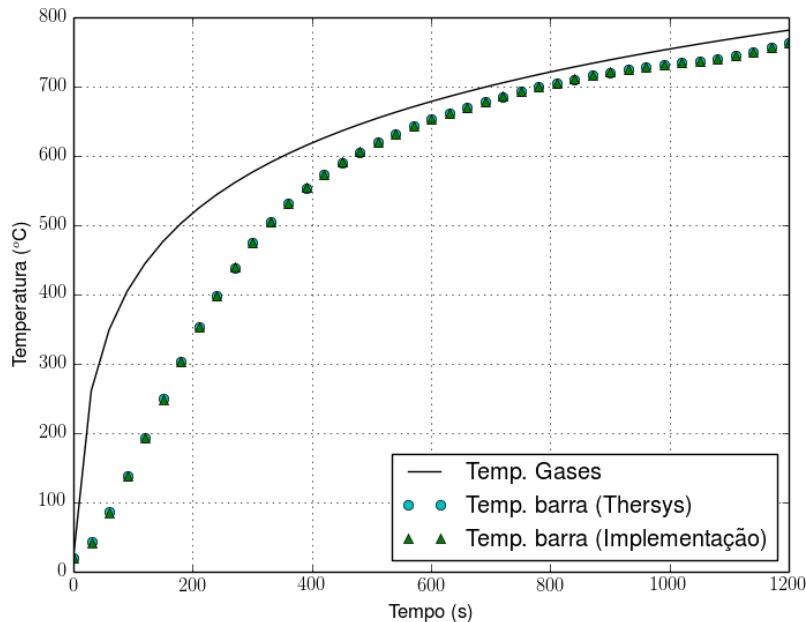


Figura 5.5: Evolução da temperatura dos gases e da barra no incêndio-padrão.

A Figura 5.5 mostra uma boa aproximação dos resultados esperados para a situação de incêndio em questão e, deste modo, o algoritmo é validado para o uso em problemas térmicos semelhantes, permitindo sua utilização no problema acoplado, principal objeto de estudo deste trabalho.

### 5.3 Problema mecânico

Para validar o código construído para avaliar o comportamento elastoplástico com grandes deformações utilizou-se um exemplo (Bonet e Wood, 2008) no qual uma barra sofre a ação de uma carga externa. A configuração do problema pode ser vista na Figura 5.6, em que a barra se encontra no plano  $xy$  com coordenadas  $(0, 0)$  e  $(0, 1; 0, 1)$ , em metros, para os pontos 1 e 2, respectivamente:

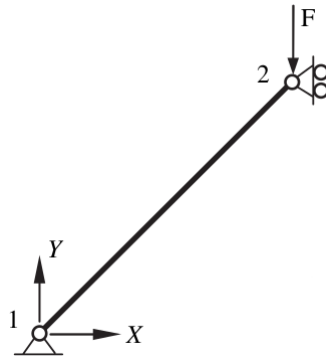


Figura 5.6: Configuração inicial do problema. Adaptado de Bonet e Wood (2008, p. 90).

O valor dos parâmetros usados nesse problema são apresentados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Parâmetros do material.

Parâmetro	Símbolo	Unidade	Valor
Módulo de elasticidade	$E$	( $GPa$ )	210,00
Tensão de escoamento	$\tau_y^0$	( $GPa$ )	25,00
Módulo Plástico	$H$	( $MPa$ )	1,00
Coefficiente de Poisson	$\nu$	adimensional	0,30
Área inicial	$A$	( $m^2$ )	$1,00 \times 10^{-6}$

Fazendo o controle de deslocamentos do nó 2 sob o efeito da força  $F$ , pode-se reproduzir os resultados do comportamento elastoplástico da haste. A Figura 5.7 mostra a variação da intensidade da força aplicada  $F$  dividida pelo módulo de elasticidade  $E$  e pela área indeformada  $A$  versus o deslocamento  $(Y - y)$  dividido pelo comprimento inicial  $L$ , em comparação com o resultado apresentado em Bonet e Wood (2008).

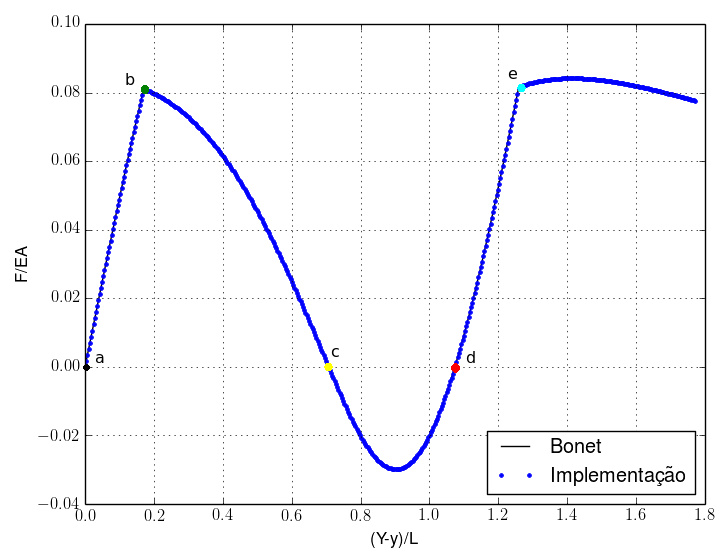


Figura 5.7: Comportamento elastoplástico da barra sob efeito da força  $F$ .

A Figura 5.7 revela que o problema estudado possui o comportamento esperado, que é o da diminuição da força  $F$  a partir do ponto  $b$ , associado ao início da plastificação da barra. No ponto  $c$ , a barra se encontra na posição horizontal. Um deslocamento a mais no mesmo sentido passa a induzir deformações elásticas e a força externa muda de sentido para tentar equilibrar o sistema. No ponto  $d$ , a barra está novamente descarregada e até chegar ao ponto  $e$  a deformação permanece elástica, quando novamente a barra começa a se plastificar, mas agora com uma deformação plástica positiva. A Figura 5.8 mostra o diagrama de tensão  $\tau$  versus a deformação  $\varepsilon$  para a barra ao longo da deformação imposta nesse exemplo.

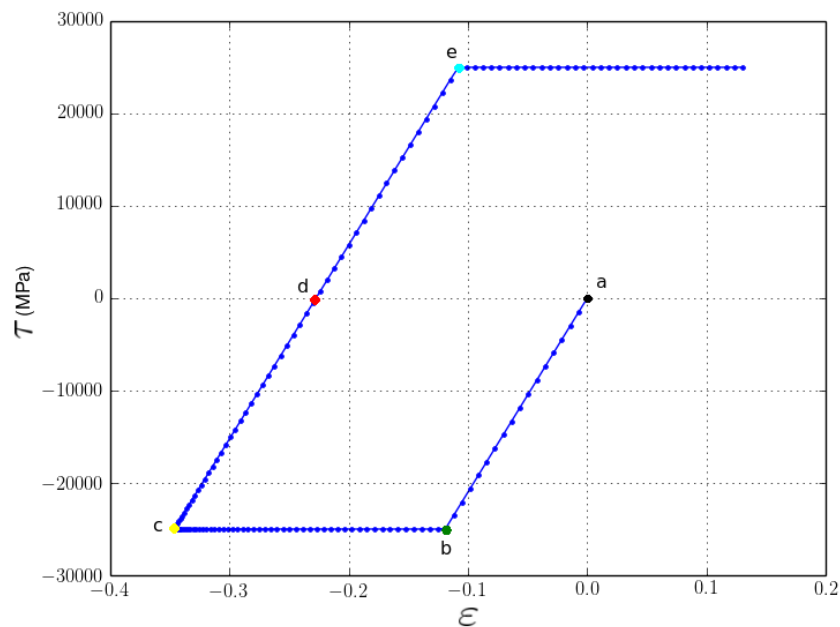


Figura 5.8: Variação da tensão em função da deformação.

A Figura 5.9 mostra a posição da barra para todos os pontos descritos, sendo o ponto  $a$  a posição inicial da barra.

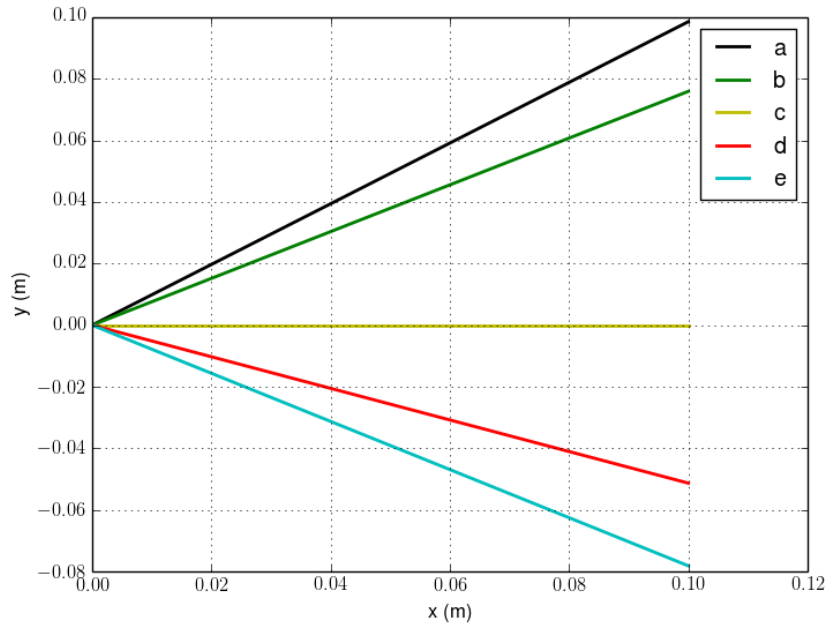


Figura 5.9: Posição da barra nos pontos considerados.

A Figura 5.7 mostra uma boa aproximação dos resultados esperados para a situação de aplicação de carga em uma barra e, deste modo, o algoritmo é validado para o uso em problemas mecânicos semelhantes, permitindo sua utilização no problema acoplado que avalia o comportamento termomecânico de treliças espaciais.

Na próxima seção serão estudados problemas maiores e mais complexos.

## 5.4 Acoplamento termomecânico

Avaliados, separadamente, os comportamentos térmico e mecânico, analisa-se agora as duas contribuições em conjunto. Para isso, utiliza-se os conceitos apresentados no Capítulo 4, que permite o acoplamento da deformação térmica aos efeitos mecânicos, e mostra-se os resultados de um exemplo mais simples de uma conexão de três barras. Posteriormente serão abordados dois exemplos mais próximos às aplicações usuais de engenharia e os resultados serão discutidos. Para efeito de simplificação, desconsideram-se cálculos relativos ao sistema de ligação entre as barras e considera-se apenas barras tubulares de seção circular.

Antes de se explorar as situações onde se aplica o modelo acoplado, é necessário especificar o material utilizado e suas propriedades.

### 5.4.1 Propriedades do material utilizado

O modelo acoplado foi desenvolvido primeiramente com a análise da transferência de calor em uma seção tubular circular de uma barra feita de aço carbono 1040, cujas propriedades constam na Tabela 5.3 (William D. Callister, 2008).

Tabela 5.3: Propriedades do aço carbono 1040 (valores à temperatura ambiente).

Parâmetro	Símbolo	Unidade	Valor
Massa específica	$\rho$	( $kg/m^3$ )	7850,00
Módulo de elasticidade	$E$	( $GPa$ )	207,00
Coefficiente de Poisson	$\nu$	adimensional	0,30
Tensão de escoamento	$\tau_y^0$	( $MPa$ )	290,00

A condutividade térmica e o calor específico do aço variam com a temperatura de acordo com as equações (5.3) e (5.4), respectivamente, da mesma maneira que foi utilizado na validação térmica. Com relação ao alongamento térmico relativo descrito no Capítulo 4, na equação (4.5), o EN 1993-1-2:2005 (2005) recomenda para o aço carbono os seguintes valores:

$$\frac{\Delta l}{L} = \begin{cases} -2,416 \times 10^{-4} + 1,2 \times 10^{-5}T_b + 0,4 \times 10^{-8}T_b^2 & \text{para } T_b \leq 750^\circ C \\ 0,011 & \text{para } 750 < T_b \leq 860^\circ C \\ -0,0062 + 2 \times 10^{-5}T_b & \text{para } T_b > 860^\circ C \end{cases} \quad (5.5)$$

onde  $L$  é o comprimento da barra a  $20^\circ C$  e  $T_b$  é a temperatura média da barra em graus Celsius.

O módulo plástico ou módulo de endurecimento ( $H$ ), outra importante propriedade dos materiais quando se trabalha no regime plástico, é muitas vezes determinado experimentalmente e para esse trabalho o valor adotado foi de 1,0 GPa para um modelo de endurecimento cinemático linear (de Souza Neto *et al.*, 2011).

As barras utilizadas no trabalho recebem calor dos gases de incêndio por convecção e radiação e transferem esse calor internamente por condução, tendo uma distribuição de temperaturas ao longo da seção transversal da estrutura, simulando um modelo bidimensional. Para avaliar as variações de temperatura decorrentes de situações de incêndio utilizou-se o modelo de equação de transferência de calor descrito no Capítulo 2 e a curva de incêndio-padrão dada pela equação (5.1).

Para o coeficiente de convecção entre os gases do incêndio-padrão e a superfície das barras foi utilizado o valor de  $25W/m^2 \text{ } ^\circ C$ , recomendado por EN 1991-1-2:2002 (2002), e para a radiação utilizou-se o valor de 0,7 para a emissividade. Para a análise de transferência de calor nas barras utilizou-se três seções transversais diferentes. A primeira possui  $60mm$  de diâmetro e  $2mm$  de espessura ( $\phi 60 \times 2, 0$ ), a segunda,  $76mm$  de diâmetro e  $2mm$  de espessura ( $\phi 76 \times 2, 0$ ) e a terceira,  $90mm$  de diâmetro e  $2mm$  de espessura ( $\phi 90 \times 2, 0$ ).

Devido à simetria do problema, analisou-se uma seção transversal de  $10^\circ$  da barra, e como condições de contorno, além da convecção e da radiação na superfície externa, considerou-se fluxo nulo nas outras bordas. Como condição inicial adotou-se a temperatura de  $20^\circ C$ . A Figura 5.4 utilizada para a validação térmica mostra essas considerações.

A fim de considerar os resultados do modelo térmico bidimensional, associado à seção transversal, com o modelo mecânico unidimensional da barra, em cada instante de tempo, foi calculado e armazenado um valor médio de temperatura considerando todos os pontos da malha, assim como foi feito na validação térmica, utilizando a equação (5.2).

Uma vez computados, esses valores são posteriormente utilizados na simulação da parte mecânica como temperatura das barras para se verificar as modificações estruturais da treliça, considerando as variações do módulo de elasticidade, do módulo plástico e da tensão de escoamento devido ao aumento de temperatura.

Para se analisar as alterações na tensão de escoamento, no módulo de elasticidade com o aumento da temperatura utilizou-se os fatores de redução  $k_{y,T}$  e  $k_{E,T}$ , respectivamente, correspondentes aos aços estruturais laminados. Esses valores são apresentados na Tabela 5.4 (EN 1993-1-2:2005, 2005), onde, nos intervalos de temperatura, foi utilizada a estratégia de interpolação polinomial. Para analisar a variação do módulo plástico, considerou-se o mesmo fator de redução utilizado para o módulo de elasticidade.



Tabela 5.4: Fatores de redução para os aços laminados.

Temperatura $T(^{\circ}\text{C})$	Aços laminados	
	$k_{y,T} = \frac{\tau_{y,T}^0}{\tau_y^0}$	$k_{E,T} = \frac{E_T}{E}$
20	1,000	1,000
100	1,000	1,000
200	1,000	0,900
300	1,000	0,800
400	1,000	0,700
500	0,780	0,600
600	0,470	0,310
700	0,230	0,130
800	0,110	0,090
900	0,060	0,0675
1000	0,040	0,045
1100	0,020	0,0225
1200	0,000	0,000

Nos itens a seguir são analisadas as situações de interesse desse trabalho.

### 5.4.2 Exemplo de três barras acopladas

Um caso mais simples para análise do comportamento acoplado é mostrado na Figura 5.10, que se trata de uma conformação de 3 barras conectadas por um só nó, de coordenadas  $(0, 0, 1)$  m, que se denomina de nó principal. O outro nó de cada barra se encontra no plano  $z = 0$ , distantes cada um de 1 metro do ponto central  $(0, 0, 0)$  m, distantes um do outro por um ângulo de  $120^{\circ}$  e com deslocamentos iguais a zero prescritos em todas as direções.

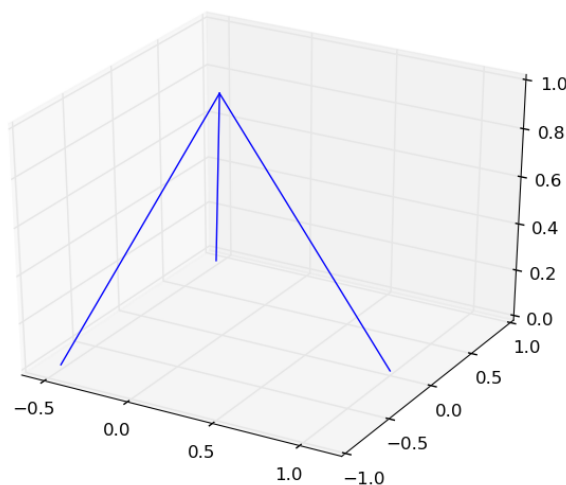


Figura 5.10: Conformação do problema de três barras.

Neste exemplo, utilizou-se barras com seção transversal  $\phi 60 \times 2,0$  e simulou-se uma situação em que o nó principal do conjunto de barras sofre inicialmente uma carga permanente de peso próprio e 60 incrementos de 5 kN de carga acidental até um limite de 300 kN, causando um deslocamento vertical para baixo deste nó e aumento da tensão nas três barras. A evolução da coordenada  $z$  do nó principal com relação às cargas incrementadas é mostrada na Figura 5.11.

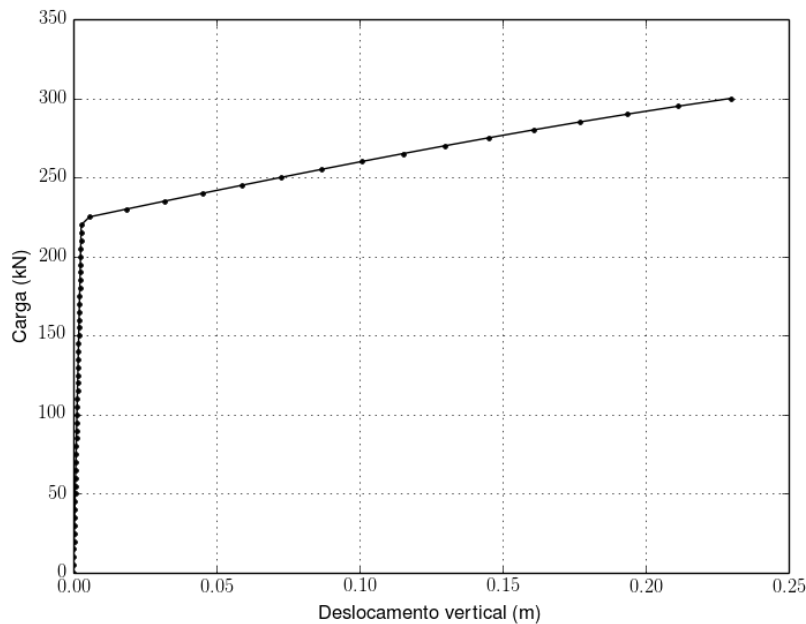


Figura 5.11: Deslocamento vertical do nó principal devido às cargas acidentais.

A análise do gráfico, juntamente com os resultados gerados, mostram que as barras sofrem plastificação quando uma carga acidental de 225 kN é aplicada ao nó principal causando um maior deslocamento deste com relação aos deslocamentos anteriores.

Para analisar o efeito térmico após os incrementos de carga, considerou-se uma outra situação na qual uma carga acidental de 100 kN é aplicada ao nó principal, estando a barra ainda no regime elástico e, após isso, inicia-se a análise térmica com o incêndio-padrão com duração de 20 minutos, causando um aumento gradual na deformação térmica. A evolução da temperatura dos gases do incêndio e da temperatura média na barra em função do tempo é mostrada na Figura 5.12.

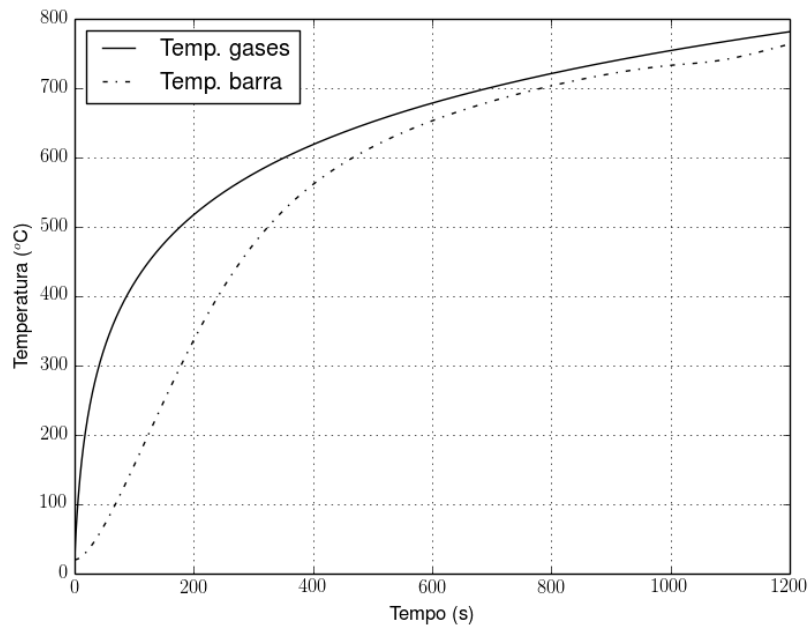


Figura 5.12: Evolução da temperatura com o tempo de incêndio.

A relação do deslocamento vertical do nó principal com o tempo de incêndio pode ser vista na Figura 5.13.

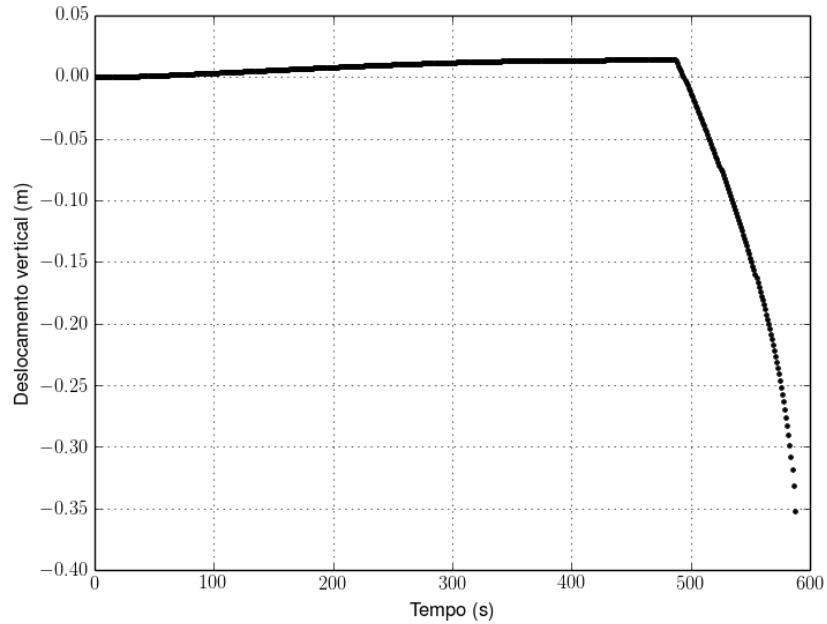


Figura 5.13: Deslocamento vertical do nó principal durante o tempo de incêndio para a barra com área  $\phi 60 \times 2,0$ .

Como efeito do incremento de carga e temperatura nas barras, elas plastificam decorridos 488 segundos (8 minutos e 8 segundos) após o início do incêndio, a uma temperatura média da barra de 609,90 °C. Essa plastificação ocorre em grande parte devido à redução da tensão de escoamento, que a essa temperatura chega a reduzir 55 % do seu valor. Já com 588 segundos (9 minutos e 48 segundos) a simulação não converge mais e leva a acreditar que as barras não resistem mais ao carregamento térmico a uma temperatura de 649,00 °C e perdem o poder de sustentação.

Um outro exemplo igual ao anterior mas com a área da seção transversal maior ( $\phi$  76x2,0) mostra que o tempo para plastificação das barras aumenta para 593 segundos (9 minutos e 53 segundos) após o início do incêndio com temperatura média das barras de 650,37 °C. E com 693 segundos (11 minutos e 33 segundos) a simulação para de convergir a uma temperatura de 679,16 °C e indica perda de sustentação das barras. A Figura 5.14 mostra o deslocamento vertical do nó principal com relação ao tempo de incêndio.

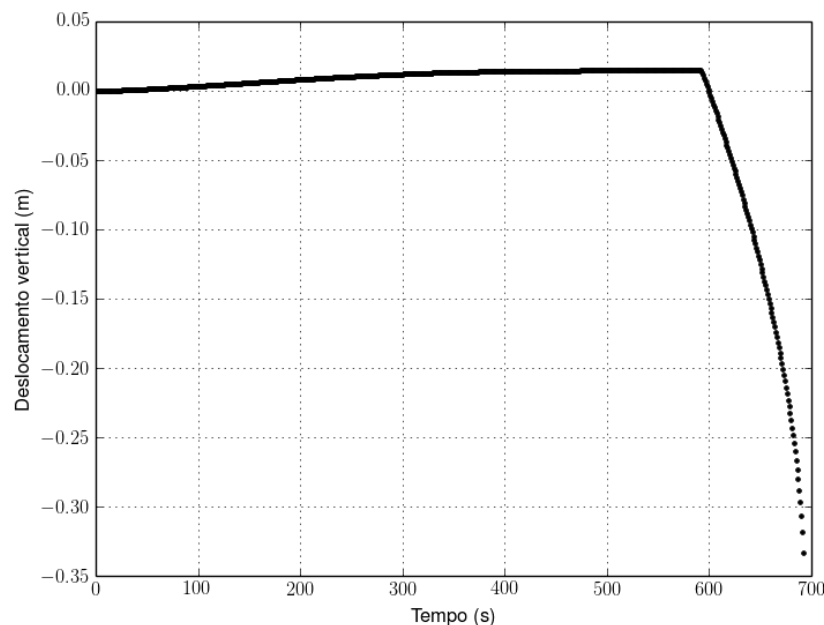


Figura 5.14: Deslocamento vertical do nó principal durante o tempo de incêndio para a barra com área  $\phi$  76x2,0.

Outros fatores que modificam as condições para plastificação das barras em situações de incêndio são o tamanho das barras e a carga acidental aplicada.

### 5.4.3 Treliças espaciais de cobertura

Verificado o acoplamento térmico, analisa-se agora as treliças espaciais com topologia similar a da apresentada na Figura 1.2 do Capítulo 1, que são muito utilizadas e de grande importância em galpões para sustentar a cobertura desses locais.

A fim de evitar situações de flambagem nas barras, as medidas adotadas nas simulações levaram em conta apenas valores que evitassem tal fenômeno, de acordo com ABNT (2008). A teoria clássica de flambagem leva em consideração o raio de giração,  $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$ , em que  $I$  é o momento de inércia e  $A$  é a área da seção transversal da barra e o índice de esbeltez,  $\lambda = \frac{l}{r}$ , em que  $l$  é o comprimento da barra analisada. Para que um material elastoplástico ideal se comporte de maneira a não sofrer flambagem, certas medidas devem ser adotadas quanto ao comprimento e à área das barras. Para isso, calcula-se a esbeltez limite entre o regime elástico e plástico,  $\lambda_{pi} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\tau_y}}$ , e determina-se um comprimento máximo da barra tal que a razão  $\frac{\lambda}{\lambda_{pi}}$  seja menor ou igual a 1. Desta forma, as treliças a seguir serão analisadas.

#### 5.4.3.1 Treliça espacial 1

A primeira treliça espacial de cobertura a ser analisada possui 3200 barras com seção transversal de  $\phi 76 \times 2,0$  e se desenvolve sobre um vão de 30 metros nas duas direções, com 2 banzos separados por uma altura de 1,5 metros e módulos de 1,5 metros conforme recomendado por Marsh (2000) para uma otimização no custo da estrutura. O esboço dessa treliça, esquematizada nos moldes da Figura 1.2, pode ser visto nas Figuras 5.15 e 5.16.

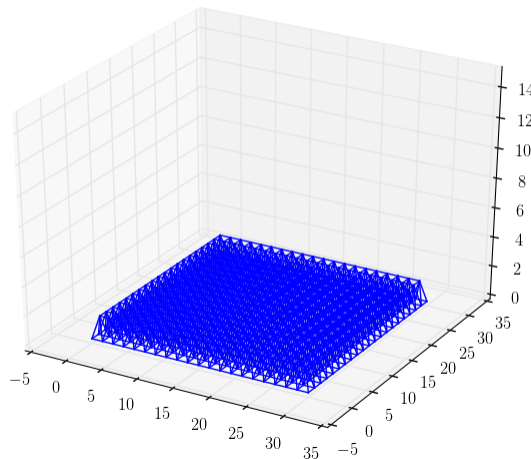


Figura 5.15: Treliça espacial 1 (vista em perspectiva).

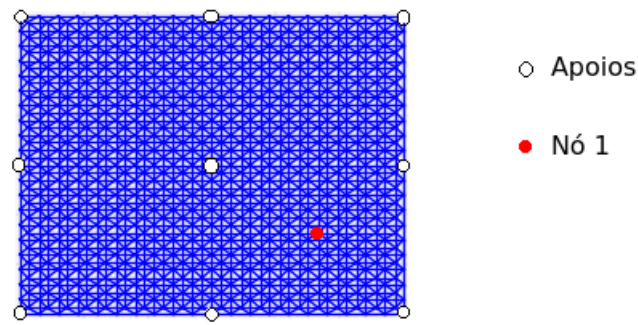


Figura 5.16: Treliça espacial 1 (vista superior).

Uma carga acidental de  $0,5kN/m^2$  foi aplicada em todos os nós do banzo superior, simulando uma cobertura sustentada pela treliça, além da carga permanente do peso próprio. Em seguida foi simulado um incêndio-padrão de 20 minutos (1200 segundos) e o deslocamento vertical do nó de coordenadas (23,25 ; 8,25 ; 1,5) m, que foi denominado nó 1, pode ser analisado pelo gráfico da Figura 5.17.

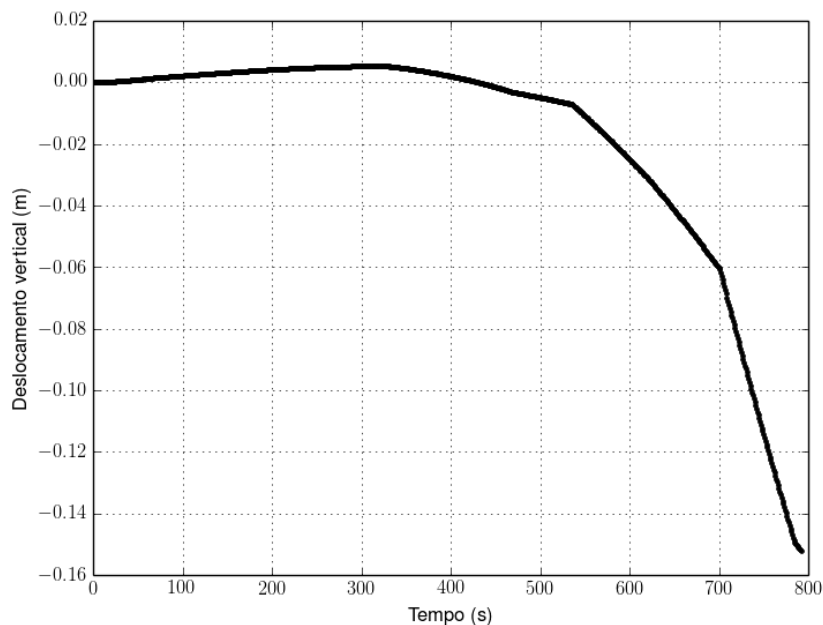


Figura 5.17: Deslocamento vertical do nó 1.

O gráfico acima mostra que o nó 1 teve um deslocamento vertical de aproximadamente 0,15 metros ao fim do tempo de incêndio suportado pela treliça, que foi de 792 segundos (13 minutos e 12 segundos), onde a temperatura média das barras chegaram a  $701,60^{\circ}C$  e 16 delas se plastificaram. A deformação causada nas barras pode ser vista nas Figuras 5.18 e 5.19. O valor de  $p$  apresentado nas figuras de conformação final das barras representa o quão deformada a barra está e foi determinado partindo-se da equação 3.23, da seguinte

forma:

$$f(\tau_{n+1}^{trial}, \bar{\varepsilon}_{p,n}) = |\tau_{n+1}^{trial}| - (\tau_y^0 + H\bar{\varepsilon}_{p,n}), \quad (5.6)$$

$$\frac{f(\tau_{n+1}^{trial}, \bar{\varepsilon}_{p,n})}{(\tau_y^0 + H\bar{\varepsilon}_{p,n})} = \frac{|\tau_{n+1}^{trial}|}{(\tau_y^0 + H\bar{\varepsilon}_{p,n})} - 1, \quad (5.7)$$

$$p = 1 + \left( \frac{f(\tau_{n+1}^{trial}, \bar{\varepsilon}_{p,n})}{(\tau_y^0 + H\bar{\varepsilon}_{p,n})} \right) = \frac{|\tau_{n+1}^{trial}|}{(\tau_y^0 + H\bar{\varepsilon}_{p,n})}. \quad (5.8)$$

Assim, pode-se avaliar a tendência de cada barra da estrutura em plastificar, sendo que quando  $p = 0$  não há deformação e quando  $p = 1$  a barra está na iminência de plastificar. Para valores de  $p$  maiores que 1 a barra já está plastificada.

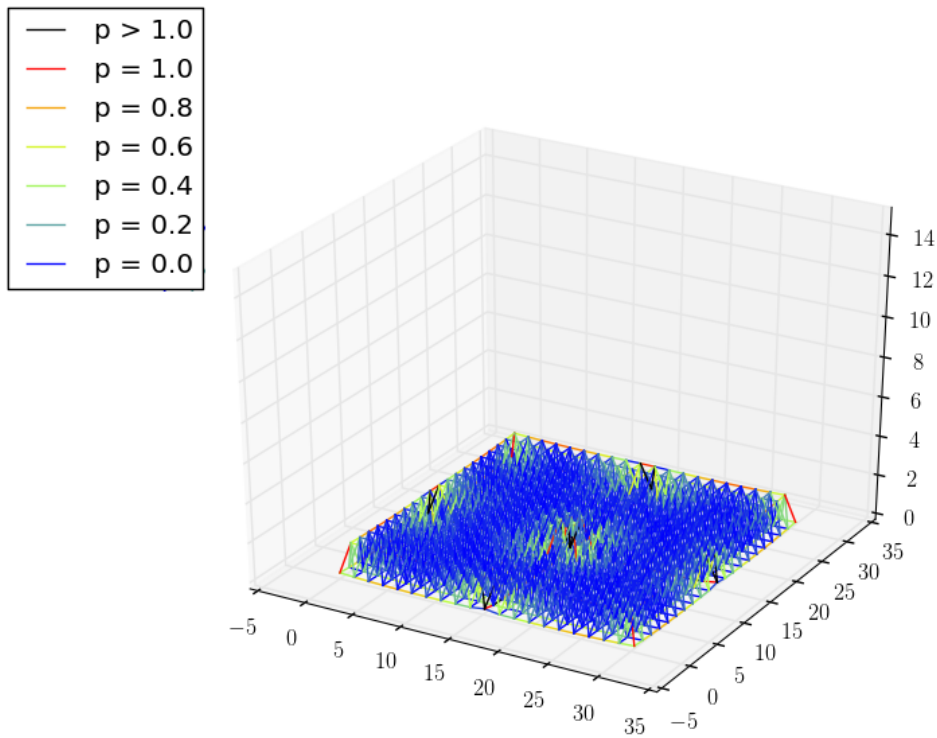


Figura 5.18: Distribuição espacial da solicitação nas barras da treliça 1 a partir do valor de  $p$  (vista em perspectiva).

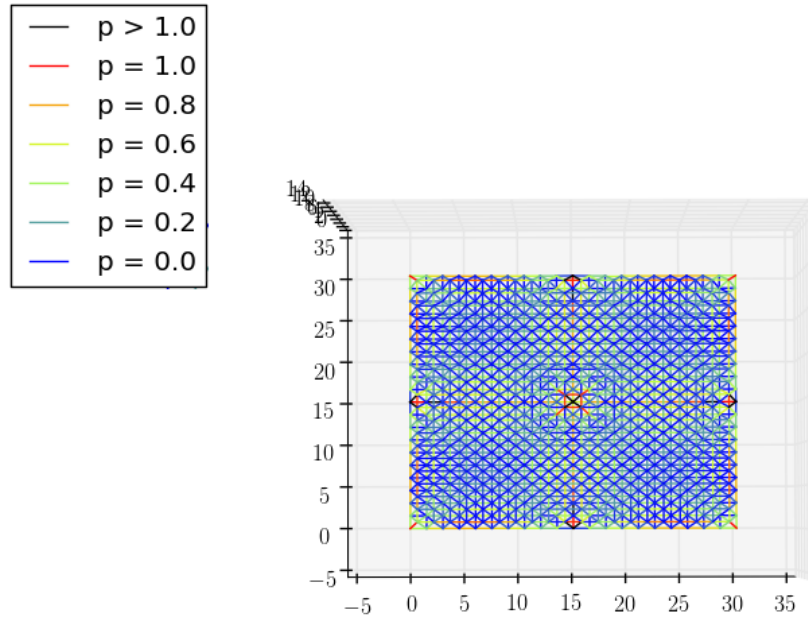


Figura 5.19: Distribuição espacial da solicitação nas barras da treliça 1 a partir do valor de  $p$  (vista superior).

#### 5.4.3.2 Treliça espacial 2

Em um segundo caso, analisou-se uma treliça também com 3200 barras mas com seção transversal de  $\phi 90 \times 2,0$ , desenvolvida sobre um vão de 40 metros nas duas direções, com altura de 2 metros entre os banzos e módulos de 2 metros. A carga acidental aplicada manteve-se em  $0,5 \text{ kN/m}^2$  e o tempo de incêndio simulado foi novamente de 20 minutos. O esboço da vista superior dessa treliça se encontra na Figura 5.20.

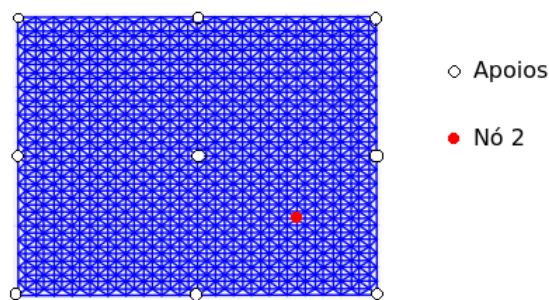


Figura 5.20: Treliça espacial 2 (vista superior).

O gráfico da Figura 5.21 mostra a relação entre o deslocamento vertical do nó de coordenadas  $(31,00 ; 11,00 ; 2,00)$  m, denominado nó 2, e o tempo de incêndio.



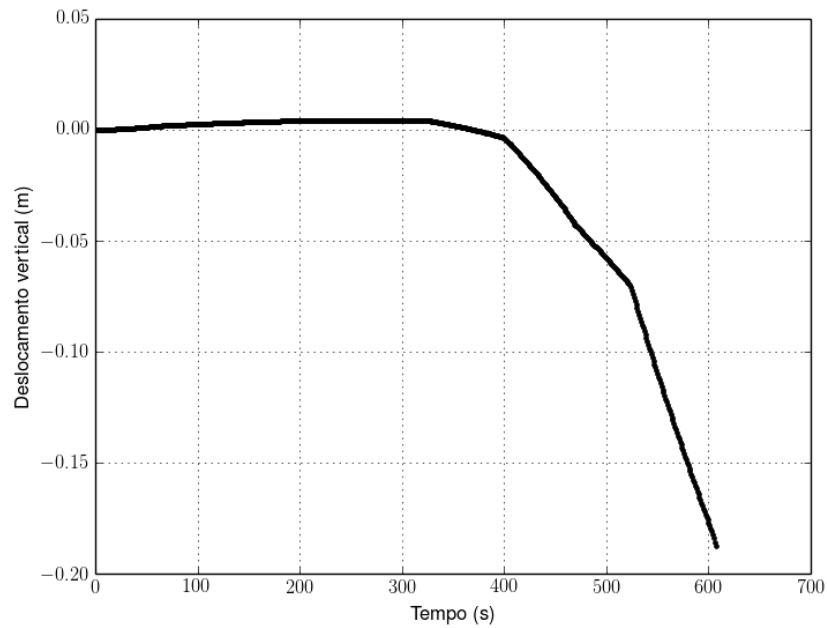


Figura 5.21: Deslocamento vertical do nó 2.

Nota-se pela figura acima que o nó 2 teve um deslocamento vertical de aproximadamente 0,19 metros ao fim do tempo de incêndio suportado pela treliça que foi de 607 segundos (10 minutos e 7 segundos), onde a temperatura média das barras chegou a  $654,72^{\circ}C$  e 20 delas se plastificaram. A conformação final da treliça 2 pode ser vista nas Figuras 5.22 e 5.23.

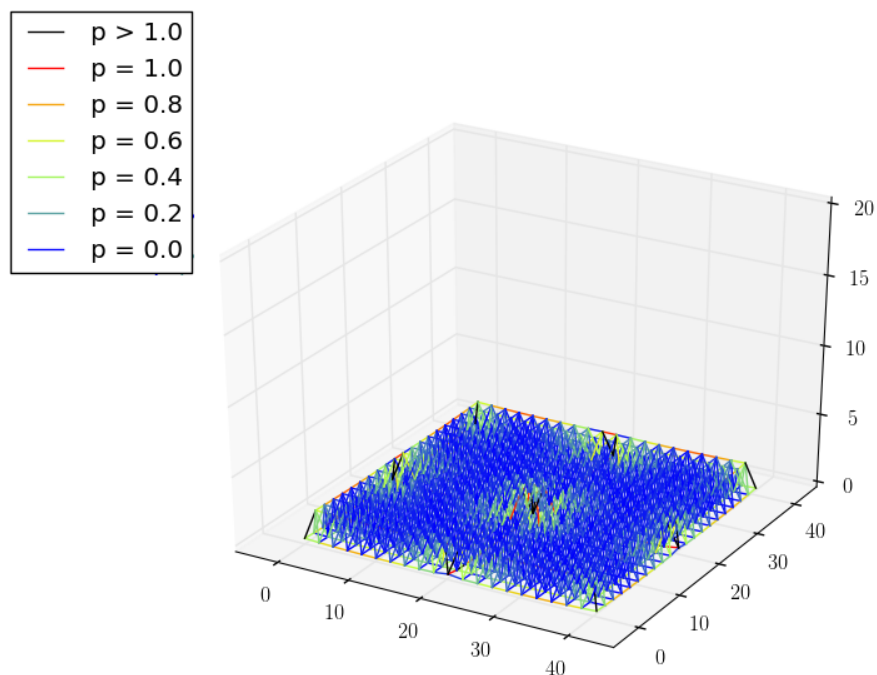


Figura 5.22: Distribuição espacial da solicitação nas barras da treliça 2 a partir do valor de p (vista em perspectiva).

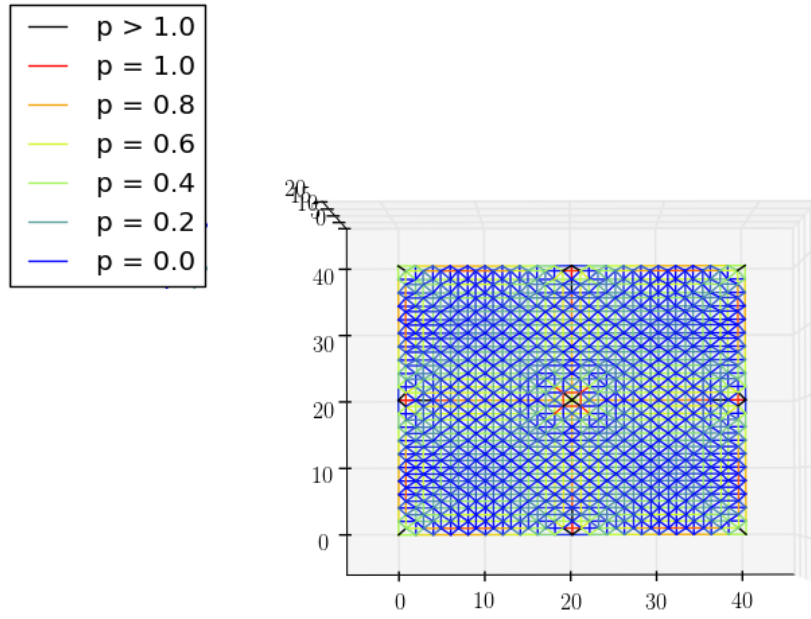


Figura 5.23: Distribuição espacial da solicitação nas barras da treliça 2 a partir do valor de  $p$  (vista superior).

## 6 Conclusões

Este trabalho teve como objetivo a proposição e a implementação computacional de um modelo para o acoplamento termomecânico de treliças espaciais submetidas a grandes variações térmicas. Este desenvolvimento pode ser útil para o estudo de estruturas submetidas a situações decorrentes de incêndios. O modelo matemático utilizado para a análise térmica foi a equação de difusão do calor, que pode descrever a transferência de calor por condução em um domínio, sujeito a contornos com convecção e radiação. O método numérico utilizado para resolver essa equação foi o de elementos finitos. Para o problema mecânico foi utilizado o modelo constitutivo de comportamento elastoplástico com grandes deformações descrito por Bonet e Wood (2008) que foi modificado para se considerar também a influência térmica, mas que não considera flambagem e, portanto, deve ser utilizado com cuidado em treliças espaciais. Esse modelo gerou equações não-lineares em função da variação da geometria e da consideração das deformações plásticas e que foram resolvidas pelo método de Newton-Raphson a partir da representação matricial das equações. A proposta de acoplamento desenvolvida se dá inicialmente a partir da consideração de uma temperatura média para a seção da barra, obtida através da solução da equação no domínio bidimensional. Essa temperatura, que varia ao longo do tempo, é utilizada para se calcular tanto a deformação térmica quanto a modificação de propriedades mecânicas e térmicas do material. Na presente implementação foram consideradas a variação das propriedades mecânicas: módulo de elasticidade, módulo plástico e tensão de escoamento; e das propriedades térmicas: condutividade térmica e calor específico.

Após a validação dos códigos separadamente, foram posteriormente apresentados modelos simples acoplados, onde pôde-se avaliar o comportamento de treliças em diferentes conformações, verificar o comportamento das barras quando submetidas a uma situação de variação térmica de grande amplitude, como as que ocorrem em um incêndio e calcular um tempo aproximado em que a estrutura resiste a esse incêndio. Tendo em vista a dificuldade em se obter resultados numéricos de outros autores para se fazer as devidas comparações, pôde-se apenas observar que os resultados se mostraram qualitativamente coerentes.

## 6.1 Trabalhos futuros

Apesar dos resultados coerentes obtidos, algumas melhorias podem ser feitas no código desenvolvido para melhorar o seu desempenho computacional. A primeira se refere à fusão dos módulos que resolvem a parte térmica e a mecânica em um único código, evitando a transferência de dados através da escrita e leitura de arquivos.

Embora não tenha sido realizado mais testes, a implementação atual permite a consideração do efeito da utilização de isolantes térmicos nas barras para a verificação de sua eficiência no comportamento global.

Outro importante desenvolvimento na parte térmica do problema seria considerar a variação de propriedades como a condutividade térmica e o calor específico do material da barra em função da temperatura que na implementação atual são considerados constantes. Também no sentido de melhorar a representação do comportamento térmico, poderia se incluir a possibilidade de consideração de uma distribuição espacial da temperatura dos gases. Desta forma poderia ser considerada, por exemplo, uma evolução de temperatura diferente para cada barra. Isso proporcionaria resultados ainda mais consistentes com situações reais.

## Referências Bibliográficas

- ABNT, N., 2008. 8800: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. Associação Brasileira de Normas Técnicas.
- Bergman, T. L., Incropera, F. P., Lavine, A. S., 2011. Fundamentals of heat and mass transfer. John Wiley & Sons.
- Bonet, J., Wood, R. D., 2008. NONLINEAR CONTINUUM MECHANICS FOR FINITE ELEMENT ANALYSIS, segunda Edição. Cambridge University Press.
- de Souza, A. S. C., 2003. Análise teórica e experimental de treliças espaciais. Tese de doutorado, Universidade de São Paulo.
- de Souza Neto, E. A., Peric, D., Owen, D. R. J., 2011. Computational methods for plasticity: theory and applications. John Wiley & Sons.
- EN 1991-1-2:2002, 2002. 1: Actions on structures - Part 1-2: General actions - Actions on structures exposed to fire. Rel. tec., EN 1991-1-2: 2002. European Committee for Standardization.
- EN 1993-1-2:2005, 2005. 3: Design of steel structures - Part 1-2: General rules - Structural fire design. Rel. tec., EN 1993-1-2: 2005. European Committee for Standardization.
- EN 1994-1-2:2005, 2005. 4: Design of composite steel and concrete structures - Part 1-2: General rules - Structural fire design. Rel. tec., EN 1994-1-2: 2005. European Committee for Standardization.
- Geuzaine, C., Remacle, J.-F., 2009. Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities. International Journal for Numerical Methods in Engineering 79 (11), 1309–1331.

- Huang, H.-C., Usmani, A. S., 1994. Finite Element Analysis for Heat Transfer - Theory and Software. Springer-Verlag.
- Hughes, T. J. R., 1987. The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis. Prentice-Hall.
- J. C. Simo, T. J. R. H. a., 1998. Computational Inelasticity, primeira Edição. Interdisciplinary Applied Mathematics 7. Springer-Verlag New York.
- Jornal do Commercio RJ, 2014. Casos de incêndio em prédios comerciais aumentam 85,9 %. Publicação Eletrônica - <http://www.sindsefsp.org.br/site>. Último acesso em 5 de maio de 2016.
- Larson, M. G., Bengzon, F., 2013. The finite element method: theory, implementation, and applications. Vol. 10. Springer Science & Business Media.
- Maiola, C. H., 1999. Análise teórica e experimental de treliças metálicas espaciais constituídas por barras com extremidades estampadas. Tese de doutorado, Universidade de São Paulo.
- Marsh, C., 2000. Some observations on designing double layer grids. International Journal of Space Structures 15 (3), 225–231.
- Python, 2016. Python Software Foundation. Publicação Eletrônica - <https://www.python.org/>. Último acesso em 12 de agosto de 2016.
- Ribeiro, J. C. L., 2009. Desenvolvimento e aplicação de um sistema computacional para simulação via método dos elementos finitos do comportamento de estruturas de aço e mistas em situação de incêndio. Tese de doutorado, UFMG.
- Seito, A. I., Gill, A. A., Pannoni, F. D., Ono, R., Silva, S. B., Del Carlo, U., Silva, V. P., 2008. A segurança contra incêndio no Brasil. Projeto Editora, São Paulo.
- The matplotlib development team, 2016. Matplotlib. Publicação Eletrônica - <http://matplotlib.org/>. Último acesso em 12 de agosto de 2016.
- The Scipy community, 2016. NumPy v1.10 Manual. Publicação Eletrônica - <http://docs.scipy.org/doc/numpy-1.10.1/index.html>. Último acesso em 12 de agosto de 2016.

Vila Real, P. M. M., 1988. Modelação por elementos finitos do comportamento térmico e termo-elástico de sólidos sujeitos a elevados gradientes térmicos. Tese de doutorado, Dissertação de mestrado, FEUP.

William D. Callister, J., 2008. Ciência e Engenharia de Materiais Uma Introdução, 7th Edição. LTC - Livros Técnicos e Científicos Editoras S.A.