Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Juliana Athouguia Pimentel

Mosaicos no Plano

Juiz de Fora

2016

Juliana Athouguia Pimentel

Mosaicos no Plano

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Luís Fernando Crocco Afonso

Juiz de Fora

2016

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Pimentel, Juliana Athouguia.
Mosaicos no Plano / Juliana Athouguia Pimentel. – 2016.
57 f. : il.

Orientador: Luís Fernando Crocco Afonso
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2016.

1. Mosaicos no plano. 2. Geometria. I. Afonso, Luís Fernando Crocco, orient. II. Título.

Juliana Athouguia Pimentel

Mosaicos no Plano

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 15 de agosto de 2016

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Luís Fernando Crocco Afonso - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF

Professor Dr. Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos
Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF

Professora Dr. Catarina Mendes de Jesus
Universidade Federal de Viçosa - UFV

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me ter dado forças para chegar até aqui.

À minha família, a meu pai que, ao longo desses dois anos de curso, nos deixou e às minhas irmãs que me apoiam sempre em tudo que faço.

Em especial aos meus fihos Eduarda e Gustavo, razão da minha vida, por quem luto para ser exemplo de vida, pela compreensão em minhas ausências e faltas.

Ao meu amigo e companheiro, Jorge Antonio, que nas horas de desânimo me apoiou e me manteve de pé.

Aos meus colegas de trabalho que me incentivaram a continuar, mesmo quando parecia não dar conta, em especial às professoras Silvane Helena de Souza, Ângela Márcia Ayupe Fecuri Valente e Liliane Ribeiro Barroso que muito ajudaram na organização e correção deste projeto.

Ao Eduardo, diretor/proprietários do Colégio Apoio por ter liberado o espaço e também os equipamentos necessários ao desenvolvimento do projeto.

Aos professores do PROFMAT, que nessa jornada, que me apoiaram.

Aos meus colegas de curso que andaram junto comigo durante esses dois anos nas alegrias e dificuldades, amigos que guardarei para sempre.

Um agradecimento especial ao meu professor/orientador Dr. Luís Fernando Crocco Afonso pela ajuda incondicional.

Pela grande ajuda da CAPES com o incentivo financeiro dado durante todo o curso.

Agradeço aos alunos que participaram do projeto, que não mediram esforço até o final, e também aos seus pais, que confiaram em mim, permitindo que seus filhos participassem deste sonho, ficando por um longo tempo fora do lar sem fazer objeção alguma.

"Uma boa explicação pode ser entendida,
um bom exemplo fala melhor à aprendizagem,
mas a descoberta fixa entendimento e aprendizagem"
(**Ruy Madsen Barbosa**, Descobrindo padrões em mosaicos)

RESUMO

O presente trabalho propõe um roteiro para que os estudantes possam encontrar pavimentações do plano a partir de polígonos regulares pareados lado-a-lado, sem vértices distinguidos, conforme classificação feita por Johannes Kepler em 1619 e apresentadas no Artigo "Mosaicos do Plano" da Revista do Professor de Matemática, nº 40. Além disto, apresenta relatos de encontros com estudantes seguindo o roteiro proposto.

Palavras-chave:1. Mosaicos no plano. 2. Geometria.

ABSTRACT

This paper proposes a script for students to find tilings of the plane from regular polygons paired side by side without distinguished vertices, according to the classification made by Johannes Kepler in 1619 and also presented in the article "Mosaicos do Plano"at Revista do Professor de Matemática 40. Furthermore, it presents reports of meeting with students following the proposed scrip.

Key-words: 1. Mosaics in plan. 2. Geometry.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Uma das finalidades dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática[6] é levar aos professores, em rede nacional, elementos necessários para um debate sobre o ensino da matemática, socializando informações e resultados gerados.

Seu objetivo é a construção de um referencial que oriente os professores de forma a contribuir para que os alunos tenham um conhecimento matemático que possibilite sua inserção no mercado de trabalho, bem como a atuação como cidadão na sociedade em geral.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais afirmam que:

> ...são absolutamente raros os trabalhos demandados na vida real que não exijam precisamente atividades conjuntas e cooperativas. Quando, noutro exemplo, se propõem métodos de aprendizado ativo, em que os alunos se tornem protagonistas do processo educacional, não pacientes deste, quer se ter a certeza de que o conhecimento foi de fato apropriado pelos alunos, ou mesmo elaborado por eles. Mas o que também se pretende é educar para a iniciativa, pois a cidadania que se quer construir implica participação e não se realiza na passividade.(PCNs, pag 54)

Para alcançar a meta almejada, os recursos didáticos, amplamente utilizados, são de grande importância para o ensino- aprendizagem, mas precisam ser utilizados em situações que os levem à análise e reflexão.

Ainda de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais

> ... é necessário desenvolver habilidades que permitam por à prova os resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos, para obter a solução. Nessa forma de trabalho, o valor da resposta correta cede lugar ao valor da resolução. O fato de o aluno ser estimulado a questionar sua própria resposta, a questionar o problema, a transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletiva que constrói conhecimentos.(PCNs 3,1997, pág 45)

O livro "Grupos e Simetrias: Um guia para descobrir a matemática"de David W. Farmer [4], traz em seu prefácio um excerto que norteia esta dissertação:

> A parte mais excitante da matemática é o processo de investigação e descoberta. O objetivo deste livro é apresentar este processo ao leitor. Através de uma grande diversidade de tarefas, este livro levá-lo-á a descobrir alguma matemática real. Não há fórmulas para memorizar. Não há procedimentos a seguir. Olhando para exemplos, procurando neles padrões e as razões por trás deles, poderá desenvolver as suas

> próprias ideias matemáticas. O livro é só um guia; a sua função é encaminhá-lo na direção certa e trazê-lo de volta se for demasiado longe e se perder. A descoberta é deixada para si.

Pretende-se com este trabalho aplicar as ideias de Farmer [4] aos conteúdos expostos no artigo Mosaicos do Plano, da Revista do Professor de Matemática, nº 40 [1], a qual apresenta resultados anunciados por Johannes Kepler em 1619, no Livro II de Harmonices Mundi [5].

Espera-se fazer com que os alunos determinem todos os mosaicos do plano formados por polígonos regulares pareados lado-a-lado e sem vértices distinguidos, ou seja, com distribuição de polígonos ao redor de um vértice igual para todos os vértices.

Para isso, foi desenvolvido um pequeno roteiro de discussões para os alunos convidados e interessados em participar desta atividade, desenvolvida ao longo de quatro encontros. A presente dissertação é composta desta Introdução, seguida de quatro capítulos nos quais apresenta-se o material trabalhado e o relato de cada um dos encontros. Na sequência, a conclusão, na qual são expostas as considerações finais sobre o trabalho. Por fim, um anexo com o artigo Mosaicos do Plano [1], cuja leitura recomendamos que seja feita antes de se ler o restante da dissertação, com fins de se facilitar a compreensão dos objetivos do trabalho.

O projeto que deu origem a este trabalho exigiu interação constante entre a autora e os alunos, razão pela qual escolheu-se usar um discurso pessoal no relato dos encontros e na conclusão.

2 DEFINIÇÕES E OBJETIVO

A presença dos mosaicos em meio à civilização não é recente. Em palácios e templos da antiguidade o uso dessas figuras, com variados padrões simétricos, já podiam ser notados.

Essa variedade de padrões apresentados pelos mosaicos estimulou matemáticos na busca por figuras que, dispostas repetidamente, resultariam em um plano harmônico capaz de gerar padrões geometricamente possíveis.

A descoberta de que só é possível pavimentar um plano com três polígonos regulares, triângulos, quadrados e hexágonos, data do século VI a.c. Nessa época, os pitagóricos já conheciam a soma dos ângulos internos de um polígono regular.

A teoria da pavimentação do plano foi submetida à investigação na obra "Harmonice Mundi"[5] ,de Johannes Kepler (1571-1630) que, determinou várias possibilidades de pavimentação.

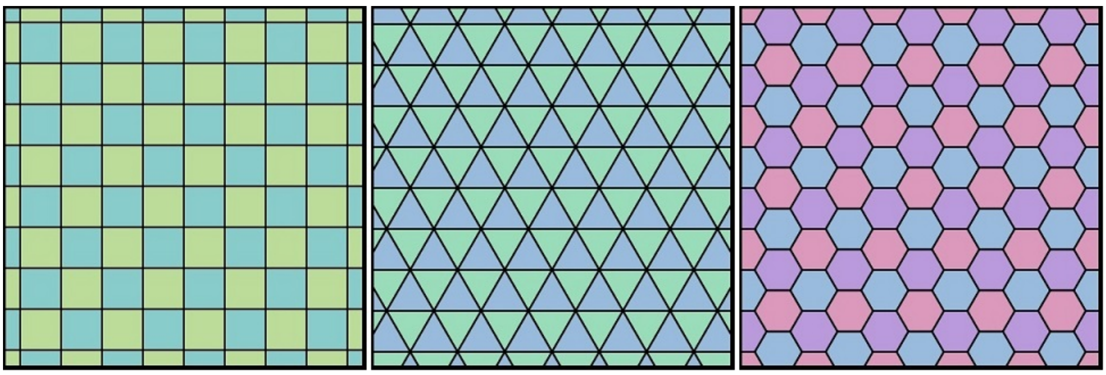
Procurando-se em um dicionário, encontraremos a palavra "mosaico"com o significado "Pavimento de de ladrilhos variadosembutido de pequenas pedrasou de outras peças de cores, que pela sua disposição dão aparência de desenho".[3]

Um polígono é chamado regular quando tem todos os lados e ângulos congruentes. O polígono regular que podemos formar com menor número de lados é o triângulo, mas a partir daí existem muitos outros.

Um mosaico é chamado regular quando é composto de polígonos regulares congruentese estes são pareados lado-a-lado.

Há somente três tipos de mosaicos regulares: aqueles feitos com triângulos equiláteros, quadrados ou hexágonos regulares.

Figura 1 – Mosaicos Regulares



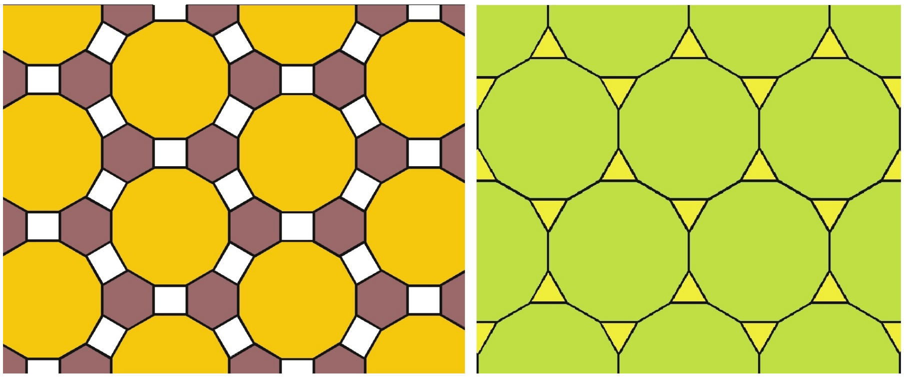
Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Malha_plana_por_pol

Mosaicos semirregulares são mosaicos formados por polígonos regulares, iguais ou diferentes, e que seguem algumas restrições em sua formação:

- A interseção entre os polígonos regulares deveria ser um lado ou um vértice.
- Todos os vértices deveriam ter ao seu redor a mesma distribuição dos polígonos regulares e deveriam estar numa mesma ordem por todo o plano.

Exemplos de mosaicos semirregulares, cujas características se enquadram dentro dos requisitos propostos.

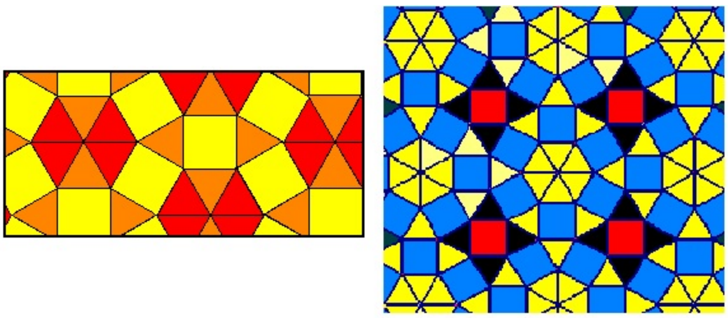
Figura 2 – Mosaicos que possuem as características necessárias



Fonte: http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/w3-propertyvalue-58167.html

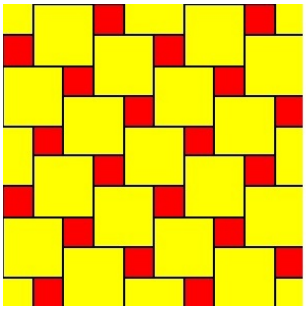
Exemplos de mosaicos que não são semirregulares

Figura 3 – Mosaicos que apresentam vértices com carcaterísticas diferentes



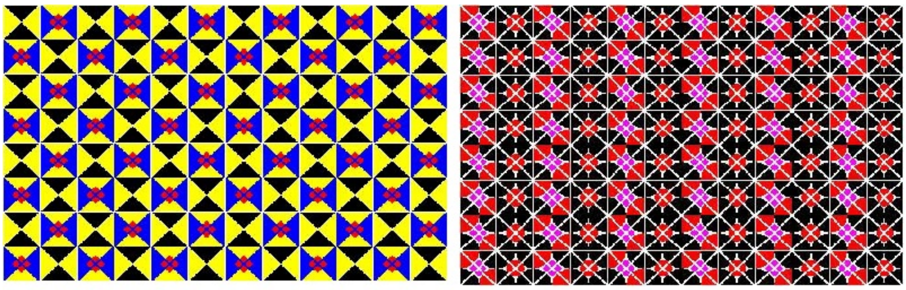
Fonte: http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/cursos/trab4/5serie.html

Figura 4 – Mosaico que não tem lado pareado



Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/99/Distorted$_{t}runcated_{s}quare_{t}iling.png$

Figura 5 – Mosaicos que não são formados por polígonos regulares



Fonte: https://sextogrado.wordpress.com/disenos-geometricos/jp-carousel-159

O objetivo deste trabalho é encontrar todos os mosaicos regulares e semirregulares.

3 PRIMEIRO ENCONTRO

3.1 PRELIMINARES

3.1.1 LOCALIZAÇÃO PARA OS ENCONTROS

Para que os encontros com os alunos pudessem acontecer eu precisaria de um local que fosse de fácil acesso. O local também deveria conter um datashow para a apresentação dos slides e uma sala de informática, itens necessários para que os alunos tivessem acesso ao GeoGebra e o projeto se desenvolvesse adequadamente.

O local mais adequado, por ser central, foi o Colégio APOIO, cujo proprietário não colocou nenhuma objeção ao uso das instalações e ao material usado, visto que leciono no local desde 1999. Haveria outras opções, pois todos os outros diretores das escolas onde leciono não se opuseram a contribuir com meu trabalho mas, devido à localização, o referido colégio ofereceu mais comodidade aos alunos.

No colégio supracitado, havia uma sala de informática com cinco computadores disponíveis e também o datashow, usado para a apresentação dos slides preparados para os encontros, o que foi o suficiente para a execução do projeto.

3.1.2 SELEÇÃO DOS ALUNOS

Por ser um projeto voltado à investigação e que precisava muito da participação dos alunos, fiz a opção de trabalhar com um grupo fora da sala de aula, mesmo porque seria inviável trabalhar com um número grande de alunos pelas condições que precisava para o projeto. Trabalho em três escolas, duas localizadas numa mesma cidade e outra, numa cidade próxima. Não queria que nenhum dos interessados em participar do projeto ficasse de fora, por esse motivo fiz o convite a todos os meus alunos, incluindo as três escolas, mesmo correndo o risco de ter uma turma grande.

O grupo ficou bem heterogêneo, com alunos das três escolas. Predispus-me a buscar e levar todos os dias os alunos que eram de outra cidade, para que pudessem participar.

Formou-se um grupo de 15 alunos, todos do ensino médio, variando de 1º a 3º ano. Logicamente, os que se interessaram foram aqueles que, por natureza, já gostam do desafio da matemática, o que facilitou muito o trabalho.

3.1.3 DIVISÃO EM GRUPOS

Dividi os alunos em 5 grupos de 3, para que todos pudessem ter acesso ao computador e aproveitassem para aprender um pouco do GeoGebra, uma ferramenta que a meu ver é de grande utilidade. Dentro das possibilidades, distribuí os alunos de forma que os grupos fossem formados por alunos de série e escolas diferentes, com intuito de haver uma maior interação entre eles.

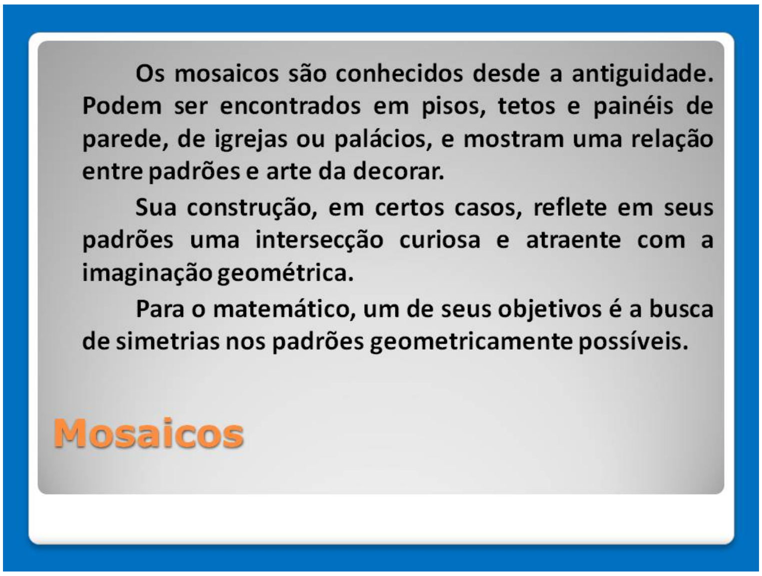
A fim de facilitar o trabalho com os alunos, optei por fazer encontros semanais usando slides, os quais estão expostos abaixo, juntamente com noção rápida do pretendido em cada um.

3.2 MATERIAL DESENVOLVIDO PARA O PRIMEIRO ENCONTRO

O primeiro encontro realizado teve como objetivos principais a apresentação do tipo de mosaicos estudados (mosaicos formados por polígonos regulares com condições de restrição sobre os lados e vértices comuns) e a determinação dos mosaicos formados com apenas um único tipo de polígono. Para tanto, foram desenvolvidos alguns slides. Vejamos os objetivos de cada um deles.

O Slide 1 tem o objetivo de apresentar aos alunos o conteúdo a ser trabalhado, mostrando um contexto histórico e prático dos mosaicos.

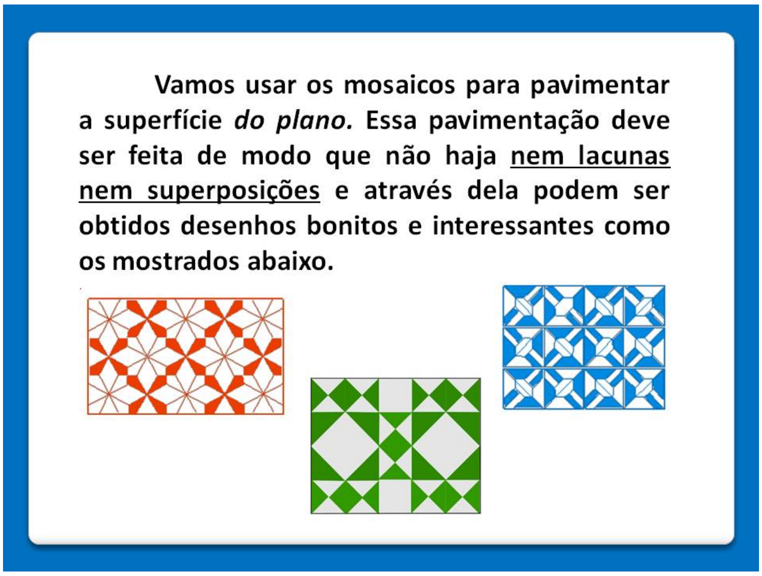
Figura 6 – Primeiro Encontro - Slide 1



Fonte: própria autora

O Slide 2 apresenta alguns exemplos de mosaicos e as condições básicas de pavimentação (sem superposições nem lacunas).

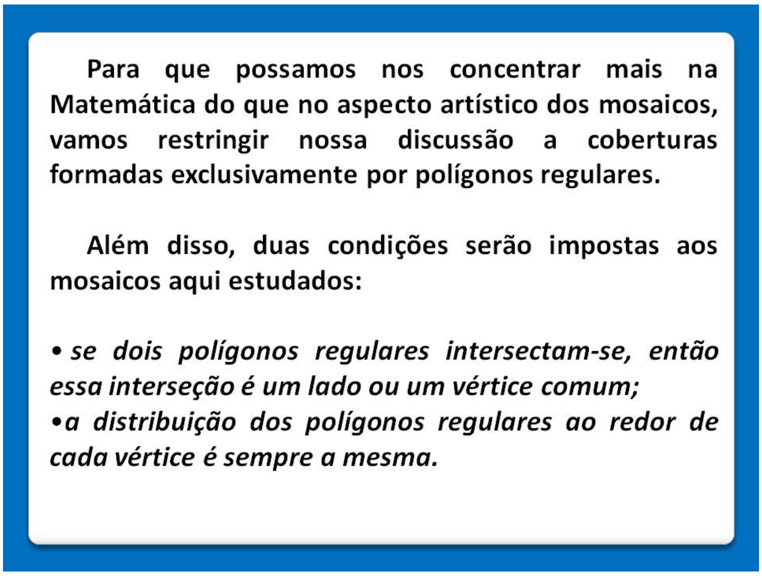
Figura 7 – Primeiro Encontro - Slide 2



Fonte: própria autora

No Slide 3 são apresentadas essas condições de regularidade para os mosaicos.

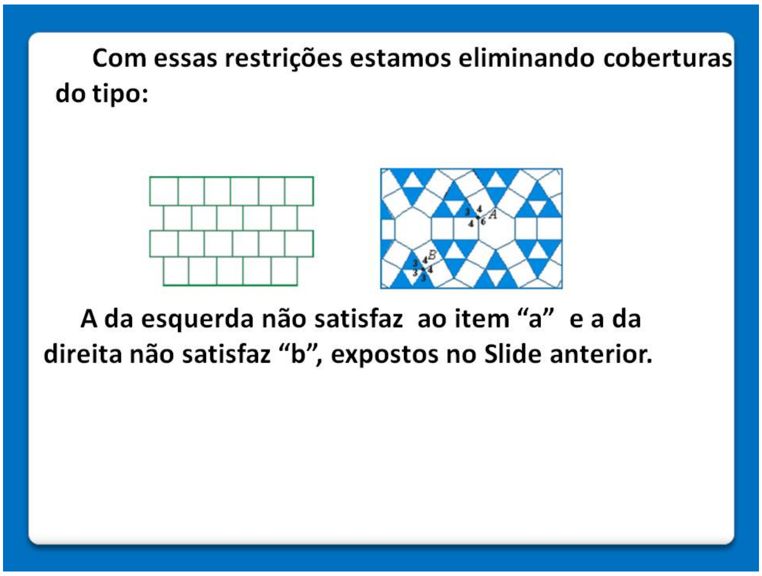
Figura 8 – Primeiro Encontro - Slide 3



Fonte: própria autora

Com o intuito de tornar claras as restrições enunciadas no Slide anterior, o Slide 4 apresenta dois exemplos de mosaicos que não atendem às restrições impostas.

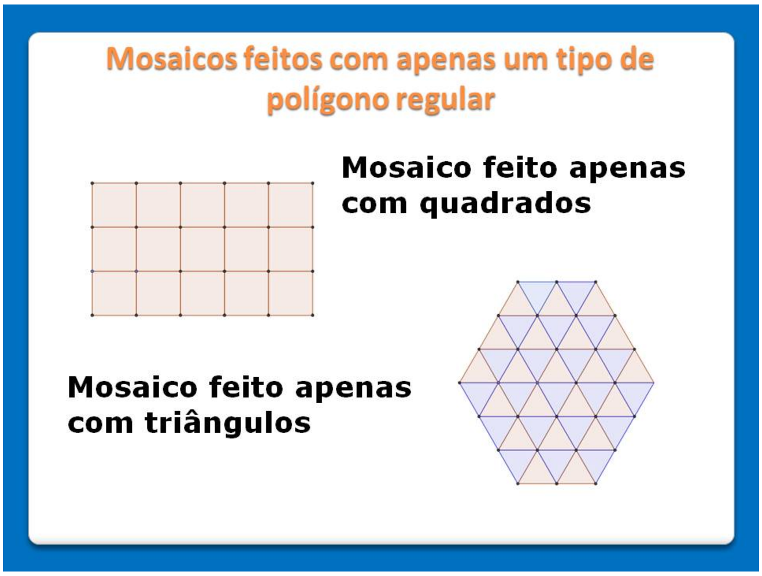
Figura 9 – Primeiro Encontro - Slide 4



Fonte: própria autora

A partir do Slide 5 passa-se a se considerar, no primeiro encontro, somente mosaicos feitos com um único tipo de polígono regular, isto é, mosaicos regulares. Apresentam-se, então, o mosaico com triângulos equiláteros e aquele com quadrados.

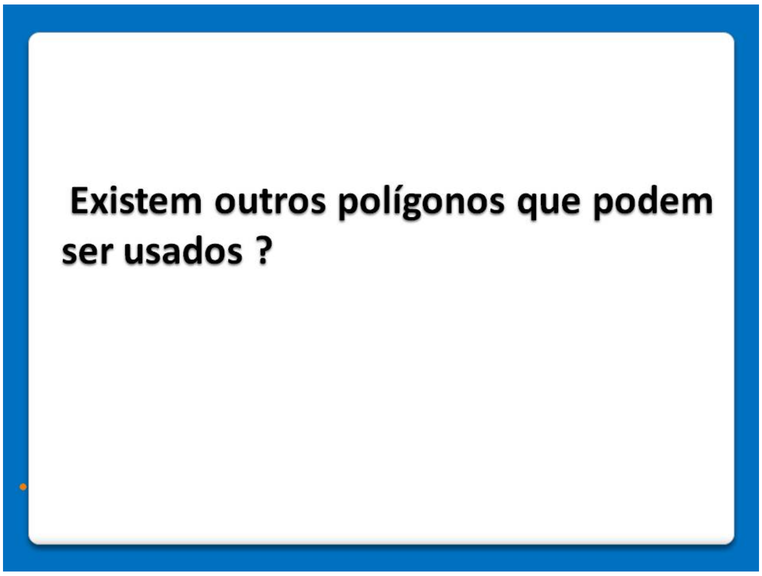
Figura 10 – Primeiro Encontro - Slide 5



Fonte: própria autora

O Slide 6 instiga os alunos a tentarem descobrir por si próprios, através do GeoGebra, a existência do, e somente do mosaico formado por hexágonos regulares.

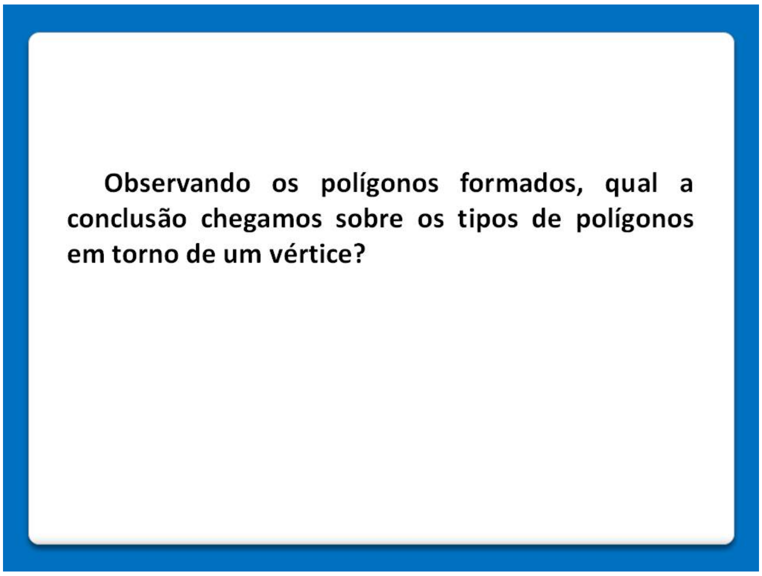
Figura 11 – Primeiro Encontro - Slide 6



Fonte: própria autora

O Slide 7 tem como objetivo fazer com que os alunos concluam que os únicos polígonos que podem formar os mosaicos regulares do tipo aqui estudados são aqueles cujas medidas dos ângulos internos são divisores de 360°.

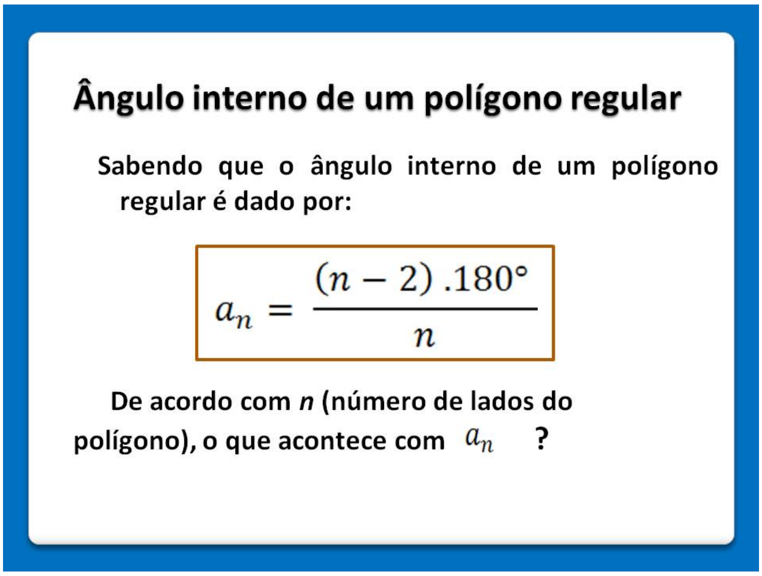
Figura 12 – Primeiro Encontro - Slide 7



Fonte: própria autora

O Slide 8 apresenta a fórmula do ângulo interno de um polígono regular de *n* lados e espera-se que os alunos percebam que os ângulos crescem com o crescimento de *n*.

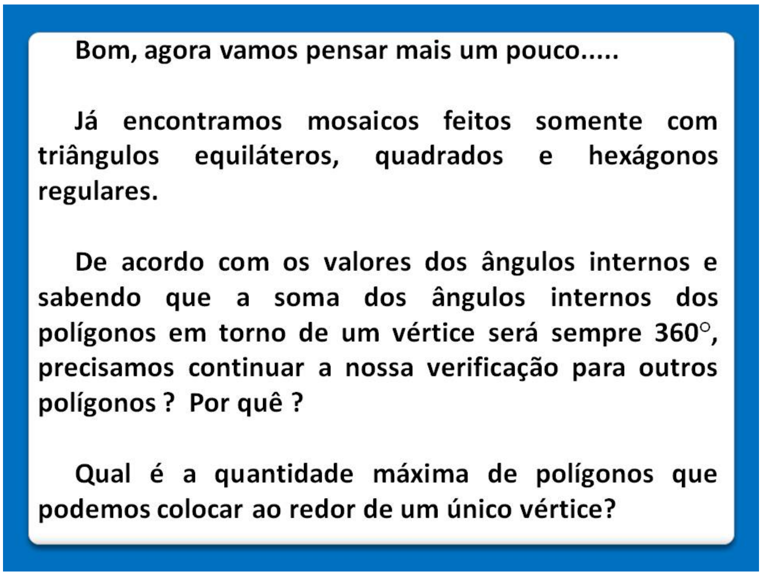
Figura 13 – Primeiro Encontro - Slide 8



Fonte: própria autora

A partir do crescimento visto no Slide anterior, o Slide 9 coloca duas questões aos alunos para que eles concluam neste encontro, que os únicos mosaicos regulares são os feitos a partir de triângulos equiláteros, quadrados ou hexágonos regular e que o máximo de polígonos que se pode encontrar em um vértice é seis (seis triângulos equiláteros).

Figura 14 – Primeiro Encontro - Slide 9



Fonte: própria autora

3.3 RELATO DO PRIMEIRO ENCONTRO

Consciente da dificuldade dos alunos com geometria resolvi, antes de iniciar as atividades do projeto, fazer uma revisão dos conteúdos que possivelmente os alunos precisariam saber para um bom desenvolvimento. Iniciei dando uma noção sobre o que são polígonos regulares, suas propriedades e características. Observei que, dentre os alunos presentes, poucos tinham realmente conhecimento do quão é importante e como pode ser usado um polígono regular.

Demonstrei as fórmulas de soma de ângulos internos e também a fórmula dos ângulos internos dos polígonos, amplamente usados neste projeto. Foi de grande satisfação quando eles entenderam o porquê das fórmulas demonstradas. A partir desse momento, tive a certeza de que estava no caminho certo.

No primeiro encontro fiz como introdução uma apresentação do que era um mosaico, alguns fatos históricos e também como o mosaico pode ser usado na arte.

Notei nos alunos um olhar indeciso. Na verdade, eles chegaram para o projeto sem realmente saber do que se tratava, aceitaram o convite confiando em meu trabalho.

Quando falei em mosaicos, alguns acharam que iriam montar mosaicos usando material concreto, fazer figuras e pronto. Foi aí que comecei a explicar o que realmente iríamos ter pela frente.

Nos slides já anexados fiz todas as orientações sobre quais mosaicos nos serviriam e quais não se enquadravam no nosso projeto.

Expliquei o que são lacunas e sobreposições, e eles retornaram já me indicando o motivo dessas condições acontecerem.

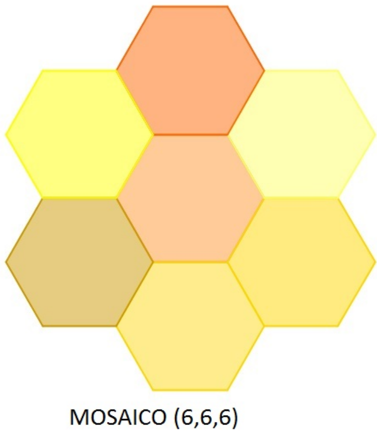
Os grupos reunidos entenderam bem as condições impostas. Mas achavam que bastaria a soma dos ângulos internos dos polígonos ser 360°. Quando disse que a pavimentação deveria ser feita de forma que todos os vértices tivessem as mesmas configurações, demoraram um pouco a entender que haveria diferença na forma do mosaico apenas com a troca de posição dos polígonos em torno de um vértice. Embora tenha sido mostrada a figura no Slide 4, isso não ficou bem claro no primeiro encontro, pois só usamos polígonos regulares iguais.

Depois de fazer todas as considerações iniciais, começamos a montagem de mosaicos apenas com polígonos regulares, os chamados mosaicos regulares.

Mostrei a eles dois já prontos, feitos com quadrados e triângulos e pedi que descobrissem se existia mais algum. Rapidamente encontraram o mosaico feito com hexágonos e também descobriram que seria o único.

A partir de perguntas direcionadas, chegaram à conclusão sobre a construção de mosaicos, pois viram que para os polígonos fazerem a volta ao redor do vértice com ângulos iguais, esses deveriam ser divisores de 360°. Além disso, como o hexágono já possuía 120° de ângulo interno, seria ele o que teria o maior número de lados possível, pois o próximo divisor seria 180°, o que seria impossível para ângulo interno de polígono.

Figura 15 – MOSAICO (6,6,6)

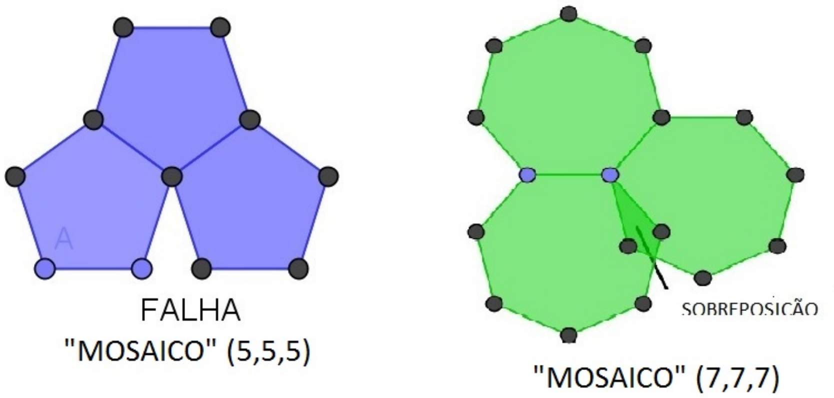


Fonte: ALUNOS DO GRUPO 1

Concluíram também que, independente do tipo de polígono regular, só poderíamos ter de 3 a 6 polígonos, que seriam no máximo 6 triângulos e no mínimo 3 hexágonos.

Usando o GeoGebra fizeram a construção dos mosaicos com pentágonos e heptágonos, puderam ver através da construção desses mosaicos que realmente só existem mosaicos regulares formados com triângulos, quadrados e hexágonos.

Figura 16 – "MOSAICO"(5,5,5) e "MOSAICO"(7,7,7)



Fonte: ALUNOS DO GRUPO 2

Ao final da aula, pedi a eles que já trouxessem pronta uma tabela contendo uma lista dos ângulos internos de alguns polígonos regulares, para adiantar o processo da próxima aula. Isso seria feito no próximo encontro, mas achei que seria um tempo perdido e por isso pedi que eles o fizessem em casa.

Seria uma tabela como a apresentada a seguir:

Tabela 1 – Número de lados do polígono e os ângulos internos

n	a_n
3	60 °
4	90 °
5	108 °
6	120 °
7	128,5714285 °
8	135 °
9	140 °
10	144 °
11	147,272727 °
12	150 °
13	152,3076923°
14	154,2857°

n	a_n
15	156°
16	157,5°
17	158,823529°
18	160°
19	161,05263°
20	162°
21	162,8571°
22	163,636363°
23	164,3478°
24	165°
25	165,6°
26	166,1538°

A tabela acima foi apenas um exemplo. Alguns grupos mais curiosos, estenderam-na a mais polígonos, pois observaram de imediato, que os ângulos internos eram crescentes em relação à quantidade de lados, mas que não era uma sequência certa, como uma progressão aritmética ou geométrica, e que quanto mais subíamos os valores de n maior seria o valor do ângulo interno. Então, tentaram subir esses valores para se aproximar de 180°, o que já sabiam ser impossível.

4 SEGUNDO ENCONTRO

4.1 MATERIAL DESENVOLVIDO PARA O SEGUNDO ENCONTRO

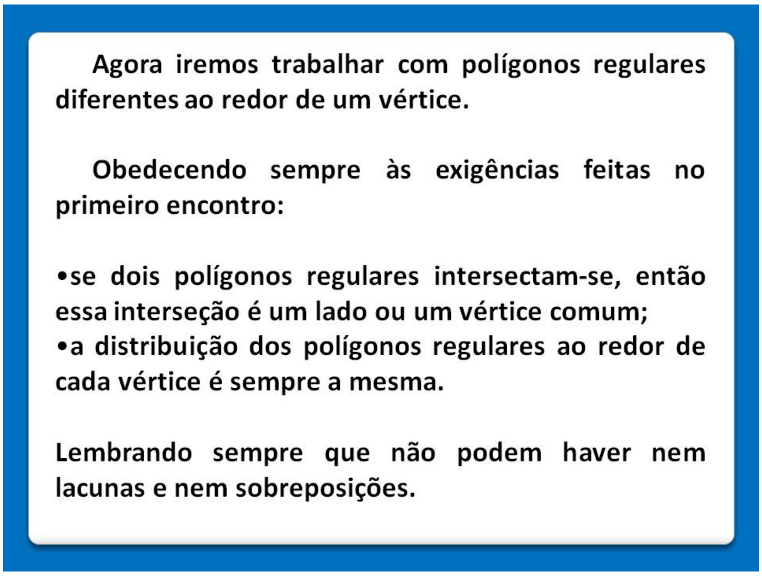
O objetivo deste encontro é obter os mosaicos com três polígonos regulares, iguais ou diferentes, ao redor de cada vértice.

Figura 17 – Segundo Encontro - Slide 1

Fonte: própria autora

No Slide 2 inicia-se o trabalho com polígonos regulares diferentes ao redor do vértice. Deve-se observar as condições do projeto.

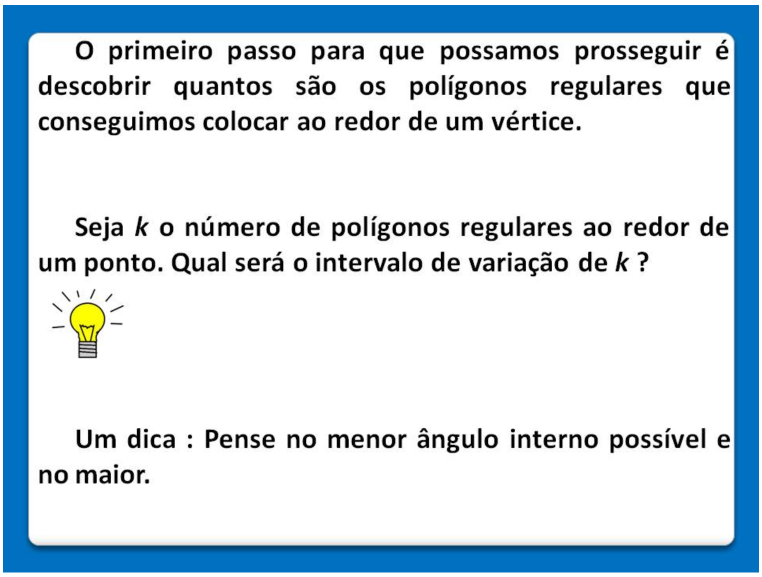
Figura 18 – Segundo Encontro - Slide 2



Fonte: própria autora

O objetivo deste Slide 3 é incentivar a descoberta de que devemos ter $3 \le k \le 6$, onde k é o número de polígonos ao redor de um vértice. Essa variação faz-se-á, pois, se $k < 3$ implicaria que o ângulo interno do polígono fosse maior ou igual a 180°, enquanto para $k > 6$ implicaria que o ângulo interno do polígono fosse menor que 60°.

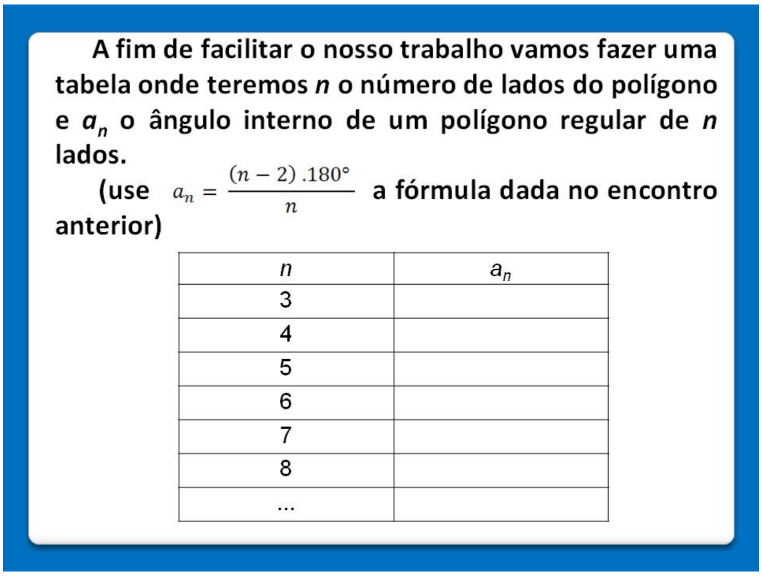
Figura 19 – Segundo Encontro - Slide 3



Fonte: própria autora

O Slide 4 solicita aos alunos que construam uma tabela relacionando o número de lados dos polígonos com o seu respectivo ângulo interno. [1]

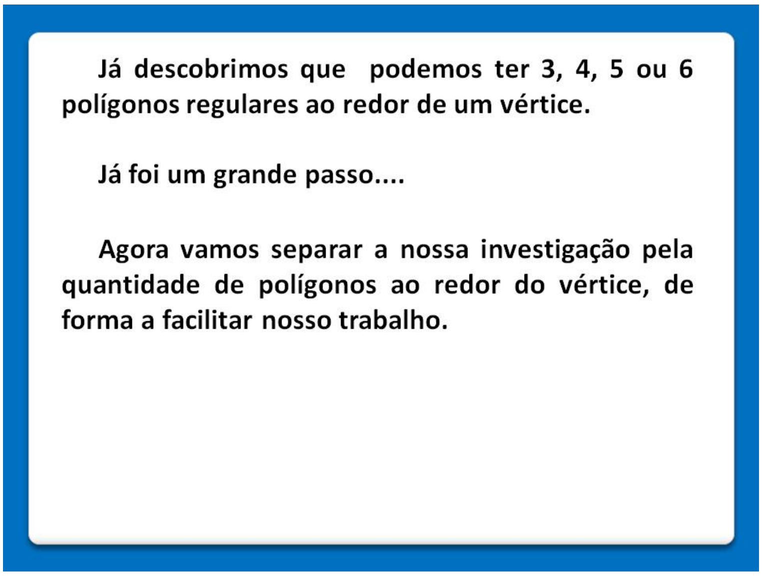
Figura 20 – Segundo Encontro - Slide 4



Fonte: própria autora

O Slide 5 sugere que se divida o trabalho em quantidade de polígonos ao redor do vértice, como forma de sistematização.

Figura 21 – Segundo Encontro - Slide 5

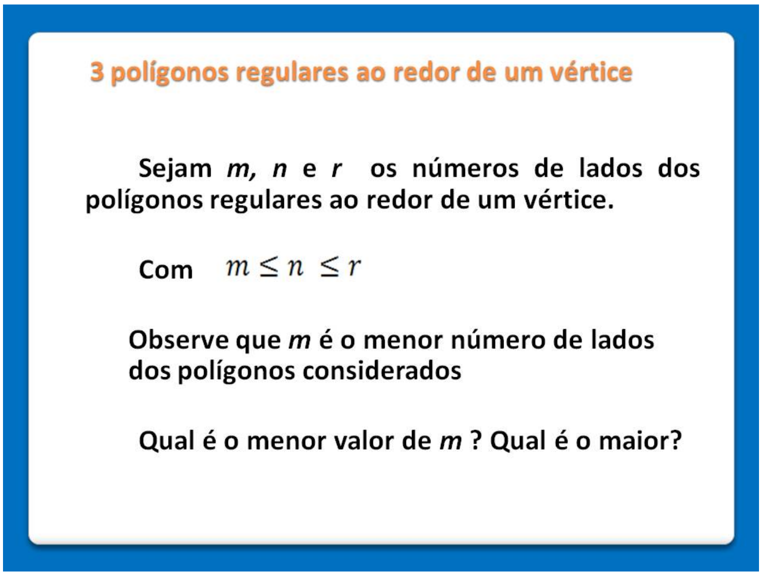


Fonte: própria autora

1 Lembremos que a construção da tabela foi feita pelos alunos em casa, para agilizar nosso trabalho nos encontros.

A partir do Slide 6, até o final deste encontro, trabalhamos com 3 polígonos ao redor de um vértice. Definindo m, como o número de lados do polígono de menor gênero, o Slide solicita que se encontre os possíveis valores de m. Espera-se que os alunos entendam que a variação de m deve ser $3 \leq k \leq 6$.

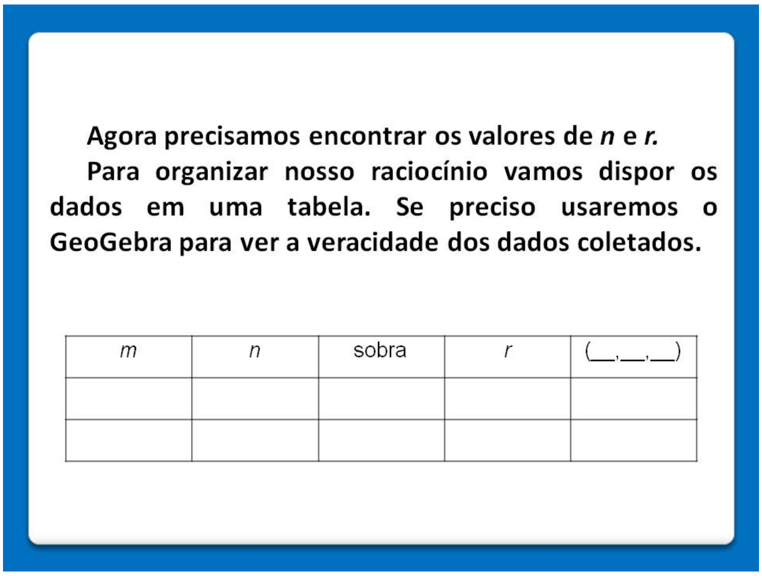
Figura 22 – Segundo Encontro - Slide 6



Fonte: própria autora

O próximo Slide apresenta um molde de tabela a ser preenchida que servirá de âncora para o prosseguimento do trabalho. A partir dela os alunos devem achar os possíveis candidatos a pavimentar, com mosaicos, o plano. Em seguida, descobrirem que nem todos os conjuntos que formam 360° na soma dos ângulos internos têm a condição de pavimentar o plano com as imposições do projeto.

Figura 23 – Segundo Encontro - Slide 7



Fonte: própria autora

4.2 RELATO DO SEGUNDO ENCONTRO

Consciente de que esta parte do trabalho seria mais demorada e exigiria muito raciocínio e atenção, relembrei, inicialmente, as condições para a construção do mosaico, expostas no primeiro encontro.

O próximo passo seria encontrar quantos polígonos, no máximo, poderiam ser colocados ao redor de um vértice. Isso não foi um problema: imediatamente responderam que eram seis. Para aumentar o nível de dificuldade, questionei o porquê. Alguns pensaram um pouco, mas logo me responderam que se fossem mais polígonos precisaríamos de ângulos internos menores que 60°. Isso seria impossível, uma vez que não conseguimos formar polígono menor que o triângulo.

Perguntados sobre a menor quantidade de polígonos, imediatamente responderam 3, pois já haviam feito o raciocínio anteriormente e encontrado esse número.

A partir dali, pensariam somente no caso de três polígonos ao redor de um vértice.

Para organizar o pensamento, determinei que deveriam ter polígonos regulares de m, n e r lados, com $m \leq n \leq r$.

A princípio, instiguei-os a raciocinar a respeito de m. Quis levá-los a descobrir quais seriam os valores de m possíveis e eles não tardaram a concluir que o menor valor de m seria 3.

Gostaria que tivessem pensado mais um pouco antes de construírem a tabela, mas essa foi uma parte que fugiu do meu controle. Os grupos, imediatamente, já foram montando uma tabela, porque eu já havia lhes mostrado a que montaríamos posteriormente..

Segue anexo o molde da tabela:

Tabela 2 – Tabela molde para três polígonos ao redor de um vértice

m	*n*	sobra	*r*	(...,...,...)

Alguns grupos fizeram exatamente o necessário, chegando a conclusão de todos os conjuntos de polígonos regulares que juntos somam 360°. Outros fizeram polígonos a mais, não observando que a partir de determinado ponto, já não era preciso tentar mais, pois não adiantaria. Essa foi a primeira atitude de todos, achar os possíveis candidatos, não se importando com a forma que isso iria nos dar em relação à pavimentação do plano.

Após a tabela pronta, foram para a segunda etapa, ver como isso ficaria no plano. Para isso fizeram todas as possibilidades no GeoGebra para chegarem a uma conclusão.

Todos os mosaicos que possivelmente pavimentariam o plano, de acordo com a tabela, foram feitos.

Todas as construções e as falhas detectadas seguem anexas.

Os estudantes ficaram decepcionados, pois foram poucas as construções que lhes serviriam, seguindo os critérios do projeto.

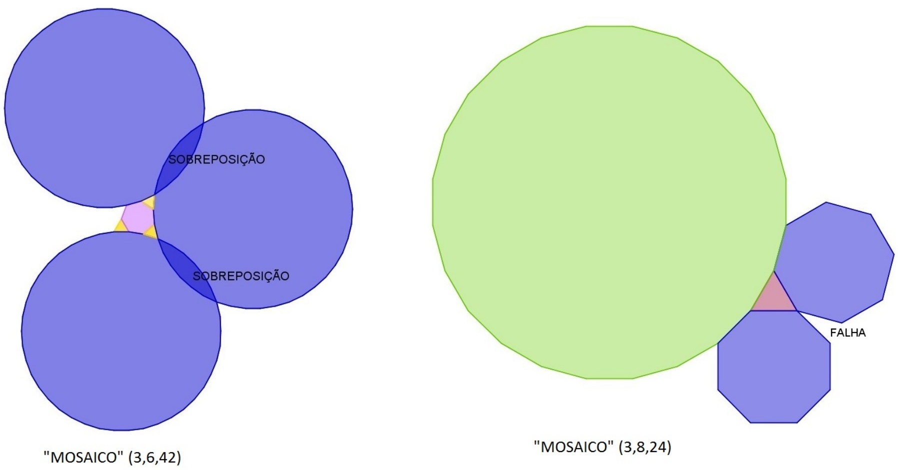
De 10 mosaicos possíveis, apenas três nos serviriam, pois um deles (formado apenas por hexágonos) já fora feito.

As figuras 24, 25 e 26 são as que apresentaram erros em sua formação.

Tabela 3 – Tabela para três polígonos ao redor de um vértice

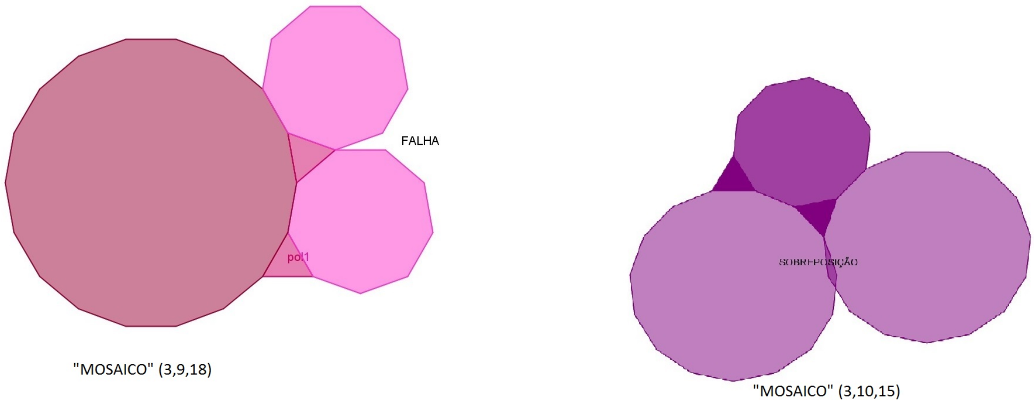
m	n	sobra	r	$(..., ..., ...)$
3	3	240°	não existe	
3	4	210°	não existe	
3	5	192°	não existe	
3	6	180°	não existe	
3	7	188,5714285°	42	(3,7,42)
3	8	165°	24	(3,8,24)
3	9	160°	18	(3,9,18)
3	10	156°	15	(3,10,15)
3	11	152,727272°	não existe	
3	12	150°	12	(3,12,12)
4	4	180°	não existe	
4	5	162°	20	(4,5,20)
4	6	150°	12	(4,6,12)
4	7	141,428571°	não existe	
4	8	135°	8	(4,8,8)
4	9	130°	não existe	
5	5	144°	10	(5,5,10)
5	6	132°	não existe	
5	7	123,42857142°	não existe	
5	8	117°	não existe	
6	6	120°	6	(6,6,6)
7	não serve			

Figura 24 – "MOSAICO"(3,7,42) e "MOSAICO"(3,8,24)



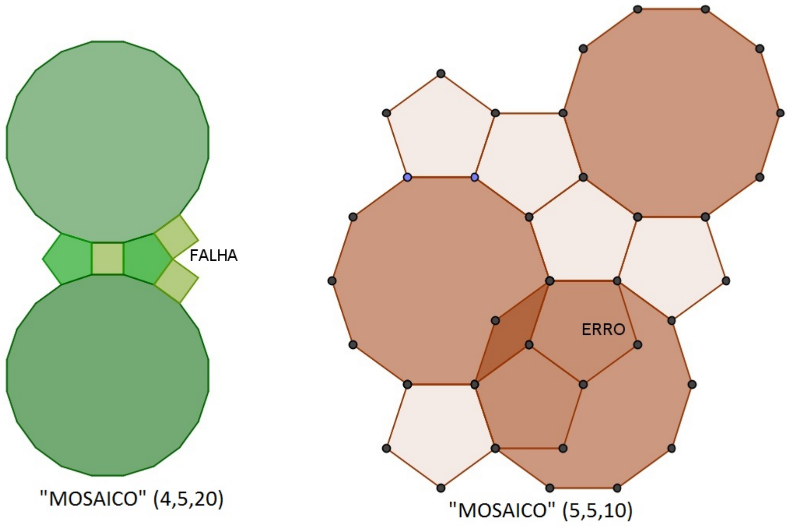
Fonte: ALUNOS DO GRUPO 3 E 4

Figura 25 – "MOSAICO"(3,9,18) e "MOSAICO"(3,10,15)



Fonte: ALUNOS DO GRUPO 4

Figura 26 – "MOSAICO"(4,5,20) e "MOSAICO"(5,5,10)

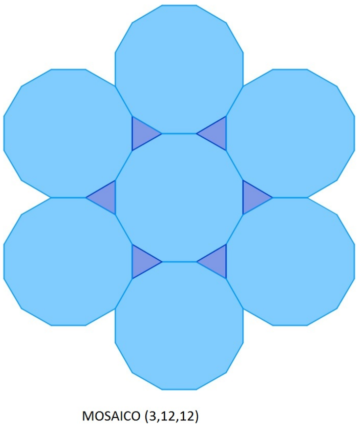


Fonte: ALUNOS DO GRUPO 5

As figuras 27, 28 e 29 são as que pavimentam o plano.

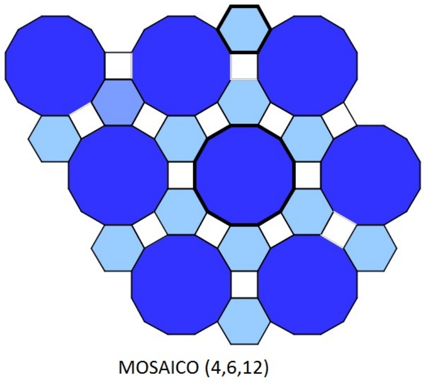
Com três polígonos regulares ao redor de um vértice teremos três formados com polígonos diferentes e mais um que é o formado apenas com hexágonos.

Figura 27 – MOSAICO (3,12,12)



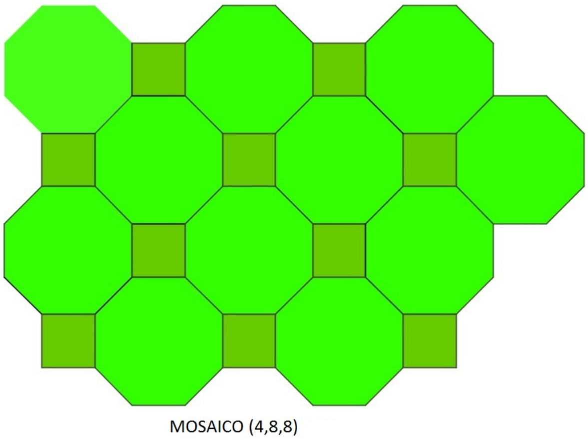
Fonte: ALUNOS DO GRUPO 1

Figura 28 – MOSAICO (4,6,12)



Fonte: ALUNOS DO GRUPO 3

Figura 29 – MOSAICO (4,8,8)



Fonte: ALUNOS DO GRUPO 2

5 TERCEIRO ENCONTRO

Pretende-se encontrar quais e quantos são os conjuntos de quatro polígonos regulares que planificam a superfície.

5.1 MATERIAL DESENVOLVIDO PARA O TERCEIRO ENCONTRO

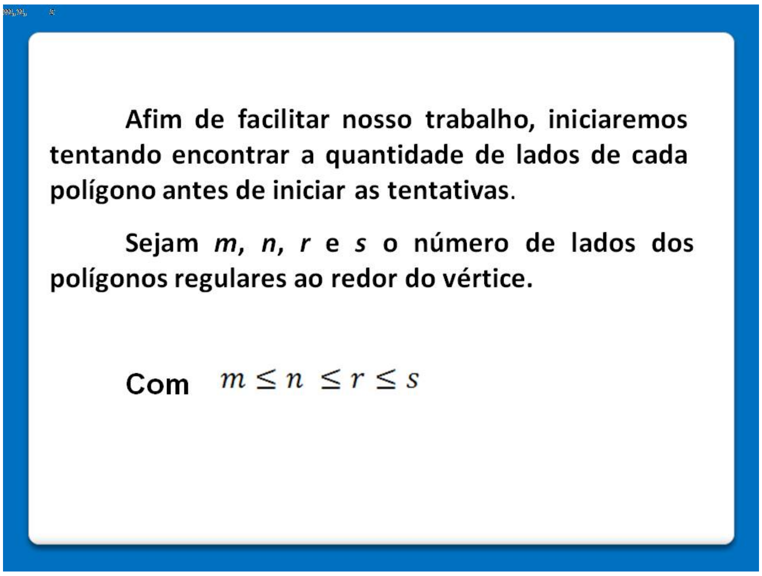
Espera-se que neste encontro, os alunos tenham condições de fazer a análise das possibilidades de se organizar 4 polígonos ao redor de um vértice, antes de fazer tentativas com os ângulos internos.

Figura 30 – Terceiro Encontro - Slide 1

Fonte: própria autora

Através do Slide 2 espera-se que os alunos descubram que o valor de m não pode ser 4, dando margem para a descoberta dos valores de n, r e s.

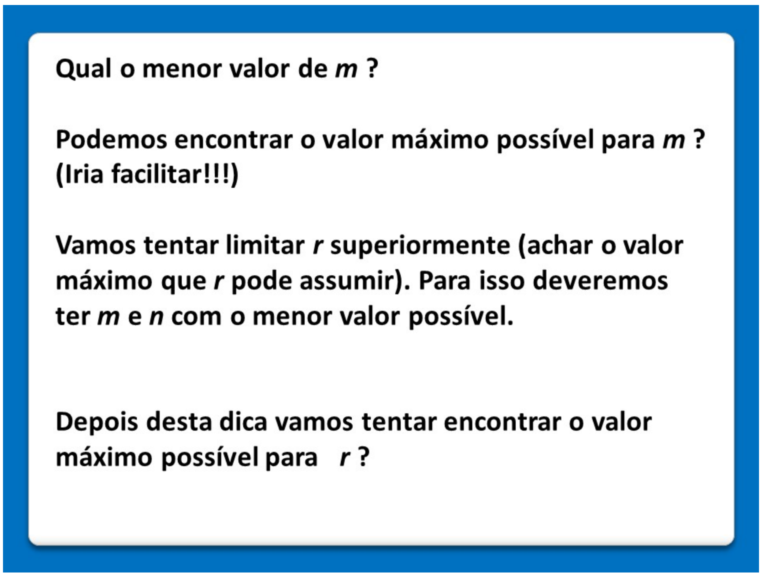
Figura 31 – Terceiro Encontro - Slide 2



Fonte: própria autora

Com o Slide 3 a ideia é encontrar m e limitar r superiormente. Para isso, pode-se pensar que a pior das possibilidades é ter $m = n = 3$ e, consequentente, possuir condições de encontrar o maior valor que r pode assumir. Então conseguimos s pelas condições impostas de $s \geq r$.

Figura 32 – Terceiro Encontro - Slide 3



Fonte: própria autora

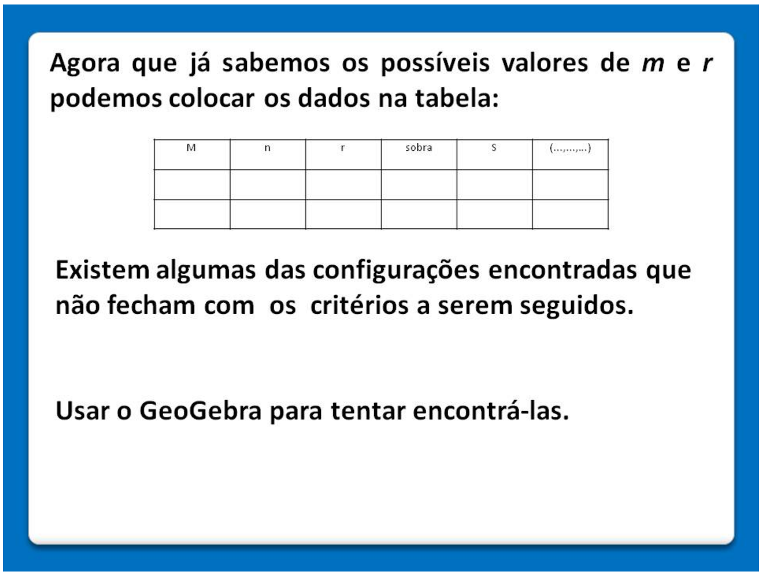
Com as informações conseguidas no Slide 3 (figura 32) , deve-se construir uma tabela.

Dentre as possibilidades encontradas na tabela, espera-se que localizem os conjuntos de polígonos regulares cuja soma dos ângulos internos seja 360°.

Dentre os possíveis candidatos, pretende-se que encontrem outros mosaicos formados com os mesmos polígonos regulares mas distribuídos de forma diferente.

O uso do GeoGebra é necessário para a construção dos mosaicos.

Figura 33 – Terceiro Encontro - Slide 4



Fonte: própria autora

5.2 RELATO DO TERCEIRO ENCONTRO

Neste encontro, gostaria que eles fizessem menos tentativas, encontrando primeiro a quantidade de lados dos polígonos regulares a ser testada antes de, de fato fazerem uma tabela e, por fim, testassem o seu funcionamento.

Como já haviam passado pelo segundo encontro e feito observações que facilitariam o trabalho deles, esse momento da atividade tornou-se relativamente fácil.

Um exemplo disso é o de retirar o valor do ângulo do primeiro polígono dos 360° da totalidade e fazer a média do restante para encontrar algo próximo do que seria o ângulo desejado.

Trabalhamos com o caso de quatro polígonos ao redor de um vértice. Conforme havia feito para três polígonos, determinei que deveríamos ter polígonos regulares de m, n, r e s lados, com $m \leq n \leq r \leq s$.

Os alunos encontraram primeiramente os valores de m e notaram que o valor máximo de m é 4 pois, pensaram no mosaico regular (4,4,4,4). Retirando-se 90° dos 360° sobrariam menos graus do que os necessários para que os outros polígonos que contornam o vértice pudessem ser maiores que um quadrado. Logo, todos concluíram o maior valor de m, que só poderia ser 3 ou 4

Após isso, o desafio proposto a eles era encontrar o valor máximo de r pois, assim limitariam também n. Para isso no Slide 2 (figura 31), dei a dica de que deveriam ter m e n com o menor valor possível. Colocando o valor 3 para m e n observaram que sobrariam ângulos suficientes para que pudessem colocar dois hexágonos. Logo r não poderia passar de 6.

Feito isso, já diminuíram bastante as tentativas feitas, o que facilitou o preenchimento da tabela proposta no Slide 4 (figura 33).

Mostrei a eles o molde da tabela a ser montada, que segue exposto a seguir:

Tabela 4 – Tabela molde para quatro polígonos ao redor de um vértice

m	n	r	sobra	s	(...,...,...)

No momento em que construíram a tabela, os valores em relação ao número de lados que deveriam usar já estavam parcialmente resolvidos. (Tabela 5)

Tabela 5 – Tabela para quatro polígonos ao redor de um vértice

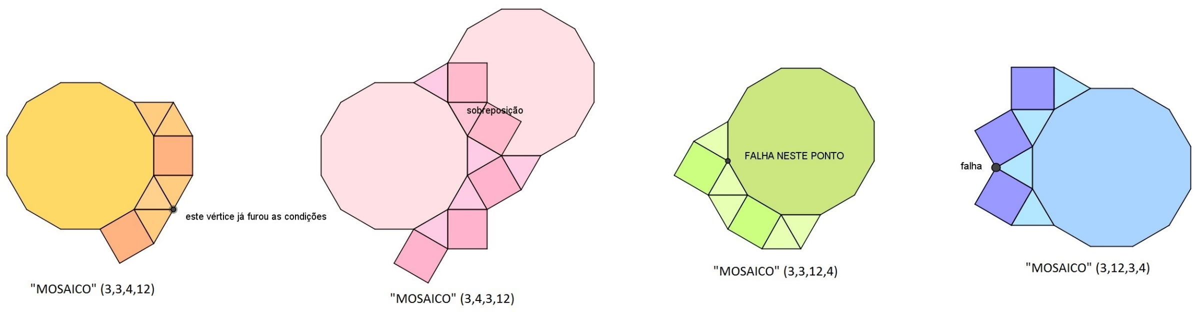
m	n	r	sobra	s	$(\ldots,\ldots,\ldots,\ldots)$
3	3	3	180°	não existe	
3	3	4	150°	12	$(3,3,4,12)$
3	3	5	132°	não existe	
3	3	6	120°	6	$(3,3,6,6)$
3	4	4	120°	6	$(3,4,4,6)$
3	4	5	102°	não existe	
3	4	6	90°	4	$(3,4,6,4)$
3	5	5	84°	não existe	
3	6	6	60°	3	$(3,6,6,3)$
4	4	4	90°	4	$(4,4,4,4)$
4	4	5	72°	não existe	
4	5	5	54°	não existe	

Há linhas da tabela que não satisfazem a condição de $m \leq n \leq r \leq s$. Foi necessário explicar-lhes que se tratava de uma condição para nortearmos o caminho, e que valeria a pena tentar construir esses mosaicos, pois apenas seriam formados por uma distribuição diferente dos polígonos listados nas linhas anteriores da Tabela 5, mas que poderiam ser possíveis candidatos a pavimentar o plano.

Diante desses dados encontrados foram ao GeoGebra fazer suas tentativas que estão expostas a seguir.

À medida que foram construindo os mosaicos a partir dos dados da tabela, observaram que as figuras ficaram diferentes. Com isso perceberam que realmente os polígonos, quando distribuídos de forma diferente ao redor do vértice poderiam pavimentar ou não o plano.

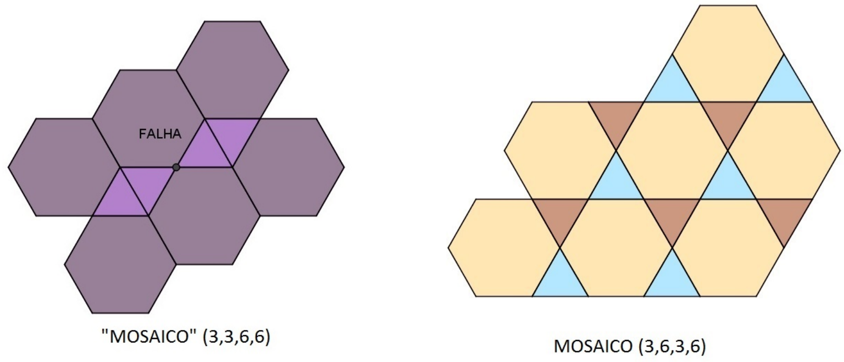
Figura 34 – "MOSAICO"(3,3,4,12) , "MOSAICO"(3,4,3,12) e "MOSAICO"(3,3,12,4)



Fonte: ALUNOS DO GRUPO 4 , GRUPO 5 e GRUPO 1

Nenhum dos mosaicos construídos nas figuras 34 pavimentam o plano. Neste ponto houve uma grande discussão sobre os mosaicos (3,3,4,12) e (3,3,12,4). Para alguns eram mosaicos diferentes e para outros, iguais. Neste momento foi preciso interceder e mostrar que por reflexão os mosaicos eram iguais. O mesmo ocorreu com os mosaicos (3,4,3,12) e (3,12,3,4). Pela disposição dos polígonos, alguns acharam que era diferente, mas mostrei que pelo giro dos polígonos ao redor do vértice os dois seriam o mesmo. Todos esses mosaicos foram construídos e constam como ilustração nas figuras 34.

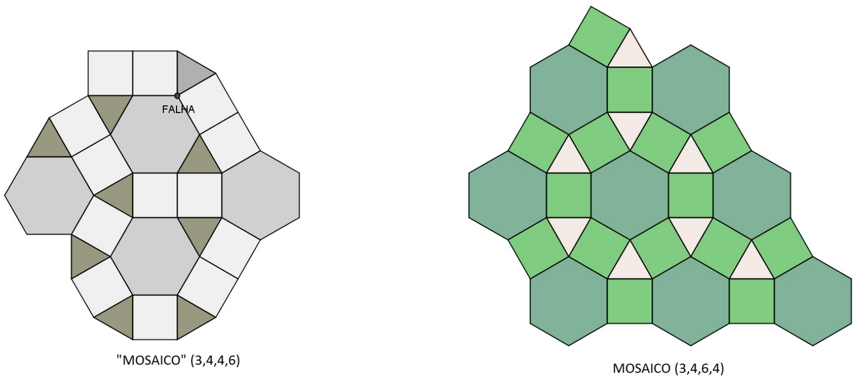
Figura 35 – "MOSAICO"(3,3,6,6) e MOSAICO (3,6,3,6)



Fonte: ALUNOS DO GRUPO 2

Na figura 35 foram construídos dois mosaicos. No mosaico (3,3,6,6) ocorrem falhas nos vértices. Já o mosaico (3,6,3,6) cobre o plano sem falhas e com a mesma característica em todos os seus vértices.

Figura 36 – "MOSAICO"(3,4,4,6) e MOSAICO (3,4,6,4)



Fonte: ALUNOS DO GRUPO 1

Novamente com o mesmo conjunto de polígonos, conseguimos formar dois mosaicos diferentes, expostos na figura 36. Os alunos observaram imediatamente que havia uma falha no mosaico (3,4,4,6) e marcaram um dos pontos na figura. O mosaico formado (3,4,6,4) pavimenta o plano.

A fim de terminar as observações deste encontro, fizemos um levantamento dos mosaicos que pavimentam o plano e que seguem as condições do projeto. Os estudantes concluíram que apenas 3 dos mosaicos formados com quatro polígonos ao redor do vértice satisfazem essas condições, sendo um deles, aquele formado apenas com quadrados, já construído no primeiro encontro.

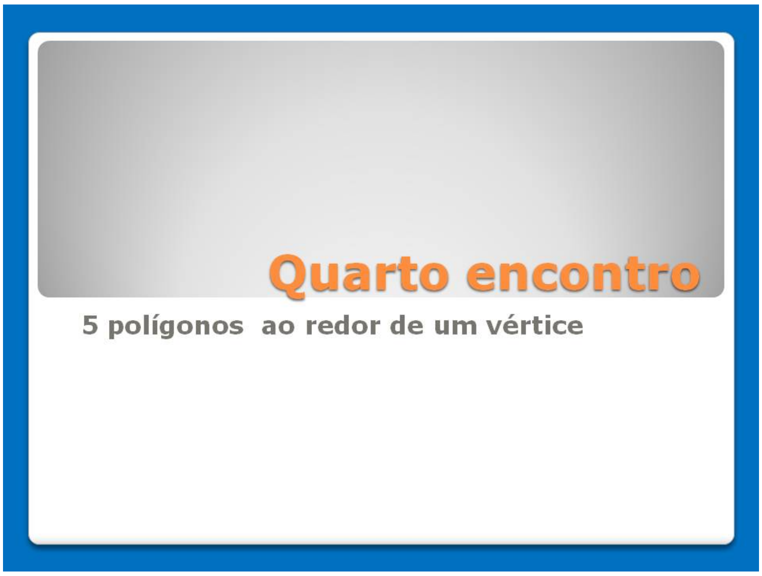
6 QUARTO ENCONTRO

Este encontro tem como objetivo determinar os cinco polígonos que, em conjunto, pavimentam o plano e, por fim, fazer uma análise do artigo que motivou o projeto, comparando-o com o material trabalhado.

6.1 MATERIAL DESENVOLVIDO PARA O QUARTO ENCONTRO

O mesmo procedimento para os 4 polígonos regulares ao redor de um vértice, será feito para 5 polígonos.

Figura 37 – Quarto Encontro - Slide 1

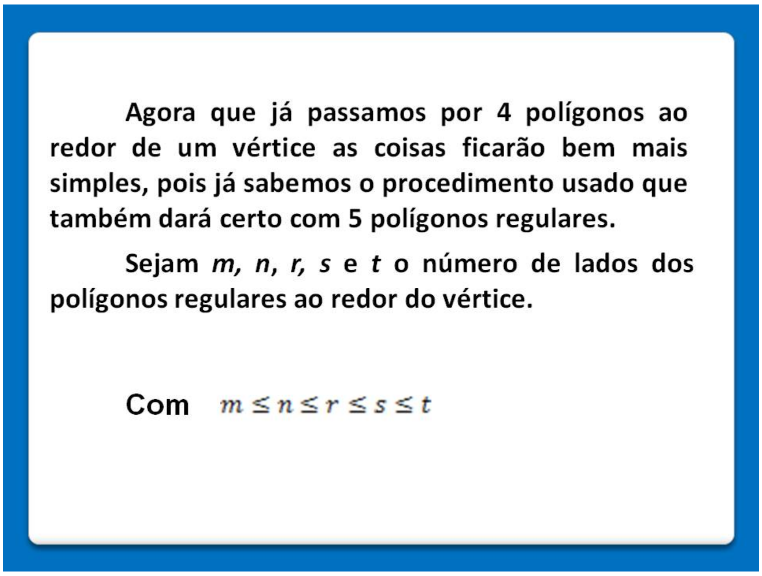


Fonte: própria autora

O Slide 2, induz os alunos a acharem os valores possíveis para m, que é o ponto de partida.

Os alunos devem observar que o mesmo procedimento feito para 4 polígonos regulares também funcionará para 5.

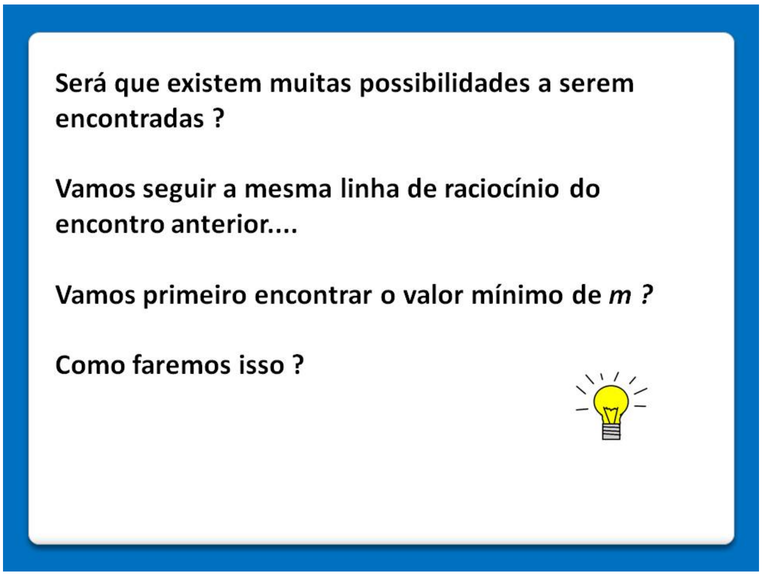
Figura 38 – Quarto Encontro - Slide 2



Fonte: própria autora

No Slide 3, espera-se a observação de que não há muitas possibilidades a serem analisadas e que não se pode usar m diferente de 3.

Figura 39 – Quarto Encontro - Slide 3

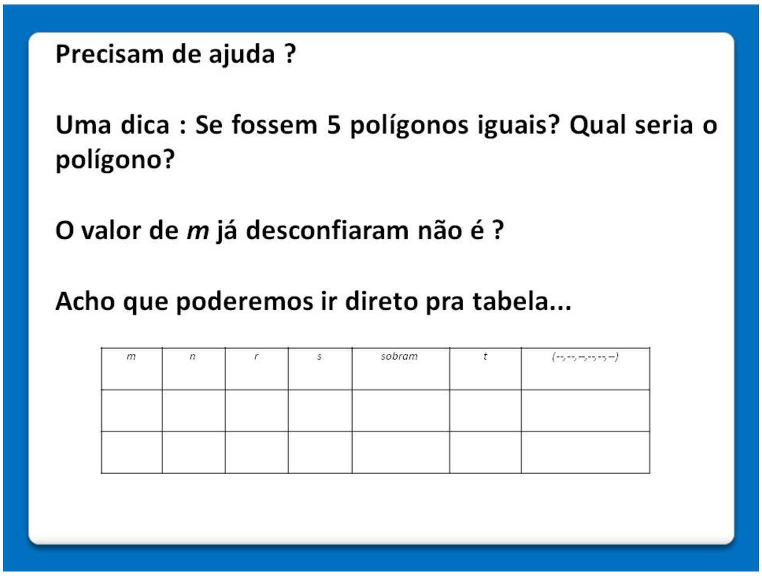


Fonte: própria autora

A tabela feita no Slide 4 exige muita atenção em relação às variações nas posições dos polígonos.

O GeoGebra é uma ferramenta fundamental para que se tenha uma visão geométrica de como o mosaico ficará no plano e se não há falhas na construção.

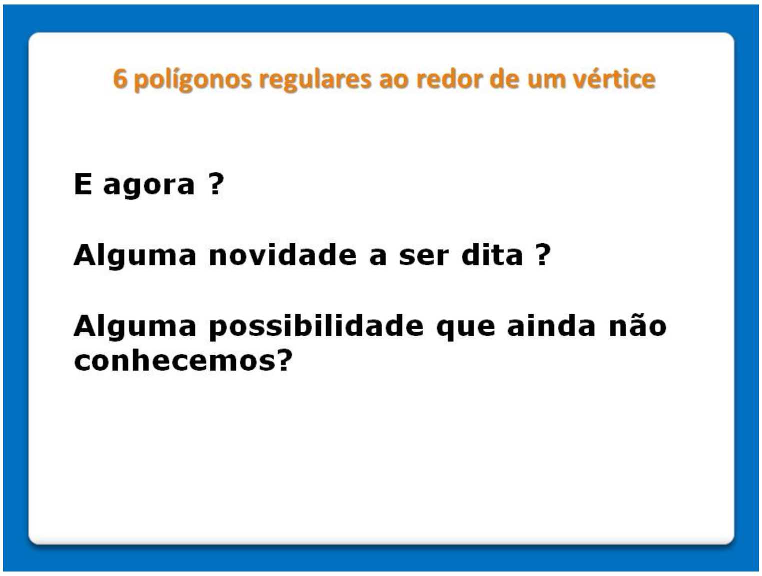
Figura 40 – Quarto Encontro - Slide 4



Fonte: própria autora

No Slide 5, volta-se ao caso dos 6 polígonos ao redor de um vértice.

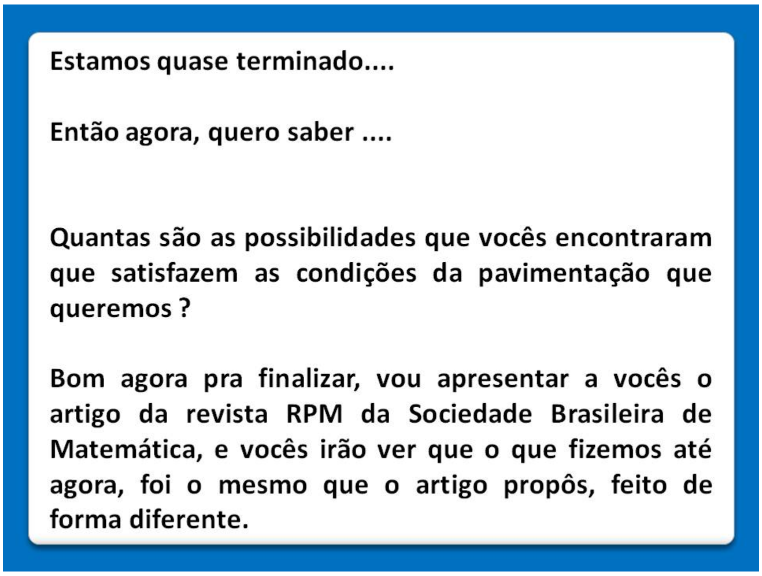
Figura 41 – Quarto Encontro - Slide 5



Fonte: própria autora

Deseja-se que, ao final deste Slide, os alunos cheguem à conclusão de que somente 11 mosaicos satisfazem as condições da forma proposta.

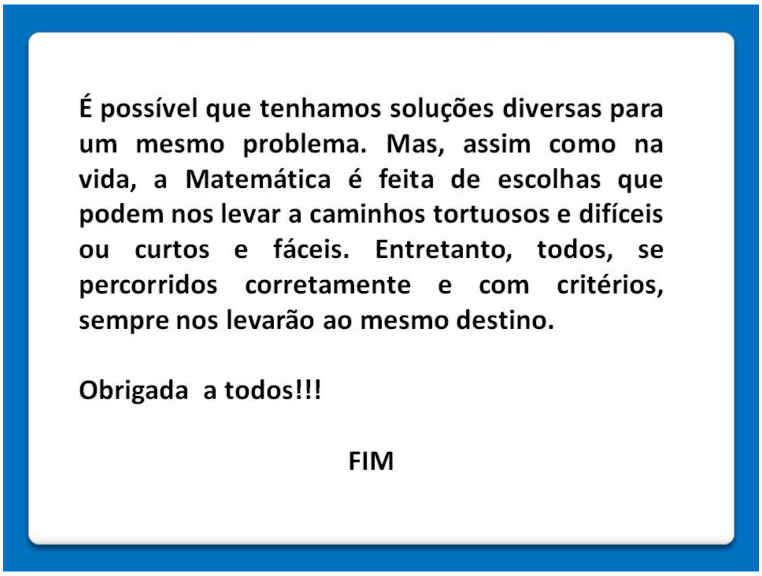
Figura 42 – Quarto Encontro - Slide 6



Fonte: própria autora

O Slide 7 finaliza o nosso trabalho. Através dele, pretende-se que os alunos reflitam sobre a forma de aprendizagem usada e emitam sua opinião a respeito do projeto.

Figura 43 – Quarto Encontro - Slide 7



Fonte: própria autora

6.2 RELATO SOBRE O QUARTO ENCONTRO

O quarto encontro foi mais rápido, pois analisamos o caso de cinco e seis polígonos regulares ao redor de um vértice. Usamos o mesmo método já feito para quatro polígonos, que já havia funcionado muito bem. Os grupos já sabiam que seriam poucas as tentativas e poucos os mosaicos que nos serviriam.

Iniciamos como nos outros encontros, agora com cinco polígonos, os quais têm m, n, r, s e t lados, com $m \leq n \leq r \leq s \leq t$.

Os alunos chegaram à conclusão de que m deveria ser 3, pois fizeram a divisão de 360° por 5 e com isso constataram que não haveria possibilidade de outro valor para m.

Preferiram ir diretamente para a tabela e assim o fizeram.

Observaram que embora fossem poucas as possibilidades, teriam que olhar a distribuição dos polígonos ao redor do vértice, o que daria um pouco mais de trabalho.

Na sequência, mostrei o molde a ser usado através do Slide 4 na figura 40.

Tabela 6 – Tabela molde para cinco polígonos ao redor de um vértice

m	n	r	s	sobra	t	(...,...,...)

A partir daí ficou por conta deles, eu queria ver o resultado e o tempo que levariam para descobrir as possibilidades, a fim de comprovar que os encontros anteriores surtiram efeito, por isso conseguiriam rapidamente chegar à conclusão.

Tabela 7 – Tabela para cinco polígonos ao redor de um vértice

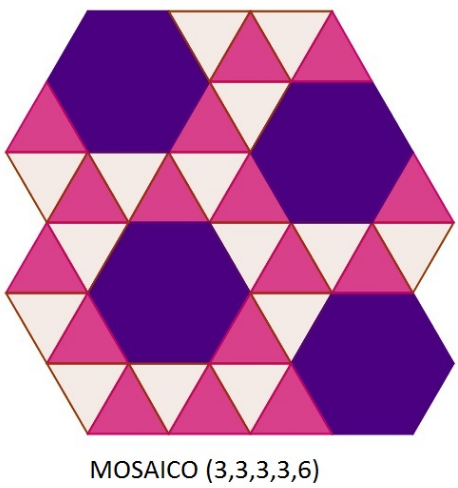
m	n	r	s	sobra	t	$(\ldots,\ldots,\ldots,\ldots)$
3	3	3	3	120°	6	$(3,3,3,3,6)$
3	3	3	4	90°	4	$(3,3,3,4,4)$

A tabela acima foi montada pela maioria dos grupos, que já sabiam da necessidade de trabalhar com os polígonos ao redor do vértice, diferenciando a ordem entre eles .

Outros grupos fizeram a tabela um pouco maior, tentando inserir nela todas as possibilidades que poderiam conseguir.

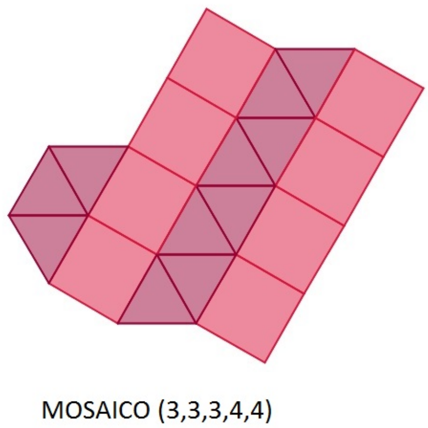
Seguem abaixo os mosaicos construídos pelos alunos. Como esperado, houve mais rapidez na construção.

Figura 44 – MOSAICO (3,3,3,3,6)



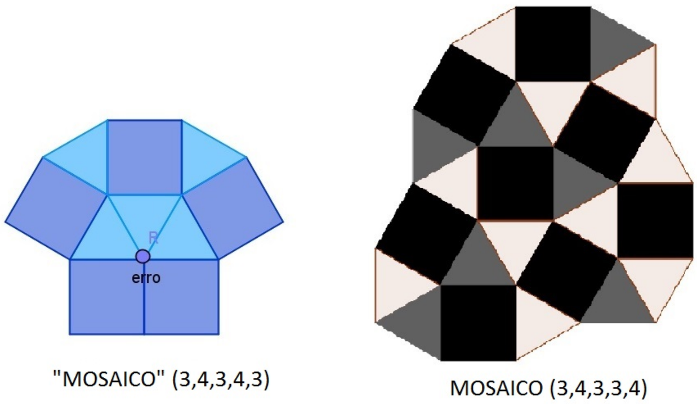
Fonte: ALUNOS DO GRUPO 3

Figura 45 – MOSAICO (3,3,3,4,4)



Fonte: ALUNOS DO GRUPO 3

Figura 46 – "MOSAICO"(3,4,3,4,3) e MOSAICO (3,4,3,3,4)



Fonte: ALUNOS DO GRUPO 1 E GRUPO 4

Dos mosaicos construídos com 5 polígonos ao redor de um vértice, dois pavimentam o plano sem falhas, o conjunto (3,3,3,4,4) e o conjunto (3,4,3,4,3). Os outros apresentam problemas em relação às regras.

Neste mesmo encontro citamos o caso dos 6 polígonos ao redor do vértice e os grupos viram que a única possibilidade era a de seis triângulo equiláteros, o que já havia sido constatado no primeiro encontro.

Terminado todos estes encontros precisávamos de uma conclusão final.

Afinal, quantos conjuntos de polígonos regulares pavimentam o plano seguindo as orientações feitas no primeiro encontro?

Organizamos estes dados em uma tabela para que houvesse mais clareza. Baseamo-nos na quantidade de polígonos ao redor do vértice para fazê-la.

Tabela 8 – Conclusão final sobre quais conjuntos de polígonos regulares pavimentam o plano de acordo com as orientações do projeto

Número de polígonos ao redor de um vértice	Mosaicos possíveis
3	$(3,12,12)$,$(4,6,12)$,$(4,8,8)$,$(6,6,6)$
4	$(3,6,3,6)$,$(3,4,6,4)$,$(4,4,4,4)$
5	$(3,3,3,3,6)$,$(3,3,3,4,4)$,$(3,3,4,3,4)$
6	$(6,6,6,6,6,6)$

Terminando a aula, cada aluno recebeu uma cópia do artigo e puderam ver que as conclusões a que chegaram foram as mesmas e ainda observaram que dentre os mosaicos mostrados no artigo, existe um com erro em sua construção (página 11 do artigo, figura localizada na segunda linha, primeira coluna).

Ressaltaram ainda que a forma como trabalhamos foi bem mais fácil que a apresentada no artigo e que este, realmente, usa fórmulas grandes que foram usadas por eles, sem sequer perceberem. Apesar de terem feito muitas contas, chegaram a alguma conclusão, o que talvez não tivessem conseguido se tivessem usado o caminho proposto pelo artigo.

7 ROTEIRO PARA A APLICAÇÃO DO PROJETO

Inicialmente este trabalho foi planejado para ser aplicado para um grupo seleto e reduzido de alunos pelas condições e necessidades para o bom andamento do mesmo. Com turmas numerosas de alunos não teria o desenvolvimento e empenho dos alunos.

Precisa-se para a aplicação de um Data-show, computadores de acordo com o número de alunos e muito empenho por parte dos alunos.

Separei o trabalho em quatro encontros, o que foi bom pois não ficou cansativo para que tivesse êxito.

Preparei com antecedência os slides para os encontros e no caso de precisarem usar estará disponível na seguinte página :

http://juapoiomat.blogspot.com.br/

Cada Slide corresponde a um encontro.

Farei uma síntese do que aconteceu em cada encontro, para facilitar, caso algum professor tem interesse em aplicar o trabalho.

7.1 ROTEIRO PARA O PRIMEIRO ENCOTRO

- Primeiramente fazer uma revisão do conteúdo sobre polígonos regulares para que todos os alunos estejam num mesmo nível
- Precisam saber que a soma dos ângulos em volta dos vértices devem ser 360°
- Só podem ter três tipos de polígonos regulares que têm como ângulo interno um divisor de 360°, portanto que mosaicos regulares só conseguimos três tipos, os formados por triângulos, quadrados e hexágonos.
- Devem ser informados das condições da planificação, isso tem que ficar bem claro para evitar problemas posteriores.
- É importante que eles desenvolvam todos os mosaicos encontrados no Geogebra para uma melhor visualização.
- Devemos levá-los a observar que só poderemos ter de três a seis polígonos ao redor do vértice.
- Ao final da aula pedir que façam em cada uma tabela onde existe uma relação entre o número de lados e os ângulos internos de vários polígonos pois será muito usado posteriormente.

7.2 ROTEIRO PARA O SEGUNDO ENCOTRO

- Este encontro é o mais demorado e trabalhoso, estaremos trabalhando com três polígonos ao redor do vértice.
- A ajuda da tabela feita em casa de extrema importância.
- Explicar como se usa a tabela já com a quantidade de lados dos polígonos e depois deixar por conta dos alunos o trabalho de encontrar os valores que servem.
- Encontrei um problema com o polígono de 42 lados pois o conjunto (3,7,42) forma 360°na soma dos ângulos internos mas não é fácil de enxergar isso pois não são ângulos com valores exatos.
- É importante que eles usem o GeoGebra para ver os mosaicos que servem e os que não servem para o trabalho.

7.3 ROTEIRO PARA O TERCEIRO ENCOTRO

- Neste encontro o objetivo é encontrar quatro polígonos regulares ao redor do vértice.
- Como já passaram pelo segundo encontro e já conhecem como se constrói a tabela, a tendência é que eles queiram fazer a mesma coisa, evite que isso aconteça, pois neste encontro deverão fazer menos tentativas encontrando os valores a serem colocados na tabela antes de inseri-los.
- Com a ajuda dos Slides você vai induzi-los a encontrar o mínimo do polígono de menor lado e também o maior valor do terceiro polígono em relação aos lados. Para encontrar o maior valor para este polígono você deve ter os dois polígonos anteriores com ângulos interno o menor possível.
- A parte mais complicada é que neste encontro existem alguns conjuntos de polígonos que organizados de forma diferente ao redor do vértice podem ou não estar dentro das condições do projeto.
- Mais uma vez todos os polígonos encontrados devem ser feitos no Geogebra e observar a distribuição dos polígonos, pois alguns apesar de planificar a superfície tem vértices com configurações diferente.

7.4 ROTEIRO PARA O QUARTO ENCOTRO

- Neste encontro serão encontrados polígonos de cinco lados e seis e também será feita uma análise entre o processo usado e o artigo que o motivou

- Este encontro não tem muitos problemas, os alunos já estão habituados a lidar com a tabela e também já aprenderam como encontrar com mais facilidade os valores a serem usados.
- Também usaram o GeoGebra para a construção dos mosaicos.
- Encontrei dificuldades na análise feita do artigo, pois os alunos desconhecem a construção de fórmulas e também não têm muita habilidade com desigualdades.

8 CONCLUSÃO

Por toda minha vida docente acreditei que a aprendizagem quando adquirida através da investigação nos traz mais consolidação do conteúdo proposto.

A partir do primeiro encontro, outros alunos tiveram o interesse em participar do projeto, mas como já havia começado com um grupo e as orientações iniciais já haviam sido dadas, não pude permitir. Isso foi um fato positivo, pois os participantes que iniciaram o projeto gostaram do primeiro encontro , divulgaram o que estava sendo feito e outros se interessaram em aderir.

Outro aspecto positivo foi a inserção do GeoGebra na vida destes alunos, pois a maioria não sabia da existência e muito menos da praticidade que o programa nos proporciona.

Acho que o objetivo que almejava foi alcançado a partir do momento em que notei o envolvimento dos alunos, que participaram efetivamente, mesmo com os encontros feitos fora do horário normal de aula.

Ao mostrar-lhes o artigo de onde surgiu a ideia, eles viram que a forma como o trabalho foi conduzido os levou à mesma conclusão, porém, por caminhos diferentes.

A ideia das desigualdades do artigo fez com que ficassem curiosos. Assim, tive que explicar um pouco sobre elas e o porquê de usá-las daquela forma, para que pudessem perceber o quão difícil seria para eles chegarem, sozinhos, através da metodologia proposta no artigo, à conclusão que chegaram. Notaram que podemos fazer a Matemática prazerosa, desde que escolhamos bem o caminho a ser percorrido.

Fiquei muito satisfeita e orgulhosa, pois vi que dentre muitos alunos, ainda existem os que gostam de avançar no conhecimento e abrir novos horizontes para um desenvolvimento matemático.

A dificuldade maior, segundo os alunos, foi a necessidade de descobrirem que, mesmo com os mesmos polígonos regulares, a distribuição ao redor do vértice, feita de forma diferente formaria ou não mosaicos, que pavimentariam o plano ou apresentariam falhas.

Em suma, achei positivo o trabalho, com falhas decerto, mas com mais pontos positivos que negativos.

Perguntados sobre o que acharam do projeto, os alunos responderam que nem viram o tempo passar e que para eles foi muito bom, pois além do conhecimento adquirido, puderam interagir com outras escolas, conhecer pessoas novas, além de aprofundar um pouco mais no mundo mágico da Geometria, conhecendo-o melhor, prazer não experimentado por muitos.

Infelizmente, o tempo limitado, a ausência de materiais adequados e o grande número de alunos em sala não nos permite desenvolver esse tipo de trabalho nas escolas.

REFERÊNCIAS

[1] ALVES, Sérgio; DALCIN, Mário. Mosaicos do Plano. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 40, p.3-12, 1999.

[2] BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo padrões em mosaicos**. 4. ed. São Paulo: Atual, 1993.

[3] BUENO, Silveira. **Minidicionário da língua portuguesa**. São Paulo: FTD, 2007

[4] FARMER, David W.. **Grupos e Simetria: Um guia para descobrir a matemática**. Lisboa: Gradiva, 1999.

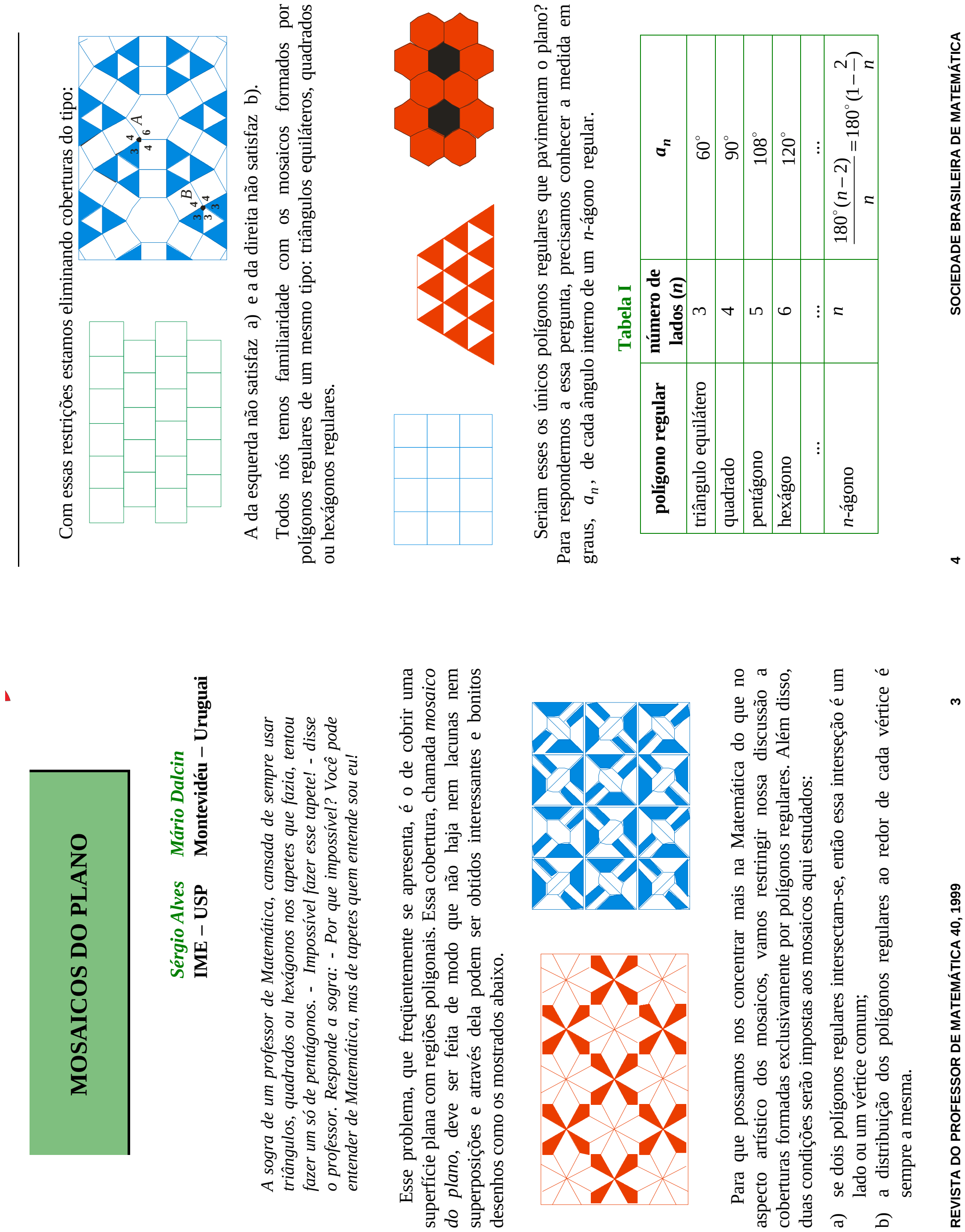
[5] Kepler,Johannes. **Harmonices mundi Libri v.** Linz: 1619. Edição facsimile

[6] Parâmetros Curriculares Nacionais. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 14/06/2016.

[7] Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf> Acesso em: 08/07/2016.

ANEXO A – Artigo - Mosaicos do Plano

Figura 47 – Paginas 1 e 2 artigo



MOSAICOS DO PLANO

Sérgio Alves — IME – USP

Mário Dalcin — Montevidéu – Uruguai

A sogra de um professor de Matemática, cansada de sempre usar triângulos, quadrados ou hexágonos nos tapetes que fazia, tentou fazer um só de pentágonos. - Impossível fazer esse tapete! - disse o professor. Responde a sogra: - Por que impossível? Você pode entender de Matemática, mas de tapetes quem entende sou eu!

Esse problema, que freqüentemente se apresenta, é o de cobrir uma superfície plana com regiões poligonais. Essa cobertura, chamada *mosaico do plano*, deve ser feita de modo que não haja nem lacunas nem superposições e através dela podem ser obtidos interessantes e bonitos desenhos como os mostrados abaixo.

Para que possamos nos concentrar mais na Matemática do que no aspecto artístico dos mosaicos, vamos restringir nossa discussão a coberturas formadas exclusivamente por polígonos regulares. Além disso, duas condições serão impostas aos mosaicos aqui estudados:

a) se dois polígonos regulares intersectam-se, então essa interseção é um lado ou um vértice comum;
b) a distribuição dos polígonos regulares ao redor de cada vértice é sempre a mesma.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA 40, 1999 3

Com essas restrições estamos eliminando coberturas do tipo:

A da esquerda não satisfaz a) e a da direita não satisfaz b).

Todos nós temos familiaridade com os mosaicos formados por polígonos regulares de um mesmo tipo: triângulos equiláteros, quadrados ou hexágonos regulares.

Seriam esses os únicos polígonos regulares que pavimentam o plano? Para respondermos a essa pergunta, precisamos conhecer a medida em graus, a_n, de cada ângulo interno de um n-ágono regular.

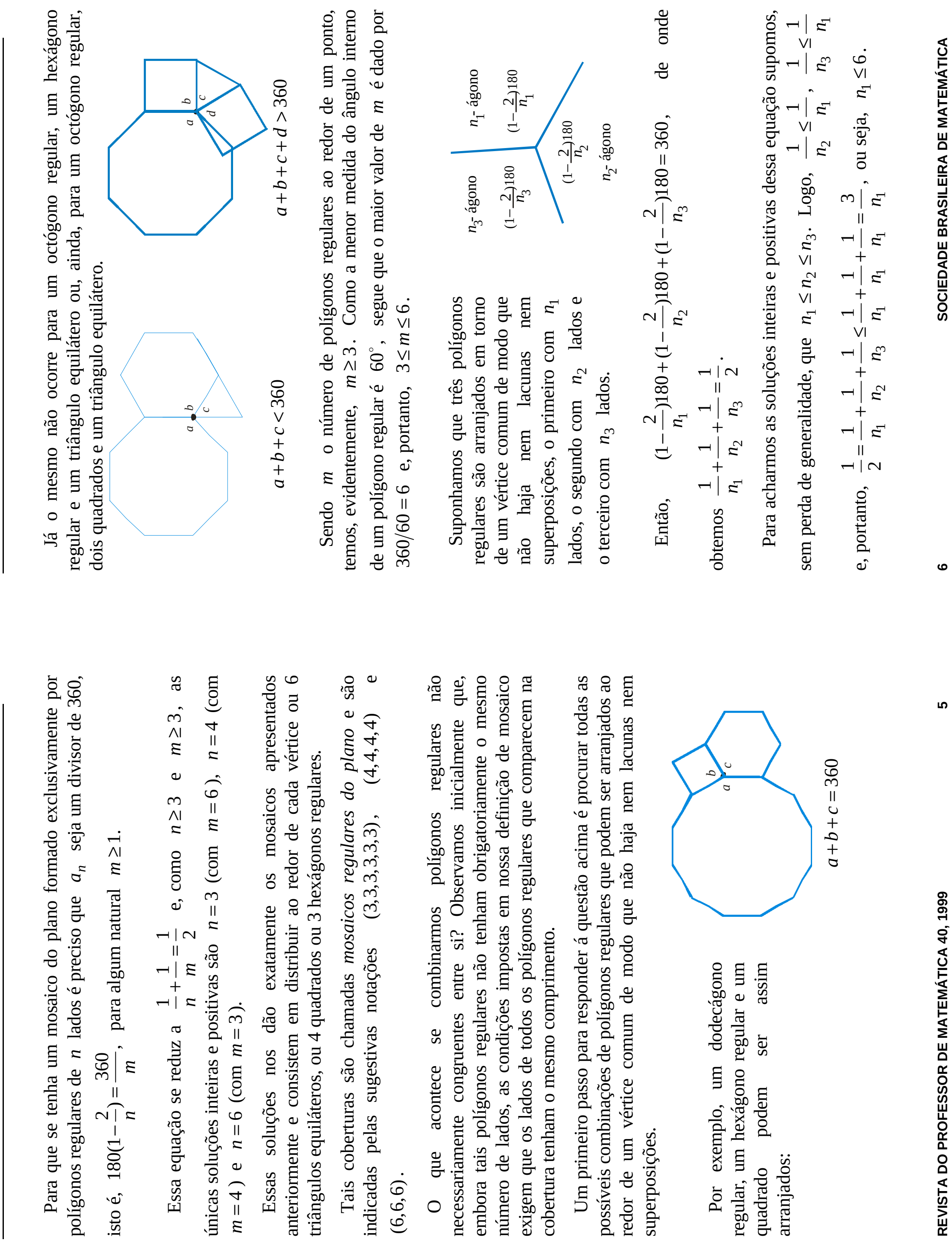
Tabela I

polígono regular	número de lados (n)	a_n
triângulo equilátero	3	60°
quadrado	4	90°
pentágono	5	108°
hexágono	6	120°
...	...	...
n-ágono	n	$\frac{180^\circ(n-2)}{n} = 180^\circ(1-\frac{2}{n})$

4 SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fonte: Artigo Mosaicos no Plano[1]

Figura 48 – Paginas 3 e 4 artigo



Para que se tenha um mosaico do plano formado exclusivamente por polígonos regulares de n lados é preciso que a_n seja um divisor de 360, isto é, $180(1-\frac{2}{n})=\frac{360}{m}$, para algum natural $m \geq 1$.

Essa equação se reduz a $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{2}$ e, como $n \geq 3$ e $m \geq 3$, as únicas soluções inteiras e positivas são $n=3$ (com $m=6$), $n=4$ (com $m=4$) e $n=6$ (com $m=3$).

Essas soluções nos dão exatamente os mosaicos apresentados anteriormente e consistem em distribuir ao redor de cada vértice ou 6 triângulos equiláteros, ou 4 quadrados ou 3 hexágonos regulares.

Tais coberturas são chamadas *mosaicos regulares do plano* e são indicadas pelas sugestivas notações $(3,3,3,3,3,3)$, $(4,4,4,4)$ e $(6,6,6)$.

O que acontece se combinarmos polígonos regulares não necessariamente congruentes entre si? Observamos inicialmente que, embora tais polígonos regulares não tenham obrigatoriamente o mesmo número de lados, as condições impostas em nossa definição de mosaico exigem que os lados de todos os polígonos regulares que comparecem na cobertura tenham o mesmo comprimento.

Um primeiro passo para responder á questão acima é procurar todas as possíveis combinações de polígonos regulares que podem ser arranjados ao redor de um vértice comum de modo que não haja nem lacunas nem superposições.

Por exemplo, um dodecágono regular, um hexágono regular e um quadrado podem ser assim arranjados:

$a+b+c=360$

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA 40, 1999 5

Já o mesmo não ocorre para um octógono regular, um hexágono regular e um triângulo equilátero ou, ainda, para um octógono regular, dois quadrados e um triângulo equilátero.

$a+b+c<360$ $a+b+c+d>360$

Sendo m o número de polígonos regulares ao redor de um ponto, temos, evidentemente, $m \geq 3$. Como a menor medida do ângulo interno de um polígono regular é 60°, segue que o maior valor de m é dado por $360/60=6$ e, portanto, $3 \leq m \leq 6$.

Suponhamos que três polígonos regulares são arranjados em torno de um vértice comum de modo que não haja nem lacunas nem superposições, o primeiro com n_1 lados, o segundo com n_2 lados e o terceiro com n_3 lados.

n_3- ágono n_1- ágono $(1-\frac{2}{n_3})180$ $(1-\frac{2}{n_1})180$ $(1-\frac{2}{n_2})180$ n_2- ágono

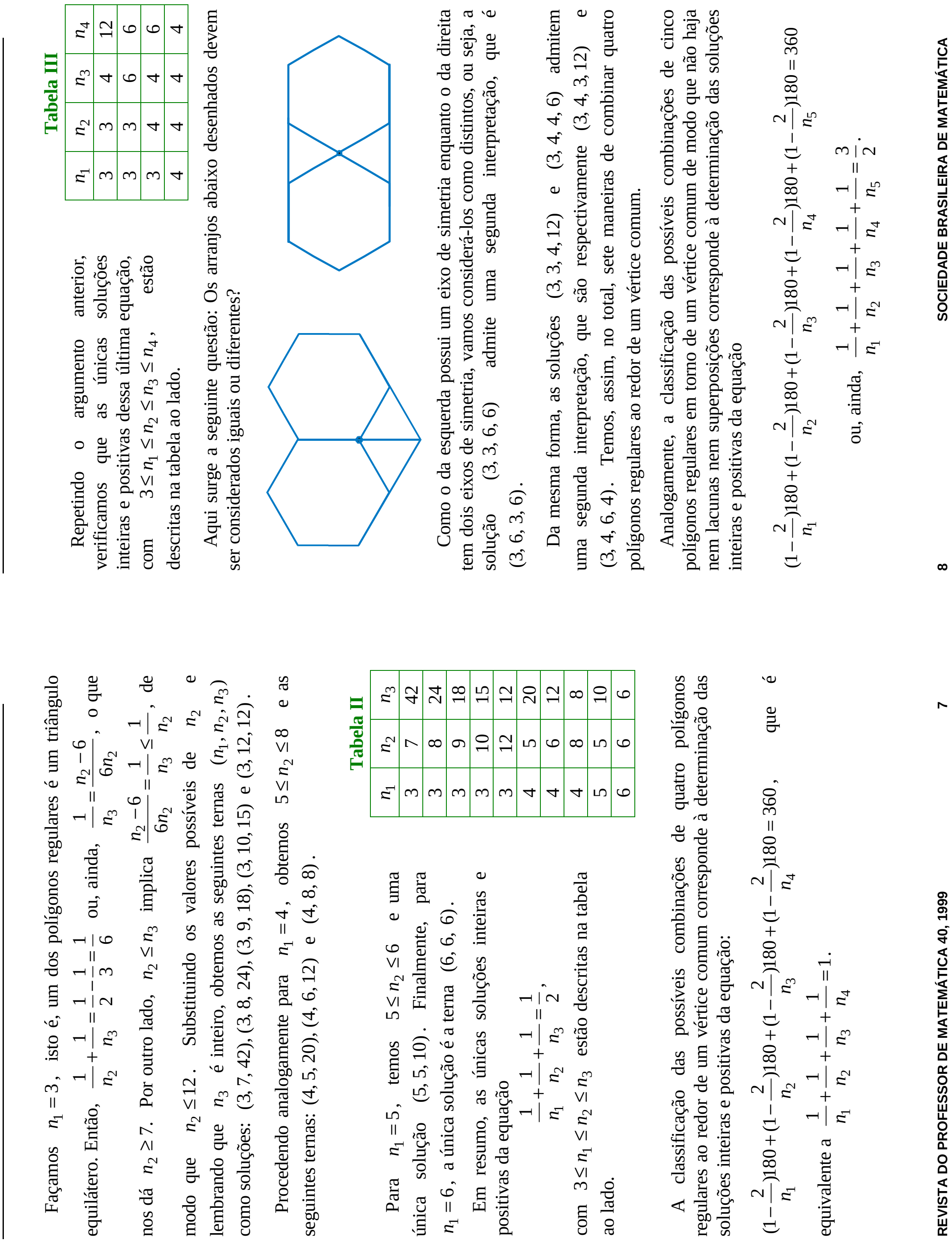
Então, $(1-\frac{2}{n_1})180+(1-\frac{2}{n_2})180+(1-\frac{2}{n_3})180=360$, de onde obtemos $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2}$.

Para acharmos as soluções inteiras e positivas dessa equação supomos, sem perda de generalidade, que $n_1 \leq n_2 \leq n_3$. Logo, $\frac{1}{n_2} \leq \frac{1}{n_1}$, $\frac{1}{n_3} \leq \frac{1}{n_1}$ e, portanto, $\frac{1}{2}=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3} \leq \frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_1}=\frac{3}{n_1}$, ou seja, $n_1 \leq 6$.

6 SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fonte: Artigo Mosaicos no Plano[1]

Figura 49 – Paginas 5 e 6 artigo



Façamos $n_1 = 3$, isto é, um dos polígonos regulares é um triângulo equilátero. Então, $\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ ou, ainda, $\frac{1}{n_3} = \frac{n_2 - 6}{6n_2}$, o que nos dá $n_2 \geq 7$. Por outro lado, $n_2 \leq n_3$ implica $\frac{n_2 - 6}{6n_2} = \frac{1}{n_3} \leq \frac{1}{n_2}$, de modo que $n_2 \leq 12$. Substituindo os valores possíveis de n_2 e lembrando que n_3 é inteiro, obtemos as seguintes ternas (n_1, n_2, n_3) como soluções: $(3, 7, 42), (3, 8, 24), (3, 9, 18), (3, 10, 15)$ e $(3, 12, 12)$.

Procedendo analogamente para $n_1 = 4$, obtemos $5 \leq n_2 \leq 8$ e as seguintes ternas: $(4, 5, 20), (4, 6, 12)$ e $(4, 8, 8)$.

Para $n_1 = 5$, temos $5 \leq n_2 \leq 6$ e uma única solução $(5, 5, 10)$. Finalmente, para $n_1 = 6$, a única solução é a terna $(6, 6, 6)$.

Em resumo, as únicas soluções inteiras e positivas da equação

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2},$$

com $3 \leq n_1 \leq n_2 \leq n_3$ estão descritas na tabela ao lado.

Tabela II

n_1	n_2	n_3
3	7	42
3	8	24
3	9	18
3	10	15
3	12	12
4	5	20
4	6	12
4	8	8
5	5	10
6	6	6

A classificação das possíveis combinações de quatro polígonos regulares ao redor de um vértice comum corresponde à determinação das soluções inteiras e positivas da equação:

$$(1 - \frac{2}{n_1})180 + (1 - \frac{2}{n_2})180 + (1 - \frac{2}{n_3})180 + (1 - \frac{2}{n_4})180 = 360,$$ que é equivalente a $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1$.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA 40, 1999 7

Repetindo o argumento anterior, verificamos que as únicas soluções inteiras e positivas dessa última equação, com $3 \leq n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$, estão descritas na tabela ao lado.

Tabela III

n_1	n_2	n_3	n_4
3	3	4	12
3	3	6	6
3	4	4	6
4	4	4	4

Aqui surge a seguinte questão: Os arranjos abaixo desenhados devem ser considerados iguais ou diferentes?

Como o da esquerda possui um eixo de simetria enquanto o da direita tem dois eixos de simetria, vamos considerá-los como distintos, ou seja, a solução $(3, 3, 6, 6)$ admite uma segunda interpretação, que é $(3, 6, 3, 6)$.

Da mesma forma, as soluções $(3, 3, 4, 12)$ e $(3, 4, 4, 6)$ admitem uma segunda interpretação, que são respectivamente $(3, 4, 3, 12)$ e $(3, 4, 6, 4)$. Temos, assim, no total, sete maneiras de combinar quatro polígonos regulares ao redor de um vértice comum.

Analogamente, a classificação das possíveis combinações de cinco polígonos regulares em torno de um vértice comum de modo que não haja nem lacunas nem superposições corresponde à determinação das soluções inteiras e positivas da equação

$$(1 - \frac{2}{n_1})180 + (1 - \frac{2}{n_2})180 + (1 - \frac{2}{n_3})180 + (1 - \frac{2}{n_4})180 + (1 - \frac{2}{n_5})180 = 360$$

ou, ainda, $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{3}{2}$.

8 SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fonte: Artigo Mosaicos no Plano[1]

Figura 50 – Paginas 7 e 8 artigo

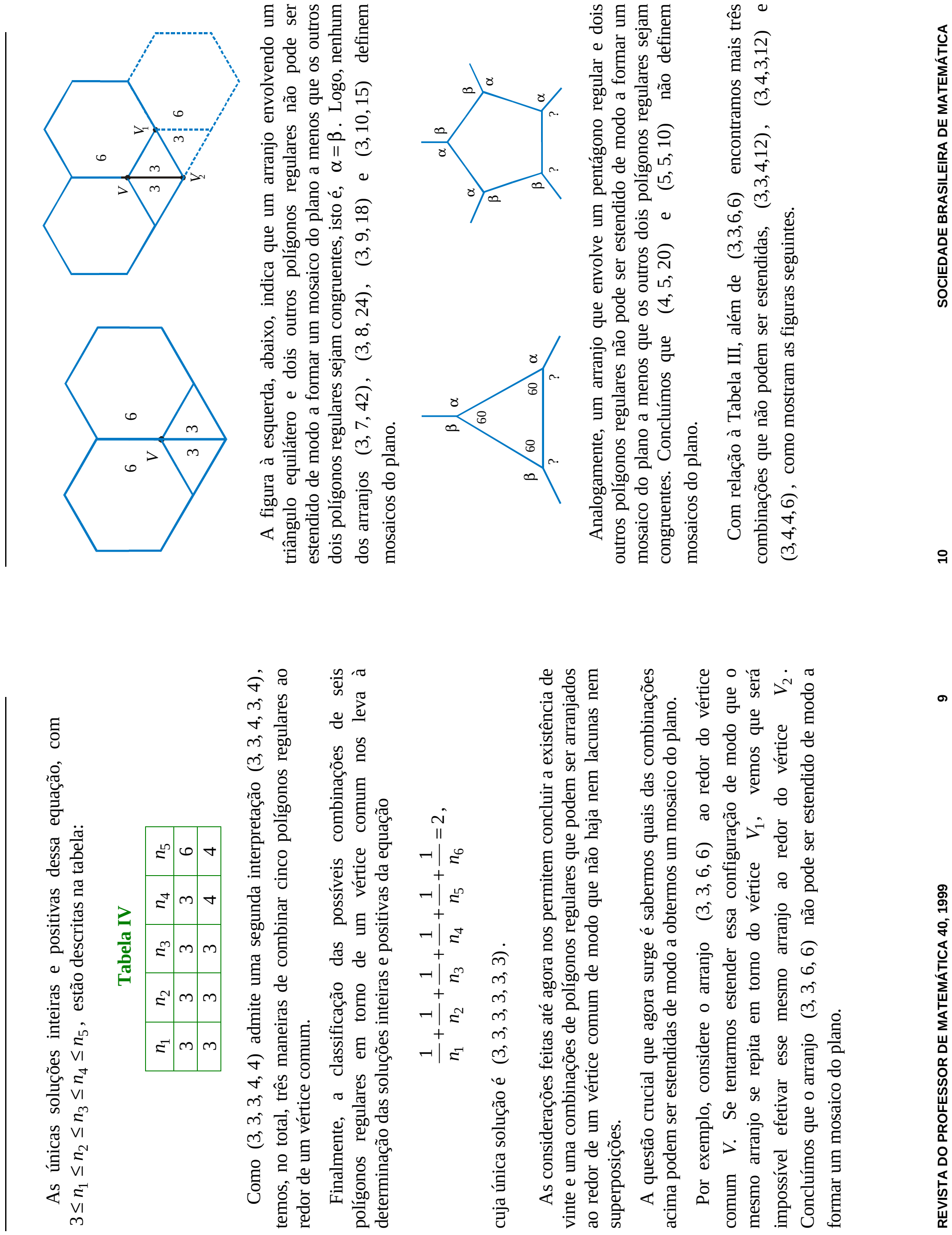

As únicas soluções inteiras e positivas dessa equação, com $3 \le n_1 \le n_2 \le n_3 \le n_4 \le n_5$, estão descritas na tabela:

Tabela IV

n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
3	3	3	3	6
3	3	3	4	4

Como $(3, 3, 3, 4, 4)$ admite uma segunda interpretação $(3, 3, 4, 3, 4)$, temos, no total, três maneiras de combinar cinco polígonos regulares ao redor de um vértice comum.

Finalmente, a classificação das possíveis combinações de seis polígonos regulares em torno de um vértice comum nos leva à determinação das soluções inteiras e positivas da equação

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=2,$$

cuja única solução é $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$.

As considerações feitas até agora nos permitem concluir a existência de vinte e uma combinações de polígonos regulares que podem ser arranjados ao redor de um vértice comum de modo que não haja nem lacunas nem superposições.

A questão crucial que agora surge é sabermos quais das combinações acima podem ser estendidas de modo a obtermos um mosaico do plano.

Por exemplo, considere o arranjo $(3, 3, 6, 6)$ ao redor do vértice comum V. Se tentarmos estender essa configuração de modo que o mesmo arranjo se repita em torno do vértice V_1, vemos que será impossível efetivar esse mesmo arranjo ao redor do vértice V_2. Concluímos que o arranjo $(3, 3, 6, 6)$ não pode ser estendido de modo a formar um mosaico do plano.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA 40, 1999 9

A figura à esquerda, abaixo, indica que um arranjo envolvendo um triângulo equilátero e dois outros polígonos regulares não pode ser estendido de modo a formar um mosaico do plano a menos que os outros dois polígonos regulares sejam congruentes, isto é, $\alpha = \beta$. Logo, nenhum dos arranjos $(3, 7, 42)$, $(3, 8, 24)$, $(3, 9, 18)$ e $(3, 10, 15)$ definem mosaicos do plano.

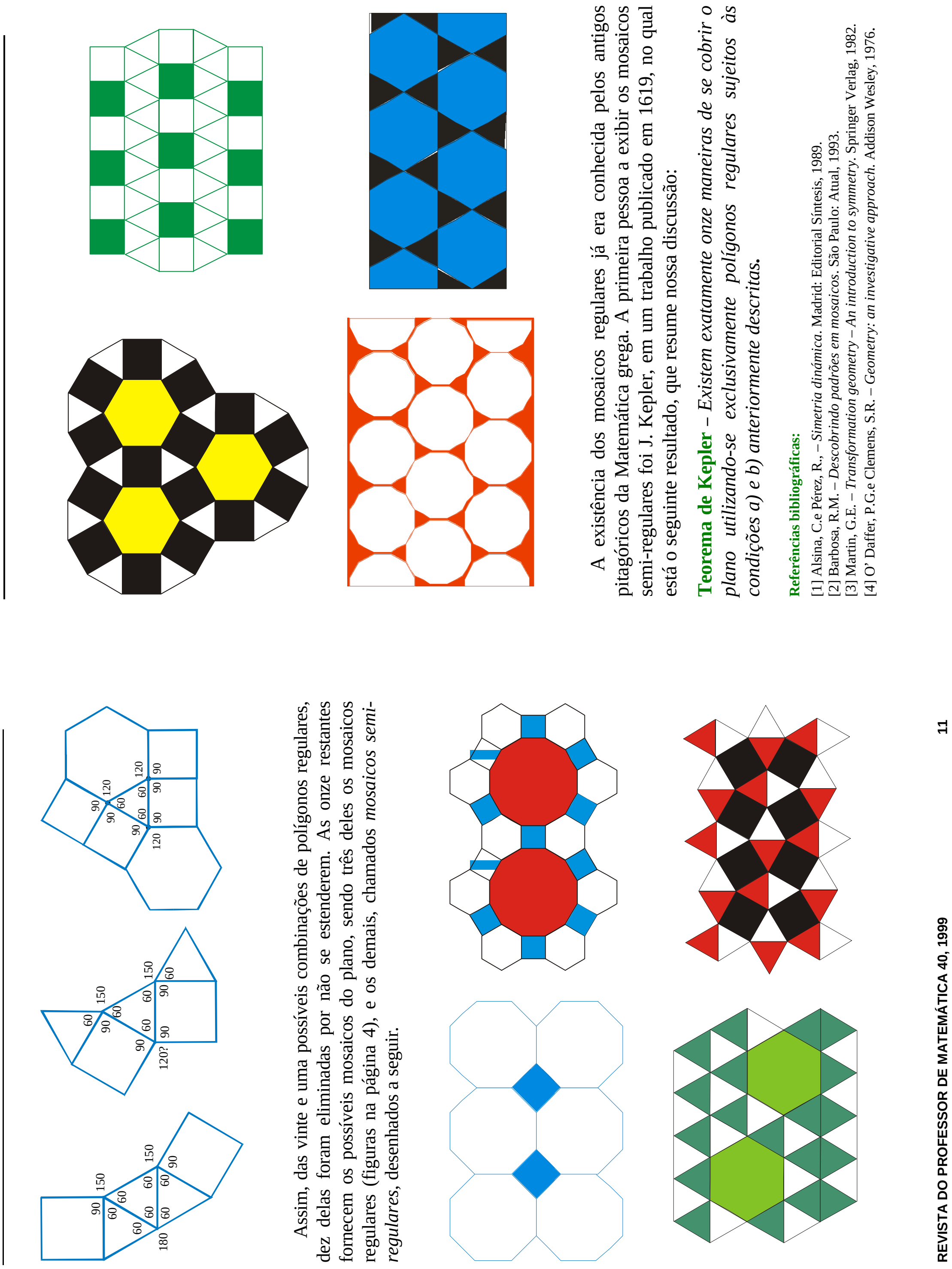
Analogamente, um arranjo que envolve um pentágono regular e dois outros polígonos regulares não pode ser estendido de modo a formar um mosaico do plano a menos que os outros dois polígonos regulares sejam congruentes. Concluímos que $(4, 5, 20)$ e $(5, 5, 10)$ não definem mosaicos do plano.

Com relação à Tabela III, além de $(3,3,6,6)$ encontramos mais três combinações que não podem ser estendidas, $(3,3,4,12)$, $(3,4,3,12)$ e $(3,4,4,6)$, como mostram as figuras seguintes.

10 SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Fonte: Artigo Mosaicos no Plano[1]

Figura 51 – Paginas 9 e 10 artigo



Assim, das vinte e uma possíveis combinações de polígonos regulares, dez delas foram eliminadas por não se estenderem. As onze restantes fornecem os possíveis mosaicos do plano, sendo três deles os mosaicos regulares (figuras na página 4), e os demais, chamados *mosaicos semi-regulares*, desenhados a seguir.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA 40, 1999 11

A existência dos mosaicos regulares já era conhecida pelos antigos pitagóricos da Matemática grega. A primeira pessoa a exibir os mosaicos semi-regulares foi J. Kepler, em um trabalho publicado em 1619, no qual está o seguinte resultado, que resume nossa discussão:

Teorema de Kepler – *Existem exatamente onze maneiras de se cobrir o plano utilizando-se exclusivamente polígonos regulares sujeitos às condições a) e b) anteriormente descritas.*

Referências bibliográficas:

[1] Alsina, C.e Pérez, R., – *Simetria dinámica*. Madrid: Editorial Síntesis, 1989.
[2] Barbosa, R.M. – *Descobrindo padrões em mosaicos*. São Paulo: Atual, 1993.
[3] Martin, G.E. – *Transformation geometry – An introduction to symmetry*. Springer Verlag, 1982.
[4] O' Daffer, P.G.e Clemens, S.R. – *Geometry: an investigative approach*. Addison Wesley, 1976.

Fonte: Artigo Mosaicos no Plano[1]