Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Luiz Fernando Barbosa de Queiroz

Construções Gráficas Polinomiais Fazendo Uso de Derivadas

Juiz de Fora

2016

Luiz Fernando Barbosa de Queiroz

Construções Gráficas Polinomiais Fazendo Uso de Derivadas

Dissertação apresentada ao PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática , como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Professor Dr. Eduard Toon

Juiz de Fora

2016

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

de Queiroz, Luiz Fernando Barbosa.
Construções Gráficas Polinomiais Fazendo Uso de Derivadas / Luiz Fernando Barbosa de Queiroz. – 2016.
73 f. : il.

Orientador: Professor Dr. Eduard Toon
Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2016.

1.Derivadas. 2.Gráficos I. Toon, Eduard, orient. II. Título.

Luiz Fernando Barbosa de Queiroz

Construções Gráficas Polinomiais Fazendo Uso de Derivadas

Dissertação apresentada ao PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática , como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 06 de agosto de 2016

BANCA EXAMINADORA

Professor Dr. Eduard Toon
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Marcelo Oliveira Veloso
Universidade Federal de São João del-Rei

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

A esta faculdade, seu corpo docente e coordenação que concretizaram a oportunidade dada a mim e colegas de almejarem um futuro melhor.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

Ao meu orientador Eduard Toon, pelas suas correções e incentivos.

À minha filha, que com seu amor, me deu forças nos momentos mais difíceis.

E a todos que, direta ou indiretamente, fizeram parte da minha formação, com especial agradecimento a Sidney Pinheiro Duarte, o meu muito obrigado.

RESUMO

Esse trabalho trata dos temas de funções, limites e derivadas. Tendo por objetivo final mostrar a aplicação dos conceitos de derivada nas construções gráficas de funções polinomiais, especificamente de funções polinomiais do segundo e terceiro grau por serem as mais adequadas ao Ensino Médio. Para isso, serão utilizados instrumentos matemáticos que fazem uso de derivadas, tais como: Teste da Derivada primeira e Teste da Derivada segunda.
Palavras-chave: Derivadas. Gráficos.

ABSTRACT

This work deals with the issues of functions , limits and derivatives . With the ultimate goal to show the application of the concepts of derivatives in the graphic construction of polynomial functions, in particular polynomial functions of degree two and three since they are the most suitable for the high school. To this end, we will use mathematical tools that make use of derivatives, such as: Test of the first derivative and Test of the second derivative.

Keywords: Derivatives. Graphics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho se estrutura da seguinte forma:

- Capítulo 1. INTRODUÇÃO.
- Capítulo 2. FUNÇÕES. Revisão dos principais tópicos referentes a funções, necessários a construções gráficas;
- Capítulo 3. LIMITES. Apresentação de definição de limites e principais tópicos;
- Capítulo 4. DERIVADAS. Definição e apresentação das principais técnicas utilizadas para construções gráficas;
- Capítulo 5. APLICAÇÃO GRÁFICA DE DERIVADA. Demosntração da construção gráfica propriamente dita;
- Capítulo 6. OUTRAS APLICAÇÕES DE DERIVADA. Exemplos de utilização prática de derivadas;
- Capítulo 7. PLANO DE AULA. Roteiro sugerido para ministrar o presente trabalho;
- Capitulo 8. CONCLUSÃO.

Faremos um estudo introdutório de Funções, seguido de Limites e de Derivadas para podermos aplicar ferramentas matemáticas que utilizam as derivadas para construirmos gráficos de Funções Polinomiais, identificando na função estudada os pontos de encontro com os eixos x e y, pontos críticos, ponto de inflexão, intervalos de decrescimento e crescimento, intervalos de concavidades para baixo e para cima. Veremos também brevemente, as aplicações da derivada na física e na geometria.

Nosso objetivo é aplicar esses conceitos no Ensino Médio, sempre respeitando os procedimentos, ações, recomendações e conteúdos expressos nos Parâmetros Curriculares Nacionais [5]. Para tanto, faremos construções gráficas de funções polinomiais do 2º, 3º e 4º grau, pois essas estão mais próximas da realidade dos temas estudados nessas séries escolares.

2 CONCEITOS BÁSICOS DE UMA FUNÇÃO

Define-se função como uma relação entre dois conjuntos quaisquer, onde para cada elemento de um conjunto de entrada, temos um, e somente um, elemento de um conjunto de saída. Conjuntos esses denominados de domínio e contra-domínio e que, respectivamente, serão simbolizados por $D(f)$ e $CD(f)$.

O conjunto imagem de uma função, simbolizado por $Im(f)$, é formado pelos elementos do conjunto contra-domínio que são imagem de algum elemento do domínio.

Uma função f, onde cada elemento x de um conjunto A está associado a um elemento $f(x)$ de um conjunto B, possui expressão matemática:

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Na expressão acima, temos $D(f) = A$ e o $CD(f) = B$, respectivamente.

Quando o domínio e contra-domínio são subconjuntos de $\mathbb{R}$ chamamos de função real. Uma expressão algébrica em x, denotada $f(x)$, define uma função real, cujo domínio é o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ onde a expressão $f(x)$ está definida.

O gráfico de uma função real f é o conjunto:

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = f(x)\} = \{(x, f(x); x \in D(f)\}.$$

Utilizando o sistema de eixos cartesianos xy, representamos o gráfico de f, colocando a variável independente x no eixo horizontal e a variável dependente $y = f(x)$ no eixo vertical. Assim esses eixos representam, respectivamente, o $D(f)$ e o $CD(f)$.

O gráfico de uma função real, com valores reais, forma uma curva no plano xy que mostra o seu comportamento, tais como: continuidade, descontinuidade, crescimento e decrescimento dos valores de uma função em um determinado intervalo do domínio, zeros da função, máximos e mínimos locais, pontos de inflexão, assíntotas, concavidade de curvatura do gráfico em um determinado intervalo do domínio e etc.

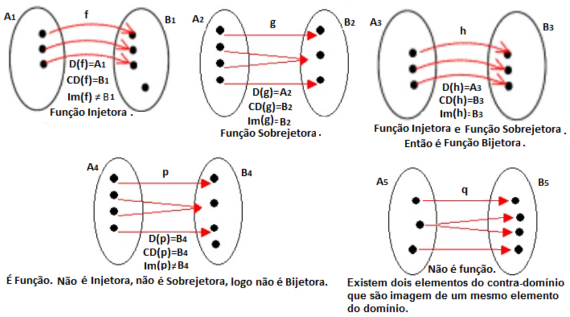
As funções podem ser do tipo polinomial, racional, modular, exponencial, logarítmica, trigonométrica e composição de outras funções.

Nesse trabalho, por se tratar de uma proposta de utilização da derivada para a construção de gráficos de funções polinomiais e visando a introdução do cálculo no 3º ano do ensino médio, não trataremos das funções exponencial, logarítmica, trigonométrica e hiperbólica.

2.1 CLASSIFICAÇÃO QUANTO AO CONTRA-DOMÍNIO (FUNÇÃO INJETORA, SOBREJETORA, BIJETORA)

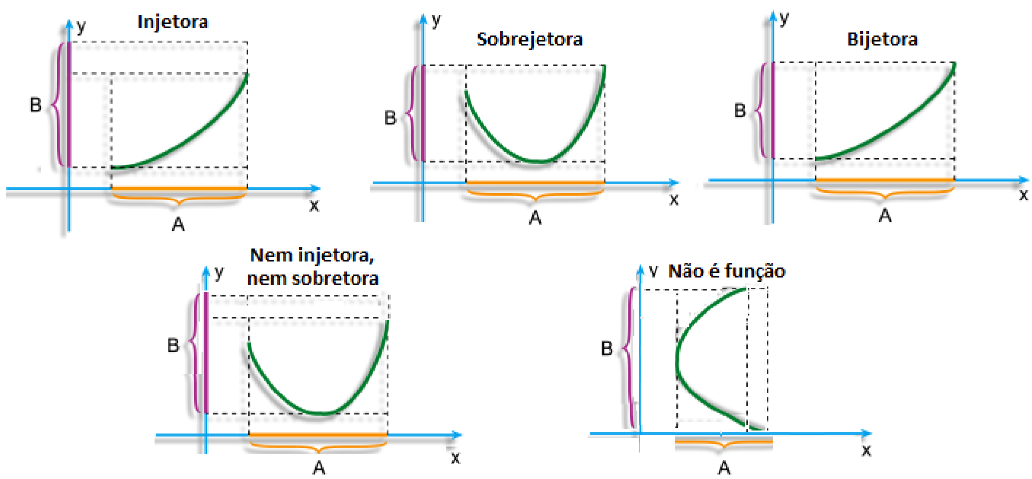
- Função Injetora: f é injetora quando para todos $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$, temos $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Função Sobrejetora: f é sobrejetora quando para todo $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$, ou seja, o conjunto imagem $Im(f)$ é igual ao contra-domínio $CD(f)$, assim, f é sobrejetora $\Leftrightarrow Im(f) = CD(f)$.
- Função Bijetora: f é bijetora quando f é sobrejetora e f é injetora.

Figura 1 – Diagrama de Venn. Funções Injetora, Sobrejetora e Bijetora.



Fonte: O Autor.

Figura 2 – Gráficos de Funções Injetora, Sobrejetora e Bijetora.



Fonte: O Autor.

2.2 PARIDADE DE UMA FUNÇÃO

- Função Par: f é par se para todo $x \in D(f)$ ocorrer $f(x) = f(-x)$, ou seja, quando os valores simétricos do domínio tiverem a mesma imagem.

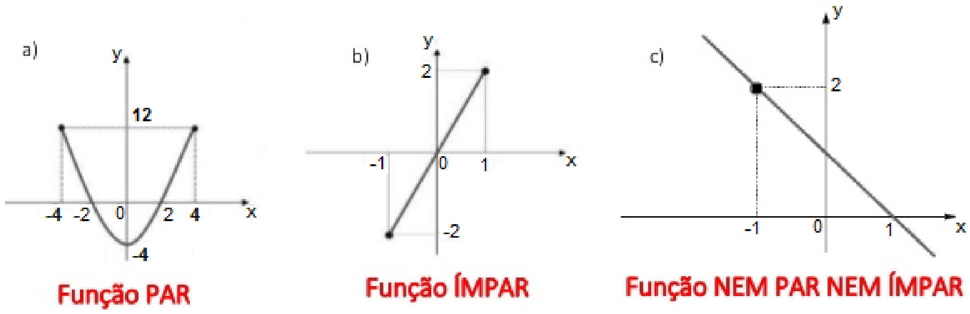
- Função Ímpar: f é ímpar se para todo $x \in D(f)$ ocorrer $f(-x) = -f(x)$, ou seja, quando os valores simétricos do domínio tiverem imagens simétricas em relação à origem.

Na Figura 3a) temos o gráfico da função $f(x) = x^2 - 4$ para um $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : -4 \leq x \leq 4\}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} : -4 \leq y \leq 12\}$. Seja $a \in D(f)$, se $x = a$ teremos $f(a) = a^2 - 4$ e para $x = -a$ encontraremos $f(-a) = (-a)^2 - 4 = a^2 - 4$. Como $f(a) = f(-a)$, segue que $f(x) = x^2 - 4$ é uma função par.

Na Figura 3b) temos o gráfico da função $f(x) = 2x$ para um $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} : -2 \leq y \leq 2\}$. Seja $a \in D(f)$, se $x = a$, teremos $f(a) = 2a$ e para $x = -a$ encontraremos $f(-a) = 2(-a) = -2a$. Como $f(a) = -f(-a)$, logo $f(x) = 2x$ é uma função ímpar.

Na Figura 3c) temos o gráfico da função $f(x) = -x + 1$ para um $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$. Seja $a \in \mathbb{R}$, se $x = a$, teremos $f(a) = -a + 1$ e para $x = -a$ encontraremos $f(-a) = -(-a)+1 = a+1$. Como $f(a) \neq f(-a)$ e $f(a) \neq -f(-a)$, temos que $f(x) = -x+1$ é uma função nem par nem ímpar.

Figura 3 – Paridade de uma função.



Fonte: O Autor.

2.3 ZEROS DE UMA FUNÇÃO OU ENCONTRO COM O EIXO Ox

Sejam $f : A \to B$ uma função qualquer e $x \in A$. Os zeros ou raízes de f são os valores de x tais que $f(x) = 0$. São nesses valores de x que o gráfico de f intercepta o eixo das abscissas.

2.4 ENCONTRO COM O EIXO Oy

Sejam $f : A \to B$ uma função qualquer e $x \in A$. O gráfico da função f interceptará o eixo das ordenadas no valor $f(x)$ quando $x = 0$.

2.5 FUNÇÃO POLINOMIAL

Define-se função polinomial como

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \end{aligned}$$

onde $n \in \mathbb{N}$.

O grau de um polinômio é expresso através do maior expoente natural entre os monômios que o formam.

Entre as funções polinomiais podemos destacar:

- As funções lineares onde $f(x) = ax$, onde $a \in \mathbb{R}$;
- As funções afins onde $f(x) = ax + a_0$, onde $a, a_0 \in \mathbb{R}$;
- As funções do 2º grau onde $f(x) = a_2 x^2 + ax + a_0$, onde $a_2, a, a_0 \in \mathbb{R}$.

1º) Exemplo de Funções Lineares:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto -5x. \end{aligned}$$

2º) Exemplo de Funções Afim:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 4x - 28. \end{aligned}$$

2º) Exemplo de Funções 2º Grau:

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2-5x+6. \end{aligned}$$

Apresentaremos aqui, um teorema de fácil utilização para a obtenção de raízes racionais de equações de terceiro grau ou superior.

Teorema 2.1 ***(Raízes Racionais)***

Seja a equação polinomial de coeficientes inteiros: $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0$, *com* $a_n\neq 0$. *Se o número racional* $\frac{p}{q}$, $p\in\mathbb{Z}$ *e* $q\in\mathbb{Z}^*$ *(p e q primos entre si) é raiz dessa equação, então p é divisor de* a_0 *e q é divisor de* a_n.

Demonstração: Considerando $\frac{p}{q}$ como raiz da equação, temos:

$$a_n.\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_{n-1}.\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+...+a_1.\left(\frac{p}{q}\right)+a_0=0$$

$$\Leftrightarrow a_n.\frac{p^n}{q^n}+a_{n-1}.\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}+...+a_1.\frac{p}{q}+a_0=0$$

$$\Leftrightarrow a_n.p^n+a_{n-1}.p^{n-1}.q+a_{n-2}.p^{n-2}.q^2+...+a_1.p.q^{n-1}+a_0.q^n=0$$

$$\Leftrightarrow a_0.q^n=p\underbrace{\left(-a_n.p^{n-1}-a_{n-1}.p^{n-2}.q-...-a_1.q^{n-1}\right)}_{A}$$

$$\Leftrightarrow a_0.q^n=p.A$$

Como p e q são primos entre si, então p divide a_0.

Analogamente, isolando $a_n.p^n$ e colocando q em evidência, concluímos que q divide a_n.

Exemplo 2.2 *Vamos determinar as raízes do polinômio* $P(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$*:*

Temos que p divide 6 e q divide 1, logo o polinômio só admite raízes racionais inteiras, as quais são divisores de 6. *Ou seja, o conjunto das possíveis raízes é* $S=\{\pm 6,\pm 3,\pm 2,\pm 1\}$.

Por tentaiva, fazemos:

$$P(1)=1-1-7+1+6=0$$

$$P(-1)=1+1-7-1+6=0$$

Como 1 *e* -1 *são raízes do polinômio, podemos agora utilizar o algoritmo de Briot Ruffini para chegarmos a uma equação de* 2^o *grau ou continuar o processo. Continuaremos o processo:*

$$P(2) = 16 - 8 - 28 + 2 + 6 = -12$$

$$P(-2) = 16 + 8 - 28 - 2 + 6 = 0$$

$$P(3) = 81 - 27 - 63 + 3 + 6 = 0$$

Concluímos então, que o conjunto solução do polinômio será $S = \{-2, -1, 1, 3\}$.

2.6 FUNÇÃO POLINOMIAL RACIONAL

São todas as funções $y = f(x)$ que podem ser descritas na forma de uma razão de dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$, sendo que $Q(x)$ não é uma constante, assim temos:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

onde o seu domínio é o subconjunto $D(f) = \{x \in R; Q(x) \neq 0\}$.

Exemplo de Funções Polinomial Racional: $f(x) = \frac{8x-3}{x-5}$, onde $P(x) = 8x - 3$ e $Q(x) = x - 5$.

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{8x-3}{x-5}. \end{aligned}$$

sendo que $x - 5 \neq 0$, então $x \neq 5$. Assim, o domínio dessa função é $D = D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 5\}$.

2.7 FUNÇÃO IRRACIONAl

Seja P um polinômio ou função polinomial racional. As funções irracionais são definidas por:

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (\sqrt[n]{P(x)}\,)^m. \end{aligned}$$

onde $n, m \in \mathbb{N}$. O domínio de f será:

- $D = D(f) = \{x \in \mathbb{R}; P(x) \geq 0\}$, se n for par;
- $D = D(f) = \mathbb{R}$, se n for ímpar.

1º) Exemplo de Função Irracional:

$$\begin{aligned} f: & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sqrt[4]{x-10}, \end{aligned}$$

onde $x - 10 \geq 0$, então $x \geq 10$. Assim, o domínio dessa função é $D = D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 10\}$.

2º) Exemplo de Função Irracional:

$$\begin{aligned} f: D & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{-3}{\sqrt{-x-10}}, \end{aligned}$$

onde $-x - 10 > 0$, então $x < -10$. Assim, o domínio dessa função é $D = D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x < -10\}$.

3º) Exemplo de Função Irracional:

$$\begin{aligned} f: D & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{-x-9}{\sqrt[3]{-x-10}}, \end{aligned}$$

onde $-x - 10 \neq 0$ e, portanto, $x \neq -10$. Assim, o domínio dessa função é $D = D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \neq -10\}$.

2.8 FUNÇÃO MODULAR

A função modular é definida por:

$$\begin{aligned} f: D & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto |g(x)|, \end{aligned}$$

com $D = D(f) = D(g)$. É também equivalente a

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & se \;\; g(x) \geq 0 \\ -g(x), & se \;\; g(x) < 0 \end{cases}$$

Exemplo de Função Modular:

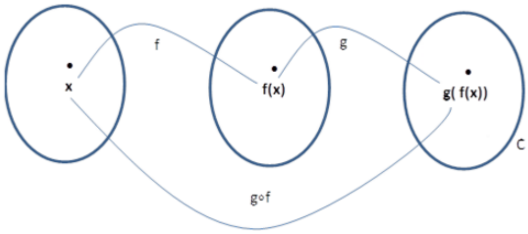
$$f(x) = |-x-20| = \begin{cases} -x-20, & se \;\; -x-20 \geq 0 \\ -(-x-20), & se \;\; -x-20 < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x-20, & se \;\; x \leq -20 \\ x+20, & se \;\; x > -20 \end{cases}$$

2.9 COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

Sejam as funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$, temos então $gof : A \to C$, onde gof é a função composta definida por $(gof)(x) = g(f(x))$, $x \in A$.

Figura 4 – Função Composta.



Fonte: O Autor

Exemplo 2.3 *Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Calcule $g(-5)$, tendo $f(x) = -4x - 80$ e $f(g(x)) = x^2 + 10$.*

Resposta: Como $f(x) = -4x - 80$ e $f(g(x)) = x^2 + 10$ temos:

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= -4g(x) - 80 \\ x^2 + 10 &= -4g(x) - 80 \\ 4g(x) &= -x^2 - 90 \\ g(x) &= \frac{-x^2 - 90}{4}. \end{aligned}$$

Logo, g(-5) será:

$$\begin{aligned} g(-5) &= \frac{-(-5)^2 - 90}{4} \\ g(-5) &= \frac{-25 - 90}{4} \\ g(-5) &= \frac{-115}{4}. \end{aligned}$$

2.10 FUNÇÃO INVERSA

Seja a função

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto y = f(x). \end{aligned}$$

A função denominada função inversa de f é descrita por:

$$\begin{aligned} f^{-1} : B &\to A \\ y &\mapsto x = f^{-1}(y). \end{aligned}$$

Essa função deve satisfazer as seguintes condições:

- ser bijetora (veja seção 2.1), pois todo elemento de B deve ser o correspondente de um único elemento de A. Assim, podemos trocar os conjuntos de posição e associar cada elemento de B ao seu correspondente de A.
- se $y = f(x)$, então $f^{-1}(y) = x$;
- se $x = f^{-1}(y)$, então $f(x) = y$.

Note que $A = D(f)$ e $A = Im(f^{-1})$; $B = Im(f)$ e $B = D(f^{-1})$.

Exemplo 2.4 *Seja*

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = 2x - 1. \end{aligned}$$

A função

$$\begin{aligned} g:\mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = \frac{x+1}{2} \end{aligned}$$

é tal que:

- *se* $y = f(x) = 2x - 1$, *então* $g(y) = g(2x-1) = \frac{2x-1+1}{2} = x$;
- *se* $y = g(x) = \frac{x+1}{2}$, *então* $f(y) = f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1 = x$.

Então, nesse caso, g é a função inversa de f, ou seja, $g = f^{-1}$.

Exemplo 2.5 *Determine a função inversa real de $f(x) = x + 5$.*
***Solução**: Como o domínio não foi mencionado, podemos admitir que $D(f) = \mathbb{R}$. Observamos que esta função é bijetora e, portanto, inversível. Para determinarmos sua inversa, precisamos trocar x por y na expressão $y = x + 5$.*
Deste modo:
$x = y + 5 \Rightarrow y = x - 5$.
Logo, $f^{-1} = x - 5$

Exemplo 2.6 *Seja a função $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ com $D(f) = \mathbb{R}$:*

Para que essa função seja injetora, é necessário que seu domínio seja o conjunto dos reais não negativos pois, caso contrário, teremos a mesma imagem para dois valores simétricos de x (exemplo: $2^2 = (-2)^2$). Notamos também que nenhum número negativo *pode ser imagem desta função. Logo, é necessário que o contra-domínio de f seja o conjunto dos reais não negativos para que a função seja sobrejetora. Assumindo esses domínio e contra-domínio para essa função, a sua inversa será, isolando x:*

$$y = x^2$$

$$\sqrt{y} = x$$

Invertendo x por y e y por x:

$$y = \sqrt{x}$$

Portanto, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Observe também aqui que $D(f) = Im(f^{-1}) = \mathbb{R}_+$ e $D(f^{-1}) = Im(f) = \mathbb{R}_+$.

Exemplo 2.7 *Seja a função $f : D(f) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{2x+3}{3x-5}$, onde $D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{5}{3}\}$:*

Para $y \in CD(f)$, devemos encontrar x tal que $f^{-1} = x \Leftrightarrow y = f(x)$, ou seja, basta trocar x por y e y por x:

$$y = \frac{2x+3}{3x-5}$$
$$x = \frac{2y+3}{3y-5}$$

Isolando y:

$$x(3y-5) = 2y+3$$

$$3xy - 5x = 2y + 3$$

$$3xy - 2y = 3 + 5x$$

$$y(3x-2) = 3 + 5x$$
$$y = \frac{3x-2}{3+5x}$$

Portanto, a função inversa da função $f : D(f) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{2x+3}{3x-5}$ será a função $f^{-1} : D(f^{-1}) \to \mathbb{R}$ dada por $f^{-1}(x) = \frac{3x-2}{3+5x}$ onde $D(f^{-1}(x)) = \left\{x \in \mathbb{R}; x \neq -\frac{3}{5}\right\}$.

3 UMA BREVE NOÇÃO DE LIMITES

3.1 LIMITE DO TERMO DE UMA SEQUÊNCIA GEOMÉTRICA

Observando o comportamento da sequência geométrica a seguir, podemos explorar inicialmente as noções de limites .

- Seja a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{a^n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{a^0}, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, ..., \frac{1}{a^n}, ...\right\}$ onde $a \in \mathbb{R}^*$ sendo que $a > 1$ e $n \in \mathbb{N}$. Usando essa sequência, pode-se observar que quando o valor de n cresce arbitrariamente ($n \to \infty$), o valor de $\frac{1}{a^n}$ decresce tendendo a zero. Quando n tende ao infinito, podemos dizer que o enésimo termo da sequência tende a zero. Assim, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = 0$$

.

Exemplo 3.1 *Fazendo* $a = 2$, *teremos:* $\left\{\frac{1}{2^0}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, ..., \frac{1}{2^n}, ...\right\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ..., \frac{1}{2^n}, ...\right\}$.

- Seja a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{a^n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{a^0}, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, ..., \frac{1}{a^n}, ...\right\}$, onde $a \in \mathbb{R}$ sendo que $a = 1$ e $n \in \mathbb{N}$. Usando essa sequência, pode-se observar que quando o valor de n cresce arbitrariamente ($n \to \infty$) o valor de $\frac{1}{a^n}$ se mantém constante igual ao valor 1 para qualquer que seja $n \in N$. Assim, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = 1$$

.

- Seja a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{a^n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{a^0}, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, ..., \frac{1}{a^n}, ...\right\}$, onde $a \in \mathbb{R}$ sendo que $0 < a < 1$ e $n \in \mathbb{N}$. Usando essa sequência, pode-se observar que quando o valor de n cresce arbitrariamente ($n \to \infty$) o valor de $\frac{1}{a^n}$ também cresce tendendo ao infinito. Quando n tende ao infinito, podemos dizer que o enésimo termo da sequência também tende ao infinito. Assim, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = \infty$$

Exemplo 3.2 *Fazendo* $a = 0,5$, *teremos:* $\left\{\frac{1}{0,5^0}, \frac{1}{0,5}, \frac{1}{0,5^2}, \frac{1}{0,5^3}, ..., \frac{1}{0,5^n}, ...\right\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{0,5}, \frac{1}{0,25}, \frac{1}{0,125}, ..., \frac{1}{0,5^n}, ...\right\} \Rightarrow \left\{1, 2, 4, 8, ..., \frac{1}{0,5^n}, ...\right\}$.

3.2 NOÇÕES DE LIMITES EM FUNÇÕES

Todo o conteúdo dessa subseção foi extraído de [4] e [7].

3.2.1 Noção intuitiva de Limite.

Uma função f tem limite L quando x tende para a se, para valores de x sendo $x \neq a$ e suficientemente próximos de a, for possível encontrar $f(x)$ próximo de L.

3.2.2 Noção formal de Limite

Antes de enunciarmos a noção formal de limite, faz-se necessário apresentarmos a definição de ponto de acumulação.

Um número $a \in \mathbb{R}$ diz-se um ponto de acumulação de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se, e somente se, existe pelo menos uma sucessão de elementos de A, todos diferentes de a, que converge para a.

Observe que o próprio a não precisa pertencer ao conjunto A.

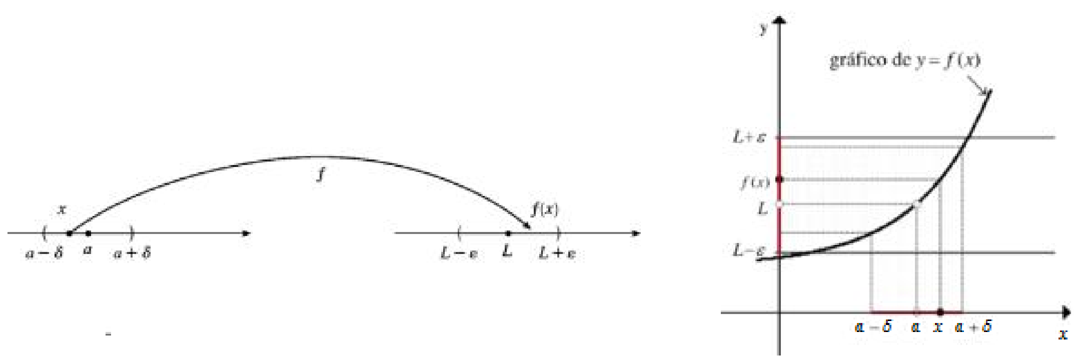
Exemplo 3.3 0 *é um ponto de acumulação do intervalo* $]0,1[$*: por exemplo, a sucessão de termo geral* $\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, *obedece os requisitos da definição acima.*

Definição 3.4 ***(Noção Formal de Limite)****:*

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo de números reais, e* a *um ponto de acumulação de* I*. Dizemos que o limite de* $f(x)$ *quando* x *tende a* a *é* L *e denotamos* $\lim_{x \to a} f(x) = L$ *quando para qualquer* $\varepsilon > 0$ *existe um* $\delta > 0$ *tal que para todo* $x \in I$*, satisfazendo* $0 < |x - a| < \delta$*, vale* $|f(x) - L| < \varepsilon$*.*

Para definirmos o limite de x tendendo a a, não se faz obrigatória a definição da função em a, isto é, o importante não é o valor da função para $x = a$, mas sim como a função se comporta quando o valor de x fica cada vez mais próximo de a.

Figura 5 – Noção gráfica e intuitiva de Limite.



Fonte: O Autor

Exemplo 3.5 *a)* $\lim\limits_{x \to a} c = c$*:*

De acordo com a definição 3.3, devemos mostrar que, para todo $\varepsilon > 0$ *existe um* $\delta > 0$ *tal que* $|c - c| < \varepsilon$ *sempre que* $0 < |x - a| < \delta$*. Como* $|c - c| = 0 < \varepsilon$ *é sempre satisfeito para todo* $\varepsilon > 0$*, tomando qualquer* $\delta > 0$*, a definição de limite é satisfeita.*

b) $\lim\limits_{x \to a} x = a$*:*

Novamente, de acordo com a definição, devemos mostrar que para todo $\varepsilon > 0$ *existe um* $\delta > 0$ *tal que* $|x - a| < \varepsilon$ *sempre que* $0 < |x - a| < \delta$*. Assim, fazendo* $\delta = \varepsilon$ *temos a definição de limite satisfeita.*

Teorema 3.6 ***(Propriedades do limite de uma função)****:*

Sejam $f : D(f) \to \mathbb{R}$*,* $g : D(g) \to \mathbb{R}$ *funções tais que os limites* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *e* $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ *existam. Valem as seguintes propriedades:*

1º) $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$.
O limite da soma é a soma dos limites.
O limite da diferença é a diferença dos limites.

2º) $\lim\limits_{x \to a}[f(x).g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x). \lim\limits_{x \to a} g(x)$.
O limite do produto é o produto dos limites.

3º) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$.
O limite do quociente é o quociente dos limites desde que o denominador não seja zero.

4º) $\lim\limits_{x \to a} f(x)^n = (\lim\limits_{x \to a} f(x))^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

5º) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$, $n \in \mathbb{N}^*$ *e f(x)>0. (Se f(x)*≤ 0*, n é ímpar)*

Exemplo 3.7 ***(Propriedades do limite de uma função)****:*

1º) $\lim\limits_{x \to 1}[x^2 + 3x^3] = \lim\limits_{x \to 1} x^2 + \lim\limits_{x \to 1} 3x^3 = 1 + 3 = 4$*;*

2º) $\lim\limits_{x \to \pi}[3x^3 \cdot \cos x] = \lim\limits_{x \to \pi} 3x^3. \lim\limits_{x \to \pi} \cos x = 3\pi^3. \cos \pi = 3\pi^3.(-1) = -3\pi^3$*;*

3º) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{x^2 + 1} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 0} \cos x}{\lim\limits_{x \to 0} x^2 + 1} = \dfrac{\cos 0}{0^2 + 1} = \dfrac{1}{1}$*;*

4º) $\lim\limits_{x \to 1}(x^2 + 3)^2 = (\lim\limits_{x \to 1}(x^2 + 3))^2 = (1 + 3)^2 = 16$*;;*

5º) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^3 + x^2 - 1} = \sqrt{\lim\limits_{x \to 2}(x^3 + x^2 - 1)} = \sqrt{2^3 + 2^2 - 1} = \sqrt{11}$.

Generalizando, temos:

Teorema 3.8 ***(Limite de uma Função Polinomial)****:*

Seja $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$*, onde* $n \in \mathbb{N}$ *e* $a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$*, podemos escrever também na forma* $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_ix^i$*, onde* $a_i \in \mathbb{R}$*. O limite de* $f(x)$ *para quando* x *tende a* a*, será igual ao valor numérico de* $f(x)$ *quando* $x = a$*. Matematicamente temos:* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$*.*

Demonstração:

Note que $\lim\limits_{x\to a} x = a$. Então segue da Propriedade 4 do Teorema 3.6 que:

$$\lim_{x\to a} x^i = [\lim_{x\to a} x]^i = a^i$$

para $i \in \mathbb{N}$ tal que $i \geq 1$.

Logo, aplicando a Propriedade 1 do Teorema 3.6 n vezes, obtemos:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \sum_{i=0}^{n} a_ix^i = \sum_{i=0}^{n} [\lim_{x\to a} a_ix^i] = \sum_{i=0}^{n} a_i \lim_{x\to a} x^i = \sum_{i=0}^{n} a_ia^i = f(a).$$

□

Teorema 3.9 ***(Unicidade do Limite)****:*

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ *e* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_2$*, então* $L_1 = L_2$*.*

Demonstração: Vamos prosseguir esta demonstração por absurdo.

Suponha que o $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ possa ser igual a dois valores diferentes L_1 e L_2, ou seja:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L_1$$

e

$$\lim_{x\to a} f(x) = L_2$$

tal que $L_1 \neq L_2$.

Seja $\varepsilon = |L_1 - L_2| > 0$.

Sendo $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_2$, teremos que existem $\delta_1, \delta_2 > 0$, tais que se: $0 < |x - a| < \delta_1$ então $|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ e se $0 < |x - a| < \delta_2$ então $|f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Considere $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Desse modo teremos $\delta \leq \delta_1$ e $\delta \leq \delta_2$ e se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Mas,

$$\varepsilon = |L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

um absurdo.

Logo, $L_1 = L_2$. □

3.2.3 **Limite da função em um ponto**:

Primeiramente, vamos definir limites laterais à direita e à esquerda.

Definição 3.10

- *Limite lateral à direita: Seja f uma função definida em um intervalo aberto (a, b).*

  Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a pela direita é L, e representamos por $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que se $a < x < a + \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

- *Limite lateral à esquerda: Seja f uma função definida em um intervalo aberto (b, a).*

  Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a pela esquerda é L, e representamos por $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ se para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que se $a - \delta < x < a$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Nos limites laterais, as propriedades descritas anteriormente são válidas e poderão ser utilizadas nos cálculos de continuidade de função em um ponto.

Teorema 3.11 *Seja I um intervalo aberto no domínio de uma função f definida para $x \in I$, onde a é um ponto de acumulação de I. Então:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se, e somente se, existirem os limites laterais $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ e

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L.$$

Demonstração:

($\Rightarrow$) Seja $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, assim, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ teremos $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Assim, se $a < x < a + \delta$ então $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$, e, portanto $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$.

Da mesma forma, se $a - \delta < x < a$ então $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$, donde segue que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$.

($\Leftarrow$) Sejam $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$. Logo existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que se $a < x < a + \delta_1$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$ e se $a - \delta_2 < x < a$ da mesma forma teremos $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Tome $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, sendo $0 < |x - a| < \delta$ teremos $a < x < a+\delta_1$ ou $a-\delta_2 < x < a$ que em ambos os casos nos leva a $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Desse modo, conclui-se que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. □

3.2.4 Propriedades para limites tendendo ao infinito

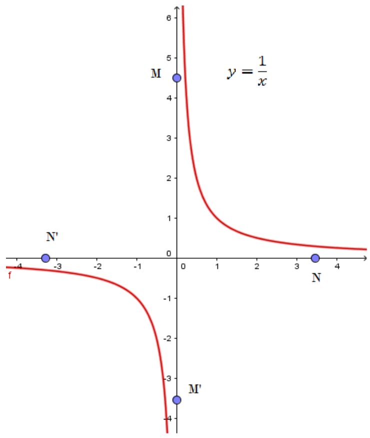
Antes de mostrarmos as propriedades, definiremos limites infinitos e limites no infinito.

Definição 3.12 ***(Limites Infinitos)*** *Seja f uma função definida em um intervalo aberto I e a ponto de acumulação de I. Dizemos que, quando x se aproxima de a, $f(x)$ cresce ilimitadamente e escrevemos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, se para qualquer número $M > 0$, existir $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$, então $f(x) > M$. Analogamente, para uma função definida em um intervalo aberto I e a ponto de acumulação de I dizemos que, quando x se aproxima de a, $f(x)$ decresce ilimitadamente e escrevemos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, se para qualquer número $M' < 0$, existir $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$, então $f(x) < M'$.*

Definição 3.13 ***(Limites no Infinito)*** *Seja f uma função definida em um intervalo aberto $(a, +\infty)$.*

Dizemos que, quando x cresce ilimitadamente, $f(x)$ se aproxima de L e escrevemos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ se, para qualquer número $\varepsilon > 0$, existir $N > 0$ tal que se $x > N$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$. Analogamente, para uma função definida em um intervalo aberto $(-\infty, a)$, dizemos que, quando x decresce ilimitadamente, $f(x)$ se aproxima de L e escrevemos $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ se, para qualquer número $\varepsilon > 0$, existir $N' > 0$ tal que se $x < -N'$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Figura 6 – Limite infinito e no infinito.

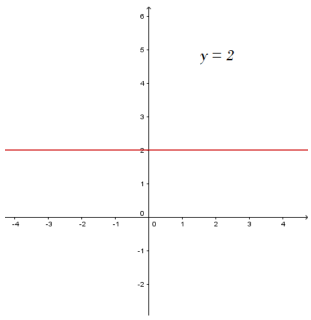


Fonte: O Autor

Substituindo $x \to a$ por $x \to -\infty$ ou $x \to +\infty$ as propriedades de limites vistas continuam valendo. Assim temos:

- 1º) Seja $c \in \mathbb{R}$, temos $\lim_{x\to-\infty} c = c = \lim_{x\to+\infty} c$.

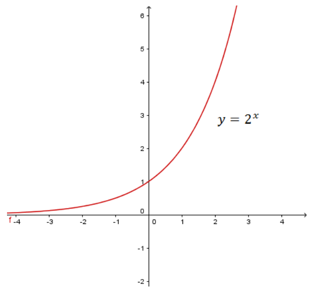
Figura 7 – $\lim_{x\to\pm\infty} c$



Fonte: O Autor

- 2º) Seja n um número inteiro positivo. Temos $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$.

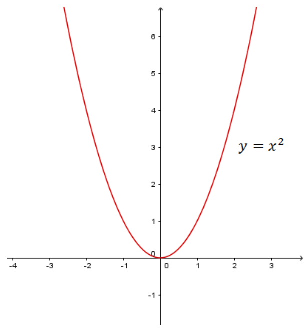
Figura 8 – $\lim_{x \to +\infty} x^n$



Fonte: O Autor

- 3º) Seja n um número inteiro positivo par. Temos $\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$.

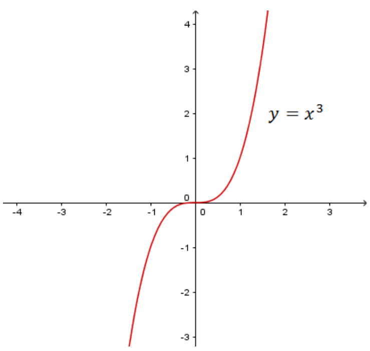
Figura 9 – $\lim_{x \to -\infty} x^n$



Fonte: O Autor

- 4º) Seja n um número inteiro positivo ímpar. Temos $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$.

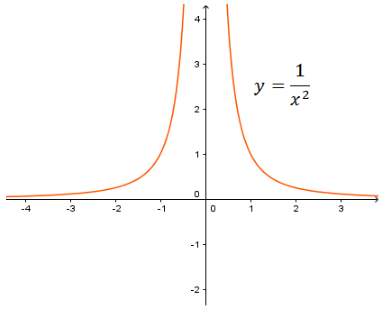
Figura 10 – $\lim_{x \to -\infty} x^n$



Fonte: O Autor

- 5º) Seja n um número inteiro positivo. Temos $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.

Figura 11 – $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n}$



Fonte: O Autor

- 6º) Seja a função polinomial $f(x) = a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ onde $a_n \neq 0$. Temos $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n$.
- 7º) Sejam as funções polinomiais $f(x) = a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ onde $a_n \neq 0$ e $g(x) = b_m x^m + ... + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ onde $b_m \neq 0$. Temos $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{a_n}{b_m}\right) x^{n-m}$ e $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a_n}{b_m}\right) x^{n-m}$.

3.3 CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO

Dizemos que uma função f é contínua num ponto $a \in \mathbb{R}$ quando ela está definida em a, existe o limite de $f(x)$ quando x tende a a e esse limite é igual a $f(a)$. Ou seja, $a \in D(f)$ e:

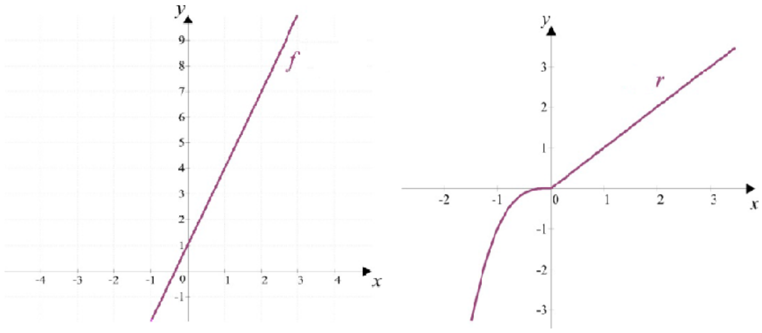
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Dizemos que f é contínua no conjunto A quando f for contínua para todo $a \in A$.

Em uma linguagem não formal, podemos dizer que uma função é contínua quando seu gráfico não apresenta interrupção em seu traçado. Isto ocorre quando podemos desenhar seu gráfico sem retirar o lápis do papel.

Na Figura 4 temos os gráficos das funções f e r com os seus domínios e as suas imagens pertencentes a todos os $\mathbb{R}$. Podemos traçar o gráfico de ambas as funções fazendo uso de um lápis sem retirá-lo do papel, obtendo assim uma curva sem interrupções, falhas ou buracos. Informalmente, dizemos que as funções f e r são contínuas.

Figura 12 – Gráficos de Funções Contínuas.



Fonte: [8]

Na Figura 5 temos os gráficos das funções h e p sendo:

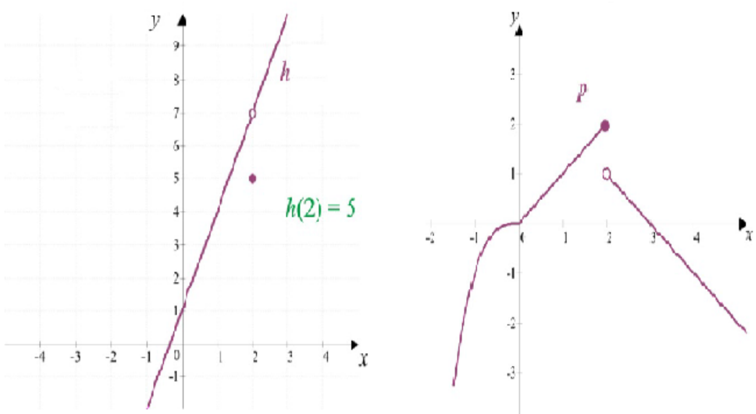
$$\begin{array}{rcl} h:\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \text{3x+1, x} \neq 2 \\ \text{5, x=2} \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} p:\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \text{-x}^2,\ x < 0 \\ \text{x, } 0 \leq x \leq 2 \\ \text{-x+3, x>2} \end{cases} \end{array}$$

Observamos que ambos os gráficos das funções citadas possuem uma interrupção em $x = 2$.

Para as funções h e p definidas em $\mathbb{R}$, temos $x = 2$ com um "salto” nos gráficos de h e p. Assim, as funções h e p são descontínuas.

Figura 13 – Gráficos de Funções Descontínuas.



Fonte: [8]

4 INTRODUÇÃO À DERIVADA

4.1 RETA TANGENTE AO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO EM UM PONTO P

Textos baseados em [2] e [3].

A reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto $P(x_1, y_1)$ é aquela que melhor aproxima o gráfico naquele ponto. Ou seja, é a melhor aproximação linear da função f naquele ponto. Rigorosamente, podemos definir a reta tangente como o limite de retas secantes ao gráfico da função f no ponto P. Isso é o que faremos a seguir.

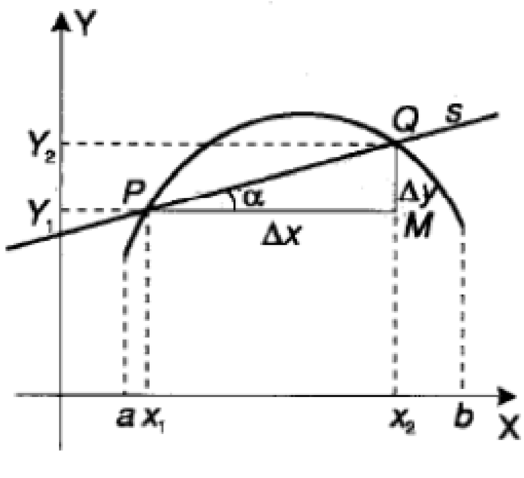
Conforme a Figura 14, considere a curva determinada pela função $y = f(x)$ em um intervalo aberto (a, b), onde temos dois pontos definidos por $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$. Traçamos, por esses dois pontos, uma reta s secante ao gráfico de f e encontramos um ponto $M(x_2, y_1)$.

Os pontos P, Q e M formam um triângulo retângulo com hipotenusa na reta s que é definida pelos pontos P e Q, estando o ângulo reto no vértice M.

Definimos a Inclinação ou Coeficiente Angular da reta s, m_s, como sendo igual à tangente do ângulo α formado pela reta s que contém a hipotenusa $\overline{PQ}$ e o cateto horizontal $\overline{PM}$, dado por:

$$m_s = \tan\alpha = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}.$$

Figura 14 – Inclinação de uma Reta Secante ao Gráfico.

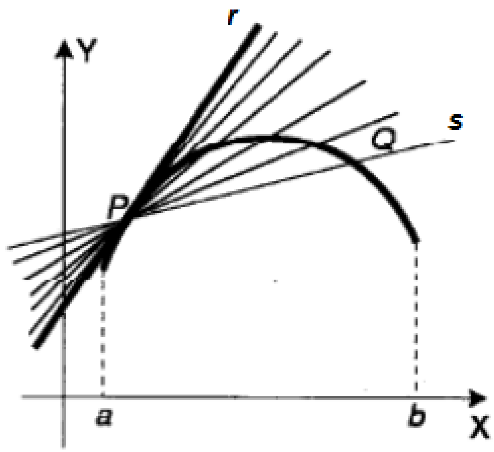


Fonte: [1]

Conforme mostra a Figura 15, considere a variação do coeficiente angular da reta s tornando Q cada vez mais próximo de P, isto é, Δx tende a zero quando Q vai se aproximando de P. Assim, se o coeficiente angular m_s, da reta secante ficar cada vez mais próximo de um valor m_r, definimos a reta tangente ao gráfico da função no ponto P como sendo a reta que passa por P com coeficiente angular m_r.

Podemos dizer que o coeficiente angular m_s tem como limite o coeficiente angular m_r quando Q tende a P.

Figura 15 – Inclinação de uma Reta Secante ao Gráfico.



Fonte: [1]

Matematicamente temos:

$$m_r = \lim_{\Delta x \to 0} m_s = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x},$$

Definição 4.1 *Se uma função f é definida em um intervalo aberto contendo x_1, então a derivada de f em x_1, denotada por $f'(x_1)$, é dada por:*

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x},$$

caso esse limite exista. Dizemos, nesse caso, que f é diferenciável em x_1.

Na definição anterior temos:

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_2 - x_1 \\ x_2 &= x_1 + \Delta x. \end{aligned}$$

Onde Δx representa uma variação tendendo a zero entre os valores de x_1 e x_2, isto é, $\Delta x = x_2 - x_1$

Dessa forma, temos:

$$m_r = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = f'(x_1)$$

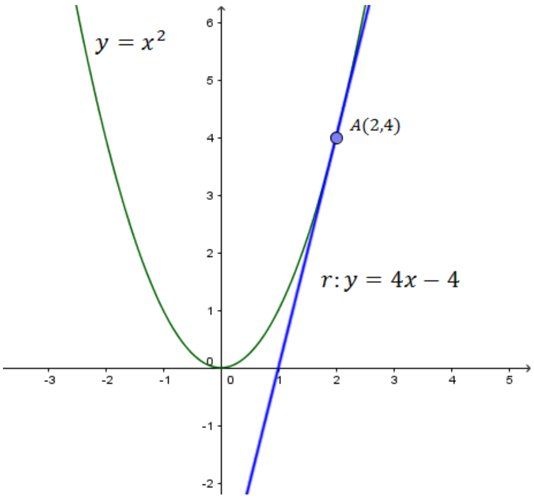
Seja $D'(f) \subset D(f)$ o conjunto dos pontos onde f é diferenciável. Então definimos a função derivada de f como:

$$\begin{aligned} f' : D'(f) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x). \end{aligned}$$

Exemplo 4.2 *Dada a função $f(x) = x^2$, calcular a reta tangente ao ponto (2,4).*

Solução:

Figura 16 – Inclinação de uma Reta Secante ao Gráfico.



Fonte: $[O Autor]$

Calculando o coeficiente angular da reta tangente, teremos:

$$\begin{aligned}
m_r &= f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \\
m_r &= f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_1 + \Delta x)^2 - (x_1)^2}{\Delta x} \\
m_r &= f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_1^2 + 2.x_1.\Delta x + \Delta x^2) - (x_1)^2}{\Delta x} \\
m_r &= f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2.x_1.\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\
m_r &= f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2.x_1 + \Delta x)}{\Delta x} \\
m_r &= f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} 2.x_1 + \Delta x \\
m_r &= f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} 2.x_1 + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \\
m_r &= f'(x_1) = 2.x_1 + 0 \\
m_r &= f'(2) = 4.
\end{aligned}$$

Logo, a equação da reta será:

$$y - 4 = 4(x - 2)$$

$$y - 4 = 4x - 8$$

$$y = 4x - 4$$

.

4.2 REGRAS DE DERIVAÇÃO

Consideremos que as funções aqui apresentadas sejam diferenciáveis nos pontos em questão. Fazendo $x = x_1$ na definição de derivada, temos:

Teorema 4.3 *Sejam $m, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis:*

(i) Derivada de um Monômio: seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^n, n \in \mathbb{Z}_+$, então $f'(x) = nx^{n-1}$.

(ii) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = kg(x)$, com a constante $k \in \mathbb{R}$, então $f'(x) = kg'(x)$.

(iii) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = k$, onde a constante $k \in \mathbb{R}$, então $f'(x) = 0$.

(iv) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = m(x) + g(x)$, então $f'(x) = m'(x) + g'(x)$.

(v) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = m(x)g(x)$, então $f'(x) = m'(x)g(x) + g'(x)m(x)$.

(vi) Regra da Cadeia: sendo a função composta $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = m(g(x))$, teremos $f'(x) = m'(g(x)) \cdot g'(x)$.

(vii) Seja $f : D(f) \to \mathbb{R}$, com $D(f) = \{x \in \mathbb{R}; g(x) \neq 0\}$, dada por $f(x) = \frac{m(x)}{g(x)}$, então $f'(x) = \frac{m'(x) \cdot g(x) - m(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$.

Demonstração:

(i) **Derivada de um Monômio**

Seja $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^n + nx^{n-1}\cdot \Delta x + (\frac{n(n-1)}{2})x^{n-2}\cdot \Delta x^2 + ... + \Delta x^n) - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\cdot \Delta x + (\frac{n(n-1)}{2})x^{n-2}\cdot \Delta x^2 + ... + \Delta x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\Delta x \cdot \left(\frac{nx^{n-1} + (\frac{n(n-1)}{2})x^{n-2}\cdot \Delta x + ... + \Delta x^{n-1}}{\Delta x}\right)\right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\cdot \Delta x + ... + \Delta x^{n-1}\right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} nx^{n-1} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\cdot \Delta x + ... + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x^{n-1} \\
&= nx^{n-1}.
\end{aligned}
$$

(ii) **Derivada de** $f(x) = kg(x)$, com $k \in \mathbb{R}$ constante:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{kg(x+\Delta x) - kg(x)}{\Delta x} \\
&= k \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= kg'(x).
\end{aligned}
$$

(iii) **Derivada de** $f(x) = k$, onde $k \in \mathbb{R}$ constante:

Sendo $f(x) = k$ e $f(x+\Delta x) = k$ temos:

$$
\begin{aligned}
f'(x_1) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k-k}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0.
\end{aligned}
$$

(iv) **Derivada de** $f(x) = m(x) + g(x)$:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(m(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)) - (m(x) + g(x))}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{m(x+\Delta x) - m(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(x+\Delta x) - m(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= m'(x) + g'(x).
\end{aligned}
$$

(v) **Derivada de** $f(x) = m(x) \cdot g(x)$:

Denominada Regra do produto de Leibniz.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - m(x) \cdot g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{m(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - m(x) \cdot g(x+\Delta x)}{\Delta x} \right. \\
&\quad \left. + \frac{m(x) \cdot g(x+\Delta x) - m(x) \cdot g(x)}{\Delta x} \right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(m(x+\Delta x) - m(x)) \cdot g(x+\Delta x) + (g(x+\Delta x) - g(x)) \cdot m(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(m(x+\Delta x) - m(x)) \cdot g(x+\Delta x)}{\Delta x} \\
&\quad + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(g(x+\Delta x) - g(x)) \cdot m(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(x+\Delta x) - m(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) \\
&\quad + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} m(x) \\
&= m'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot m(x).
\end{aligned}$$

(vi) **Regra da Cadeia:**

Seja a função composta $y = f(x) = m(g(x))$, considerando $u = g(x)$, temos $y = m(u)$. Portanto, temos:

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$$

e

$$\Delta y = m(u + \Delta u) - m(u).$$

Supondo que $\Delta u \neq 0$ e $\Delta x \neq 0$, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Então, quando Δx tende a 0, teremos também Δu tendendo a 0. Assim:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

Como $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x)$, $\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y' = m'(u)$ e $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u' = g'(x)$, segue que:

$$f'(x) = m^{'}(g(x)) \cdot g^{'}(x).$$

(vii) **Derivada de** $f(x) = \frac{m(x)}{g(x)}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{m(x)}{g(x)} \\ &= m(x) \cdot (\frac{1}{g(x)}) \\ &= m(x) \cdot (g(x))^{-1}. \end{aligned}$$

Fazendo $h(x) = (g(x))^{-1}$, temos:

$$f(x) = m(x) \cdot h(x)$$

Pela regra da cadeia temos $h^{'}(x) = (-1) \cdot (g(x))^{-2} \cdot g'(x)$. Utilizando a Regra do Produto de Leibniz e a Regra da Cadeia obtemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= m'(x) \cdot h(x) + m(x) \cdot h^{'}(x) \\ f'(x) &= m'(x) \cdot (g(x))^{-1} + m(x) \cdot (-1) \cdot (g(x))^{-2} \cdot g'(x) \\ &= \frac{m'(x)}{g(x)} - \frac{m(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \\ &= \frac{m'(x) \cdot g(x) - m(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 4.4 *Regras de Derivação*

(i) Derivada de um Monômio: seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^3$*, então* $f'(x) = 3x^2$.

(ii) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = 5x^3$*, com a constante* $k \in \mathbb{R}$*, então* $f'(x) = 15x^2$.

(iii) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = 5$*, onde a constante* $k \in \mathbb{R}$*, então* $f'(x) = 0$.

(iv) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = (x^3 + 2) + (2x^2)$*, então* $f'(x) = 3x^2 + 4x$.

(v) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = (x^3+2).(2x^2)$*, então* $f'(x) = 3x^2.(2x^2)+(x^3+2).4x = 6x^4 + 4x^4 + 8x = 10x^4 + 8x$.

(vi) Regra da Cadeia: sendo a função composta $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, dada por* $f(x) = \sqrt{5x+2}$*, teremos* $f'(x) = (5x+2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.(5x+2)^{-\frac{1}{2}}.5 = \frac{5}{2.\sqrt{5x+2}}$.

(vii) Seja $f : D(f) \to \mathbb{R}$*, com* $D(f) = \{x \in \mathbb{R}^*\}$*, dada por* $f(x) = \frac{x+3}{x^2}$*, então* $f'(x) = \frac{1.x^2-(x+3).2x}{(x^2)^2} = \frac{x^2-2x^2-6x}{x^4} = -\frac{x^2+6x}{x^4} = -\frac{x(x+6)}{x^4} = -\frac{(x+6)}{x^3}$.

5 APLICAÇÃO GRÁFICA DA DERIVADA

Utilizaremos os conceitos de derivada para a construção gráfica de funções polinomiais. Apresentaremos duas ferramentas essenciais para tal construção e suas utilizações.

- Teste da Derivada 1ª: para calcular os pontos críticos, máximos e mínimos e intervalos de crescimento e decrescimento da curva de uma função;
- Teste da Derivada 2ª: para calcular os pontos de máximos, mínimos, inflexões e intervalos de concavidades para cima ou para baixo de uma função;

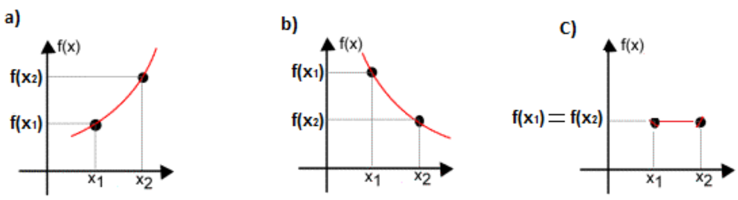
Nesse capítulo, os resultados serão apresentados, porém não faremos as suas demonstrações. Estas podem ser encontradas em [7].

5.1 TESTE DA DERIVADA 1ª

A seguir temos algumas definições, teoremas e critérios necessários para estruturar o referido teste.

Definição 5.1 ***(Intervalos Crescente, Decrescente e Constante de uma Função)***.

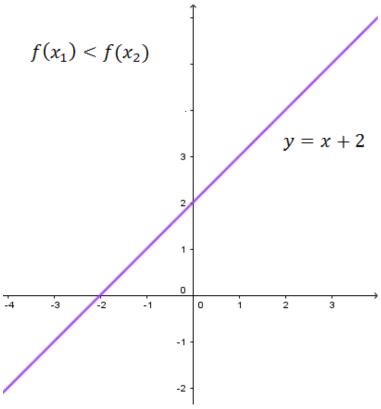
Figura 17 – Intervalos Crescente, Decrescente e Constante de uma função.



Fonte: O Autor.

1 *Intervalo Crescente de uma Função: Seja f uma função definida em um intervalo I. A função f é dita crescente em I se para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a I, tais que $x_1 < x_2$, temos que $f(x_1) < f(x_2)$.*

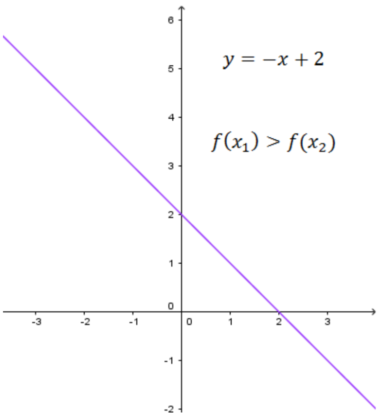
Figura 18 – Função Crescente.



Fonte: O Autor.

2 Intervalo Decrescente de uma Função: Seja f uma função definida em um intervalo I. A função f é dita decrescente em I se para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a I, tais que $x_1 < x_2$, temos que $f(x_1) > f(x_2)$.

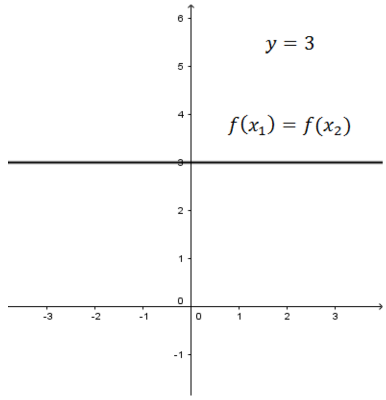
Figura 19 – Função Decrescente.



Fonte: O Autor.

3 Intervalo Constante de uma Função: Seja f uma função definida em um intervalo I. A função é dita constante em I se $f(x_1) = f(x_2)$ para quaisquer pontos x_1 e x_2 pertencentes a I.

Figura 20 – Função Constante.



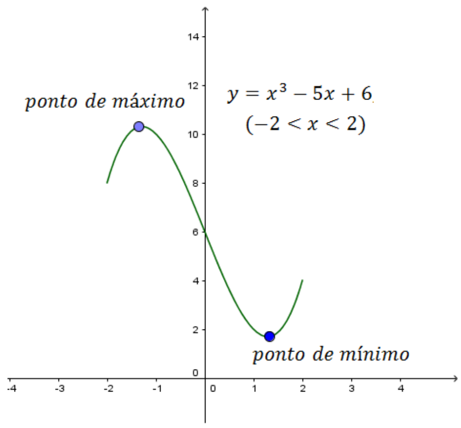
Fonte: O Autor.

Se uma função for crescente para todos os valores do seu domínio, ela será uma função crescente, da mesma forma para as condições decrescente ou constante, onde serão denominadas respectivamente de função decrescente e função constante.

Definição 5.2 ***(Máximo e Mínimo):***

Sejam f uma função, $A \subset D(f)$ e $p \in A$. Dizemos que $f(p)$ é o valor máximo de f em A ou que p um ponto de máximo de f em A se $f(x) \leq f(p)$ para todo x em A. Se $f(x) \geq f(p)$ para todo x em A, dizemos então que $f(p)$ é o valor mínimo de f em A ou que p é um ponto de mínimo de f em A.

Figura 21 – Máximo e Mínimo.

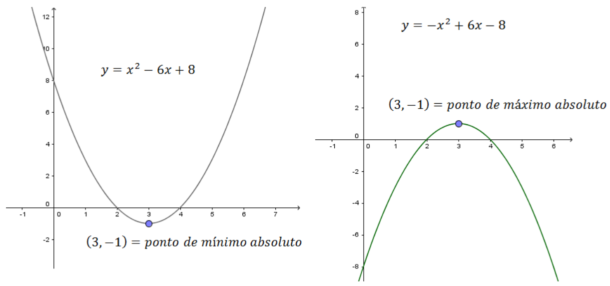


Fonte: O Autor.

Definição 5.3 ***(Máximo e Mínimo Absolutos):***

Sejam f uma função e $p \in D(f)$. Dizemos que f(p) é o valor máximo absoluto de f ou que p é um ponto de máximo absoluto de f se, para todo x em $D(f)$, $f(x) \leq f(p)$. Se, para todo x em $D(f)$, $f(x) \geq f(p)$, dizemos então que $f(p)$ é o valor mínimo absoluto de f ou que p é um ponto de mínimo de f.

Figura 22 – Máximo e Mínimo Absolutos.

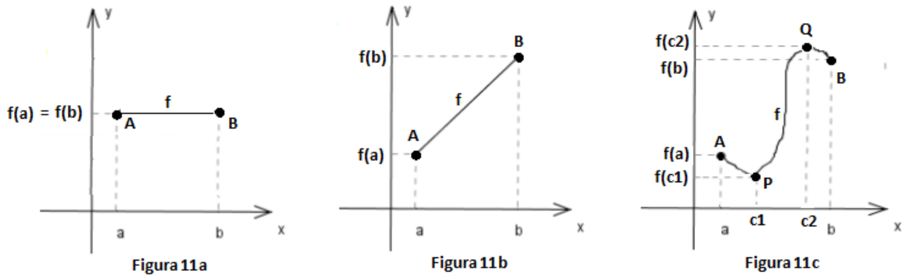


Fonte: O Autor.

Temos o resultado que se segue:

Teorema 5.4 *Se uma função f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f terá Máximo Absoluto e Mínimo Absoluto pelo menos uma vez em $[a, b]$.*

Figura 23 – Máximos e Mínimos Absolutos.



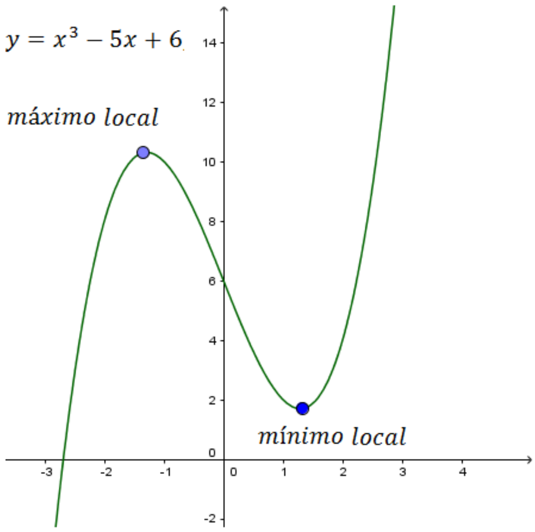
Fonte: O Autor.

Podemos usar Figura 23 para refletir sobre o teorema anterior. Na Figura 23a temos no intervalo $[a, b]$ uma função constante, pois para todo $x \in [a, b]$ temos $f(a) = f(x) = f(b)$. Assim, todos os pontos da função são Máximos e Mínimos Absolutos de f. Na Figura 23b, temos no intervalo $[a, b]$ o gráfico da função definida por um segmento de reta com coeficiente angular maior que zero. Logo, o Máximo e o Mínimo Absoluto ocorrem, respectivamente, nos pontos cartesianos $B(b, f(b))$ e $A(a, f(a))$, pois para todo $x \in [a, b]$ temos $f(x) \leq f(b)$ e $f(x) \geq f(a)$. Na Figura 23c, temos no intervalo $[a, b]$ o gráfico onde para todo $x \in [a, b]$ temos $f(x) \leq f(c_2)$ e $f(x) \geq f(c_1)$. Logo, o Máximo e o Mínimo Absoluto ocorrem respectivamente nos pontos cartesianos $Q(c_2, f(c_2))$ e $P(c_1, f(c_1))$.

Definição 5.5 ***(Máximo e Mínimo Locais):***

Sejam f uma função e $p \in D(f)$. Dizemos que p é ponto de máximo local de f se existir $r > 0$ tal que $f(x) \leq f(p)$ para todo x em $]p - r, p + r[\cap D(f)$. Por outro lado, dizemos que p é ponto de mínimo local de f se existir $r > 0$ tal que $f(x) \geq f(p)$ para todo x em $]p - r, p + r[\cap D(f)$.

Figura 24 – Máximos e Mínimos Locais.



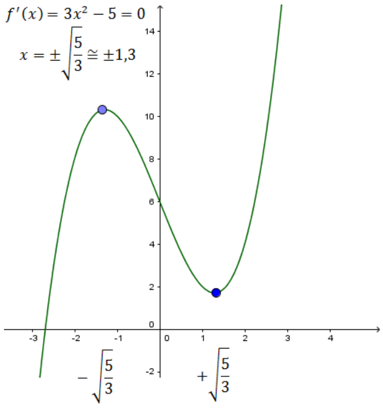
Fonte: O Autor.

Além deste exemplo, podemos observar na Figura 23c, além dos pontos P (Mínimo Absoluto) e Q (Máximo Absoluto), temos também os pontos A e B que são Máximo e Mínimo Local, respectivamente.

Definição 5.6 ***(Pontos Críticos):***

Um Ponto Crítico de uma função f definida no intervalo $[a, b]$ é um número $c \in (a, b)$ no domínio de f, tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe. Se uma função f tiver um Máximo ou Mínimo em $x = c$, então c é um Ponto Crítico de f. Dentre estes, temos os pontos de Máximos e Mínimos Absolutos e Máximos e Mínimos Locais e os pontos de Inflexão.

Figura 25 – Pontos Críticos.



Fonte: O Autor.

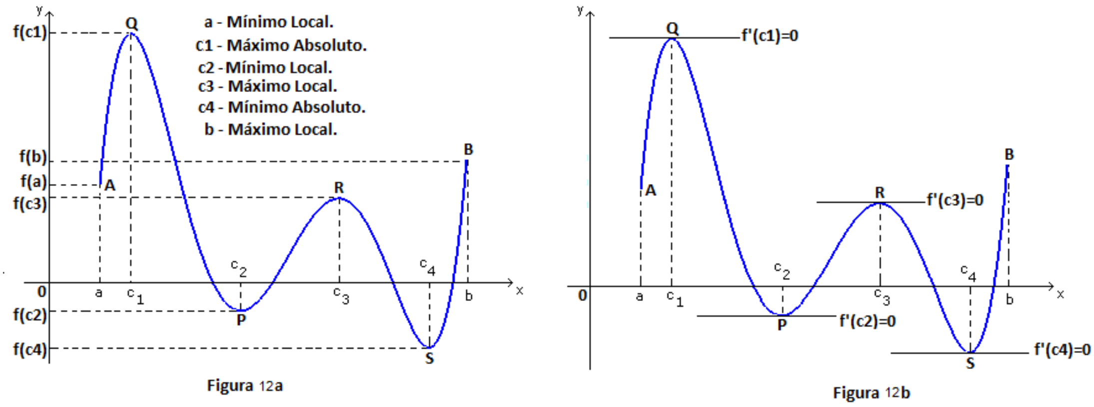
Nos Pontos Máximos e Mínimos de uma função, contínua e diferenciável em todos os pontos de um intervalo $]a, b[$, as retas tangentes são horizontais, ou seja, possuem inclinação igual a zero, como mostra a Figura 26b. Sendo assim, se c é uma abcissa de um Ponto de Máximo e d uma abcissa de um Ponto de Mínimo, temos $f'(c) = 0$ e $f'(d) = 0$.

Na Figura 26a temos o gráfico de uma função em um intervalo $[a, b]$ onde podemos observar os Máximos e Mínimos Absolutos e Máximos e Mínimos Locais.

Para determinar os Máximos e Mínimos Absolutos de uma função f contínua e definida num intervalo $[a, b]$ e que possua um número finito de pontos críticos c em um intervalo $[a, b]$, temos o roteiro a seguir:

1. Encontrar os valores de $f(c)$ para todo ponto crítico c no intervalo $]a, b[$;
2. Calcular os valores $f(a)$ e $f(b)$;
3. O maior valor encontrado nas etapas i e ii é o máximo absoluto de f. Por outro lado, o menor valor encontrado nas duas etapas anteriores é o mínimo absoluto de f.

Figura 26 – Pontos Críticos e Reta Tangente a curva.



Fonte: O Autor.

Teorema 5.7 ***(Teorema de Fermat para Máximos e Mínimos):***

Se uma função f tiver um Máximo ou Mínimo em $x = c$ e f for derivável nesse ponto, então $f'(c) = 0$.

O Teorema de Fermat não se aplica a uma função f que não for derivável em algum ponto. Como exemplo, temos $f(x) = |x|$ onde $x = 0$ é Mínimo Absoluto da função, porém não tem reta tangente horizontal nesse ponto.

Teorema 5.8 ***(Teorema de Rolle):***

Seja uma função f contínua em um intervalo $[a, b]$, derivável no intervalo $]a, b[$ tal que $f(a) = f(b)$, então $f'(c) = 0$ em pelo menos um número $c \in]a, b[$.

Também pode ser dito que:

Seja uma função f contínua em um intervalo $[a, b]$, tal que $f(a) = f(b)$, então f tem pelo menos um Ponto Crítico no intervalo $]a, b[$.

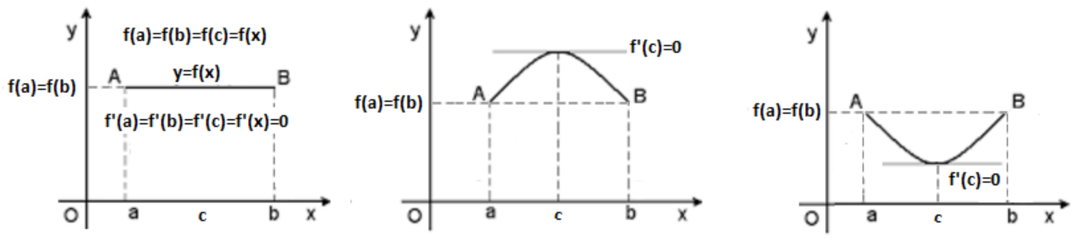
Na Figura 27 podemos observar graficamente três casos do Teorema de Rolle.

O Teorema de Rolle tem validade quando uma função f é contínua em um intervalo $[a, b]$, derivável no intervalo $]a, b[$ e sendo $f(a) = f(b)$. Generalizando, para $f(a) = f(b)$ ou $f(a) \neq f(b)$ temos:

Teorema 5.9 ***(Teorema do Valor Intermediário):*** *Seja uma função f contínua em um intervalo $[a, b]$, derivável no intervalo $]a, b[$. Então existe um número $c \in]a, b[$, tal que:*

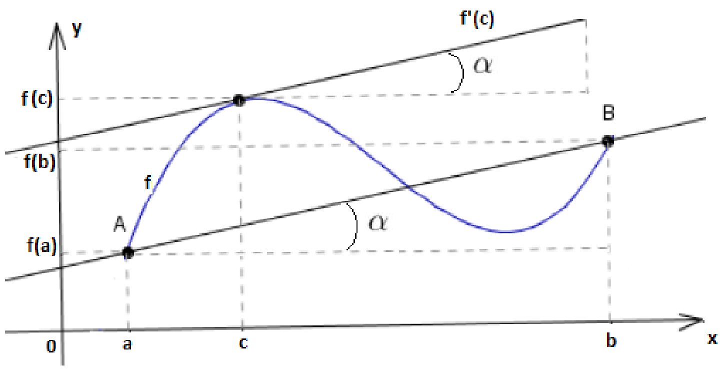
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Figura 27 – Teorema de Rolle.



Fonte: O Autor.

Figura 28 – Teorema do Valor Intermediário.



Fonte: O Autor.

Teorema 5.10 ***(Teste da Derivada Primeira para Intervalos Crescentes e Decrescentes):***

Seja uma função f contínua em um intervalo $[a, b]$, derivável no intervalo $]a, b[$:

1. *Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in]a, b[$, então f é crescente no intervalo $[a, b]$;*

2. *Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in]a, b[$, então f é decrescente no intervalo $[a, b]$.*

Teorema 5.11 ***(Teste da Derivada Primeira para Máximos e Mínimos):***

Seja c um ponto crítico de uma função f em um intervalo $]a, b[$ onde $c \in]a, b[$. Supondo f contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$, exceto possivelmente em c, temos:

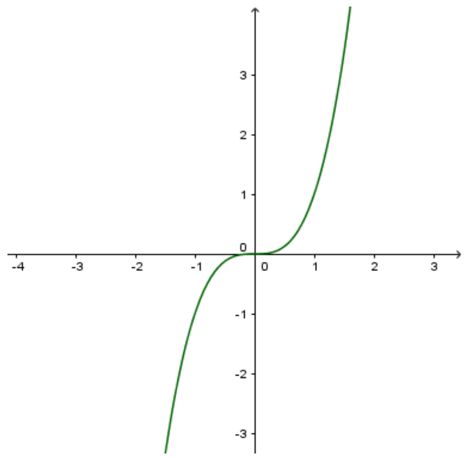
1. *Se $f'(x) > 0$ para $a < x < c$ e $f'(x) < 0$ para $c < x < b$, então $f(c)$ é valor Máximo Local de f;*

2. *Se $f'(x) < 0$ para $a < x < c$ e $f'(x) > 0$ para $c < x < b$, então $f(c)$ é valor Mínimo Local de f;*

3. *Se $f'(x) > 0$ ou se $f'(x) < 0$ para todo $x \in]a, b[$, exceto possivelmente $x = c$, então $f(c)$ não é Extremo Local de f.*

4. *Se $f(c) = 0$ não implica que c seja um extremo de f. Podemos observar claramente, no gráfico da função $f(x) = x^3$ a seguir, que $f'(0) = 0$, porém f não tem extremo em $x = 0$:*

Figura 29 – $f(x) = x^3$



Fonte: O Autor.

5.2 TESTE DA DERIVADA 2ª

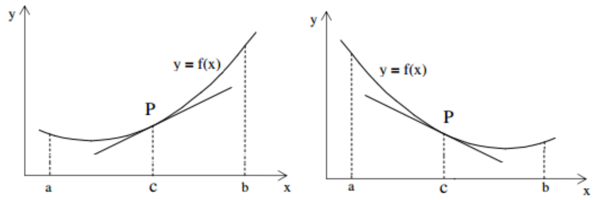
A seguir, tal qual o teste anterior, temos algumas definições, teoremas e critérios necessários para estruturar o referido teste

Definição 5.12 ***(Concavidade do Gráfico de uma Função):***

Seja f uma função definida em $]a, b[$ e diferenciável em um ponto $c \in]a, b[$:

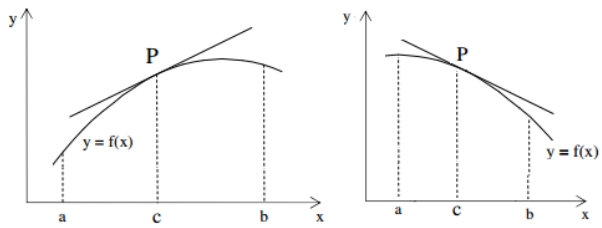
- *O gráfico de f será côncavo para cima no ponto $P(c, f(c))$, (Figura 15), se o gráfico de f se localizar acima da reta tangente ao ponto P.*
- *O gráfico de f será côncavo para baixo no ponto $P(c, f(c))$, (Figura 16), se o gráfico de f se localizar abaixo da reta tangente ao ponto P.*

Figura 30 – Concavidade para Cima.



Fonte: O Autor.

Figura 31 – Concavidade para Baixo.



Fonte: O Autor.

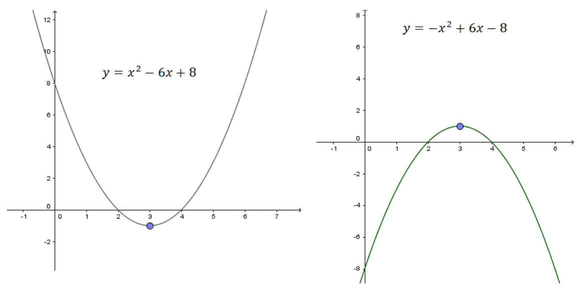
Teorema 5.13 ***(Teste da Concavidade):***

Seja f uma função diferenciável em um intervalo $]a, b[$ onde $c \in]a, b[$, então no ponto $P(c, f(c))$, o gráfico de f será:

- *Côncavo para cima se $f”(c) > 0$.*
- *Côncavo para baixo se $f”(c) < 0$.*

Exemplo 5.14 *Observamos no primeiro gráfico a seguir que $f''(x) = 2$, ou seja, $f''(x) > 0$ para todo intervalo, isto é, o gráfico é côncavo para cima em todo seu domínio. No segundo gráfico observamos $f''(x) = -2$, logo o gráfico é côncavo para baixo em todo seu domínio.*

Figura 32 – Concavidade para Baixo.



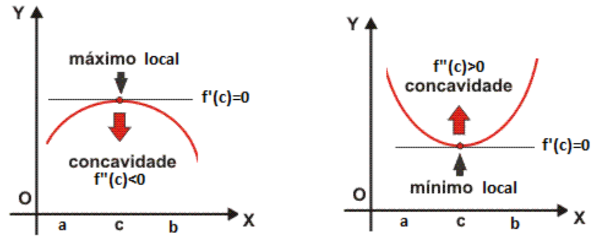
Fonte: O Autor.

Teorema 5.15 ***(Teste da Derivada*** 2^a ***para Extremos Locais):***

Seja c um ponto crítico de uma função f, no qual $f'(c) = 0$ e suponhamos que $f'(x)$ exista para todos os valores de x em um intervalo $]a, b[$ onde $c \in]a, b[$. Se $f''(c)$ existe e:

- *Se $f''(c) < 0$, então $f(x)$ tem um valor máximo local em c;*
- *Se $f''(c) > 0$, então $f(x)$ tem um valor mínimo local em c.*

Figura 33 – Extremos Relativos por Derivada 2ª.



Fonte: O Autor.

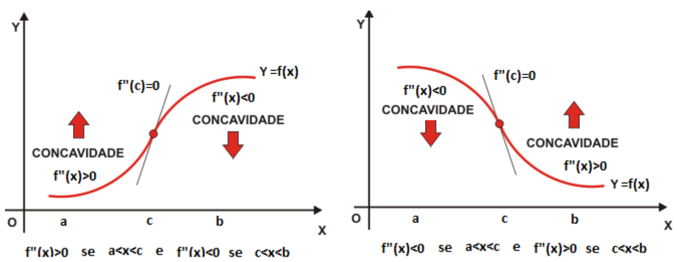
Teorema 5.16 ***(Teste da Derivada*** 2^a ***para o Ponto de Inflexão)***

Um ponto $P(c, f(c))$ pertencente ao gráfico de uma função f será um Ponto de Inflexão, se existir um intervalo $]a, b[$ onde $c \in]a, b[$, tal que ocorra uma das situações que se segue:

- *$f''(x) > 0$ se $a < x < c$ e $f''(x) < 0$ se $c < x < b$;*
- *$f''(x) < 0$ se $a < x < c$ e $f''(x) > 0$ se $c < x < b$.*

Para encontrar os Pontos de Inflexão de uma função na qual f'' é contínua, basta calcular os valores de x tais que $f''(x) = 0$ e verificar as condições acima para esses valores de x.

Figura 34 – Ponto de Inflexão.

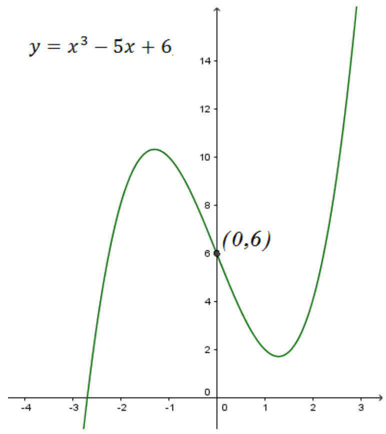


Fonte: O Autor.

Em linguagem simples, podemos definir o Ponto de Inflexão como o ponto onde o gráfico da função muda sua curvatura de côncava para cima (curvatura positiva) para côncava para baixo (curvatura negativa), ou vice-versa.

Exemplo 5.17 *No gráfico a seguir temos* $f''(x) = 6x$*, logo* $f''(x) = 0$ *para* $x = 0$*. Além disso* $f''(x) = 6x < 0$ *para* $x < 0$ *e* $f''(x) = 6x > 0$ *para* $x > 0$*.*

Figura 35 – Ponto de Inflexão.



Fonte: O Autor.

5.3 CONSTRUINDO GRÁFICOS DE POLINÔMIOS

1ª **Construção Gráfica**: Construir o gráfico de $f(x) = x^2 - 4x + 3$, para o domínio $D = \mathbb{R}$.

1ª*parte*) **Ponto de encontro da Curva com o eixo** y**:**

Seja $x = 0$, aplicando na função temos $y = f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3$. Assim temos $A = (0, 3)$, que é o ponto de encontro do gráfico de f com o eixo y.

2ª*parte*) Teste da Derivada 1ª :

Encontrando os Pontos Críticos:

$$f'(x) = 2x - 4$$

Fazendo, $f'(x) = 0$ encontraremos o valor da abscissa do Ponto Crítico da função f. Assim temos:

$$\begin{aligned} 2x - 4 &= 0 \\ 2x &= 4 \\ x &= \frac{4}{2} \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Sendo a ordenada do Ponto Crítico:

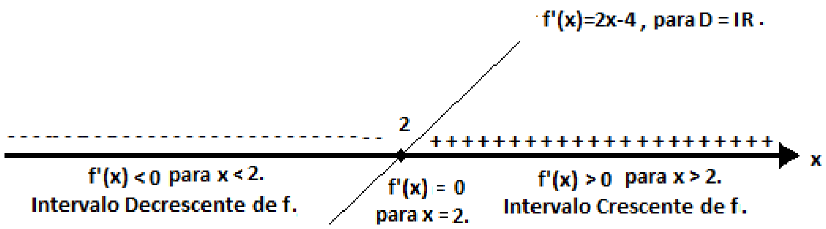
$$
\begin{aligned}
f(2) &= (2)^2 - 4 \cdot (2) + 3 \\
f(2) &= -1.
\end{aligned}
$$

Logo temos o Ponto Crítico $(2, -1)$;

Sinais de $f'(x)$, Intervalos Crescente e Decrescente de $f(x)$ e Ponto de Mínimo e Máximo de f :

Analisando a Figura 36, o sinal de $f'(x)$ é negativo no intervalo $x < 2$, ou seja, no intervalo $]-\infty, 2[$. Assim, f será descrescente nesse intervalo. Para o intervalo $x > 2$, ou seja, $]2, \infty[$ temos a $f'(x)$ com sinal positivo. Logo, f será crescente nesse intervalo. Portanto, $x = 2$ é abscissa do Ponto de Mínimo Local de f. Desse modo, o Ponto Crítico $(2, -1)$ é Ponto de Mínimo Local, que denominaremos $P_{Mín.} = B = (2, -1)$.

Figura 36 – Sinais de $f'(x)$ e Intervalos Crescente e Decrescente de $f(x)$.



Fonte: O Autor.

3ª*parte*) **Teste da Derivada 2ª** :

Encontrando o Ponto de Inflexão:

$$f''(x) = 2,$$

é uma constante.

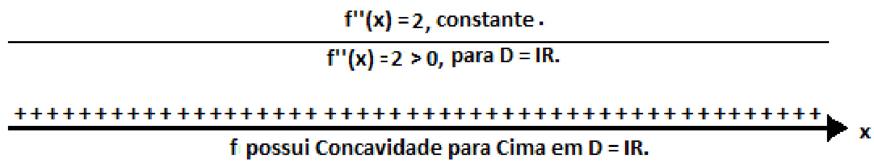
Fazendo, $f''(x) = 0$ encontraremos o valor da abscissa do Ponto de Inflexão da função f. Como não existe valor para x que zere $f''(x)$, pois $f''(x) = 2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então f não possui Ponto de Inflexão.

Intervalo de Concavidade de f:

Como podemos analisar na Figura 37, o sinal de $f''(x)$ é positivo para todo $x \in \mathbb{R}$, pois f”(x) é constante de valor 2. Logo, o gráfico da função f tem concavidade para cima para todo $x \in \mathbb{R}$.

Obs: O fato do gráfico de f ser totalmente de concavidade para cima vem a confirmar a inexistência de Ponto de Inflexão no Gráfico dessa função.

Figura 37 – Sinal de $f''(x)$ e Intervalo Concavidade de f:



Fonte: O Autor.

$f''(x)$ **definindo Máximo e Mínimo Local:**

Seja o Ponto Crítico $(2, -1)$, aplicando a abscissa $x = 2$ desse ponto em $f''(x) = 2$ temos:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 \\ f''(2) &= 2 > 0, \end{aligned}$$

logo o Ponto Crítico $(2, -1)$ é Mínimo Local. Assim temos $P_{Mín} = B = (2, -1)$, confirmando o que já havia sido encontrado no Teste da Derivada 1ª.

4ª$parte$) **Achando os zeros de** f :

Como se trata de uma função de segundo grau, poderemos utilizar simplesmente a fórmula de Báskara, o qual nos fornecerá as raízes $x' = 1$ e $x'' = 3$.

5ª$parte$) **Calculando limites no infinito**:

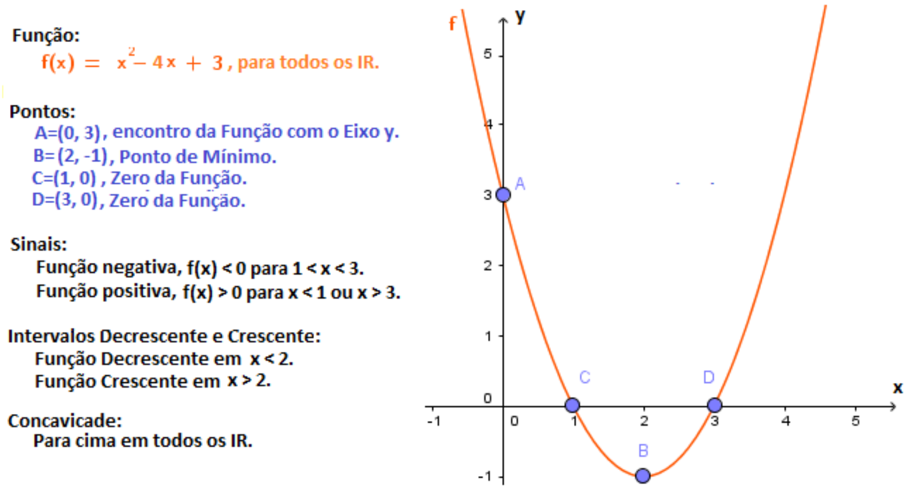
De acordo com o item 6º da definição de ***Limites no Infinito***, temos que:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 - 4x + 3 = \lim_{x \to +\infty} x^2 = \infty$ e
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 - 4x + 3 = \lim_{x \to -\infty} x^2 = \infty$.

6ª$parte$) **O gráfico da Função** $f(x) = x^2 - 4x + 3$ para todo $x \in \mathbb{R}$:

Na Figura 38 temos o gráfico de f onde podemos observar tudo que foi calculado e analisado nos itens anteriores.

Figura 38 – Gráfico da Função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ para todo $x \in \mathbb{R}$:



Fonte: O Autor.

2ª **Construção Gráfica**: Construir o gráfico de $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, para o domínio $D = \mathbb{R}$.

1ª **parte) Ponto de encontro da Curva com o eixo y onde $y = f(0)$:**

Seja $x = 0$, aplicando na função temos $y = f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + 6 = 6$. Assim, temos $A = (0, 6)$, que é o ponto de encontro da Curva com o eixo y.

2ª parte) Teste da Derivada 1ª :

Encontrando os Pontos Críticos:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 5$$

Fazendo $f'(x) = 0$, encontraremos o valor da abscissa do Ponto Crítico da função f. Assim, temos:

$$3x^2 - 4x - 5 = 0.$$

$$\begin{aligned} x_{r1} &= \frac{-(-4) - \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 - \sqrt{19}}{3} \\ x_{r1} &\cong -0,7862996478. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x_{r2} &= \frac{-(-4) + \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 + \sqrt{19}}{3} \\ x_{r2} &\cong 2,119632982. \end{aligned}$$

Sendo as ordenadas dos Pontos Críticos:

$$\begin{aligned} f(-0,7862996478) &= (-0,7862996478)^3 - 2(-0,7862996478)^2 \\ &\quad -5 \cdot (-0,7862996478) + 6 \\ f(-0,7862996478) &\cong 8,208820735. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(2,119632982) &= (2,119632982)^3 - 2(2,119632982)^2 \\ &\quad -5 \cdot (2,119632982) + 6 \\ f(2,119632982) &\cong -4,060672587. \end{aligned}$$

Logo temos os Pontos Críticos:

$$(-0,7862996478; 8,208820735)$$

e

$$(2,119632982; -4,060672587)$$

Sinais de $f'(x)$, Intervalos Crescentes e Decrescentes de f e Ponto de Mínimo e Máximo de f :

O sinal de $f'(x)$ é negativo no intervalo

$$]-0,7862996478; 2,119632982[,$$

ou seja, f será descrescente nesse intervalo.

Para os intervalos

$$]-\infty,\ -0,7862996478[\ \cup\ ]2,119632982,\ \infty[$$

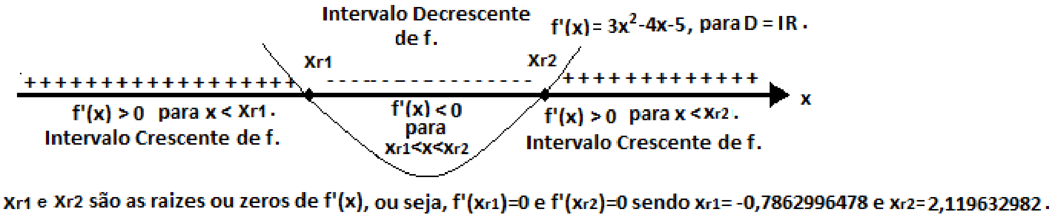
temos $f'(x)$ com sinal positivo, logo f será crescente nesse intervalo. Então $x_{r1} = -0,7862996478$ e $x_{r2} = 2,119632982$ são as abscissas dos Pontos de Máximo e Mínimo Local respectivamente de f. Assim, os Pontos Críticos $(-0,7862996478; 8,208820735)$ e $(2,119632982; -4,060672587)$ são Pontos de Máximo e Mínimo Local respectivamente, que denominaremos:

$$P_{Máx.} = B = (-0,7862996478; 8,208820735)$$

e

$$P_{Mín.} = C = (2,119632982; -4,060672587).$$

Figura 39 – $f''(x)$ e Intervalo de Concavidade para Baixo e para Cima de f



:

Fonte: O Autor.

$3^{\text{a}}parte)$ **Teste da Derivada** 2^{a} :

Encontrando o Ponto de Inflexão:

$$f''(x) = 6x - 4,$$

$x \in \mathbb{R}$.

Fazendo, $f''(x) = 0$ encontraremos o valor da abscissa do Ponto de Inflexão da função f. Logo:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 6x - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2}{3} = 0,6.... \end{aligned}$$

A ordenada do Ponto de Inflexão será:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{3}\right) &= \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) + 6 \\ \Leftrightarrow f\left(\frac{2}{3}\right) &= \frac{2072}{999} = 2,074.... \end{aligned}$$

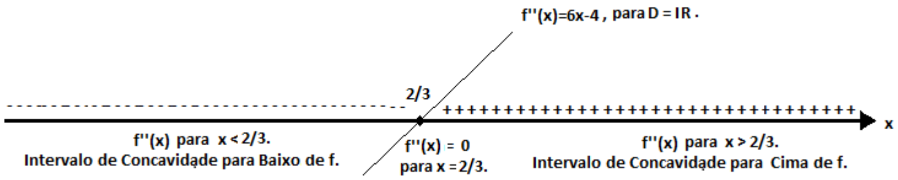
Logo, temos o Ponto de Inflexão:

$$G = (\frac{2}{3}, \frac{2072}{999}).$$

Intervalo de Concavidade de f:

Como podemos analisar na Figura 40, o sinal de $f''(x)$ é negativo para $x < \frac{2}{3}$ e positivo para $x > \frac{2}{3}$. Logo, o gráfico da função f tem Concavidade para Baixo e para Cima respectivamente, nos intervalos $x < \frac{2}{3}$ e $x > \frac{2}{3}$, sendo $x = \frac{2}{3}$ a abscissa do Ponto de Inflexão.

Figura 40 – Sinais de $f''(x)$ e Intervalo Concavidade de f:



Fonte: O Autor.

$f''(x)$ **definindo Máximo e Mínimo Local:** Esta técnica é apresentada como uma segunda opção, além da derivada 1ª, para a determinação de Máximo e Mínimo local. Sejam os Pontos Críticos:

$$(-0,7862996478; 8,208820735) \text{ e } (2,119632982; -4,060672587)$$

aplicando as abscissas dessses pontos em $f''(x) = 6x - 4$ encontraremos o Ponto de Mínimo e de Máximo se for encontrado um valor da Derivada 2ª positivo ou negativo respectivamente.

Como $-0,7862996478 < \frac{2}{3}$, temos que $f''(-0,7862996478) < 0$.

Logo, o Ponto Crítico $(-0,7862996478,\ 8,208820735)$ é Máximo Local. Assim temos $P_{Máx} = B = (-0,7862996478,\ 8,208820735)$, confirmando o que já havia sido encontrado no Teste da Derivada 1ª.

Como $2,119632982 > \frac{2}{3}$, temos que $f''(2,119632982) > 0$.

Logo, o Ponto Crítico $(2,119632982,\ -4,060672587)$ é Mínimo Local. Assim temos $P_{Mín} = C = (2,119632982,\ -4,060672587)$, confirmando o que já havia sido encontrado no Teste da Derivada 1ª.

4^{a}*parte*)**Calculando os zeros da Função**

Utilizando o teorema das raízes racionais, temos que as possíveis raízes racionais desta função têm a forma $\frac{p}{q}$, em que p é divisor de 6 e q de 1. Assim, podemos observar que a função apresenta apenas raízes inteiras. Estas irão pertencer ao conjunto $\{\pm 6, \pm 3, \pm 2, \pm 1\}$.

Encontraremos então as raízes $-2,\ 1$ e 3.

5^{a}*parte*) **Calculando limites no infinito**:

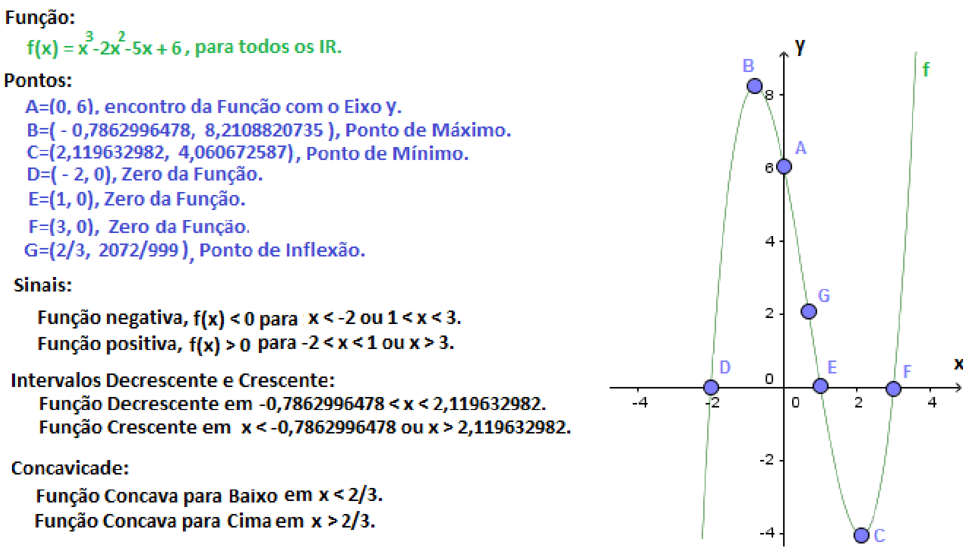
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = \lim_{x \to +\infty} x^3 = \infty$ e

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$.

6^{a}*parte*) **O gráfico da Função** $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Na Figura 41 temos o gráfico de f onde podemos observar tudo que foi calculado e analisado nos itens anteriores.

Figura 41 – Gráfico da Função $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ para todo $x \in \mathbb{R}$:



Fonte: O Autor.

3^{a} **Construção Gráfica**: Construir o gráfico de $f(x) = x^4 - 4x^3$, para o domínio $D = \mathbb{R}$.

1^{a} **parte) Ponto de encontro do gráfico com o eixo** y **onde** $y = f(0)$:

Seja $x = 0$, aplicando na função temos $y = f(0) = 0^4 - 4 \cdot 0^3$. Assim, $A = (0, 0)$, que é o ponto de encontro do gráfico com o eixo y.

2^{a} parte) Teste da Derivada 1^{a} :

Encontrando os Pontos Críticos:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$$

$$f'(x) = 4x^2(x-3)$$

Fazendo $f'(x) = 0$, encontraremos o valores das abscissas dos Pontos Críticos da função f. Assim,:

$$4x^2(x-3) = 0.$$

$$x_{r1} = 0$$

e

$$x_{r2} = 3$$

Sendo as ordenadas dos Pontos Críticos:

$$f(0) = 0$$

e

$$\begin{aligned} f(3) &= 3^4 - 4 \cdot 3^3 \\ &= 81 - 4 \cdot 27 \\ &= 81 - 108 \\ &= -27 \end{aligned}$$

Logo, temos os Pontos Críticos:

$$(0, 0)$$

e

$$(3, -27)$$

Sinais de $f'(x)$, Intervalos Crescentes e Decrescentes de f e Ponto de Mínimo e Máximo de f :

O sinal de $f'(x)$ é negativo no intervalo:

$$]-\infty, 3[$$

com exceção de $x = 0$, ou seja, f será descrescente nesse intervalo.

Para o intervalo

$$]3, \infty[$$

temos $f'(x)$ com sinal positivo, logo f será crescente nesse intervalo. Então, teremos o ponto $B = (3, -27)$ como ponto de mínimo da função.

$3^{\text{a}} parte$) **Teste da Derivada 2^{a} :**

Encontrando o Ponto de Inflexão:

$$f''(x) = 12x^2 - 24x$$

$$f''(x) = 12x(x-2),$$

$x \in \mathbb{R}$.

Fazendo $f''(x) = 0$, encontraremos o valor das abscissas dos Pontos de Inflexão da função f. Logo:

$$x_{r1} = 0$$

$$x_{r2} = 2$$

As ordenadas dos Pontos de Inflexão serão:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0^4 - 4 \cdot 0^3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^4 - 4 \cdot 2^3 \\ &= 16 - 4 \cdot 8 \\ &= 16 - 32 \\ &= -16 \end{aligned}$$

Logo, temos os Pontos de Inflexão:

$$A = (0,0)$$

e

$$C = (2,-16).$$

Intervalo de Concavidade de f:

O sinal de $f''(x)$ é negativo para $0 < x < 2$ e positivo para $x < 0$ ou $x > 2$. Logo, o gráfico da função f tem Concavidade para Baixo em $0 < x < 2$ e para Cima em $x < 0$ ou $x > 2$, sendo $x = 0$ e $x = 2$ as abscissas dos Pontos de Inflexão.

4^{a}*parte*)**Calculando os zeros da Equação**

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 4x^3 \\ &= x^3(x-4) \end{aligned}$$

Temos então que:

$$x_{r1} = 0$$

e

$$x_{r2} = 4$$

$5^{\underline{a}} parte$) **Cálculo dos limites no infinito**:

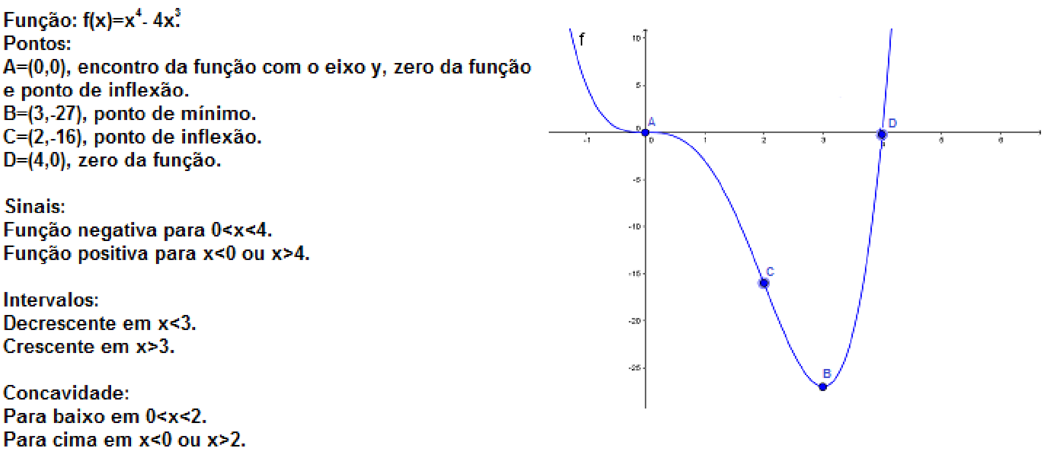
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^4 - 4x^3 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^4 = \infty$ e

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^4 - 4x^3 = \lim\limits_{x \to -\infty} x^4 = \infty.$

$6^{\underline{a}} parte$) **O gráfico da Função** $f(x) = x^4 - 4x^3$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Na Figura 42 temos o gráfico de f onde podemos observar tudo que foi calculado e analisado nos itens anteriores.

Figura 42 – Gráfico da Função $f(x) = x^4 - 4x^3$ para todo $x \in \mathbb{R}$:



Fonte: O Autor.

6 OUTRAS APLICAÇÕES DE DERIVADAS

6.1 Aplicações de Derivadas à Cinemática

Os textos e exercícios a seguir foram baseados em [1].
Suponhamos que a posição de um ponto material em movimento sobre uma curva pode ser determinada em cada instante t, expressa através da função $s = s(t)$.

Sabemos também que a *velocidade escalar média* é dada por $V_m = \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0} = \frac{\Delta_s}{\Delta_t}$.

Chama-se *velocidade escalar* do ponto no instante t_0, o limite:

$$V_{(t_0)} = \lim_{t\to t_0} V_m = \lim_{t\to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s^{'}(t_0)$$

Concluímos então que a derivada da função $s = s(t)$ no ponto $t = t_0$ é igual à velocidade escalar do móvel no instante t_0.

Temos ainda, na cinemática, a equação $V = V(t)$, a qual nos dá a velocidade de um ponto material em movimento no instante t.

A aceleração escalar média entre os instantes t_0 e t é dada por:

$$a_m = \frac{V(t)-V(t_0)}{t-t_0} = \frac{\Delta V}{\Delta t}.$$

Chama-se *aceleração escalar* do ponto no instante t_0, o limite:

$$a_{(t_0)} = \lim_{t\to t_0} a_m = \lim_{t\to t_0} \frac{V(t)-V(t_0)}{t-t_0} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = V^{'}(t_0)$$

Como segunda conclusão podemos dizer que a derivada da função $V = V(t)$ no ponto $t = t_0$ é igual à aceleração escalar do móvel no instante t_0.

Exemplo:

Se a equação horária de um móvel é $S(t) = t^2$, então sua velocidade é $V(t) = 2t$ e sua aceleração é $a(t) = 2$.
No instante $t = 4$, sua velocidade é $V(4) = 2 \cdot 4 = 8$ e sua aceleração é $a(4) = 2$ (unidades SI).

Obs: SI - Sistema Internacional de Unidades. É utilizado para a padronização das unidades de medida, adotando-se uma unidade para cada grandeza física.

Figura 43 – Unidades de Medidas

Grandeza física	Símbolo	Unidade derivada	Símbolo
velocidade	v	metro por segundo	m/s
área	A	metro quadrado	m²
volume	V	metro cúbico	m³
aceleração	a	metros por segundo ao quadrado	m/s²

Fonte: O Autor.

Ficam como exercícios:

1) A posição de uma partícula que se desloca ao longo de uma reta coordenada é dada por $s(t) = \sqrt{1+4t}$, com s em metros e t em segundos. Determine a velocidade e a aceleração da partícula para $t = 6s$.

2) Dada a função horária dos espaços de um móvel, em unidades do SI, obtenha as funções horárias da velocidade escalar e da aceleração escalar, nos casos:

a) $s(t) = 5 + 4t^4 + 2t^3 - 7t^2 + 10t$

b) $s(t) = 12.t^3$

c) $s(t) = -6 + 4t + 2t^2$

3) O espaço percorrido por um móvel varia com o tempo segundo a função: $s(t) = 5 + 6t - (5/2)t^2 + (1/3)t^3$ (SI). Em que instantes a velocidade escalar se anula?

6.2 Outras Aplicações e Exercícios

1) Uma pedra é lançada verticalmente para cima. Sua altura h (em metros) em relação ao solo é dada por $h(t) = 30 + 20t - 5t^2$, em que t indica o número de segundos decorridos após o lançamento. Em que instante a pedra atingirá sua altura máxima? Qual é essa altura?

Solução:

Vamos pesquisar os extremantes da função:

$$h'(t) = 20 - 10t = 0$$
$$\Rightarrow t = \frac{20}{10} = 2$$

Analisemos o sinal de $h'(t) = 20 - 10t$:

$$t < 2 \Rightarrow h'(t) > 0$$

$$t > 2 \Rightarrow h'(t) < 0$$

Concluímos que $t = 2$ é ponto de máximo para h e temos:

$$h(2) = 30 + 20 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 = 50$$

ou seja, para $t = 2s$ teremos a altura máxima de $50m$.

Poderíamos também ter usado o processo das derivadas segundas:

$$h'(t) = 20 - 10t \Rightarrow h''(t) = -10 = h''(2) = -10 < 0$$

e, como $h'(2) = 0$, $t = 2$ é o ponto de máximo.

2) Uma empresa fabrica determinado produto e o vende ao preço unitário de R$70,00. O custo total c (em reais) para produzir n unidades é dado por $c(n) = 2n^3 - 3n^2 - 2n + 5$. Se toda a produção é absorvida pelo mercado consumidor, qual é a quatidade produzida que gera um lucro máximo? Qual é o valor desse lucro?

Solução:

Como lucro é dado por receitas menos despesas, temos a seguinte função:

$$L(n) = 70n - (2n^3 - 3n^2 - 2n + 5)$$

$$= -2n^3 + 3n^2 + 72n - 5$$

Pesquisando os extremantes:

$$L'(n) = -6n^2 + 6n + 72 = 0$$

$$L'(n) = 0 \Leftrightarrow -6n^2 + 6n + 72 = 0$$
$$\Rightarrow n = 4 \text{ ou } n = -3$$

Analisando o sinal de $L'(n)$:

$$n < -3 \Rightarrow L'(n) < 0$$

$$-3 < n < 4 \Rightarrow L'(n) > 0$$
$$n > 4 \Rightarrow L'(n) < 0$$

Concluímos que $n = 4$ é ponto de máximo de L e, nesse caso, o lucro obtido é:

$$L(4) = -2 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 72 \cdot 4 - 5$$

$$= -128 + 48 + 288 - 5$$

$$= 203$$

Isto é, com 4 unidades vendidas, a empresa terá um lucro máximo de R$203,00.

Temos também a opção da derivada segunda:

$$L'(n) = -6n^2 + 6n + 72$$

$$\Rightarrow L''(n) = -12n + 6$$

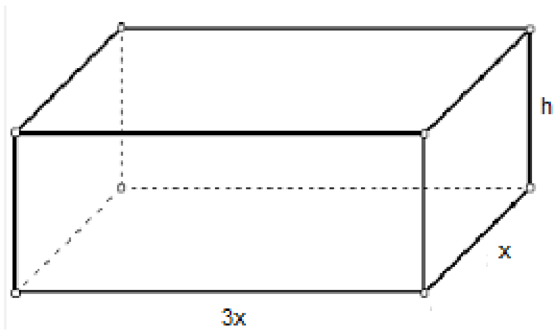
$$\Rightarrow L''(4) = -12 \cdot 4 + 6 = -42 < 0$$

então, $n = 4$ é o ponto de máximo.

3) Um fabricante precisa produzir caixas de papelão, com tampa, tendo na base um retângulo com comprimento igual ao triplo da largura. Calcule as dimensões que permitem a máxima economia de papelão para produzir caixas de volume de $36m^3$.

Solução:

Figura 44 – Paralelepípedo



Fonte: O Autor.

Sendo as dimensões do paralelepípedo que forma a caixa, $3x$ igual a aresta frontal da base, x igual a aresta lateral da base e h igual a altura, temos que: $3x \cdot x \cdot h = 36 \Rightarrow x^2 \cdot h = 12$ (I). Devemos determinar x e h de forma que a área da caixa seja a menor possível. A área é dada por: $S = 2 \cdot (3x \cdot x) + 2 \cdot x \cdot h + 2 \cdot 3x \cdot h$, mas por (I), $h = \frac{12}{x^2}$. Então:

$S(x) = 6x^2 + \frac{96}{x} \Rightarrow S'(x) = 12x + 96 \cdot (-\frac{1}{x^2}) = 12x - \frac{96}{x^2}$

$S'(x) = 0 \Rightarrow x = 2;$

$S''(x) = 12 - 96 \cdot \frac{-2}{x^3} \Rightarrow S''(x) = 12 + \frac{192}{x^3} \Rightarrow S''(2) = 12 + 24 = 36 > 0$

Logo, $x = 2$ é ponto de mínimo e as dimensões são: $2cm, 6cm, 3cm$.

Ficam como exercícios:

1) Contrua o gráfico da função $f(x) = x^3 - x$.

2) Qual a equação da reta tangente à curva $y = 2x^2 - 1$, no ponto de abscissa 1?

3) Considere R como sendo o retângulo de maior área que se pode construir dobrando-se um arame de $50cm$. Quanto vale, em cm, a área de R ?

4) Determine $f''(x)$ em cada caso:

   a) $f(x) = x^4 + 5x^2 + 1$

   b) $f(x) = -3x^5 + 4x^3 - 2x^2 + x$

5) Estude os sinais das funções $f'(x)$ e $f''(x)$, sendo $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$.

7 PLANO DE AULA

7.1 Identificação

Curso: Ensino Médio.
Disciplina: Matemática.
Carga horária: 30 horas/aula, as quais deverão ser ministradas em aulas extras, isto é, fora do conteúdo normalmente apresentado pelas escolas.
Série: 3º ano do ensino médio

7.2 Objetivo Geral

Capacitar os alunos a adquirirem conhecimento necessário para a utilização de derivadas para aplicação prática e resolução de problemas para concursos em geral.

7.3 Objetivos Específicos

- revisar conceitos de funções contínuas;
- apresentar definições e demonstrar teoremas relacionados às derivadas para alcançar a capacidade de construção e análise de gráficos de funções e suas aplicações;
- Utilizar os conceitos de crescimento/decrescimento, concavidade, pontos de máximo e mínimo e pontos de inflexão.

7.4 Conteúdo Programático

- continuidade de uma função;
- zeros de uma função;
- noção intuitiva de limites;
- limite da função em um ponto;
- reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto P;
- definição de derivada
- regras de derivação
- teste derivada 1ª
- máximos e mínimos locais e absolutos

- intervalos crescentes e decrescentes
- teste da derivada 2ª
- extremos relativos
- ponto de inflexão
- construção gráfica
- aplicações e exercícios.

7.5 Metodologia

Demonstrações em quadro negro.

7.6 Avaliação

Serão utilizadas duas avaliações escritas de desenvolvimento, consistindo estas de um teste e uma prova com exercícios de aplicação de derivadas.

8 CONCLUSÃO

O Cálculo, especialmente a Derivada, é um importante intrumento na construção gráfica de Funções, como as Polinomiais do 2º, 3º e 4º grau aqui tratadas.

Apesar dessas construções serem de extenso esforço matemático por via dessas ferramentas, têm a vantagem de descrever o gráfico em detalhes, o que as tornam um método de grande valor didático, sendo aqui proposto e recomendado o seu uso no Ensino Médio.

REFERÊNCIAS

[1] ARAÚJO, MARIA JULIETA VENTURA CARVALHO. Cálculo I. Disponível em: http://www.ufjf.br/sandro_mazorche/files/2010/03/Cap%C3%ADtulo-4.pdf. Acesso em 08/04/2016.

[2] GUIDORIZZI, HAMILTON LUIZ. *UM CURSO DE CÁLCULO - VOLUME 1.* RIO DE JANEIRO:LTC-LIVROS TÉCNICOS E CIENTÍFICOS EDITORA S.A., 2001.

[3] IEZZI, GELSON. *MATEMÁTICA: CIÊNCIA E APLICAÇÕES, 3ºANO: ENSINO MÉDIO, MATEMÁTICA.* SÃO PAULO: ATUAL, 2004.

[4] LIMITE. Disponível em: http://www.somatematica.com.br/superior/limites/limites2.php. Acesso em 22/05/2016.

[5] MENEZES, LUÍS CARLOS; SMOLE, KÁTIA CRISTINA STOCCO; et al. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/SEF, volume 3, 1997.

[6] SMOLE, KÁTIA CRISTINA STOCCO. *MATEMÁTICA - VOLUME 1 - 1ª SÉRIE - ENSINO MÉDIO / KÁTIA CRISTINA STOCCO SMOLE, MARIA IGNEZ DE SOUZA VIEIRA DINIZ. - 3ª ED.* SÃO PAULO: SARAIVA, 2003.

[7] SWOKOWSKI, EARL W. *CÁLCULO. Com Geometria Analítica.* São Paulo: EDITORA McGraw-Hill do Brasil, volume 1, 1983.

[8] UNESP-UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA. CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO. Disponível em: http://www.calculo.iq.unesp.br/PDF/Continuidade-complemento.pdf. Acesso em 18/03/2016.

APÊNDICE A – RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

A.1 Página 52

1) Utilizando a regra da cadeia, temos:
$v(t) = s'(t) = \frac{1}{2.\sqrt{1+4t}} \cdot 4 = \frac{2}{\sqrt{1+4t}}$
$v(6) = \frac{2}{\sqrt{1+4.6}} = \frac{2}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}\ m/s$
$a(t) = s''(t) = 2.\left(-\frac{1}{2}\right).\frac{1}{\sqrt{(1+4t)^3}}.4 = \frac{-4}{\sqrt{(1+4t)^3}}$
$a(6) = \frac{-4}{\sqrt{25^3}} = \frac{-4}{125}\ m/s^2$.

2) a) $v(t) = s'(t) = 16t^3 + 6t^2 - 14t + 10$
$a(t) = s''(t) = 48t^2 + 12t - 14$

b) $v(t) = 36t^2$
$a(t) = 72t$

c) $v(t) = 4 + 4t$
$a(t) = 4$.

3) $v(t) = 6 - 5t + t^2$
A velocidade se anula quando $t^2 - 5t + 6 = 0$, ou seja, em $t = 3s$ ou $t = 2s$.

A.2 Página 55

1) 1.1) **Zeros da Função:**
Sendo $f(x) = x(x^2 - 1) = 0$, temos que $x = -1$ ou $x = 0$ ou $x = 1$

1.2) **Pontos Críticos:**
$f'(x) = 3x^2 - 1 = 0\ \Rightarrow$ x=$\pm\frac{\sqrt{3}}{3} \cong \pm 0,5774$

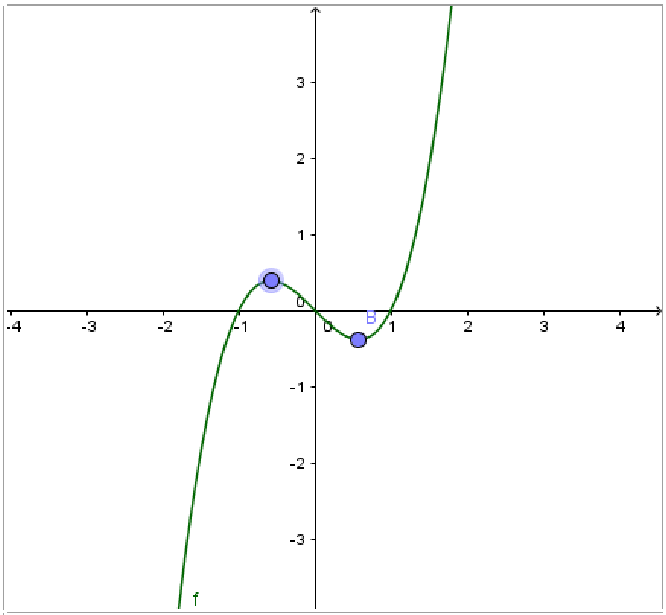
1.3) **Crescimento/decrescimento:**
Como $f'(x) > 0$ para $x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou para $x > -\frac{\sqrt{3}}{3}$, temos que o gráfico é crescente nesses intervalos. E como $f'(x) < 0$ para $-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$, temos que o gráfico é decrescente nesse intervalo.

1.4) **Concavidade:**
Sendo $f''(x) = 6x$, temos que $f''(x) < 0$ para $x < 0$, logo o gráfico apresenta concavidade para baixo nesse intervalo. E, como $f''(x) > 0$ para $x > 0$, o gráfico apresenta concavidade para cima nesse intervalo.

1.4) **Ponto de Inflexão:**
Fazendo $f''(x) = 6x = 0$, temos que $x = 0$. Logo o ponto de inflexão será o ponto (0,0).

1.5) **Gráfico:**

Figura 45 – Gráfico de $f(x) = x^3 - x$



Fonte: O Autor

2) O coeficiente angular da reta tangente será igual a $f'(x) = 4x$. Para $x = 1$, teremos $f'(1) = 4$.
A equação da reta será então:

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

$$y - 1 = 4(x - 1)$$

$$y - 1 = 4x - 4$$

$$y = 4x - 3$$

3) Sendo a e b as dimensões do retângulo, teremos:

$$2a + 2b = 50$$

$$a + b = 25$$

$$a = 25 - b$$

Assim, a função da área será:

$$A = (25 - b).b$$
$$A = -b^2 + 25b$$

Calculando os extremantes, teremos:
$A' = -2b + 25 = 0$, logo $a = b = 12,5cm$.
E sendo esse extremante ponto de máximo, pois $A'' = -2 < 0$, temos que a área máxima será $A = 156,25$.

4) a) $f'(x) = 4x^3 + 10x$
$f''(x) = 12x^2 + 10.$

b) $f'(x) = -15x^4 + 12x^2 - 4x + 1$
$f''(x) = -60x^3 + 24x - 4.$

5) 5.1) $f'(x) = \frac{2.(x+3)-(2x+1)}{(x+3)^2}$
$f'(x) = \frac{2x+6-2x-1}{(x+3)^2}$
$f'(x) = \frac{5}{(x+3)^2}$
Logo, $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

5.2) $f''(x) = 5(x+3)^{-2}$
$f''(x) = -10(x+3)^{-3}$
$f''(x) = \frac{-10}{(x+3)^3}.$
Logo, $f''(x) > 0$ para $x < -3$ e $f''(x) < 0$ para $x > -3$.