Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Davidson Mendes Ferreira de Paula

Limite: uma conexão entre o ensino básico e o ensino superior

Juiz de Fora

2016

Davidson Mendes Ferreira de Paula

Limite: uma conexão entre o ensino básico e o ensino superior

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki

Juiz de Fora

2016

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

de Paula, Davidson.
Limite: uma conexão entre o ensino básico e o ensino superior / Davidson Mendes Ferreira de Paula. – 2016.
107 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2016.

1. Cálculo. 2. Pré-cálculo. 3. Limite. I. Miyagaki, Olímpio Hiroshi, orient. II. Título.

Davidson Mendes Ferreira de Paula

Limite: uma conexão entre o ensino básico e o ensino superior

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 18 de agosto de 2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Luís Fernando Crocco Afonso
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Francinildo Nobre Ferreira
Universidade Federal de São João Del-Rei

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço ao meu Deus todo poderoso, que me concedeu saúde e inteligência, e me conduziu com segurança de Belo Horizonte a Juiz de Fora durante todo o curso.

Em segundo lugar, agradeço à minha família pelo carinho e apoio.

Ao meu orientador Professor Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki pela paciência, pelos ensinamentos e por me ajudar a concluir este trabalho.

À CAPES pelo auxílio financeiro que foi de extrema importância, pois, custeou minhas viagens e alimentação.

Por fim, aos meus amigos de curso pelos estudos em grupo, pelas dicas antes das provas, pelos cafés fortificantes, pela companhia nas viagens, enfim, pela amizade de cada um.

RESUMO

O conceito de Limite é uma das ferramentas fundamentais no ensino de cálculo diferencial e integral no ensino superior, mas que normalmente não é lecionado no ensino básico, embora esse tema tenha feito parte dos livros do ensino médio por um longo tempo. Este trabalho visa mostrar a importância de se abordar esse assunto nesse nível, como um elo que une o ensino médio e a graduação, pois, o conteúdo ensinado até o ensino médio, não é completamente eficiente para estudar matemática mais avançada. Ele é composto por vários planos de aula que tratam desde a noção inicial de limite, passa por derivada, e finda nas somas de Riemann e noções de integral, além de uma síntese sobre esses assuntos. Temas como máximos e mínimos de funções, áreas e volumes, tornam a introdução do tema menos impactante e abrem caminho para resolvermos problemas mais avançados.

Palavras-chave: Cálculo. Pré-cálculo. Limite.

ABSTRACT

The Limit concept is one of the fundamental tools in teaching differential and integral calculus in higher education although it is not usually taught at basic education level, although this theme has been part of high school books for a long time. This work aims to show the importance to deal with Limit at this level, so it can work as a link between high school and higher education, once the content taught at elementary and high school are not really efficient for the study of more advanced mathematics. This work consists of several lesson plans that deal from the initial concept of limit, go through derivative, and end in Riemann's sums and integral notions, as well as offer an overview of such issues. Topics such as maximum and minimum of the functions and also areas and volume make the introduction of the topic less impactful and pave the way to the solution of more advanced problems.

Key-words: Calculus. Pre calculus. Limit.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As disciplinas de cálculo nos diversos cursos de graduação, trabalham basicamente três temas: Limites, derivadas e integrais. Estes conteúdos se distribuem nos primeiros períodos dos cursos de Matemática, Física, Química e quase todas as engenharias, e comumente servem de base para as disciplinas mais avançadas. Porém, muitos alunos ingressantes nesses cursos são reprovados ou abandonam as disciplinas.

Segundo (Alves, 2007, p.6)[1], a Escola Politécnica da USP apresenta índice de reprovação no Cálculo de até 75%. Já na Universidade Federal Fluminense, este índice chega a 95%. Para (Garzella, 2013, p.20)[6], taxas de reprovação e desistência dos alunos na disciplina, variam entre 2,33% a 77,5%. Certamente, o alto índice de reprovação reportado pelas universidades, tem como um dos fatores, a ausência da introdução do tema logo no ensino básico.

Pensando em limite como um elo que une os dois níveis de ensino, uma abordagem inicial desse assunto ao fim do ensino médio, permitiria ao aluno ingressar na graduação com uma visão menos impactante da matemática superior, podendo diminuir de maneira significante, os índices de reprovação nos cálculos. Para o Professor Arthur Lopes do Departamento de Matemática da UFRGS, o que o estudante aprender na educação básica, fará diferença durante o curso universitário (Alves, 2007, p.6)[1].

Nesse sentido, o presente trabalho traz uma abordagem inicialmente suave sobre as noções de limite, tratando de temas como velocidade instantânea, máximos e mínimos e, gradualmente, apresenta problemas mais bem elaborados com taxas relacionadas e cálculo de volumes.

Ele concentra-se especificamente em vários planos de aula, exercícios resolvidos e propostos, e uma síntese dos temas apresentados. Também, as resoluções dos exercícios propostos são apresentadas em um apêndice.

Ao fim, espera-se que os alunos emergentes do ensino médio tenham criado um relacionamento mais próximo com a matemática superior e que assim, a distância existente entre os dois níveis seja minimizada, culminando com a diminuição dos índices de reprovação nas disciplinas de cálculo.

2 LIMITE

O texto que segue, apresenta ao leitor uma noção inicial de limite intuitivamente, e em seguida, o coloca em contato com a definição formal. Isso será feito calculando valores de algumas funções próximos aos pontos onde se deseja calcular os limites, utilizando gráficos e fazendo demonstrações formais. Verá ainda o cálculo de alguns limites importantes como o trigonométrico fundamental e o exponencial fundamental, a ideia de continuidade e algumas propriedades.

2.1 NOÇÃO INTUITIVA DE LIMITE

Para compreendermos inicialmente a ideia de limite, tomemos como exemplo a função $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$, que tem como domínio o conjunto dos números reais exceto o número 3.

Olhando essa função com outros olhos, podemos escrevê-la da seguinte forma: $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-3)}{x-3}$. Como o domínio de f não inclui o número 3, podemos dividir o numerador e o denominador da função por $x - 3$, pois, certamente é diferente de zero. Assim, temos $f(x) = x + 2$, para $x \neq 3$.

Agora vamos analisar o que acontece com os valores da função $f(x) = x + 2$ quando calculamos seu valor escolhendo valores de x muito próximos de 3, porém, diferentes de 3. Os valores calculados podem ser observados na tabela abaixo.

x	$f(x) = x + 2$
2,9000	4,9000
2,9900	4,9900
2,9990	4,9990
2,9999	4,9999
3,0001	5,0001
3,0010	5,0010
3,0100	5,0100
3,1000	5,1000

Note que, quanto mais próximo de 3 tomamos os valores de x, mais próximos de 5 os valores de $f(x)$ ficam, não importando se os valores escolhidos são maiores ou menores do que 3.

Observe também que não estamos falando nada acerca do valor de $f(3)$, mesmo porque, 3 não pertence ao domínio de f. O que nos interessa é saber como a função se comporta quando os valores de x se aproximam de um determinado número.

No nosso exemplo, podemos dizer que 5 é o limite da função f quando os valores de x se aproximam de 3, ou, quando x tende a 3.

É claro que matematicamente essa definição não é válida, pois, carece de formalidade, uma vez que as expressões "mais próximo de", e, "tão próximo quanto quisermos", ou outra similar, não são tão precisas.

2.2 DEFINIÇÃO

Pensando numa definição mais formal, vamos retornar ao exemplo inicial para calculamos algumas diferenças. Os resultados podem ser visualizados na tabela abaixo.

x	$x-3$	$f(x)=x+2$	$f(x)-5$
2,9000	-0,1000	4,9000	-0,1000
2,9900	-0,0100	4,9900	-0,0100
2,9990	-0,0010	4,9990	-0,0010
2,9999	-0,0001	4,9999	-0,0001
3,0001	0,0001	5,0001	0,0001
3,0010	0,0010	5,0010	0,0010
3,0100	0,0100	5,0100	0,0100
3,1000	0,1000	5,1000	0,1000

Note que quanto menor $|x-3|$, menor será $|f(x)-5|$, para qualquer valor de x.

Formalmente, seja $\epsilon > 0$ de maneira que queiramos fazer $|f(x)-5| < \epsilon$. Para isso, devemos tomar um $\delta > 0$ de maneira que $|x-3| < \delta$ nos leve até a desigualdade inicial.

Em outras palavras, se $0 < |x-3| < \delta$ implicar $|f(x)-5| < \epsilon$, então, dizemos que o limite de f quando x se aproxima de 3, é 5 e escrevemos

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 5$$

Faz-se necessário escrevermos $0 < |x-3|$, pois, estamos tratando de valores de x próximos a 3, mas diferentes dele.

Em geral, se dado $\epsilon > 0$, encontrarmos $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon$$

então,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

.

EXEMPLO 1: Usando a definição, mostre que $\lim_{x \to 2}(x+1) = 3$.

Dado $\epsilon > 0$, queremos encontrar $\delta > 0$ tal que, $0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |(x+1) < 3| < \epsilon$.

Da última inequação, temos $|x-2| < \epsilon$. Assim, podemos considerar $\delta = \epsilon$.

De fato,

$$|x-2| < \delta \Rightarrow |x-2-1+1| < \epsilon \Rightarrow |(x+1)-3| < \epsilon \Rightarrow |f(x)-3| < \epsilon$$

Logo,

$$\lim_{x\to 2}(x+1) = 3$$

.

EXEMPLO 2: Usando a definição, mostre que $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2) = -1$.

Dado $\epsilon > 0$ tentaremos encontrar $\delta > 0$ tal que $0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |x^2-2-(-1)| < \epsilon$, ou seja, $|x^2-1| < \epsilon$.

Como gostaríamos que os valores de x ficassem cada vez mais próximos de 1, é razoável tomarmos $|x-1| < 1$, por exemplo.

Em consequência disso, temos

$$-1 < x-1 < 1 \Rightarrow 2-1 < x-1+2 < 1+2 \Rightarrow 1 < x+1 < 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -3 < x+1 < 3 \Rightarrow |x+1| < 3 \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{|x+1|}.$$

Então, se escolhermos $\delta =$mín$\left\{\frac{1}{3}, \frac{\epsilon}{3}\right\}$, teremos

$$|x-1| < \delta \leq \frac{\epsilon}{3} < \frac{\epsilon}{|x+1|} \Rightarrow |x-1||x+1| < \epsilon \Rightarrow |x^2-1| < \epsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |x^2-1-2+2| < \epsilon \Rightarrow |(x^2-2)+1| < \epsilon \Rightarrow |(x^2-2)-(-1)| < \epsilon$$

Logo,

$$\lim_{x\to 1}(x^2-2) = -1$$

2.3 PROPRIEDADES

Veremos agora algumas propriedades operatórias de limite. São propriedades que nos auxiliam no cálculo de limites de funções que são combinações de outras funções cujos limites já conhecemos.

As demonstrações podem ser verificadas nos apêndices.

Para todas as propriedades abaixo, considere f e g, duas funções, e k, uma constante.

1. ***Limite da função constante***

   Se $f(x) = k$, $\forall\ x \in R$, então, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = k$

2. ***Limite da multiplicação por constante***

   Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = F$, e k é uma constante, então, $\lim\limits_{x \to a} kf(x) = kF$

3. ***Limite da soma***

   Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = F$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = G$, então, $\lim\limits_{x \to a}(f+g)(x) = F + G$

4. ***Limite da diferença***

   Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = F$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = G$, então, $\lim\limits_{x \to a}(f-g)(x) = F - G$

5. ***Limite do produto***

   Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = F$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = G$, então, $\lim\limits_{x \to a}(f.g)(x) = F.G$

6. ***Limite do Quociente***

   Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = F$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = G$, então, $\lim\limits_{x \to a}(\dfrac{f}{g})(x) = \dfrac{F}{G}$, desde que $G \neq 0$

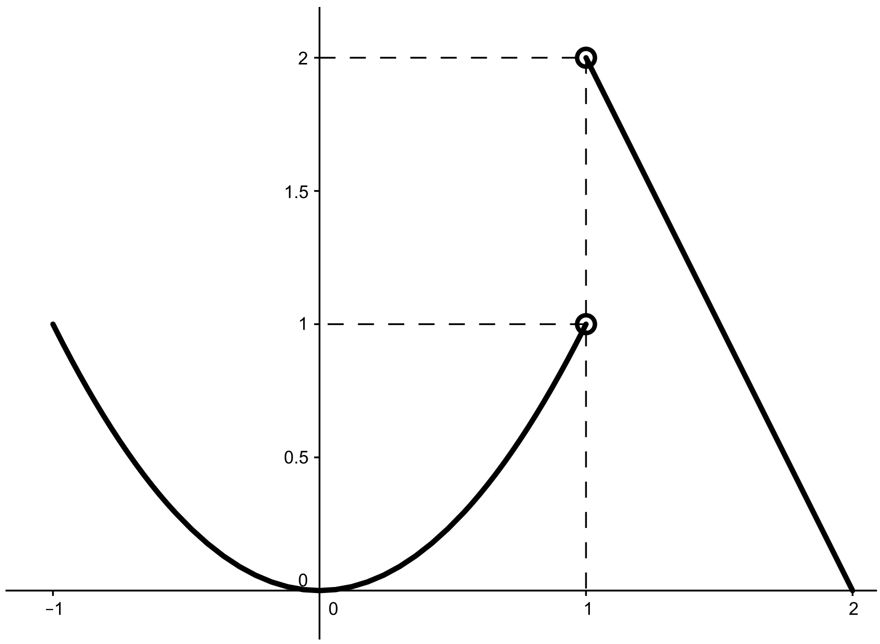
2.4 LIMITES LATERAIS

Para compreendermos a ideia de limites laterais, vamos tomar como exemplo a função f, definida por partes da seguinte forma

$$f(x) = \begin{cases} x^2,\ se\ \text{-}1 < x < 1 \\ -2x + 4,\ se\ 1 < x < 2 \end{cases}$$

cujo gráfico pode ser visualizado na Figura 1 abaixo.

Figura 1 – Limites laterais



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

Note que na medida em que os valores de x se aproximam de 1 por valores maiores do que 1, porém, diferentes dele, os valores de $f(x)$ se aproximam cada vez mais de 2. Por outro lado, quando os valores de x se aproximam de 1 por valores menores do que ele, mas diferentes de 1, os valores de $f(x)$ ficam muito próximos de 1.

Nesse caso, dizemos que o limite de f quando x tende a 1 pela direita é 2, e quando x tende a 1 pela esquerda é 1, e escrevemos $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$ e $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$.

Formalmente, definimos os limites laterais de maneira similar à definição de limite.

Limite lateral à direita

Se, dado $\epsilon > 0$, conseguirmos encontrar $\delta > 0$ tal que, $0 < x - a < \delta$ implica $|f(x) - F| < \epsilon$, então, dizemos que limite de $f(x)$ quando x tende a a pela direita é igual a L, e escrevemos $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = F$.

Limite lateral à esquerda

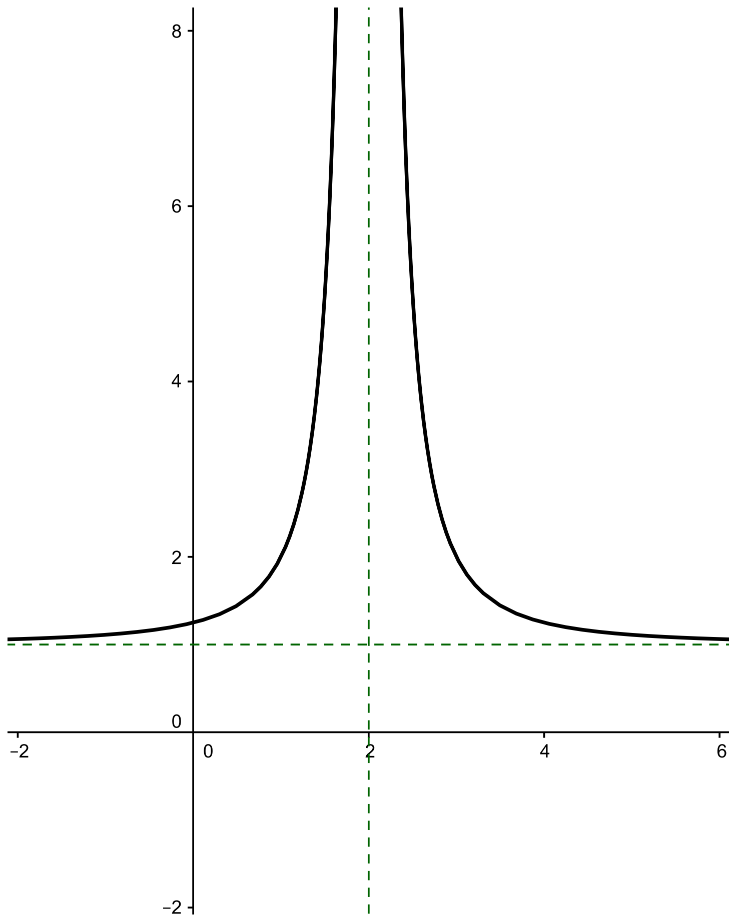
Se, dado $\epsilon > 0$, conseguirmos encontrar $\delta > 0$ tal que, $-\delta < x - a < 0$ implica $|f(x) - F| < \epsilon$, então, dizemos que limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda é igual a L, e escrevemos $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = F$.

2.5 LIMITES NO INFINITO

Às vezes, quando os valores de x se aproximam muito de um determinado número os valores de $f(x)$ podem aumentar ou diminuir indefinidamente. Ou, quando os valores de x aumentam ou diminuem muito, os valores de $f(x)$ se concentram em um valor específico.

Algumas dessas situações podem ser visualizadas na Figura 2, na Figura 3 e na Figura 4.

Figura 2 – Limite no infinito 1

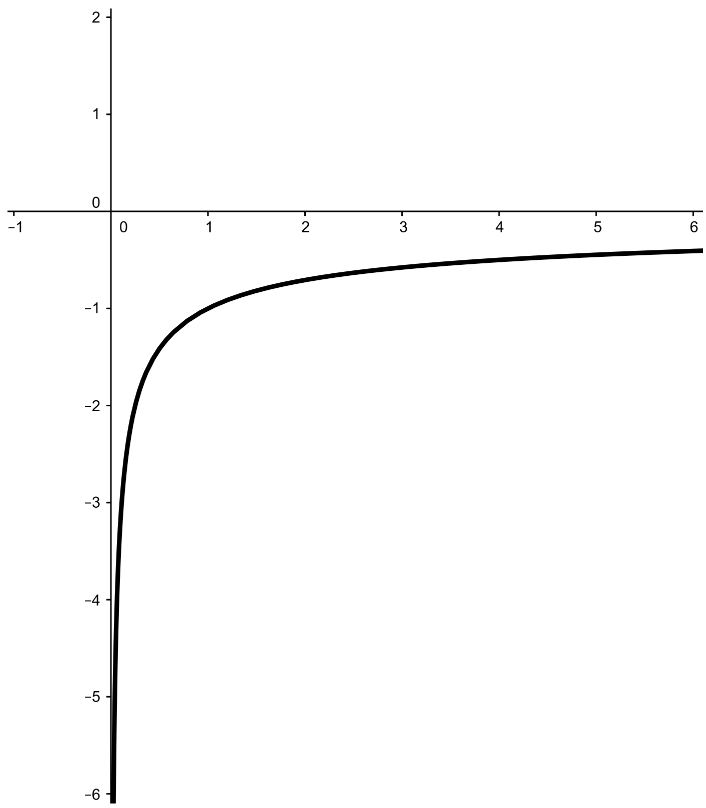


Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

No gráfico da Figura 2, observe que quando $x \to 2^+$ ou quando $x \to 2^-$, $f(x) \to +\infty$. E que, quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, $f(x) \to 1$.

Nesses dois casos, dizemos que $x = 2$ e $y = 1$ são assíntotas vertical e horizontal, do gráfico de f, respectivamente.

Figura 3 – Limite no infinito 2



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

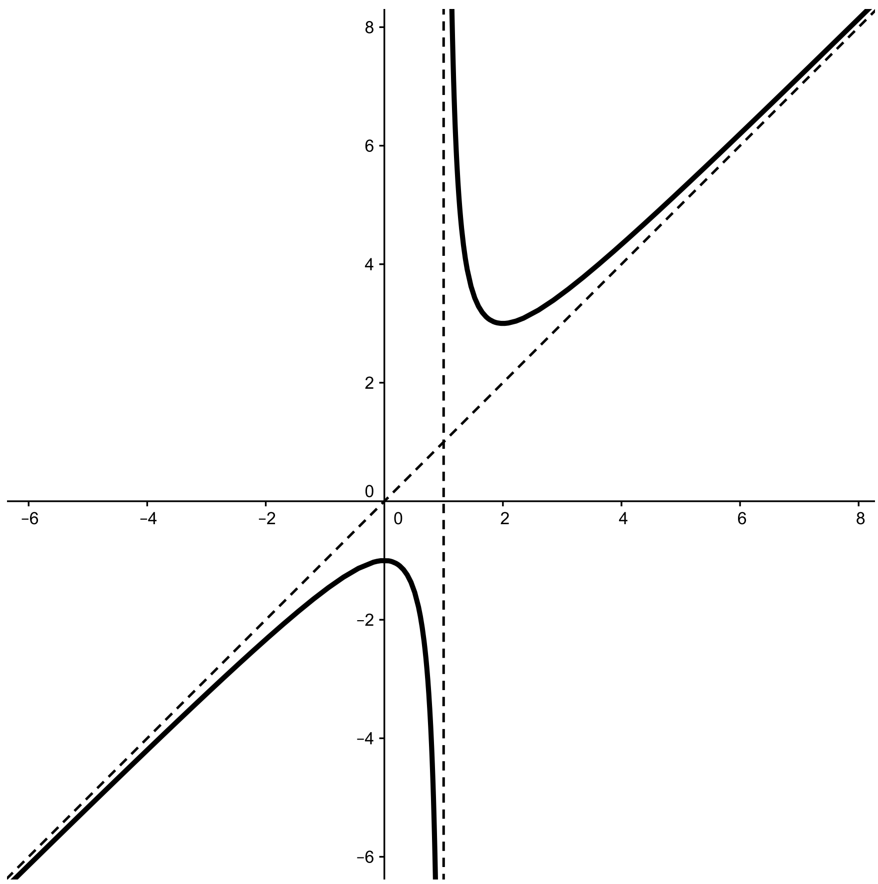
A ideia de limites laterais se estendem a esses casos como mostra a Figura 3.

Quando $x \to 0^+$, $f(x) \to -\infty$, mas a função não está definida para valores de $x \leq 0$.

Já quando $x \to +\infty$, $f(x) \to 0$.

Nesses casos, temos como assíntota vertical, $x = 0$ e, como assíntota horizontal, $y = 0$.

Figura 4 – Limite no infinito 3



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

No gráfico da Figura 4, temos uma situação em que uma das assíntotas não é uma constante. Observe que, quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, o gráfico da função se aproxima da reta $y = x$. Nesse caso, essa reta é uma assíntota oblíqua.

Formalmente, as diversas situações possíveis são apresentadas da seguinte forma.

Se, dado $L > 0$, conseguirmos encontrar $\delta > 0$ tal que, $0 < |x - a| < \delta$ implica $f(x) > L$, então, dizemos que limite de $f(x)$ quando x tende a a é igual a $+\infty$, e escrevemos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Se, dado $L < 0$, conseguirmos encontrar $\delta > 0$ tal que, $0 < |x - a| < \delta$ implica $f(x) < L$, então, dizemos que limite de $f(x)$ quando x tende a a é igual a $-\infty$, e escrevemos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

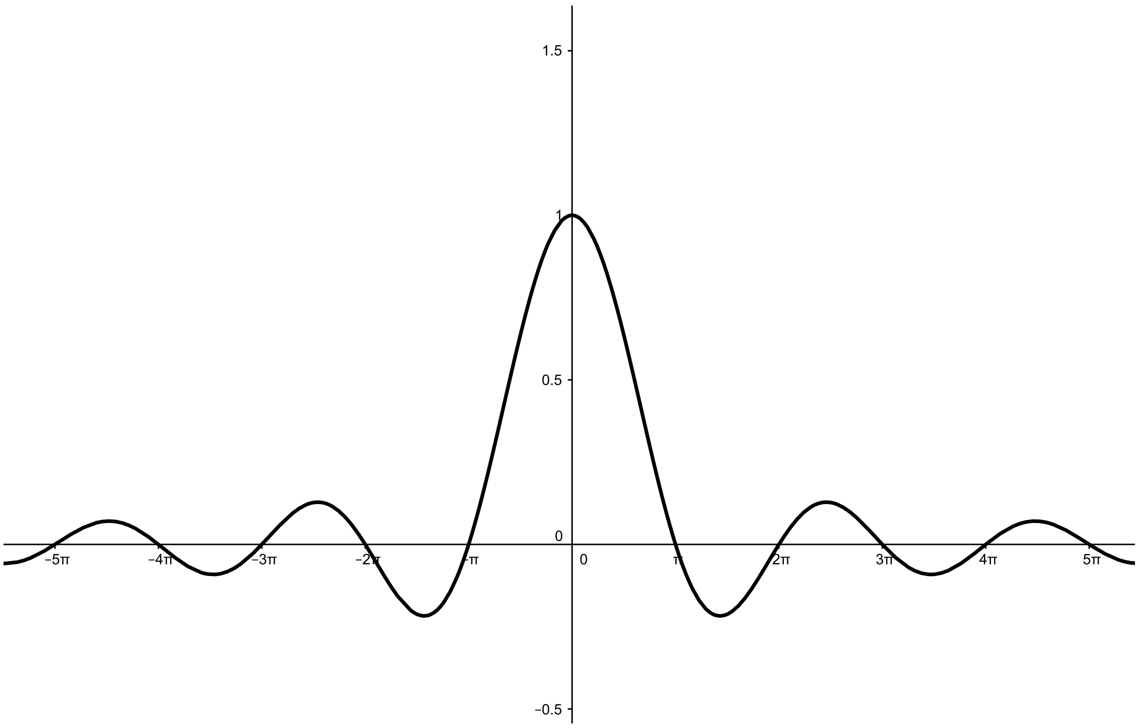
Se, dado $\epsilon > 0$, conseguirmos encontrar $L > 0$ tal que, $x > L$ implica $|f(x) - F| < \epsilon$, então, dizemos que limite de $f(x)$ quando x tende a $+\infty$ é igual a F, e escrevemos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = F$.

Se, dado $\epsilon > 0$, conseguirmos encontrar $L < 0$ tal que, $x < L$ implica $|f(x) - F| < \epsilon$, então, dizemos que limite de $f(x)$ quando x tende a $-\infty$ é igual a F, e escrevemos $\lim_{x \to -\infty} f(x) = F$.

2.6 LIMITE TRIGONOMÉTRICO FUNDAMENTAL

Seja $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que, $f(\theta) = \dfrac{sen(\theta)}{\theta}$, cujo gráfico pode ser visualizado na Figura 5.

Figura 5 – Gráfico da função $f(\theta) = \dfrac{sen(\theta)}{\theta}$

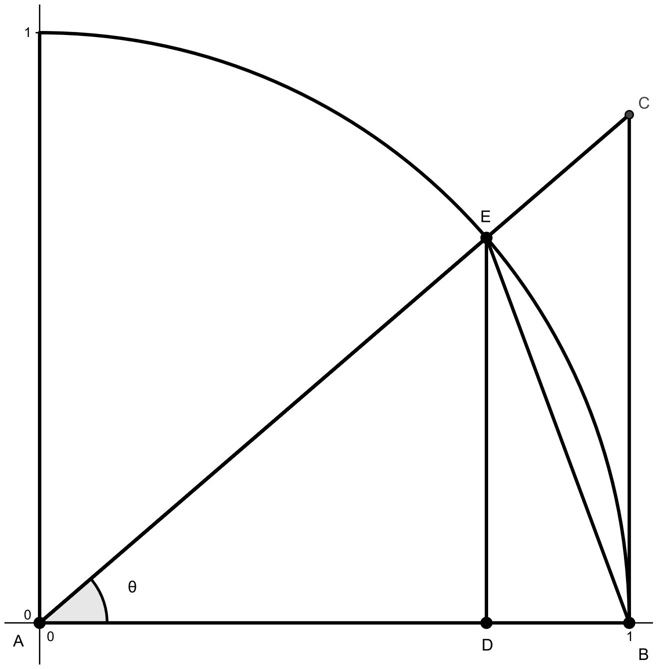


Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

Note que na medida em que os valores de θ se aproximam de 0, os valores de $f(\theta)$ ficam muito próximos de 1. Isso sugere que $\lim_{\theta \to 0} f(\theta) = 1$.

Afim de provarmos que $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{sen(\theta)}{\theta} = 1$, observe com atenção a Figura 6.

Figura 6 – Comparação entre áreas



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

Note que a área do $\Delta ABE <$ Área do Setor $ABE <$ Área do ΔABC.

Considere $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

Área do $\Delta ABE = \dfrac{AB.DE}{2}$.

Área do Setor $ABE = \dfrac{\theta.AB^2}{2}$.

Área do $\Delta ABC = \dfrac{AB.BC}{2}$.

Observe que $cos(\theta) = \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AD}{1} = AD$, $sen(\theta) = \dfrac{DE}{AE} = \dfrac{DE}{1} = DE$, e $tg(\theta) = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{BC}{1} = BC$.

Então, Área do $\Delta ABE <$ Área do Setor $ABE <$ Área do $\Delta ABC \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{AB.DE}{2} < \dfrac{\theta.AB^2}{2} < \dfrac{AB.BC}{2} \Rightarrow sen\theta < \theta < tg\theta$.

Como $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, segue, $sen(\theta) > 0$. Dividindo todos os membros da desigualdade $sen(\theta) < \theta < tg(\theta)$ por $sen(\theta)$, temos, $1 < \dfrac{\theta}{sen(\theta)} < \dfrac{1}{cos(\theta)}$, e ainda, $cos(\theta) < \dfrac{sen(\theta)}{\theta} < 1$.

Agora, vamos refletir sobre a desigualdade $cos(\theta) < \dfrac{sen(\theta)}{\theta} < 1$.

Na medida em que θ se aproxima de 0 por valores maiores ou menores do que ele, a função $cos(\theta)$ fica muito próxima de 1. E melhor do que isso, como $cos(\theta)$ está definida em $\theta = 0$ e $cos(0) = 1$, podemos concluir que $\lim_{\theta \to 0} cos(\theta) = 1$.

Então, a desigualdade $cos(\theta) < \dfrac{sen(\theta)}{\theta} < 1$ se torna $1 \leq \dfrac{sen(\theta)}{\theta} \leq 1$ quando $\theta \to 0^+$.

Para chegarmos à conclusão final, considere a seguinte proposição.

Sejam t, g e h, três funções tais que $t(x) < g(x) < h(x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Então, se $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$, tem-se, $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

Com efeito, como $\lim_{x \to a} t(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$, dado $\epsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |t(x) - L| < \epsilon$ e $|h(x) - L| < \epsilon$. Ou seja, $h(x) < \epsilon + L$ e $L - \epsilon < f(x)$.

Mas como $t(x) < g(x) < h(x)\ \forall\ x \in \mathbb{R}$, temos, $L - \epsilon < t(x) < g(x) < h(x) < \epsilon + L \Rightarrow |g(x) - L| < \epsilon$.

Logo, $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

Sendo assim, como $1 \leq \dfrac{sen(\theta)}{\theta} \leq 1$ quando $\theta \to 0^+$, concluímos que

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{sen(\theta)}{\theta} = 1$$

Para concluirmos que o limite da função $\dfrac{sen(\theta)}{\theta}$ é realmente 1, considere o raciocínio que segue.

Como $sen(-\theta) = -sen\theta$, então, $\lim_{\theta \to 0^-} \dfrac{sen(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \to 0^-} \dfrac{sen(-\theta)}{-\theta} = \lim_{\theta \to 0^-} \dfrac{-sen(\theta)}{-\theta} = \lim_{\theta \to 0^+} \dfrac{sen(\theta)}{\theta} = 1$.

Portanto, $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{sen(\theta)}{\theta} = 1$.

Outro limite interessante é o da função $s : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que, $s(\theta) = \dfrac{1 - cos(\theta)}{\theta}$.

Subtraindo da identidade trigonométrica $cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) + sen^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = 1$, a transformação $cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) - sen^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = cos(\theta)$, temos, $2sen^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = 1 - cos(\theta)$.

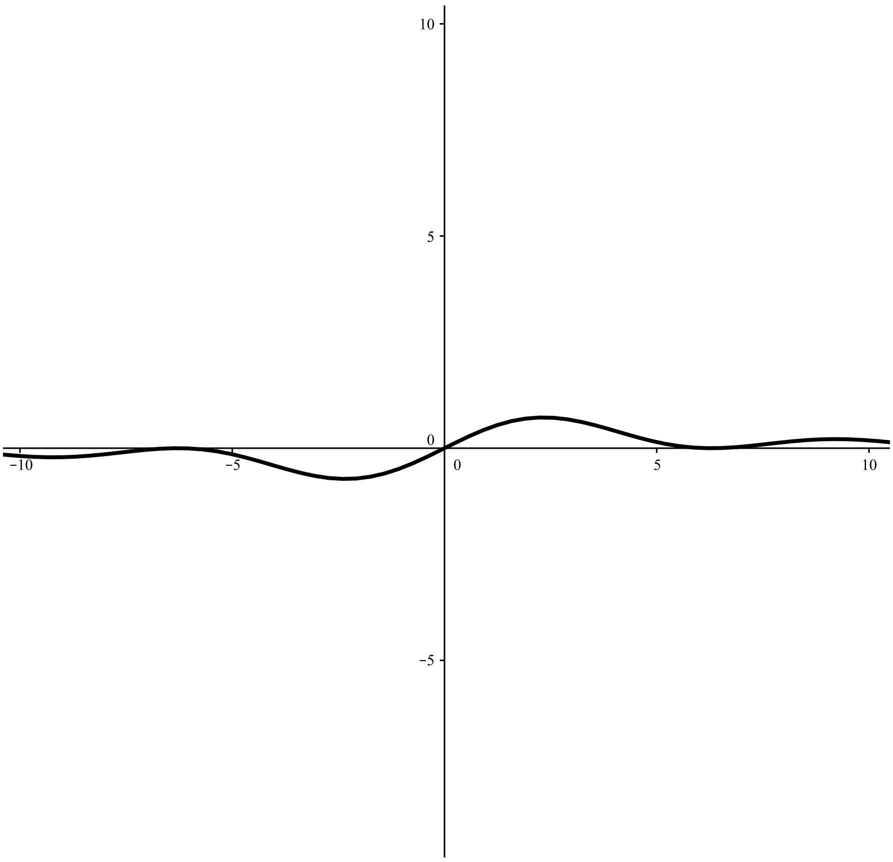
Então $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{1 - cos(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \dfrac{2sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \dfrac{sen\left(\frac{\theta}{2}\right) sen\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\frac{\theta}{2}}$.

Pela propriedade 5, temos

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{sen\left(\frac{\theta}{2}\right) sen\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\frac{\theta}{2}} = \lim_{\theta \to 0} sen\left(\frac{\theta}{2}\right) \lim_{\theta \to 0} \frac{sen\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\frac{\theta}{2}} = 0.1 = 0$$

O gráfico da função $s(\theta) = \dfrac{1 - cos(\theta)}{\theta}$ pode ser visualizado na Figura 7, onde se verifica o limite.

Figura 7 – Gráfico da função $s(\theta) = \dfrac{1 - cos(\theta)}{\theta}$



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

2.7 CONTINUIDADE

Seja f uma função e a, um ponto do seu domínio.

Dizemos que f é contínua em a se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Note que na definição de limite, o ponto a não necessariamente deveria estar no domínio de f. Já na definição de continuidade, é uma condição obrigatória.

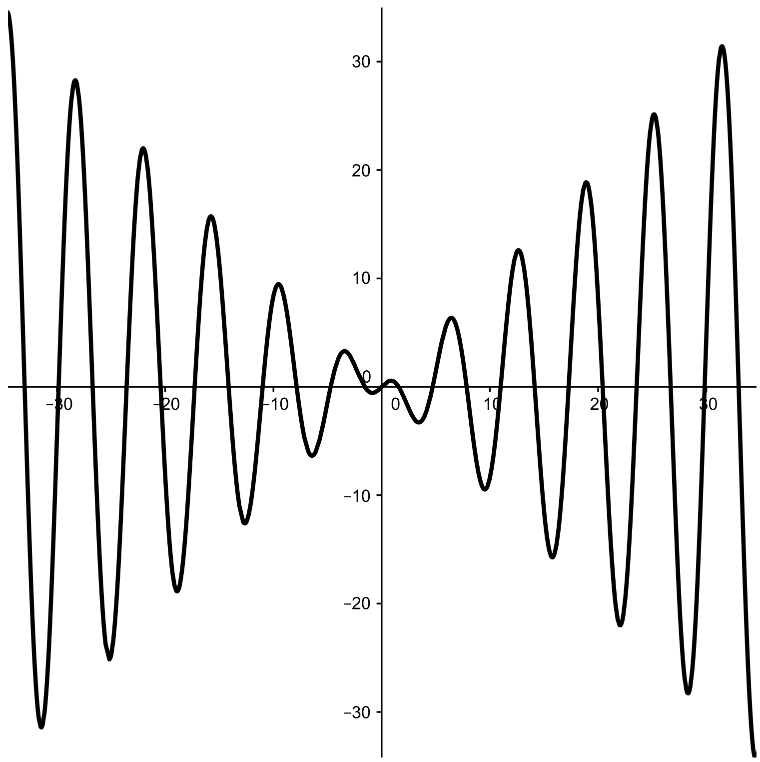
Então, para que uma função seja contínua, devemos observar três condições:

1. Deve existir $f(a)$.
2. Deve existir $\lim_{\to a} f(x)$.

3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

A Figura 8 mostra o gráfico de uma função contínua em $x = 0$.

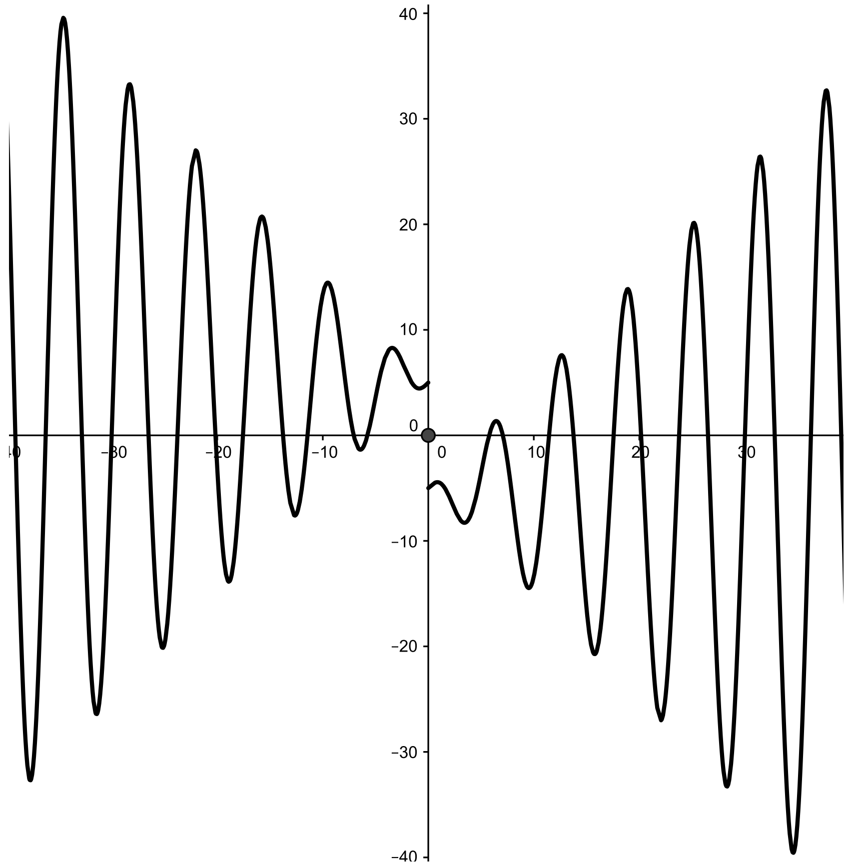
Figura 8 – Gráfico da função $f(x) = xcos(x)$



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

Já na Figura 9, existe $f(0)$, mas não existe $\lim_{x \to 0} f(x)$. Então, a função não é contínua em $x = 0$.

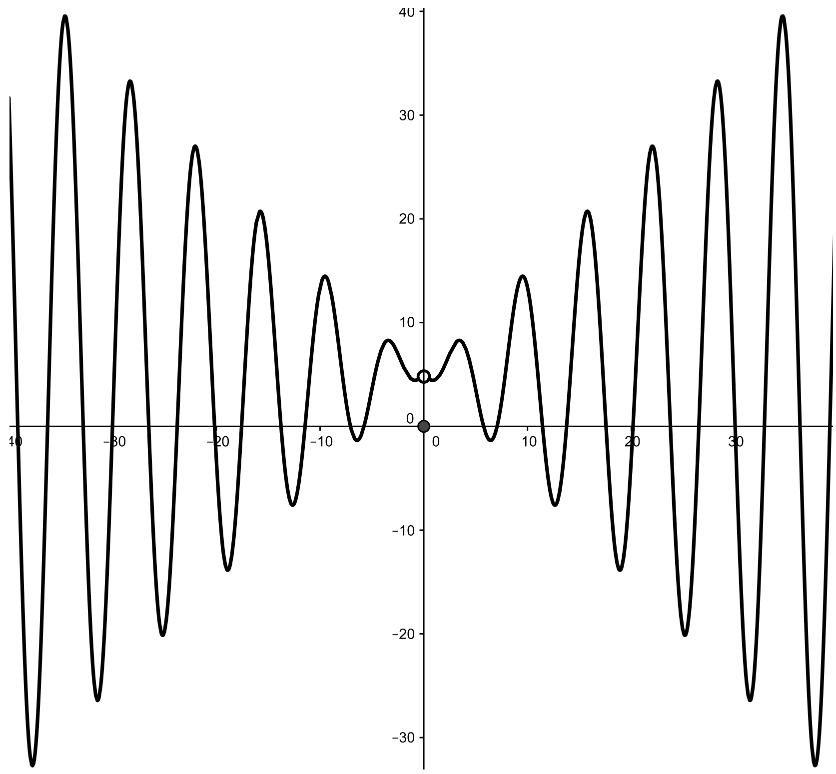
Figura 9 – Limite inexistente



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

Na Figura 10, existe $\lim_{x \to 0} f(x)$, existe $f(0)$, porém, $\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$. Então, a função não é contínua em $x = 0$.

Figura 10 – $lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

Dizemos que uma função é contínua, se tal função é contínua em todos os pontos do seu domínio.

São exemplos de funções contínuas:

1. Funções polinomiais ($p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$).
2. Funções raízes ($f(x) = \sqrt[n]{x}$).
3. Funções trigonométricas e trigonométricas inversas ($f(x) = cos(x)$ e $g(x) = arctg(x)$).
4. Funções exponenciais e logarítmicas ($f(x) = e^x$ e $g(x) = ln(x)$).

Para as funções contínuas valem as seguintes propriedades.

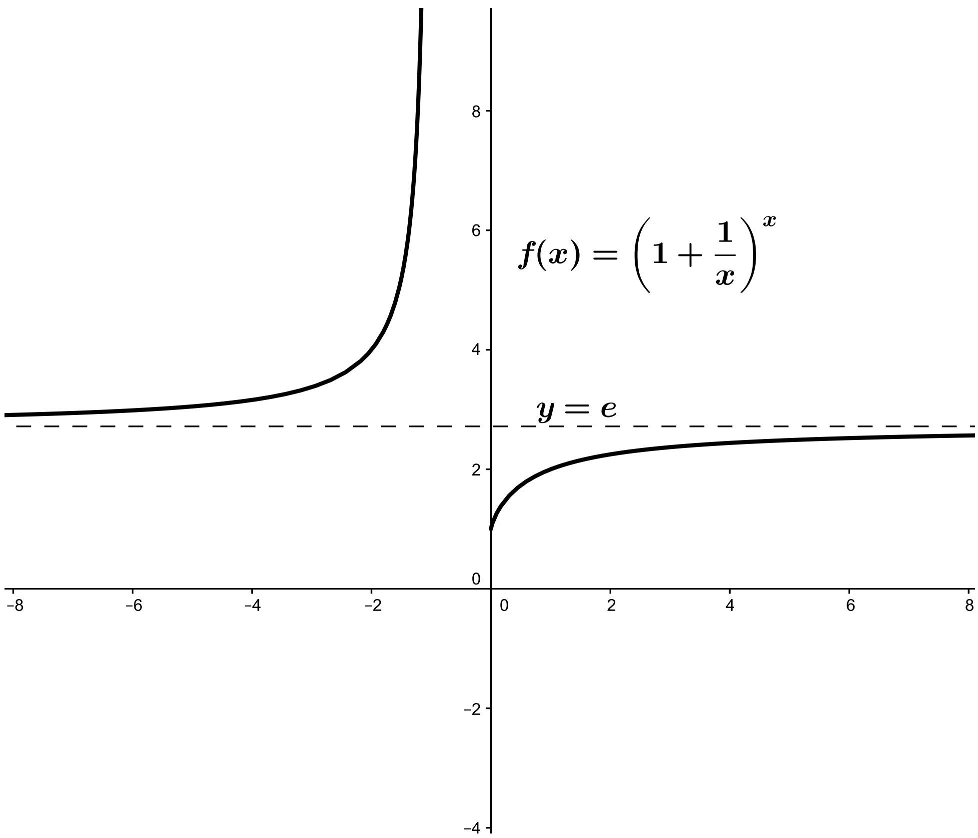
Sejam f e g duas funções contínuas em um dado ponto a dos seus domínios. Então também são contínuas nesse ponto

1. $f+g$
2. $f-g$
3. $f.g$
4. $\dfrac{f}{g}$, desde que $g(a) \neq 0$.
5. gof, se g for contínua em $f(a)$.

2.8 LIMITE EXPONENCIAL FUNDAMENTAL

Outro limite tão essencial quanto o trigonométrico fundamental, é o limite da função $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ quando os valores de x crescem indefinidamente, cujo gráfico pode ser visualizado na Figura 11. A reta $y = e$, assíntota horizontal do gráfico de f, é o $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Figura 11 – Gráfico da função $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

A tabela abaixo mostra alguns pares ordenados $(x, f(x))$, que foram obtidos afim de analisar o comportamento de $f(x)$ quando tomamos valores de x cada vez maiores.

x	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
10^0	$2,0000000000$
10^1	$2,5937424601$
10^2	$2,7048138294$
10^3	$2,7169239322$
10^4	$2,7181459268$
10^5	$2,7182682372$
10^6	$2,7182804692$
10^7	$2,7182816940$
10^8	$2,7182817864$

Observe que tomando poucos valores para x, já se observa a tendência de $f(x)$ em aproximar-se de um número cujos primeiros algarismos são $2,7182$.

A demonstração formal de que $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, em que e é o número irracional $2,7182818284...$, pode ser encontrada nos apêndices.

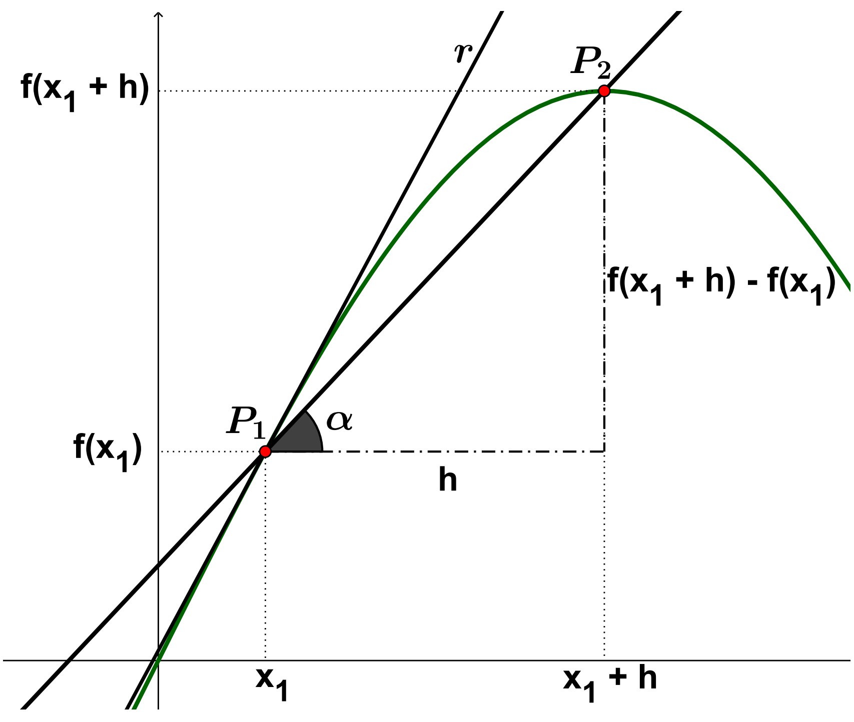
3 DERIVADA

Aqui, o leitor terá seu primeiro contato com o conceito de derivada, tanto em um ponto, quanto como função. Será dada ênfase no foco do trabalho e, portanto, o conceito de limite será amplamente utilizado. Isso será feito dando uma noção inicialmente gráfica e, posteriormente, utilizando exemplos de cálculo de derivadas de algumas funções importantíssimas. Ao fim, algumas regras básicas de derivação também serão destacadas.

3.1 DEFINIÇÃO

Seja f uma função cujo gráfico está representado na Figura 12 e P_1 um ponto desse gráfico. Vamos definir a equação da reta r, tangente à curva de f, passando pelo ponto P_1.

Figura 12 – Inclinação da reta secante



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

As coordenadas do ponto P_1 são $(x_1, (f(x_1)))$. Se obtivermos a inclinação de r, o problema estará resolvido.

Para tanto, considere um segundo ponto P_2, tal que $P_2 = (x_1 + h, f(x_1 + h))$, onde h é uma pequena variação na abscissa x_1.

Note que, na medida em que $h \to 0$ a reta que passa por P_1 e P_2 se aproxima de r.

Chamando a inclinação da reta que passa por P_1 e P_2 de α, temos $tg(\alpha) = \dfrac{f(x_1+h)-f(x_1)}{(x_1+h)-x_1}$.

Calculando $\lim\limits_{h\to 0} tg(\alpha)$, caso ele exista, teremos a inclinação de r.

O limite acima, quando existe, é chamado de derivada da função f no ponto P_1 e é representado por $f'(x_1)$.

$$f'(x_1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{(x_1+h)-x_1} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$$

Nesse caso, dizemos que f é derivável no ponto P_1.

Então, a equação da reta r pode ser determinada como

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

3.2 DERIVADA COMO FUNÇÃO

Quando a função f é derivável em todos os pontos do seu domínio, dizemos simplesmente que f é derivável e representamos essa derivada por $f'(x)$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

EXEMPLO 1: Encontre $f'(x)$ sendo $f(x) = sen(x)$.

Solução

Pela definição,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{sen(x+h)-sen(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{sen(x)cos(h)+sen(h)cos(x)-sen(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{sen(x)[cos(h)-1]}{h} + \frac{sen(h)cos(x)}{h} \right\} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{sen(x)[cos(h)-1]}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{sen(h)cos(x)}{h} \\
&= sen(x) \lim_{h\to 0} \frac{cos(h)-1}{h} + cos(x) \lim_{h\to 0} \frac{sen(h)}{h} \\
&= sen(x).0 + cos(x).1 \\
&= cos(x)
\end{aligned}$$

EXEMPLO 2: Encontre $f'(x)$ sendo $f(x) = cos(x)$.

Solução

Pela definição,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{cos(x+h)-cos(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{cos(x)cos(h)-sen(x)sen(h)-cos(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{cos(x)[cos(h)-1]}{h}+\frac{-sen(x)sen(h)}{h}\right\}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{cos(x)[cos(h)-1]}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{-sen(x)sen(h)}{h}\\
&= cos(x)\lim_{h\to 0}\frac{cos(h)-1}{h}-sen(x)\lim_{h\to 0}\frac{sen(h)}{h}\\
&= cos(x).0-sen(x).1\\
&= -sen(x)
\end{aligned}$$

EXEMPLO 3: Encontre $f'(x)$ sendo $f(x)=e^x$.

Solução

Pela definição,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{e^{(x+h)}-e^x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}e^x\frac{(e^h-1)}{h}\\
&= e^x\lim_{h\to 0}\frac{(e^h-1)}{h}
\end{aligned}$$

Fazendo $e^h-1=\theta$, temos $e^h=1+\theta\Rightarrow h=ln(1+\theta)$, e $h\to 0\Rightarrow\theta\to 0$.

Logo,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{(e^h-1)}{h} &= \lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{ln(1+\theta)}\\
&= \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\frac{ln(1+\theta)}{\theta}}\\
&= \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\frac{1}{\theta}ln(1+\theta)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\theta\to 0} \frac{1}{ln(1+\theta)^{\frac{1}{\theta}}}\\
&= \frac{1}{\lim_{\theta\to 0} ln(1+\theta)^{\frac{1}{\theta}}}\\
&= \frac{1}{ln[\lim_{\theta\to 0}(1+\theta)^{\frac{1}{\theta}}]}\\
&= \frac{1}{ln(e)} = \frac{1}{1} = 1
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= e^x \lim_{h\to 0} \frac{(e^h-1)}{h}\\
&= e^x.1 = e^x
\end{aligned}
$$

EXEMPLO 4: Encontre $f'(x)$ sendo $f(x) = ln(x)$.

Solução

Pela definição,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{ln(x+h)-ln(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{ln(\frac{x+h}{x})}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{ln(1+\frac{h}{x})}{h}
\end{aligned}
$$

Fazendo $h = x\theta$, temos $h \to 0 \Rightarrow \theta \to 0$.

Logo,

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{ln(1+\frac{h}{x})}{h} &= \lim_{\theta\to 0} \frac{ln(1+\theta)}{x\theta}\\
&= \lim_{\theta\to 0} \frac{1}{x\theta} ln(1+\theta)\\
&= \frac{1}{x} \lim_{\theta\to 0} ln(1+\theta)^{\frac{1}{\theta}}\\
&= \frac{1}{x} ln[\lim_{\theta\to 0}(1+\theta)^{\frac{1}{\theta}}]\\
&= \frac{1}{x} ln(e) = \frac{1}{x}.1 = \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

3.3 REGRAS DE DERIVAÇÃO

Abaixo, temos algumas regras de derivação cujas demonstrações podem ser obtidas através das propriedades opertórias de limite, vistas no capítulo 2.

Para todas as propriedades de 1 a 5, considere f e g, duas funções deriváveis em x_0, e k, uma constante.

1. ***Derivada da função constante***

   Como $f(x) = k$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, segue, $f'(x) = 0$

2. ***Derivada da multiplicação por constante***

   Como f é derivável em x_0, segue,
   $$[kf(x_0)]' = kf'(x_0) \quad .$$

3. ***Derivada da soma***

   Como f e g são deriváveis em x_0, segue,
   $$[f(x_0) + g(x_0)]' = f'(x_0) + g'(x_0) \quad .$$

4. ***Derivada do produto***

   Como f e g são deriváveis em x_0, segue,
   $$[f(x_0).g(x_0)]' = f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0) \quad .$$

5. ***Derivada do quociente***

   Como f e g são deriváveis em x_0, se $g(x_0) \neq 0$,
   $$\left[\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right]' = \frac{f'(x_0).g(x_0) - f(x_0).g'(x_0)}{[g(x_0)]^2} \quad .$$

6. ***Derivada da composta - A regra da cadeia***

   Seja $h(x) = fog(x)$. Se g é derivável em x_0, e f for derivável em $g(x_0)$, então,
   $$h'(x_0) = f'(g(x_0)).g'(x_0) \quad .$$

7. ***Derivada da função inversa***

   Se f é inversível com inversa g, se g é derivável em x_0 e f for derivável em $g(x_0)$ e $f'(g(x_0)) \neq 0$, então,
   $$g'(x_0) = \frac{1}{f'(g(x_0))} \quad .$$

4 NOÇÕES DE INTEGRAL

Adquirir noções básicas de integração também será de grande valia para os estudantes do ensino básico. Aqui, o leitor terá o seu primeiro contato com o conceito de integração, e verá a relação entre a integral e a derivada. Além disso, duas técnicas de integração bastante usuais são apresentadas para que ele já se familiarize.

4.1 INTEGRAL INDEFINIDA

Seja f uma função definida em um intervalo I. Uma primitiva para f, é uma função F, derivável em I, tal que $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$.

Por exemplo, se $f(x) = 2x$, $F_1(x) = x^2$ e $F_2(x) = x^2 + 1$, são primitivas para f. Nesse sentido, pode se demonstrar que $F(x) = x^2 + c$, onde c é qualquer constante real, contempla todas as primitivas da função $f(x) = 2x$. A esse conjunto de primitivas, damos o nome de integral indefinida. O processo de determinação da primitiva de uma função recebe o nome de primitivação ou antiderivação, ou ainda, integração.

Utilizando símbolos, representamos a integral indefinida de uma função f como

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

em que $f(x)$ é o integrando, $F(x) + c$ a integral ou conjunto das primitivas, e dx, denota a variável na qual pretende-se determinar a primitiva.

EXEMPLO: De todas as primitivas da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, determine a que passa pelo ponto $P = (e, 0)$.

Solução

Nosso objetivo é determinar uma função $G(x) = \displaystyle\int \frac{1}{x}dx = F(x) + c$, tal que $G(e) = 0$.

No estudo sobre derivadas, vimos que $ln'(x) = \dfrac{1}{x}$, ou seja, $F(x) = ln(x)$ é uma primitiva para f. Logo, $G(x) = ln(x) + c$ é o conjunto de todas as primitivas para f.

Como $G(e) = 0$, temos que $G(e) = ln(e) + c = 0$, ou seja, $c = -1$.

Portanto, $G(x) = ln(x) - 1$.

4.2 PROPRIEDADES

Sejam f e g duas funções definidas em um intervalo I, e k uma constante. Então,

1. $\displaystyle\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.
2. $\displaystyle\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

4.3 TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

Muitas vezes, calcular uma integral pode parecer uma tarefa impossível. Mas, em algumas casos, uma simples modificação no integrando, pode tornar a tarefa bem mais simples. Essa modificação é parte do que chamamos de técnicas de integração.

Essas técnicas consistem em substituir o cálculo de uma integral inicialmente difícil, por uma mais simples.

Veremos a seguir, duas técnicas muito comuns e que solucionam muitos casos de integração.

4.3.1 **Integração por substituição**

Sejam f e F duas funções definidas em um intervalo I, sendo F derivável, tais que $F'(x) = f(x)$, ou seja, $\int f(x)dx = F(x) + c$.

Se g é outra função derivável tal que $g(x) \in I$, de modo que $Fog(x)$ exista, temos, pela regra da cadeia

$$[Fog(x)]' = [F(g(x))]' = F'(g(x)).g'(x)$$

. Mas como $F'(x) = f(x)$, então, $[F(g(x))]' = F'(g(x)).g'(x) = f(g(x)).g'(x)$. Ou seja, $F(g(x))$ é uma primitiva para a função $f(g(x)).g'(x)$.

Logo, $\int f(g(x)).g'(x) = F(g(x)) + c$.

Fazendo $u = g(x)$, temos $du = g'(x)dx$.

Portanto,

$$\int f(g(x)).g'(x)dx = F(g(x)) + c \Rightarrow \int f(u)du = F(u) + c$$

.

EXEMPLO 1: Resolva a integral $\int \frac{ln(x)}{x}dx$.

Solução

Fazendo $u = ln(x)$, temos $du = \frac{1}{x}dx$. Logo,

$\int \frac{ln(x)}{x}dx = \int udu = \frac{u^2}{2} + c = \frac{ln^2(x)}{2} + c.$

EXEMPLO 2: Resolva a integral $\int cos(\omega t + \phi)dt$, sendo $\omega \neq 0$.

Solução

Fazendo $u = \omega t + \phi$, temos $du = \omega dt \Rightarrow dt = \frac{du}{\omega}$. Logo,

$\int cos(\omega t + \phi)dt = \int \frac{cos(u)}{\omega}du = \frac{1}{\omega}\int cos(u)du = \frac{1}{\omega}sen(u) + c = \frac{sen(\omega t + \phi)}{\omega} + c.$

4.3.2 Integração por partes

Sejam f e g duas funções deriváveis em um intervalo I. Temos

$$[f(x).g(x)]' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

.

Integrando em ambos os lados temos

$$\int [f(x).g(x)]'dx = \int [f'(x).g(x) + f(x).g'(x)]dx = \int f'(x).g(x)dx + \int f(x).g'(x)dx$$

Fazendo $u = f(x)$ e $v = g(x)$, temos $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)dx$. Logo,

$$\int [f(x).g(x)]'dx = \int f'(x).g(x)dx + \int f(x).g'(x)dx \Rightarrow uv = \int vdu + \int udv$$

Ou seja,

$$\int udv = uv - \int vdu$$

EXEMPLO 1: Resolva a integral $\int xe^x dx$.

Solução

Fazendo $u = x$ e $dv = e^x dx$, temos $du = dx$ e $v = e^x$.

Logo,

$\int udv = uv - \int vdu \Rightarrow \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c = e^x(x-1) + c.$

Portanto, $\int xe^x dx = e^x(x-1) + c.$

EXEMPLO 2: Resolva a integral $\int ln(x)dx$.

Solução

Fazendo $u = ln(x)$ e $dv = dx$, temos $du = \frac{1}{x}dx$ e $v = x$.

Logo,

$\int udv = uv - \int vdu \Rightarrow \int ln(x)dx = xln(x) - \int x\frac{1}{x}dx = xln(x) - x + c = x(ln(x)-1) + c.$

Portanto, $\int ln(x)dx = x(ln(x)-1) + c.$

5 PLANOS DE AULA

Como o foco principal deste trabalho é a aplicação do conceito de limite, derivada e integral, com ênfase nos limites, em conteúdos bastante frequentes no ensino básico, vários temas foram distribuídos em planos de aula como sugestão de abordagem.

O objetivo disso é fazer o leitor enxergar com outros olhos algo que ele já conhecia, só que com ferramentas dos ensinos fundamental e médio.

5.1 A ÁREA DA CIRCUNFERÊNCIA

PLANO DE AULA 1

Nível: Educação básica.
Série: 3ª do EM.
Disciplina: Matemática.
Duração: 100 minutos.
Tema: Introdução a ideia de limite.
Pré-requisitos: Áreas de figuras planas e limite trigonométrico fundamental.
Objetivo: Dar ao aluno uma noção inicial de limite utilizando área de circunferência.

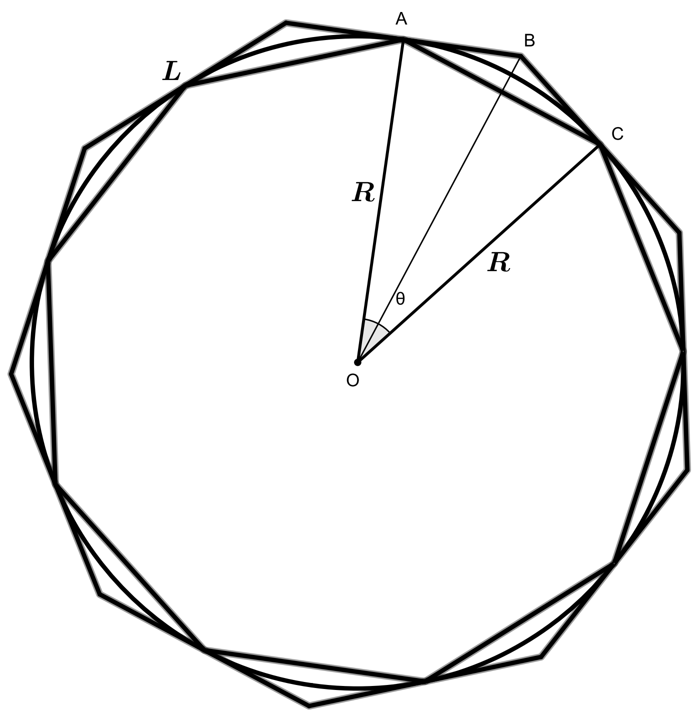
A área da circunferência

Estudando áreas de figuras planas, aprendemos que a área de uma circunferência com raio R, é dada por πR^2.

Nessa aula, mostrarei como verificar essa fórmula utilizando a ideia de limite.

Seja $C_{O,R}$ uma circunferência com centro no ponto O e raio R, inscrita em um polígono P_e de lado L, e circunscrita em um polígono P_i, ambos com n lados, conforme Figura 13.

Figura 13 – Área da circunferência



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

Chamaremos de A_{P_i} a área do polígono inscrito na circunferência, de A_{P_e}, a área do polígono circunscrito na circunferência e de A_C, a área da circunferência.

É fácil ver que $A_{P_i} < A_C < A_{P_e}$.

No P_i, considere o ΔAOC cujo ângulo $A\hat{O}C = \theta$, e $AO = CO = R$. Então,

$$A_{\Delta AOC} = \frac{R^2 sen(\theta)}{2}, \text{ onde } \theta = \frac{2\pi}{n}$$

.

Portanto, $A_{P_i} = \dfrac{nR^2 sen(\frac{2\pi}{n})}{2}$.

Multiplicando o numerador e o denominador por $\dfrac{\pi}{n}$, temos $A_{P_i} = \pi R^2 \dfrac{sen(\frac{2\pi}{n})}{\frac{2\pi}{n}}$.

No P_e, considere ΔAOB, cujo ângulo $A\hat{O}B = \dfrac{\theta}{2}$, $AB = \dfrac{L}{2}$ e $AO = R$. Então, $A_{\Delta AOB} = \dfrac{1}{2}\dfrac{L}{2}R$.

Porém, $tg\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{\frac{L}{2}}{R} \Rightarrow \dfrac{L}{2} = Rtg\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.

Logo, $A_{P_e} = (2n)\dfrac{R^2 tg(\frac{\theta}{2})}{2} = nR^2 tg\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.

Multiplicando o numerador e o denominador por $\dfrac{\pi}{n}$ e trocando $\theta = \dfrac{2\pi}{n}$, temos

$$A_{P_e} = \frac{\pi R^2 tg(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}} = \pi R^2 \frac{sen(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}} \frac{1}{cos(\frac{\pi}{n})}$$

Como $A_{P_i} < A_C < A_{P_e}$, temos

$$\pi R^2 \frac{sen(\frac{2\pi}{n})}{\frac{2\pi}{n}} < A_C < \pi R^2 \frac{sen(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}} \frac{1}{cos(\frac{\pi}{n})}$$

Tomando o limite $n \to +\infty$, temos

$$\lim_{n\to+\infty} \pi R^2 \frac{sen(\frac{2\pi}{n})}{\frac{2\pi}{n}} \leq A_C \leq \lim_{n\to+\infty} \pi R^2 \frac{sen(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}} \frac{1}{cos(\frac{\pi}{n})}$$

$$\pi R^2 \lim_{n\to+\infty} \frac{sen(\frac{2\pi}{n})}{\frac{2\pi}{n}} \leq A_C \leq \pi R^2 \lim_{n\to+\infty} \frac{sen(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{cos(\frac{\pi}{n})}$$

Como $n \to +\infty$, temos $\dfrac{2\pi}{n} \to 0$ e $\dfrac{\pi}{n} \to 0$.

Então, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{sen(\frac{2\pi}{n})}{\frac{2\pi}{n}} = 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{sen(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}} = 1$ e $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{cos(\frac{\pi}{n})} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} cos(\frac{\pi}{n})} =$ 1.

Portanto, $\pi R^2.1 \leq A_C \leq \pi R^2.1.1 \Rightarrow \pi R^2 \leq A_C \leq \pi R^2$.

Dessa forma, podemos concluir que $A_C = \pi R^2$.

Materiais utilizados: Quadro e pincel.

Bibliografia: O BARICENTRO DA MENTE, Demonstração da Área do Círculo. Disponível em: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2009/08/demonstracao-da-area-do-circulo.html>

5.2 VELOCIDADE MÉDIA E INSTANTÂNEA

PLANO DE AULA 2

Nível: Educação básica.
Série: 3ª do EM.
Disciplina: Matemática.
Duração: 100 minutos.
Tema: Limite.
Pré-requisitos: Funções, equações do MRUV e matemática do ensino fundamental.
Objetivo: Dar ao aluno uma noção de limite utilizando velocidade.

Velocidade média e instantânea

Dos estudos de mecânica clássica vista na primeira série do ensino médio, certamente foi destacado que a velocidade média de um corpo em movimento, pode ser obtida dividindo-se a distância percorrida por esse corpo pelo tempo gasto para percorrê-la

Tomando como exemplo um corpo em MRUV, sabemos que sua posição em função do tempo é dada por $x(t) = x_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2$, onde x_0, v_0 e a são, respectivamente, a posição inicial, a velocidade inicial e a aceleração do corpo.

Se quisermos calcular a velocidade média (V_m) desse corpo entre os instantes t_1 e t_2, devemos determinar a distância percorrida por ele nesse período de tempo, ou seja, da posição $x(t_1)$ até a posição $x(t_2)$. Chamaremos $h = t_2 - t_1$ a variação de tempo entre os instantes t_1 e t_2, para percorrer a distância $x(t_2) - x(t_1)$.

Assim,

$$\begin{aligned} V_m &= \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{x(t_1 + h) - x(t_1)}{h} \\ &= \frac{x_0 + v_0(t_1 + h) + \frac{1}{2}a(t_1 + h)^2 - (x_0 + v_0 t_1 + \frac{1}{2}at_1^2)}{h} \\ &= \frac{x_0 + v_0 t_1 + v_0 h + \frac{1}{2}a(t_1^2 + 2t_1 h + h^2) - x_0 - v_0 t_1 - \frac{1}{2}at_1^2)}{h} \\ &= \frac{v_0 h + a t_1 h + \frac{ah^2}{2}}{h} \end{aligned}$$

$$V_m = v_0 + at_1 + \frac{ah}{2} \tag{5.1}$$

A equação 5.1 nos fornece a velocidade média V_m do corpo entre os instantes t_1 e $t_1 + h$, para cada h.

A ideia de limite surge quando queremos, em vez de calcular a velocidade média de determinado corpo, definir a velocidade instantânea (V_i) desse corpo, pois, tal velocidade é obtida de em um tempo específico, e não em uma variação de tempo. Ou seja, para o exemplo em questão, poderíamos querer calcular a velocidade desse corpo no tempo t_1 em vez de calcular a velocidade no intervalo de t_1 a t_2.

Podemos dizer que, quanto menor a variação de tempo h, mais V_m se aproxima de V_i. O que significa dizer que o limite de V_m quando h tende a zero é V_i, ou ainda que, V_m tende a V_i quando h tende a zero.

Matematicamente escrevemos,

$$\lim_{h \to 0} V_m = V_i.$$

EXEMPLO: Calcule a velocidade média de um corpo cuja posição em função do tempo é dada por $x(t) = 5t^2$ no intervalo de 0 a 3 segundos. Em seguida, determine sua velocidade instantânea no tempo $t = 3$.

Solução

Sabemos que $V_m = \dfrac{x(3) - x(0)}{3 - 0}$, ou seja, $V_m = \dfrac{5.3^2 - 5.0^2}{3} = \dfrac{45 - 0}{3} = 15m/s$.

Para calcularmos V_i em $t = 3s$, precisamos determinar $\lim\limits_{x \to 0} V_m = V_i$, mas primeiro, precisamos determinar uma expressão para V_m, em função de um incremento de tempo h, a partir do tempo desejado.

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
V_m &= \frac{x(3+h) - x(3)}{h} \\
&= \frac{5.(3+h)^2 - 5.3^2}{h} \\
&= \frac{5.(9 + 6h + h^2) - 5.9}{h} \\
&= \frac{45 + 30h + 5h^2 - 45}{h} \\
&= \frac{30h + 5h^2}{h} \\
&= 30 + 5h
\end{aligned}$$

A tabela abaixo mostra alguns valores de V_m para incrementos de h cada vez menores.

h	$V_m = 30 + 5h$
2,0000000	40,0000000
0,4000000	32,0000000
0,0800000	30,4000000
0,0160000	30,0800000
0,0032000	30,0160000
0,0006400	30,0032000
0,0001280	30,0006400
0,0000256	30,0001280
0,0000051	30,0000256
0,0000010	30,0000051

Note que a medida em que h vai ficando menor, ou seja, quando h se aproxima de zero, V_m vai se aproximando de $30m/s$. Assim, espera-se que esse seja o valor da velocidade instantânea do corpo no tempo $t = 3s$.

Como, $V_i = \lim_{h \to 0} 30 + 5h$, vemos realmente que $V_i = 30m/s$.

EXERCÍCIO: Um objeto é solto de um avião e sua posição em função do tempo é dada pela equação $x(t) = -3,5t^2$, onde t é o tempo de queda em segundos.

a) Determine a velocidade média desse objeto nos primeiros dois segundos de queda.

b) Construa uma tabela relacionando a velocidade média V_m e o tempo $t = 2 + h$ para pequenos incrementos de tempo h conforme o exemplo anterior.

c) Determine a velocidade instantânea desse objeto no tempo $t = 2s$

Materiais utilizados: Quadro e pincel.

Bibliografia: FINNEY, Ross L.; WEIR, Maurice D.; GIORDANO, Frank R. *Cálculo de George B. Thomas, volume 1.* 10ª ed. São Paulo: Addison Wesley, 2002.

5.3 GRÁFICOS E LIMITE

PLANO DE AULA 3

Nível: Educação básica.
Série: 3ª do EM.
Disciplina: Matemática.
Duração: 100 minutos.
Tema: Gráficos e Limite.
Pré-requisitos: Funções.
Objetivo: Dar ao aluno uma noção inicial de limite utilizando gráficos.

Gráficos e limite

Considere uma função $f : D \to R$ que associa $x \mapsto f(x)$, definida para valores tão próximos quanto quisermos de um número k, mas não necessariamente em k. Se existir um número L com a propriedade de que, sempre que os valores de x ficam mais próximos de k, os valores de $f(x)$ também se aproximam de L, e essa aproximação puder ser feita tão precisa quanto quisermos, então dizemos que L é o limite da função f quando x tende a k. Matematicamente escrevemos

$$\lim_{x \to k} f(x) = L$$

Nos seis exemplos abaixo, veremos como identificar o limite de algumas funções através da análise gráfica. A utilização de um software de matemática dinâmica como o Geogebra, facilita muito a visualização e o entendimento dos alunos.

EXEMPLO 1: No exemplo destacado na Figura 14, determine o $\lim_{x \to 2} f(x)$.

Solução

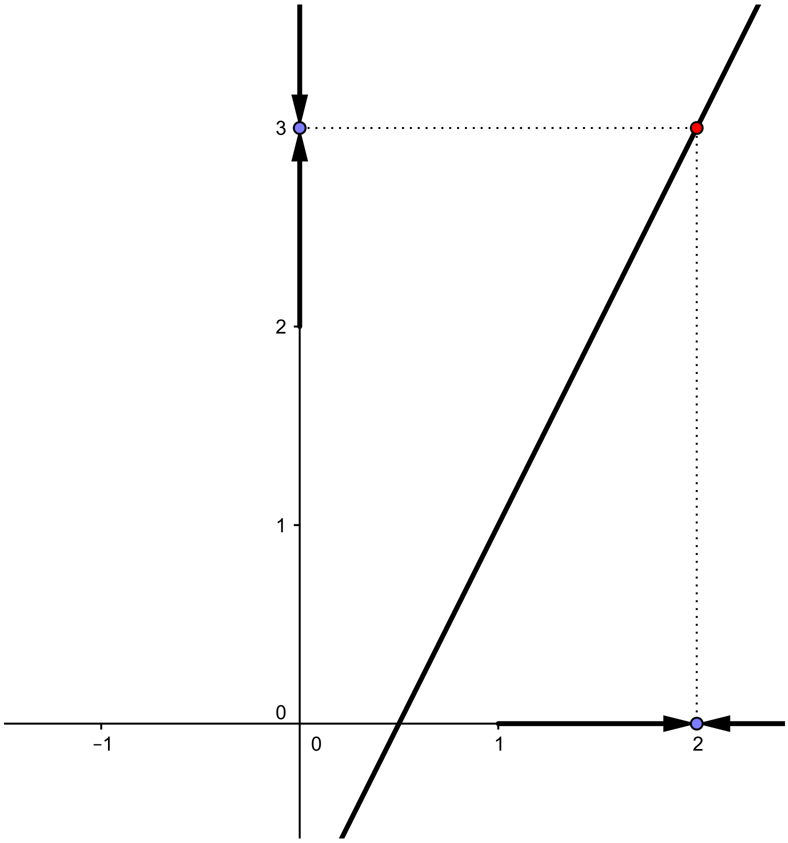
Sabemos que, para identificarmos $\lim_{x \to 2} f(x)$, devemos verificar se, na medida em que os valores de x ficam mais próximos de 2, os valores de $f(x)$ ficam mais próximos de algum número.

Observe na Figura 14, duas setas apontando para $x = 2$. Uma indica que os valores de x estão se aproximando de 2 por valores maiores do que ele, e a outra, por valores menores do que ele. Observe ainda que, independente dos casos, a função f se aproxima de $y = 3$, não importa o quão próximo de 2 os valores de x estão.

Sendo assim, podemos afirmar que

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 3$$

Figura 14 – Limite 1



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

EXEMPLO 2: No exemplo destacado na Figura 15, determine o $\lim_{x \to 1} f(x)$.

Solução

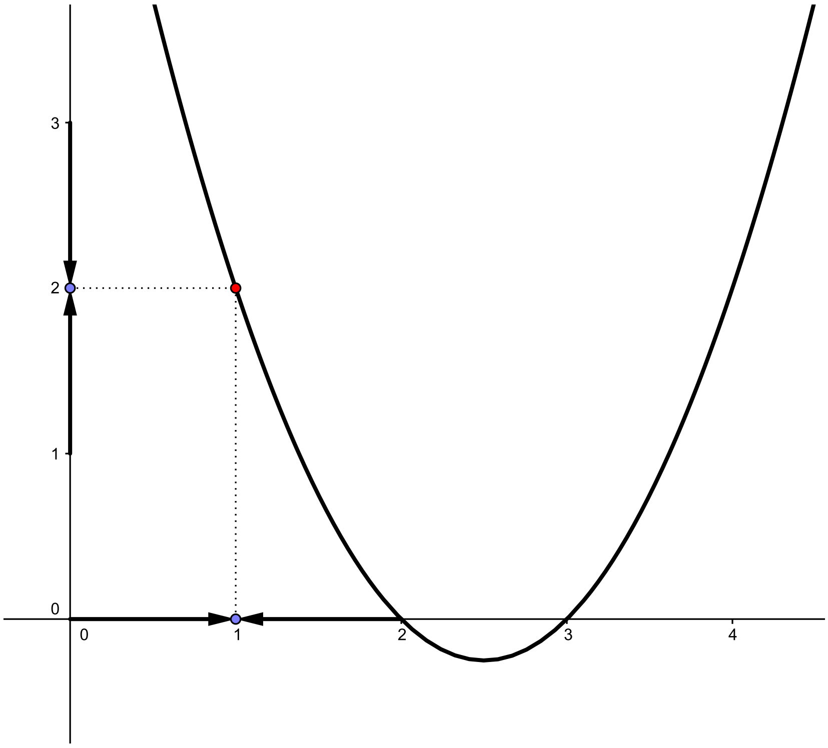
No exemplo da Figura 15 podemos proceder como no exemplo da Figura 14.

Na medida em que os valores de x se aproximam de 1, tanto por valores maiores, quanto menores do que ele, nota-se que os valores de $f(x)$ se aproximam muito de $y = 2$.

Sendo assim, podemos afirmar que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Figura 15 – Limite 2



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

EXEMPLO 3: No exemplo destacado na Figura 16, determine o $\lim_{x \to -2} f(x)$.

Solução

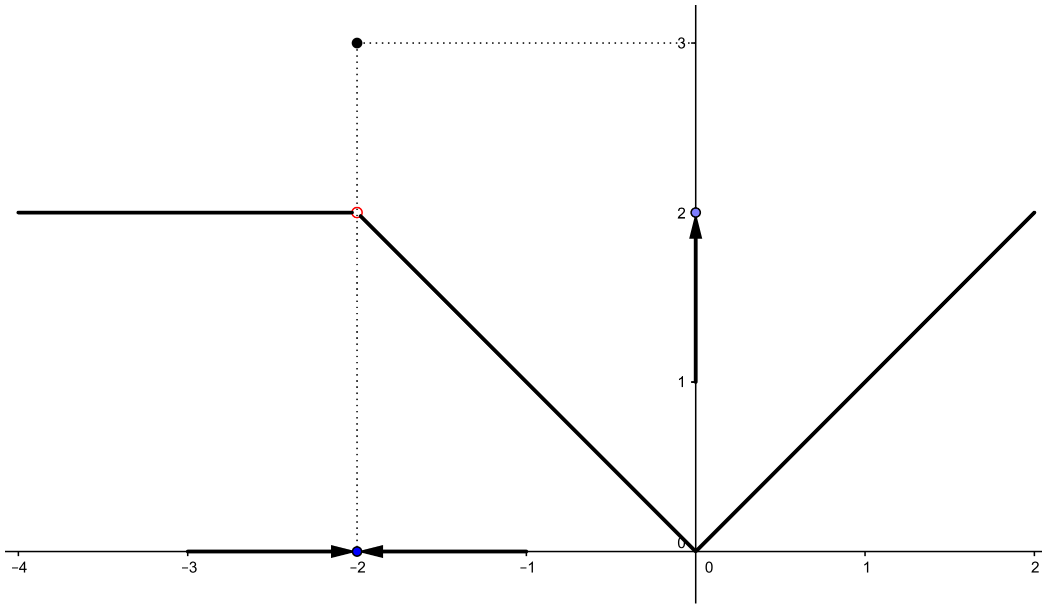
Ao analisarmos a função da Figura 16, nos deparamos com uma situação muito comum e que leva muitos alunos ao erro.

Quando verificamos os valores de x bastante próximos de -2 notamos que os valores de $f(x)$ se aproximam muito de $y = 2$, porém, verifica-se que $f(-2) = 3$.

Pela definição vista de limite, podemos concluir que $\lim_{x \to -2} f(x) = 2$, mas alguns estudantes menos atentos, acusam $\lim_{x \to -2} f(x) = 3$, o que não é verdade.

Em ambos os exemplos 1 e 2, o limite e o valor da função no ponto foram iguais. Isso ocorrerá sempre que a função for contínua.

Figura 16 – Limite 3



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

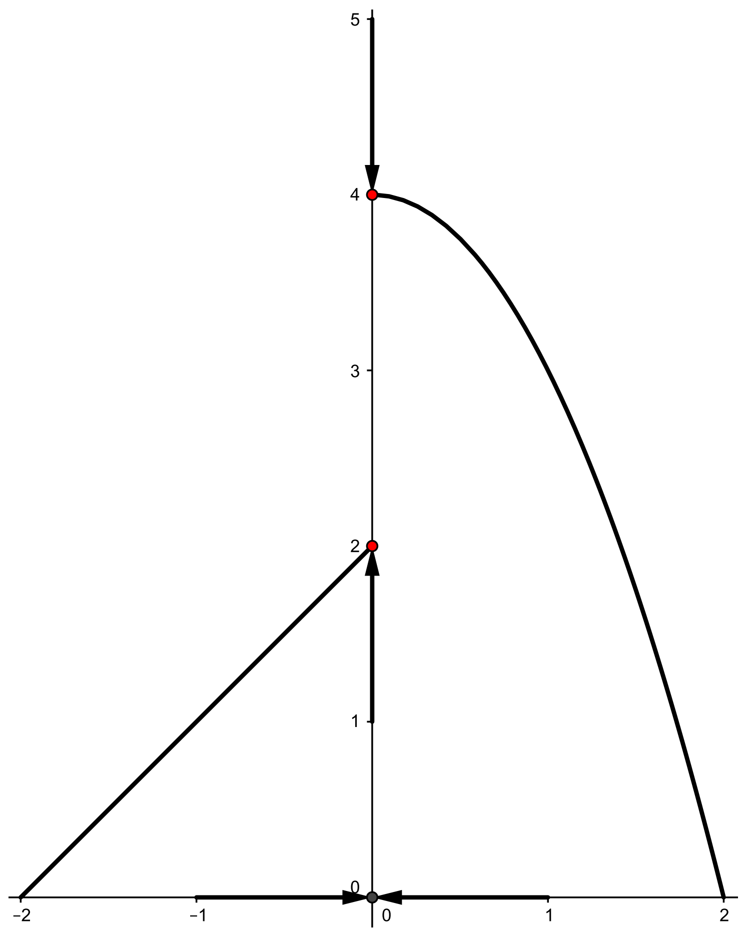
EXEMPLO 4: No exemplo destacado na Figura 16, determine o $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Solução

No exemplo da Figura 17 observe que na medida em que os valores de x se aproximam de 0 por valores maiores do que ele, os valores de $f(x)$ se ficam próximos de $y = 4$, porém, quando os valores de x se aproximam de 0 por valores menores do que ele, $f(x)$ se aproxima de $y = 2$. Ou seja, não importa o quanto ou de qual forma x se aproxima de 0 que, de qualquer maneira, os valores de $f(x)$ não se aproximam apenas de um valor em y.

Nessa situação, dizemos que $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe.

Figura 17 – Limite 4



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

EXEMPLO 5: No exemplo destacado na Figura 18, determine o $\lim_{x \to 2} f(x)$.

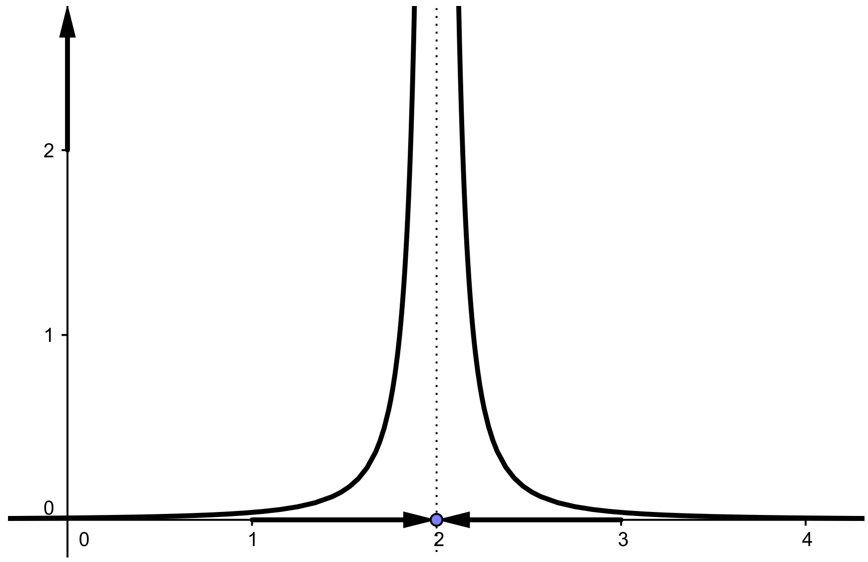
Solução

Nesse exemplo, na medida que x se aproxima de 2 por ambos os lados, note que $f(x)$ não fica próximo de nenhum valor. Porém, perceba que quanto mais próximo de 2 os valores de x ficam, maiores se tornam os valores de $f(x)$.

Nesse caso, dizemos que

$$\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$$

Figura 18 – Limite 5



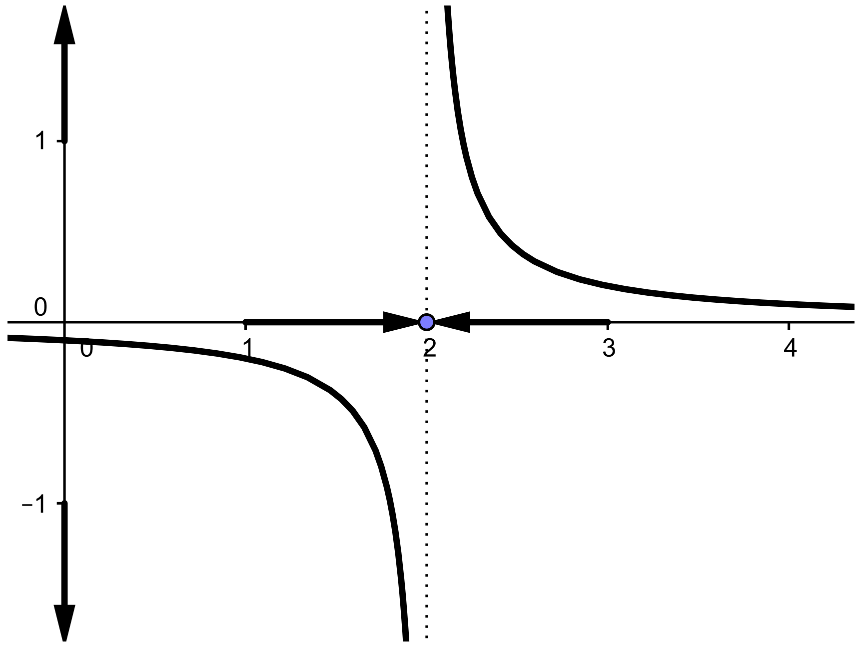
Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

EXEMPLO 6: No exemplo destacado na Figura 19, determine o $\lim_{x \to 2} f(x)$.

Solução

Finalmente, temos no exemplo da Figura 19 outra situação em que, não importa o quanto os valores de x se aproximam de 2, os valores de $f(x)$ não se aproximam de um número. Porém, diferentemente do exemplo da Figura 18, à medida em que os valores de x se aproximam de 2 por valores maiores do que ele, os valores de $f(x)$ aumentam muito, e quando os valores de x se aproximam de 2 por valores menores do que ele, os valores de $f(x)$ diminuem cada vez mais.

Figura 19 – Limite 6



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

Nessa situação, também dizemos que $\lim_{x \to 2} f(x)$ não existe.

Materiais utilizados: Computador com software Geogebra ou similar e projetor.
Bibliografia: SIMMONS, George F. *Cálculo com geometria analítica, volume 1.* São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

5.4 TAXA DE VARIAÇÃO

PLANO DE AULA 4

Nível: Educação básica.
Série: 3ª do EM.
Disciplina: Matemática.
Duração: 100 minutos.
Tema: Derivada.
Pré-requisitos: Funções e limite.
Objetivo: Dar ao aluno uma noção inicial de derivada.

Derivada como taxa de variação

Na aula sobre velocidade média e instantânea, foi visto que a velocidade média de um corpo cuja equação de posição no tempo é $x(t)$, pode ser dada por $V_m = \dfrac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$, e que $V_m \mapsto V$ quando $(t_2 - t_1) \mapsto 0$. Mas o que representa realmente V_m?

A quantidade V_m representa a taxa de variação da função $x(t)$ entre os tempos t_1 e t_2. Ao limite dessa taxa de variação quando $(t_2 - t_1) \mapsto 0$, demos o nome de velocidade instantânea no ponto t_1, ou seja, $V = \lim\limits_{t_2 \to t_1} \dfrac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$, ou $V = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x(t_1 + h) - x(t_1)}{h}$, onde $h = t_2 - t_1$.

Esse limite, quando for possível de ser calculado em uma função $f(x)$ qualquer, recebe o nome de derivada, que matematicamente pode ser representada por $f'(x)$ ou $\dfrac{df}{dx}$. Existem outras formas de representar simbolicamente a derivada de uma função, porém, essas duas são as mais utilizadas.

Então, chegamos a definição de derivada da função $f(x)$ no ponto $x = x_1$ como $f'(x_1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$. Dizemos então que a função $f(x)$ é derivável no ponto $x = x_1$, quando esse limite existe.

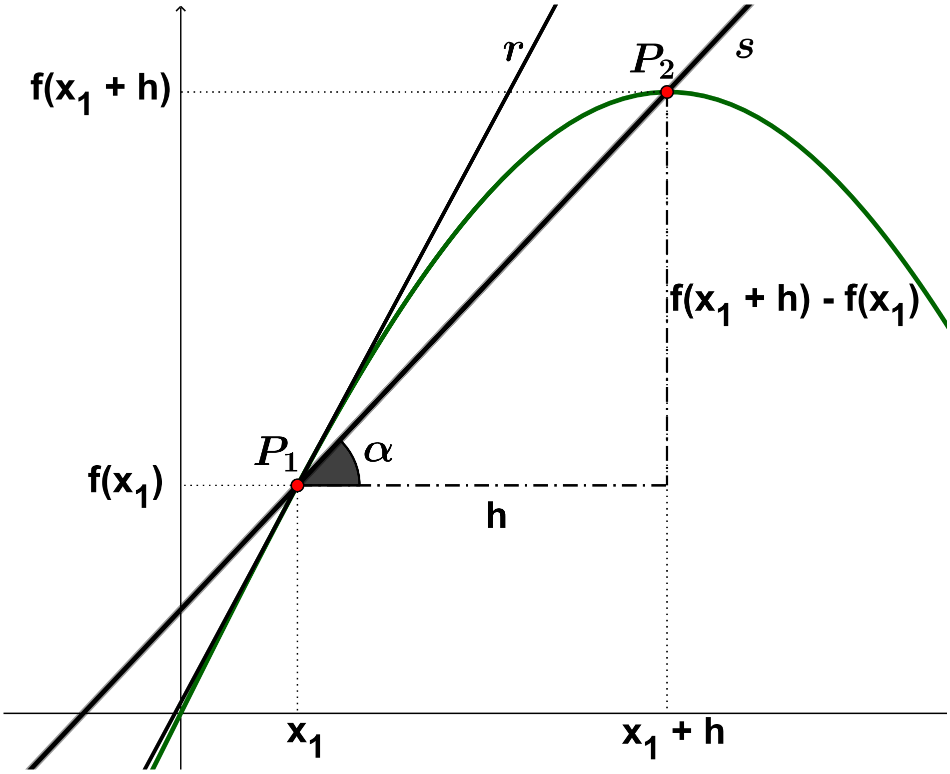
Se tal função for derivável em cada ponto do seu domínio, dizemos simplesmente que ela é derivável. Então, podemos substituir o ponto $x = x_1$ simplesmente por x, onde obtemos a definição mais geral de derivada como

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \tag{5.2}$$

Considere agora um pequeno trecho de uma função f e a reta r secante ao gráfico de f, que passa pelos pontos P_1, cujas coordenadas são $(x_1, f(x_1))$, e P_2, cujas coordenadas são $(x_1 + h, f(x_1 + h))$, como ilustra a Figura 20. Observe que a inclinação de r é justamente $tg(\alpha) = \dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$.

Podemos concluir então que, no limite quando $h \to 0$, a reta secante s se torna a reta r tangente ao gráfico da função f no ponto P_1. Essa é definição geométrica de derivada de uma função.

Figura 20 – Inclinação da reta secante



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

EXEMPLO: Determine a derivada das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$.

Solução

Pela definição de derivada (equação 5.2), temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - (x)^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2hx + h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 2x + h \end{aligned}$$

Então

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$$

De maneira semelhante,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} . \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h.(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h.(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Então

$$\frac{d(\sqrt{x})}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

EXERCÍCIO: Determine a derivada das funções abaixo utilizando a definição da equação 5.2.

a) $f(x) = 3x^2 - x + 4$

b) $g(x) = \dfrac{1}{x}$

Materiais utilizados: Quadro e pincel.

Bibliografia:

FINNEY, Ross L.; WEIR, Maurice D.; GIORDANO, Frank R. *Cálculo de George B. Thomas, volume 1.* 10ª ed. São Paulo: Addison Wesley, 2002.

SIMMONS, George F. *Cálculo com geometria analítica, volume 1.* São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

5.5 TAXAS RELACIONADAS

PLANO DE AULA 5

Nível: Educação básica.
Série: 3ª do EM.
Disciplina: Matemática.
Duração: 100 minutos.
Tema: Taxas relacionadas.
Pré-requisitos: Funções e taxa de variação.
Objetivo: Levar o aluno a compreender o que são taxas relacionadas e a operar com elas.

Taxas Relacionadas

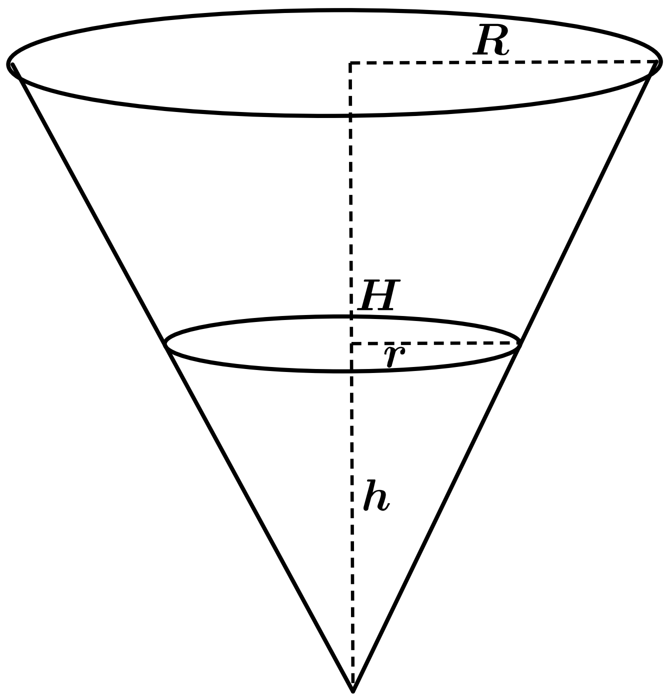
Consideremos um reservatório cônico de altura H e raio da base R, com o vértice voltado para baixo e cheio de água. Se fizermos um furo no vértice desse reservatório, o volume V de água inicialmente contido nele, irá diminuir ao passar do tempo. O mesmo acontecerá com a altura do líquido nele contido. Isso ocorre porque as duas grandezas estão vinculadas.

Se duas ou mais grandezas em uma determinada situação-problema estiverem relacionadas entre si, então suas taxas de variação também estarão.

A essa vinculação entre as taxas de variação de duas quantidades dá-se o nome de taxas relacionadas.

No reservatório cônico da Figura 21, seja v_0 a taxa de variação do volume de água em relação ao tempo. Vamos determinar a que taxa o nível de água desce numa determinada altura h_0.

Figura 21 – Reservatório cônico



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

Sabemos que em uma determinada altura h, cujo raio da seção transversal é r, o volume de água no reservatório é dado por $v = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

Por semelhança de triângulos na Figura 21, podemos colocar a variável r em função de R, H e h e na equação $v = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$, relacionar apenas v e h.

Temos então

$$\frac{H}{R} = \frac{h}{r} \Rightarrow r = \frac{Rh}{H}$$

Logo, $v = \dfrac{1}{3}\pi \dfrac{R^2 h^3}{H^2}$.

Derivando ambos os lados da equação em relação ao tempo, pois, tanto o volume quanto a altura variam com o tempo, teremos as taxas relacionadas que nos interessam.

Assim, $\dfrac{dV}{dt} = \pi \left(\dfrac{Rh}{H}\right)^2 \dfrac{dh}{dt}$.

Como queremos saber a taxa de variação em $h = h_0$ e sabemos que $\dfrac{dV}{dt} = v_0$, temos

$$\frac{dV}{dt} = \pi \left(\frac{Rh}{H}\right)^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \pi \left(\frac{Rh_0}{H}\right)^2 \frac{dh}{dt} = v_0 \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{v_0}{\pi} \left(\frac{H}{Rh_0}\right)^2$$

EXEMPLO: Em um tanque cônico com $10m$ de altura e raio da base $5m$, bombeia-se água a uma taxa de $1m^3/min$. A que taxa o nível de água sobe quando a água tem $2m$ de profundidade?

Solução

Note que o problema é similar ao descrito anteriormente.

Sendo assim, $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ e por semelhança de triângulos, $\frac{10}{5} = \frac{h}{r}$, ou seja, $r = \frac{h}{2}$. Logo, $v = \frac{\pi h^3}{12}$.

Derivando ambos os lados, temos

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi h^2}{4}\frac{dh}{dt} \Rightarrow 1 = \frac{\pi 2^2}{4}\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi}m/min$$

EXERCÍCIO 1: Uma escada com 6m de comprimento está apoiada numa parede de 3,6m de altura, num ponto abaixo do seu topo. Sua base escorrega se afastando da parede a uma taxa de 1,5m/min. A que velocidade o topo da escada se aproxima do chão quando ele está a 1,5m do ponto mais alto da parede?

EXERCÍCIO 2: Um balão esférico perde ar por um furo de tal forma que seu raio diminui a uma taxa de $2cm/min$. Qual a taxa de diminuição do volume, quando o raio do balão é r=50cm?

Materiais utilizados: Quadro e pincel.

Bibliografia: SIMMONS, George F. *Cálculo com geometria analítica, volume 1.* São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

5.6 MÁXIMOS E MÍNIMOS

PLANO DE AULA 6

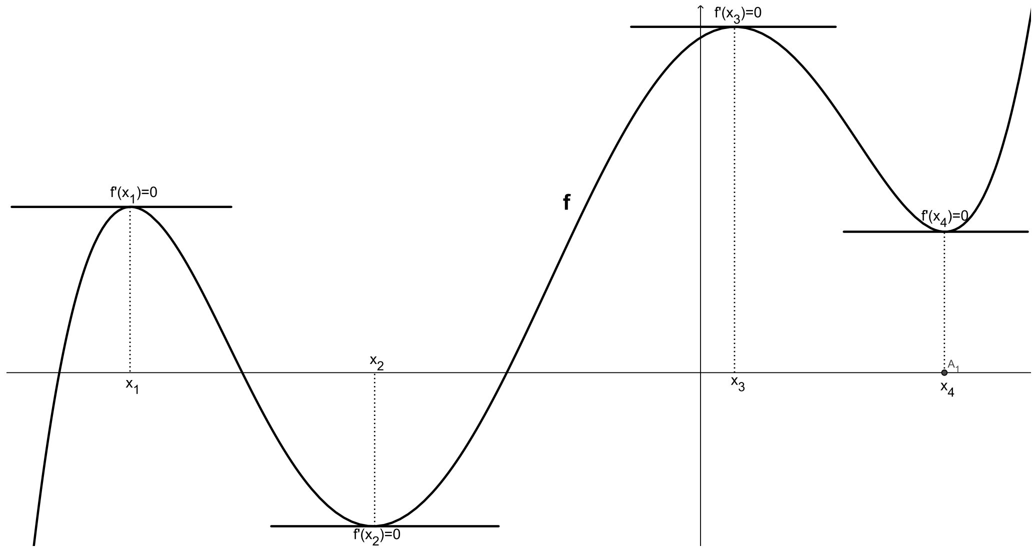
Nível: Educação básica.
Série: 3ª do EM.
Disciplina: Matemática.
Duração: 100 minutos.
Tema: Máximos e mínimos de uma função.
Pré-requisitos: Funções e derivada.
Objetivo: Mostrar ao aluno como identificar e determinar valores máximos e mínimos de funções.

Máximos e mínimos de uma função

Da definição geométrica de derivada, sabe-se que a derivada de uma função em um certo ponto é a tangente do ângulo positivo que a reta tangente ao gráfico dessa função, no ponto em questão, forma com o eixo das abscissas.

Pode-se demonstrar que, se uma função for derivável, e possui um valor máximo ou mínimo, a reta tangente ao gráfico dessa função nos pontos de máximo ou de mínimo deve ser horizontal, e retas horizontais formam com o eixo das abscissas, um ângulo de $0°$, cuja tangente é zero. A Figura 22 mostra algumas situações em que a função possui valor máximo e mínimo local.

Figura 22 – Tangente horizontal



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

Sendo assim, podemos concluir que, se uma função f possui valor máximo ou mínimo em um ponto $x = x_1$, e é derivável nesse ponto, então, $f'(x_1) = 0$.

Essa conclusão é bastante útil e nos auxilia a resolver problemas que aparentam serem complicados, de maneira rápida e prática.

EXEMPLO 1: Encontre o valor máximo ou mínimo da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in R$ e $a \neq 0$.

Solução

Seja $V = (x_v, y_v)$ o ponto onde $f(x)$ possui seu valor máximo ou mínimo.

$f'(x_v) = 0 \Rightarrow (ax_v^2 + bx_v + c)' = 0 \Rightarrow 2ax_v + b = 0 \Rightarrow x_v = -\dfrac{b}{2a}$.

$y_v = f(x_v) = ax_v^2 + bx_v + c = a\left(-\dfrac{b}{2a}\right)^2 + b.\left(-\dfrac{b}{2a}\right) + c = \dfrac{b^2}{4a} - \dfrac{b^2}{2a} + c.$

Chamando $\Delta = b^2 - 4ac$, temos

$y_v = \dfrac{b^2}{4a} - \dfrac{b^2}{2a} + c = \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

Para concluir, considere a função f escrita em sua forma canônica, ou seja,

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

.

Vemos que a forma canônica de f, pode ser escrita como $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$.

Portanto, se $a > 0$, y_v será um valor mínimo para f, pois, se $x_0 > x_v$ ou $x_0 < x_v$, então, $a(x_0 - x_v)^2 > 0$, e $f(x_0) = a(x_0 - x_v)^2 + y_v > y_v = f(x_v)$. Analogamente, se $a < 0$, y_v será um valor máximo para f, pois, se $x_0 > x_v$ ou $x_0 < x_v$, então, $a(x_0 - x_v)^2 < 0$, e $f(x_0) = a(x_0 - x_v)^2 + y_v < y_v = f(x_v)$.

EXEMPLO 2: De todos os retângulos cujo perímetro é 10m, determine as dimensões do que possui a maior área.

Solução

Sejam x e y as dimensões desse retângulo. Então, $2x + 2y = 10$, ou seja, $x + y = 5$.

Chamando de A a área desse retângulo, temos $A = xy$. Mas como $x + y = 5 \Rightarrow y = 5 - x$, temos $A(x) = x(5 - x)$ é a expressão para a área dos retângulos em função de uma das suas dimensões.

Se $A(x)$ possuir um valor máximo em algum ponto, então, $A'(x) = 0$ nesse ponto. Utilizando a equação 5.2, obtém-se $A'(x) = 5 - 2x$.

Então, $A'(x) = 0 \Rightarrow 5 - 2x = 0$, ou seja, $x = \frac{5}{2}$. Mas como $x + y = 5$, temos $y = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$.

Dessa forma e pelos mesmos argumentos apresentados no EXEMPLO 1, pois $A(x)$ também é uma função quadrática, concluímos que, de todos os retângulos cujo perímetro é $10m$, o de maior área é o quadrado de lado $\frac{5}{2}m$.

EXEMPLO 3: Suponha que um fabricante de bolos produza cada unidade ao custo de R$50,00. Suponha também que, se cada unidade for vendida a x reais, o fabricante conseguirá vender $100 - x$ bolos. Determine qual quantidade do produto deve ser vendida para que se tenha o maior lucro possível.

Solução

Primeiramente, se cada unidade custa R$50,00 para ser produzida, o custo de produção de $100 - x$ unidades será $C(x) = 50(100 - x)$.

De maneira similar, como o preço de venda é x reais, a receita que será obtida pelo fabricante será $R(x) = x(100 - x)$.

Dessa forma, o lucro que o fabricante obterá, pode ser descrito pela fórmula, $L(x) = R(x) - C(x)$. Ou seja, $L(x) = x(100 - x) - 50(100 - x) = -x^2 + 150x - 5000$.

Utilizando a mesma ideia do EXEMPLO 2, e argumentos do EXEMPLO 1, podemos fazer $L'(x) = 0$, onde $L'(x) = -2x + 150$, para obter $x = 75$.

Então, para que o fabricante obtenha o maior lucro possível, o preço de venda de cada bolo deve ser R$75,00 e ele conseguirá vender 25 unidades.

EXERCÍCIO 1: De todos os retângulos inscritos em um triângulo equilátero de lado $3m$, determine as dimensões do de maior área.

EXERCÍCIO 2: Um artesão vende, por dia, x unidades de um determinado artigo por $V(x) = x^2 - x$. Sendo o custo da produção $C(x) = 2x^2 - 7x + 8$, quantas unidades devem ser vendidas diariamente, de modo que se obtenha o maior lucro possível?

Materiais utilizados: Quadro e pincel.
Bibliografia: SIMMONS, George F. *Cálculo com geometria analítica, volume 1.* São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

5.7 ESBOÇANDO GRÁFICO

PLANO DE AULA 7

Nível: Educação básica.
Série: 3ª do EM.
Disciplina: Matemática.
Duração: 100 minutos.
Tema: Esboço de gráfico.
Pré-requisitos: Funções e derivada.
Objetivo: Mostrar ao aluno como esboçar gráficos utilizando derivadas.

Esboçando gráfico

Nessa aula, veremos como esboçar os gráficos das funções $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$ e $g(x) = sen(x)$, utilizando derivada.

Esboçando o gráfico de $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$.

Sabemos que se uma função possui máximos ou mínimos locais, $f'(x) = 0$ nos pontos onde isso ocorre. Os valores de x tais que $f'(x) = 0$ são chamados de pontos críticos de f.

temos $f'(x) = 0 \Rightarrow 4x - 8 = 0$, ou seja, $x = 2$ é um ponto crítico de f.

Note que para $x > 2$, $f'(x) > 0$, ou seja, os coeficientes angulares das retas tangentes a f para valores de $x > 2$ são positivos. Isso significa que f é crescente nesse intervalo.

Por outro lado, se $x < 2$, $f'(x) < 0$ e de maneira similar podemos concluir que f é decrescente nesse intervalo.

Como f decresce para $x < 2$ e imediatamente cresce para $x > 2$, podemos concluir que $x = 2$ é ponto de mínimo da função $f(x)$.

Temos também que $f(2) = 2.2^2 - 8.2 + 6 = -2$. Ou seja, as coordenadas do ponto mínimo são $P = (2, -2)$.

Outros pontos importantes são as raízes de f, ou seja, os valores de x tais que $f(x) = 0$.

$f(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 3$.

Logo, $P_1 = (1, 0)$ e $P_2 = (3, 0)$ são os pontos onde f intersecta o eixo das abcissas.

Podemos calcular também $f(0)$, afim de determinar a interseção de f com o eixo das ordenadas.

$f(0) = 2.0^2 - 8.0 + 6 = 6.$

Logo, $P_3 = (0, 6)$ é o ponto onde f intercecta o eixo das ordenadas.

De posse dos pontos P, P_1, P_2 e P_3, estamos praticamente prontos para esboçar o gráfico de f. Mas para finalizarmos, é necessário analizarmos a concavidade da função.

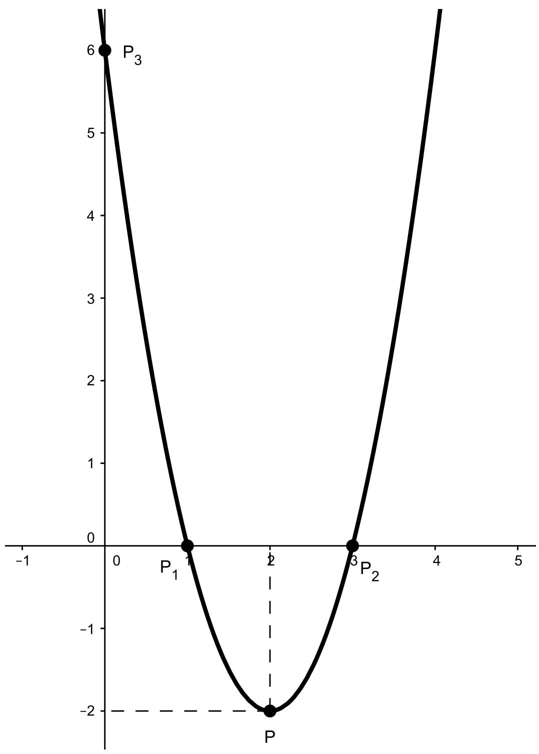
Afim de verificarmos a concavidade de f, podemos analizar a derivada da função derivada $f'(x)$. Assim, podemos saber como se comportam as retas tangentes ao longo do gráfico de f.

$(f'(x))' = f"(x) = 4$

Portanto, $f"(x) = 4 > 0\ \forall x \in R$. Ou seja, independente dos valores de x, os coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico de f sempre crescem.

Logo, o gráfico da função é côncavo para cima.

Figura 23 – Gráfico da função $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

A Figura 23 representa o gráfico da função $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$.

Esboçando o gráfico de $g(x) = sen(x)$ *no intervalo* $[0, 2\pi]$.

Começaremos determinando as raízes de $g(x)$, ou seja, os pontos em que a função intercepta o eixo das abcissas.

Fazendo $sen(x) = 0$, temos $x = 0$, $x = \pi$, ou $x = 2\pi$.

Determinando os pontos críticos.

Fazendo $g'(x) = cos(x) = 0$, temos $x = \dfrac{\pi}{2}$ ou $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

Analisando os intervalos de crescimento ou decrescimento da função.

Sabemos que $cos(x) > 0\ \forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$. Portanto, $g(x)$ é crescente nesse intervalo.

Sabemos também que $cos(x) < 0\ \forall x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$. Portanto, $g(x)$ é decrescente nesse intervalo.

Logo, podemos concluir que $x = \dfrac{\pi}{2}$ é ponto de máximo e $x = \dfrac{3\pi}{2}$, de mínimo.

Podemos analisar também, a concavidade do gráfico de $g(x)$, estudando $g''(x) = -sen(x)$.

Sabemos que $g''(x) > 0 \Rightarrow -sen(x) > 0 \Rightarrow sen(x) < 0 \Rightarrow x \in [\pi, 2\pi]$.

Em contrapartida, $g''(x) < 0 \Rightarrow -sen(x) < 0 \Rightarrow sen(x) > 0 \Rightarrow x \in [0, \pi]$.

Podemos concluir então que, no intervalo $[0, \pi]$, $g'(x)$ é decrescente, pois, $g''(x) < 0$. Logo, $g(x)$ é côncava para baixo.

Por outro lado, no intervalo $[\pi, 2\pi]$, concluimos que $g'(x)$ é crescente, pois, $g''(x) > 0$. Logo, $g(x)$ é côncava para cima.

O ponto $x = \pi$ é o ponto em que $g(x)$ muda de concavidade é chamado de ponto de inflexão, e é tal que $g''(x) = 0$.

Em resumo, conseguimos coletar os seguintens pontos:

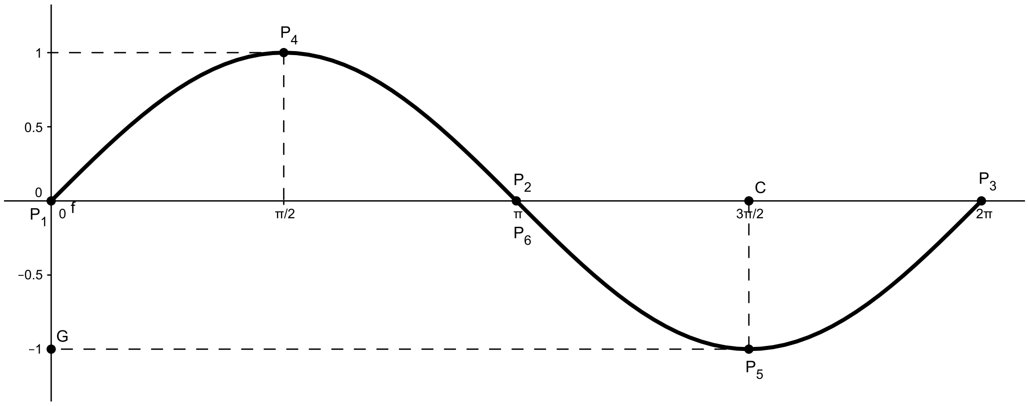
$P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (\pi, 0)$ e $P_3 = (2\pi, 0)$, raízes de $g(x)$.

$P_4 = \left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$, é o máximo. $\left(g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = sen\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1\right)$.

$P_5 = (\dfrac{3\pi}{2}, -1)$, é o mínimo. $(g(\dfrac{3\pi}{2} = sen\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -1)$.

$P_6 = (\pi, 0)$, inflexão. $(g(\pi) = 0)$.

Figura 24 – Gráfico da função $g(x) = sen(x)$



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

A Figura 23 representa o gráfico da função $g(x) = sen(x)$.

Materiais utilizados: Quadro e pincel.

Bibliografia: BONJORNO, José Roberto. GIOVANNI, José Ruy. *Matemática completa, volume 3.* São Paulo: FTD, PNLEM 2009.

5.8 PRIMITIVAS E INTEGRAL INDEFINIDA

PLANO DE AULA 8

Nível: Educação básica.
Série: 3ª do EM.
Disciplina: Matemática.
Duração: 100 minutos.
Tema: Integral.
Pré-requisitos: Funções e regras de derivação.
Objetivo: Dar ao aluno noções iniciais de integral.

Primitiva de uma função e integral indefinida

Seja f uma função definida em um determinado intervalo. Uma primitiva dessa função, é outra função, que chamaremos de F, derivável nesse intervalo, tal que $F'(x) = f(x)$ $\forall x$ desse intervalo.

Não é difícil perceber que uma mesma função possui várias primitivas. Por exemplo, se $f(x) = 2x$, $F_1(x) = x^2$ é uma primitiva para f, e $F_2(x) = x^2 + 1$, outra. Nesse sentido, é fácil ver que $F(x) = x^2 + c$, onde c é qualquer constante real, contempla todas as primitivas da função $f(x) = 2x$. A esse conjunto de primitivas damos o nome de integral indefinida. O processo de determinação da primitiva de uma função recebe o nome de primitivação, antiderivação, ou ainda, integração.

Matematicamente, representamos a integral indefinida de uma função f como

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

em que $f(x)$ é o integrando, $F(x) + c$ a integral e dx denota a variável na qual a função está definida ou, em qual variável pretende-se determinar a primitiva.

Quando, juntamente com a derivada da função, for fornecida alguma informação complementar acerca dessa função, por exemplo o valor de f em algum ponto, conseguimos determinar o valor da constante c. Nesse caso, a integral não é mais um conjunto de primitivas, mas uma única função. Problema com essa característica chama-se problema de valor inicial.

EXEMPLO 1: Encontre a família de primitivas de $x^{2/3}$, ou seja, a integral $\int x^{2/3}dx$.

Solução

Seja $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$. Queremos encontrar uma família de funções $F(x) + c$, tal que, $F'(x) = f(x)$.

Vamos supor que $F(x)$ assuma a forma $F(x) = ax^p$, onde, $a, p \in R^*$.

Então,

$$F'(x) = (ax^p)' = apx^{p-1}$$

Como $F'(x) = f(x)$, temos

$$apx^{p-1} = x^{\frac{2}{3}}$$

ou seja,

$$ap = 1 \text{ e } p - 1 = \frac{2}{3}$$

Logo,

$$p - 1 = \frac{2}{3} \Rightarrow p = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$$

e

$$ap = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

Então, $\int x^{2/3}dx = \frac{3}{5}x^{5/3} + c$ é uma família de primitivas de $x^{2/3}$.

EXEMPLO 2: Um balão subindo a uma velocidade de $4m/s$, está a uma altura de $24m$ em relação ao solo quando um objeto é solto. Quanto tempo esse objeto demora para atingir o solo?

Solução

Esse é um típico problema de valor inicial associado a modelagem.

Primeiramente, como o objeto está em queda livre, a aceleração que atua sobre ele é a da gravidade, que consideraremos como $a = -10m/s^2$. Mas, sabemos que $a = \frac{dv}{dt}$, em que v é a velocidade do balão.Então, precisamos resolver o problema $v(t) = \int -10dt$, onde, $v(0) = 4m/s$.

Então, $v(t) = -10t + c_1$ é conjunto de todas as primitivas de $a = -10$. Mas com a condição inicial $v(0) = 4m/s$, temos $-10.0 + c_1 = 4$, ou seja, $c_1 = 4m/s$. Logo, $v(t) = -10t + 4$.

Em segundo lugar, sabemos que $v(t) = \frac{dx}{dt}$, em que $x(t)$ representa a posição do balão. Logo, temos um segundo problema de valor inicial, onde $x(t) = \int (-10t + 4)dt$ e $x(0) = 24m$.

Então, $x(t) = -5t^2 + 4t + c_2$ é o conjunto de todas as primitivas de $-10t + 4$.

Com a condição inicial $x(0) = 24m$, temos $-5.0^2 + 4.0 + c_2 = 24$, ou seja, $c_2 = 24m$.

Logo, $x(t) = -5t^2 + 4t + 24$.

De posse da equação de posição do objeto, basta determinar para qual valor de t temos $x(t) = 0$.

Então,

$$-5t^2 + 4t + 24 = 0 \Rightarrow \Delta = 4^2 - 4(-5)(24) = 496 \Rightarrow t = \frac{-4 \pm \sqrt{496}}{-10} \Rightarrow t \approx 2,63seg.$$

.

EXERCÍCIO 1: Encontre a integral $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$.

EXERCÍCIO 2: Um corpo inicialmente em repouso é solto de uma altura de $100m$ em relação ao solo. Utilizando as técnicas de primitivação, determine o tempo necessário para esse corpo atingir o solo. (Utilize $g = 10m/s^2$)

Materiais utilizados: Quadro e pincel.

Bibliografia: SIMMONS, George F. *Cálculo com geometria analítica, volume 1.* São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

5.9 SOMA DE RIEMANN E INTEGRAL DEFINIDA

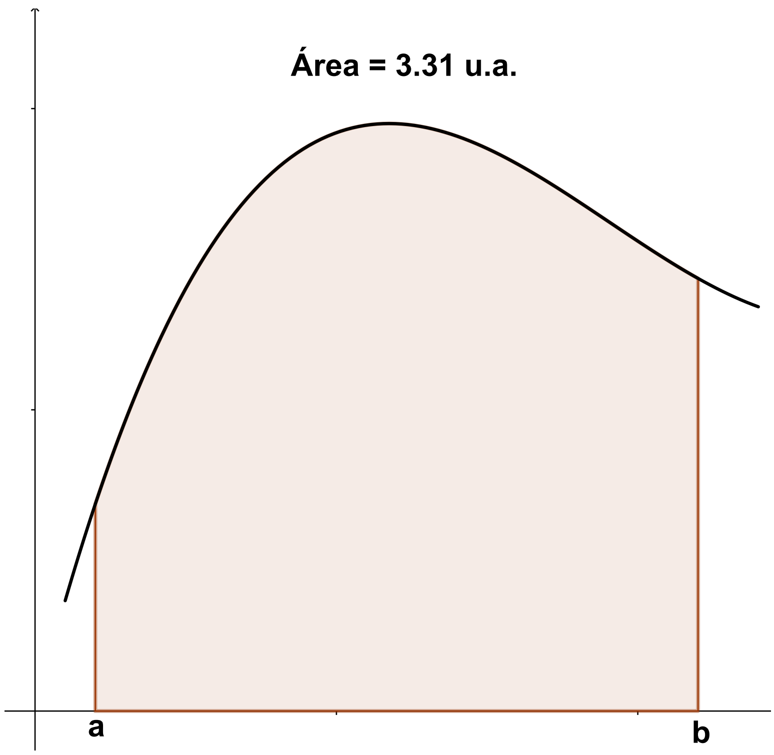
PLANO DE AULA 9

Nível: Educação básica.
Série: 3ª do EM.
Disciplina: Matemática.
Duração: 100 minutos.
Tema: Integral definida e área.
Pré-requisitos: Gráficos, limite, derivada e integral indefinida.
Objetivo: Mostrar ao aluno o que é uma integral definida e como calcular áreas.

Soma de Riemann e integral definida

Considere o gráfico de uma função f na Figura 25, no qual, gostaríamos de calcular a área compreendida entre ele e o eixo das abcissas, no intervalo $[a, b]$.

Figura 25 – Integral definida



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

Com o auxílio do software Geogebra, foi possível calcular a área desejada, a qual pretendemos fazer utilizando outras ferramentas.

Consideraremos três situações.

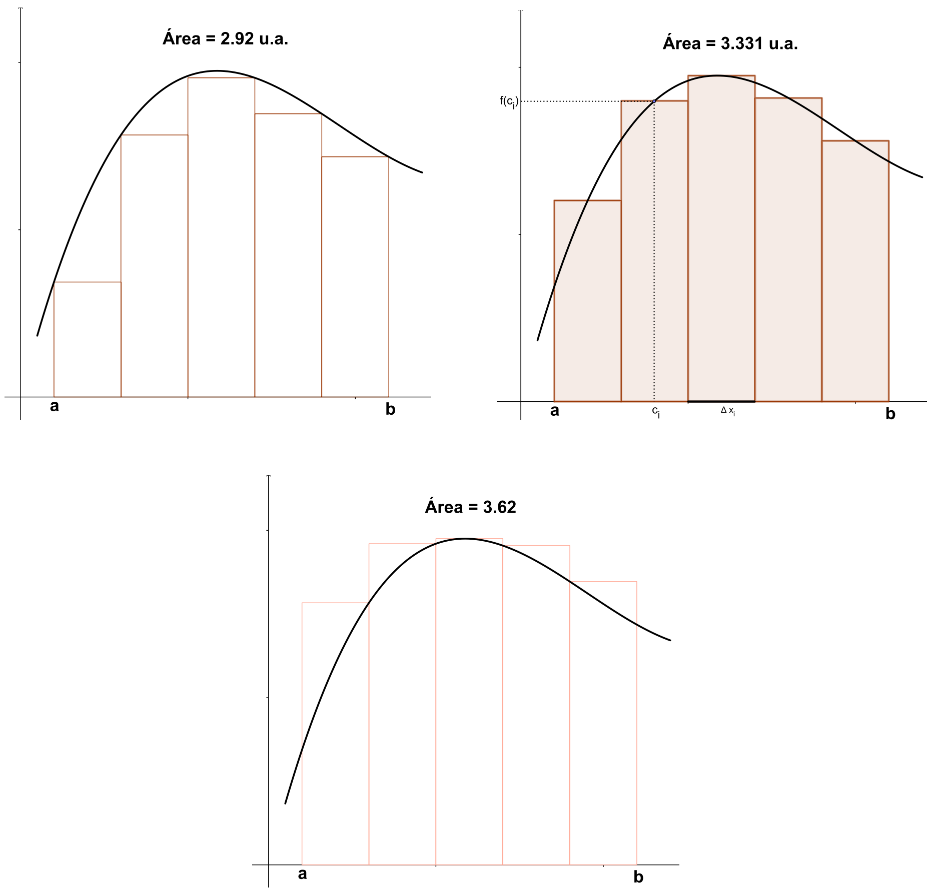
Primeiramente, dividiremos a área desejada em retângulos cujas bases são todas iguais a $\dfrac{b-a}{n}$, e são justamente os comprimentos dos intervalos $[x_i, x_{i+1}]$ que subdividem o intervalo $[a, b]$, e n é a quantidade de retângulos. A altura de cada retângulo é $f(x_i)$, ou seja, é o valor da função avaliada no extremo esquerdo de cada intervalo, Figura 26(a).

Em segundo lugar, podemos fazer um raciocínio análogo mas, em vez de utilizar o extremo esquerdo, avaliaremos a função no extremo direito de cada intervalo, ou seja, em $f(x_{i+1})$, Figura 26(c).

Por último, esqueceremos os extremos de cada intervalo e utilizaremos um ponto $c_i \in (x_i, x_{i+1})$. Assim a altura de cada retângulo passa a ser $f(c_i)$, Figura 26(b).

O resultado dessa partição utilizando cinco retângulos pode ser visto na Figura 26.

Figura 26 – Somas de Riemann com 5 retângulos

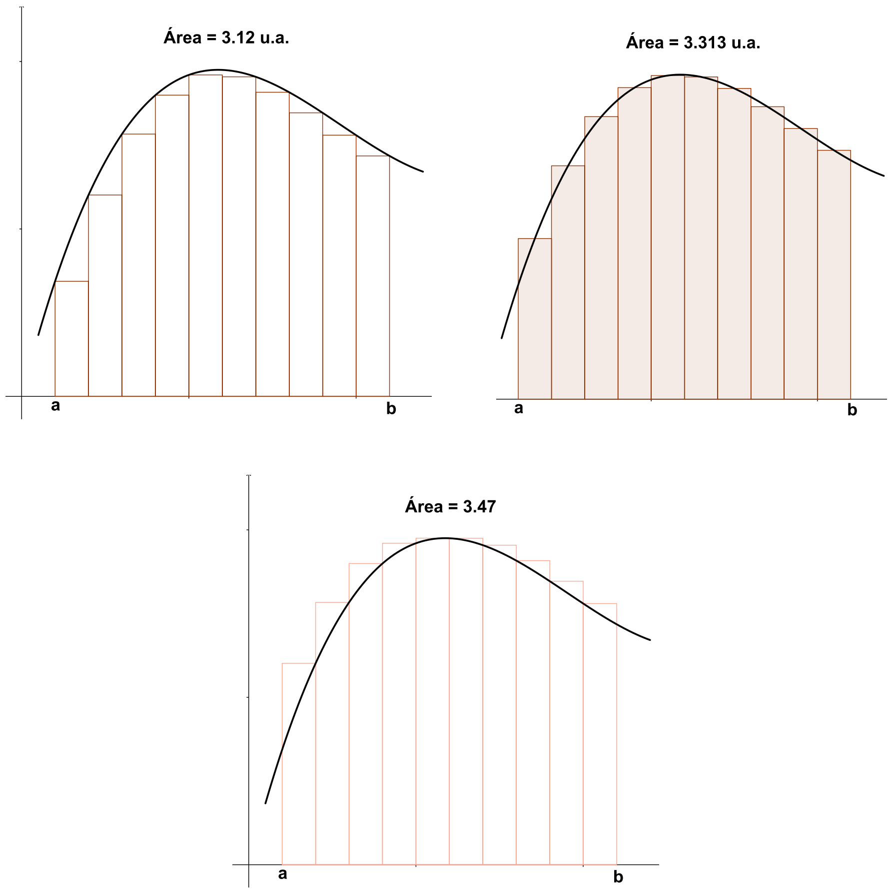


Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

Note que a soma dos retângulos que mais se aproxima da área desejada é a calculada utilizando c_i, embora as três já se mostrem bastante perto do valor desejado.

Se dobrarmos o número de retângulos, cada intervalo diminui, e com isso, refinamos ainda mais a nossa aproximação. Veja na Figura 27, a partição utilizando dez retângulos.

Figura 27 – Somas de Riemann com 10 retângulos

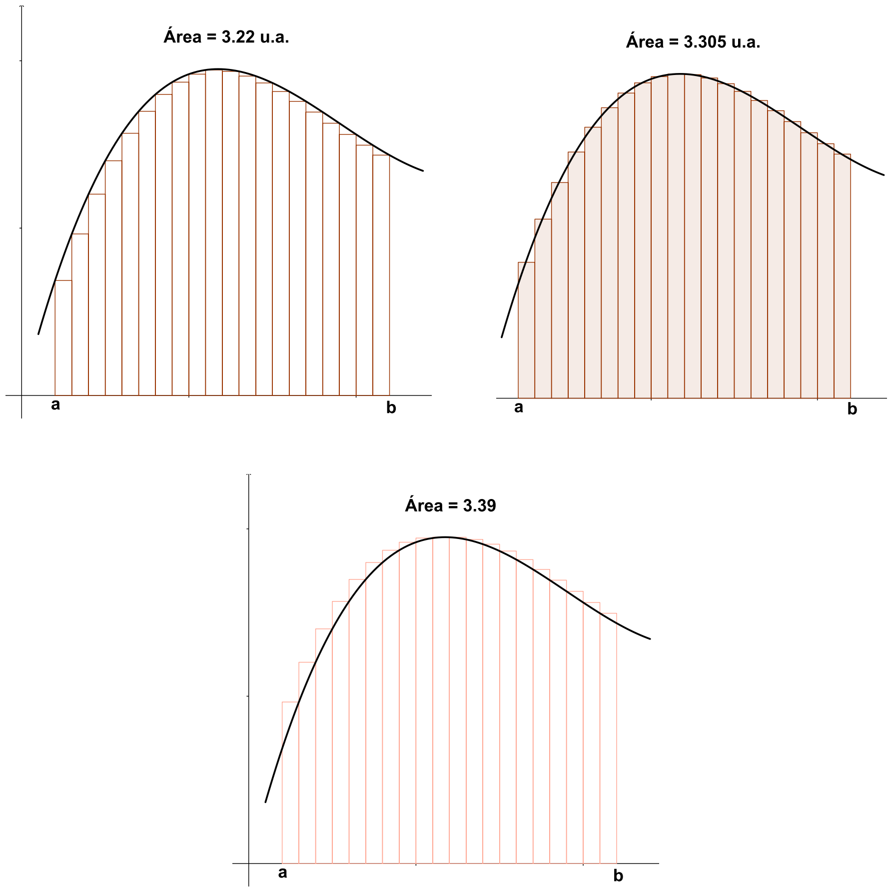


Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

Note que, ao refinarmos um pouquinho mais a nossa partição, o valor das três áreas já se aproximaram bastante do valor buscado, e que, a partição que mais se aproxima do ideal, continua sendo a utilizando c_i.

A Figura 28, mostra uma partição utilizando 20 retângulos.

Figura 28 – Somas de Riemann com 20 retângulos

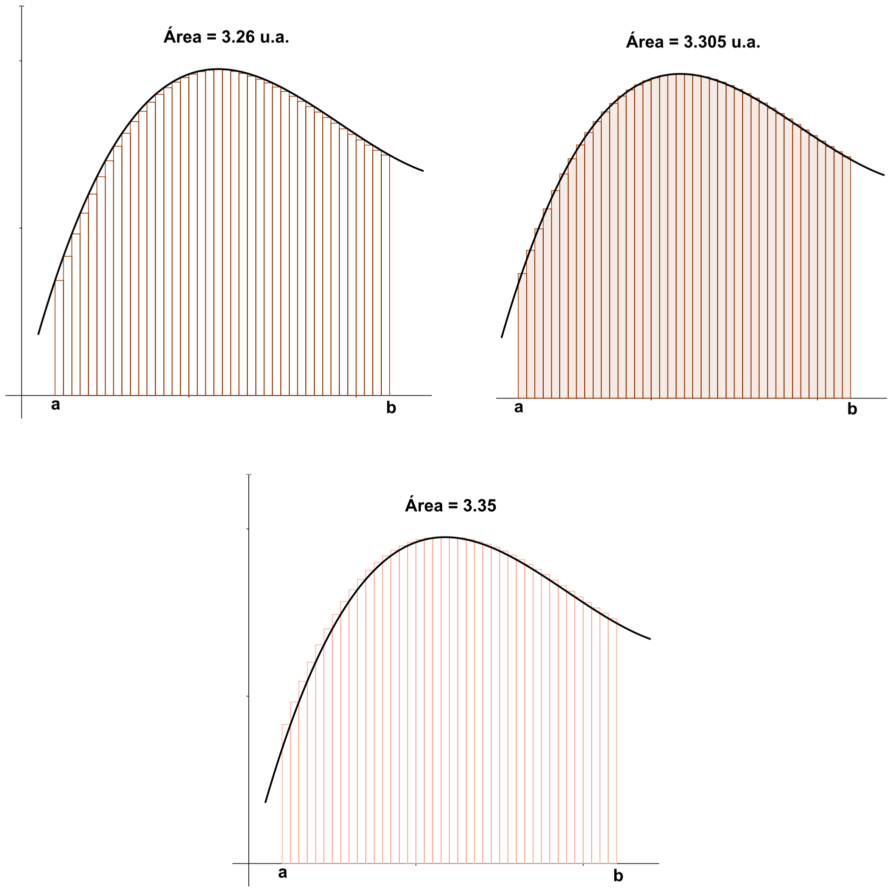


Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

Nesse caso, a partição utilizando c_i já é praticamente o valor da área desejada, enquanto as outras duas se aproximam um pouco mais lentamente.

A Figura 29, mostra a partição utilizando 40 retângulos.

Figura 29 – Somas de Riemann com 40 retângulos



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

Note que as partições utilizando os extremos dos intervalos, continuam se aproximando mais lentamente, enquanto que a outra, já é praticamente o valor desejado.

Se refinarmos ainda mais as partições, certamente todas as três somas dos retângulos se aproximarão do valor da área entre o gráfico e o eixo das abcissas.

Então, a área A que desejamos calcular pode ser representada por

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} [f(c_1).\Delta x + f(c_2).\Delta x + ... + f(c_n).\Delta x]$$

onde Δx é o comprimento de cada intervalo e n a quantidade de retângulos contidos na partição.

Esse resultado, conhecido como **soma de Riemann**, pode ser escrito de maneira mais compacta, utilizando a notação de somatório

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

Finalmente, a integral definida de uma função contínua num intervalo $[a, b]$, com todas as características descritas acima será definida como

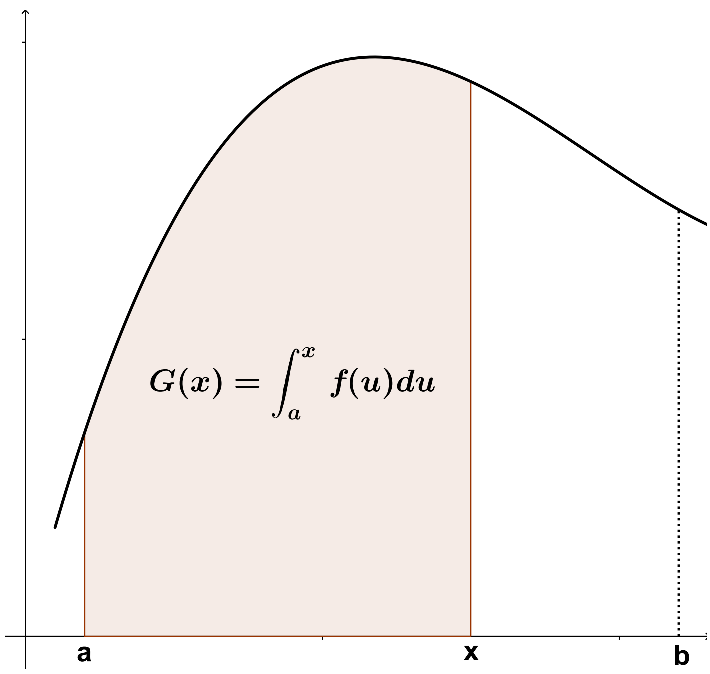
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \tag{5.3}$$

Até o momento, definimos o que é uma integral definida de uma função contínua em um intervalo fechado. Porém, precisamos encontrar uma maneira de calcular essa integral.

Na $\int_a^b f(x)dx$, a e b são chamados de limites de integração, onde a é o limite inferior, b o superior e x é a variável de integração, podendo ser substituída por qualquer outra variável sem prejuízo para o sentido da integral. Dessa forma, são equivalentes $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b f(t)dt$ e $\int_a^b f(u)du$.

Utilizando a mesma situação, vamos definir a área A entre o gráfico da função f e o eixo das abcissas no intervalo $[a, b]$, entre a e x, como uma função $G(x) = \int_a^x f(u)du$ em que, cada valor de $x \in [a, b]$ nos fornece uma área diferente, como ilustra a Figura 30.

Figura 30 – Integral definida - Função G(x)



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

O **Teorema Fundamental do Cálculo** garante que a área $A = \int_a^x f(u)du$ pode ser calculada simplesmente fazendo $G(x) - G(a)$, ou seja,

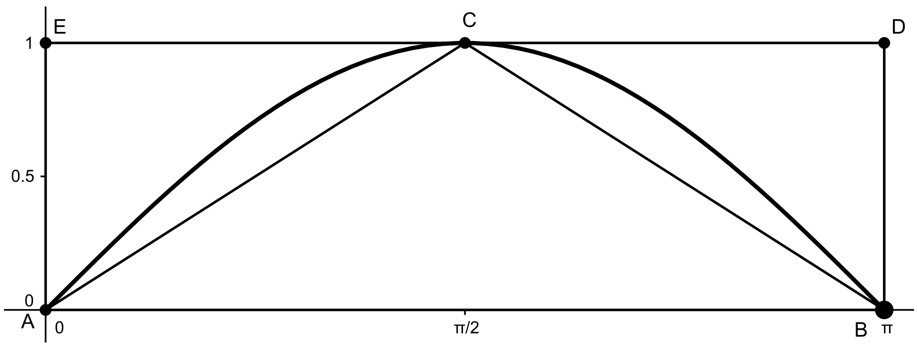
$$A = \int_a^x f(u)du = G(x) - G(a)$$

EXEMPLO 1: Determine o valor da área entre o gráfico da função $y = sen(x)$ entre $x = 0$ e $x = \pi$.

Solução

Pela Figura 31 vemos que a área A pretendida é maior do que a área A_1 do ΔABC, e menor do que a área A_2 do retângulo $ABDE$. Ou seja, $\frac{\pi}{2} < A < \pi$.

Figura 31 – Área $sen(x)$ entre triângulo e retângulo

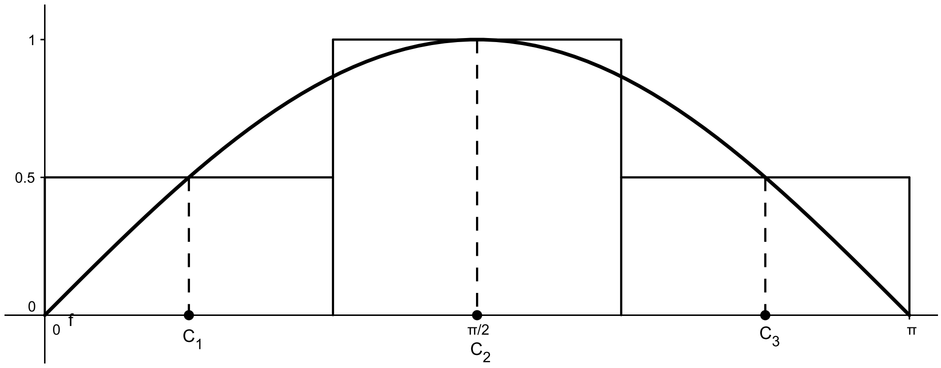


Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

Se subdividirmos a área abaixo do gráfico de $f(x)$ em retângulos, podemos obter uma aproximação melhor para A.

Inicialmente, faremos com 3 retângulos conforme Figura 32.

Figura 32 – Área $sen(x)$ com três retângulos



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

A base de cada retângulo será $\frac{\pi}{3}$, e a altura, $f(c_i)$, onde c_i, é o ponto médio de cada base do retângulo.

Então, $C_1 = \frac{\pi}{6}$, $C_2 = \frac{\pi}{2}$ e $C_3 = \frac{5\pi}{6}$.

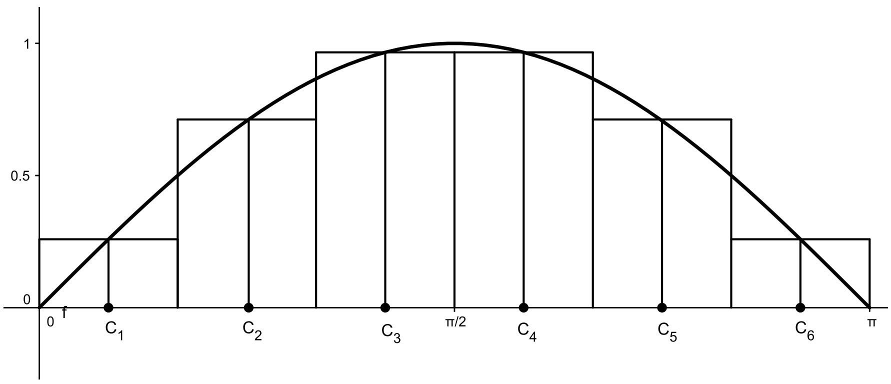
Sendo assim,

$$A = f(C_1)\Delta x + f(C_2)\Delta x + f(C_3)\Delta x = \left(sen\left(\frac{\pi}{6}\right) + sen\left(\frac{\pi}{2}\right) + sen\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)\frac{\pi}{3}$$

.

$$A = \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2})\right)\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \approx 2,09$$

Figura 33 – Área $sen(x)$ com seis retângulos



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

Dobrando o número de retângulos, conforme Figura 33, a base de cada um será $\dfrac{\pi}{6}$.

Temos ainda $C_1 = \dfrac{\pi}{12}$, $C_2 = \dfrac{\pi}{4}$, $C_3 = \dfrac{5\pi}{12}$, $C_4 = \dfrac{7\pi}{12}$, $C_5 = \dfrac{3\pi}{4}$, $C_6 = \dfrac{11\pi}{12}$.

Das relações trigonométricas, temos:

$$sen\left(\frac{\pi}{12}\right) = sen\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{\pi}{4}\right) cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - sen\left(\frac{\pi}{6}\right) cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$sen\left(\frac{5\pi}{12}\right) = sen\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{\pi}{4}\right) cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + sen\left(\frac{\pi}{6}\right) cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Note que $f(C_1) = f(C_6)$, $f(C_2) = f(C_5)$ e $f(C_3) = f(C_4)$. Então, $A = 2.(f(C_1) + f(C_2) + f(C_3))\dfrac{\pi}{6}$. Logo,

$$A = 2.\left[\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right]\frac{\pi}{6} = \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\frac{\pi}{6} \approx 2,02$$

Se subdividirmos a região abaixo do gráfico de f em n retângulos e fizermos $n \to +\infty$, teremos

$$A = \int_0^{\pi} sen(x)dx = [-cos(x)]_0^{\pi} = -cos(\pi) - (-cos(0)) = -(-1) - (-1) = 2$$

Observe que a subdivisão com apenas 6 retângulos já fornece uma boa aproximação para a área A.

EXEMPLO 2: Encontre uma aproximação graficamente para o número e.

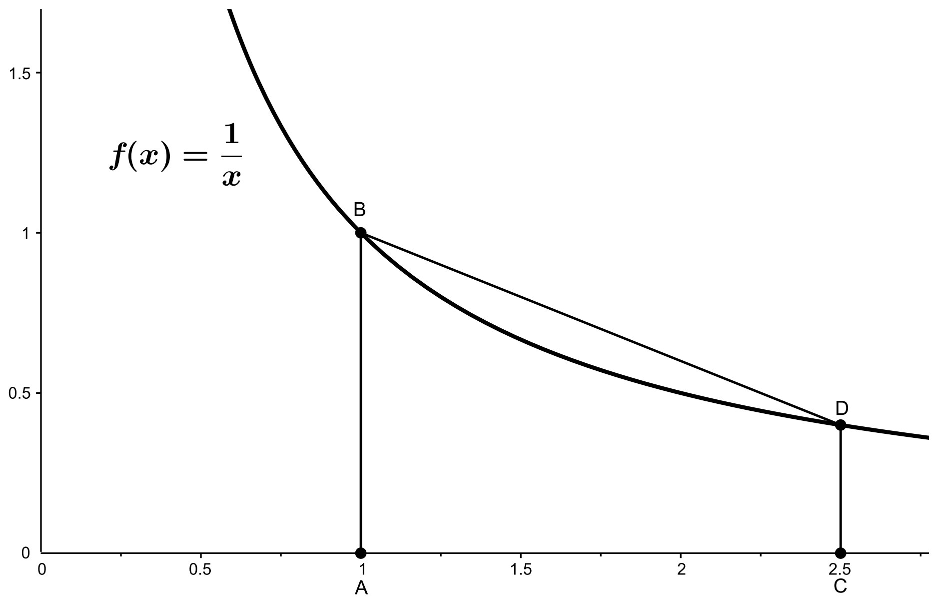
Solução

Como $ln(x)$ é uma primitiva para a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, podemos pensar na função $ln(x)$ como a área sob o gráfico da função f.

Como $ln(1) = 0$, e $ln(x) > 0$ para $x > 1$, investigaremos a área sob o gráfico de f a partir de $x = 1$.

Para tanto, observe a Figura 34.

Figura 34 – Área sob $f(x) = \dfrac{1}{x}$ - Um trapézio



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

Nela, temos um trecho do gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e um trapézio $ABDC$, onde $A = (1,0)$, $B = (1, f(1))$, $C = (2,5; 0)$ e $D = (2,5; f(2,5))$.

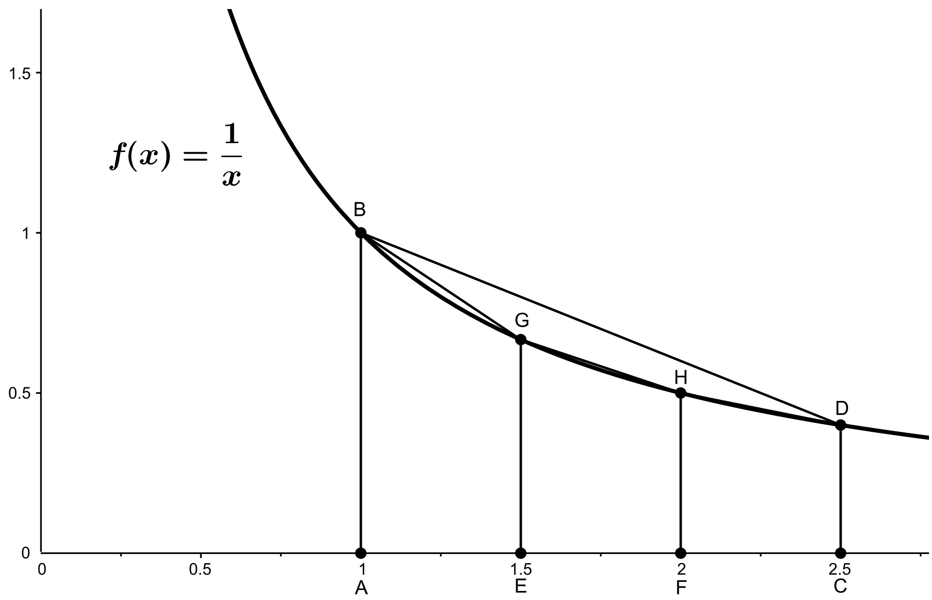
Temos ainda que $f(1) = \dfrac{1}{1} = 1$ e $f(2,5) = \dfrac{1}{2,5} = 0,4$.

Então, a área A_1 do trapézio $ABDC$ é $\dfrac{(1+0,4).1,5}{2} \approx 1,05$.

Fazendo uma nova partição da área abaixo do gráfico como na Figura 35, obtemos três trapézios, $ABGE$, $EGHF$ e $FHDC$, onde $E = (1,5; 0)$, $G = (1,5; f(1,5))$, $F = (2,0)$ e $H = (2, f(2))$.

Temos ainda que $f(1,5) = \dfrac{1}{1,5} = \dfrac{2}{3}$ e $f(2) = \dfrac{1}{2}$.

Figura 35 – Área sob $f(x) = \dfrac{1}{x}$ - Três trapézios



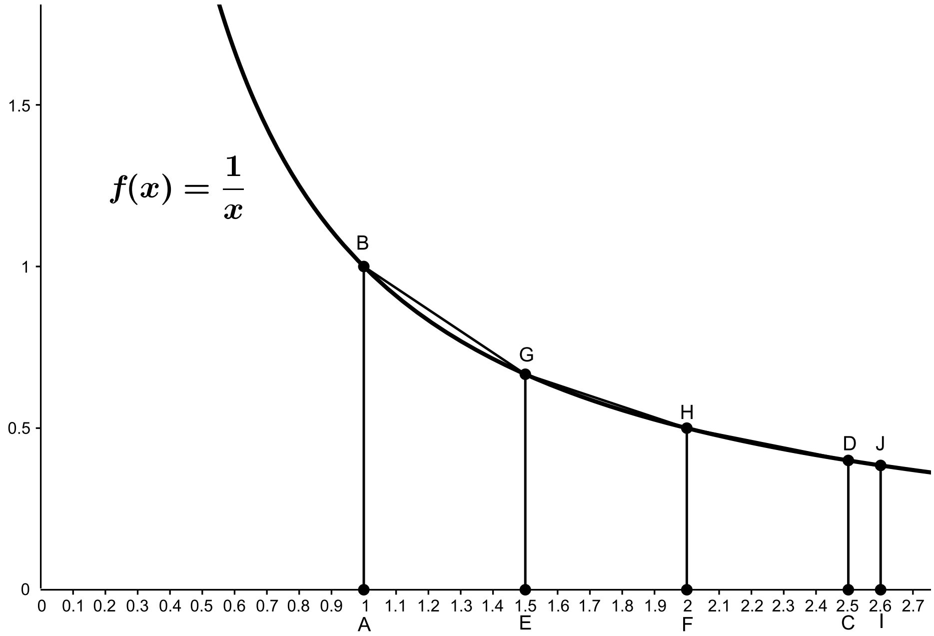
Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

Somando as áreas dos três trapézios (A_2), obteremos uma aproximação melhor para e.

$$A_2 = \left(1 + \frac{2}{3}\right)\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + 0,4\right)\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = 0,9325.$$

Como o valor da área ficou abaixo do esperado, vamos fazer um pequeno incremento na região abaixo da curva conforme indicado na Figura 36.

Figura 36 – Área sob $f(x) = \dfrac{1}{x}$ - Quatro trapézios



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

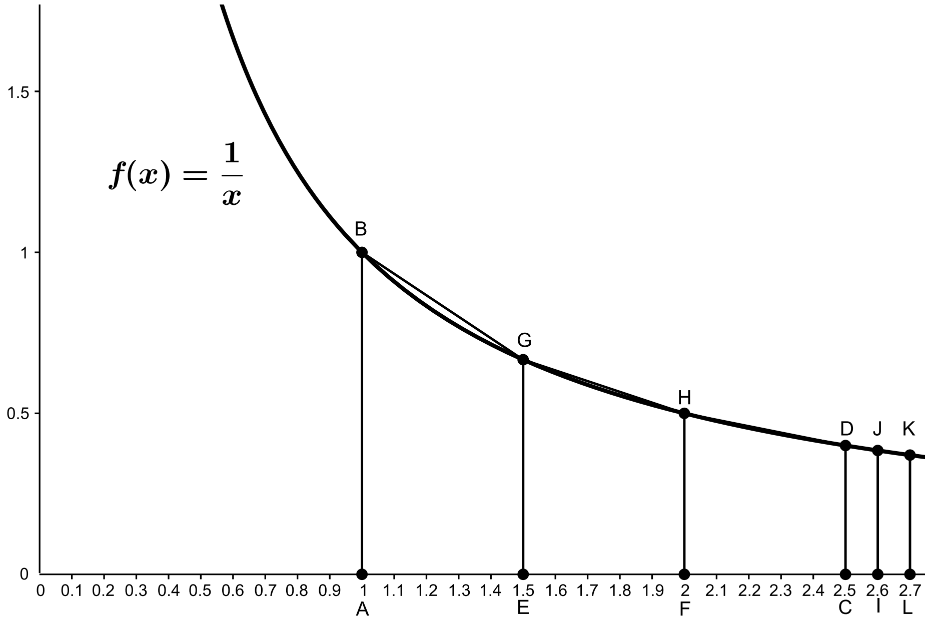
O novo incremento acrescenta um quarto trapézio $CDJI$ à figura, onde $I = (2,6;0)$ e $J = (2,6; f(2,6))$, e $f(2,6) = \dfrac{1}{2,6} = \dfrac{5}{13}$.

A nova área $A_3 = A_2 +$ área do trapézio $CDJI$.

Então, $A_3 = 0,9325 + \left(0,4 + \dfrac{5}{13}\right)\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} = 0,9725$.

Repetindo o processo, conforme Figura 37, acrescentamos o trapézio $IJKL$, onde $L = (2,7;0)$, $K = (2,7; f(2,7))$ e $f(2,7) = \dfrac{1}{2,7} = \dfrac{10}{27}$.

Figura 37 – Área sob $f(x) = \dfrac{1}{x}$ - Cinco trapézios



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

Então, a nova área $A_4 = A_3 +$ área do trapézio $IJKL$.

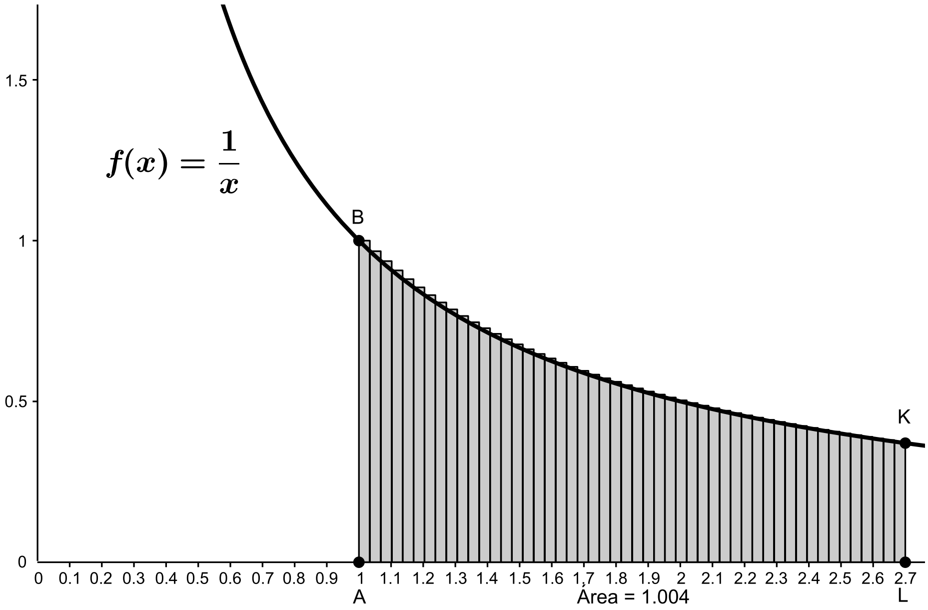
Logo, $A_4 = 0,9725 + \left(\dfrac{5}{13} + \dfrac{10}{27}\right)\dfrac{1}{10}.\dfrac{1}{2} = 1,0102.$

A área $A_4 = 1,0102$ já é uma boa aproximação, tendo em vista que procuramos uma área igual a 1. Assim sendo, o número $2,7$ também se torna uma boa aproximação para o número e.

Prosseguindo o processo de refinamento da área da região abaixo da curva de $f(x) = \dfrac{1}{x}$, certamente obteríamos uma precisão de mais casas decimais.

A Figura 38 mostra um refinamento melhor, com 50 retângulos, os quais, a área foi calculada com o auxílio do software Geogebra, e o valor encontrado foi $1,004$.

Figura 38 – Área sob $f(x) = \dfrac{1}{x}$ - Cinquenta retângulos



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

Então, podemos concluir que $e = \approx 2,7$.

EXEMPLO 3: Resolva a integral $\displaystyle\int_1^2 3x^2 dx$.

Solução

Primeiramente, precisamos encontrar uma primitiva para a função $f(x) = 3x^2$.

A primitiva mais simples para essa função é afunção $F(x) = x^3$.

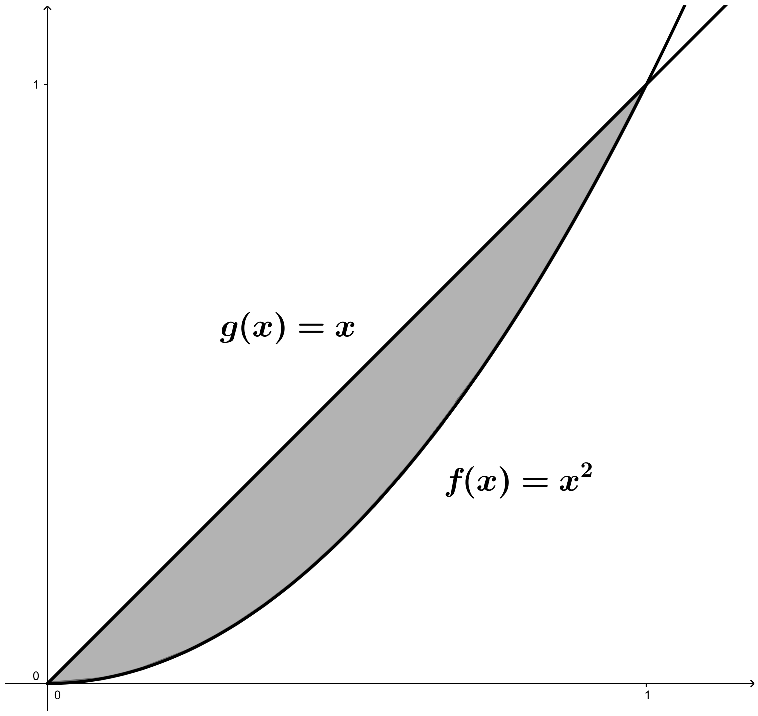
Então,

$$\begin{aligned}\int_1^2 3x^2 dx &= F(2) - F(1)\\ &= 2^3 - 1^3\\ &= 8 - 1\\ &= 7\end{aligned}$$

EXEMPLO 4: Encontre o valor da área entre os gráficos de x^2 e x (Figura 39).

Solução

Figura 39 – Área entre curvas 1



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

O primeiro passo é encontrar os limites de integração, que são os pontos de interseção das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$.

Precisamos resolver o sitema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases}$$

Do sistema temos

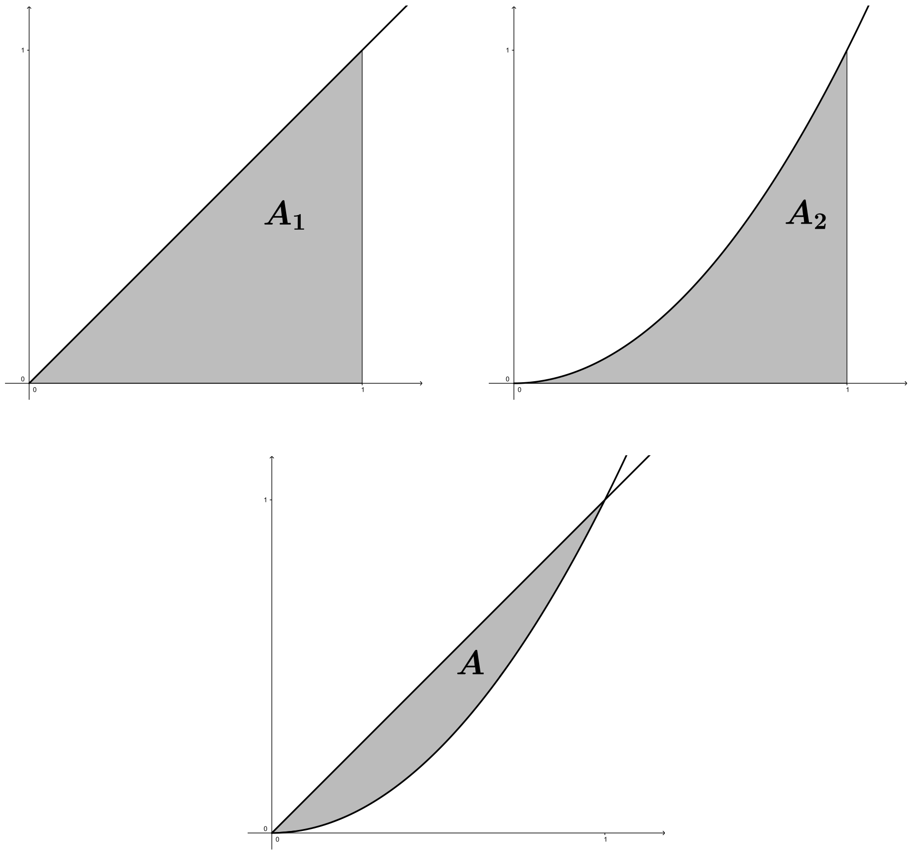
$$x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0$$

ou seja,

$$x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Note que a área A procura é o resultado de $A_1 - A_2$. Ver Figura 40.

Figura 40 – Área entre curvas 2



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

$$A_1 = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

Então,

$$A = A_1 - A_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$$

EXERCÍCIO 1: Resolva a integral $\int_1^2 [x^2(2 + x^4)]dx$.

EXERCÍCIO 2: Calcule a área entre os gráficos das funções $f(x) = x^2 - 4x + 5$ e $g(x) = x + 1$.

Materiais utilizados: Computador com software Geogebra ou similar e projetor, quadro e pincel.

Bibliografia:

STEWART, James. *Cálculo, volume 1.* 5ª ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

FLEMMING, Diva Marília. GONÇALVES, Mirian Buss. *Cálculo A. Funções, limite, derivação e integração.* 6ª ed. São Paulo: Pearson, 2007.

5.10 VOLUME E O MÉTODO DO DISCO

PLANO DE AULA 10

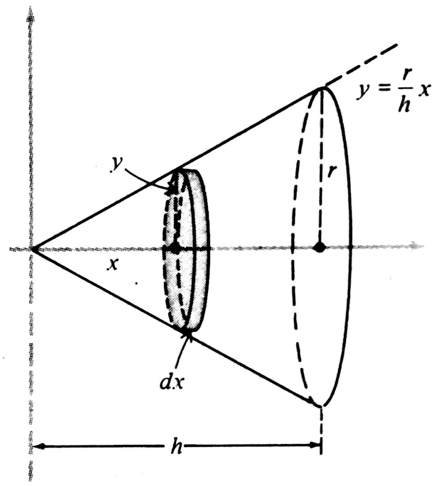
Nível: Educação básica.
Série: 3ª do EM.
Disciplina: Matemática.
Duração: 100 minutos.
Tema: Integral e volume.
Pré-requisitos: Gráficos, limite, derivada e integral definida.
Objetivo: Dar ao aluno noções de cálculo de volume utilizando Soma de Riemann e integral definida.

Volume pelo método do disco

Seja $y = f(x)$ uma função contínua num intervalo $[a, b]$. Se girarmos a curva dessa função ao redor do eixo x, tal curva juntamente com a região compreendida entre ela e o eixo das abscissas determinam um sólido chamado sólido de revolução.

Na Figura 41 temos a curva $y = \frac{r}{h}x$ que, girada em torno do eixo x no intevalo [0,h], gera um cone de revolução de altura h e raio da base r.

Figura 41 – Cone de revolução



Fonte: SIMMONS, George F.

Afim de calcularmos o volume desse cone, tomamos um cilindro de raio $r = y$ e altura infinitesimal dx. Tal cilindro se assemelha a um disco, por isso o método recebe esse nome. Quando calculamos a integral definida do elemento de volume desse cilindro, variando de 0 a h, obtemos o volume do cone, pois, o raio está indexado à função y que varia nesse intervalo.

Temos $dv = \pi y^2 dx \Rightarrow dv = \pi \dfrac{r^2}{h^2} x^2 dx$.

Logo, o volume do cone pode ser calculado fazendo

$$v = \int_0^h dv \Rightarrow v = \int_0^h \pi \frac{r^2}{h^2} x^2 dx \Rightarrow v = \left[\frac{\pi}{3} \frac{r^2}{h^2} x^3 \right]_0^h$$

$$v = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

O volume desse cone poderia ser calculado utilizando a Soma de Riemann na versão espacial conforme veremos nos exemplos 1 e 2.

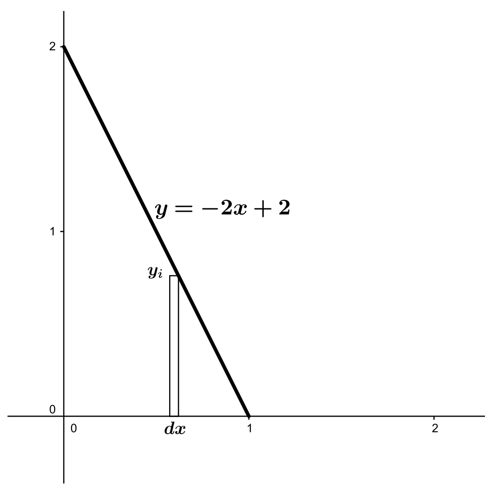
EXEMPLO 1: Determine o volume de um cone circular reto de altura $1m$ e raio da base $2m$.

Solução

Considere um cone de revolução a partir do giro do gráfico da função da Figura 42 em torno do eixo x.

Para calcular o volume do cone gerado, vamos considerar um pequeno cilindro de raio da base y_i e altura dx, cujo volume é $dv = \pi y_i^2 dx$, onde $dx = \dfrac{1}{n}$, se dividirmos o intervalo $[0, 1]$ em n partes, $x_i = \dfrac{i-1}{n}$ e $y_i = 2 - 2x_i$.

Figura 42 – Cone de raio 2m e altura 1m



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

Logo, $dv_i = \pi\left(2 - 2\dfrac{i-1}{n}\right)^2 . \dfrac{1}{n}$, ou seja, $dv_i = \dfrac{\pi}{n}\left(4 - 4.\dfrac{i-1}{n} + \left(\dfrac{i-1}{n}\right)^2\right)$.

Então, $dv = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} dv_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{n}\left(4 - 8.\frac{i-1}{n} + \left(\frac{i-1}{n}\right)^2\right)$.

Ou seja,

$$\begin{aligned}
dv &= \frac{\pi}{n}\left[\left(4 - 8.\frac{0}{n} + \left(\frac{0}{n}\right)^2\right) + \left(4 - 8.\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2\right) + ... + \left(4 - 8.\frac{n-1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right)\right] \\
&= \frac{\pi}{n}\left[(4 + 4 + ... + 4) - 8.\left(\frac{1}{n} + ... + \frac{n-1}{n}\right) + \left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + ... + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right)\right] \\
&= \frac{\pi}{n}\left[4n - 8.\left(\frac{(n-1)(n)}{2n}\right) + 4.\left(\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6n^2}\right)\right] \\
&= \pi\left[4 - 8.\left(\frac{(n-1)}{2n}\right) + 4.\left(\frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2}\right)\right]
\end{aligned}$$

Só que $V = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} dv$.

Logo,

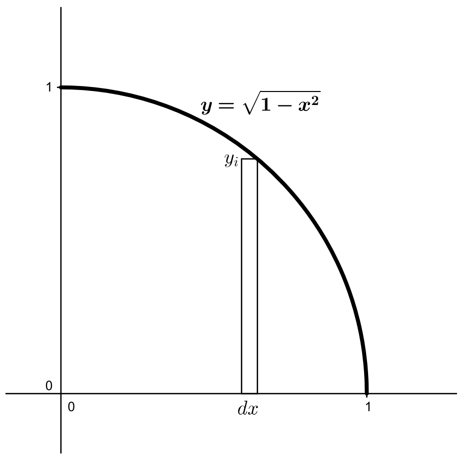
$V = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \pi\left[4 - 8.\left(\frac{(n-1)}{2n}\right) + 4.\left(\frac{2n^2-3n+1}{6n^2}\right)\right] = \pi\left[4 - 8.\left(\frac{1}{2}\right) + 4.\left(\frac{2}{6}\right)\right] = \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}m^3$

EXEMPLO 2: Determine o volume de uma esfera de raio 1m.

Solução

Considere uma semiesfera de revolução obtida a partir do giro do gráfico da função $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, Figura 43, em torno do eixo x.

Figura 43 – Gráfico da função $f(x) = \sqrt{1-x^2}$



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

Para calcular o volume da semiesfera gerada, vamos considerar um pequeno cilindro de raio da base y_i e altura dx, cujo volume é $dv = \pi y_i^2 dx$, onde $dx = \dfrac{1}{n}$. Se dividirmos o intervalo $[0,1]$ em n partes, $x_i = \dfrac{i-1}{n}$ e $y_i = \sqrt{1-x^2}$.

Logo, $dv_i = \pi\left[1 - \left(\dfrac{i-1}{n}\right)^2\right]\dfrac{1}{n}$.

Então, $dv = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} dv_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{\pi}{n}\left[1-\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\right]$.

Ou seja,

$$\begin{aligned} dv &= \frac{\pi}{n}\left[\left(1-\left(\frac{0}{n}\right)^2\right)+\left(1-\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)+...+\left(1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right)\right] \\ &= \frac{\pi}{n}\left[(1+1+...+1)-\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2+...+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right)\right] \\ &= \frac{\pi}{n}\left[n-\left(\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6n^2}\right)\right] \\ &= \pi\left[1-\left(\frac{2n^2-3n+1}{6n^2}\right)\right] \end{aligned}$$

Só que $\dfrac{V}{2} = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} dv$.

Logo,

$$\frac{V}{2} = \lim_{n\to+\infty}\pi\left[1-\left(\frac{2n^2-3n+1}{6n^2}\right)\right] = \pi\left(1-\frac{2}{6}\right) = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

Portanto, o volume da esfera é $V = \dfrac{4\pi}{3}m^3$

EXERCÍCIO 1: Um buraco tendo a forma de uma esfera de raio $\sqrt{2}$ é cavado do centro de uma esfera de raio 2. Calcule o volume restante.

EXERCÍCIO 2: Calcule o volume do sólido gerado quando giramos a região do primeiro quadrante compreendida entre as curvas $f(x) = 4 - x$ e $g(x) = x$ em torno do eixo x.

Materiais utilizados: Quadro e pincel.

Bibliografia: SIMMONS, George F. *Cálculo com geometria analítica, volume 1.* São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

6 CONCLUSÃO

Ao fim deste trabalho, espera-se que o aluno emergente do ensino médio tenha adquirido certa familiaridade com limites, pois, no ensino superior os assuntos aqui abordados serão tratados com mais profundidade.

Aos professores, recomenda-se aplicar os planos de aula procurando detalhar bastante cada um deles e explorar outros exemplos aqui omitidos, de acordo com a realidade de cada turma.

É essencial perceber a importância dos limites no ensino do cálculo, pois, é a partir dele que surge a ideia de derivada e integral. Mesclar exemplos de cálculo de áreas, volumes e outros, utilizando a definição com limites, com outros exemplos utilizando derivadas e integrais mais simples é primordial para destacar a praticidade do uso dessas ferramentas se comparadas com a utilização frequente das definições.

REFERÊNCIAS

[1] ALVES, Wellingon de Carvalho. *Projetando um ambiente de aprendizagem de Cálculo privilegiando a investigação e a tecnologia moderna.* Monografia de Especialização em Cálculo. UFMG, Belo Horizonte, 2007.

[2] BONJORNO, José Roberto. GIOVANNI, José Ruy. *Matemática completa, volume 3.* São Paulo: FTD, PNLEM 2009.

[3] BOULOS, Paulo. *Cálculo diferencial e integral, volume 1.* São Paulo: Pearson Makron Books, 1999.

[4] FINNEY, Ross L.; WEIR, Maurice D.; GIORDANO, Frank R. *Cálculo de George B. Thomas, volume 1.* 10ª ed. São Paulo: Addison Wesley, 2002.

[5] FLEMMING, Diva Marília. GONÇALVES, Mirian Buss. *Cálculo A. Funções, limite, derivação e integração.* 6ª ed. São Paulo: Pearson, 2007.

[6] GARZELLA, Fabiana Aurora Colombo. *A disciplina de Cálculo I: análise das relações entre as práticas pedagógicas do professor e seus impactos nos alunos.* Tese de Doutorado em Educação. UNICAMP, Campinas, 2013.

[7] GUIDORIZI, Hamilton Luiz. *Um curso de cálculo, volume 1.* 5ª ed. São Paulo: LTC, 2001.

[8] IEZZI, Gelson, et al. *Fundamentos de matemática elementar, volume 8.* São Paulo: Atual, 1977-1983.

[9] O BARICENTRO DA MENTE. *Demonstração da Área do Círculo.* Disponível em: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2009/08/demonstracao-da-area-do-circulo.html> Acesso em 01 de julho de 2016, as 23:18h.

[10] SIMMONS, George F. *Cálculo com geometria analítica, volume 1.* São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

[11] STEWART, James. *Cálculo, volume 1.* 5ª ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

APÊNDICE A – RESPOSTA DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

A.1 VELOCIDADE MÉDIA E INSTANTÂNEA

Exercício

Um objeto é solto de um avião e sua posição em função do tempo é dada pela equação $x(t) = 3,5t^2$, onde t é o tempo de queda em segundos.

a) Determine a velocidade média desse objeto nos primeiros dois segundos de queda.

Solução

$$\begin{aligned} V_m &= \frac{x(2) - x(0)}{2 - 0} \\ &= \frac{-3,5.2^2 + 3,5.0^2}{2} \\ &= \frac{-3,5.4 + 3,5.0}{2} \\ &= \frac{-14 + 0}{2} \\ &= -7 \end{aligned}$$

b) Construa uma tabela relacionando a velocidade média V_m e o tempo $t = 2 + h$ para pequenos incrementos de tempo h conforme o exemplo anterior.

Solução

$$\begin{aligned} V_m &= \frac{x(2+h) - x(2)}{h} \\ &= \frac{-3,5.(2+h)^2 + 3,5.2^2}{h} \\ &= \frac{-3,5.(4 + 4h + h^2) + 3,5.4}{h} \\ &= \frac{-14 - 14h - 3,5h^2 + 14}{h} \\ &= \frac{-14h - 3,5h^2}{h} \\ &= -14 - 3,5h \end{aligned}$$

A tabela abaixo mostra alguns valores de V_m para incrementos de h cada vez menores.

h	$V_m = 14 + 3,5h$
2,0000000	21,0000000
0,4000000	15,4000000
0,0800000	14,2800000
0,0160000	14,0560000
0,0032000	14,0112000
0,0006400	14,0022400
0,0001280	14,0004480
0,0000256	14,0000896
0,0000051	14,0000179
0,0000010	14,0000036

c) Determine a velocidade instantânea desse objeto no tempo $t = 2s$

Solução

$$\begin{aligned} V_i &= \lim_{h\to 0} V_m \\ &= \lim_{h\to 0}(14 + 3,5h) \\ &= 14 \end{aligned}$$

A.2 TAXA DE VARIAÇÃO

Exercício

Determine a derivada das funções abaixo utilizando a definição da equação 5.2.

a) $f(x) = 3x^2 - x + 4$

Solução

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h)^2 - (x+h) + 4 - (3x^2 - x + 4)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3(x^2 + 2xh + h^2) - x - h + 4 - 3x^2 + x - 4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - h - 3x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{6xh + 3h^2 - h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 6x + 3h - 1 \\
&= 6x - 1
\end{aligned}$$

b) $g(x) = \dfrac{1}{x}$

Solução

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{x - x - h}{(x+h)(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{(x+h)(x)} \frac{1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h)(x)} \\
&= \frac{-1}{x^2}
\end{aligned}$$

A.3 TAXAS RELACIONADAS

Exercício 1

Uma escada com 6m de comprimento está apoiada numa parede de 3,6m de altura, num ponto abaixo do seu topo. Sua base escorrega se afastando da parede a uma taxa de 1,5m/min. A que velocidade o topo da escada se aproxima do chão quando ele está a 1,5m do ponto mais alto da parede?

Solução

A escada apoiada na parede a uma altura y metros do chão, com seu pé distante dela x metros, forma com esses dois um triângulo retângulo de hipotenusa 6m. Dessa forma, $x^2 + y^2 = 36$.

Derivando em relação ao tempo, temos

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow y\frac{dy}{dt} = -x\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

Quando o topo da escada está a 1,5m do ponto mais alto da parede, esse se encontra a 2,1m do chão.

Como $x^2 + y^2 = 36$, temos $x = sqrt(36 - (2,1)^2) = 5,6m$.

Dessa forma,

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{5,6.1,5}{2,1} = -4,0m/min$$

Exercício 2

Um balão esférico perde ar por um furo de tal forma que seu raio diminui a uma taxa de $2cm/min$. Qual a taxa de diminuição do volume, quando o raio do balão é r=50cm?

Solução

Sabemos que o volume v do balão de raio r é $v = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Derivando em relação ao tempo, temos $\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$.

Como $\frac{dr}{dt} = 2cm/min$, temos

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi.50^2.2 = 20000\pi cm^3/min = 20\pi L/min$$

A.4 MÁXIMOS E MÍNIMOS

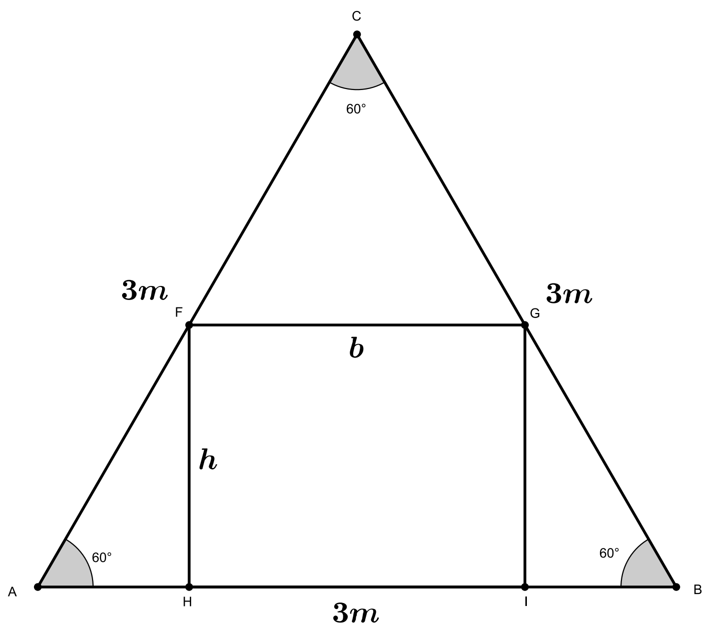
Exercício 1

De todos os retângulos inscritos em um triângulo equilátero de lado $3m$, determine as dimensões do que possui maior área.

Solução

A ilustração da Figura 44 descreve a situação genérica de um retângulo $FGHI$ qualquer de base b e altura h inscrito e um triângulo equilátero ABC de lado $3m$.

Figura 44 – Retângulo inscrito no triângulo



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

Como o triângulo é equilátero, facilmente se chega ao valor de sua altura utilizando o teorema de pitágoras ou seno, que é de $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

A Figura 45 destaca o segmento CL, que é a altura do triângulo CFG formado quando inscrevemos o retângulo $FGHI$ no triângulo ABC.

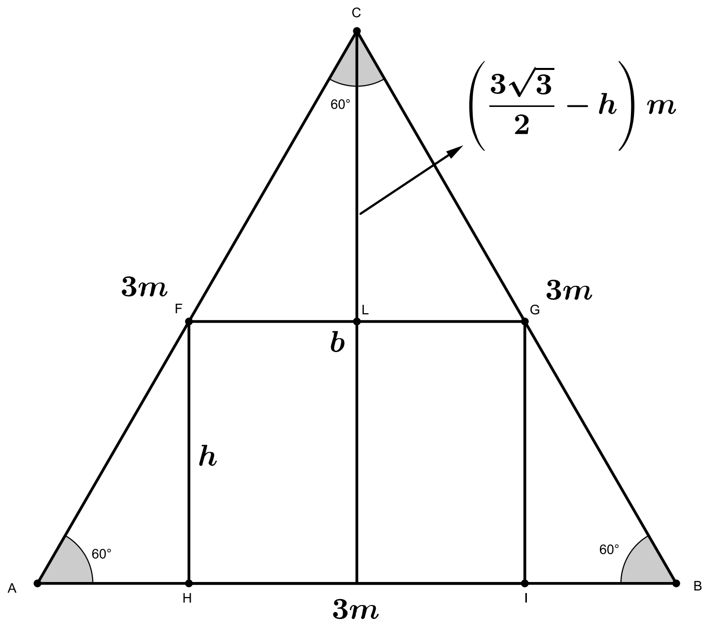
Como a altura do triângulo ABC mede $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, temos

$$CL = \frac{3\sqrt{3}}{2} - h = \frac{3\sqrt{3} - 2h}{2}$$

.

É fácil ver que o triângulo CFG também é equilátero, e seu lado mede b, que é a base do retângulo $FGHI$, como ilustra a Figura 46.

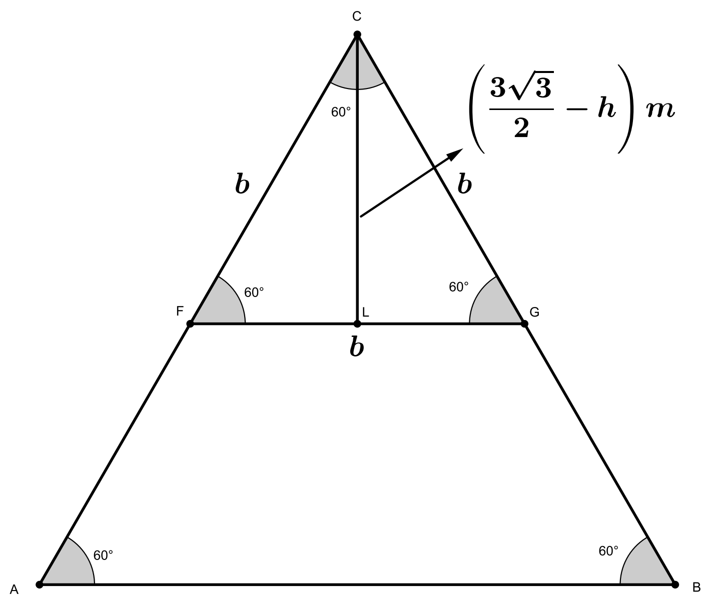
Figura 45 – Altura de triângulo equilátero CFG



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

Como o lado do triângulo CFG é b, então, sua altura mede $\dfrac{b\sqrt{3}}{2}$, que também é o segmento CL.

Figura 46 – Triângulo equilátero CFG de lado b



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

Dessa forma, temos

$$\frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3} - 2h}{2} \Rightarrow b\sqrt{3} = 3\sqrt{3} - 2h \Rightarrow b = 3 - \frac{2h}{\sqrt{3}} \Rightarrow b = 3 - \frac{2\sqrt{3}h}{3}$$

Chamaremos a área do retângulo $FGHI$ de $S = bh$.

Como $b = 3 - \frac{2\sqrt{3}h}{3}$, temos

$$S = \left(3 - \frac{2\sqrt{3}h}{3}\right) h \Rightarrow S = 3h - \frac{2\sqrt{3}h^2}{3}$$

Para determinarmos o retângulo de maior área, precisamos determinar o valor de h tal que $S' = 0$.

$$S'(h) = 3 - \frac{4\sqrt{3}h}{3}$$

Então,

$$3 - \frac{4\sqrt{3}h}{3} = 0 \Rightarrow \frac{4\sqrt{3}h}{3} = 3 \Rightarrow h = \frac{9}{4\sqrt{3}} \Rightarrow h = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Como $b = 3 - \frac{2\sqrt{3}h}{3}$, temos

$$b = 3 - \frac{2\sqrt{3}}{3}.\frac{3\sqrt{3}}{4} = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Portanto, o retângulo de maior área possui dimensões $h = \frac{3\sqrt{3}}{4}m$ e $b = \frac{3}{2}m$.

Exercício 2

Um artesão vende, por dia, x unidades de um determinado artigo por $V(x) = x^2 - x$. Sendo o custo da produção $C(x) = 2x^2 - 7x + 8$, quantas unidades devem ser vendidas diariamente, de modo que se obtenha o maior lucro possível?

Solução

Chamaremos o lucro do artesão de $L(x)$, onde $L(x) = V(x) - C(x)$. Então,

$$L(x) = x^2 - x - (2x^2 - 7x + 8) = -x^2 + 6x - 8$$

Para que o lucro seja máximo, devemos ter $L'(x) = 0$, onde $L'(x) = -2x + 6$.

Assim,

$$L'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

Logo, devem ser vendidos por dia, 3 unidades dos artigos produzidos pelo artesão para que ele obtenha o lucro máximo.

A.5 PRIMITIVAS E INTEGRAL INDEFINIDA

Exercício 1

Encontre a família de primitivas para a integral $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$.

Solução

Seja $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.

Queremos encontrar uma família de funções $F(x) + c$, tal que, $F'(x) = f(x)$.

Vamos supor que $F(x)$ assuma a forma $F(x) = ax^p$, onde, $a, p \in R^*$.

Então,

$$F'(x) = (ax^p)' = apx^{p-1}$$

Como $F'(x) = f(x)$, temos

$$apx^{p-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

ou seja,

$$ap = \frac{1}{2} \text{ e } p - 1 = -\frac{1}{2}$$

Logo,

$$p - 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow p = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

e

$$ap = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

Então, $F(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

Exercício 2

Um corpo inicialmente em repouso é solto de uma altura de $100m$ em relação ao solo. Utilizando as técnicas de primitivação, determine o tempo necessário para esse corpo atingir o solo. (Utilize $g = 10m/s^2$)

Solução

Como $g = \frac{dv}{dt}$, temos $V(t) = \int -10dt$, ou seja,

$$V(t) = -10t + c_1$$

Como o corpo está inicialmente em repouso, sabemos que $V(0) = 0$, ou seja

$$-10.0 + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

Logo, $V(t) = -10t$.

Sabemos também que $V(t) = \dfrac{dx}{dt}$, ou seja,

$$x(t) = \int -10t dt = -5t^2 + c_2$$

Mas como o corpo foi solto a uma altura de $100m$, temos

$$-5.0^2 + c_2 = 100 \Rightarrow c_2 = 100$$

Logo $x(t) = -5t^2 + 100$.

Para que o corpo atinja o solo, devemos ter $x(t) = 0$. Então,

$$-5t^2 + 100 = 0 \Rightarrow t^2 = \frac{100}{5} \Rightarrow t = \sqrt{20} \approx 4,47s$$

A.6 SOMA DE RIEMANN E INTEGRAL DEFINIDA

Exercício 1

Resolva a integral $\int_1^2 [x^2(2+x^4)]dx$.

Solução

Para simplificar a visualização da integral, podemos escrevê-la da seguinte forma $\int_1^2 (2x^2+x^6)]dx$.

Uma primitiva para a função $f(x) = 2x^2 + x^6$ é a função $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{7}x^7$.

Então,

$$\begin{aligned}
\int_1^2 (2x^2+x^6)]dx &= \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{7}x^7\right]_1^2 \\
&= \left(\frac{2}{3}.2^3 + \frac{1}{7}.2^7\right) - \left(\frac{2}{3}.1^3 + \frac{1}{7}.1^7\right) \\
&= \left(\frac{16}{3} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{128}{7} - \frac{1}{7}\right) \\
&= \frac{14}{3} + \frac{127}{7} \\
&= \frac{98+381}{21} \\
&= -\frac{479}{21}
\end{aligned}$$

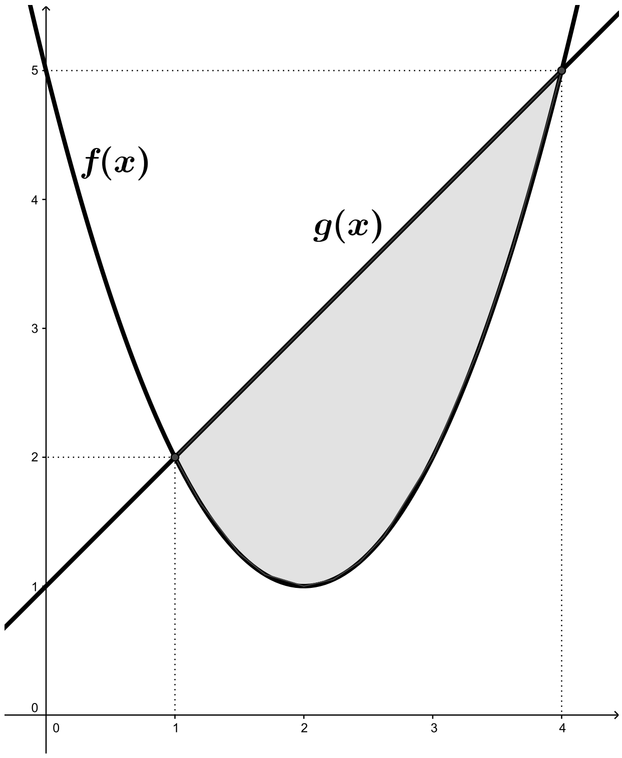
Exercício 2

Calcule a área entre os gráficos das funções $f(x) = x^2 - 4x + 5$ e $g(x) = x + 1$.

Solução

Para entender melhor qual é a área a ser calculada, é interessante produzir um gráfico sempre que possível. Observe a Figura zrefexarea.

Figura 47 – Área entre curvas



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

O primeiro passo é encontrar os limites de integração, que são os pontos de interseção das funções $f(x) = x^2 - 4x + 5$ e $g(x) = x + 1$.

Precisamos resolver o sitema

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

Do sistema, temos

$$x^2 - 4x + 5 = x + 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

ou seja,

$$x = 1 \text{ ou } x = 4$$

Então, a área que procuramos pode ser calculada fazendo

$$\int_1^4 (x+1)dx - \int_1^4 (x^2 - 4x + 5)dx \quad = \quad \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_1^4 - \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x\right]_1^4$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
\int_1^4 (x+1)dx &= \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_1^4 \\
&= \left(\frac{1}{2}.4^2 + 4\right) - \left(\frac{1}{2}.1^2 + 1\right) \\
&= \frac{15}{2} + 3 \\
&= \frac{15+6}{2} \\
&= \frac{21}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^4 (x^2 - 4x + 5)dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x\right]_1^4 \\
&= \left(\frac{1}{3}4^3 - 2.4^2 + 5.4\right) - \left(\frac{1}{3}1^3 - 2.1^2 + 5.1\right) \\
&= \frac{63}{3} - 30 + 15 \\
&= \frac{63-45}{3} \\
&= \frac{18}{3}
\end{aligned}$$

Então,

$$\int_1^4 (x+1)dx - \int_1^4 (x^2 - 4x + 5)dx = \frac{21}{2} - \frac{18}{3} = \frac{63-36}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

A.7 VOLUME E O MÉTODO DO DISCO

Exercício 1

Um buraco tendo a forma de uma esfera de raio $\sqrt{2}$ é cavado do centro de uma esfera de raio 2. Calcule o volume restante.

Solução

A esfera descrita pode ser obtida girando o círculo $x^2 + y^2 = 4$ em torno do eixo x.

Utilizando o método do disco, o elemento de volume $dv_1 = \pi y^2 dx$, donde $y^2 = 4 - x^2$.

Logo,

$$v_1 = 2\int_0^2 \pi(4-x^2)dx = 2\pi\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 2\pi\left(4.2 - \frac{2^3}{3}\right) = \frac{32\pi}{3}$$

Analogamente ao processo acima, o volume retirado da esfera pode ser calculado pelo sólido de revolução obtido girando-se $x^2 + y^2 = 2$ em torno do eixo x.

Logo,

$$v_2 = 2\int_0^{\sqrt{2}} \pi(2-x^2)dx = 2\pi\left[2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi\left(2\sqrt{2} - \frac{(\sqrt{2})^3}{3}\right) = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$$

Assim, o volume restante é $v = v_1 - v_2 = \dfrac{32\pi}{3} - \dfrac{8\pi\sqrt{2}}{3} = \dfrac{8\pi}{3}(4 - \sqrt{2})$.

Exercício 2

Calcule o volume do sólido gerado quando giramos a região do primeiro quadrante compreendida entre as curvas $f(x) = 4 - x$ e $g(x) = x$ em torno do eixo x.

Solução

Primeiramente, é necessário identificar os limites de integração resolvendo o sistema

$$\begin{cases} y = 4 - x \\ y = x \end{cases}$$

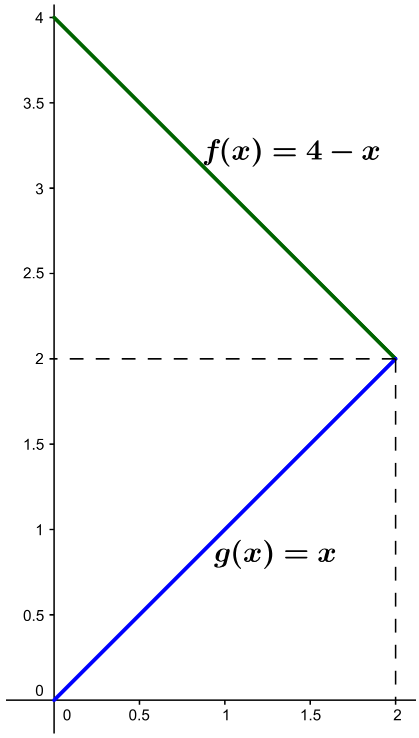
Por comparação, temos

$$x = 4 - x \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

Como a região a ser girada se encontra no primeiro quadrante, o sólido formado estará no primeiro e no quarto quadrantes.

Logo, o intervalo de integração será $[0, 2]$.

Figura 48 – Volume entre curvas



Fonte: DE PAULA, Davidson Mendes Ferreira

A Figura 48 ilustra a situação inicial.

O volume v do sólido de revolução obtido girando a região do primeiro quadrante interna às curvas f e g pode ser obtido fazendo

$$v = \int_0^2 \pi f^2 dx - \int_0^2 \pi g^2 dx = \int_0^2 \pi(f^2 - g^2)dx = \int_0^2 \pi(16 - 8x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \left[16x - 4x^2\right]_0^2 = \pi \left(16.2 - 4.2^2\right) = 16\pi$$

APÊNDICE B – PROPRIEDADES DE LIMITE

B.1 LIMITE DA FUNÇÃO CONSTANTE

Se $f(x) = k$, $\forall\ x \in R \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = k$

Demonstração

De fato, dado $\epsilon > 0$,

$$|f(x) - k| < \epsilon \Rightarrow |k - k| < \epsilon \Rightarrow 0 < \epsilon$$

ou seja, independente de δ, $|f(x) - k| < \epsilon$.

Logo, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = k$

B.2 MULTIPLICAÇÃO POR CONSTANTE

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = F$ e k uma constante, então, $\lim\limits_{x \to a} kf(x) = kF$

Demonstração

Se $k = 0$, então $kf(x) = 0.f(x) = 0$. Pela propriedade 1, $\lim\limits_{x \to a} 0.f(x) = \lim\limits_{x \to a} 0 = 0 = 0.F$.

Se $k \neq 0$, como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = F$, dado $\epsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - F| < \dfrac{\epsilon}{|k|}$, pois, podemos reduzir o quanto quisermos o valor de ϵ que sempre obteremos um δ correspondente.

Então,

$$|k||f(x) - F| < |k|.\frac{\epsilon}{|k|} \Rightarrow |kf(x) - kF| < \epsilon$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to a} kf(x) = kF$.

B.3 LIMITE DA SOMA

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = F$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = G$, então, $\lim\limits_{x \to a}(f + g)(x) = F + G$

Demonstração

Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = F$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = G$, então, dado $\epsilon > 0$,
$\exists\ \delta_1 > 0$ tal que, $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - F| < \dfrac{\epsilon}{2}$ e
$\exists\ \delta_2 > 0$ tal que, $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - G| < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Se escolhermos $\delta = mín \delta_1, \delta_2$, então,

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - F| + |g(x) - G| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Pela desigualdade triangular, $|(f(x) - F) + (g(x) - G)| \leq |f(x) - F| + |g(x) - G|$.

Então, $|(f(x) + g(x)) - (F + G)| < \epsilon$.

Portanto, $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = F + G$.

B.4 LIMITE DA DIFERENÇA

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = F$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = G$, então, $\lim\limits_{x \to a} (f - g)(x) = F - G$.

Demonstração

Pela propriedade 3, temos

$$\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to a} (f(x) + (-g(x))) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} (-1)g(x)$$

Pela propriedade 2, temos

$$\lim_{x \to a} (-1)g(x) = -1. \lim_{x \to a} g(x)$$

Então, $\lim\limits_{x \to a} (f(x) - g(x)) = F - G$.

B.5 LIMITE DO PRODUTO

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = F$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = G$, então, $\lim\limits_{x \to a} (f.g)(x) = F.G$.

Demonstração

$|f(x)g(x) - FG| = |f(x)g(x) - Fg(x) + Fg(x) - FG| = |(f(x) - F)g(x) + F(g(x) - G)|$

Pela desigualdade triangular, temos

$|(f(x) - F)g(x) + F(g(x) - G)| \leq |(f(x) - F)g(x)| + |F(g(x) - G)| = |f(x) - F||g(x)| + |F||g(x) - G|$

Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = F$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = G$, dado $\epsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - F| < \dfrac{\epsilon}{2k}$, $|g(x) - G| < \dfrac{\epsilon}{2|F|}$ e $|g| < k$, $k > 0$.

Então, $|f(x) - F||g(x)| < \dfrac{\epsilon}{2k}.k = \dfrac{\epsilon}{2}$ e $|F||g(x) - G| < |F|\dfrac{\epsilon}{2|F|} = \dfrac{\epsilon}{2}$.

Ou seja, $|f(x) - F||g(x)| + |F||g(x) - G| < \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Portanto, $\lim\limits_{x \to a} (f.g)(x) = F.G$

B.6 LIMITE DO QUOCIENTE

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = F$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = G$ e $G \neq 0$, então, $\lim\limits_{x\to a}(\frac{f}{g})(x) = \frac{F}{G}$

Demonstração

Como $\lim\limits_{x\to a} g(x) = G$, dado $\epsilon > 0$, $\exists\ \delta_1 > 0$ tal que, $0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - G| < \epsilon = \frac{|G|}{2}$.

Ou seja, $-\frac{|G|}{2} < g(x) - G < \frac{|G|}{2} \Rightarrow G - \frac{|G|}{2} < g(x) < G + \frac{|G|}{2}$.

Se $G > 0$, então, $0 < \frac{G}{2} < g(x) < \frac{3G}{2}$.

Se $G < 0$, então, $\frac{3G}{2} < g(x) < \frac{G}{2} < 0$.

De toda forma, $\frac{|G|}{2} < |g(x)|$.

Então, chamando $k = \frac{|G|}{2}$, dado $\epsilon > 0$, $\exists\ \delta_1 > 0$ tal que, $0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow 0 < k < |g(x)| \Rightarrow 0 < \frac{1}{|g(x)|} < \frac{1}{k}$, com $g(x) \neq 0$ e $G \neq 0\ \forall$ x..

E como $\lim\limits_{x\to a} g(x) = G$, dado $\epsilon > 0$, $\exists\ \delta_2 > 0$ tal que, $0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)-G| < \epsilon.k.|G|$.

Tomando δ =mín$\{\delta_1, \delta_2\}$, temos $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \frac{1}{|G|}.\frac{1}{|g(x)|}.|g(x) - G| < \frac{1}{|G|}.\frac{1}{k}.\epsilon.k.|G|$, com $g(x) \neq 0$ e $G \neq 0\ \forall$ x.

Então, $\frac{|g(x) - G|}{|G||g(x)|} < \epsilon \Rightarrow \left|\frac{g(x) - G}{G.g(x)}\right| < \epsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{G} - \frac{1}{g(x)}\right| < \epsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{g(x) - G}\right| < \epsilon$

Pela propriedade 5, Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = F$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = G$, dado $\epsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que, $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} f(x).\frac{1}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} f(x).\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{g(x)} = \frac{F}{G}$.

APÊNDICE C – LIMITE EXPONENCIAL FUNDAMENTAL

Queremos provar que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

Inicialmente, faremos a seguinte substituição, $h = \dfrac{1}{x}$. Observe que quando $x \to \infty$, $y \to 0$.

Assim, temos $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}$.

Temos ainda $(1+y)^{\frac{1}{y}} = e^{ln(1+y)^{\frac{1}{y}}} = e^{\frac{1}{y}ln(1+y)} = e^{\frac{ln(1+y)-ln(1)}{y}}$, pois, $ln(1) = 0$.

Então, $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = \lim\limits_{y\to 0} e^{\frac{ln(1+y)-ln(1)}{y}} = e^{\lim_{y\to 0}\frac{ln(1+y)-ln(1)}{y}}$, pois, e^x é função contínua.

Mas, $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{ln(1+y)-ln(1)}{y} = ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$.

Portanto, $e^{\lim_{y\to 0}\frac{ln(1+y)-ln(1)}{y}} = e^1 = e$.