

Waldir Neme Felipe Filho

**Aplicação de Modelos Teórico-Computacionais para Simulação do
Comportamento Dinâmico de Estruturas Amortecidas Através de Materiais
Viscoelásticos**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional, da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Modelagem Computacional.

Orientador: Prof. D.Sc. Flávio de Souza Barbosa

Coorientador: Prof. D.Sc. Elson Magalhães Toledo

Juiz de Fora

2012

Waldir Neme Felipe Filho

**Aplicação de Modelos Teórico-Computacionais para Simulação do
Comportamento Dinâmico de Estruturas Amortecidas Através de Materiais
Viscoelásticos**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional, da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Modelagem Computacional.

Aprovada em 14 de Fevereiro de 2012.

BANCA EXAMINADORA

Prof. D.Sc. Flávio de Souza Barbosa - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF

Prof. D.Sc. Elson Magalhães Toledo- Coorientador
Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF

Prof. Ph.D. Ronaldo Carvalho Battista
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ/COPPE

Prof. D.Sc. Ney Roitman
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ/COPPE

Prof. D.Sc. Patricia Habib Hallak
Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais e irmão pelo apoio; Aos meus orientadores pelos ensinamentos transmitidos, dedicação e anos de convívio; A Flávia Borges por ter gentilmente cedido os dados de seu trabalho; À FAPEMIG pelo apoio financeiro.

RESUMO

O avanço da tecnologia de materiais e o desenvolvimento de novas técnicas de execução mais sofisticadas permitiram a construção de estruturas mais leves e com elevada capacidade portante. Este processo iniciado durante a revolução industrial se estende até os dias atuais e impôs a necessidade de se verificar, durante a fase de projeto, o comportamento dinâmico das estruturas, com poucas exceções.

Apesar disso algumas estruturas apresentam grandes amplitudes de deslocamentos por experimentarem combinações de ações imprevistas. Esta situação indesejada acelera o processo de fadiga dos materiais e em determinadas situações impede o uso da estrutura e/ou equipamentos. Uma forma eficiente de se atenuar as vibrações de uma estrutura é através de sistemas passivos de controle de vibrações via materiais viscoelásticos.

Neste sentido, este trabalho abordará o método GHM utilizado na modelagem numérica de materiais viscoelásticos no domínio do tempo via Método dos Elementos Finitos. Com o intuito de validar este método, alguns tipos de elementos finitos formulados através deste método são apresentados e suas respostas no domínio da frequência obtidas para uma determinada estrutura são comparadas com aquelas obtidas pela formulação clássica.

São apresentados, também, alguns exemplos de aplicação deste método. São modeladas numericamente vigas sanduíche e um modelo de riser e as frequências naturais e taxas de amortecimento identificadas com os modelos numéricos são comparadas com aquelas identificadas através de ensaios experimentais.

Palavras-chave: Dinâmica de estruturas. Amortecimento estrutural. Viscoelasticidade. Modelo GHM.

ABSTRACT

Advances in materials technology and development of new sophisticated construction techniques allowed the construction of lighter structures and with high bearing capacity. This process started during the industrial revolution and extends to present days and imposed the necessity to check, along the design phase, the dynamic behavior of structures, with few exceptions.

Despite that, some structures have large amplitudes of displacements under unexpected actions. This unwanted situation speeds up the fatigue of materials and in certain situations prevent the use of the structure and/or equipment. An efficient way to attenuate these vibrations is through passive vibration control systems with viscoelastic materials.

In this sense, this work will address the GHM method used in numerical modeling of viscoelastic materials in time domain with Finite Element Method. In order to validate this method, some types of finite elements formulated using this method are presented and their responses in frequency domain obtained for a given structure are compared with those obtained by classical formulation.

Are also outlined a few examples using this method. Sandwich beams and a riser model are modeled numerically and the natural frequencies and damping ratios identified with the numerical responses are compared with those identified through experimental tests.

Keywords: Structural dynamics. Structural damping. Viscoelasticity. GHM Model.

SUMÁRIO

1	Introdução	1
1.1	Motivação	1
1.2	Histórico	2
1.3	Objetivos do trabalho	5
1.4	Escopo	6
2	Modelos para materiais viscoelásticos (MVE)	7
2.1	Propriedades dos materiais viscoelásticos	7
2.1.1	<i>Equação constitutiva para materiais viscoelásticos lineares</i>	8
2.1.2	<i>Módulo complexo</i>	9
2.1.3	<i>Efeito da temperatura</i>	10
2.2	Modelos constitutivos	11
2.2.1	<i>Modelo de Hooke (Elástico Linear)</i>	11
2.2.2	<i>Modelo de Newton (Viscoso)</i>	12
2.2.3	<i>Modelo de Maxwell (Viscoelástico)</i>	12
2.2.4	<i>Modelo de Voigt (Viscoelástico)</i>	12
2.2.5	<i>Modelo Linear Padrão (Viscoelástico)</i>	13
2.2.6	<i>Outros modelos para materiais viscoelásticos</i>	14
2.2.6.1	<i>Método da energia de deformação modal - MSE</i>	14
2.2.6.2	<i>Modelo do campo de deslocamentos inelásticos - ADF</i>	15
3	O Modelo GHM	17
3.1	Dedução do modelo GHM	17
3.2	Determinação dos parâmetros do modelo GHM	21
3.2.1	<i>Caracterização dos materiais viscoelásticos</i>	22
3.2.2	<i>Ajuste dos parâmetros do modelo GHM</i>	24
3.3	Validação do modelo GHM	25
3.3.1	<i>Elemento de Treliça</i>	26
3.3.2	<i>Elemento de Pórtico Plano</i>	31
3.3.3	<i>Elemento de Pórtico Espacial</i>	34

3.3.4	<i>Elemento Triangular Linear (CST)</i>	39
3.3.5	<i>Elemento Tetraédrico Linear (T4)</i>	42
3.3.6	<i>Análise geral dos modelos construídos via GHM</i>	47
4	Implementação computacional.....	50
4.1	Algoritmo do programa	51
4.1.1	<i>Detalhamento das rotinas</i>	51
5	Exemplos de aplicações	55
5.1	Vigas sanduíche	55
5.1.1	<i>Ensaaios Experimentais</i>	55
5.1.2	<i>Caracterização do material viscoelástico</i>	57
5.1.3	<i>Simulações numéricas</i>	59
5.1.3.1	<i>Modelo M1</i>	59
5.1.3.2	<i>Modelo M2</i>	64
5.1.3.3	<i>Modelo M3</i>	65
5.1.3.4	<i>Comparação entre resultados dos modelos e os experimentais</i>	67
5.2	Vigas sanduíche de seção reta anular	69
5.2.1	<i>Ensaaios experimentais</i>	69
5.2.2	<i>Caracterização do material viscoelástico</i>	71
5.2.3	<i>Simulações numéricas</i>	72
6	Conclusões.....	75
	REFERÊNCIAS	77

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1.1	Viga de Oberst.	2
1.2	Viga RKU.	3
2.1	Diagramas deformação×tempo para corpos de diferentes materiais submetidos a uma dada tensão ao longo do tempo.	7
2.2	Diagramas típicos de histerese.	8
2.3	Diagrama típico do efeito da temperatura sobre o módulo complexo e o fator de perda.	11
2.4	Modelo de Hooke.	11
2.5	Modelo de Newton.	12
2.6	Modelo de Maxwell.	12
2.7	Modelo de Voigt.	13
2.8	Modelo Linear Padrão.	13
2.9	Resposta para o Teste de fluência dos modelos apresentados.	14
3.1	Interpretação do GHM para 1 grau de liberdade.	21
3.2	Seções longitudinais das vigas utilizadas pelo método padrão ASTM.	22
3.3	Aparato experimental utilizado no Método Indireto.	23
3.4	Aparato experimental utilizado no Método Direto.	23
3.5	Estruturas e carregamento utilizados para os testes de validação.	25
3.6	Curvas das funções $G'(\omega)$ e $\eta(\omega)$ do MVE utilizado nos testes de validação.	26
3.7	Viga discretizada em elementos de treliça.	26
3.8	Elemento de treliça.	26
3.9	Elemento de treliça viscoelástica segundo a formulação GHM.	28
3.10	Viga discretizada em elementos de treliça viscoelástica via GHM.	30
3.11	Análise de convergência para malhas de elementos de treliça solicitados a tração.	32
3.12	Elementos de pórtico plano viscoelásticos.	33
3.13	Discretização da viga com cinco elementos de pórtico plano viscoelástico se- gundo a formulação clássica.	33

3.14	Discretização da viga com cinco elementos de pórtico plano viscoelástico via formulação GHM.	33
3.15	Análise de convergência para malhas de elementos de pórtico plano solicitadas à tração e flexão.	35
3.16	Elementos de pórtico espacial viscoelásticos.	36
3.17	Discretização da viga com elementos de pórtico espacial viscoelástico segundo a formulação clássica.	36
3.18	Discretização da viga com elementos de pórtico espacial viscoelástico via for- mulação GHM.	36
3.19	Análise de convergência para malhas de elementos de pórtico espacial solicita- das à tração e flexão.	40
3.20	Elementos triangulares lineares viscoelásticos.	41
3.21	Discretização da viga com 16 elementos CST viscoelásticos formulados via GHM (sem escala).	41
3.22	Análise de convergência para malhas de elementos triangulares lineares solici- tadas à tração e flexão.	43
3.23	Elementos tetraédricos lineares (T4) viscoelásticos.	44
3.24	Discretização de um paralelepípedo com cinco elementos tetraédricos lineares.	44
3.25	Discretização da viga com uma malha do tipo $2 \times 1 \times 6$ de elementos T4.	44
3.26	Análise de convergência para malhas de elementos tetraédricos lineares solici- tadas à tração e flexão.	48
3.27	Comparação entre os resultados dos elementos estudados (gráficos log-normal).	49
3.28	Comparação entre os resultados dos elementos estudados (gráficos log-log).	49
4.1	Pseudo-código do programa <i>dinGHM</i>	51
4.2	Pseudo-código do cálculo das matrizes elementares viscoelásticas.	52
4.3	Elemento finito e malha adotados como exemplo.	52
4.4	Numeração global dos graus de liberdade para a malha adotada.	53
4.5	Pseudo-código para o método de Newmark.	53
5.1	Viga sanduíche preparada para ser ensaiada.	55
5.2	Configurações de vigas sanduíche ensaiadas.	56
5.3	Vista do aparato para ensaio pelo Método Direto.	57

5.4	Curvas $G'(\omega)$ e $\eta(\omega)$ ajustadas para o material VHB 4955.	58
5.5	Trecho da malha de elementos triangulares utilizada para modelar as vigas sanduíche.	59
5.6	Modelo dos ensaios realizados nas vigas.	60
5.7	Resposta no do tempo dos deslocamentos observados na viga VS1.	60
5.8	Gráfico de densidade espectral para o sinal da viga VS1.	60
5.9	Sinais da viga VS1 filtrados em torno de 11,72, 65,43 e 159,20 Hz.	62
5.10	Comparação entre as respostas numéricas do Modelo M1 com as experimentais para as vigas estudadas.	63
5.11	Trecho da malha de elementos finitos do Modelo M2.	64
5.12	Excentricidades desconsideradas no Modelo M2.	66
5.13	Trecho da malha de elementos finitos do Modelo M3.	66
5.14	Comparação entre as respostas numéricas do Modelo M3 com as experimentais para as vigas estudadas.	68
5.15	Seção transversal da estrutura tubular.	69
5.16	Estrutura tubular preparada para o ensaio.	70
5.17	Curvas $G'(\omega)$ e $\eta(\omega)$ ajustadas para o material VHB 4970.	71
5.18	Trecho das malhas utilizadas para discretizar o riser.	72
5.19	Análise de convergência do modelo numérico da estrutura tubular com tratamento amortecedor nos setores 1 e 2 observando os deslocamentos da direção 1-2.	74
5.20	Análise de convergência do modelo numérico da estrutura tubular com tratamento amortecedor nos quatro setores observando os deslocamentos da direção 1-2.	74

LISTA DE TABELAS

3.1	Características mecânicas adotadas na estrutura dos testes de validação. . . .	26
5.1	Resultados experimentais para as vigas A e B.	56
5.2	Resultados experimentais para as vigas sanduíche.	57
5.3	Propriedades do MVE obtidos do ensaio de caracterização.	58
5.4	Constantes do modelo GHM ajustadas para o material VHB 4955.	58
5.5	Propriedades adotadas para o Alumínio e o material VHB 4955.	59
5.6	Resultados numéricos para a simulação das vigas sanduíches com o Modelo M1.	61
5.7	Resultados numéricos para a simulação das vigas sanduiche com o Modelo M2.	65
5.8	Erros relativos dos resultados numéricos para a simulação das vigas sanduiches com o Modelo M2.	65
5.9	Resultados numéricos para a simulação das vigas sanduiche com o Modelo M3.	67
5.10	Dimensões das camadas da estrutura tubular.	69
5.11	Propriedades mecânicas dos materiais constituintes da estrutura tubular. . . .	70
5.12	Parâmetros modais da estrutura tubular com tratamento amortecedor nos se- tores 1 e 2.	70
5.13	Parâmetros modais da estrutura tubular com tratamento amortecedor nos se- tores 1 a 4.	71
5.14	Constantes do modelo GHM ajustadas para o material VHB 4970.	71
5.15	Características das malhas utilizadas para modelar a estrutura tubular com tratamento amortecedor nos setores 1 e 2.	72
5.16	Características das malhas utilizadas para modelar a estrutura tubular com tratamento amortecedor nos setores 1 a 4.	73
5.17	Resultados numéricos para as simulações da estrutura tubular com tratamento amortecedor nos setores 1 e 2 e valores experimentais de Borges.	73
5.18	Resultados numéricos para as simulações da estrutura tubular com tratamento amortecedor nos setores 1 a 4.	73

1 Introdução

1.1 Motivação

As estruturas erguidas pelo homem até a revolução industrial foram basicamente construídas com grandes peças de madeira, cantarias e peças fundidas, o que conferia grande rigidez a estas estruturas. A grande rigidez e o pequeno carregamento a que estas estruturas estavam submetidas, tornavam as respostas dinâmicas desprezíveis.

Após este período, o desenvolvimento de novos materiais de construção como o aço e o alumínio, o avanço dos conhecimentos sobre o comportamento destes materiais e o domínio de técnicas de execução mais sofisticadas, permitiram a construção de estruturas mais leves e com elevada capacidade portante. Este processo se estende até os dias atuais e impôs a necessidade de se verificar, durante a fase de projeto, o comportamento dinâmico das estruturas, com poucas exceções.

As vibrações em estruturas são indesejáveis não somente pelo desconforto causado aos usuários, mas por acelerar o processo de fadiga dos materiais e em, determinadas situações, impedir o uso da estrutura e/ou equipamentos. Estes efeitos podem ser vistos mais facilmente em grandes estruturas com pouca rigidez e baixas frequências naturais, ficando propícias a grandes amplitudes de deslocamento. Exemplos típicos de estruturas que apresentaram grandes deslocamentos são: a Ponte de Tacoma Narrows, a Passarela do Millenium e a Ponte Rio Niterói.

Com o objetivo de reduzir estes efeitos, foram desenvolvidas várias técnicas de controle de vibrações, que podem ser divididas em três categorias: técnicas de controle ativo, passivo e híbrido. As técnicas de controle ativo lançam mão de mecanismos autônomos acoplados às estruturas que aplicam forças com o intuito de reduzir as amplitudes dos deslocamentos. O controle passivo pode ser realizado, por exemplo, através a adição de sistemas massa-mola (atenuadores dinâmicos sincronizados) na estrutura ou aplicando elementos viscoelásticos em determinados pontos da estrutura sob a forma de amortecedores ou em camadas sobre a superfície livre da estrutura. Os sistemas híbridos têm características mistas de controles passivos e ativos.

Os materiais viscoelásticos possuem pouca capacidade de carga mas, em contrapartida,

possuem elevada capacidade dissipativa ao serem submetidos a deformações cíclicas. Portanto, para amortecer uma estrutura de forma mais eficaz, deve-se aplicar estes materiais em locais que eles sejam expostos às maiores deformações cíclicas possíveis. Para isso é necessário compreender o comportamento dinâmico da estrutura, do material viscoelástico a ser utilizado e das deformações que este sofrerá.

Dentro deste contexto, o presente trabalho abordará a modelagem computacional de materiais viscoelásticos e sua utilização para redução de vibrações em estruturas civis, funcionando como um mecanismo de controle passivo.

1.2 Histórico

Um dos primeiros estudos relativos ao amortecimento de estruturas com tratamento viscoelástico data do início da década de 1950 e foram feitos por Oberst e Frankenfeld [1]. Eles desenvolveram um conjunto de equações que descrevem o amortecimento conferido a vigas e placas obtido através de uma camada viscoelástica livre, além de uma metodologia para determinar as propriedades desta camada através de ensaios dinâmicos. Estas equações assumem que as seções da viga composta permanecem planas quando deformadas, como o ilustrado na Figura 1.1.

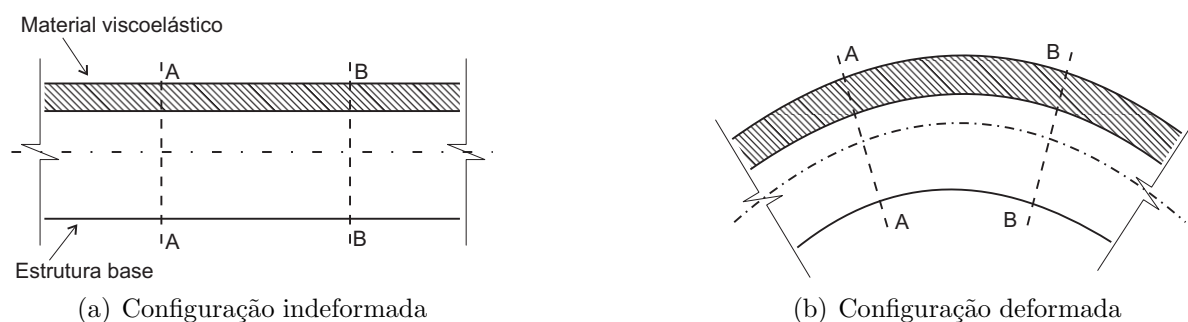


Figura 1.1: Viga de Oberst.

Nesta mesma época o conceito do módulo complexo foi introduzido, tendo destaque o trabalho de Myklestad [2]. Este conceito permitiu ao módulo de Young e ao fator de perda poderem ser modelados em função da frequência.

Já no fim da década de 1950, Ross, Kerwin e Ungar [3] publicaram um trabalho no qual é descrito um conjunto de equações (Equações RKU) que descrevem o movimento de vigas e placas tratadas com uma camada de material viscoelástico restringida como pode ser visto na Figura 1.2(a). Nestas equações são considerados que os modos de vibração da

estrutura são senoidais; que as seções da viga composta não permanecem planas (Figura 1.2); e que o núcleo pode se deformar devido ao cisalhamento e tração (a rigidez a flexão é desconsiderada). Apesar destas simplificações as equações RKU tornaram-se a base para se determinar o módulo complexo a partir de dados experimentais.



Figura 1.2: Viga RKU.

Por volta da década de 1960 a aplicação desta tecnologia, desenvolvida inicialmente para aplicações aeronáuticas, difundiu-se em outros campos de aplicação e conseqüentemente recebeu contribuição de vários autores. Pode-se citar a contribuição de Mead e Markus [4] que realizaram uma análise de vibrações forçadas em uma viga sanduíche com núcleo viscoelástico e condições de contorno arbitrárias em 1969.

Até a década de 1980 os modelos viscoelásticos utilizavam o módulo complexo para representar a variação das suas propriedades elásticas e dissipativas, o que fazia com que a representação matricial não fosse prática. Johnson et al [5] propuseram um método para contornar este problema, o método da energia de deformação modal (*Modal Strain Energy - MSE*) onde o amortecimento modal é estimado através de relações entre os fatores de perda e a energia de deformação da estrutura e do material viscoelástico. Contudo, este modelo assume que as propriedades do material viscoelástico permanecem constantes para uma dada faixa de frequência. A fim de permitir que estas propriedades variem em função da frequência, Bagley e Torvik [6, 7] propuseram um método baseado em derivadas fracionárias.

Em 1983 e 1985 Golla, Hughes e McTavish (GHM) [8, 9] desenvolveram um modelo baseado na introdução de variáveis dissipativas. Em 1995 Lesieutre [10] propôs o modelo do campo de deslocamentos inelásticos (*Anelastic Displacement Field - ADF*) onde, assim como o modelo GHM, introduz graus de liberdade adicionais nas equações elásticas para representar a dissipação de energia do material.

Estes últimos modelos se diferenciam quanto às suas formulações, pois no modelo

GHM, ela é feita no domínio de Laplace para então, via transformada inversa de Laplace, ser escrito no domínio do tempo enquanto que no modelo ADF utiliza-se a formulação no domínio do tempo. Outra diferença é devido ao fato de a formulação do modelo ADF utilizar uma equação de primeira ordem para descrever os graus de liberdade dissipativos. Este modelo tende a produzir matrizes singulares sendo necessário escrever o problema no espaço de estados para realizar a integração no tempo.

No Brasil, diversos pesquisadores vêm desenvolvendo formulações e/ou implementando modelos computacionais no intuito de simular numericamente o comportamento dinâmico de materiais viscoelásticos (MVE). Destaca-se o Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ onde há mais de 15 anos vêm sendo desenvolvidos trabalhos de pesquisa e consultoria que abordam esse tema. Esses trabalhos foram iniciados em 1997 sob coordenação do professor Ronaldo Battista que projetou (com auxílio de modelos analíticos clássicos) e ensaiou um protótipo em escala 1:1 do vão central da ponte Rio-Niterói com tabuleiro composto por uma estrutura sanduíche com núcleo viscoelástico. Barbosa [11] e Vasconcelos [12] implementaram o modelo GHM para algumas classes de elementos finitos. Enquanto Barbosa [11] concentrou seus esforços na modelagem de problemas com MVE em estado plano de tensão, Vasconcelos [12] resolveu problemas de placas com uma simplificação do modelo GHM através da eliminação de alguns graus de liberdade dissipativos. Correlações entre resultados teóricos e experimentais foram apresentados para aplicações em tabuleiros de pontes [13]. Outro trabalho que abordou a modelagem computacional de MVE foi a dissertação de mestrado de Santos [14] que avaliou o uso de atenuadores viscoelásticos para a redução de vibrações em edifícios altos. Castello [15] apresenta em sua tese de doutorado um modelo baseado no conceito de variáveis internas, construído a partir dos princípios de termodinâmica dos processos irreversíveis.

Além de testes numéricos, ensaios experimentais têm sido realizados no Laboratório de Estruturas da COPPE/UFRJ. Além de Battista et al [?], Faísca [16] e Silva [17] também abordaram esse assunto e realizaram testes para caracterização de MVE. Mais recentemente, Borges [18] em sua dissertação de mestrado ensaiou vigas sanduíche com núcleo viscoelástico. Parte dos resultados obtidos na dissertação de Borges [18] são usados para validação do presente trabalho.

1.3 Objetivos do trabalho

Diante das diversas formulações disponíveis na literatura e da eficiência dos MVE no controle passivo de vibrações, optou-se neste trabalho avaliar, para alguns casos específicos, se o modelo desenvolvido por Golla, Hughes e McTavish é capaz de simular o comportamento de estruturas amortecidas com materiais viscoelásticos de forma satisfatória para fins de engenharia. A escolha do modelo GHM se deve a algumas vantagens que são aqui destacadas:

- A formulação considera a variação das características mecânicas do MVE em função da frequência de operação;
- Sua implementação computacional via Método dos Elementos Finitos é direta;
- O conjunto de matrizes gerado na aplicação do Método dos Elementos Finitos ao GHM é simétrico, o que facilita a aplicação de técnicas numéricas que demandam matrizes com esta característica;
- os resultados obtidos com o GHM são de uma maneira geral, satisfatórios, quando comparados com dados experimentais [19].

O ponto de partida deste trabalho foi a tese de doutorado de Barbosa [11], onde, como já destacado anteriormente, estudos fundamentalmente de elementos planos foram realizados.

Destaca-se então como principais contribuições e/ou objetivos do presente trabalho, a implementação de elementos finitos sólidos tetraédricos lineares para simular o comportamento dinâmico de MVEs via GHM, suas validações, e suas aplicações a problemas tridimensionais. Como contribuições secundárias destaca-se o desenvolvimento de um programa para modelagem de MVE via GHM incluindo uma biblioteca de elementos contendo elemento de mola, treliça espacial, pórtico plano, pórtico espacial, triângulo linear (CST) e tetraedro linear (T4). Além disso, foram desenvolvidas interfaces para geração de malhas de MVE a partir de dados do *software* livre GMSH [20].

1.4 Escopo

Esta dissertação está dividida em seis capítulos, no primeiro capítulo são apresentados uma abordagem geral sobre o tema, mostrando o contexto atual, algumas definições pertinentes às técnicas de amortecimento estrutural, um breve histórico da modelagem de MVE e os objetivos deste trabalho.

No segundo capítulo, serão discutidas as principais propriedades que influenciam o comportamento dos materiais viscoelásticos, alguns modelos reológicos de materiais são apresentados além de dois outros modelos para materiais viscoelásticos.

O terceiro capítulo traz a dedução do modelo GHM além de abordar algumas metodologias para caracterização de materiais viscoelásticos, determinação dos parâmetros do modelo GHM e as dificuldades relacionadas com a caracterização e determinação dos parâmetros deste tipo de material. E ao final deste capítulo, é realizado um estudo para validação do modelo proposto por Golla, Hughes e McTavish aplicado ao presente trabalho.

O quarto capítulo mostra, brevemente, as principais características e estratégias adotadas no programa implementado para a simulação de estruturas com materiais viscoelásticos.

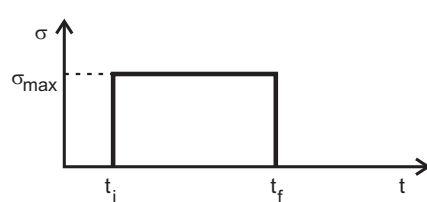
No quinto capítulo, alguns exemplos de análise de vigas sanduíches de seção reta retangular e anular com MVE são apresentados e as respostas das simulações numéricas são comparadas com os resultados experimentais.

No último capítulo são apresentadas as conclusões do trabalho desenvolvido e são apresentadas algumas propostas para trabalhos futuros.

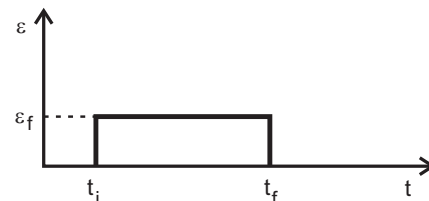
2 Modelos para materiais viscoelásticos (MVE)

2.1 Propriedades dos materiais viscoelásticos

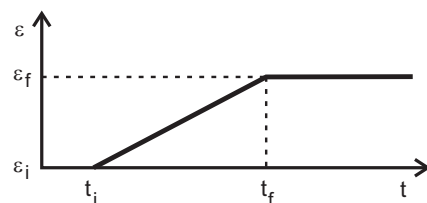
O comportamento dos materiais viscoelásticos apresenta uma composição entre os comportamentos perfeitamente elástico e viscoso. Materiais elásticos perfeitos são aqueles em que toda a energia armazenada ao se deformarem é liberada quando o carregamento a que estavam submetidos cessa. Já nos materiais perfeitamente viscosos toda a energia de deformação é perdida. Os materiais viscoelásticos quando submetidos a um carregamento sofrem uma deformação inicial e, conforme o carregamento se prolonga, ele se deforma ao longo do tempo até um ponto máximo e interrompendo o carregamento o material, devido à sua parcela de deformação elástica, volta parcialmente a sua configuração original lentamente [21]. O comportamento destes materiais pode ser entendido de forma mais fácil através da Figura 2.1, que ilustra como estes três tipos de materiais se deformam ao longo do tempo quando submetidos a um esforço do tipo degrau que se inicia no tempo t_i e termina no tempo t_f .



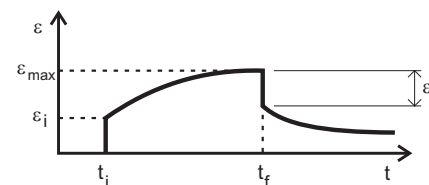
(a) Diagrama tensão \times tempo



(b) Diagrama deformação \times tempo para um material elástico perfeito



(c) Diagrama deformação \times tempo para um material viscoso perfeito



(d) Diagrama deformação \times tempo para um material viscoelástico

Figura 2.1: Diagramas deformação \times tempo para corpos de diferentes materiais submetidos a uma dada tensão ao longo do tempo. *Adaptado de [22].*

Analisando a Figura 2.1, percebe-se que as deformações do material viscoelástico possuem um “atraso” em relação ao carregamento, o que não acontece para o material elástico. Outra forma de se ver esta diferença de comportamento é através dos gráficos típicos de histerese para estes dois materiais apresentados na Figura 2.2. Nela pode-se ver que tanto na fase de carregamento quanto na fase de descarregamento as deformações sofridas pelo material elástico estão no mesmo nível de tensão, o que não ocorre para o material viscoelástico onde as deformações na fase de descarregamento ocorrem em um nível mais baixo de tensão. Portanto, ao sofrer deformações cíclicas as deformações dos materiais viscoelásticos ocorrem fora de fase do carregamento. Esta é uma das características que tornam interessante à aplicação deste tipo de material para se incrementar o amortecimento.

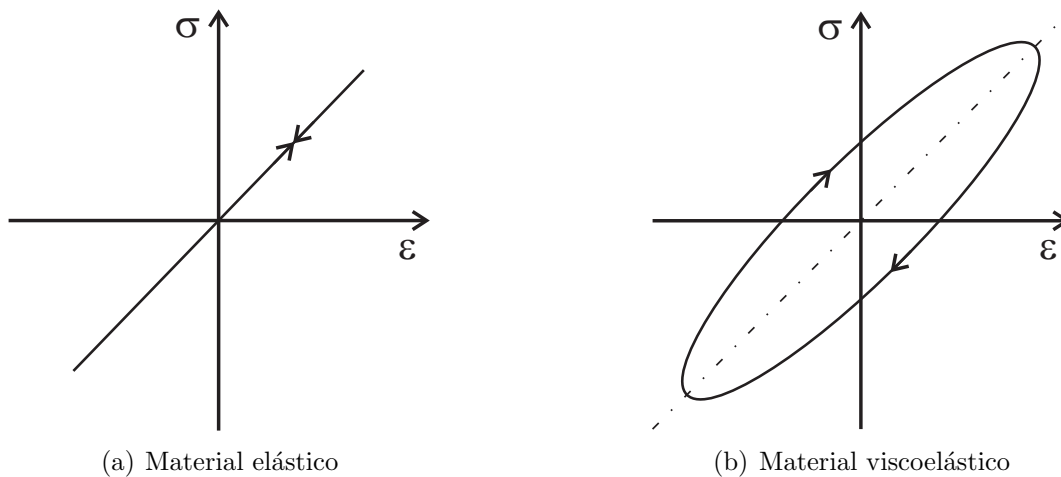


Figura 2.2: Diagramas típicos de histerese.

2.1.1 Equação constitutiva para materiais viscoelásticos lineares

Como pôde ser visto, as tensões em um corpo de material viscoelástico dependem das deformações experimentadas anteriormente. Christensen [23] mostra que o tensor de tensões deste material pode ser escrito da seguinte forma:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^{\infty} \epsilon_{kl}(t - \tau) dG_{jikl}(\tau), \quad (2.1)$$

onde $\sigma_{ij}(t)$ é o tensor de tensões do material, $\epsilon_{kl}(t)$ é o histórico de deformações, $G_{ijkl}(t)$ é um tensor de quarta ordem, tal que:

$$\begin{aligned} G_{ijkl}(t) &= 0, -\infty \leq t < 0; \\ G_{ijkl}(t) &= G_{jikl}(t) = G_{ijlk}(t); \\ G_{ijkl}(t) &= G_{klij}(t). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Esta função ($G_{ijkl}(t)$) traduz as propriedades mecânicas deste tipo de material e é denominada função de relaxação.

Sabendo que as deformações que acontecerão após o instante t não exercem influência sobre as deformações deste instante e assumindo que não há deformações anteriores ao início da contagem do tempo ($\epsilon_{kl}(t) = 0$ para $t \leq 0$), $\epsilon_{kl}(t)$ é uma função contínua e $G_{ijkl}(t)$ e sua derivada primeira são contínuas no intervalo $0 \leq t < \infty$, a equação 2.1 pode ser escrita como:

$$\sigma_{ij}(t) = G_{ijkl}(0)\epsilon_{kl}(t) + \int_0^t \epsilon_{kl}(t - \tau) \frac{dG_{ijkl}(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (2.3)$$

A relação tensão deformação dada pela equação 2.3 é uma das formas em que se pode escrever a equação constitutiva de materiais viscoelásticos. Outra forma de se escrever esta relação é realizando a seguinte mudança de variáveis $a = t - \tau$ na equação 2.3 e integrando por partes obtendo [23]:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t G_{ijkl}(t - a) \frac{d\epsilon_{kl}(a)}{da} da. \quad (2.4)$$

2.1.2 Módulo complexo

Jones [24] mostra que as tensões e deformações em materiais viscoelásticos submetidos a um esforço harmônico podem ser escritas como:

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{i\omega t} \Rightarrow \sigma(t) = \sigma_0 [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)], \quad (2.5)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t - \psi} \Rightarrow \varepsilon(t) = \varepsilon_0 [\cos(\omega t - \psi) + i \sin(\omega t - \psi)], \quad (2.6)$$

onde ω é a frequência, ψ é a diferença entre os ângulos de fase das tensões e das deformações, t é a variável tempo, $\sigma(t)$ e $\varepsilon(t)$ são tensão solicitante e a deformação no

instante t , respectivamente.

Se $\sigma(t) = E^* \varepsilon(t)$ é a relação tensão/deformação, pode-se então escrever:

$$\begin{aligned} E^* &= \frac{\sigma(t)}{\varepsilon(t)}; \\ E^* &= \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \left[\frac{\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)}{\cos(\omega t - \psi) + i \sin(\omega t - \psi)} \right]; \\ E^* &= \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} [\cos(\psi) + i \sin(\psi)]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Definindo o fator de perda como $\eta = \tan(\psi)$ tem-se:

$$\eta = \frac{\sin(\psi)}{\cos(\psi)} = \frac{Im(E^*)}{Re(E^*)}. \quad (2.8)$$

Então pode-se definir o módulo complexo E^* para a frequência ω como:

$$\begin{aligned} E^* &= E^*(\omega); \\ E^*(\omega) &= E'(\omega) + iE''(\omega); \\ E^*(\omega) &= E'(\omega)(1 + i\eta(\omega)). \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde $E'(\omega)$ e $E''(\omega)$ são a parte real e a imaginária de $E^*(\omega)$, respectivamente. Apesar do módulo complexo aqui ter sido definido para o módulo de Young, E , as mesmas relações valem para o módulo de cisalhamento, G . Outra importante relação referente ao módulo complexo é:

$$\begin{aligned} \eta &= \eta(\omega); \\ \eta(\omega) &= \frac{E''(\omega)}{E'(\omega)} = \frac{G''(\omega)}{G'(\omega)}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.1.3 Efeito da temperatura

Ao contrário do que ocorre em outros materiais de construção, os materiais viscoelásticos apresentam grande sensibilidade à variação de temperatura próximas à temperatura ambiente [25]. Há quatro regiões de temperatura em que os materiais viscoelásticos podem estar: região vítrea, de transição, emborrachada e escoamento. Analisando a Figura 2.3 percebe-se que em temperaturas mais baixas (região vítrea) o material tende a apresentar baixo fator de perda e o módulo de elasticidade ou de cisalhamento tem seu valor máximo. Na região de transição encontra-se o valor máximo do fator de perda e o módulo de elasticidade ou de cisalhamento possui maior variabilidade. Na região emborrachada

ambas variáveis apresentam pouca variabilidade e na última região o fator de perda tende a aumentar enquanto o valor do módulo de elasticidade ou de cisalhamento tende a diminuir.

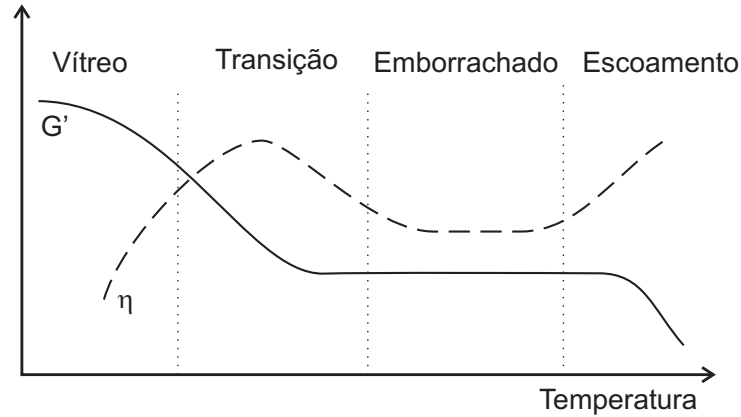


Figura 2.3: Diagrama típico do efeito da temperatura sobre o módulo complexo e o fator de perda. *Adaptado de [25].*

Portanto, para fins de amortecimento estrutural, a região de trabalho mais atrativa é a região de transição, por conter o valor máximo do fator de perda e rigidez relativamente alta.

2.2 Modelos constitutivos

2.2.1 Modelo de Hooke (*Elástico Linear*)

O modelo de Hooke (Figura 2.4) define o comportamento elástico de um material, onde as tensões variam linearmente com as deformações. A relação tensão×deformação é dada pela seguinte equação:

$$F(t) = ku(t), \quad (2.11)$$

onde $F(t)$ é a força aplicada ao modelo, k a rigidez da mola e $u(t)$ é o deslocamento do modelo.

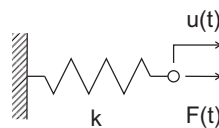


Figura 2.4: Modelo de Hooke.

2.2.2 Modelo de Newton (Viscoso)

O comportamento de materiais viscosos é definido através do modelo de Newton, como o mostrado na Figura 2.5. Neste modelo a força varia em função da derivada dos deslocamentos em relação ao tempo, como pode ser visto na equação 2.12.

$$F(t) = \beta \frac{du(t)}{dt}, \quad (2.12)$$

onde β é a viscosidade do elemento.

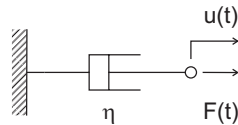


Figura 2.5: Modelo de Newton.

2.2.3 Modelo de Maxwell (Viscoelástico)

Este modelo resume-se na associação em série de um elemento de Newton e um de Hooke, como na Figura 2.6, e foi criado inicialmente para explicar a elasticidade de materiais líquidos. As equações de equilíbrio e compatibilidade para este modelo são dadas, respectivamente, por:

$$\begin{cases} F(t) = F_{elástico}(t) = F_{viscoso}(t) \\ u(t) = u_{elástico}(t) + u_{viscoso}(t) \end{cases} \Rightarrow u(t) = F_0 \left[\frac{1}{k} + \frac{t}{\beta} H(t) \right], \quad (2.13)$$

onde $F(t) = F_0 H(t)$ é a força aplicada ao modelo e $H(t)$ é a função degrau tal que: $H(t) = 0$ para $t < 0$ e $H(t) = 1$ para $t \geq 0$.

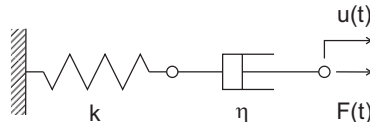


Figura 2.6: Modelo de Maxwell.

2.2.4 Modelo de Voigt (Viscoelástico)

O modelo de Voigt trata do amortecimento por atrito e é representado pela associação em paralelo de um elemento de Newton e um de Hooke como ilustra a Figura 2.7. As

equações de equilíbrio e compatibilidade deste modelo são dadas, respectivamente, por:

$$\begin{cases} F(t) = F_{elástico}(t) + F_{viscoso}(t) \\ u(t) = u_{elástico}(t) = u_{viscoso}(t) \end{cases} \Rightarrow u(t) = \frac{F_0}{k} \left[1 - \exp\left(-\frac{k}{\beta}t\right) \right] H(t). \quad (2.14)$$

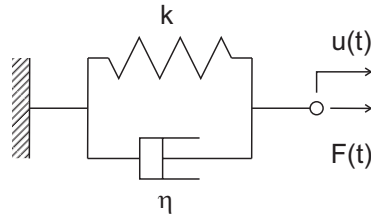


Figura 2.7: Modelo de Voigt.

2.2.5 Modelo Linear Padrão (Viscoelástico)

O modelo Linear Padrão é representado através da associação em paralelo de um elemento de Maxwell e um de Hooke como mostra a Figura 2.8. As equações de equilíbrio e compatibilidade deste modelo são dadas, respectivamente, por:

$$\begin{cases} F(t) = F_1(t) + F_2(t) \\ u(t) = u_1(t) = u_2(t) \end{cases} \Rightarrow u(t) = \frac{F_0}{k_1} \left[1 - \frac{k_2}{k_1 + k_2} \exp\left(-\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)\beta}t\right) \right] Hd(t). \quad (2.15)$$

onde: $F_1(t)$ e $u_1(t)$ são a força e o deslocamento na mola respectivamente, $F_2(t)$ e $u_2(t)$ são a força e o deslocamento no modelo de Maxwell, respectivamente e $F(t) = F_0 H(t)$.

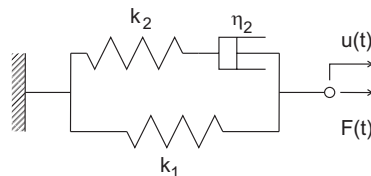


Figura 2.8: Modelo Linear Padrão.

A resposta deste modelo, $u(t)$, e dos outros modelos descritos quando submetidos a um carregamento constante no tempo (Teste de Fluência), podem ser vistas na Figura 2.9. Observando esta figura pode-se perceber que as respostas dos modelos de Voigt e

Linear Padrão são semelhantes ao comportamento de materiais viscoelásticos descrito no início deste capítulo.

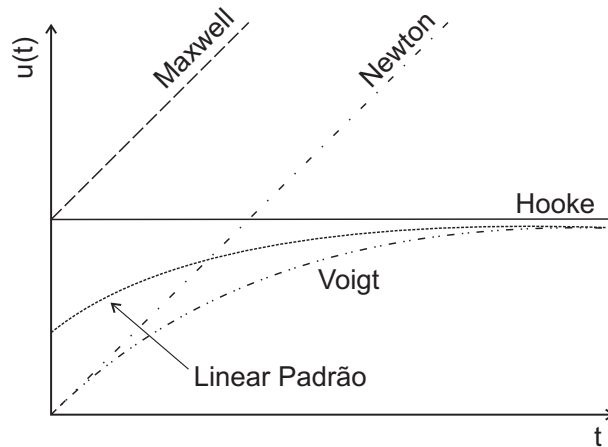


Figura 2.9: Resposta para o Teste de fluência dos modelos apresentados. *Adaptado de [25].*

2.2.6 Outros modelos para materiais viscoelásticos

Modelos que consideram o efeito das forças inerciais necessitam incluir a massa da estrutura na sua formulação. Este é o caso dos modelos MSE, ADF e GHM que serão apresentados a seguir.

2.2.6.1 Método da energia de deformação modal - MSE

Johnson e Keinholz [5] propõem uma forma de se obter um fator de perda aproximado para cada modo de vibração de uma estrutura mediante uma relação entre a energia dissipada e a energia de deformação do sistema não amortecido. Para isso inicialmente se escreve a equação de movimento não amortecido da seguinte forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \bar{\mathbf{K}}(\omega)\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t), \quad (2.16)$$

onde $\bar{\mathbf{K}}(\omega) = \mathbf{K}_{Real}(\omega) + i\mathbf{K}_{Im}(\omega)$ é a matriz de rigidez complexa do sistema, \mathbf{M} a matriz de massa do sistema, $\mathbf{q}(t)$ o vetor de deslocamentos e $\mathbf{F}(t)$ o vetor de forças aplicadas no sistema. Assumindo que as propriedades do sistema são constantes ao longo da faixa de frequências em análise o problema de auto-valor associado a esta equação é dado por:

$$\mathbf{K}_{Real}(\omega_j)\bar{\Phi}_j = \bar{\lambda}_j^2\mathbf{M}\bar{\Phi}_j, \quad (2.17)$$

onde $\bar{\Phi}_j$ é o j -ésimo auto-vetor e $\bar{\lambda}_j^2$ é o j -ésimo auto-valor. Então uma aproximação do fator de perda para modo j é dada por:

$$\eta_j = \frac{\bar{\Phi}_j^T \mathbf{K}_{Im} \bar{\Phi}_j}{\bar{\Phi}_j^T \mathbf{K}_{Real} \bar{\Phi}_j}. \quad (2.18)$$

2.2.6.2 Modelo do campo de deslocamentos inelásticos - ADF

Uma das possíveis aplicações do Método dos Elementos Finitos (MEF) é a modelagem de materiais viscoelásticos. Neste sentido alguns modelos foram propostos na literatura, podendo-se destacar o modelo ADF desenvolvido por Lesieutre [10].

Neste modelo, assume-se que o módulo complexo do material é dado por:

$$G^*(\omega) = G_0 \left(1 + \sum_{j=1}^n \Delta_j \frac{\omega^2 + i\omega\Omega_j}{\omega^2 + \Omega_j^2} \right), \quad (2.19)$$

onde ω é a frequência, G_0 , Δ_j e Ω_j são constantes a determinar. Este método é baseado na separação das deformações em duas partes, uma elástica e outra inelástica que representa a relaxação do material. Para isso o campo de deslocamentos q é decomposto da seguinte forma:

$$q = q^e + \sum_{j=1}^n q_j^d \quad (2.20)$$

onde q_j^d é a parcela inelástica e q^e a parcela elástica. Escrevendo a equação de movimento da seguinte forma:

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + (K_e + K^*(\omega))q = F \quad (2.21)$$

onde K_e e $K^*(\omega)$ são respectivamente a parte elástica e a parte viscoelástica da rigidez do sistema, M , D , F e q são a massa, o amortecimento, a força e o deslocamento do sistema. Re-escrevendo a equação 2.20 em função de q^e e substituindo q em 2.21 por esta nova equação tem-se:

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + (K_e + K_\infty^*)q - K_\infty^* \sum_{j=1}^n q_j^d = F \quad (2.22)$$

sendo $K_\infty^* = (1 + \sum \Delta_j)K_c^0$ e $K_c^0 = G_0 \bar{K}_c$. Trindade [26] escreve um sistema de equações

que descreve as resposta dos graus de liberdade inelásticos da seguinte forma:

$$\frac{C_j}{\Omega_j} K_\infty^* \dot{q}_j^d - K_\infty^* q + C_j K_\infty^* q_j^d = 0 \quad (2.23)$$

onde $C_i = (1 + \sum \Delta_j) / \Delta_j$. Das equações 2.22 e 2.23 obtém-se:

$$\bar{\mathbf{M}} \ddot{\bar{\mathbf{q}}} + \bar{\mathbf{D}} \dot{\bar{\mathbf{q}}} + \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{F}} \quad (2.24)$$

onde:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{aa} \end{bmatrix}; \bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_\infty^* & \mathbf{K}_{ea} \\ \mathbf{K}_{ae} & \mathbf{K}_{aa} \end{bmatrix}; \bar{\mathbf{F}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}; \\ \bar{\mathbf{q}} &= \text{col}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_1^d, \dots, \mathbf{q}_n^d); \mathbf{D}_{aa} = \text{diag} \left(\frac{C_1}{\Omega_1} \mathbf{K}_\infty^*, \dots, \frac{C_n}{\Omega_n} \mathbf{K}_\infty^* \right); \\ \mathbf{K}_{ea} &= [-\mathbf{K}_\infty^*, \dots, -\mathbf{K}_\infty^*]; \mathbf{K}_{ae} = \mathbf{K}_{ea}^T; \mathbf{K}_{aa} = \text{diag}(C_1 \mathbf{K}_\infty^*, \dots, C_n \mathbf{K}_\infty^*) \end{aligned}$$

Outro modelo aplicado junto ao MEF que tem tido destaque é o modelo proposto por Golla, Hughes e McTavish (GHM) [8, 9]. Como este modelo é o foco deste trabalho, ele será apresentado de forma mais detalhada no próximo capítulo em separado.

3 O Modelo GHM

3.1 Dedução do modelo GHM

Seja a equação constitutiva de materiais viscoelásticos lineares dada por 2.4, re-escrita abaixo com os índices suprimidos:

$$\sigma(t) = \int_0^t G(t-a) \frac{d\epsilon(a)}{da} da. \quad (3.1)$$

Fazendo $H(t) = G(t) - G^0$, onde $G^0 = \lim_{t \rightarrow \infty} G(t)$ a equação 3.1 fica:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \int_0^t [G^0 + H(t-a)] \frac{d\epsilon(a)}{da} da; \\ \sigma(t) &= \int_0^t G^0 \frac{d\epsilon(a)}{da} da + \int_0^t H(t-a) \frac{d\epsilon(a)}{da} da; \\ \sigma(t) &= [G^0 \epsilon(a)]_0^t + \int_0^t H(t-a) \frac{d\epsilon(a)}{da} da; \\ \sigma(t) &= G^0 [\epsilon(t) - \epsilon(0)] + \int_0^t H(t-a) \frac{d\epsilon(a)}{da} da. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Considerando que no instante inicial o corpo está em repouso então:

$$\sigma(t) = G^0 \epsilon(t) + \int_0^t H(t-a) \frac{d\epsilon(a)}{da} da, \quad (3.3)$$

aplicando a transformada de Laplace nesta equação chega-se a:

$$\begin{aligned} \sigma(s) &= G^0 \epsilon(s) + [s\epsilon(s) + \epsilon(0)]H(s); \\ \sigma(s) &= G^0 \epsilon(s) + s\epsilon(s)H(s); \\ \sigma(s) &= [G^0 + sH(s)]\epsilon(s). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Assumindo que $h(s) = sH(s)$ a equação 3.4 fica:

$$\sigma(s) = [G^0 + h(s)]\epsilon(s), \quad (3.5)$$

onde $h(s)$ é a função de relaxação associada aos efeitos de dissipação de energia. Segundo

Golla et al [8], a função $h(s)$ é dada por:

$$h(s) = \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j (s^2 + \beta_j s)}{s^2 + \beta_j s + \delta_j}, \quad (3.6)$$

onde as constantes α_j , β_j e δ_j dependem do material. Estas constantes são obtidas através de resultados experimentais utilizando técnicas para ajuste de curvas.

Para inserir a equação constitutiva do material (equação 3.5) em um modelo de elementos finitos deve-se primeiramente escrever a equação de movimento no domínio de Laplace. Partindo da equação de movimento escrita da seguinte forma

$$M\ddot{q}(t) + D\dot{q}(t) + Kq(t) = f(t), \quad (3.7)$$

onde: M , D e K são a massa, o amortecimento e a rigidez do sistema e $q(t)$ e $f(t)$ são o deslocamento e as forças externas atuantes no sistema em função do tempo. Aplica-se a transformada de Laplace nesta equação obtendo:

$$\begin{aligned} M(s^2q(s) - sq(0) - \dot{q}(0)) + D(sq(s) - q(0)) + Kq(s) &= f(s); \\ \{Ms^2 + Ds + K\}q(s) &= f(s) + M(sq(0) - \dot{q}(0)) + Dq(0). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Considerando que a estrutura está em repouso no instante de tempo $t = 0$ a equação 3.8 se reduz a:

$$\{Ms^2 + Ds + K\}q(s) = f(s). \quad (3.9)$$

Assumindo que o sistema contenha elementos elásticos e viscoelásticos a rigidez K pode ser decomposta em:

$$K = K_e + \tilde{K}_v(s), \quad (3.10)$$

onde: K_e é a rigidez da parte elástica e $\tilde{K}_v(s) = [G^0 + h(s)]K_v$ é a rigidez da parte viscoelástica. Substituindo a equação 3.10 em 3.9 tem-se:

$$\begin{aligned} \{Ms^2 + Ds + K_e + (G^0 + h(s))K_v\}q(s) &= f(s), \\ \{Ms^2 + Ds + K_e + K_v^0\}q(s) + K_vh(s)q(s) &= f(s), \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde $K_v^0 = K_vG^0$.

Escrevendo a série $h(s)$ com apenas um termo e a variável de dissipação no domínio de Laplace $z(s)$ como:

$$z(s) = \frac{\delta}{s^2 + \beta s + \delta} q(s), \quad (3.12)$$

pode-se escrever a identidade:

$$\begin{aligned} q(s) - z(s) &= q(s) - \frac{\delta}{s^2 + \beta s + \delta} q(s); \\ &= \left(1 - \frac{\delta}{s^2 + \beta s + \delta}\right) q(s); \\ &= \frac{s^2 + \beta s}{s^2 + \beta s + \delta} q(s). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Substituindo este resultado na equação 3.11 chega-se a:

$$\{Ms^2 + Ds + K_e + K_v^0\}q(s) + K_v\alpha[q(s) - z(s)] = f(s). \quad (3.14)$$

Com as equações 3.12 e 3.14 pode-se montar o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \{Ms^2 + Ds + K_e + K_v(G^0 + \alpha)\}q(s) - K_v\alpha z(s) = f(s) \\ \left(\frac{1}{\delta}s^2 + \frac{\beta}{\delta}s + 1\right) z(s) - q(s) = 0 \end{cases}. \quad (3.15)$$

Multiplicando a segunda equação do sistema anterior por αK_v e aplicando a transformada de Laplace inversa no sistema, levando em conta as condições iniciais chega-se a:

$$\begin{cases} M\ddot{q}(t) + D\dot{q}(t) + [K_e + K_v(G^0 + \alpha)]q(t) - K_v\alpha z(t) = f(t) \\ \frac{\alpha}{\delta}K_v\ddot{z}(t) + \frac{\alpha\beta}{\delta}K_v\dot{z}(t) + \alpha K_v z(t) - \alpha K_v q(t) = 0 \end{cases}. \quad (3.16)$$

Escrevendo o sistema de equações 3.16 em notação matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{\delta}K_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & \frac{\alpha\beta}{\delta}K_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}(t) \\ \dot{z}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K^* & -\alpha K_v \\ -\alpha K_v & K_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q(t) \\ z(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.17)$$

onde $K^* = K_e + K_c^\infty$ e $K_c^\infty = K_v(G^0 + \alpha)$. Considerando somente a parte viscoelástica e

desprezando o amortecimento viscoso tem-se:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{\delta} K_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha\beta}{\delta} K_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}(t) \\ \dot{z}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_v(G^0 + \alpha) & -\alpha K_v \\ -\alpha K_v & K_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q(t) \\ z(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.18)$$

Ao generalizar o sistema 3.18 para vários graus de liberdade o termo \mathbf{K}_v passa a incluir modos relativos à movimentos de corpo rígido. Golla [8] modifica esta equação para retirar forças de amortecimento associadas a movimentos de corpo rígido fatorando \mathbf{K}_v da seguinte maneira:

$$\mathbf{K}_v = \mathbf{T}^T \Lambda \mathbf{T} \quad (3.19)$$

onde Λ é uma matriz diagonal composta pelos auto-valores não nulos da matriz de rigidez elástica normalizada em relação ao módulo de Young e \mathbf{T} é a matriz de auto-vetores correspondente aos auto-valores não nulos. Assumindo $\mathbf{R} = \mathbf{T}\Lambda^{1/2}$ e $\widehat{\mathbf{z}} = \mathbf{R}\mathbf{z}$ tem-se:

$$\mathbf{M}_{GHM} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{D}_{GHM} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}_{GHM} \mathbf{d} = \mathbf{F}_{GHM} \quad (3.20)$$

onde:

$$\mathbf{M}_{GHM} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\alpha}{\delta} \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

$$\mathbf{D}_{GHM} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\alpha\beta}{\delta} \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{K}_{GHM} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_v(G^0 + \alpha) & -\alpha \mathbf{R} \\ -\alpha \mathbf{R}^T & \alpha \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

$$\mathbf{F}_{GHM} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \widehat{\mathbf{z}}(t) \end{Bmatrix}. \quad (3.25)$$

Como pode ser visto nas equações 3.6 e 3.20 a quantidade de graus de liberdade dissipativos associados aos elementos viscoelásticos depende do número de termos utilizados na função de relaxação $h(s)$ e do número de movimentos de corpo rígido. Por exemplo, um elemento de pórtico espacial elástico possui 12 graus de liberdade e 6 movimentos de corpo-livre, sendo assim o número de graus de liberdade dissipativos é: $12 - 6 = 6$. A ordem (n) das matrizes de massa, rigidez e amortecimento do elemento viscoelástico fica então: $n = 12 + 6 = 18$.

Observa-se da equação 3.20 que, uma vez conhecida a matriz de rigidez e massa para um elemento finito constituído de material elástico, a obtenção da matriz de massa, rigidez e amortecimento do correspondente elemento viscoelástico é direta, bastando para isso também se conhecer os parâmetros G^0 , α , β e δ que definem o comportamento do MVE.

A Figura 3.1 traz uma representação do modelo GHM com um grau de liberdade através de uma associação de molas elásticas e amortecedores viscosos, onde $k_1 = (E^0 + \alpha)K$, $k_2 = \alpha K$, $\eta_2 = \frac{\alpha\beta}{\delta}K$, $g_1 = \frac{\alpha}{\delta}K$ e m é a massa do sistema. Percebe-se que há semelhanças entre o modelo apresentado nesta figura com aqueles apresentados na seção 2.2, onde mais uma vez pode-se constatar que a utilização de associações de molas e amortecedores viscosos para simular o comportamento de materiais viscoelásticos é adequada.

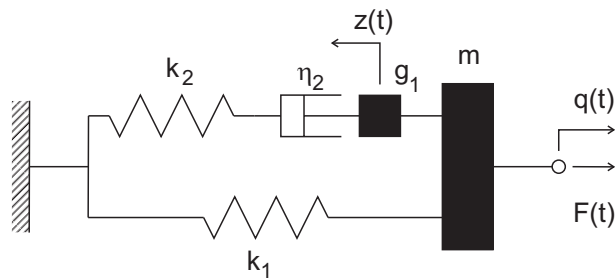


Figura 3.1: Interpretação do GHM para 1 grau de liberdade. *Adaptado de [11].*

3.2 Determinação dos parâmetros do modelo GHM

Como pôde ser visto, o modelo GHM depende dos parâmetros G^0 , α , β e δ para modelar o comportamento de MVEs. Portanto a qualidade destes é mandatória para que o modelo seja capaz de produzir bons resultados. Isto posto, nesta seção serão abordados alguns métodos experimentais para caracterização de MVEs e o processo para determinação dos parâmetros do modelo GHM.

3.2.1 Caracterização dos materiais viscoelásticos

Os métodos de ensaio para caracterização de MVEs descritos nesta seção são: Padrão ASTM, Método Indireto e Método Direto [16]. Estes métodos consistem basicamente em registrar-se, em uma dada temperatura, os deslocamentos e ações externas ao longo do tempo, submetendo um corpo-de-prova a deformações de cisalhamento ou normal [24].

O Método Padrão ASTM utiliza barras metálicas para simular vigas engastadas-livre como pode ser visto na Figura 3.2. Este método resume-se em aplicar um impacto nas vigas metálica e sanduíche para capturar suas respostas ao longo do tempo. Com estas respostas calculam-se as freqüências naturais e taxas de amortecimento para então se obter o módulo dinâmico de cisalhamento e o fator de perda pelas fórmulas:

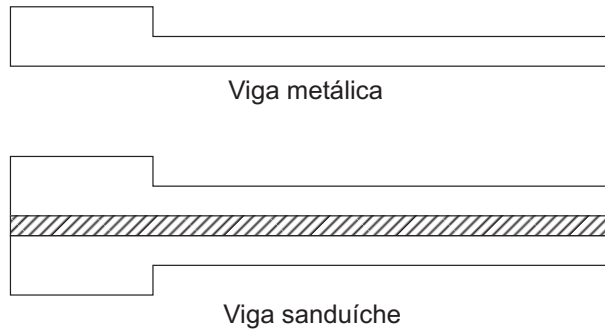


Figura 3.2: Seções longitudinais das vigas utilizadas pelo método padrão ASTM.

$$G_{2n} = \frac{(A - B) - 2(A - B)^2 - 2(A\eta_{3n})^2}{(1 - 2A + 2B)^2 + 4(A\eta_{3n})^2} \frac{E_1 H_1 H_2 a_n}{L_2^2}; \quad (3.26)$$

$$\eta_{2n} = \frac{A\eta_{3n}}{A - B - 2(A - B)^2 - 2(A\eta_{3n})^2},$$

onde: $A = \left(\frac{\omega_{3n}}{\omega_{1n}}\right)^2 (2 + \rho_r h_2) \frac{B}{2}$, $B = \frac{1}{6(1 + h_2)^2}$, $h_2 = \frac{H_2}{H_1}$, $\rho_r = \frac{\rho_2}{\rho_1}$, G o módulo de cisalhamento, η o fator de perda, ρ a densidade, E o módulo de Young, ω a freqüência, a o coeficiente, L o comprimento da viga e H a espessura da viga. E os índices 1, 2, e 3 referem-se à viga metálica base, o material viscoelástico e a viga de restrição respectivamente [16].

No Método Indireto uma massa suspensa é presa a um excitador através de amostras de MVE, conforme a Figura 3.3, e são medidas as acelerações do excitador e da massa suspensa. O módulo de cisalhamento complexo do MVE é então calculado pela expressão

[27]:

$$G(\omega) = \frac{K(\omega)h}{2bl} \quad (3.27)$$

onde: $K(\omega) = \omega^2 m \frac{H_{xy}(\omega) - 1}{H_{xy}(\omega)}$, $H_{xy}(\omega) = \frac{S_{xy}(\omega)}{S_{yy}(\omega)}$, m é a massa do bloco suspenso, ω a frequência de excitação, $S_{xy}(\omega)$ a densidade espectral cruzada, $S_{yy}(\omega)$ a densidade auto-espectral e b , h e l são respectivamente o comprimento, a espessura e a largura total das amostras de MVE.

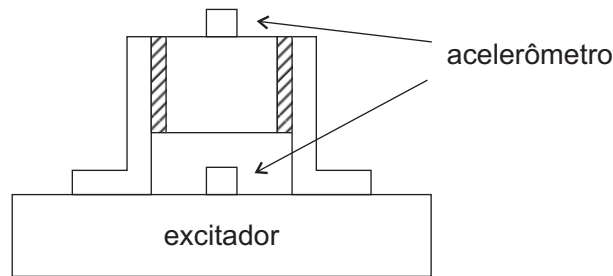


Figura 3.3: Aparato experimental utilizado no Método Indireto.

Faisca [16] desenvolveu em sua dissertação de mestrado o Método Direto, que se diferencia do Indireto por medir diretamente tanto a resposta do sistema quanto a força aplicada (ver Figura 3.4). A rigidez complexa do material pode ser obtida pela formula:

$$K(\omega) = \omega^2 m + \frac{1}{H_{xf}(\omega)}, \quad (3.28)$$

$$H_{xy}(\omega) = \frac{S_{xy}(\omega)}{S_{yy}(\omega)},$$

onde: $H_{xy}(\omega) = \frac{S_{xf}}{S_{ff}}$ e S_{xf} e S_{ff} são obtidos através de um acelerômetro acoplado a massa suspensa e da célula de carga [16].

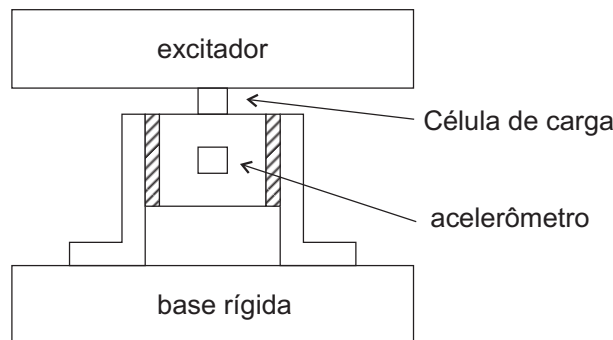


Figura 3.4: Aparato experimental utilizado no Método Direto.

Silva [17] em sua dissertação de mestrado realizou uma comparação entre os resul-

tados de caracterização de um material viscoelástico obtidos através de ensaios segundo os métodos Padrão ASTM e Direto, utilizando sensores sem contato. Neste trabalho foi possível constatar que estas duas metodologias de ensaio produzem resultados semelhantes.

3.2.2 Ajuste dos parâmetros do modelo GHM

Após determinar experimentalmente os valores do módulo de armazenamento e do fator de perda pode-se ajustar as curvas da parte real do módulo complexo e do fator de perda para os pontos obtidos nos ensaios. Para o caso da formulação GHM, o módulo de cisalhamento complexo é dado por:

$$\begin{aligned} G^*(\omega) &= G'(\omega)(1 + i\eta(\omega)); \\ G^*(\omega) &= G^0 + h(s); \\ G^*(\omega) &= G^0 + \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j(s^2 + \beta_j s)}{s^2 + \beta_j s + \delta_j}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

adotando somente o primeiro termo da série $h(s)$ tem-se:

$$G^*(\omega) = G^0 + \frac{\alpha(-\omega^2 + i\beta\omega)}{-\omega^2 + i\beta\omega + \delta}. \quad (3.30)$$

Separando as partes real e imaginária da equação anterior chega-se as seguintes funções de $G'(\omega)$ e $\eta(\omega)$:

$$G'(\omega) = G^0 + \alpha \frac{\omega^2(\omega^2 - \delta + \beta^2)}{(\delta - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2}, \quad (3.31)$$

$$\eta(\omega) = \frac{\alpha\beta\delta\omega}{(\delta - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2} \frac{1}{G'(\omega)}, \quad (3.32)$$

que são as funções a serem utilizadas para determinar as constantes do modelo GHM. Caso as expressões para o GHM sejam desenvolvidas para o módulo de Young, as equações 3.31 e 3.32 seriam escritas na forma

$$E'(\omega) = E^0 + \alpha \frac{\omega^2(\omega^2 - \delta + \beta^2)}{(\delta - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2}, \quad (3.33)$$

$$\eta(\omega) = \frac{\alpha\beta\delta\omega}{(\delta - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2} \frac{1}{E'(\omega)}, \quad (3.34)$$

Analisando as equações 3.31 a 3.34 pode-se perceber que as curvas para o módulo de armazenamento e o fator de perda possuem os mesmos coeficientes. Portanto o ajuste destas curvas não é trivial, neste caso as duas curvas devem ser ajustadas simultaneamente. Este ajuste pode-ser realizado, por exemplo, segundo o método dos mínimos quadrados não-linear [28, 29] ou via algoritmos genéticos [11].

3.3 Validação do modelo GHM

Com o objetivo de verificar a acurácia do modelo, comparações entre resultados teóricos e aqueles obtidos via GHM serão analisados. Para tanto, foram avaliadas computacionalmente as barras mostradas na Figura 3.5 com os carregamentos nelas indicados e as seguintes dimensões para comprimento, altura e largura: $1,00m$, $0,30m$ e $0,15m$, respectivamente.

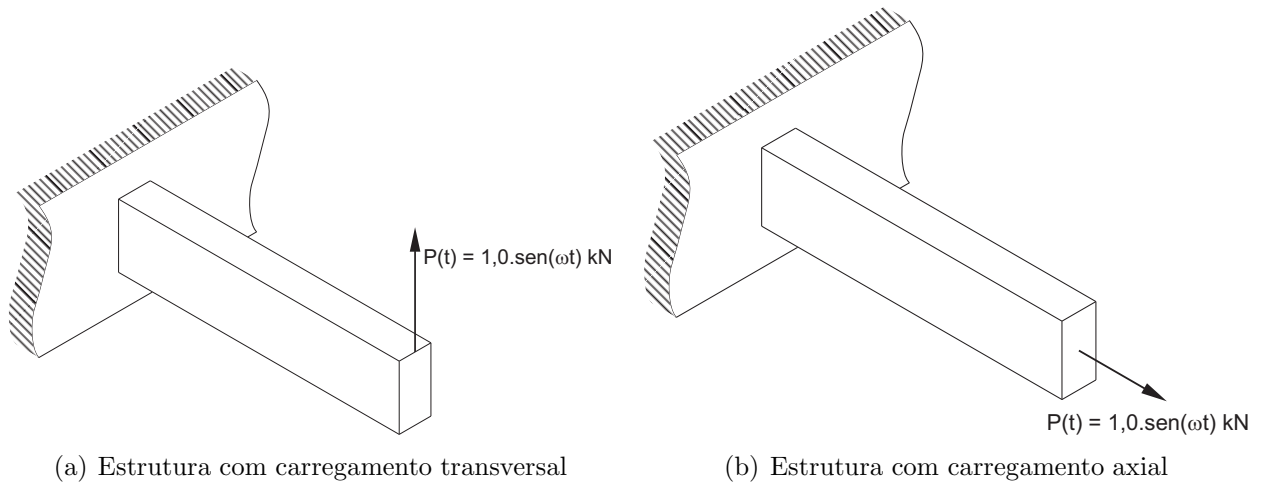


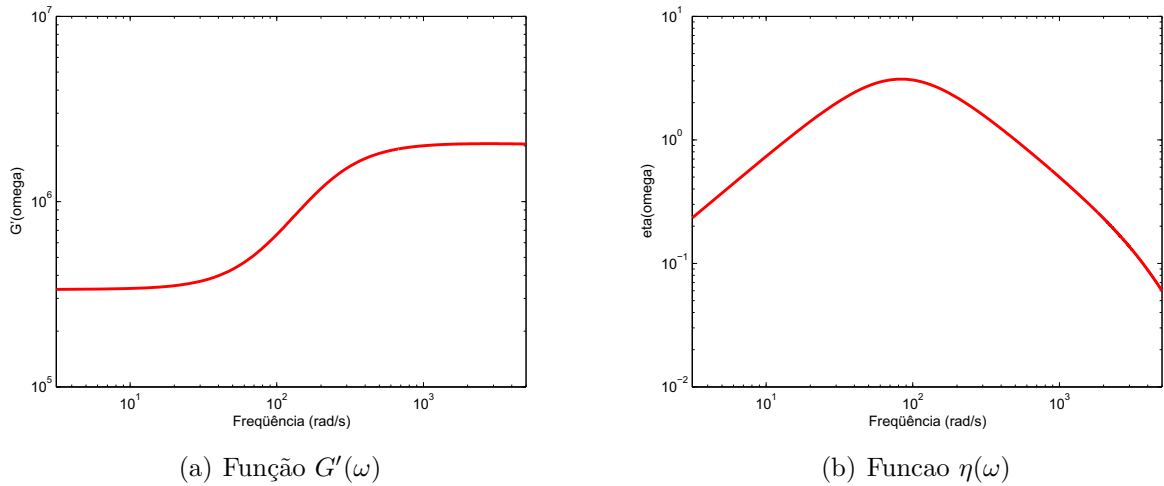
Figura 3.5: Estruturas e carregamento utilizados para os testes de validação.

Estas barras são constituídas de material viscoelástico com as características mecânicas descritas na Tabela 3.1. As curvas para $G'(\omega)$ e $\eta(\omega)$ obtidas com estes parâmetros deste material encontram-se na Figura 3.6.

Estas estruturas foram modeladas por diferentes classes de elementos finitos e seus resultados no domínio da frequência são comparados com valores teóricos, que serão mostrados a seguir.

Tabela 3.1: Características mecânicas adotadas na estrutura dos testes de validação.

Constante	Valor
ρ	1.102 kg/m^3
ν	0,25
E^0	1,0 MPa
α	5,0 MPa
β	$6,0 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$
δ	$1,2 \cdot 10^6 \text{ s}^{-2}$

Figura 3.6: Curvas das funções $G'(\omega)$ e $\eta(\omega)$ do MVE utilizado nos testes de validação.

3.3.1 Elemento de Treliça

A discretização da barra da Figura 3.5(b) em elementos de treliça leva ao modelo mostrado na Figura 3.7. Nesta figura apresenta-se o modelo com cinco elementos na sua discretização.

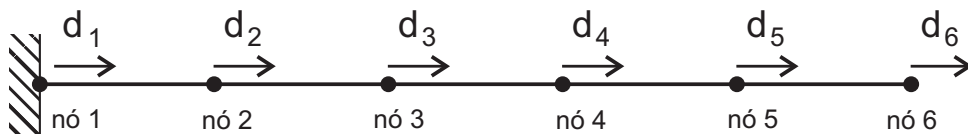


Figura 3.7: Viga discretizada em elementos de treliça.

Caso o material que compusesse a barra fosse puramente elástico, partindo-se das bem conhecidas matrizes de massa e rigidez para um elemento de treliça (Figura 3.8), mostradas nas equações 3.35 e 3.36, respectivamente,



Figura 3.8: Elemento de treliça.

$$\mathbf{K}_{el} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

$$\mathbf{M}_{el} = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Através do acoplamento clássico de matrizes do MEF, seria facilmente possível se montar as matrizes de massa e rigidez do sistema, conforme sugere as equações 3.37 e 3.38, respectivamente

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{N^{\circ} \text{ de elementos}} \mathbf{K}_{el}; \quad (3.37)$$

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{N^{\circ} \text{ de elementos}} \mathbf{M}_{el}, \quad (3.38)$$

onde $\sum_{i=1}^{N^{\circ} \text{ de elementos}}$ indica o somatório das contribuições de cada elemento da discretização para a formação da matriz global segundo suas conectividades.

Usando esta mesma formulação (aqui denominada formulação clássica) para modelar uma treliça constituída de material viscoelástico, basta lembrar que o módulo de elasticidade deixa de ser uma constante e passa a ser um complexo (módulo complexo) e dependente da frequência. Assim, a matriz de rigidez de elemento viscoelástico fica:

$$\mathbf{K}_{el,clas}(\omega) = E^*(\omega) \frac{A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

lembrando que $E^*(\omega) = E'(\omega) + iE''(\omega)$ e $\eta(\omega) = \frac{E''}{E'}$, onde $E'(\omega)$ e $\eta(\omega)$ são dados pelas equações 3.33 e 3.34. Neste caso, obviamente, matriz de rigidez do sistema também fica dependente da frequência.

Soluções no domínio do tempo para a formulação clássica não são triviais, uma vez que o módulo complexo é dependente da frequência. Entretanto, para soluções no domínio da frequência, onde, por exemplo, calcula-se a amplitude do deslocamento horizontal da extremidade livre da barra para um carregamento harmônico como mostrado na Figura 3.5(b), a solução na formulação clássica torna-se bastante simples. Partindo da equação

matricial de equilíbrio para o modelo da Figura 3.7, para um carregamento harmônico, e das equações 3.37 e 3.38 pode-se chegar facilmente a:

$$\mathbf{d} = [\mathbf{K}_{clas}(\omega) - \omega^2 \mathbf{M}_{clas}]^{-1} \mathbf{f}, \quad (3.40)$$

onde \mathbf{f}_{clas} é o vetor de forças aplicado à estrutura, \mathbf{K}_{clas} e \mathbf{M}_{clas} são as matrizes de rigidez e massa globais do sistema para a formulação clássica, respectivamente.

Na modelagem desta mesma barra via GHM, inicialmente é necessário se calcular as matrizes para elementos viscoelásticos. Para tanto seguindo-se os passos apresentados na seção 3.1.

1. Determinação do número de graus de liberdade dissipadores

Da Figura 3.8, observa-se dois graus de liberdade (GL) físicos. Como o número de GLs dissipadores é igual ao número de GLs físicos menos o número de GLs de corpo rígido, para o presente caso chega-se a: 2GLs físicos - 1 GL de corpo rígido = 1 GL dissipador.

Uma ilustração do modelo de elemento de treliça viscoelástica é mostrado esquematicamente na Figura 3.9, nessa figura o grau de liberdade dissipador z_1 não tem sentido físico.

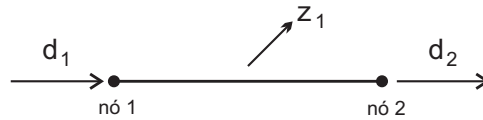


Figura 3.9: Elemento de treliça viscoelástica segundo a formulação GHM.

2. Determinação das matrizes de elemento do modelo elástico

Estas matrizes estão mostradas nas equações 3.35 e 3.36.

3. Determinação das matrizes \mathbf{T} e Λ

Sabendo que Λ é uma matriz diagonal composta pelos auto-valores não nulos da matriz de rigidez elástica normalizada em relação ao módulo de Young (\mathbf{K}_v) e \mathbf{T} é a matriz com os correspondentes auto-vetores. Neste caso estas duas matrizes são:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 2\chi^2 \end{bmatrix}; \quad (3.41)$$

$$\mathbf{T} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

onde $\chi^2 = \frac{A}{L}$.

4. Determinação da matriz \mathbf{R}

De posse destas duas matrizes pode-se montar a matriz \mathbf{R} da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{T}\Lambda^{\frac{1}{2}}, \\ \mathbf{R} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \sqrt{2\chi^2}, \\ \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \chi. \end{aligned} \quad (3.43)$$

5. Determinação das matrizes para elementos viscoelásticos

Aplicando as equações 3.21, 3.22 e 3.23 chega-se às matrizes locais para o elemento de treliça viscoelástica formulado via GHM:

$$\mathbf{K}_{el,GHM} = \begin{bmatrix} \chi^2(E^0 + \alpha) & -\chi^2(E^0 + \alpha) & \chi\alpha \\ -\chi^2(E^0 + \alpha) & \chi^2(E^0 + \alpha) & -\chi\alpha \\ \chi\alpha & -\chi\alpha & \alpha \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

$$\mathbf{M}_{el,GHM} = \begin{bmatrix} \frac{\rho AL}{3} & \frac{\rho AL}{6} & 0 \\ \frac{\rho AL}{6} & \frac{\rho AL}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{\delta} \end{bmatrix}, \quad (3.45)$$

$$\mathbf{D}_{el,GHM} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha\beta}{\delta} \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

6. Determinação das matrizes globais do sistema

De posse das matrizes de elemento, aplica-se as equações 3.37 e 3.38 para se obter as matrizes globais do sistema obtidas via GHM.

A solução no tempo dos problemas envolvendo MVEs formulados via GHM não oferecem complicações adicionais, uma vez que as matrizes agora envolvidas no problema

são constantes e independentes da frequência. Entretanto, visando comparar o comportamento dos modelos computacionais obtidos para a treliça da Figura 3.5(b) com a aplicação do GHM e via formulação clássica optou-se aqui para uma análise no domínio da frequência. Partindo da equação matricial de equilíbrio para o modelo da Figura 3.10 e das equações 3.37 e 3.38 pode-se chegar a:

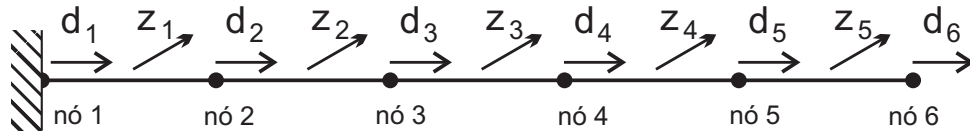


Figura 3.10: Viga discretizada em elementos de treliça viscoelástica via GHM.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{z} \end{Bmatrix} = [\mathbf{K}_{GHM} + i\omega\mathbf{D}_{GHM} - \omega^2\mathbf{M}_{GHM}]^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (3.47)$$

onde \mathbf{K}_{GHM} , \mathbf{D}_{GHM} e \mathbf{M}_{GHM} são respectivamente as matrizes globais de rigidez, amortecimento e massa do sistema segundo a formulação GHM.

As diferenças básicas entre a equação 3.47 (formulação GHM) e a equação 3.40 (formulação clássica) são:

- a) As matrizes da equação 3.47 possuem linhas e colunas adicionais relativas aos GLs dissipadores;
- b) O vetor de deslocamentos da equação 3.47 é acrescido dos graus de liberdade dissipadores;
- c) O vetor de força da equação 3.47 é acrescido de “ n ” linhas nulas, relativas aos “ n ” GLs dissipadores que por não terem sentido físico, não possuem forças atuantes;
- d) A matriz do sistema de rigidez obtida para a equação 3.47 é constante para qualquer valor de frequência, diferentemente da matriz de rigidez da equação 3.40 que, numa varredura em frequência requer sua atualização em função de ω .

Entretanto, tanto a equação 3.47 quanto a equação 3.40, devem fornecer os mesmos valores de deslocamentos, quer seja no domínio do tempo quer seja no domínio da frequência, para um mesmo carregamento.

Com as equações 3.40 e 3.47 e malhas semelhantes às apresentadas nas Figuras 3.7 e 3.10, pôde-se traçar os gráficos Frequência de excitação \times Amplitude do GL horizontal da

extremidade da treliça para os diferentes níveis de discretização em função da frequência, variando ω de 0 a 2000 *rad/s*. Analisando a Figura 3.11 percebe-se que as respostas dos modelos com formulação clássica e via GHM são praticamente idênticas. Ainda nesta figura pode-se ver que conforme a malha é refinada a resposta do modelo GHM apresenta pequenas perturbações de ordem numérica a partir de 200 *rad/s* aproximadamente.

3.3.2 Elemento de Pórtico Plano

A Figura 3.12 traz uma ilustração de elementos de pórtico plano viscoelástico para a formulação clássica e via GHM. Como pode ser visto, a formulação via GHM possui 3 graus de liberdade dissipativos totalizando 9 graus de liberdade por elemento.

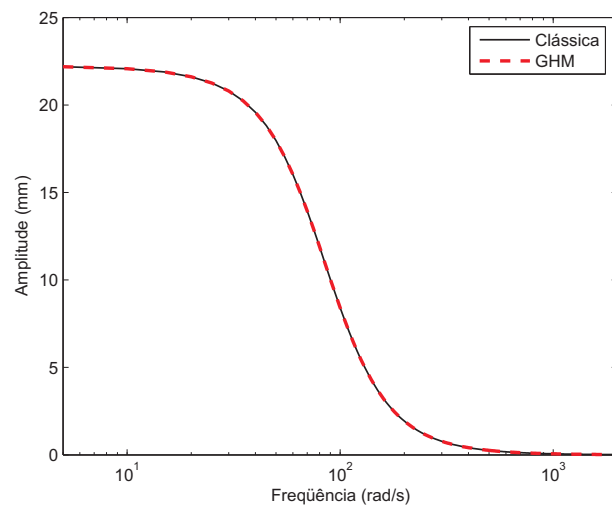
Os modelos das Figuras 3.13 e 3.14 mostram, respectivamente, as discretizações com cinco elementos de pórtico plano via formulação clássica (com 18 GLs) e a via GHM (com 18 GLs físicos mais 15 GLs dissipadores).

Para uma formulação clássica, as matrizes de elementos de pórtico plano obtidas para uma discretização com cinco elementos são mostrados nas equações 3.48 e 3.49.

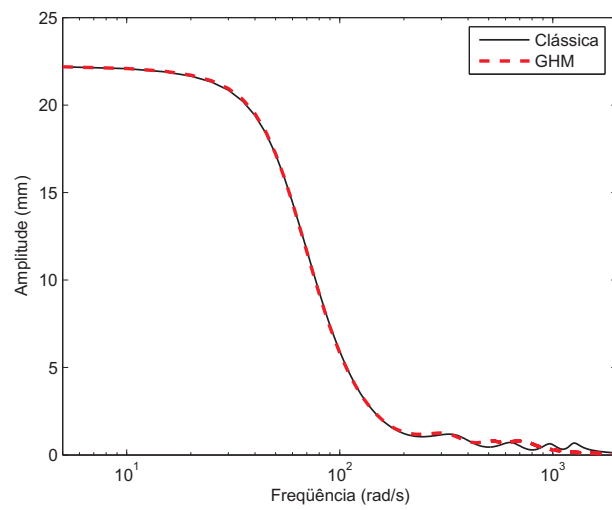
$$\mathbf{K}_{el,clas}(\omega) = E^*(\omega) \begin{bmatrix} 0,2250 & 0 & 0 & -0,2250 & 0 & 0 \\ & 0,5062 & 0,0506 & 0 & -0,5062 & 0,0506 \\ & & 0,0067 & 0 & -0,0506 & 0,0033 \\ & & & 0,2250 & 0 & 0 \\ & sim. & & & 0,5062 & -0,0506 \\ & & & & & 0,0067 \end{bmatrix}; \quad (3.48)$$

$$\mathbf{M}_{el,clas} = \begin{bmatrix} 3,3060 & 0 & 0 & 1,6530 & 0 & 0 \\ & 3,6838 & 0,1039 & 0 & 1,2752 & -0,0614 \\ & & 0,0038 & 0 & 0,0614 & -0,0028 \\ & & & 3,3060 & 0 & 0 \\ & sim. & & & 3,6838 & -0,1039 \\ & & & & & 0,0038 \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

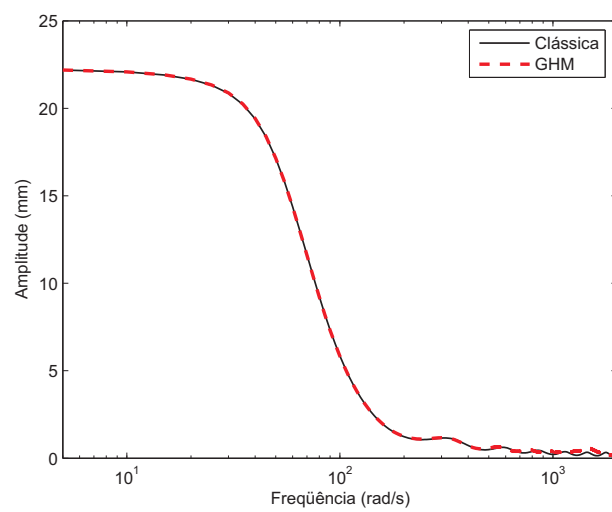
Partindo das matrizes obtidas para a formulação clássica e aplicando uma seqüência de procedimentos análogos àqueles apresentados na seção anterior, pode-se escrever as matrizes para elementos de pórtico plano viscoelásticos, formulados via GHM para o



(a) Malha com 1 elemento



(b) Malha com 5 elementos



(c) Malha com 10 elementos

Figura 3.11: Análise de convergência para malhas de elementos de treliça solicitados a tração.

$$\mathbf{D}_{el,GHM} = diag(0, 0, 0, 0, 0, 0, 25000, 25000, 25000). \quad (3.52)$$

Também de forma análoga, as equações 3.40 e 3.47 podem ser obtidas para os modelos das figuras 3.13 e 3.14. As respostas para as duas formulações e três níveis de discretização podem ser vistas na Figura 3.15. Nesta figura, as respostas para a estrutura da Figura 3.5(b) (viga com carregamento axial) estão apresentadas na primeira coluna de gráficos, já as respostas para a estrutura mostrada na Figura 3.5(a) (carregamento transversal) são mostradas na segunda coluna.

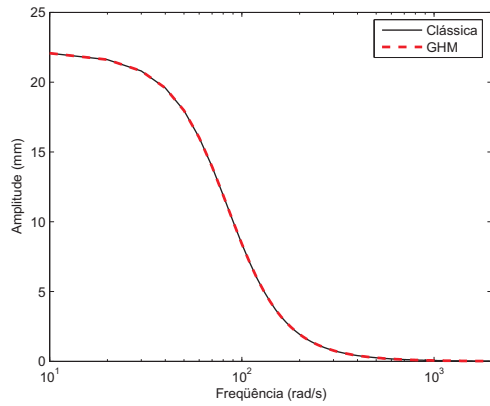
Em todos os casos analisados, observa-se uma excelente concordância entre os resultados para a formulação clássica e as respectivas respostas obtidas via GHM. Obviamente os resultados obtidos para o carregamento axial são idênticas aos apresentados para os respectivos modelos de treliça mostrados na seção anterior.

3.3.3 Elemento de Pórtico Espacial

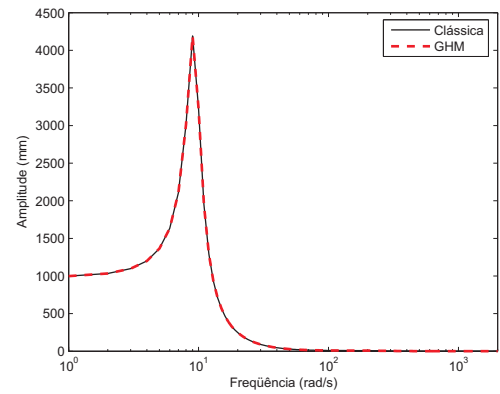
As representações dos elementos de pórtico espacial viscoelástico derivados das formulações clássica e via GHM podem ser vistas na Figura 3.16. Como pode ser observado, o elemento viscoelástico obtido via GHM apresenta 6 GLs dissipativos, além dos físicos.

As Figuras 3.17 e 3.18 mostram exemplos das discretizações das vigas da Figura 3.5 com 5 elementos viscoelásticos formulados da forma clássica e via GHM, respectivamente. A malha da Figura 3.17 possui 36 GLs físicos, já a da Figura 3.18, além dos GLs físicos, há 30 GLs dissipativos.

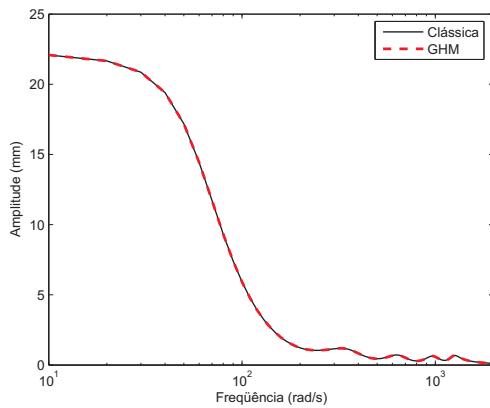
De forma semelhante as matrizes elásticas de elementos para a formulação clássica são o ponto de partida para obtenção das matrizes viscoelásticas de elementos via GHM. Aplicando um procedimento análogo ao apresentado para elementos de treliça e com a discretização da Figura 3.18, chega-se as seguintes matrizes de rigidez, massa e amortecimento para os elementos:



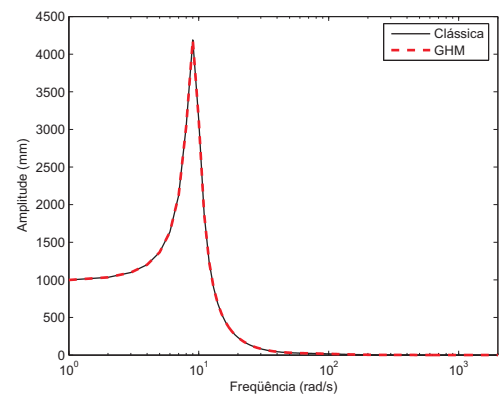
(a) Malha com 1 elemento - Tração



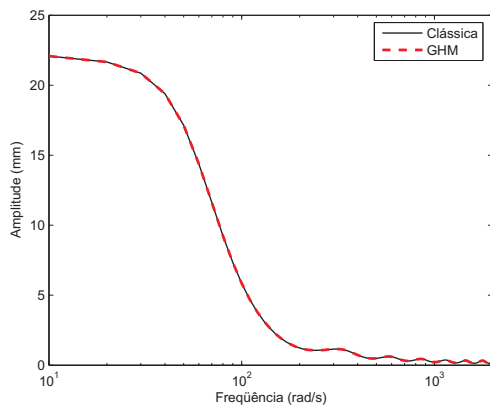
(b) Malha com 1 elemento - Flexão



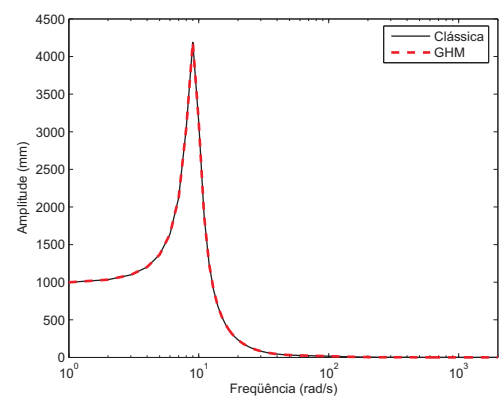
(c) Malha com 5 elementos - Tração



(d) Malha com 5 elementos - Flexão



(e) Malha com 10 elementos - Tração



(f) Malha com 10 elementos - Flexão

Figura 3.15: Análise de convergência para malhas de elementos de pórtico plano solicitadas à tração e flexão.

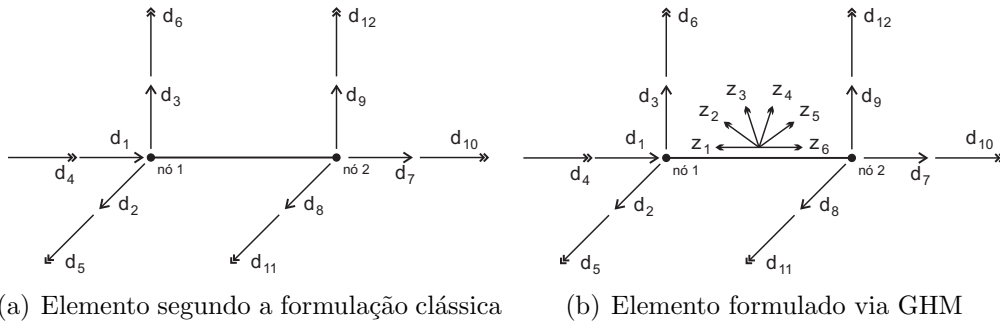


Figura 3.16: Elementos de pórtico espacial viscoelásticos.

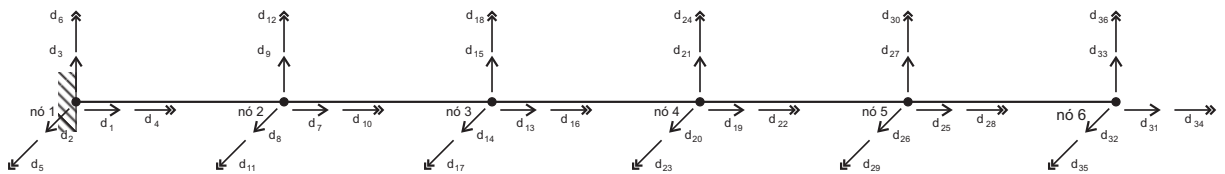


Figura 3.17: Discretização da viga com elementos de pórtico espacial viscoelástico segundo a formulação clássica.

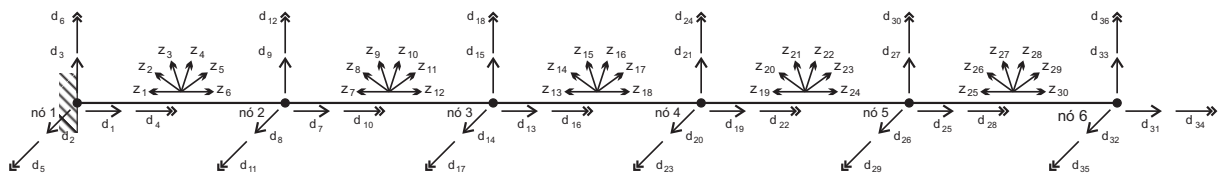


Figura 3.18: Discretização da viga com elementos de pórtico espacial viscoelástico via formulação GHM.

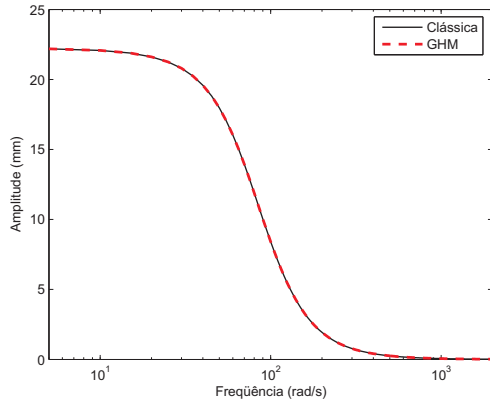
$$\mathbf{D}_{el,GHM} = \begin{matrix} \mathbf{D}_{el,GHM} = \\ \left[\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & 2,5 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & & 2,5 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & 2,5 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & 2,5 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & 2,5 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & & 2,5 \end{array} \right] \cdot 10^4 \end{matrix} \quad (3.55)$$

Novamente, de forma análoga, as equações 3.40 e 3.47 podem ser obtidas para os modelos das figuras 3.17 e 3.18. As respostas para estas formulações em três níveis de discretização encontram-se na Figura 3.19. Nesta figura, as respostas para a estrutura com carregamento axial encontram-se na primeira coluna de gráficos e as respostas para a estrutura mostrada carregada transversalmente estão na segunda coluna. Assim como nos elementos de treliça e pórtico plano, em todos os casos analisados, observa-se uma excelente concordância entre os resultados obtidos através das duas formulações.

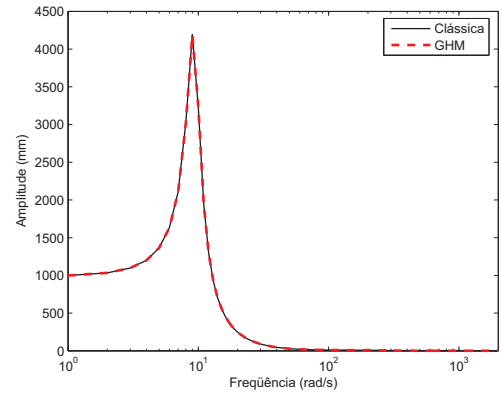
3.3.4 Elemento Triangular Linear (CST)

Os elementos CST utilizados nesta análise estão ilustrados na Figura 3.20. Tratam-se de elementos planos bidimensionais, com 6 graus de liberdade físicos e, para o formulado via GHM, 3 graus de liberdade dissipadores.

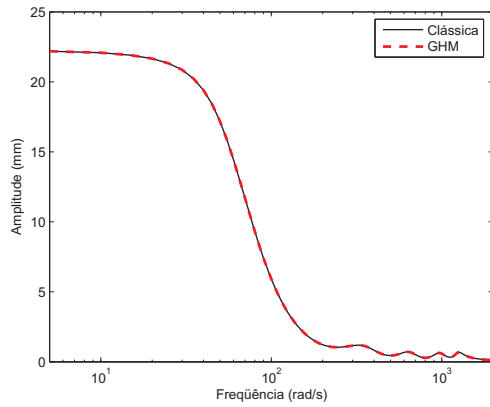
A Figura 3.21 traz um exemplo de discretização de parte das vigas da Figura 3.5, utilizando elementos CST viscoelásticos formulados via GHM. Seguindo uma marcha análoga àquela apresentada para os demais elementos finitos descritos anteriormente, pode-se obter as matrizes para elementos CST viscoelásticos com formulação GHM:



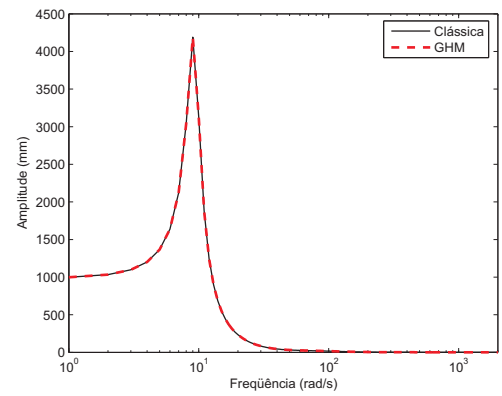
(a) Malha com 1 elemento - Tração



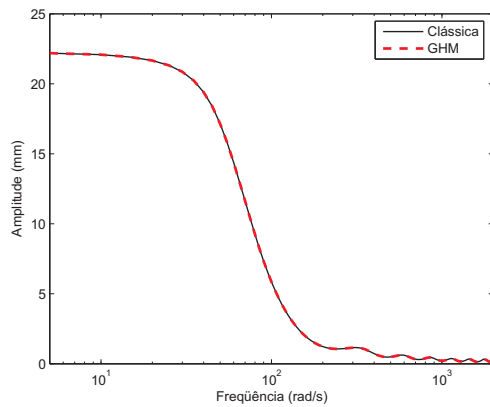
(b) Malha com 1 elemento - Flexão



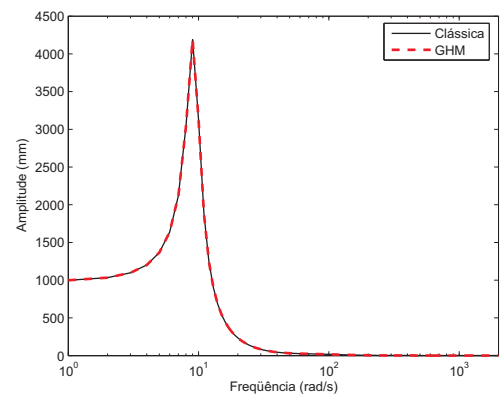
(c) Malha com 5 elementos - Tração



(d) Malha com 5 elementos - Flexão



(e) Malha com 10 elementos - Tração



(f) Malha com 10 elementos - Flexão

Figura 3.19: Análise de convergência para malhas de elementos de pórtico espacial solicitadas à tração e flexão.

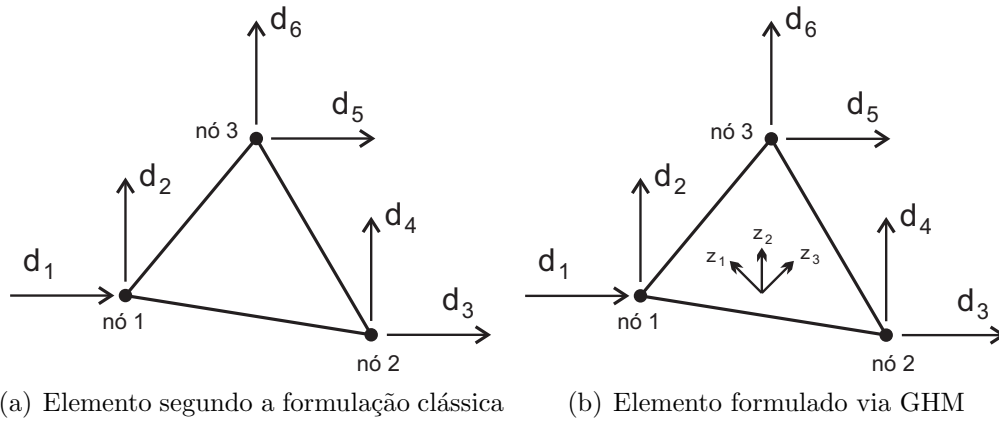


Figura 3.20: Elementos triangulares lineares viscoelásticos.

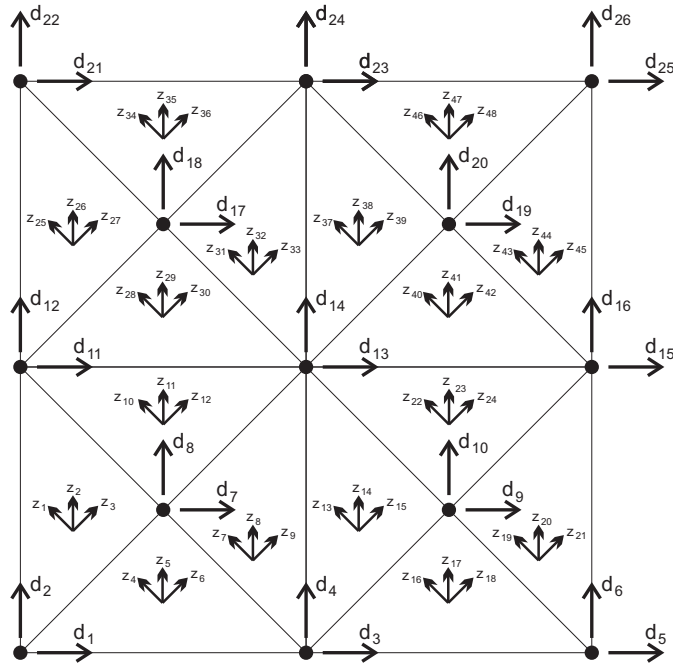


Figura 3.21: Discretização da viga com 16 elementos CST viscoelásticos formulados via GHM (sem escala).

$$\mathbf{K}_{el,GHM} = \begin{bmatrix}
 0,3100 & 0,1250 & 0,1900 & -0,0250 & -0,5000 & -0,1000 & 0,1409 & 1,1180 & 0,5293 \\
 & 0,6892 & 0,0250 & 0,6442 & -0,1500 & -1,3333 & 1,8257 & 0,3354 & -0,0136 \\
 & & 0,3100 & -0,1250 & -0,5000 & 0,1000 & -0,1409 & 1,1181 & -0,5293 \\
 & & & 0,6892 & 0,1500 & -1,3333 & 1,8257 & -0,3354 & -0,0136 \\
 & & & & 1,000 & 0 & 0 & -2,2361 & 0 \\
 & & & & & 2,6667 & -3,6514 & 0 & 0,0272 \\
 & & & & & & 5,0000 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 5,0000 & 0 \\
 & & & & & & & & 5,0000
 \end{bmatrix} \cdot 10^6; \tag{3.56}$$

$$\mathbf{M}_{el,GHM} = \begin{bmatrix} 1,0331 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1,0331 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1,0331 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1,0331 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1,0331 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 1,0331 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 4,1667 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 4,1667 & 0 \\ & & & & & & & & 4,1667 \end{bmatrix}; \quad (3.57)$$

$$\mathbf{D}_{el,GHM} = \text{diag}(0, 0, 0, 0, 0, 0, 25000, 25000, 25000) \quad (3.58)$$

Como pode-se notar, a matriz de massa adotada para este elemento é do tipo discreta, ao contrário dos outros elementos apresentados anteriormente que utilizam a matrizes de massa consistentes.

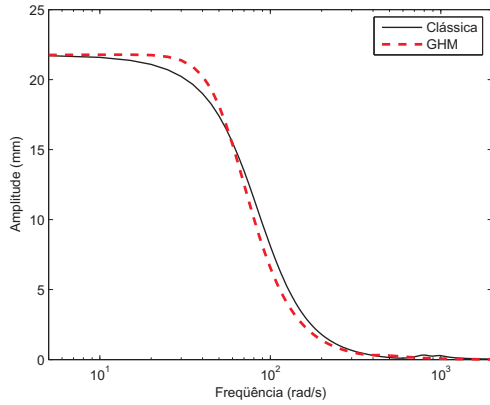
Após a obtenção das matrizes globais para uma modelagem clássica e via GHM com elementos CST, as soluções para a estrutura da Figura 3.5 podem ser obtidas mais uma vez. Observa-se da Figura 3.22 que na medida em que as malhas de elementos finitos são refinadas, os resultados da formulação clássica e via GHM tendem a ficar mais coincidentes.

3.3.5 Elemento Tetraédrico Linear (T4)

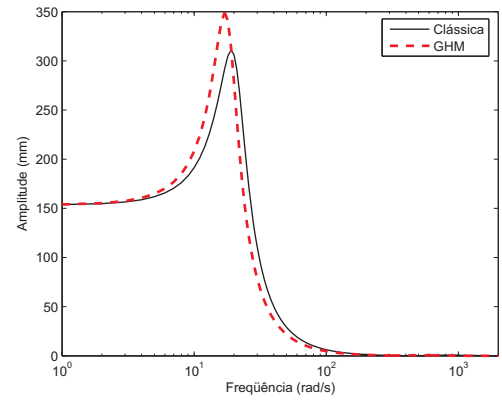
Com o intuito de realizar análises em problemas com geometria complexa também foram estudados os elementos tetraédricos lineares. Os elementos utilizados na análise desta seção estão ilustrados na Figura 3.23, tratam-se de elementos sólidos com quatro nós e 3 graus de liberdade físicos por nó. Para o elemento formulado via GHM, além dos graus de liberdade físicos, há 6 graus de liberdade de dissipação por elemento, fazendo um total de 18 graus de liberdade em cada elemento.

Para realizar a discretização das barras da Figura 3.5 foram utilizadas malhas de elementos finitos que dividem o domínio em paralelepípedos regulares, sendo cada paralelepípedo composto por 5 elementos tetraédricos como pode ser visto na Figura 3.24.

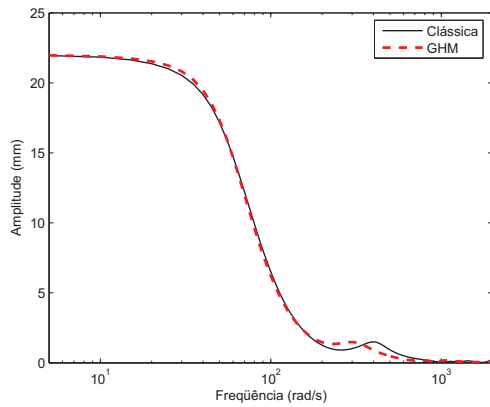
Discretizando a estrutura da Figura 3.5 com uma malha do tipo $2 \times 1 \times 6$, isto é, com duas divisões na horizontal, uma na vertical e seis no comprimento conforme ilustra a Figura 3.25, pode-se escrever as seguintes matrizes de rigidez, amortecimento e massa



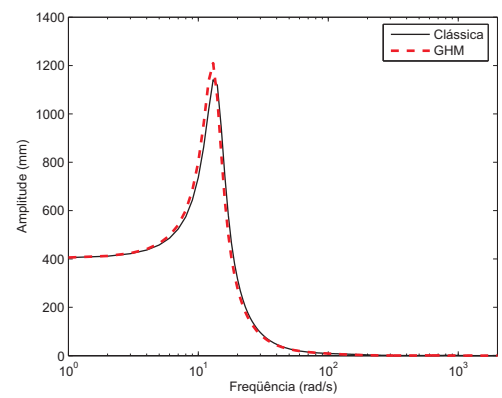
(a) Malha com 4 elementos - Tração



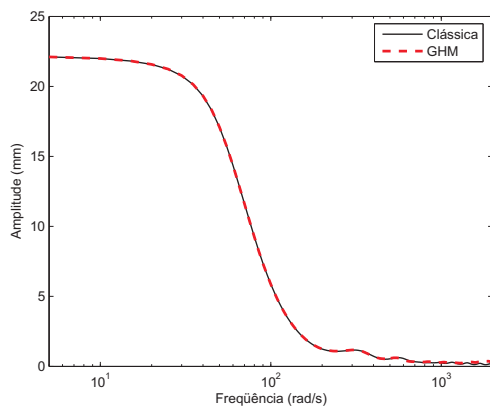
(b) Malha com 4 elementos - Flexão



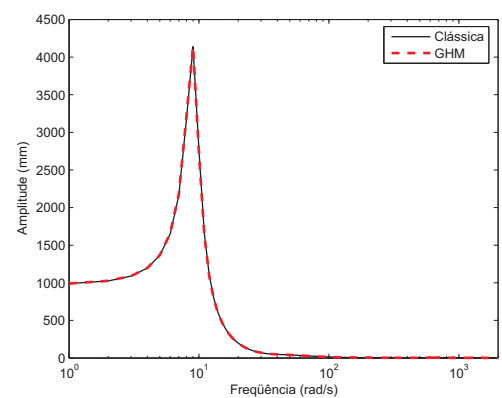
(c) Malha com 16 elementos - Tração



(d) Malha com 16 elementos - Flexão



(e) Malha com 120 elementos - Tração



(f) Malha com 120 elementos - Flexão

Figura 3.22: Análise de convergência para malhas de elementos triangulares lineares solicitadas à tração e flexão.

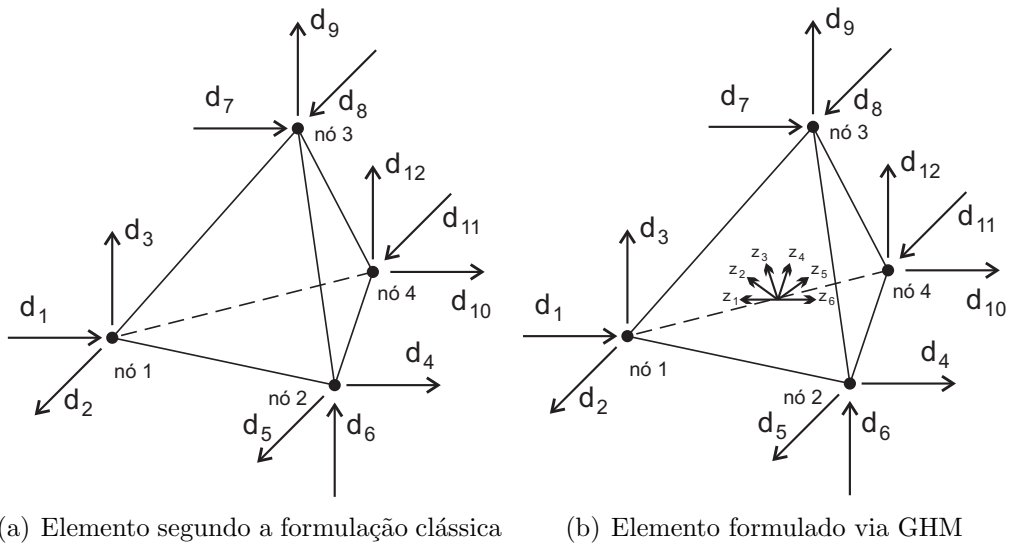


Figura 3.23: Elementos tetraédricos lineares (T4) viscoelásticos.

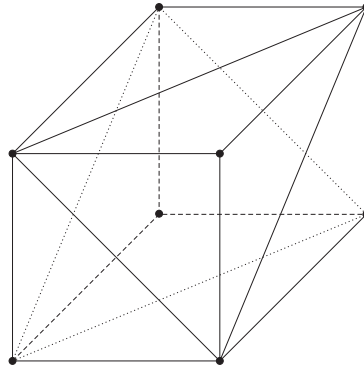


Figura 3.24: Discretização de um paralelepípedo com cinco elementos tetraédricos lineares.

locais para o elemento viscoelástico segundo a formulação GHM, após os desenvolvimentos matemáticos comuns a todos os elementos finitos viscoelásticos modelados via GHM mostrados anteriormente, conforme abaixo:

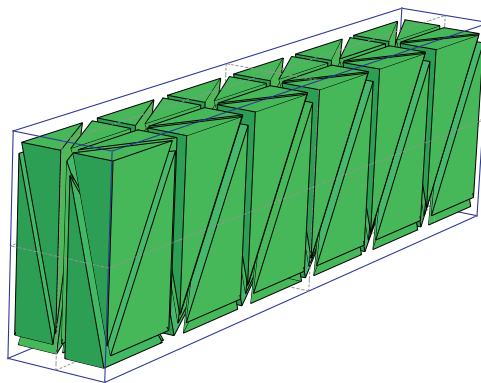


Figura 3.25: Discretização da viga com uma malha do tipo $2 \times 1 \times 6$ de elementos T4.

$\mathbf{K}_{e,GHM} =$

0,0540	0	0	-0,0540	0	0,1200	0	0	-0,1200	0	0	0,1235	-0,3923	0,1163	-0,2040	-0,0001	-0,0274
0,0540	0	0,0540	0	0,0300	0	0	0	0	-0,0300	0,0219	-0,0841	-0,1023	0,0923	0,4073	0,1805	
0,1620	0,1620	0,0300	-0,1620	-0,1200	0	0	0,0300	0	0	-0,3451	0,2267	-0,0574	-0,6756	0,2109	-0,0155	
0,1620	0,1620	0,1333	-0,2400	-0,8000	-0,0667	0,1200	-0,0167	0,1200	0	-1,8900	-0,1267	-0,0166	0,1950	0,0336	-0,0143	
	0,3707	0,3707	-0,0600	-0,0667	-0,2667	0	-0,0667	0	0,0300	-0,3358	0,2711	1,1383	-0,0882	-0,2143	0,0943	
	0,4453	0,4453	0	0,1200	0	-0,2667	0	0	0,0300	0,6317	-1,1451	0,2590	0,2737	0,0152	0,0550	
			0,8000	0,8000	0	0	0	0,0667	0	1,7301	0,5621	0,1425	0,0454	0,0414	0,0156	
				0,2667	0	0,0667	0	0	0	0,1459	-0,1725	-0,9685	-0,1461	-0,2998	0,1044	
					0,2667	0	0	0	0	-0,2744	0,8717	-0,2584	0,4532	0,0001	0,0608	
						0,0167	0	0,0167	0	0,0365	-0,0431	-0,2421	-0,0365	-0,0750	0,0261	
							0,0500	0,0500	0	0,1680	-0,0146	-0,0675	0,1421	0,1068	-0,3791	
			<i>sym.</i>						0,0167	-0,0122	0,0467	0,0568	-0,0513	-0,2263	-0,1003	
										5,0000	0	0	0	0	0	
										5,0000	5,0000	0	0	0	0	
												5,0000	0	0	0	
													5,0000	0	0	
														5,0000	0	
															5,0000	

(3.59)

$\cdot 10^6$;

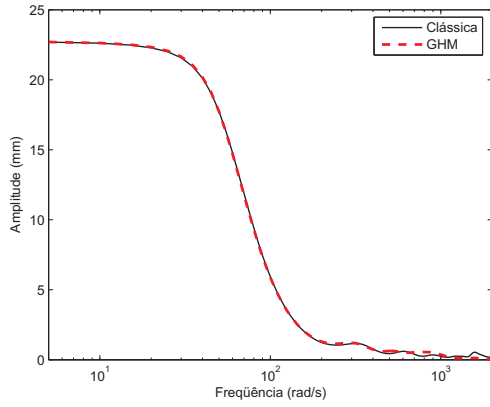
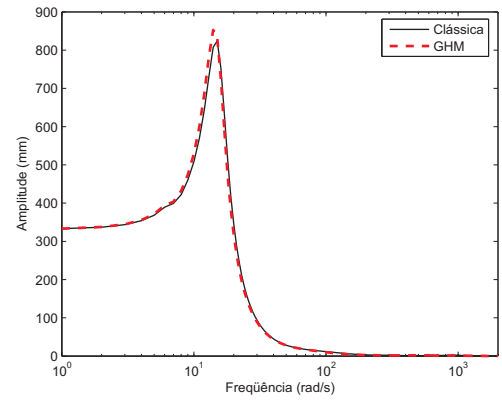
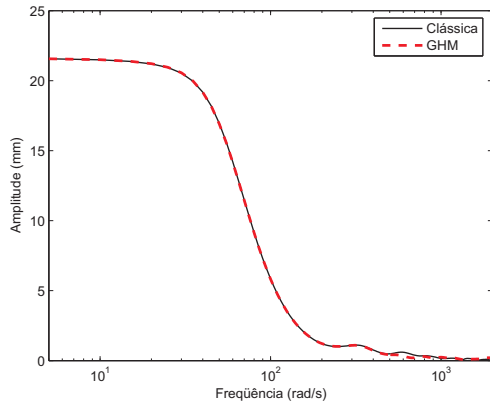
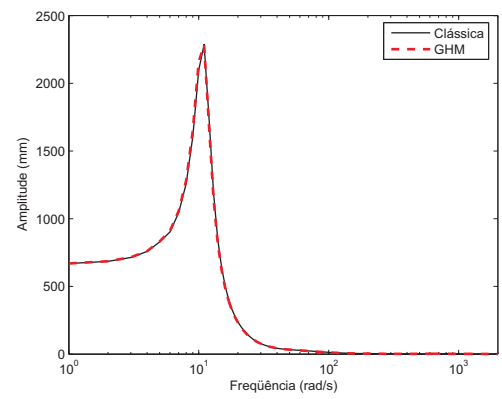
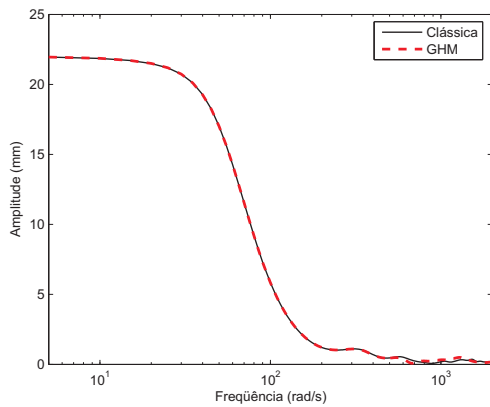
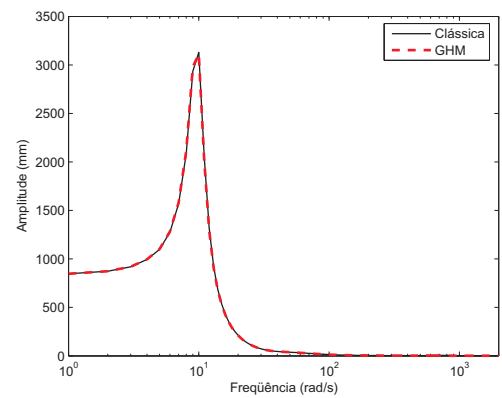
(a) Malha tipo $2 \times 1 \times 6$ - Tração(b) Malha tipo $2 \times 1 \times 6$ - Flexão(c) Malha tipo $4 \times 2 \times 12$ - Tração(d) Malha tipo $4 \times 2 \times 12$ - Flexão(e) Malha tipo $8 \times 4 \times 18$ - Tração(f) Malha tipo $8 \times 4 \times 18$ - Flexão

Figura 3.26: Análise de convergência para malhas de elementos tetraédricos lineares solicitadas à tração e flexão.

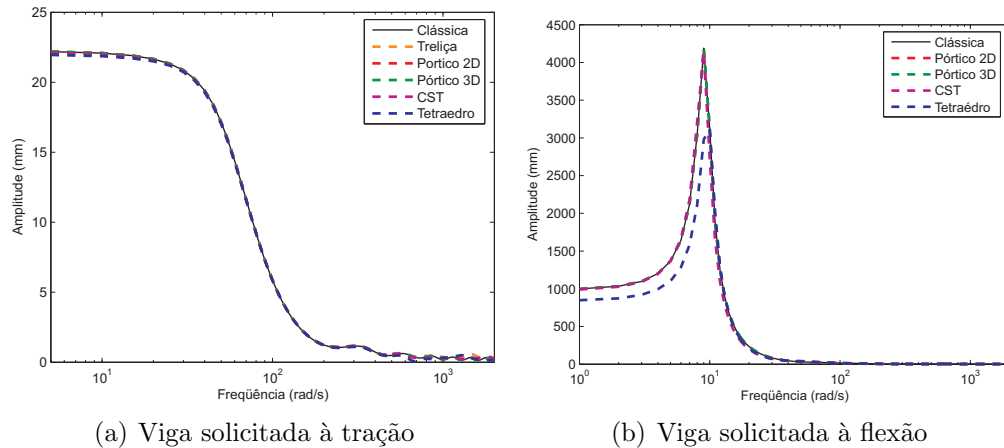


Figura 3.27: Comparação entre os resultados dos elementos estudados (gráficos log-normal).

A Figura 5.2 traz os mesmos gráficos mostrados anteriormente, agora em escala log-log. Nestes gráficos pode-se ver mais facilmente que as perturbações numéricas em altas frequências que ocorrem para todos os elementos.

Pela natureza dos problemas estudados ao se utilizar os elementos CST e T4 são necessárias malhas mais refinadas para se obter resultados no mesmo nível de precisão dos outros elementos. Esse aumento no número de elementos, conseqüentemente no número de graus de liberdade do problema, aumentando a exposição dos algoritmos utilizados na simulação numérica à propagação de erros numéricos. Destaca-se que, do ponto de vista prático, estas diferenças numéricas são praticamente desprezíveis uma vez que elas ocorrem em altas frequências e em amplitude, em geral, aproximadamente 100 vezes menor que os maiores valores de amplitudes que aparecem nos gráficos.

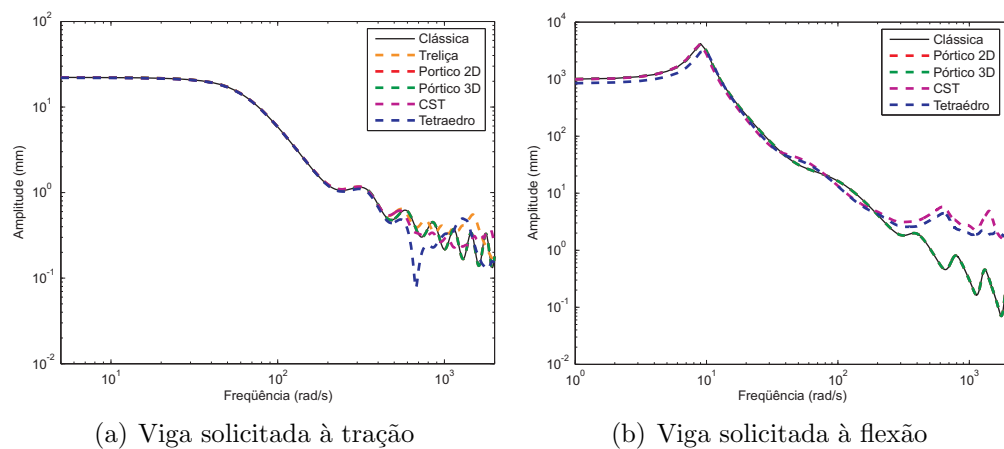


Figura 3.28: Comparação entre os resultados dos elementos estudados (gráficos log-log).

4 Implementação computacional

Para simular numericamente o comportamento de estruturas mistas (materiais elásticos e viscoelásticos) foi desenvolvido o programa de elementos finitos *dinGHM*, utilizando a linguagem MATLAB.

O programa pode ser dividido em três partes principais: pré-processamento, resolução do problema dinâmico e/ou estático e pós-processamento. O pré-processamento compreende a leitura do arquivo de dados, montagem das matrizes globais do sistema e imposição das condições de contorno. O pós-processamento permite visualizar as respostas no tempo dos graus de liberdade selecionados ou gerar um arquivo de saída com a deformada da estrutura.

Dentre as características implementadas no *dinGHM*, pode-se destacar:

- Determinação dos deslocamentos, velocidades e acelerações de problemas 1D, 2D ou 3D elástico, viscoelástico ou elástico/viscoelástico;
- Utilização de matrizes esparsas para as matrizes globais do sistema;
- Integração das equações de movimento segundo o método de Newmark;
- Realização da leitura de malhas geradas pelo programa GMSH;
- Aplicação das condições de contorno através da eliminação de linhas e colunas.

O programa *dinGHM* é acompanhado de uma biblioteca de elementos com os seguintes elementos elásticos e viscoelásticos:

- Treliça espacial;
- Pórtico plano;
- Pórtico espacial;
- Triângulo linear (CST);
- Tetraedro linear (T4).

4.1 Algoritmo do programa

Para se ter uma idéia geral do *dinGHM* a Figura 4.1 traz o pseudo-código do programa implementado. Como se pode notar a sua estrutura principal tem as características básicas de um programa de elementos finitos. Por entender que algumas rotinas são de fácil compreensão e já amplamente discutidas na literatura, serão descritas em detalhe somente aquelas de maior relevância.

```

leitura do arquivo de dados
Aloca memória para as matrizes globais
Para i = 1 até número de elementos
    Calcula as matrizes locais (matElemento)
    Determina o vetor mapeamento do elemento (montLM)
    Descarrega as matrizes locais nas globais
fim
Monta o vetor de forcas global
Aplica as condições de contorno
Monta um vetor com os graus de liberdade observados
Se solveEstatico = verdade
    Resolve o problema estático
fim
Realiza a integração no tempo (intNewmark)
Plota as respostas dos GLs observados

```

Figura 4.1: Pseudo-código do programa *dinGHM*.

4.1.1 Detalhamento das rotinas

Rotina `matElemento`

As rotinas para construção das matrizes locais dos diferentes elementos serão apresentadas aqui através da rotina genérica `matElemento`. Esta função recebe como entrada a conectividade do elemento, as características do material e da seção transversal e as coordenadas dos nós. As saídas desta rotina são as matrizes locais de rigidez e massa, para elementos elásticos, ou, além destas duas, a matriz de amortecimento para elementos viscoelásticos.

O cálculo das matrizes locais elásticas é realizada de forma direta (analítica) ou através de integração numérica, como é o caso dos elementos CST e T4. Para o caso de elementos viscoelásticos as matrizes locais são determinadas segundo o pseudo-código da Figura 4.2.

Calcula as matrizes de rigidez (\mathbf{K}_e) e de massa (\mathbf{M}_e) elásticas
 Calcula a matriz de rigidez normalizada em E ($\mathbf{K}_v = (1/E)\mathbf{K}_e$)
 Calcula os auto-vetores (Φ) e auto-valores (λ) não nulos
 Calcula $\mathbf{R}_i = \Phi_i \lambda_i^{1/2}$, onde $\mathbf{R} = [\mathbf{R}_1 \dots \mathbf{R}_N]$
 Calcula $\mathbf{K}_v^0 = \mathbf{K}_v(\alpha + E^0)$
 Calcula a matriz de rigidez viscoelástica

$$\mathbf{K}_{visco} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_v^0 & -\mathbf{R}\alpha \\ -\mathbf{R}^T\alpha & \mathbf{I}\alpha \end{bmatrix}$$

Calcula a matriz de massa viscoelástica

$$\mathbf{M}_{visco} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \frac{\alpha}{\delta} \end{bmatrix}$$

Calcula a matriz de amortecimento viscoelástica

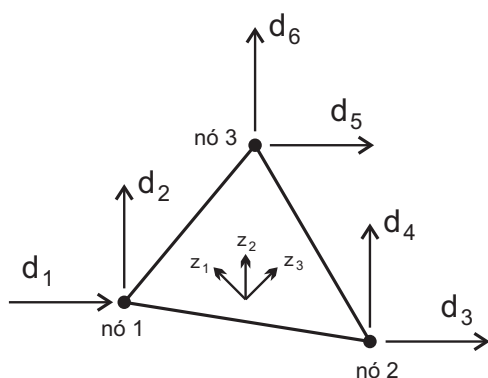
$$\mathbf{D}_{visco} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \frac{\alpha\beta}{\delta} \end{bmatrix}$$

Figura 4.2: Pseudo-código do cálculo das matrizes elementares viscoelásticas.

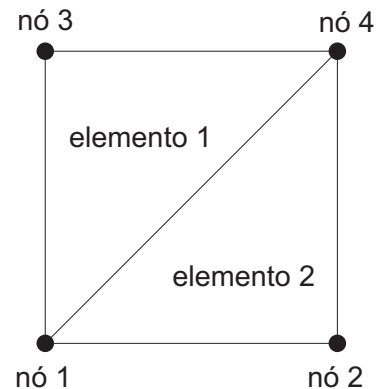
Rotina montLM

Nesta rotina é montado o vetor com o mapeamento dos graus de liberdade físicos e dissipativos de um dado elemento. Em problemas usuais de engenharia todos os graus de liberdade (GL) estão associados à um ponto nodal da malha. Isto não acontece em elementos formulados através do método GHM. Nestes elementos os GL dissipadores não estão associados a nenhum ponto nodal, mas sim ao elemento em si. Para lidar com esta particularidade, optou-se por iniciar a numeração dos GLs dissipadores após os GLs físicos.

Para ilustrar esta estratégia considere o elemento triangular linear e sua numeração de GLs locais da Figura 4.3(a) e a malha com estes elementos da Figura 4.3(b).



(a) Elemento finito com sua numeração local



(b) Malha de elementos finitos adotada para o exemplo

Figura 4.3: Elemento finito e malha adotados como exemplo.

Utilizando a estratégia descrita pode-se construir os vetores de mapeamento (\mathbf{LM})

para os dois elementos como segue:

$$\mathbf{LM}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 & 9 & 10 & 11 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{LM}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 8 & 12 & 13 & 14 \end{bmatrix},$$

onde os GLs de 9 a 14 são os GLs dissipativos.

Logo a numeração final dos GLs deste problema fica de acordo com o ilustrado na Figura 4.4.

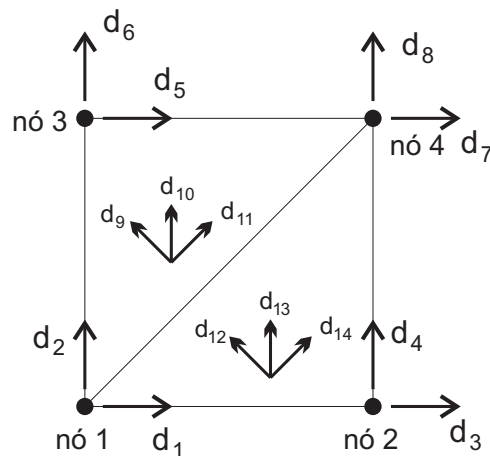


Figura 4.4: Numeração global dos graus de liberdade para a malha adotada.

Rotina intNewmark

A integração no tempo é feita nesta função utilizando o método de Newmark conforme o pseudo-código da Figura 4.5. Esta função tem como argumentos de entrada: as matrizes globais de rigidez, massa e amortecimento, o tempo total observado, o incremento de tempo e o vetor com os graus de liberdade a serem observados, sendo os deslocamentos observados argumentos de saída.

Calcula a matriz de rigidez efetiva (\mathbf{K}_{efe})
Enquanto $t \leq T_{total}$ ***faça***
 Calcula o vetor de força efetivo (\mathbf{F}_{efe})
 Calcula os deslocamentos $\mathbf{U} = \mathbf{K}_{efe}^{-1} \mathbf{F}_{efe}$
 Atualiza os vetores de velocidade e aceleração
 Armazena os deslocamentos dos graus de liberdade observados
 $t = t + \Delta t$
Fim

Figura 4.5: Pseudo-código para o método de Newmark.

Esta integração no tempo é realizada segundo o método de Newmark, conforme o algoritmo exposto por Bathe [30]. Para isso inicialmente são calculadas as constantes:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\alpha\Delta t^2}; & a_1 &= \frac{\delta}{\alpha\Delta t}; & a_2 &= \frac{1}{\alpha\Delta t}; & a_3 &= \frac{1}{2\alpha} - 1; \\ a_4 &= \frac{\delta}{\alpha} - 1; & a_5 &= \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right); & a_6 &= \Delta t(1 - \delta); & a_7 &= \delta\Delta t, \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde $\alpha = 0,25$ e $\delta = 0,50$. Estes dois valores foram adotados por permitirem ao esquema de integração ser incondicionalmente estável.

De posse destes valores pode-se calcular a matriz de rigidez efetiva, como segue:

$$\mathbf{K}_{efe} = \mathbf{K} + a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C}, \quad (4.2)$$

onde \mathbf{K} , \mathbf{M} e \mathbf{C} são as matrizes globais de rigidez, massa e amortecimento, respectivamente. Para cada passo de tempo o vetor de força efetivo, \mathbf{F}_{efe} , é atualizado da seguinte forma:

$$\mathbf{F}_{efe}^t = \mathbf{F}_{efe}^{t-\Delta t} + \mathbf{M}(a_0\mathbf{U}^{t-\Delta t} + a_2\dot{\mathbf{U}}^{t-\Delta t} + a_3\ddot{\mathbf{U}}^{t-\Delta t}) + \mathbf{C}(a_1\mathbf{U}^{t-\Delta t} + a_4\dot{\mathbf{U}}^{t-\Delta t} + a_5\ddot{\mathbf{U}}^{t-\Delta t}), \quad (4.3)$$

onde \mathbf{U}^t , $\dot{\mathbf{U}}^t$ e $\ddot{\mathbf{U}}^t$ são os vetores de deslocamentos, velocidades e acelerações no instante de tempo t .

De posse de \mathbf{F}_{efe}^t e \mathbf{K}_{efe} calcula-se o vetor de deslocamentos \mathbf{U}^t . Então pode-se atualizar os vetores de velocidade e aceleração segundo as equações abaixo:

$$\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = a_0(\mathbf{U}^t - \mathbf{U}^{t-\Delta t}) - a_2\dot{\mathbf{U}}^t - a_3\ddot{\mathbf{U}}^t, \quad (4.4)$$

$$\dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \mathbf{U}^t + a_6\ddot{\mathbf{U}}^t + a_7\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t}. \quad (4.5)$$

5 Exemplos de aplicações

Com o objetivo de realizar uma melhor avaliação do modelo GHM serão comparados resultados experimentais com aqueles obtidos através de simulação numérica. Para isso serão utilizados os resultados experimentais obtidos por Borges para vigas sanduíches de seção reta retangular [18] e de seção anular [31].

5.1 Vigas sanduíche

5.1.1 Ensaios Experimentais

Na referência [18] é feita a caracterização de um material viscoelástico (fita auto-adesiva dupla face VHB 4955 fabricado pela 3M) e uma série de ensaios com vigas sanduíches com múltiplas camadas.

Os ensaios foram feitos com vigas engastadas-livres de alumínio com 1140 mm de comprimento, sendo a viga base com 16,1 mm de espessura e as camadas viscoelástica e de restrição com 2,0 e 3,17 mm de espessura respectivamente. A Figura 5.1 mostra como foram instrumentadas as vigas. Para isso foram utilizados sensores do tipo LVDT, produzidos pela empresa Balluff, que são capazes de medir deslocamentos sem entrar em contato com a estrutura.

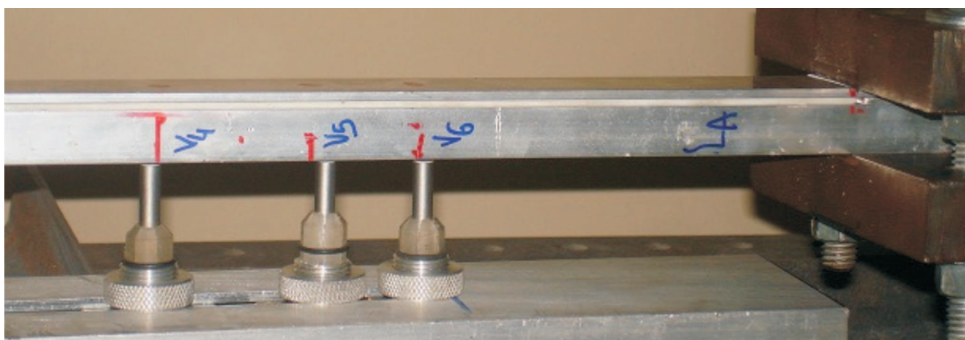


Figura 5.1: Viga sanduíche preparada para ser ensaiada. *Extraído de [18].*

Foram ensaiadas três configurações de viga sanduíche, a saber: VS1, VS1c e VS2. A viga VS1, Figura 5.2(a), conta com uma camada de material viscoelástico e uma camada de restrição, sendo esta última também é engastada. A viga VS1c, Figura 5.2(b), difere da VS1 por não ter a camada de restrição engastada. Já a viga VS2, Figura 5.2(c), conta

com camadas de material viscoelástico e de restrição nas faces superior e inferior, sendo todas as camadas engastadas.

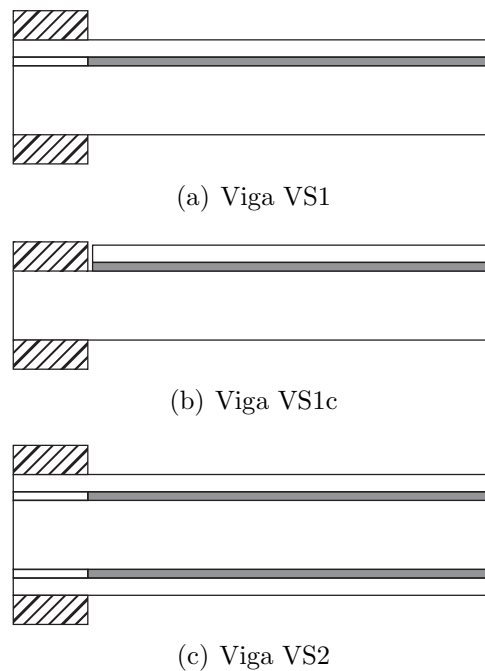


Figura 5.2: Configurações de vigas sanduíche ensaiadas. *Extraído de [18].*

Foram ensaiadas duas vigas puramente elásticas A e B e cada configuração de viga sanduíche foi montada sobre essas duas vigas elásticas, perfazendo um total de dois corpos-de-prova para cada configuração, exceto para a configuração VS2 onde somente sobre a viga B foi montada a estrutura sanduíche. As frequências naturais e respectivas taxas de amortecimento identificadas para as vigas A e B, a princípio idênticas, encontram-se na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Resultados experimentais para as vigas A e B. *Extraído de [18].*

Modo	Viga A		Viga B	
	Frequência Natural (Hz)	Taxa de Amortecimento (%)	Frequência Natural (Hz)	Taxa de Amortecimento (%)
1	$10,25 \pm 0,00$	$0,05 \pm 0,00$	$10,24 \pm 0,00$	$0,05 \pm 0,00$
2	$63,38 \pm 0,00$	$0,03 \pm 0,00$	$63,70 \pm 0,00$	$0,04 \pm 0,00$
3	$179,00 \pm 0,00$	$0,06 \pm 0,00$	$179,26 \pm 0,00$	$0,05 \pm 0,00$

Os valores obtidos para as frequências naturais e taxas de amortecimento dos três primeiros modos de vibração identificados para as três configurações de viga sanduíche encontram-se na Tabela 5.2.

Observa-se nas Tabelas 5.1 e 5.2 que, mesmo para as vigas elásticas A e B que serviram

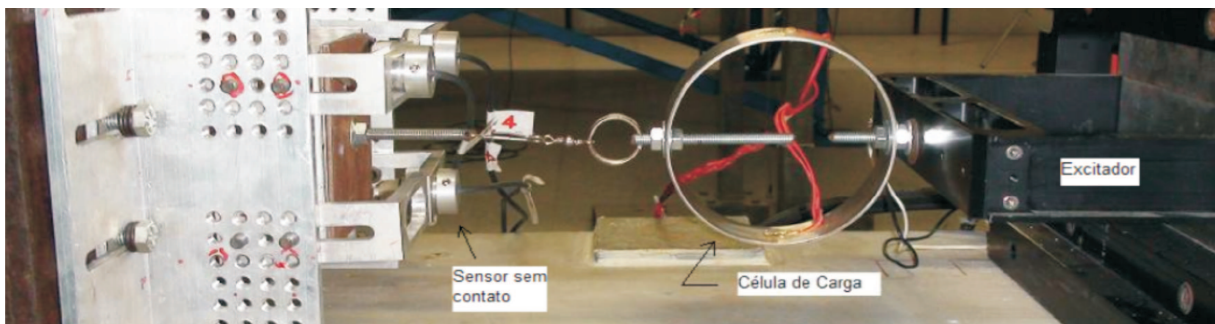
Tabela 5.2: Resultados experimentais para as vigas sanduíche. *Extraído de [18].*

Viga	Modo	Viga A		Viga B	
		Frequência Natural	Taxa de Amortecimento	Frequência Natural	Taxa de Amortecimento
		(Hz)	(%)	(Hz)	(%)
VS1	1	11,31±0,02	4,98±0,11	11,03±0,02	4,44±0,01
	2	63,37±0,17	4,90±0,19	61,76±0,14	4,32±0,05
	3	175,13±0,12	4,39±0,01	168,08±0,23	3,28±0,06
VS1c	1	9,82±0,00	2,74±0,01	8,41±0,01	2,23±0,02
	2	63,70±0,04	4,80±0,10	55,09±0,06	3,48±0,06
	3	174,05±0,35	4,49±0,04	145,48±0,16	3,86±0,07
VS2	1	-	-	12,34±0,05	7,92±0,11
	2	-	-	64,79±0,37	8,65±0,20
	3	-	-	173,29±0,90	6,17±0,49

de base para se montar as vigas sanduíches e que são a princípio idênticas, existem diferenças em termos de frequências naturais e taxas de amortecimento. Diferenças superiores a 30% são detectadas para taxas de amortecimento identificadas nas vigas sanduíche A e B.

5.1.2 Caracterização do material viscoelástico

A caracterização do material viscoelástico foi realizada segundo o Método Direto [17] utilizando o aparato visto na Figura 5.3 para realizar este ensaio.

Figura 5.3: Vista do aparato para ensaio pelo Método Direto. *Extraído de [18].*

Durante a execução do ensaio, as frequências de excitação utilizadas pertenciam a faixa de 0 a 800,50 Hz, obtendo-se os valores para o módulo de cisalhamento e o fator de perda da Tabela 5.3.

De posse destes dados pôde-se determinar os parâmetros E^0 , α , β e δ do modelo GHM utilizando, para isso, o algoritmo de mínimos quadrados não-linear descrito por Coleman [28, 29]. Estes valores ajustados encontram-se na Tabela 5.4. A Figura 5.4 mostra os

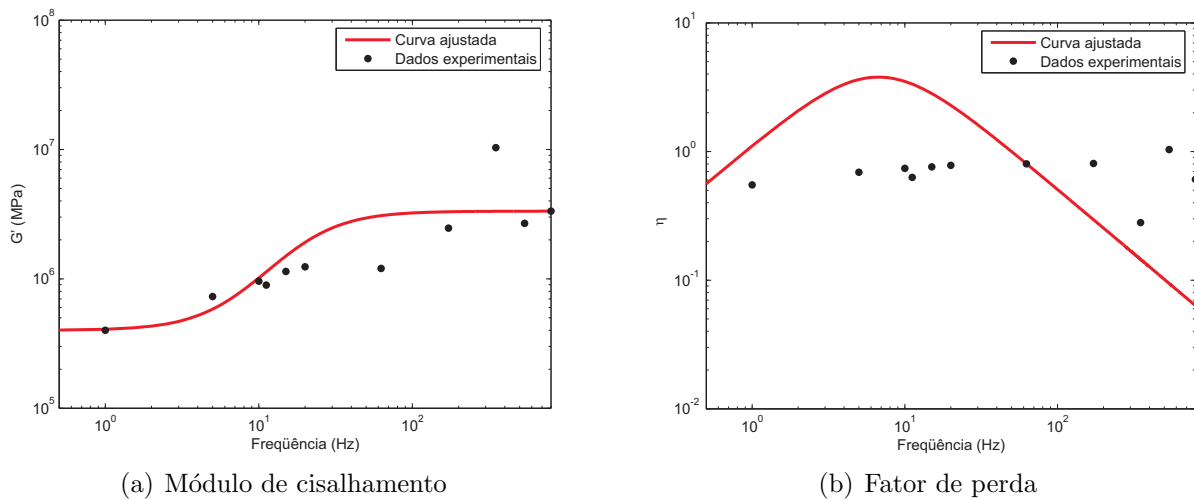
Tabela 5.3: Propriedades do MVE obtidos do ensaio de caracterização. *Extraído de [18].*

Frequência (Hz)	Módulo de Cisalhamento (MPa)	Fator de perda (-)
1,00	0,42	0,56
5,00	0,76	0,59
10,00	1,00	0,72
11,17	0,89	0,63
15,00	1,19	0,70
20,00	1,33	0,73
62,58	1,20	0,80
171,88	2,47	0,81
349,90	10,33	0,28
538,38	2,69	1,04
800,50	3,33	0,61

gráficos comparando os valores experimentais e as curvas ajustadas para G' e η .

Tabela 5.4: Constantes do modelo GHM ajustadas para o material VHB 4955.

Constante	Valor
E^0	3,0 MPa
α	7,7 MPa
β	120000 s^{-1}
δ	1,46.10 ⁷ s^{-2}

Figura 5.4: Curvas $G'(\omega)$ e $\eta(\omega)$ ajustadas para o material VHB 4955.

Outras constantes mecânicas necessárias para a modelagem dos materiais constituintes das vigas são apresentados na Tabela 5.5.

Tabela 5.5: Propriedades adotadas para o Alumínio e o material VHB 4955.

Alumínio			MVE	
ρ	ν	E	ρ	ν
2690 kg/m^3	0,33	68,7 GPa	795 kg/m^3	0,49

5.1.3 Simulações numéricas

Nesta seção serão apresentados e discutidos três modelos para simular numericamente as vigas sanduíches. O primeiro modelo a ser apresentado (Modelo M1) representa tanto a parte elástica quanto a parte viscoelástica através de elementos de estado plano de tensão (triangulares lineares), o segundo (Modelo M2) representa as camadas elásticas utilizando elementos de pórtico plano e o material viscoelástico com elementos de estado plano de tensão e o Modelo M3 que utiliza elementos tetraédricos lineares, para ambos os materiais.

5.1.3.1 Modelo M1

Como descrito anteriormente, este modelo representa toda a viga através de elementos triangulares lineares. A Figura 5.5 mostra um trecho da malha utilizada neste modelo. O domínio da viga foi dividido em intervalos regulares sendo 1140 divisões no comprimento e a altura de cada camada foi dividida em 16, 2 e 3 partes, para as camadas da viga base, de amortecimento e de restrição, respectivamente.

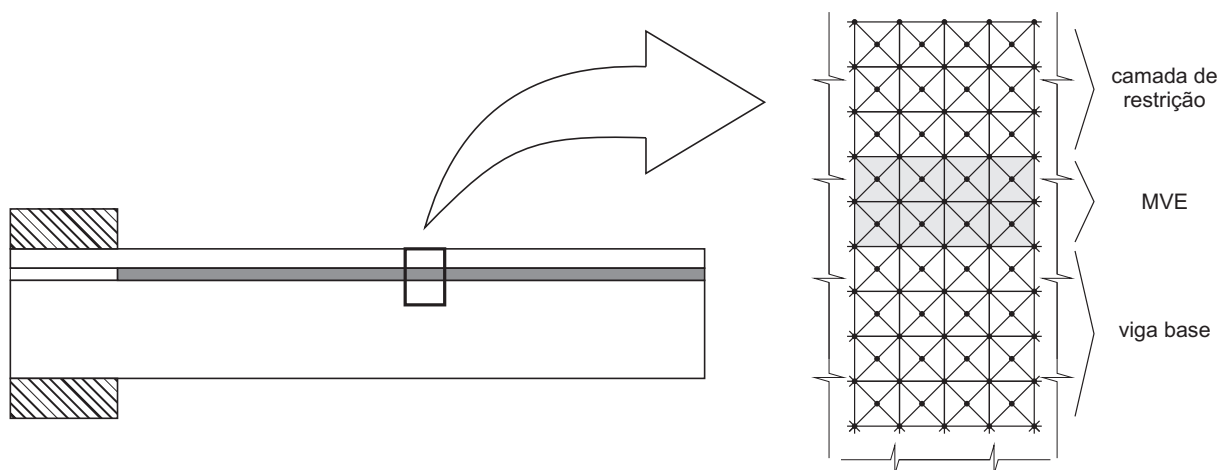


Figura 5.5: Trecho da malha de elementos triangulares utilizada para modelar as vigas sanduíche.

Para reproduzir os ensaios realizados por Borges [18], foi aplicado na viga um golpe a 15 cm do engaste e observou-se neste mesmo ponto os deslocamentos verticais, como na Figura 5.6.

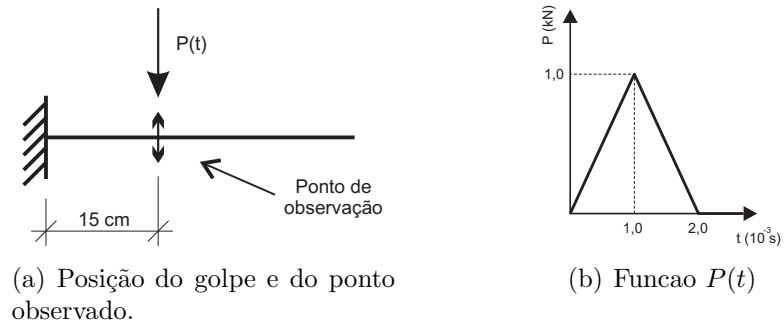


Figura 5.6: Modelo dos ensaios realizados nas vigas.

Isto feito, foi possível construir o gráfico da Figura 5.7, que mostra os deslocamentos verticais em função do tempo para o ponto observado.

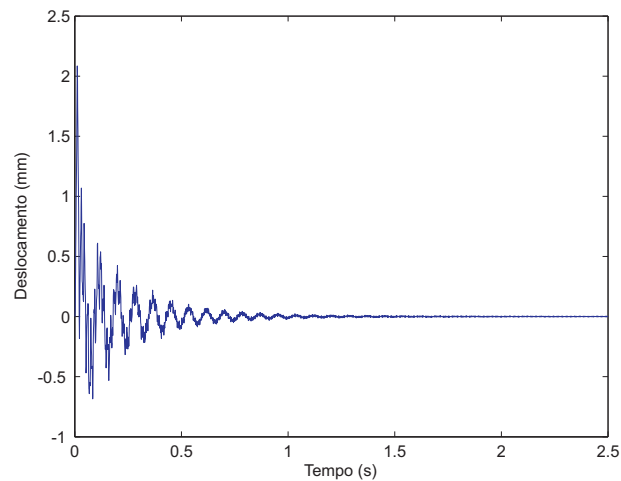


Figura 5.7: Resposta no do tempo dos deslocamentos observados na viga VS1.

Aplicando-se a transformada rápida de Fourier (FFT) ao sinal da figura 5.7 pode-se construir o gráfico da Figura 5.8.

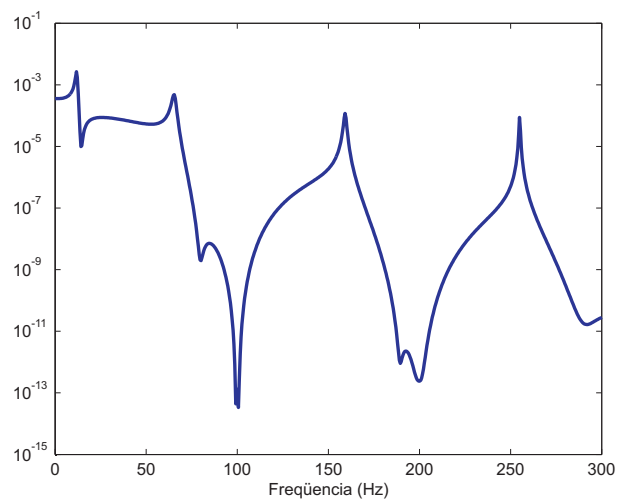


Figura 5.8: Gráfico de densidade espectral para o sinal da viga VS1.

Neste gráfico pode-se observar as amplitudes em função da frequência de excitação. Sabendo que os picos das amplitudes ocorrem nas frequências naturais da estrutura. Assim sendo, pode-se filtrar o sinal no domínio do tempo da Figura 5.7 em torno de cada uma das três primeiras frequências naturais identificadas, resultando nos gráficos da Figura 5.9. As taxas de amortecimento podem ser calculadas segundo a fórmula do decaimento exponencial:

$$\xi = \frac{1}{2\pi n} \ln\left(\frac{\delta_i}{\delta_{i+n}}\right), \quad (5.1)$$

onde δ_i é o deslocamento no pico i e n é a quantidade de picos entre δ_i e δ_{i+n} .

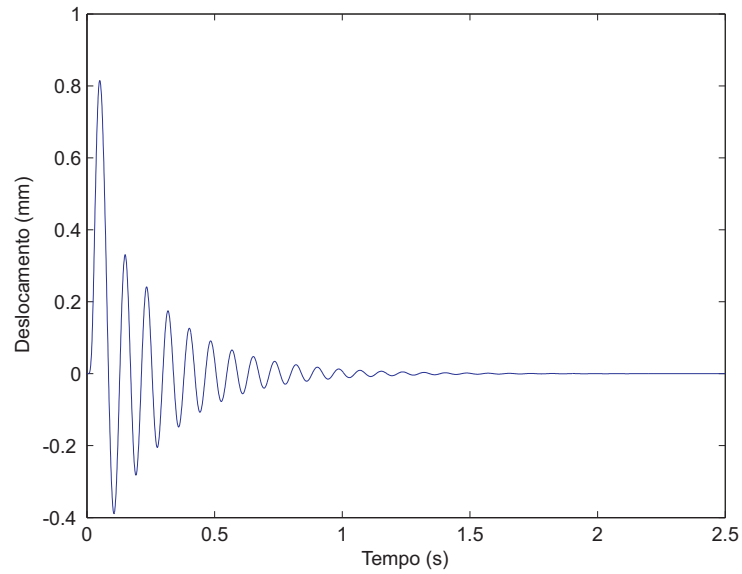
Fazendo este procedimento para as três primeiras frequências naturais, em todas as três configurações de vigas chega-se aos valores da Tabela 5.6, que resume a identificação modal obtida.

Tabela 5.6: Resultados numéricos para a simulação das vigas sanduíches com o Modelo M1.

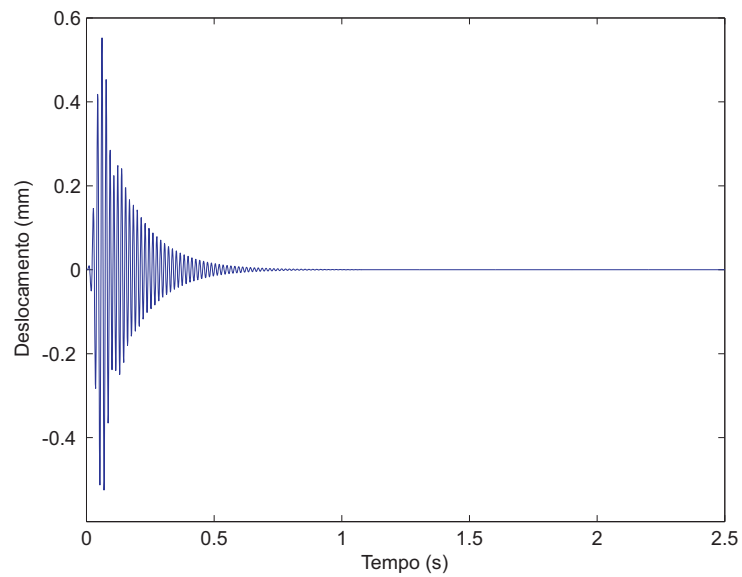
Viga	Modo	Frequência Natural (Hz)	Taxa de Amortecimento (%)
VS1	1	11,72	5,17
	2	65,43	1,75
	3	159,2	0,57
VS1c	1	9,77	4,58
	2	64,94	1,49
	3	158,70	2,03
VS2	1	13,18	8,62
	2	67,38	3,24
	3	157,70	0,94

Para realizar uma melhor avaliação dos resultados numéricos, pode-se traçar os gráficos da Figura 5.10, que mostram as frequências naturais e as taxas de amortecimento em função do modo de vibração para cada uma das configurações de viga sanduíche modeladas numericamente, comparadas com os seus respectivos resultados experimentais.

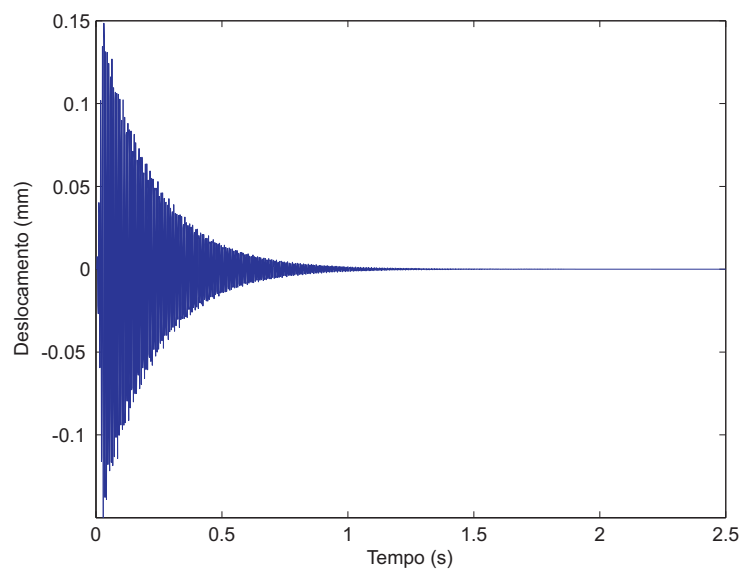
Como se pode observar, as frequências naturais apresentam boa correlação com os dados experimentais. Contudo as taxas de amortecimento no segundo e terceiro modos ficam subestimadas e no primeiro modo ligeiramente sobreestimadas. Uma explicação para esse comportamento está na imprecisão do ajuste realizado para os parâmetros do MVE. Retornando à Figura 5.4, pode-se notar que a curva ajustada para o fator de perda está sobreestimada nas frequências do intervalo $[0, 60]$ Hz e subestimada para frequências



(a) Sinal da viga VS1 filtrado em torno de 11,72 Hz.

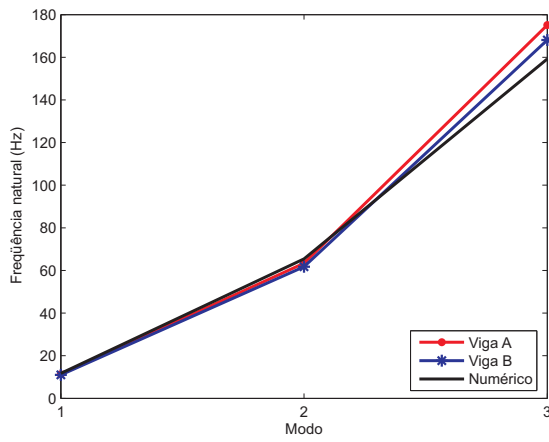


(b) Sinal da viga VS1 filtrado em torno de 65,43 Hz

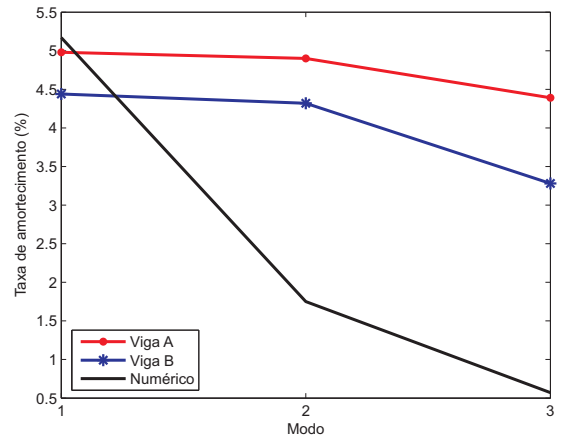


(c) Sinal da viga VS1 filtrado em torno de 159,20 Hz

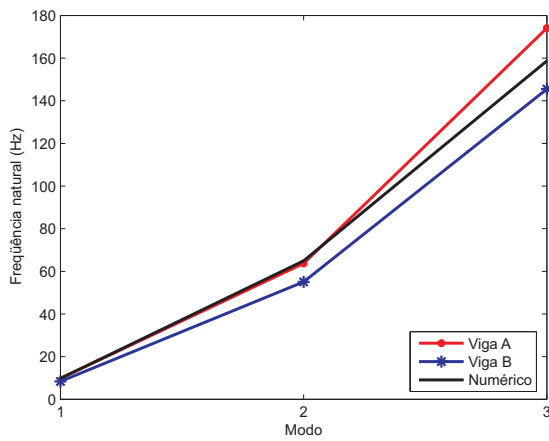
Figura 5.9: Sinais da viga VS1 filtrados em torno de 11,72, 65,43 e 159,20 Hz.



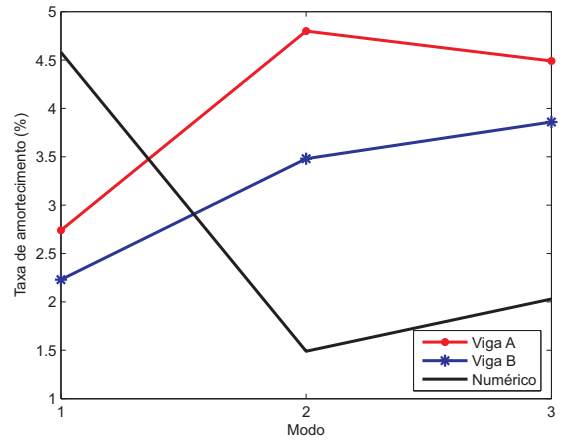
(a) Frequências naturais da viga VS1



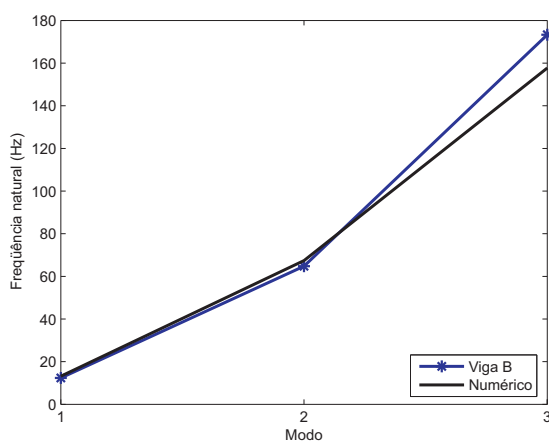
(b) Taxas de amortecimento da viga VS1



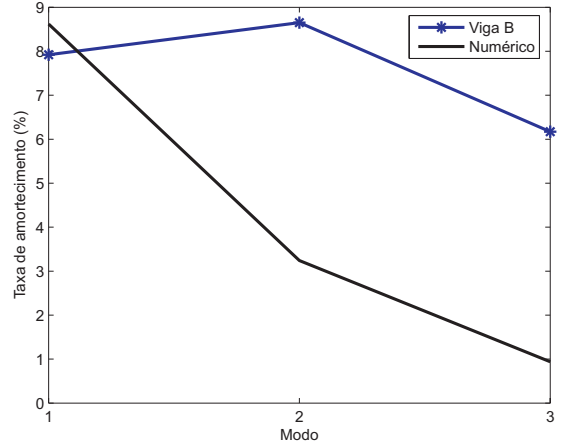
(c) Frequências naturais da viga VS1c



(d) Taxas de amortecimento da viga VS1c



(e) Frequências naturais da viga VS2



(f) Taxas de amortecimento da viga VS2

Figura 5.10: Comparação entre as respostas numéricas do Modelo M1 com as experimentais para as vigas estudadas.

superiores a 60 Hz. Já a curva para o módulo de armazenamento ($G'(\omega)$) apresenta um bom ajuste em todo o intervalo considerado. Desta forma, como as frequências naturais são mais fortemente influenciadas pela rigidez que pelo amortecimento, tem-se neste caso resultados numéricos bastante próximos dos experimentais. Já para as taxas de amortecimento, que são diretamente associadas ao fator de perda, observa-se um comportamento do modelo numérico menos preciso, seguindo a mesma tendência da caracterização de η na Figura 5.4, ou seja, sobreestimando o amortecimento para baixas frequências e subestimando o mesmo para frequências mais altas.

5.1.3.2 Modelo M2

O Modelo M2 modela a parte elástica da viga através de elementos de barra e a parte viscoelástica com elementos triangulares lineares. A Figura 5.11 mostra um trecho da malha utilizada neste modelo. O domínio da viga foi dividido em intervalos regulares sendo 1140 divisões no comprimento e na altura da cada camada de amortecimento 2 divisões.

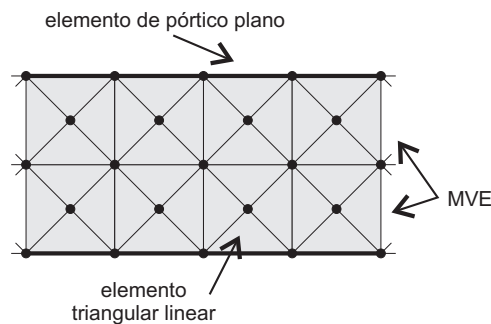


Figura 5.11: Trecho da malha de elementos finitos do Modelo M2.

Utilizando a mesma metodologia apresentada anteriormente para o modelo M1 para determinação de frequências naturais e taxas de amortecimento, pode-se determinar os valores das Tabelas 5.7 e 5.8. Analisando estas Tabelas percebe-se facilmente que tanto as frequências naturais quanto as taxas de amortecimento possuem erro elevado, o que leva a conclusão de que este tipo de modelo é inadequado para modelar este tipo de problema.

Os erros obtidos com este modelo são elevados e chegam a 95,0% para as frequências naturais e 96,6% para as taxas de amortecimento. Isso se deve ao fato das excentricidades da viga base e da camada de restrição serem desconsideradas, como ilustra a Figura 5.12. Como as frequências naturais são diretamente proporcionais a rigidez da estrutura,

Tabela 5.7: Resultados numéricos para a simulação das vigas sanduiche com o Modelo M2.

Viga	Modo	Frequência Natural (Hz)	Taxa de Amortecimento (%)
VS1	1	9,28	0,17
	2	57,13	0,07
	3	148,9	0,04
VS1c	1	0,49	3,15
	2	40,04	1,09
	3	123,50	0,33
VS2	1	1,47	5,45
	2	37,60	0,38
	3	115,20	0,11

Tabela 5.8: Erros relativos dos resultados numéricos para a simulação das vigas sanduiches com o Modelo M2.

Viga	Modo	Viga A		Viga B	
		Frequência Natural (%)	Taxa de Amortecimento (%)	Frequência Natural (%)	Taxa de Amortecimento (%)
VS1	1	17,9	96,6	15,9	96,2
	2	9,8	98,6	7,5	98,4
	3	15,0	99,1	11,4	98,8
VS1c	1	95,0	99,6	94,2	99,6
	2	37,0	97,7	27,7	96,8
	3	28,9	92,9	92,9	91,7
VS2	1	-	-	88,1	31,2
	2	-	-	42,0	95,6
	3	-	-	33,5	98,2

ao modelar as vigas desconsiderando as excentricidades das camadas elásticas, as três camadas da viga sanduíche se sobrepõem parcialmente reduzindo a rigidez da estrutura composta e reduzindo as frequências naturais da mesma. O amortecimento conferido a estrutura pelo MVE é proporcional ao nível de tensões impostas a este material e, ao ignorar as excentricidades da viga base e da camada restrição, durante os ciclos de flexão tem-se deformações menores que os realmente ocorrem no MVE, levando a menores taxas de amortecimento. Conclui-se que esse modelo (M2) não é adequado para simular o comportamento dinâmico da viga sanduíche.

5.1.3.3 Modelo M3

O Modelo M3 representa toda a estrutura através de elementos tetraédricos lineares. A Figura 5.13 mostra um trecho da malha utilizada neste modelo. O domínio da viga foi

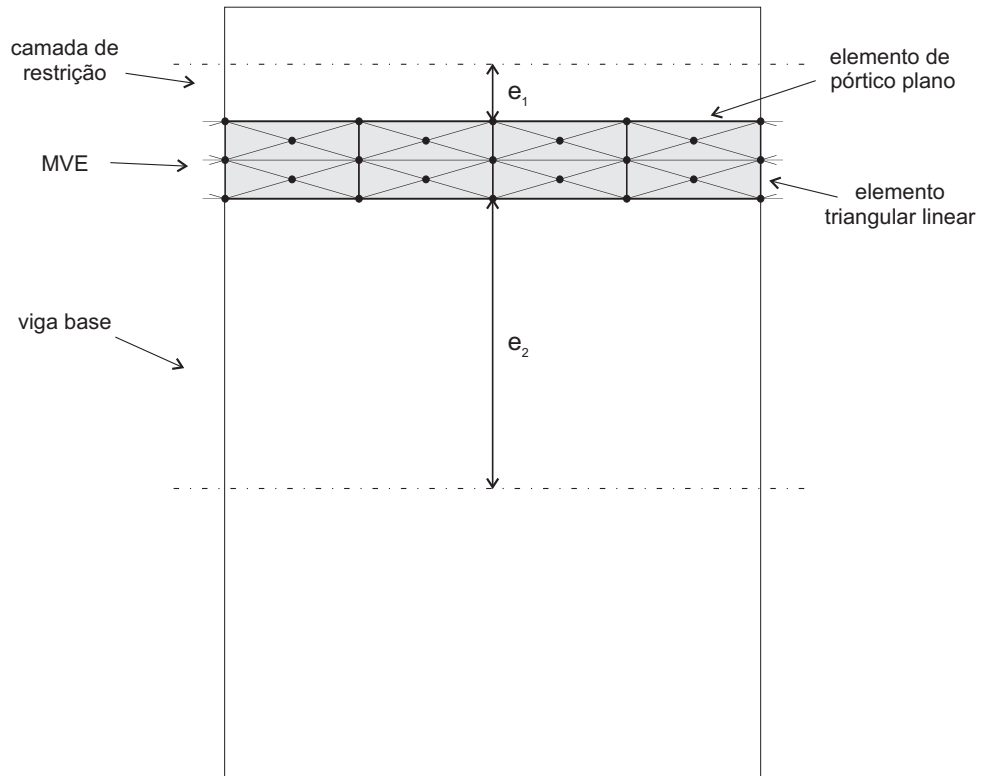


Figura 5.12: Excentricidades desconsideradas no Modelo M2.

dividido em intervalos regulares sendo 283 divisões no comprimento; 6, 1 e 1 divisões nas alturas das camadas e 6 divisões na largura.

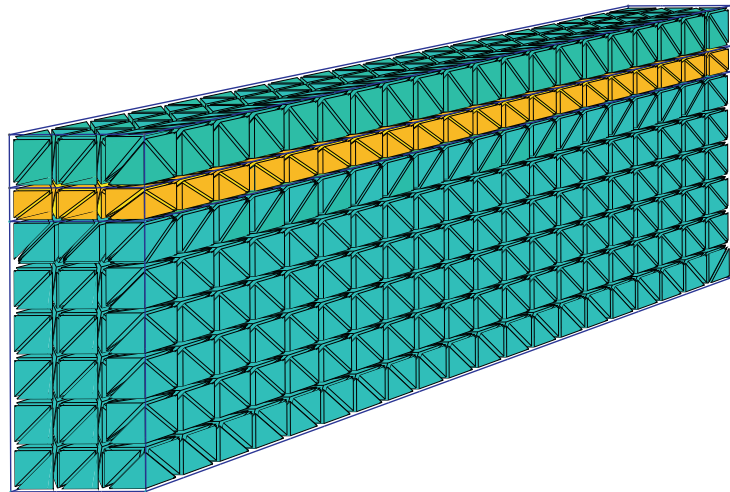


Figura 5.13: Trecho da malha de elementos finitos do Modelo M3.

Utilizando a mesma metodologia apresentada anteriormente para o cálculo das frequências naturais e respectivas taxas de amortecimento, pode-se determinar os valores da Tabela 5.9.

Traçando-se os gráficos da Figura 5.14, onde os resultados numéricos são comparados

Tabela 5.9: Resultados numéricos para a simulação das vigas sanduiche com o Modelo M3.

Viga	Modo	Frequência Natural (Hz)	Taxa de Amortecimento (%)
VS1	1	11,72	4,76
	2	66,89	1,63
	3	164,10	0,48
VS1c	1	10,25	3,15
	2	66,41	1,09
	3	163,10	0,33
VS2	1	13,18	5,80
	2	69,34	1,69
	3	162,60	0,64

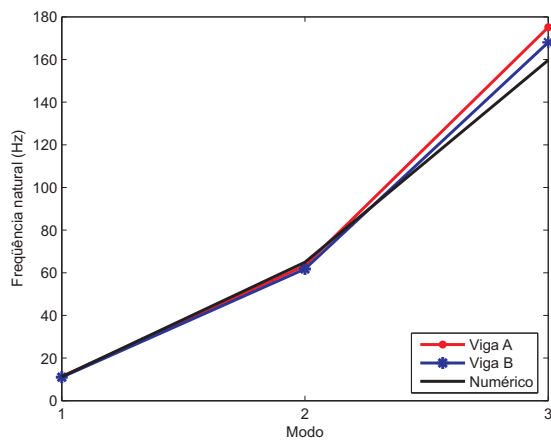
com os respectivos resultados experimentais, pode-se observar que, assim como no caso do Modelo M1, as frequências naturais apresentam boa correlação com os dados experimentais e as taxas de amortecimento no segundo e terceiro modo ficam subestimadas enquanto no primeiro modo ficam ligeiramente sobreestimadas. Esse comportamento igualmente observado no modelo M1, também pode ser explicado pelo ajuste dos parâmetros do MVE.

5.1.3.4 Comparação entre resultados dos modelos e os experimentais

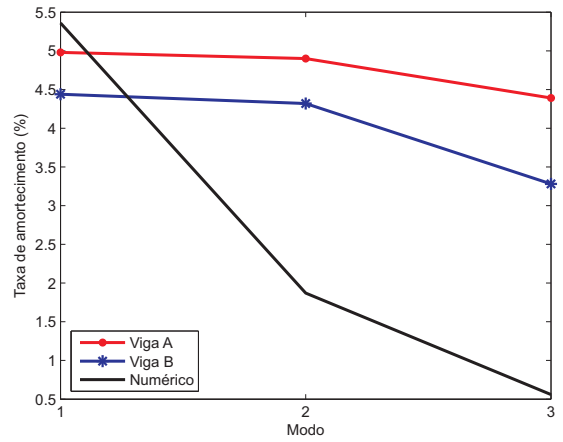
Como pôde ser visto, com exceção do Modelo M2, os modelos foram capazes de capturar com boa eficácia as frequências naturais das vigas modeladas. Apesar dos modelos capturarem as frequências naturais de forma satisfatória, as taxas de amortecimento encontradas através das simulações numéricas não apresentam tão bom desempenho. Como já explicado, isso se deve principalmente ao fato do ajuste da função do fator de perda não ter a mesma qualidade do ajuste da função do módulo de cisalhamento.

Entretanto observa-se que para o primeiro modo de vibração houve diferenças de resultados para o amortecimento identificado que são de magnitudes aproximadamente iguais das diferenças encontradas entre os corpos-de-prova ensaiados. Além disso, como em diversos casos práticos em engenharia, o comportamento dinâmico de uma estrutura está em grande parte associado ao 1º modo de vibração, pode-se dizer que, nestes casos, os modelos M1 e M3 apresentaram resultados satisfatórios tanto nas frequências naturais identificadas quanto nas taxas de amortecimento.

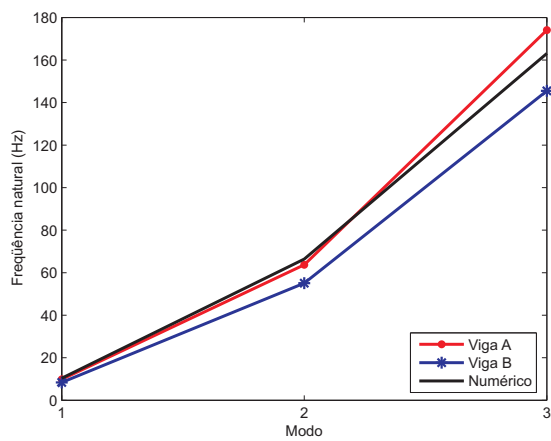
Obviamente o uso de elementos tridimensionais na modelagem de um problema plano como o aqui apresentado representa um aumento do esforço computacional, sem a me-



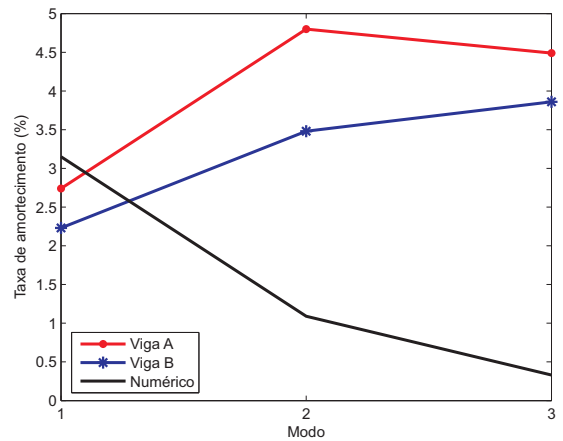
(a) Frequências naturais da viga VS1



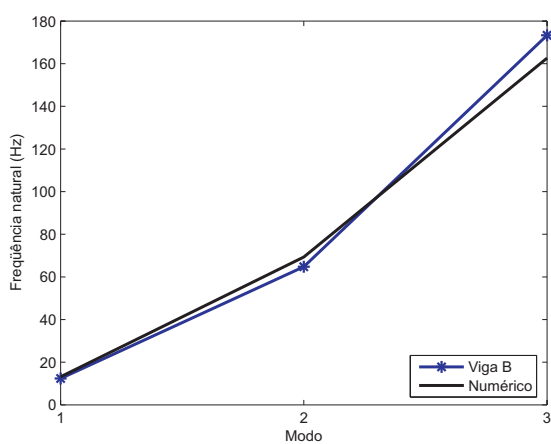
(b) Taxas de amortecimento da viga VS1



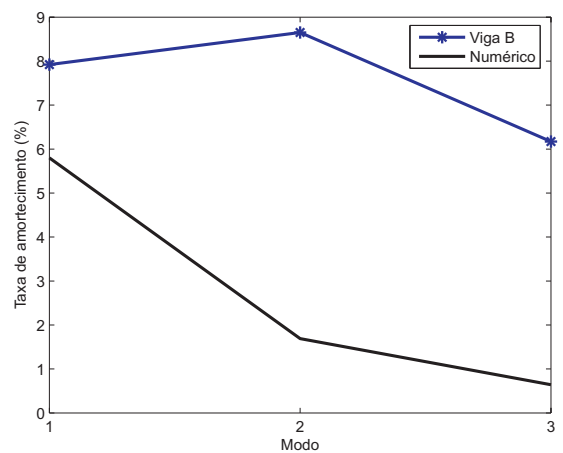
(c) Frequências naturais da viga VS1c



(d) Taxas de amortecimento da viga VS1c



(e) Frequências naturais da viga VS2



(f) Taxas de amortecimento da viga VS2

Figura 5.14: Comparação entre as respostas numéricas do Modelo M3 com as experimentais para as vigas estudadas.

lhoraria dos resultados uma vez que os resultados para os elementos tetraédricos foram praticamente iguais aos obtidos para os elementos CST. Entretanto, o objetivo aqui foi o de validar o modelo tridimensional comparando os resultados por ele obtidos com aqueles extraídos de programas experimentais disponíveis e a modelos computacionais mais simples (elementos CST) que, a princípio, deveriam fornecer resultados semelhantes, conforme foi verificado.

5.2 Vigas sanduíche de seção reta anular

5.2.1 Ensaios experimentais

Borges [31] executou um programa experimental vigas sanduíche de seção reta anular que contemplou a caracterização do material viscoelástico e ensaios no modelo de riser em duas configurações de tratamento amortecedor. A viga consiste em uma barra com seção transversal anular, funcionando como estrutura base e as configurações de amortecimento utilizadas foram: uma com tratamento amortecedor nos setores 1 e 2 e outra com o tratamento nos quatro setores, conforme as indicações da Figura 5.15 e as dimensões mostradas na Tabela 5.10.

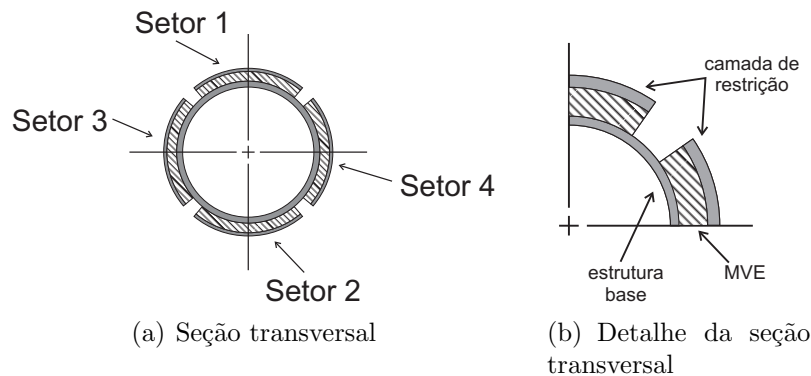


Figura 5.15: Seção transversal da estrutura tubular. *Adaptado de [31].*

Tabela 5.10: Dimensões das camadas da estrutura tubular. *Extraído de [31].*

Camada	Comprimento (mm)	Raio externo (mm)	Espessura (mm)
Base		9,46	1,06
Amortecedora	1613	11,86	2,4
Restrição		12,63	0,80

Esta estrutura foi construída utilizando tubos de latão para compor a estrutura base

e as camadas de restrição. Nas camadas dissipativas foi utilizado a fita auto-adesiva dupla face VHB 4970, fabricada pela 3M. As propriedades mecânicas destes dois materiais encontram-se na Tabela 5.11 através da técnica *Short Time Fourier Transform* [?].

Tabela 5.11: Propriedades mecânicas dos materiais constituintes da estrutura tubular.

Constante	Latão	VHB 4970
$\rho(kg/m^3)$	8794	795
E (GPa)	137	-
ν	0,33	0,49

Para a realização dos ensaios a estrutura foi engastada em uma de suas extremidades, deixando a outra livre e instrumentando-a a 200 mm do engaste através de sensores do tipo LVDT que medem os deslocamentos sem entrar em contato com a estrutura, como pode ser visto na Figura 5.16.



Figura 5.16: Estrutura tubular preparada para o ensaio. *Extraído de* [31].

Os ensaios consistiram em golpear a estrutura a 200mm do engaste na direção das faces 1-2 e observar os deslocamentos nesta mesma direção. Destes ensaios foram obtidos os dados das tabelas 5.12 e 5.13.

Tabela 5.12: Parâmetros modais da estrutura tubular com tratamento amortecedor nos setores 1 e 2. *Extraído de* [31].

Modo de vibração	Frequência Natural	Taxa de amortecimento
	(Hz)	(%)
1	4,85	5,59
2	30,79	7,21
3	82,30	5,82

Tabela 5.13: Parâmetros modais da estrutura tubular com tratamento amortecedor nos setores 1 a 4. *Extraído de [31]*.

Modo de vibração	Frequência Natural (Hz)	Taxa de amortecimento (%)
1	4,26	4,96
2	29,11	6,33
3	*	*

*: Valores não identificados.

5.2.2 Caracterização do material viscoelástico

A caracterização do material viscoelástico foi realizada através do Método Direto, variando as frequências de excitação de 0 a 25 Hz. Com os resultados obtidos nesse ensaio foi possível ajustar as curvas do módulo de cisalhamento e do fator de perda para os dados experimentais conforme a Figura 5.17.

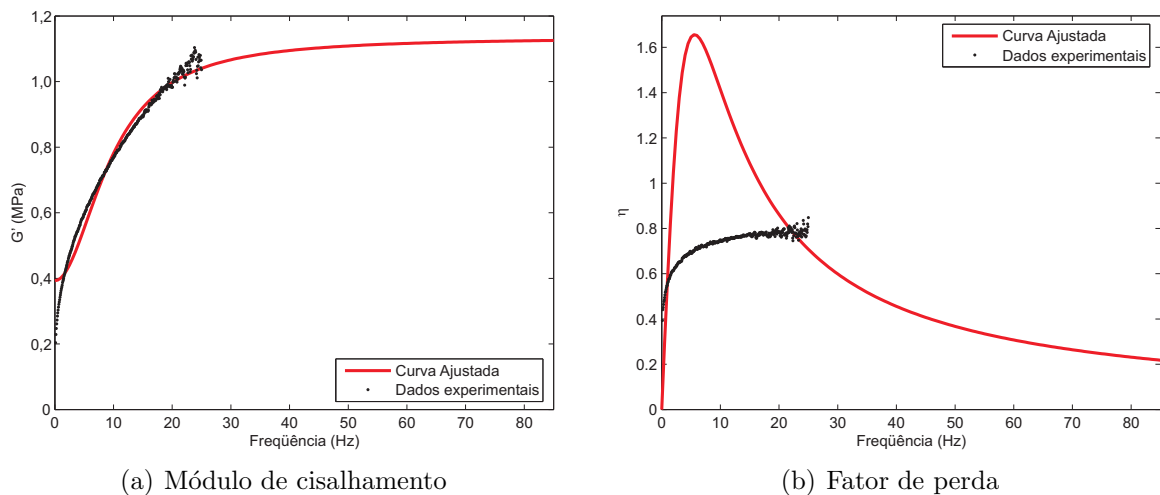


Figura 5.17: Curvas $G'(\omega)$ e $\eta(\omega)$ ajustadas para o material VHB 4970.

Estas curvas foram ajustadas segundo o algoritmo de mínimos quadrados não-linear [28, 29], onde obteve-se os parâmetros do modelo GHM da Tabela 5.14. Analisando a figura 5.17 pode-se perceber que a curva ajustada tende a subestimar o fator de perda para altas frequências e sobreestimá-lo em frequências mais baixas, já o ajuste da curva do módulo de armazenamento mostra-se mais compatível com os dados experimentais.

Tabela 5.14: Constantes do modelo GHM ajustadas para o material VHB 4970.

Constante	Valor
E^0	1,17 MPa
α	2,21 MPa
β	143000 s^{-1}
δ	8,57.10 ⁶ s^{-2}

Além destes parâmetros, para modelar o comportamento deste material é necessário conhecer a densidade e o coeficiente de Poisson. Foram adotados os seguintes valores para estas constantes: $\rho = 795 \text{ kg/m}^3$ e $\nu = 0,49$.

5.2.3 Simulações numéricas

Para simular numericamente os ensaios experimentais discretizou-se o domínio da estrutura utilizando malhas de elementos tetraédricos lineares, como as mostradas na Figura 5.18.

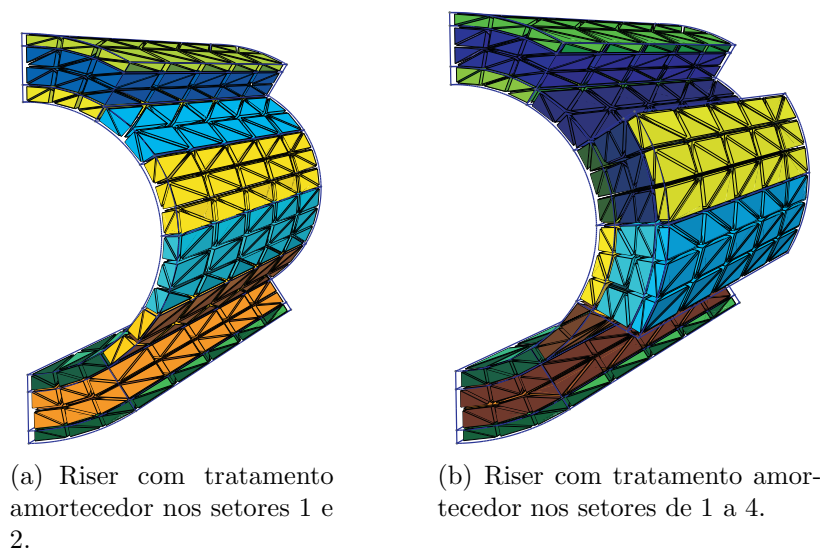


Figura 5.18: Trecho das malhas utilizadas para discretizar o riser.

Foram realizadas análises de convergência em termos das frequências naturais e taxas de amortecimento para as duas configurações de tratamento ensaiadas. Utilizou-se para isso as malhas descritas nas tabelas 5.15 e 5.16 em termos dos números de elementos e graus de liberdade.

Tabela 5.15: Características das malhas utilizadas para modelar a estrutura tubular com tratamento amortecedor nos setores 1 e 2.

Malha	Nº total de elementos	Nº de elementos viscoelásticos	GLs total	GLs de dissipação
1	20400	7200	60774	43200
2	51000	18000	151674	108000
3	102000	36000	303174	216000

Com estas malhas e a mesma metodologia para identificação modal utilizada com as vigas sanduíche de seção reta retangular, pode-se determinar os valores das tabelas 5.17 e 5.18.

Tabela 5.16: Características das malhas utilizadas para modelar a estrutura tubular com tratamento amortecedor nos setores 1 a 4.

Malha	N° total de elementos	N° de elementos viscoelásticos	GLs total	GLs de dissipação
1.b	31200	14400	100337	86400
2.b	46800	21600	165387	129600
3.b	109200	36000	275587	216400

Tabela 5.17: Resultados numéricos para as simulações da estrutura tubular com tratamento amortecedor nos setores 1 e 2 e valores experimentais de Borges [31].

Malha	Frequência Natural			Taxa de Amortecimento		
	(Hz)			(%)		
	F_{n_1}	F_{n_2}	F_{n_3}	ξ_1	ξ_2	ξ_3
1	7,69	43,70	113,30	1,93	0,62	0,18
2	6,23	34,79	89,23	3,09	1,15	0,40
3	5,98	32,71	83,98	3,29	1,43	0,43
Experimental	4,85	30,79	82,30	5,59	7,21	5,82

Tabela 5.18: Resultados numéricos para as simulações da estrutura tubular com tratamento amortecedor nos setores 1 a 4 e valores experimentais de Borges [31].

Malha	Frequência Natural		Taxa de Amortecimento	
	(Hz)		(%)	
	F_{n_1}	F_{n_2}	ξ_1	ξ_2
1.b	6,59	39,06	1,47	0,57
2.b	5,86	33,20	2,08	0,92
3.b	5,13	29,54	2,60	1,31
Experimental	4,26	29,11	4,96	6,33

A fim de realizar uma melhor comparação entre as frequências naturais e taxas de amortecimento identificadas a partir das simulações numéricas e àquelas identificadas experimentalmente foram construídos os gráficos das Figuras 5.19 e 5.20, onde pode-se ver a evolução dos valores obtidos para frequências naturais e taxas de amortecimento comparados com os respectivos valores experimentais para os três níveis de refinamento de malhas considerados.

Analisando-se as frequências naturais, observa-se que existe uma tendência de convergência para aquelas experimentalmente identificadas quando se analisa o incremento de elementos na malha de elementos finitos. Para as taxas de amortecimento, verifica-se que a medida que se refina a malha de elementos finitos, há uma tendência de obter uma boa correlação para o primeiro modo de vibração, e valores subestimados para os amortecimentos relativos ao segundo e terceiro modos de vibração. Esse comportamento se mostra bastante semelhante àquele que foi observado para as vigas sanduíche de seção

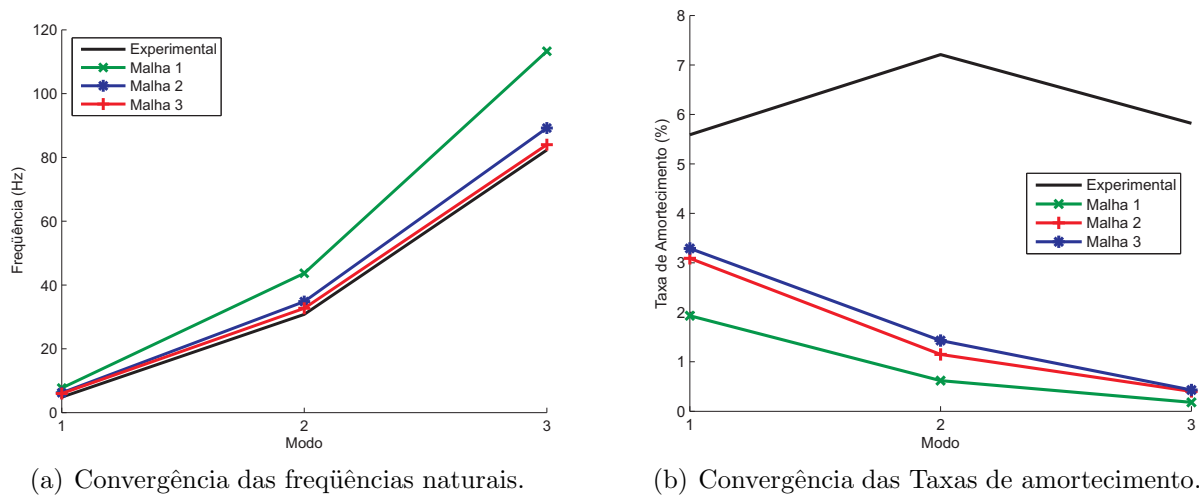


Figura 5.19: Análise de convergência do modelo numérico da estrutura tubular com tratamento amortecedor nos setores 1 e 2 observando os deslocamentos da direção 1-2.

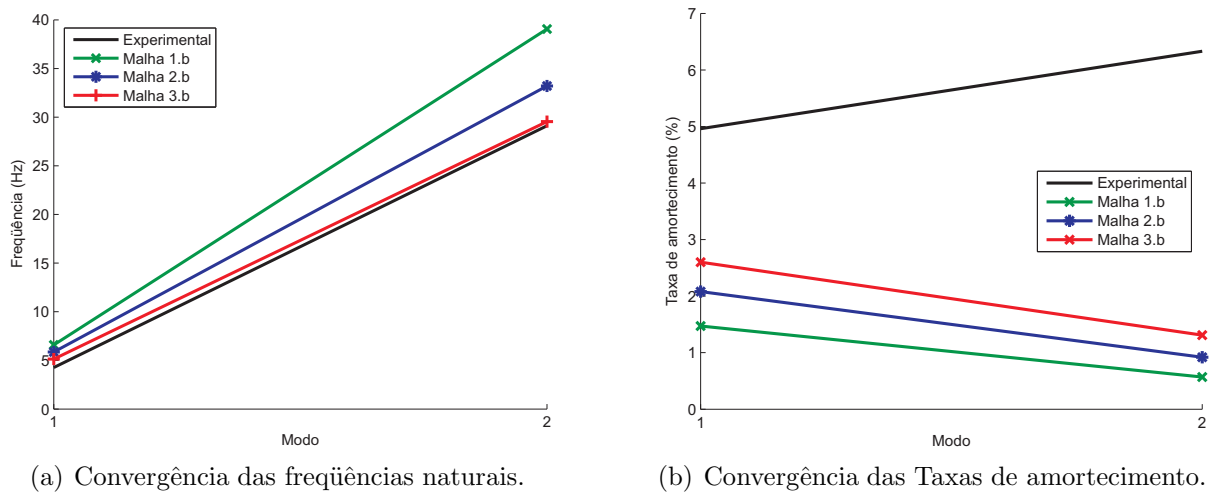


Figura 5.20: Análise de convergência do modelo numérico da estrutura tubular com tratamento amortecedor nos quatro setores observando os deslocamentos da direção 1-2.

reta retangular, onde as imprecisões do fator de perda ajustado para o MVE utilizado influenciam diretamente as taxas de amortecimento obtidas.

6 Conclusões

Este trabalho avaliou o método GHM na modelagem computacional de materiais viscoelásticos atuando como amortecedores de vibrações estruturais. O GHM foi implementado em um código de Elementos Finitos e observou-se que, para problemas com malhas suficientemente refinadas, o GHM produz resultados praticamente idênticos à formulação clássica. Este fato permite validar o método GHM, uma vez que esse comportamento se deu para todos os tipos de elementos finitos desenvolvidos.

Para o exemplo das vigas sanduíche, observou-se comportamentos dos modelos GHM diretamente influenciados pelo ajuste dos parâmetros que definem o módulo complexo. Desta forma, para as frequências naturais, que são influenciadas mais fortemente pelo ajuste do módulo de elasticidade, foram obtidos resultados numéricos muito próximos dos experimentais, uma vez que o ajuste de parâmetros para esta propriedade mecânica foi bastante razoável. Considerando as taxas de amortecimento obtidas para as vigas sanduíche, também foi possível observar a influência do ajuste dos parâmetros que definem o módulo complexo na qualidade dos resultados numéricos. Para frequências onde o fator de perda foi sobreestimado, as taxas de amortecimento obtidas numericamente foram superiores às extraídas dos ensaios experimentais e, em contra partida, os resultados numéricos obtidos para frequências mais altas, onde o ajuste do fator de perda foi subestimado, foram obtidas taxas de amortecimentos numéricas inferiores às experimentais.

Obviamente estas diferenças não podem ser atribuídas somente ao ajuste de parâmetros do módulo complexo. Outros fatores como: 1) A metodologia usada na identificação modal; 2) Dispersão dos resultados experimentais. Para vigas teoricamente idênticas, Borges [18] obteve taxas de amortecimento significativamente diferentes e 3) Não consideração do amortecimento do material elástico que, na prática, também dissipa energia.

Assim sendo, considera-se que, uma vez que os modelos M1 e M3 forneceram resultados muito próximos aos experimentais em termos de frequências naturais e da taxa de amortecimento do primeiro modo de vibração, pode-se considerá-los como ferramentas úteis ao engenheiro quando se necessita projetar e/ou analisar vigas sanduíche. As taxas de amortecimento dos modos 2 e 3, que via de regra contribuem com parcelas menos significativas no somatório de contribuições modais da estrutura, por serem minoradas,

estão a favor da segurança em um projeto de estrutura sanduíche.

Para o exemplo do riser, mais uma vez observou-se uma boa correlação numérico-experimental para a identificação das frequências naturais. Já para as taxas de amortecimento observou-se que a medida que se refina a malha de elementos finitos, há uma tendência de se obter valores próximos aos experimentais quando se analisa o primeiro modo de vibração. Neste caso, mais uma vez, houve subestimação das taxas de amortecimento relativas ao segundo e terceiro modo de vibração, como era esperado, pois nitidamente há uma minoração do fator de perda na faixa de frequência destes modos (ver Figura 5.17).

Conforme já destacado anteriormente, uma vez que as frequências naturais foram satisfatoriamente identificadas nos dois exemplos analisados, e as taxas de amortecimento ou foram identificadas razoavelmente próximas aos correspondentes valores experimentais ou foram subestimadas. Pode-se dizer que os modelos GHM forneceram resultados a favor da segurança e, portanto, podem ser úteis na avaliação do comportamento dinâmico de estruturas dotadas de amortecedores constituídos de materiais viscoelásticos.

Finalmente, pode-se citar como sugestões de trabalhos futuros:

- Analisar a influência da quantidade de termos da função $h(s)$;
- Implementar um pré-condicionador para reduzir os problemas de ordem numérica;
- Adotar estratégias de redução de ordem das matrizes do sistema;
- Paralelizar o código do programa implementado;
- Implementação de elementos finitos viscoelásticos de alta ordem via GHM;
- Comparar o desempenho de elementos hexaédricos e tetraédricos formulados via GHM;
- Implementar elementos de casca plana e/ou curva triangular e trapezoidal.

REFERÊNCIAS

- [1] OBERST, H., FRANKENFELD, K., “Über die Dämpfung Biegeschwingungen dünner Blech durch fest haftende Beläge”, *Acustica*, v. 4, pp. 181–194, 1952.
- [2] MYKLESTAD, N. O., “The concept of complex damping”, *Journal of Applied Mechanics*, v. 19, pp. 284–286, 1952.
- [3] ROSS, D., UNGAR, E. E., KERWIN, E. M., “Damping of plate flexural vibrations by means of viscoelastic laminae”, *Structural Damping - ASME*, pp. 49–88, 1959.
- [4] MEAD, D. J., MARKUS, S., “The forced vibration of three-layer damped sandwich beams with arbitrary boundary conditions”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 10, pp. 163–175, 1969.
- [5] JOHNSON, C. D., KEINHOLZ, D. A., ROGERS, L. C., “Finite element prediction of damping in beams with constrained viscoelastic layers”, *Shock and Vibration Bulletin*, v. 50, pp. 71–81, 1981.
- [6] BAGLEY, R. L., TROVIK, P. J., “Fractional calculus - a different approach to analysis of viscoelastically damped structures”, *AIAA Journal*, v. 21, pp. 741;748, 1983.
- [7] BAGLEY, R. L., TROVIK, P. J., “Fractional calculus in the transient analysis of viscoelastically damped structures”, *AIAA Journal*, v. 23, pp. 981–925, 1985.
- [8] GOLLA, D. F., HUGHES, P. C., “Dynamics of viscoelastic structures - a time-domain, finite element formulation”, *Journal of Applied Mechanics*, v. 52, pp. 897–906, 1985.
- [9] MCTAVISH, D., HUGHES, P. C., “Modeling of linear viscoelastic space structures”, *Journal of Vibration and Acoustics*, v. 115, pp. 103–110, 1983.
- [10] LESIEUTRE, G. A., BIANCHINI, E., “Time domain modeling of linear viscoelasticity using anelastic displacement fields”, *Journal of Vibration Acoustical*, v. 117, pp. 424–430, 1995.
- [11] BARBOSA, F. S., *Modelagem computacional de estruturas com camadas viscoelásticas amortecedoras*, Tese de doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2000.

- [12] VASCONCELOS, R. P., *Controle dinâmico estrutural via mecanismos viscoelásticos*, Tese de doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2003.
- [13] BATTISTA, R. C., SANTOS, E. F., VASCONCELOS, R., PFEIL, M. S., “A viscoelastic sandwich solution for orthotropic decks of steel bridges”, *Stability and ductility of steel structures*, v. 1, 2010.
- [14] SANTOS, E. F., *Atenuadores visco-elásticos para redução de oscilações aeroelásticas de edifícios altos*, Dissertação de mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2003.
- [15] CASTELLO, D. A., *Modelagem e Identificação de Materiais Viscoelásticos no Domínio do Tempo*, Tese de doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2004.
- [16] FAISCA, R. G., *Caracterização de materiais viscoelásticos como amortecedores estruturais*, Dissertação de mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 1998.
- [17] SILVA, R. P., *Desenvolvimento de metodologias para caracterização de materiais viscoelásticos em baixas frequências*, Dissertação de mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2007.
- [18] BORGES, F. C., *Análise do comportamento dinâmico de vigas sanduíche com múltiplas camadas*, Dissertação de mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2010.
- [19] BARBOSA, F., FARAGE, M. C. R., “A finite element model for sandwich viscoelastic beams: Experimental and numerical assessment”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 317, 2008.
- [20] GEUZAINÉ, C., REMACLE, J. F., “Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 79, 2009.
- [21] GALLIMORE, C. A., *Passive Viscoelastic Constrained Layer Damping Application for a Small Aircraft Landing Gear System*, Dissertação de mestrado, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA, 2008.

- [22] CHUNG, D. D. L., *Composite Materials, Science and Applications*. Springer, 2009.
- [23] CHRISTENSEN, R. M., *Theory of Viscoelasticity : An Introduction*. Academic Press, 1982.
- [24] JONES, D. I. G., *Handbook of viscoelastic vibration damping*. John Wiley and Sons, 2001.
- [25] SUN, C. T., LU, Y. P., *Vibration Damping of Structural Elements*. Prentice Hall, 1995.
- [26] TRINDADE, M. A., BENJEDDOU, A., OHAYON, R., “Modeling of frequency-dependent viscoelastic materials for active-passive vibration damping”, *Journal of Vibration and Acoustics*, v. 122, pp. 169–174, 2000.
- [27] MASTERSON, P. A., MILES, R. N., “Method for the determination of complex shear modulus of viscoelastic adhesives”, *Proc., 2nd Annu. International Symposium on Smart Structures and Materials, Society of Photo-optical Instrumentation Engineers (SPIE)*, v. 2445, 1995.
- [28] COLEMAN, T. F., LI, Y., “On the Convergence of Reflective Newton Methods for Large-Scale Nonlinear Minimization Subject to Bounds”, *Mathematical Programming*, v. 67, 1994.
- [29] COLEMAN, T. F., LI, Y., “An Interior, Trust Region Approach for Nonlinear Minimization Subject to Bounds”, *SIAM Journal on Optimization*, v. 6, 1996.
- [30] BATHE, K.-J., *Finite element procedures*. Prentice-Hall, 1982.
- [31] BORGES, F., ROITMAN, N., MAGLUTA, C., CASTELLO, D., FRANCISS, R., “Redução de vibração através do uso de materiais viscoelásticos”, *XXXII CI-LAMCE*, 2011.