

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Pós-Graduação em Educação Matemática
Mestrado Profissional em Educação Matemática

Hernando José Rocha Franco

**Os diversos conflitos observados em alunos de licenciatura
num curso de Álgebra: Identificação e análise**

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Santana Soares

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Juiz de Fora (MG)
Dezembro, 2011

Franco, Hernando José Rocha.

Os diversos conflitos observados em alunos de licenciatura num curso de Álgebra : identificação e análise / Hernando José Rocha Franco. – 2011.

100 f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática)–
Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2011.

1. Álgebra abstrata. 2. Educação matemática. I. Título.

CDU 512

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Pós-Graduação em Educação Matemática
Mestrado Profissional em Educação Matemática

Hernando José Rocha Franco

**Os diversos conflitos observados em alunos de licenciatura
num curso de Álgebra: Identificação e análise**

Juiz de Fora (MG)
Dezembro, 2011

Hernando José Rocha Franco

**Os diversos conflitos observados em alunos de licenciatura
num curso de Álgebra: Identificação e análise**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Carlos Alberto Santana Soares
Orientador

Prof. Dr. Frederico da Silva Reis

Prof. Dr. Adlai Ralph Detoni

Aprovado em / /

Dedico este trabalho à minha família:

*À minha amada mãe, Maria José, por ter feito de sua vida um exemplo de dignidade,
amor e dedicação aos que estão a sua volta.*

*Ao meu saudoso pai, Francisco, por mostrar-me que sempre são possíveis
reencontros.*

*À Cláudia, minha querida esposa, por compartilhar comigo sua vida, nas alegrias e
nas adversidades do caminho.*

*À Fernanda, minha amada filha, pelo exercício diário de um sentimento que não
precisa de explicações.*

Aos meus estimados irmãos, Toti e Ju, com quem posso contar incondicionalmente.

Ao meu sobrinho, Dioguinho; valeu garoto!

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer aos que compartilharam comigo esta caminhada...

A Deus, fonte maior de inspiração.

Ao prof. Aristóteles (tio Totinho), que com sua sabedoria e aconselhamentos faz-se sempre importante nas minhas decisões profissionais.

Ao Ignácio, com quem o convívio nos tornou muito mais que cunhados, um amigo de todas as horas.

Ao meu orientador, prof. Carlos Alberto, a quem admiro pela competência. Obrigado pela sua dedicada orientação e pelo incentivo permanente no desenvolvimento deste trabalho.

Aos membros da banca, prof. Adlai e prof. Frederico, pelo empenho demonstrado desde o exame de qualificação, cujas correções e/ou sugestões mostraram-se extremamente valiosas para a continuidade da dissertação.

Aos professores do Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática da UFJF, com os quais tive o privilégio do convívio e a oportunidade de crescimento: prof. Amarildo, prof^a. Regina, prof^a. Maria Cristina, prof. Orestes, prof. Olímpio, prof. Marco Aurélio, prof. Ilaim.

A todos os colegas de Mestrado que compartilharam comigo suas experiências profissionais e de vida, seus conhecimentos, além de momentos de pura descontração que nos deram a certeza de não estarmos sozinhos.

EPÍGRAFE

*“A mente que se abre a uma nova idéia
Jamais volta ao seu tamanho original.”
(Albert Einstein)*

RESUMO

Neste trabalho, investigam-se os conflitos de aprendizagem que emergem quando estudantes de Licenciatura em Matemática estão diante de um primeiro curso de Álgebra Abstrata. Ao longo de um semestre, acompanhamos doze alunos, licenciandos em Matemática, durante as aulas da disciplina Álgebra I, cuja ementa contempla os conceitos de anéis, ideais, corpos e polinômios. O estudo fundamentou-se nos processos constituintes do Pensamento Matemático Avançado, na teoria da imagem e definição conceituais e nos níveis de sofisticação do pensamento matemático – procedimento, processo e proceito. Outros subsídios teóricos vieram com o levantamento de aspectos históricos da Álgebra como Ciência e como disciplina curricular da Educação Matemática. O contato direto com a turma durante as aulas, a aplicação de questionários e a observação das avaliações possibilitaram a coleta dos dados da pesquisa. Identificadas as dificuldades de aprendizagem, buscamos discuti-las à luz das interações entre a definição formal do objeto matemático e as imagens conceituais que os alunos formaram desse objeto. Ao final, apresentamos uma categorização dos conflitos analisados com base nas compreensões do fenômeno estudado.

Palavras – Chave: Álgebra Abstrata. Imagem conceitual. Definição formal. Conflitos cognitivos. Pensamento matemático avançado.

ABSTRACT

In this work, the learning conflicts are investigated that emerge when students of degree in Mathematics are ahead of a first course of Abstract Algebra. Throughout a semester we follow twelve pupils, undergraduates in Mathematics, during the lessons of disciplines Algebra I, whose summary contemplates the ring concepts, ideals, fields and polynomials. The study it was based on the constituent processes of the Advanced Mathematical Thinking, on the theory of the conceptual image and definition and on the levels of sophistication of the mathematical thinking - procedure, process and procept. Other theoretical subsidies had come with the survey of historical aspects of Algebra as Science and as discipline curricular of the Mathematical Education. The direct contact with the group during the lessons, the application of questionnaires and the comment of the evaluations makes possible the collection of the data of the research. Identified the learning difficulties, we search discutiz them it the light of the interactions between the formal definition of the mathematical object and the conceptual images that the pupils had formed of this object. To the end, we present a categorization of the analyzed conflicts on the basis of the understandings of the studied phenomenon.

Keywords: Abstract Algebra. Concept image. Formal definition. Cognitive conflicts. Advanced mathematical thinking.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Inter-relacionamento entre imagem e definição.....	37
Figura 2 – Constituição da imagem conceitual via definição formal.....	38
Figura 3 – Dedução formal pura.....	39
Figura 4 – Dedução que segue o pensamento intuitivo.....	40
Figura 5 – Ação recíproca entre as células.....	40
Figura 6 – Resposta intuitiva.....	41
Figura 7 – Equivalência entre definição formal e imagem conceitual.....	42
Figura 8 – Desenvolvimento na execução dos processos matemáticos.....	43
Figura 9 – Resolução apresentada na 1ª prova referente às propriedades de anel..	56
Figura 10 – Resolução apresentada na 1ª prova referente às propriedades de anel	57
Figura 11 – Resolução apresentada na 2ª prova sobre as propriedades de ideal.....	66
Figura 12 – Resolução apresentada na 2ª prova sobre as propriedades de ideal.....	67
Figura 13 – Metáfora do conjunto quociente.....	72
Figura 14 – Resolução apresentada na 3ª prova referente ao conceito de isomorfismo.....	75

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	12
CAMINHOS QUE ME CONDUZIRAM A ESTA PESQUISA	12
PERTINÊNCIA DO ESTUDO	14
QUESTÃO DE INVESTIGAÇÃO	16
O OBJETIVO DA PESQUISA	16
ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	17
1. DOS FUNDAMENTOS HISTÓRICOS PARA A DISCIPLINA DE ÁLGEBRA: algumas questões e pesquisas na perspectiva da Educação Matemática	19
1.1 ASPECTOS HISTÓRICOS DA ÁLGEBRA MODERNA	19
1.1.1 A consolidação da Álgebra Abstrata	22
1.2 A ÁLGEBRA NO ENSINO BRASILEIRO	25
1.3 CONCEPÇÕES SOBRE A EDUCAÇÃO ALGÉBRICA	28
2. PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO: elementos e níveis de sofisticação	31
2.1 UM POUCO SOBRE O PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO	31
2.2 IMAGEM CONCEITUAL E DEFINIÇÃO CONCEITUAL	34
2.2.1 Interações entre definição e imagem conceituais	37
2.3 NÍVEIS DE SOFISTICAÇÃO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO	42
3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	46
3.1 A OPÇÃO METODOLÓGICA	46
3.2 O CONTEXTO DA PESQUISA DE CAMPO	49
4. APRESENTANDO E DISCUTINDO OS DADOS DA PESQUISA	50
4.1 O QUE NOS REVELARAM OS QUESTIONÁRIOS	50
4.2 AS OBSERVAÇÕES EM SALA DE AULA	51
4.2.1 Sobre o conceito de anel	52
4.2.2 O conflito do subanel	58
4.2.3 As dificuldades com os exercícios do livro	60

4.2.4 Os conflitos com o conceito de ideal	64
4.2.5 Anéis quocientes: um caso especial	67
4.2.6 Sobre homomorfismo e isomorfismo	73
4.2.7 Os conflitos com polinômios	76
5 CATEGORIZANDO AS ANÁLISES: síntese compreensiva da investigação efetuada	81
5.1 RETOMANDO A QUESTÃO DE INVESTIGAÇÃO E O OBJETIVO DA PESQUISA	81
5.2 AS RELAÇÕES ENTRE AS IMAGENS CONCEITUAIS E A DEFINIÇÃO FORMAL	82
5.3 OS CONFLITOS POTENCIAIS E OS CONFLITOS COGNITIVOS	83
5.4 AS TRANSIÇÕES ENTRE OS NÍVEIS DO PENSAMENTO MATEMÁTICO: PROCEDIMENTO – PROCESSO – PROCEITO	85
CONSIDERAÇÕES FINAIS	89
REFERÊNCIAS	93
ANEXO A - QUESTIONÁRIOS UTILIZADOS NA PESQUISA	96
ANEXO B - CONTEÚDO PROGRAMÁTICO DA DISCIPLINA ÁLGEBRA I	99

INTRODUÇÃO

CAMINHOS QUE ME CONDUZIRAM A ESTA PESQUISA

Para compreender o momento atual, lanço um olhar no passado, no ano de 1990, quando do meu ingresso no recém-criado curso de Matemática – bacharelado em Informática da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF).

Naquele momento, mesmo oriundo de uma família de professores, não estava em meus planos seguir a carreira docente; a computação era um campo emergente e me parecia muito mais promissor.

Ao completar a primeira metade do curso, havia sido apresentado ao cálculo diferencial e integral, álgebra linear, geometria analítica, além de disciplinas da Física e seus laboratórios. A grade curricular dava forte ênfase à Matemática e Física, reservando somente os períodos finais para as disciplinas de Informática.

Ainda durante a graduação, tive o primeiro contato com a sala de aula ao lecionar Matemática em um curso de reforço escolar na cidade de Juiz de Fora. Foi um importante “laboratório” que me despertou o interesse pelo magistério.

Em 1995, passei a integrar a equipe docente de cursos pré-vestibulares, além de assumir aulas de Matemática e Física em escolas particulares tradicionais da cidade.

Nessa fase, o crescimento da carreira me levou a uma carga horária de mais de cinquenta aulas semanais, trabalhando no modelo tecnicista de ensino, com a utilização de material didático programado como apostilas e listas de exercícios que privilegiavam o treino, a memorização mecânica de palavras, conceitos, fórmulas e habilidades na resolução de problemas. O objetivo era sempre a aprovação dos estudantes nos vestibulares.

Em 2004, retornei à UFJF e me especializei em Física.

Nos últimos anos, mudanças significativas afetaram o mercado de trabalho, haja vista a expansão das faculdades particulares e as alterações nos vestibulares das universidades federais, com a adoção do Enem e do sistema de cotas.

Esses fatores, a meu ver, levaram a uma redução de trabalho nos pré-vestibulares e uma conseqüente migração de parte dos professores para as turmas de ensino fundamental e médio. Era o início de uma crise na qual alguns questionamentos e desafios foram colocados:

Existe algum campo novo do conhecimento capaz de levar o professor de Matemática a encontrar soluções para as dificuldades da sala de aula?

Se sim, como conciliar as atividades de trabalho com os estudos?

Na busca de respostas, encontrei na UFJF, em 2008, o início do processo de seleção do Mestrado Profissional em Educação Matemática, voltado para os profissionais que estão em atividade de docência de Matemática. Era uma possibilidade extraordinária retornar ao meio acadêmico sem perder o vínculo com o trabalho; porém, a exigência da licenciatura em Matemática impossibilitou-me a participação naquele momento.

O desejo de cursar o mestrado me levou a concluir a licenciatura em Matemática em 2009, através do programa especial de formação docente para bacharéis, na forma semi presencial, pela universidade Metropolitana de Santos - UNIMES.

Paralelamente, cursei disciplinas isoladas do mestrado e, em 2010, entrei oficialmente no programa como discente da segunda turma.

O andamento das disciplinas, a leitura de textos de Educação Matemática e a reflexão sobre eles, a participação nos seminários semanais, o convívio com os professores e a troca de experiências com os colegas contribuíram de maneira significativa para a mudança de visão da matemática escolar e dos processos de ensino e de aprendizagem. Algumas das angústias apresentadas anteriormente começaram a ser respondidas.

Mas ainda algumas perguntas me incomodavam:

Voltando ao meio acadêmico, não seria este um bom momento para me aprimorar na Matemática acadêmica?

O aperfeiçoamento na Matemática pura pode permitir ao professor maior autonomia em sala de aula?

Além desses questionamentos, permanecia a procura pela definição da linha de pesquisa que fosse mais próxima de minha vivência pedagógica. Nesse sentido, uma das minhas maiores inquietações como professor, sempre foi a de tentar compreender melhor as relações dos estudantes com os conhecimentos matemáticos, no que se refere aos processos de aprendizagem. Penso que essas questões podem ser compartilhadas com muitos outros colegas docentes, pois qual professor de Matemática, em algum momento, não se fez a seguinte indagação: *“Eu expliquei tão bem aquela matéria, por que os alunos foram mal na avaliação?”*

Busquei, então, o recém-formado núcleo de estudo e pesquisa coordenado pelo prof. Dr. Carlos Alberto Santana Soares, especialista em análise matemática e com vasta experiência em docência superior. O grupo contou com a participação de dois outros colegas, mestrandos da turma de 2009, os professores William e Bessa.

Ao longo do 1º semestre de 2010, durante os encontros semanais do núcleo, além dos estudos de Matemática, ocorreram leituras de trabalhos e artigos de Educação Matemática, apresentação de seminários, entre outras atividades.

As diversas possibilidades de pesquisa levaram o grupo a estudar um referencial teórico que nos auxiliasse na compreensão dos processos cognitivos relacionados ao desenvolvimento do pensamento matemático, em particular os trabalhos de David Tall¹ e Shlomo Vinner² sobre a teoria da imagem conceitual e definição conceitual.

Da preocupação do grupo com a formação do professor de Matemática, nasceu a proposta de investigarmos as dificuldades de aprendizagem dos alunos de Licenciatura durante as aulas da disciplina Álgebra I, cuja ementa aborda a teoria de anéis, grupos, polinômios e outros conceitos da chamada Álgebra Abstrata. Ao final de cada aula, as dúvidas dos alunos e suas dificuldades de compreensão diante das estruturas algébricas eram discutidas e analisadas com base no referencial teórico.

Assim, com o referencial e o campo de pesquisa definidos, passamos a construir a pesquisa acerca dos conflitos cognitivos vivenciados pelos licenciandos em Matemática, futuros professores, diante dos conceitos da Álgebra.

PERTINÊNCIA DO ESTUDO

Vivemos numa sociedade que passa por grandes transformações, impulsionada pelos rápidos avanços tecnológicos e alterações sócio-econômicas. As mudanças, se por um lado trazem novas perspectivas, por outro, alimentam inquietude e podem gerar insegurança.

Educar, sob esse cenário, traz enormes desafios, haja vista a necessidade de se formar cidadãos críticos, criativos, reflexivos, que saibam trabalhar em equipe, sejam capazes de aprender a aprender, inseridos em ambientes informatizados cada vez mais complexos.

¹ Pesquisador do centro em Educação Matemática da Universidade de Warwick (Inglaterra).

² Pesquisador da Universidade de Hebraica (Israel).

Nesse sentido, concordamos com Duval (2009) no que tange à importância de se compreender as dificuldades por vezes insuperáveis que muitos estudantes têm na compreensão da Matemática. Qual a natureza dessas dificuldades e onde elas se encontram? As respostas a essas questões não devem estar restritas à Matemática ou à sua história, mas é necessária

[...] uma abordagem cognitiva, pois o objetivo do ensino da matemática, em formação inicial, não é nem formar futuros matemáticos, nem dar aos alunos instrumentos que só lhes serão eventualmente úteis muito mais tarde, e sim contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização. (DUVAL, 2009, p. 11).

Na pesquisa de Mondini (2009) sobre como os professores de Álgebra dos cursos de Licenciatura em Matemática compreendem e trabalham a Álgebra, em termos de conteúdo e prática pedagógica, percebe-se a ênfase que os docentes dão à formação matemática junto com a pedagógica do futuro professor de Matemática.

Os depoentes consideram importante uma formação sólida no que diz respeito à base matemática e pedagógica do curso, para que o egresso não apenas exerça sua profissão, mas que faça a diferença pelo conhecimento que lhe confere possibilidade de se movimentar de um modo mais livre e comprometido quando docente. (MONDINI, 2009, p. 172).

Embora essa relevância da formação pedagógica do professor de Matemática seja destacada nessa pesquisa, os seus depoentes também salientam que a falta de conexão entre a educação básica e o ensino superior é uma barreira que interfere na aprendizagem da Álgebra como disciplina da Licenciatura.

Souza (2008), ao falar sobre o ensino de Álgebra no curso de Licenciatura em Matemática, aponta como fundamental o ensino de estruturas algébricas, visto como um alicerce básico para o licenciando. segundo a autora, faz-se necessário, porém, destacar os pontos relevantes da disciplina e não apenas cumprir currículo e apresentar a teoria de forma vazia e abstrata.

Se por um lado tem-se a importância do estudo das estruturas algébricas para a formação matemática do futuro professor, por outro podem estar os estudantes, frente a uma grande gama de conceitos abstratos, com dificuldades na compreensão desses conteúdos.

Assim, consideramos pertinente o estudo dos processos de ensino e de aprendizagem de Álgebra nos cursos de Licenciatura; em particular, da investigação

de possíveis conflitos que podem emergir na interação dos licenciandos em Matemática com os conceitos apresentados num curso de Álgebra Moderna.

QUESTÃO DE INVESTIGAÇÃO

Inicialmente, algumas questões norteadoras podem nos auxiliar na elaboração de nossa questão de investigação:

Que conflitos de aprendizagem emergem quando alunos de licenciatura em Matemática estão diante de um primeiro curso de Álgebra Abstrata?

Como identificar nas falas desses alunos os possíveis conflitos cognitivos na compreensão dos conceitos de Álgebra? Por “falas”, entendemos não somente a comunicação oral, mas toda e qualquer forma de comunicação que puder ser observada.

Que interações existem entre a definição formal de um objeto matemático com a imagem conceitual formada desse objeto?

De modo a sintetizar as interrogações acima, explicitaremos a seguinte questão de investigação:

O que evidenciam os conflitos de aprendizagem manifestados por alunos de Licenciatura em Matemática num primeiro curso de Álgebra Abstrata, à luz das interações entre definição formal e imagens conceituais?

Esperamos que esses questionamentos venham a ser respondidos em consequência das compreensões que possamos construir pelas análises dos dados da pesquisa.

O OBJETIVO DA PESQUISA

Nesta pesquisa buscamos investigar os diversos conflitos de aprendizagem apresentados por alunos de Licenciatura em Matemática diante de um primeiro

curso de Álgebra Abstrata, visando compreendê-los na perspectiva das interações entre a definição matemática formal e as imagens conceituais.

A fim de alcançar o nosso objetivo, propomos as seguintes tarefas:

- Acompanhar o curso de Álgebra I, observando as diversas falas dos alunos durante as aulas;
- Identificar, com base no referencial adotado, os possíveis “conflitos cognitivos” nas falas observadas;
- Dialogar com os alunos a fim de perceber quais as suas maiores dificuldades na interação com a Álgebra;
- Perceber como o domínio dos conceitos apresentados interferem na resolução de problemas na disciplina;
- Observar as provas e trabalhos realizados pelos alunos, buscando identificar sinais de conflito na resolução das questões.

ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Para apresentar o desenvolvimento da pesquisa, estruturamos esta dissertação em introdução e cinco capítulos, apresentados em seguida.

A presente introdução, conforme expusemos anteriormente, inicia-se com um breve memorial em que descrevemos um pouco da nossa carreira docente, da trajetória percorrida no mestrado e das inquietações que nos levaram a este estudo. Em seguida, a partir das justificativas que consideramos pertinentes, explicitamos a questão de investigação e o objetivo da pesquisa.

No capítulo 1, intitulado DOS FUNDAMENTOS HISTÓRICOS PARA A DISCIPLINA DE ÁLGEBRA: algumas questões e pesquisas na perspectiva da Educação Matemática, pretendemos percorrer a Álgebra em seus aspectos históricos, enquanto campo constituído dentro da ciência Matemática e também como disciplina curricular da Educação Matemática. Posteriormente, abordaremos algumas concepções de educação algébrica.

Iniciaremos o capítulo 2 - PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO: elementos e níveis de sofisticação – discutindo os processos constituintes do Pensamento Matemático Avançado como a representação e a abstração. A seguir, apresentaremos a teoria da imagem conceitual e definição conceitual, considerada central para a pesquisa, a partir das traduções dos trabalhos de Tall e Vinner. Ainda nesse capítulo, descreveremos os níveis de sofisticação do pensamento matemático propostos por Tall: procedimento, processo e proceito.

No capítulo 3 - PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS – apontaremos a nossa opção metodológica, detalhando os procedimentos a serem adotados para a coleta de dados e o contexto onde transcorrerá a pesquisa de campo.

Sob o título APRESENTANDO E DISCUTINDO OS DADOS DA PESQUISA, o capítulo 4 se constituirá num diálogo entre os dados advindos do campo de pesquisa e os termos do referencial teórico. Os diversos conflitos de aprendizagem observados serão analisados dentro de tópicos que formam os conteúdos estudados em Álgebra Moderna. Apresentaremos também os resultados dos questionários a serem aplicados aos alunos participantes.

Completando a estrutura do trabalho, o capítulo 5 - CATEGORIZANDO AS ANÁLISES: síntese compreensiva da investigação efetuada – retomará a questão de investigação e o objetivo da pesquisa, com a intenção de levar ao leitor uma síntese das análises anteriores dos dados, impregnada de nossas compreensões acerca do fenômeno estudado, com a proposta de uma classificação em categorias dos conflitos estudados.

Nas considerações finais procuraremos, a partir de respostas à questão de pesquisa e das evidências criticamente analisadas, apontar algumas sugestões ou caminhos alternativos no que tange às relações entre o estudante de Licenciatura em Matemática e a disciplina Álgebra.

Intenciona-se que esta pesquisa possa trazer contribuições para o ensino e a aprendizagem de Álgebra Abstrata em nível superior, tornando-se mais um instrumento de desenvolvimento da Educação Matemática.

1. DOS FUNDAMENTOS HISTÓRICOS PARA A DISCIPLINA DE ÁLGEBRA: algumas questões e pesquisas na perspectiva da Educação Matemática.

Neste capítulo analisaremos como se constituiu o que hoje se conhece como Álgebra Moderna ou Abstrata, que trata de estruturas matemáticas tais como grupos, anéis e corpos, sob o olhar da História da Matemática, fazendo um breve percurso acerca de seu ensino no Brasil. Uma vez levantados esses momentos históricos, deseja-se compreender a Álgebra trabalhada como disciplina da licenciatura em Matemática.

1.1 ASPECTOS HISTÓRICOS DA ÁLGEBRA MODERNA

"Na maior parte das ciências uma geração põe abaixo o que outra construiu e o que uma estabeleceu, a outra desfaz. Somente na matemática é que cada geração constrói um novo andar sobre a antiga estrutura."

Hankel

Diferentemente da palavra aritmética, que deriva do grego *arithmos* (número), a palavra álgebra não se sujeita a uma tradução muito clara, pois é uma variante em latim da palavra árabe *al-jabr*, empregada no título do livro *Algebar wal Muquabalah*, do matemático árabe Mohammed al-Khowarizmi, por volta do ano 825, cuja tradução literal é *Sobre Restituição e Ajuste*. Como nos explica Boyer (1996), a palavra *al-jabr* presumivelmente significa algo como "restauração" ou "completação" e parece referir-se à transposição de termos subtraídos para o outro lado da equação, como atualmente usamos a palavra "transposição", isto é, a troca dos termos de uma equação de um lado para o outro, por exemplo, a mudança de $2x + 5 = 25$ para $2x = 25 - 5$.

A relevância da Álgebra de al-Khowarizmi para aquela época, estaria motivada pela necessidade da sociedade islâmica de seguir os preceitos do Corão

no que se refere à distribuição de heranças; atualmente, para os estudantes, segundo Souza (2011):

O que a moderna matemática entende por Álgebra pode parecer uma fria e objetiva axiomática - constitutiva de uma sintaxe de estruturas operatórias e destituída de qualquer alcance semântico. O trabalho do professor e o do formador de professores é o de resgatar - na medida do possível - essa viveza que a álgebra tinha em suas origens.

Historicamente, o desenvolvimento da Álgebra teria atravessado três fases: a *retórica*, a *sincopada* e a *simbólica*.

Na Álgebra retórica as relações são postas em palavras e caracterizadas pela ausência de símbolos, ou seja, conforme Paula (2007, p. 20), “as próprias palavras são usadas em seus sentidos simbólicos”. Um exemplo atual tem-se em afirmativas como: “*a ordem dos termos não interfere na soma*”, que pode ser escrita, em símbolos, da forma $x + y = y + x$.

A Álgebra sincopada representou uma transição entre as Álgebras retórica e simbólica; naquela já aparecem alguns símbolos advindos de abreviaturas de certas palavras. Um exemplo importante dessa passagem ocorreu na Grécia antiga, onde Diofanto de Alexandria (250 d.C) introduziu sinais de abreviação na resolução de equações, semelhantes ao que hoje chamamos incógnitas, numa Álgebra, até então, eminentemente retórica.

Em Moura & Souza (2005), encontramos uma interessante analogia entre a aprendizagem de uma língua estrangeira e as dificuldades, até mesmo entre os matemáticos, de se fazer a transição da Álgebra retórica para a simbólica,

[...] uma vez que toda língua contém suas idiossincrasias particulares de ordenação e idioma. Se não conhecermos o idioma, ao tentarmos traduzir uma frase só a partir da utilização do dicionário, corremos o risco de confundir-nos. (MOURA & SOUZA, 2005, p. 17).

Seguindo o percurso histórico, da ingenuidade do simbolismo matemático da Grécia antiga, em que não havia ainda um sistema formal, tem-se um momento importante, por volta de 1550, com os trabalhos do matemático francês François Viète e sua representação de dados numéricos através de letras.

Se, nos dias atuais, o uso de fórmulas com letras representando quantidades numéricas nos parece bem familiar em contextos matemáticos, o que representou a inovação da notação literal para a época de Viète? Tal notação foi, naquele

momento, uma ruptura radical com as tradições estabelecidas, uma mudança conceitual no pensamento da época, no Renascimento.

O aperfeiçoamento das notações simbólicas permitiu à Álgebra a libertação tanto das palavras com suas ambiguidades próprias das línguas humanas quanto da Aritmética dos números inteiros. As letras também, segundo Paula (2007), possibilitaram passar do individual para o coletivo, da generalização do *algum* para *qualquer*, como na forma quadrática:

$$ax^2 + bx + c,$$

expressão representativa de uma espécie única, tornando possível o desenvolvimento da teoria geral de funções, que é a base da matemática aplicada. (PAULA, 2007, p. 27).

Por volta de 1830, na Inglaterra, George Peacock elaborou um estudo sobre os princípios fundamentais da Álgebra, no qual buscou dar a essa disciplina uma estrutura lógica comparável à geometria dos Elementos de Euclides, isto é, apresentá-la como o desenvolvimento abstrato das consequências de um certo conjunto de postulados. No segundo volume de sua obra, Peacock desenvolveu uma Álgebra simbólica, em que propriedades como a *comutativa* e a *associativa* da adição e multiplicação, a *distributiva* da multiplicação em relação à adição foram aplicadas a símbolos sem conteúdos específicos.

Essa passagem da Álgebra aritmética dos números para a simbólica era avaliada por Peacock. Segundo Eves (2004), aquele

[...] distinguia entre o que chamava Álgebra aritmética e Álgebra simbólica. A primeira era considerada por ele como estudo resultante do uso do símbolo para denotar os números decimais positivos usuais, juntamente com os símbolos operatórios, como os de adição e multiplicação, aos quais se podem sujeitar esses números. Assim, na Álgebra aritmética, certas operações são limitadas por sua aplicabilidade. Numa subtração, $a - b$, por exemplo, devemos ter $a > b$. A Álgebra simbólica de Peacock, por outro lado, adota as operações da Álgebra aritmética, mas ignora suas restrições. (EVES, 2004, P. 547).

Paralelamente ao desenvolvimento do simbolismo algébrico, tem-se que o aparecimento do Cálculo Diferencial e Integral fez surgir as estruturações dos conjuntos numéricos. Primeiramente, o conjunto dos inteiros e dos racionais, atribuído a Karl Weierstrass e, por volta de 1870, Georg Cantor e Richard Dedekind estruturam o conjunto dos reais.

O movimento conhecido como *Aritmetização da Análise* trouxe a busca por uma fundamentação rigorosa para a análise e o desenvolvimento dos conjuntos numéricos criou a necessidade de fundamentar linguisticamente e logicamente as estruturas operatórias da Matemática. Nesse momento os matemáticos deixam de ver a Álgebra como uma ferramenta para resolver problemas e dedicam-se a estruturá-la como Ciência, segundo o espírito da Ciência Moderna Ocidental.

A influência da Aritmetização da Análise no desenvolvimento da Ciência Matemática, segundo Reis (2001, p. 67), tem papel de destaque e extrapola os limites do campo da Análise: “o rigor formal, a partir de então, passou a ser valorizado e perseguido, não só em Análise, mas em todas as áreas que constituem a Matemática pura”.

1.1.1 A consolidação da Álgebra Abstrata

Até o final do século XVIII e a primeira metade do século XIX, a Álgebra era a ciência das equações e seu problema fundamental apoiava-se na teoria de resolução de equações algébricas.

A segunda metade do século XIX é vista como um dos períodos áureos e revolucionários da Ciência Matemática, pois nessa fase a Álgebra passou a ser construída independentemente da Aritmética, uma vez que suas incógnitas não representavam mais apenas números naturais, mas também números negativos e, mais tarde, números imaginários ou complexos.

Na chamada Álgebra abstrata contemporânea ou Álgebra moderna, os objetos utilizados podem ser quaisquer (matrizes, vetores, tensores etc.) sobre os quais se definem operações a partir de axiomas previamente estabelecidos.

Os trabalhos do irlandês William Hamilton (1805-1865) e de outros matemáticos colaboraram para a criação de estruturas algébricas novas, entre as quais *corpo* e *anel*. Para Eves (2004), Hamilton, ao introduzir o produto entre pares ordenados $(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd) + (ad + bc)$, foi o precursor da sistematização dos números complexos como pares ordenados de números reais.

Com base em Boyer (1996), interpretamos que algo parecido com a Aritmetização da Análise, ao que se pode chamar tratamento aritmético da Álgebra, significou o desenvolvimento de um minucioso tratamento postulacional da estrutura algébrica, a partir da noção abstrata de grupo na obra de Galois.

Embora a ideia de corpo já aparecera com o norueguês N. H. Abel (1802-1829), que entendia esse conceito como uma coleção de números fechada para a adição, subtração, multiplicação e divisão (exceto para divisor igual a zero), foi com Dedekind e o estudo dos números algébricos que o conceito de corpo teve a primeira definição formal. Explicitamente, apresentou-se corpo numérico como uma coleção de números que formam um grupo abeliano em relação à adição e à multiplicação, excetuando o fato de zero não ter inverso multiplicativo, e no qual a multiplicação é distributiva em relação à adição. Exemplos simples são o conjunto dos números racionais, o sistema dos números reais e o corpo dos complexos. Outro exemplo de corpo infinito é o conjunto dos números da forma $a + b\sqrt{2}$, dado por Kronecker em 1881. Um corpo com um número finito de elementos, chamado um corpo de Galois, é, por exemplo, o que hoje se conhece como Z_n (n primo) ou corpo dos inteiros módulo n .

Um número complexo se diz *algébrico* se é raiz de um polinômio com coeficientes racionais. Por exemplo, $\sqrt{2}$ é algébrico, pois é raiz de $p(x) = x^2 - 2$. Chama-se *transcendente* o número que não é algébrico, como o são π e e . A generalização dos inteiros algébricos que são coeficientes inteiros de equações polinomiais e primeiro coeficiente igual a 1, levou ao chamado *domínio de integridade*, expandindo o conceito de anel com as propriedades de:

- 1- ser comutativo para a multiplicação;
- 2- ter elemento unidade;
- 3- não ter divisores de zero;

Com base na noção de anel e nas ideias de Kummer (1810-1893), Dedekind introduziu na aritmética o conceito de *ideal*, apresentado como um subconjunto I de um anel A em que o produto de qualquer elemento de I por um elemento de A pertence ao ideal I .

O desenvolvimento dos processos de sistematização da Álgebra, na virada do século XIX para o século XX, que fez surgir as estruturas de grupo, corpo, anel, ideal e outras, representou uma mudança de concepções dos matemáticos em relação à própria ciência Matemática. Em Eves (2004), tem-se que a maior parte desse trabalho reflete o espírito de generalização e abstração que prevalece atualmente na Matemática. Uma interessante metáfora acerca do desenvolvimento matemático desse período encontra-se em Boyer (1996, p. 414):

A matemática tem sido frequentemente comparada a uma árvore, pois cresce numa estrutura acima da terra que se espalha e ramifica sempre mais, ao passo que ao mesmo tempo suas raízes cada vez mais se aprofundam e alargam, em busca de fundamentos sólidos.

Em relação a outros ramos da Matemática, por exemplo, a Geometria, pode-se inferir que a Álgebra teve, no que se refere à organização lógica e axiomatização, um desenvolvimento relativamente tardio, haja vista a teoria de anéis e ideais, estudada e ensinada hoje em dia, ser resultado do desenvolvimento dos conceitos fundamentais da Álgebra Abstrata estabelecidos entre 1920 e 1940.

Outra contribuição para a axiomatização da Matemática foram os livros do grupo Bourbaki - pseudônimo coletivo de um grupo de matemáticos majoritariamente franceses - que expunham a Matemática avançada moderna, editados a partir de 1935. O grupo trabalhou por mais rigor e simplicidade.

Em relação às causas do desenvolvimento da Álgebra, talvez muitos dos algebristas ao longo da História, motivados ou não pela busca de soluções para problemas não resolvidos dentro da própria Matemática, não se preocupassem em prever aplicações futuras desse conhecimento. Na perspectiva de Moura & Souza (2005), a lógica formal da Álgebra simbólica foi construída a partir da necessidade intelectual desses estudiosos, como nas criações da variável-numeral por Diofanto e da variável-letra por Viète. Segundo as autoras,

É quase natural que o matemático de cada época, de cada civilização, procure encontrar uma espécie de taquigrafia para simplificar ao máximo sua escrita. Afinal, a busca do ser humano, há muito, está relacionada à diminuição do trabalho físico e braçal. (MOURA & SOUZA, 2005, p. 33).

Numa analogia com a Física, Einstein foi agraciado com o nobel de Física pela explicação do efeito fotoelétrico da luz, em 1921, sem saber que, algumas décadas mais tarde, a revolução promovida pelo desenvolvimento da informática se utilizaria disso, por exemplo, para a leitura óptica de código de barras.

Nesse sentido, pode-se indagar se existem aplicações recentes para as estruturas de Álgebra Moderna em outras Ciências ou esse conhecimento se restringe apenas aos domínios da Matemática.

Encontramos respostas, por exemplo, com o surgimento, em 1955, da chamada Álgebra Homológica. Segundo Boyer (1996, p. 437), é “um desenvolvimento da Álgebra Abstrata que trata de resultados válidos para muitas

espécies diferentes de espaço”. É uma nova linguagem que permite expressar ideias geométricas em termos algébricos.

Entendemos que a Álgebra é a linguagem básica para explorar os objetos matemáticos e suas relações, generalizando conceitos através das operações da Aritmética e do simbolismo matemático. Ela estuda, além das estruturas matemáticas, as relações existentes entre as mesmas.

Como nos explica Bicudo (apud Mondini, 2009), “a Álgebra é tão importante para a Matemática como a Matemática é para a Física”, no sentido de que, do mesmo modo que a Física se apoia nas estruturas matemáticas, a Álgebra sustenta vários conceitos centrais da Matemática.

1.2 A ÁLGEBRA NO ENSINO BRASILEIRO

Julgamos pertinente neste trabalho a compreensão do movimento histórico de como a disciplina Álgebra se constituiu no currículo do ensino de Matemática no Brasil. Não se intenciona uma reflexão pormenorizada dos seus aspectos epistemológicos, mas, sim, entender como se organizaram os conteúdos algébricos que atualmente são trabalhados nas salas de aula.

Segundo Miorim (1998), o ensino brasileiro foi, durante mais de duzentos anos, organizado predominantemente pelos padres da Companhia de Jesus que defendiam para o equivalente ao ensino médio atual uma educação baseada apenas em disciplinas como a retórica, as humanidades e a gramática. As “matemáticas”, pouco estudadas, eram vistas em cursos superiores de filosofia e ciências.

Em 1759, os jesuítas foram expulsos do Brasil e, como consequência, o sistema educacional brasileiro se desarticulou devido à escassez de professores e de centros educacionais.

A Álgebra foi introduzida no Brasil, a partir de 1722, através das chamadas *aulas régias*, isto é, aulas de disciplinas isoladas cujo objetivo era o preenchimento da lacuna deixada quando da eliminação da estrutura escolar jesuítica. (MIORIM, 1998, p. 83).

A inserção da Álgebra nos currículos escolares brasileiros não se baseou em necessidades próprias, pois, conforme Mondini (2009, p. 30):

A justificativa para a introdução da Álgebra nos currículos escolares era a importância dela para as nações “mais adiantadas”, como a França, a

Inglaterra, Estados Unidos e Portugal. O Brasil, uma nação que possuía o ideal político de se igualar a esses países, precisava dominar o conhecimento que eles consideravam importante.

Na fase republicana, a Reforma Benjamin Constant, oficializada pelo Decreto nº 891 de 8 de novembro de 1890, representou uma ruptura com a tradição clássico-humanista do ensino secundário brasileiro na busca de se introduzir uma formação científica nos moldes do positivismo de Augusto Comte. Em relação ao programa de Matemática, a Álgebra juntamente com a Aritmética ficaram distribuídas no 1º ano dos sete anos reservados pela proposta para o ensino secundário. (MIORIM, 1998, p. 88).

Nas reformas que ocorreram após a de Benjamin Constant até por volta de 1930, não se verificaram mudanças importantes no que se refere ao ensino de Álgebra.

Em 15 de janeiro de 1929, o Decreto nº 18.564 distribuiu o ensino da Aritmética, da Geometria e da Álgebra entre os diferentes momentos do currículo escolar. A justificativa, segundo Mondini (2009, p. 31), “era acostumar, aos poucos, os alunos com o simbolismo algébrico.”

Até esse período, as academias militares e escolas de engenharia é que formavam profissionais que atuavam como professores de Matemática, ou seja, não havia curso específico para a docência. A exigência de formar professores em cursos superiores foi feita pelo Decreto-lei nº 5.846 de 1933. Em seguida, a Universidade de São Paulo – USP, criada em 1934, incorporou o já existente Instituto de Educação, responsável pela formação de professores de Matemática assim como pelo aperfeiçoamento daqueles que já exerciam a profissão.

Em 1939 é criada no estado do Rio de Janeiro a Faculdade Nacional de Filosofia, onde o curso de Licenciatura em Matemática contava com disciplinas comuns ao Bacharelado nos primeiros três anos e, no último ano, disciplinas pedagógicas. Essa era uma configuração curricular muito comum à época e que perdurou até recentemente, quando as disciplinas pedagógicas passaram a permear toda a estrutura curricular, desde o início das licenciaturas.

Entre as décadas de 30 e 60 do século passado, a Educação brasileira foi influenciada pelo movimento internacional para a modernização do ensino da Matemática, o chamado Movimento da Matemática Moderna (MMM). Nesse período,

a Álgebra ganha lugar de destaque com seus elementos unificadores dos campos da Matemática, como as estruturas algébricas e a teoria dos conjuntos.

Nas palavras do professor Osvaldo Sangiorgi, considerado um ícone do MMM no Brasil, percebe-se a força do Movimento no sentido de mudanças dos programas do ensino secundário. Segundo Sangiorgi, citado por Valente (2007, p. 12):

[...] a principal diferença entre a matemática clássica e a matemática moderna reside no fato de a primeira ter por base os elementos simples tais como os números inteiros, o ponto, a reta etc...e a segunda um sistema operatório, isto é, uma série de estruturas (Bourbaki), sobre as quais se assenta o edifício matemático, destacando-se entre elas as **estruturas algébricas**, as **estruturas de ordem** e as **estruturas topológicas**. (grifo nosso)

Outro importante matemático cujas ideias influenciaram o Brasil foi o professor alemão Felix Klein, que defendia o estudo de Matemática para fundamentar qualquer ciência. Dessa influência, em 1931, a reforma Francisco Campos produziu modificações na organização do ensino brasileiro secundário com a proposta de unificar o ensino de Aritmética, Geometria, Trigonometria e Álgebra, denominando-os de ensino de Matemática. Em Mondini (2009), tem-se que isso possibilitaria ao professor realizar conexões entre os conteúdos como, por exemplo, entre as representações geométricas e as estruturas algébricas.

Em relação ao ensino de Álgebra, se admitirmos que um dos papéis da Educação Matemática seja o de aproximar o conhecimento advindo da pesquisa acadêmica e a matemática desenvolvida nas escolas, como definir os conteúdos algébricos mais adequados para os diferentes níveis de ensino?

Mesmo não sendo o foco desta pesquisa, a indagação acima pode nos ajudar a compreender como se constituíram os programas atuais de Matemática no que se refere aos conteúdos algébricos. Encontram-se na Educação Básica, atualmente, documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e a Matriz de Referência para o Enem que apontam caminhos de se trabalhar os conteúdos matemáticos.

Em relação ao pensamento algébrico, os PCNs para o ensino fundamental sugerem:

Os adolescentes desenvolvem de forma bastante significativa a habilidade de pensar “abstratamente”, se lhes forem proporcionadas experiências variadas envolvendo noções algébricas, a partir dos ciclos iniciais, de modo informal, em um trabalho articulado com a Aritmética. Assim, os alunos adquirem base

para uma aprendizagem de Álgebra mais sólida e rica em significados. (BRASIL, 1997, p. 117).

Desde 1962, através do Parecer 292, ficaram estabelecidos os tópicos de Álgebra para o ensino básico, tais como: razão e proporção; equações do 1º e 2º graus; trinômio do 2º grau; sistema de equações de 1º e 2º graus; operações com polinômios. Atualmente, a matriz do Enem-2009, aponta para os conhecimentos algébricos, os seguintes itens: gráficos e funções; funções algébricas do 1.º e do 2.º graus, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas.

Com relação aos cursos de Licenciatura em Matemática, o Parecer 292 de novembro de 1962, a partir da LDB nº 4024, de 1961, estabeleceu currículos mínimos para a formação de professores. Segundo Mondini (2009, p. 33), no que se refere à inserção da Álgebra como disciplina da Licenciatura:

[...] a Álgebra foi introduzida na formação de professores de Matemática para possibilitar conhecimento do professor sobre Álgebra, ou seja, sem a intenção de, no decorrer dessa disciplina, discutir tópicos relacionados à atuação do professor em sala de aula.

Nos dias de hoje, o Parecer nº 1302/2001, de 06 de novembro de 2001, sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, descrevem os conteúdos comuns a todos os cursos de Licenciatura que devem ser distribuídos de acordo com o currículo proposto pela Instituição de Ensino Superior. Os Fundamentos de Álgebra aparecem conjuntamente com a Álgebra Linear, assim como os Fundamentos da Geometria, os Fundamentos da Análise, a Geometria Analítica e o Cálculo Diferencial e Integral.

1.3 CONCEPÇÕES SOBRE A EDUCAÇÃO ALGÉBRICA

Com base nos trabalhos de Miorim, Miguel e Fiorentini (1993), abordaremos algumas concepções de educação algébrica no percurso da trajetória histórica do ensino da Matemática.

Uma primeira concepção predominante tanto no Brasil como em outros países, entre o século XIX e meados do século XX, foi a *linguístico-pragmática*. Nela, acreditava-se que a aquisição pelo aluno, ainda que mecanicamente, das

técnicas do chamado *transformismo algébrico*³ seria suficiente para torná-lo capaz de resolver problemas, mesmo que esses problemas fossem quase sempre artificiais, no sentido de que a ênfase estava nos conteúdos algébricos a serem aprendidos e não na natureza e relevância dos problemas. Uma sequência de tópicos algébricos, independente de objetos concretos, figuras ou ilustrações, antepunha-se como pré-requisito para a resolução dos tais “problemas”.

Com o advento do MMM, uma outra concepção de cunho linguístico, denominada *fundamentalista-estrutural*, iria contrapor-se àquela. Nessa nova concepção, o papel pedagógico da Álgebra passa a ser o de fundamentar os vários campos da matemática escolar. Acreditava-se que a introdução de propriedades estruturais das operações que justificassem cada passagem presente no transformismo algébrico capacitaria o aluno a aplicar essas estruturas nos mais diferentes contextos. A busca pela fundamentação lógica trouxe uma reorganização dos tópicos da Álgebra elementar, no sentido de que tópicos “fundamentais” ou “fundamentadores” (conjuntos numéricos, estudo de quantificadores, conjunto universo e conjunto verdade, equações e inequações, entre outros) antecederiam novos conteúdos algébricos como as funções de 1° e 2° graus.

Uma terceira concepção de educação algébrica, chamada pelos autores de *fundamentalista-analógica*, propôs uma síntese das concepções anteriores na busca pela recuperação do valor instrumental da Álgebra, mas, por outro lado, manteve o cuidado com as justificativas lógicas das operações algébricas. Para tal, far-se-ia uso de modelos analógicos, geométricos ou físicos e, portanto, visuais.

Embora a concepção fundamentalista-analógica aponte no sentido de que uma “Álgebra geométrica” seria didaticamente superior à abordagem estritamente lógico-simbólica, por tornar visível certas identidades algébricas, isso não significa

[...] defender a tese determinista da impossibilidade de acesso do estudante a uma forma de abordagem meramente simbólica e mais abstrata, mas, simplesmente, acreditar que a etapa geométrico-visual constitui-se em um estágio intermediário e/ou concomitante à abordagem simbólico-formal. (MIORIM, MIGUEL & FORENTINI, 1993, p. 9).

Ainda de acordo com esses autores, todas as três concepções mencionadas anteriormente incorreram no mesmo erro ao reduzir o ensino da Álgebra à sua

³ Expressão para designar o processo de obtenção de expressões algébricas equivalentes mediante o emprego de regras e propriedades válidas.

linguagem, na crença de que o pensamento algébrico só se desenvolve através da manipulação sintática de seus símbolos.

Essa tendência da educação algébrica desconsidera o fato de que, tanto no plano histórico quanto no pedagógico, a linguagem é, a princípio, a expressão de um pensamento. (MIORIM, MIGUEL & FORENTINI, 1993, p. 10).

Se historicamente, na busca da generalização, a construção da simbologia algébrica foi um fator que permitiu a certos campos da Matemática evoluir; nos diferentes níveis escolares, os processos de ensino e de aprendizagem dos conteúdos algébricos têm sido permeados por muitas dificuldades. Embora os alunos associem a Matemática aos símbolos, a experiência docente diária nos mostra que muitos deles não conseguem utilizar essa linguagem para o desenvolvimento do raciocínio matemático ou de sua capacidade de abstração e generalização.

Moura & Souza (2005) apontam uma contradição no ensino da Álgebra simbólica devido ao esquecimento ou à dificuldade encontrada por nós, professores, de vincular a palavra e a figura à variável-letra, ou seja, esquecemo-nos da Álgebra retórica e figurada. As autoras sugerem que as atividades algébricas para os alunos as quais considerem as relações estreitas que há entre Álgebra, Aritmética e Geometria, passem pela compreensão dos processos históricos que a Matemática percorreu.

Até aqui, o estudo e a descrição de pontos do movimento histórico da Álgebra, como ciência e como disciplina escolar, nos fornecem elementos importantes para as análises posteriores desta pesquisa.

No entanto, na busca de maior subsídio teórico para o estudo proposto, convidamos o leitor a avançar para o próximo capítulo, onde abordaremos alguns processos cognitivos relacionados ao pensamento matemático.

2. PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO: elementos e níveis de sofisticação

Apresentaremos, neste tópico, elementos constituintes do chamado Pensamento Matemático Avançado, em particular os trabalhos de David Tall e Shlomo Vinner, referentes às noções de imagem conceitual, definição conceitual e dos níveis de sofisticação do pensamento matemático.

2.1 UM POUCO SOBRE O PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

Em Brandenberg (2009), encontramos que um dos objetivos importantes do ensino da Matemática é, mais do que gerar habilidades específicas, é fazer entender. Entender um fato, tal como ele acontece, é:

um processo individual que ocorre na mente de cada pessoa, e que pode ser rápido como um “estalo mental”; mas que geralmente ocorre após uma longa sequência de atividades interativas em uma grande variedade de processos mentais. (BRANDEMBERG, 2009, p. 78).

Para Dreyfus (1991), o Pensamento Matemático Avançado consiste numa grande série de processos como, por exemplo, os processos de representar, visualizar, generalizar ou ainda outros: classificar, conjecturar, induzir, analisar, sintetizar, abstrair ou formalizar. Dentre os processos citados, consideram-se os mais destacados para o desenvolvimento do pensamento matemático a representação e a abstração.

Em Álgebra, conceitos como anéis e grupos tendem a ser complexos para os estudantes, haja vista a necessidade de abstração e representação exigidas para a compreensão dessas estruturas matemáticas.

A forma como se trata essa complexidade é uma característica distintiva entre o pensamento avançado e o pensamento elementar e, para Tall (1991), a transição entre esses dois pensamentos envolve a passagem do *descrever* para o *definir*, do *convencer* para o *provar* de uma maneira lógica baseada essencialmente em definições e deduções formais.

Se pensarmos na importância dos processos de representação e abstração para o desenvolvimento do pensamento matemático do estudante, julgaremos pertinente analisar as seguintes questões:

- Quais processos estão envolvidos na representação?
- O que significa abstrair?

O processo de representação, segundo Domingos (2003), envolve três componentes principais: as representações simbólicas, as representações mentais e a visualização.

As representações simbólicas são consideradas indispensáveis na matemática avançada, pois envolvem relações entre signos e significados. Por exemplo, em Álgebra, a representação simbólica $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ como anel dos números inteiros está associada a uma ideia, isto é, se usada como elemento de comunicação dos processos de ensino e de aprendizagem, pressupõe que o conjunto \mathbb{Z} cumpre os axiomas da definição de anel em relação às operações de soma (+) e de produto (\cdot).

As representações mentais referem-se aos esquemas internos ou imagens de referência que a pessoa usa para interagir com o mundo externo. Para Dreyfus (1991), as representações mentais podem ser distintas. Principalmente quando comparadas as dos estudantes com as dos professores, essas diferenças podem tornar-se amplamente acentuadas. Cada estudante, quando depara com conceitos matemáticos como grupos, anéis ou ideais, pode ter em mente representações diferentes de acordo com suas experiências anteriores.

A visualização é o processo pelo qual as representações mentais podem ser criadas ou, como diz Dreyfus (1991), ganham existência. Para Domingos (2003), a visualização nos oferece intuição e compreensão dos conceitos matemáticos. Temos exemplos disso ao visualizarmos o gráfico de uma função, ao relacionarmos a ideia de reta tangente à curva num ponto como a derivada da função nesse ponto ou, ainda, quando identificamos uma integral definida como uma expressão da área sob uma curva por meio de um limite. No entanto, em Álgebra, é possível um apelo geométrico para visualizarmos, por exemplo, o objeto subanel? Embora, aqui, não se investiguem respostas a essa indagação, deixamo-la como reflexão para o leitor.

Em relação à abstração, conforme Dreyfus (1991, p. 37), tem-se, para o campo do entorno do pensamento matemático, que:

Abstrair é antes de mais nada um processo construtivo – a construção de estruturas mentais a partir de estruturas matemáticas, ou seja, a partir de propriedades e relações entre objetos matemáticos. Esta atividade construtiva mental por parte do indivíduo requer a capacidade de deslocar a atenção dos objetos em si para a estrutura de suas propriedades e relações.

De maneira semelhante, quando um aluno desenvolve a capacidade de conscientemente fazer abstrações de situações matemáticas, ele alcança um nível mais avançado do pensamento matemático, tendo como pré-requisitos, para que isso ocorra, além do processo de representação, a generalização e também a síntese.

Em Brandemberg (2009), generalizar é induzir a partir de elementos particulares, expandindo os domínios de validade com base em atributos comuns. Por exemplo, um estudante, a partir de sua experiência em resolução de equações lineares e percebendo que muitos sistemas de duas ou três equações lineares têm uma solução, pode generalizar esse conhecimento para um sistema de n equações lineares com n variáveis. A própria Álgebra traz, nas diferentes formas em que é concebida, a ideia de uma generalização da aritmética, em que a variável torna-se um objeto arbitrário de uma estrutura estabelecida por certas propriedades (grupos, anéis, domínios de integridade e corpos, por exemplo).

Em relação à síntese, trata-se de compor ou combinar partes de tal forma que elas formem um todo, um único quadro teórico. Exemplificando, em Álgebra Linear, elementos como ortogonalização de vetores, mudanças de base, diagonalização de matrizes estão sintetizados no conceito de espaço vetorial. Também, em Álgebra Abstrata, temos as propriedades numéricas como comutatividade, associatividade, elemento neutro e outras, sintetizadas na estrutura algébrica de anel.

Assim, dentro das noções até aqui abordadas sobre o Pensamento Matemático Avançado, caminharemos para os conceitos de definição formal, imagem e definição conceituais, pontos que consideramos centrais do referencial para o nosso estudo.

2.2 IMAGEM CONCEITUAL E DEFINIÇÃO CONCEITUAL

Em um artigo publicado em 1981, Tall e Vinner apresentaram à comunidade de Educação Matemática a teoria da imagem conceitual e definição conceitual, também chamadas, por alguns pesquisadores, de conceito imagem e conceito definição.

Segundo os autores, a mente humana não é uma entidade puramente lógica. A forma complexa em que funciona está frequentemente em desacordo com a lógica matemática, na qual os conceitos são definidos de modo exato, preciso, para fornecer uma base sólida para a teoria matemática.

Nesse sentido, pode-se inferir que muitas dificuldades encontradas pelos estudantes nos diversos níveis de ensino de matemática repousam na distinção entre os conceitos matemáticos formalmente definidos e apresentados nas aulas e os processos cognitivos pelos quais são compreendidos.

Segundo Tall e Vinner, o termo **imagem conceitual** descreve:

...a estrutura cognitiva total que está associada ao conceito, incluindo todas as imagens mentais, propriedades e processos associados. Ela é construída ao longo dos anos através de experiências de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece. (TALL & VINNER, 1981).

Como exemplo, os autores analisam o conceito de subtração que é inicialmente visto como um processo envolvendo números inteiros positivos. Nessa fase, a criança pode observar que a subtração de um número sempre reduz a resposta. Tal observação é parte de sua imagem conceitual e pode causar problemas mais tarde quando da subtração de números negativos. Abordaremos, à frente, esses possíveis problemas como conflitos cognitivos.

A imagem conceitual é um atributo subjetivo do indivíduo e sua formação pode ser influenciada por fatores externos à sala de aula, como nos mostra Cornu (1991) sobre o conceito de limite. Em seu uso cotidiano, a palavra limite traduz a ideia de algo intransponível, o que conflita com a definição formal matemática de limite, por exemplo, o de uma sequência convergente ou função real.

Ao se desenvolver, a imagem conceitual não precisa ser coerente o tempo todo, pois diferentes estímulos sensoriais podem ativar no cérebro distintas partes

da imagem. Cada parte que é ativada em um determinado momento é chamada de imagem conceitual evocada.

O termo **definição conceitual** é tratado pela teoria como a forma verbal utilizada pelo estudante para expressar sua imagem conceitual. Pode ser aprendida de uma forma “rotinizada”, por exemplo, ao decorar uma definição ou demonstração matemática, ou de maneira mais significativa. Pode ser também uma reconstrução pessoal, feita pelo estudante, de uma dada definição matemática. Essa **definição conceitual pessoal**, através de palavras, que o indivíduo realiza para expressar a sua imagem conceitual evocada, pode diferir da **definição conceitual formal**, isto é, da definição aceita pela comunidade acadêmica matemática em geral, respeitado o contexto histórico em que essa definição está sendo admitida.

A fim de evitar ambiguidades nas traduções dos termos anteriores e trazer clareza, designaremos, neste trabalho, a definição matemática comumente aceita no meio acadêmico apenas como **definição formal**, deixando o termo **definição conceitual**, no sentido de algo também subjetivo, como a série de palavras que o estudante utiliza para externar sua imagem conceitual, podendo ou não diferir da definição formal de um determinado conceito matemático.

Como exemplo, Tall e Vinner (1981) usam a definição de função, objeto matemático continuamente estudado no final do ensino fundamental e ao longo de todo o ensino médio e superior, com aplicações em outras áreas como a física e a química. É considerada como “uma relação entre dois conjuntos não vazios A e B em que cada elemento de A se relaciona a um único elemento de B”. Essa definição pode ser esquecida pelo estudante e sua imagem conceitual pode conter ou não outras ideias, como a função ser dada por uma ou mais fórmulas, ser representada pelo seu gráfico, tabela de valores ou, ainda, ser vista como a ideia de movimento, em que o elemento “a” do domínio é levado a “f(a)” no conjunto B.

Em diferentes momentos, imagens conflitantes podem ser evocadas, isto é, porções de uma mesma imagem conceitual podem ser contraditórias. Um estudante pode já ter visto um conceito matemático e ter dele uma imagem conceitual; essa imagem pode ter sido reforçada ao longo do tempo por experiências repetidas. Mas pode acontecer, em algum momento, que tal imagem se revele inadequada em relação a outra imagem do mesmo conceito, por exemplo, alguma explicação dada pelo professor e que contraste com a imagem inicial que o estudante possui.

A teoria trata a possível oposição entre as imagens anterior e nova do estudante, relativas àquele conceito, como fator de conflito potencial. Quando aspectos conflitantes são evocados simultaneamente, tem-se o chamado fator de conflito cognitivo.

Tall (1977) observou através de um questionário que os alunos descreveram $\sqrt{2}$ como um número não complexo, embora muitos tenham definido “números reais como sendo números complexos com parte imaginária zero”. Na visão do pesquisador, a definição de número complexo $x + iy$ como um par ordenado de números reais (x,y) e a igualdade de $x + i0 = (x,0)$ como o número real x é um fator de conflito potencial. Isso decorre do não atentar-se à noção de teoria dos conjuntos em que o elemento x é diferente do par ordenado $(x,0)$.

Uma questão que nos parece um tanto controversa nos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática diz respeito ao fato de a apresentação de determinado conceito matemático ser feita ou não a partir de sua definição formal, sem nenhuma prévia familiarização. Um exemplo disso está em Vinner (1991), que aponta como uma boa abordagem inicial para a noção de valor absoluto a ideia de “o número sem sinal” ou, geometricamente, como a distância desse número ao zero. Menos compreensível para os estudantes é a definição algébrica mais formal de módulo de um número real x , que se encontra nos livros didáticos de ensino médio:

$$|x| = x; \text{ se } x \geq 0$$

e

$$|x| = -x; \text{ se } x < 0$$

No caso anterior, a definição formal de módulo de x é útil para se trabalhar com as equações e inequações modulares.

Sobre o ensino de Álgebra Moderna, se tomarmos como referência os livros disponíveis e utilizados nos cursos universitários, veremos que as estruturas algébricas são apresentadas, via de regra, a partir das suas definições formais.

Entendemos que essas questões devem ser analisadas pelo professor que, dentro de sua autonomia pedagógica, pode escolher a melhor abordagem didática em cada situação.

2.2.1 Interações entre definição e imagem conceituais

Vinner (1991) chama a atenção para a necessidade de interação entre imagem conceitual e definição formal. Contextos técnicos, como o estudo de Matemática, impõem aos estudantes hábitos de pensamento totalmente diferentes dos hábitos da vida cotidiana. Nesse sentido, as definições podem ajudar na formação da imagem conceitual e na prevenção de erros advindos de imagens equivocadas. Por exemplo, com relação à afirmativa “dentre todos os retângulos de mesmo perímetro, o quadrado é o de maior área”, deve-se consultar as definições geométricas para melhor compreendê-la. Todavia, na vida diária, não precisamos de uma definição formal do que vem a ser, por exemplo, o conceito de *mesa* ou *cadeira*. Para esses objetos, palpáveis e comuns, formamos simultaneamente a definição e a imagem conceituais.

Na perspectiva de Vinner (1991), admite-se a separação desses dois conceitos com a existência de duas “células” (sentido figurado) em nossa estrutura cognitiva: uma para a definição e outra para a imagem conceitual. Qualquer uma delas ou ambas podem estar vazias. Em situações, por exemplo, onde uma definição matemática é apenas memorizada sem que tenha produzido significado para o indivíduo, pode-se considerar a célula da imagem conceitual vazia.

O modelo de Vinner também prevê que deve haver uma interação entre as duas células, embora elas possam ser criadas de forma independente. Representa-se essa ação recíproca no seguinte diagrama:

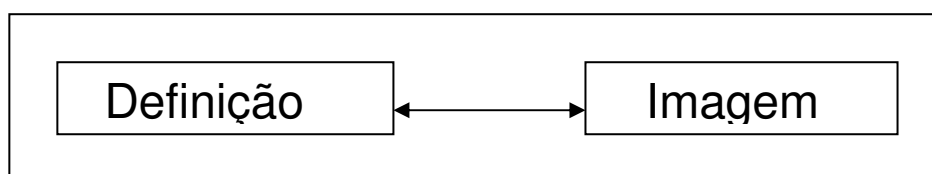


Figura 1 - Inter-relacionamento entre imagem e definição.

Como exemplo dessa interdependência, em que um conceito é introduzido via imagem conceitual e, posteriormente, é apresentada a definição, Vinner utiliza o sistema de eixos coordenados cartesianos. Um estudante pode ter a imagem conceitual dos eixos coordenados como perpendiculares entre si devido ao fato de ter visto vários gráficos de funções. Se o professor, posteriormente, propuser outro

sistema em que os eixos se interceptem em algum ângulo diferente de 90° , podem ocorrer três situações:

- a) a imagem conceitual pode ser mudada para se adequar à nova definição;
- b) a imagem conceitual pode permanecer como estava, ocorrendo adequação da definição conceitual à mesma;
- c) ambas as células podem permanecer como estavam.

A hipótese (a) é vista como uma reconstrução satisfatória, enquanto a (b) é o caso em que a definição formal não foi bem compreendida, podendo ser esquecida ou distorcida com o tempo. Na (c), o aluno pode até repetir a definição dada pelo professor, mas em qualquer outra situação, quando for questionado para definir um sistema coordenado, pode pensar nos sistemas de eixos coordenados apenas como perpendiculares.

Para Brandemberg (2009), esse processo de inter-relacionamento mostrado no diagrama anterior é o que se deseja na prática de ensino e de aprendizagem da matemática; porém, percebe-se que a maioria dos professores do ensino médio e superior privilegia o papel da definição, na expectativa de que a imagem conceitual seja constituída a partir da definição formal (BRANDEMBERG, 2009, p.105). Isso é visto no esquema a seguir:

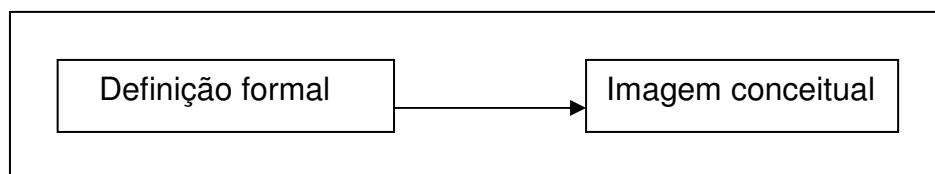


Figura 2 - Constituição da imagem conceitual via definição formal.

Em uma das metodologias tradicionais usadas em aulas de Matemática, o aluno é levado a realizar tarefas como a resolução de problemas, objetivando a aprendizagem dos conteúdos. Nesse momento, diante de uma tarefa cognitiva, o aluno deve ter as células de definição e imagem conceituais ativadas na busca de resposta à mesma. Essa atividade pode desencadear várias ações entre as células.

Vinner (1993) considera que os processos envolvidos, principalmente nos casos em que se privilegia a definição, passam ou por uma **dedução puramente formal** ou por uma **dedução que segue o pensamento intuitivo** ou, ainda, por um

inter-relacionamento das células, conforme podemos observar, respectivamente, nos diagramas a seguir:

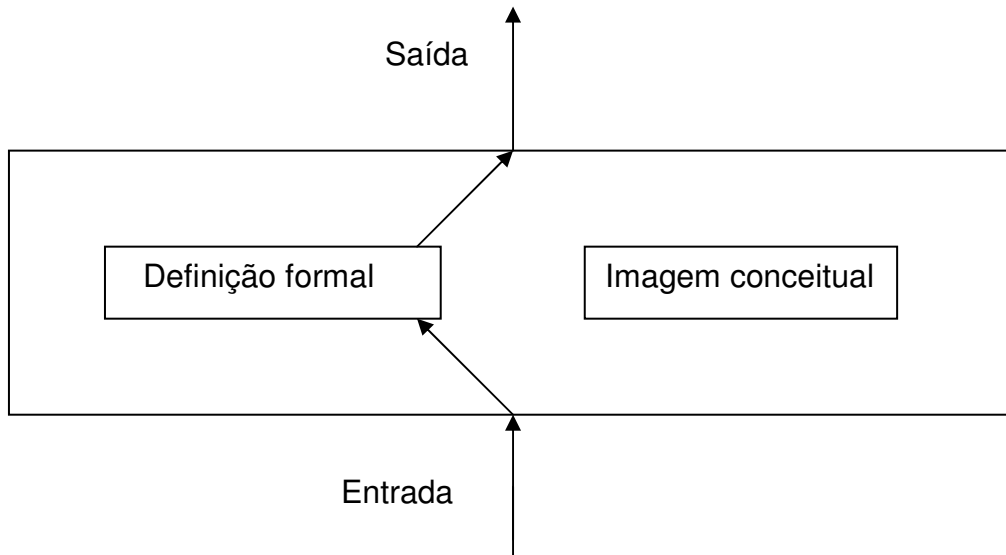


Figura 3 - Dedução formal pura.

No esquema acima tem-se o caso da dedução puramente formal, em que a imagem conceitual pode ser considerada vazia e não tem interferência na resposta, não havendo necessidade de se considerar as impressões e experiências do estudante.

Na dedução que segue o pensamento intuitivo, são consideradas as experiências e impressões que formam a imagem conceitual seguida de consulta à definição formal, cujo esquema é:

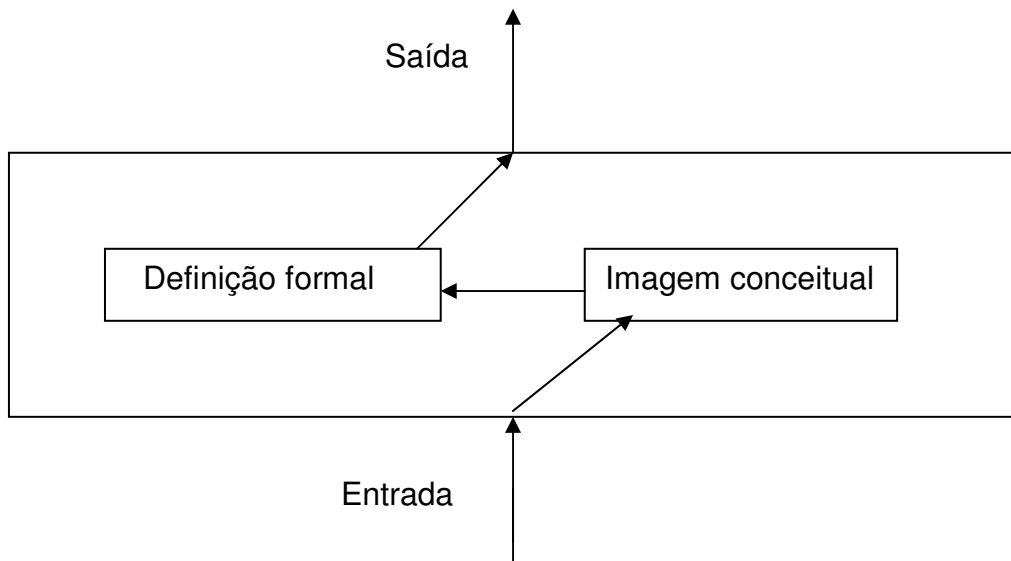


Figura 4 - Dedução que segue o pensamento intuitivo.

O terceiro caso traduz-se por uma consulta à célula da definição formal seguida de ação recíproca entre imagem e definição, conforme o diagrama:

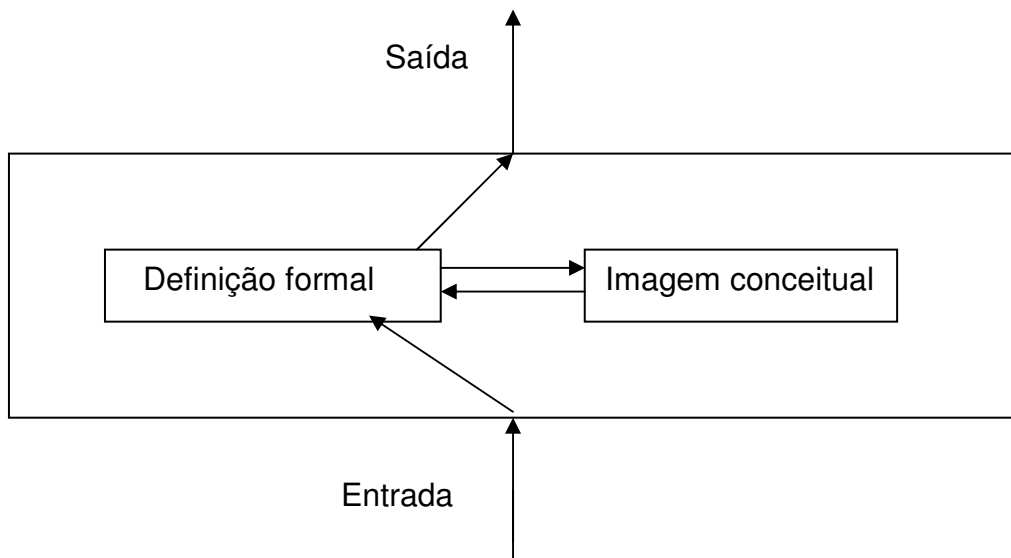


Figura 5 - Ação recíproca entre as células.

Pode-se verificar que em nenhum dos 3 casos anteriores é tomada uma decisão sem antes ser consultada a definição formal, ou seja, em um contexto técnico, consultar uma definição é algo desejável. Entretanto, Vinner (1991) argumenta que esses processos não refletem a prática, pois é difícil treinar um sistema cognitivo para agir contra sua própria natureza, seja na formação da imagem conceitual ou na realização de determinada tarefa cognitiva. Por exemplo, em Álgebra, as definições de estruturas abstratas como anel, ideal, anel quociente podem fazer sentido para o estudante em dado momento, apoiadas em exemplos específicos, mas, a partir do instante em que o mesmo forma a sua imagem conceitual, essas definições podem ser esquecidas ou ficar inativas.

O modelo mais apropriado para abrangermos o processo que realmente ocorre na prática baseia-se em uma resposta intuitiva, sem consulta à célula da definição conceitual, mesmo não estando vazia. Essa tradição se impõe pela força dos hábitos de pensamento diários, em que o estudante percebe êxito na realização das tarefas apenas com consulta à imagem conceitual. Vejamos isso no diagrama a seguir:

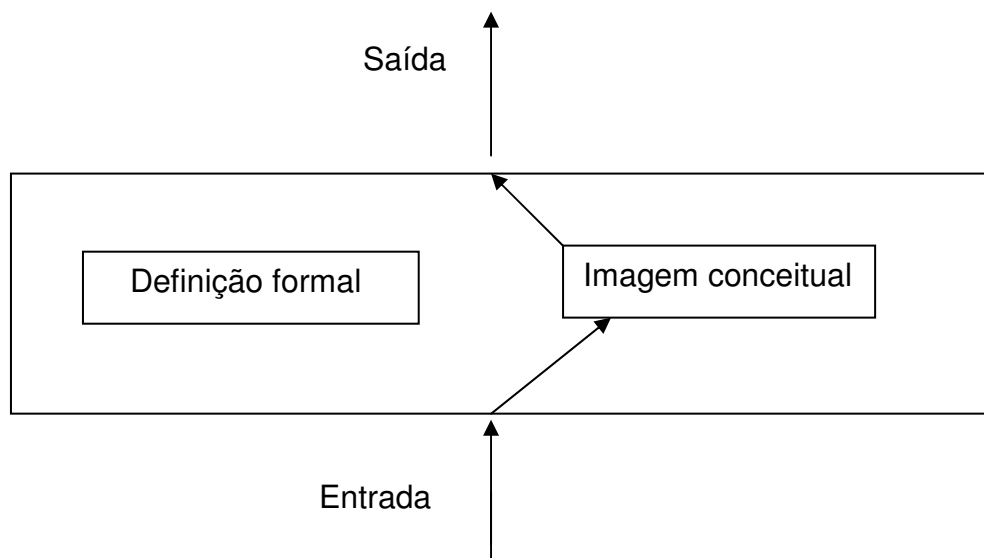


Figura 6 - Resposta intuitiva.

Um modo de contrapor-se a essa tendência que, a priori, não seria a mais adequada em ambientes muito técnicos, é a proposição para os estudantes de problemas não rotineiros em que a imagem conceitual seja insuficiente para resolvê-los e também de exercícios que explorem a definição conceitual, como forma de possibilitar aos estudantes verbalizar ou expressar sua imagem conceitual.

Se olharmos para os conteúdos de Álgebra estudados na licenciatura em Matemática e os exercícios propostos nos livros didáticos dessa disciplina, poderemos perceber que estão longe de ser situações rotineiras. Assim, de acordo com Brandemberg (2009), a resolução de tarefas nesse nível requer maior interação entre a imagem conceitual e a definição formal, ou seja, os papéis dessas células tenderiam a equivalência, conforme o esquema seguinte:

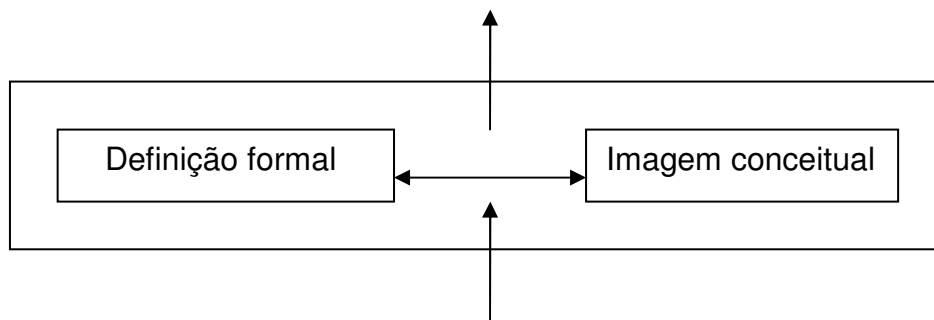


Figura 7 - Equivalência entre definição formal e imagem conceitual.

2.3 NÍVEIS DE SOFISTICAÇÃO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO

Tall (1999) define três níveis de aprendizagem organizados conforme o nível de sofisticação do pensamento, quais sejam: *procedimento*, *processo* e *proceito*. O proceito pode depender do processo que, por sua vez, pode depender do procedimento para se realizar o avanço do pensamento. Essa abordagem pode ser vista esquematicamente na figura 2.1, numa ordem crescente de desenvolvimento.

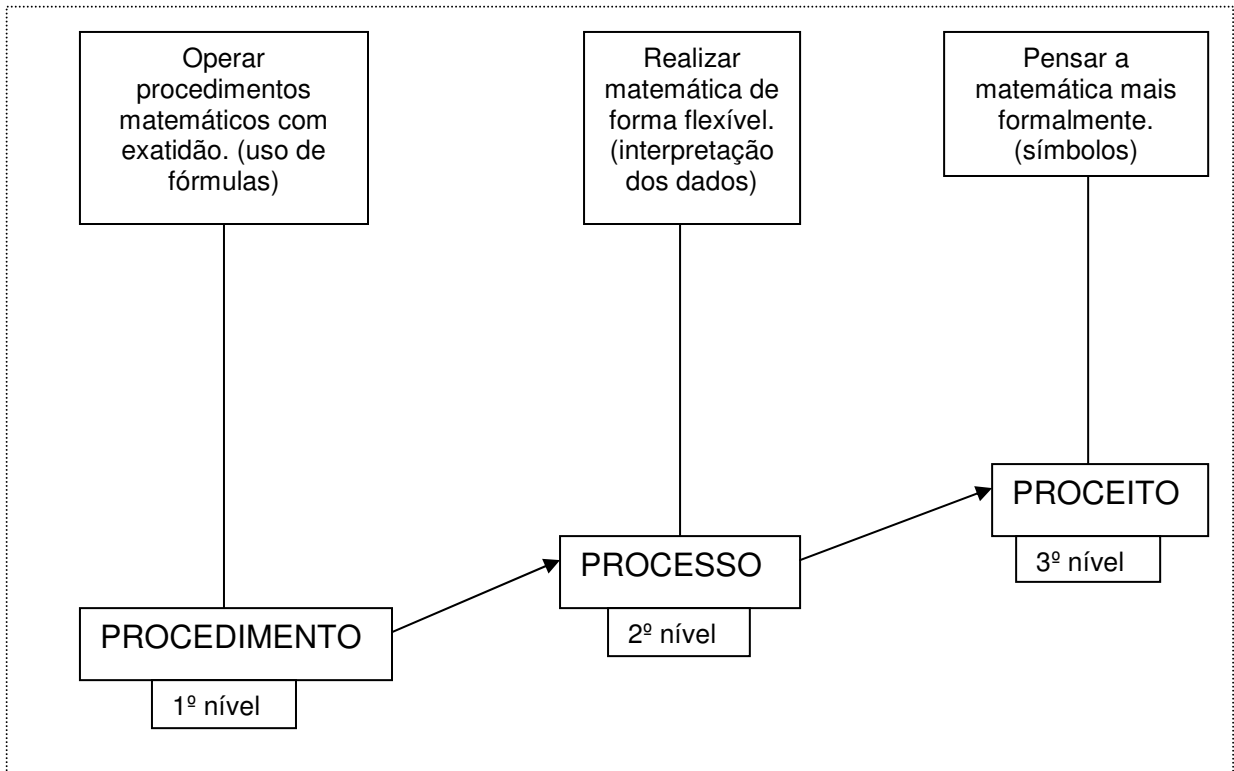


Figura 8 – Desenvolvimento na execução dos processos matemáticos (adaptado de Domingos, 2003, p. 55).

Segundo Tall (1999, p.5), “um *procedimento* consiste numa sucessão finita de ações e decisões construídas em uma sequência coerente”, isto é, uma sequência específica de passos que conduzem a outros passos como a utilização de um algoritmo específico para implementar um processo. Seriam a manipulação simples de fórmulas ou regras matemáticas como o cálculo de raízes de uma equação do 2º grau, utilizando-se a fórmula de Bhaskara e o uso do algoritmo da divisão entre dois polinômios.

Embora o procedimento possa parecer pouco relevante em termos cognitivos, Tall destaca que o mesmo é um estágio dentro do processo de evolução do pensamento matemático, sendo, assim, importante.

Em nossa prática docente, não raramente percebemos estudantes que necessitam de realizar vários exemplos ou exercícios com repetições para se sentirem seguros na interação com certo objeto matemático. Talvez, tentar saltar essa etapa possa ser um fator de dificuldade a mais no avanço da compreensão ou, na perspectiva do referencial, na formação de imagens conceituais. Porém,

entendemos não ser desejável que o estudante opere apenas nesse nível, mas que possa avançar cognitivamente em Matemática.

Para o próximo nível de aprendizagem, tem-se o *processo*. Nesse estágio, conforme Domingos (2003), o aluno é capaz de descrever ou refletir sobre uma determinada ação sem ter que realizar todos os seus passos. Por exemplo, as raízes de uma função podem ser pensadas como dados em que suas imagens são nulas sem haver necessariamente cálculos específicos ou, geometricamente, pontos do plano cartesiano em que o gráfico da função intercepta o eixo-x. Diz-se que a ação foi interiorizada e passou a ser um processo. Outro exemplo é o processo de derivação de uma determinada função $y = \frac{1+x^2}{x^2}$, que pode ser feito por diferentes procedimentos como a regra do quociente, a regra do produto $\left((1+x^2) \left(\frac{1}{x^2} \right) \right)$ ou a simplificação para $x^2 + 1$ antes de se fazer a derivação.

Para Tall (1999), o foco no nível processo dá-se nos dados e nos produtos mais do que no procedimento particular usado. Entendemos isso como o momento em que o estudante não se limita apenas a encontrar uma resposta para o problema, mas se interessa em interpretá-lo, compreendê-lo, apresentando estratégias de raciocínio mais elaboradas do que no nível procedimento.

O último nível do pensamento matemático, o *proceito*, é um neologismo de **processo e conceito**. Nele, a realização de procedimentos e processos vai se tornando cada vez mais sofisticada, o que propicia pensar a matemática simbolicamente, ou seja, de maneira mais formal que técnica. Uma vez nesse estágio, o aluno usufrui de todos os níveis de sofisticação, sua necessidade dos números é minimizada e torna-se maior sua capacidade de abstração. Em Álgebra Abstrata, por exemplo, a identificação do anel Z_2 como $Z/2Z$ através de um isomorfismo, pode requerer do estudante um nível de proceito.

Tall (1999) destaca que “proceitos permitem que o indivíduo não somente conduza procedimento, mas que considere símbolos como objetos mentais, e então não somente se faça matemática, mas também se pense sobre conceitos”.

Assim, conforme Domingos (2003), enquanto o conhecimento de um procedimento específico possibilita ao estudante fazer um cálculo ou uma manipulação, outras alternativas permitem-lhe mais eficiência e flexibilidade para

escolher o melhor caminho para se atingir um dado objetivo. Mas é a capacidade de pensar sobre o simbolismo matemático que permite ao indivíduo mover-se mais facilmente entre processo e conceito.

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

3.1 A OPÇÃO METODOLÓGICA

A escolha metodológica foi por uma abordagem qualitativa de pesquisa, devido à natureza de nossa investigação.

Segundo Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (2001), as pesquisas qualitativas têm como principal característica o fato de seguirem uma tradição interpretativa. Na visão desses autores, isso significa que:

essas pesquisas partem do pressuposto de que as pessoas agem em função de suas crenças, percepções, sentimentos e valores e que seu comportamento tem sempre um sentido, um significado que não se dá a conhecer de modo imediato, precisando ser desvelado. (Ibid, 2001, p.131).

Em consonância com Domingos (2003), entendemos que a pesquisa qualitativa é uma forma de estudo da sociedade com maior abrangência de significados e que tem, em sua maioria, o objetivo de compreender a realidade social das pessoas, grupos e culturas.

Os dados da pesquisa qualitativa são, geralmente, de caráter descritivo, e são obtidos no contato direto do pesquisador com a situação e o contexto pesquisado. Para Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (2001, p.132), os dados qualitativos são descrições detalhadas de situações, eventos, pessoas, interações e comportamentos observados. Segundo esses autores, as pesquisas qualitativas têm características multimetodológicas, isto é, usam uma grande variedade de procedimentos e instrumentos de coleta de dados.

Na presente pesquisa, os dados foram coletados através da realização dos seguintes procedimentos:

- *Contato direto do pesquisador/orientando com os estudantes, através de diálogos e aplicação de questionários.*

O acompanhamento do curso de Álgebra I possibilitou-nos manter conversas constantes com os alunos participantes da pesquisa, de modo mais “informal” nos momentos que antecediam o início das aulas, durante os intervalos e ao término das mesmas. Percebemos que essa informalidade permitia aos alunos um razoável grau

de espontaneidade ao comentarem sobre suas dificuldades com determinados conteúdos da disciplina. Essas impressões eram muitas vezes ratificadas nas respostas aos questionários aplicados à turma.

- *Registro das diversas falas ou silêncios dos estudantes durante as aulas e plantões de dúvidas, que apontassem sinais de conflitos de aprendizagem.*

Embora os professores/pesquisadores, aqui representados pelo orientador e orientando, estivessem no mesmo ambiente de pesquisa e compartilhassem os mesmos objetivos, suas funções eram distintas. Enquanto o professor/orientador conduzia as aulas, isto é, determinava a dinâmica dos trabalhos em sala, o pesquisador/orientando acompanhava essa dinâmica junto à turma, registrando a interação entre os alunos e o professor. As anotações eram feitas com base nas perguntas dos alunos, bem como em suas respostas ou silêncios diante das indagações do professor.

O registro dessas observações era analisado ao término das aulas, constituindo-se em importante fonte de dados para a pesquisa.

- *Observação das resoluções das questões de provas.*

Outra fonte de dados foi o acompanhamento das provas e trabalhos aplicados à turma. A análise das respostas dos alunos às questões propostas nos auxiliou na identificação dos possíveis conflitos de aprendizagem. Foram aplicadas 4 avaliações no decorrer do semestre letivo.

- *Análise do livro de Álgebra Abstrata adotado no curso, de outras obras constantes na bibliografia e das anotações dos conteúdos matemáticos desenvolvidos em sala.*

O material didático disponível para os alunos compunha-se do livro adotado *Introdução à Álgebra* (GONÇALVES, 1999) e das seguintes obras da bibliografia que constavam do acervo bibliotecário da universidade para empréstimo ou consulta:

- DEAN, R. A. Elementos de Álgebra Abstrata. LTC;
- DOMINGUES, H. H. & IEZZI, G. Álgebra Moderna. Atual Editora;
- LEQUAIN, Y & GARCIA, A. Álgebra: uma introdução. Projeto Euclides.

- HEFEZ, A. Curso de Álgebra (vol. 1). Coleção Matemática Universitária. IMPA.

O livro adotado (GONÇALVES, 1999), mesmo à disposição na biblioteca, foi adquirido pela maioria dos alunos que durante as aulas acompanhavam o texto do livro e as notas de aula do professor.

Desse modo, nosso olhar se voltou para a análise de como se apresentavam os textos matemáticos para os estudantes, particularmente as dificuldades com o simbolismo algébrico e a realização de tarefas (exercícios) propostas.

- *Um estudo do pensamento matemático avançado na perspectiva da psicologia cognitiva.*

Nessa etapa, traduzimos trabalhos de Dreyfus sobre os processos que formam o pensamento matemático avançado e artigos de Tall e Vinner acerca da teoria da imagem e definição conceituais.

Teses e dissertações que trabalharam com o mesmo referencial teórico foram revisadas, em particular a pesquisa de Domingos (2003) que versa sobre a compreensão de conceitos matemáticos avançados e a de Brandemberg (2009) a respeito da teoria de grupos em Álgebra.

- *Um levantamento da Álgebra como ciência e como disciplina do currículo escolar.*

Consultamos obras clássicas da História da Matemática, entre elas Boyer (1996) e Eves (2004), além de algumas pesquisas recentes como a dissertação de Mondini (2009) sobre as concepções de professores universitários em relação à disciplina Álgebra em cursos de licenciatura em Matemática.

Ratificamos a nossa intenção por um enfoque de natureza qualitativa, visando compreender as dificuldades dos estudantes na aprendizagem da Álgebra Abstrata, através de uma análise mais detalhada e subjetiva. Não objetivamos analisar os dados segundo métodos estatísticos nem utilizar quantificações significativas; faremos apenas algumas quantificações descritivas, quando necessário, para elucidar o contexto ou instrumentos de pesquisa.

3.2 O CONTEXTO DA PESQUISA DE CAMPO

O contexto de nossa investigação ocorreu durante o 1º semestre de 2011, mais precisamente entre os meses de março e julho, no acompanhamento das aulas de Álgebra I, disciplina obrigatória em cursos de Licenciatura em Matemática. A carga horária era de 60 horas-aula, com 4 horas-aula semanais e a ementa continha os seguintes tópicos: Anéis e Corpos; Anéis de Polinômios; Extensões Algébricas dos Racionais e Grupos. As aulas foram ministradas pelo prof. Dr. Carlos Alberto Santana Soares, nosso orientador neste estudo. As aulas regulares se realizaram em dois dias da semana, a saber: terça-feira e quinta-feira, no horário das 16h às 18h.

Os estudantes/participantes da pesquisa aceitaram espontaneamente colaborar com o estudo, informados sobre os nossos objetivos e sob a garantia de privacidade e confidencialidade na omissão de suas identidades. Trabalhamos com um grupo de 12 alunos que tinha frequência regular nas aulas e nas atividades do curso.

Com o propósito de conhecê-los melhor, levantamos junto à turma algumas informações sobre o perfil dos alunos através de questionários que analisaremos com mais detalhes no capítulo 5.

Os alunos cursavam o 7º período da Licenciatura em Matemática e se deparavam pela primeira vez com o curso de Álgebra Moderna, trazendo como pré-requisito a disciplina Introdução à Teoria dos Números, cursada pela maioria entre o 2º e 4º períodos, ou seja, no mínimo há um ano.

Sobre possível experiência como docente, 7 alunos responderam sim, com trabalhos em cursinhos pré-vestibulares, escolas públicas, projetos da universidade, além de aulas particulares.

4. APRESENTANDO E DISCUTINDO OS DADOS DA PESQUISA

4.1 O QUE NOS REVELARAM OS QUESTIONÁRIOS

Durante o trabalho de campo, além dos diálogos informais que mantivemos com os estudantes na busca de captar suas dificuldades, impressões e até mesmo angústias, aplicamos dois questionários que nos trouxeram algumas importantes informações.

Em relação à interação com o material didático, à percepção da disciplina e às dificuldades com os conteúdos algébricos, tivemos os seguintes dados:

1º- Para 10 alunos, a maior dificuldade de compreensão do livro-texto de Álgebra (GONÇALVES, 1999) estava na resolução dos exercícios propostos, enquanto 2 citaram a teoria e os exemplos.

2º- Sobre a possibilidade de utilização de outras obras indicadas na bibliografia, 8 alunos disseram não consultar e 4 indicaram o livro de *Álgebra Moderna* (DOMINGUES & IEZZI). Percebemos que esses livros não diferem muito no que se refere às dificuldades de interação dos alunos com os mesmos.

3º- Quando questionados sobre o que um livro de Álgebra deveria conter no sentido de facilitar a aprendizagem dos conteúdos, foi apontada, preferencialmente, a alternativa de “*exercícios comentados*”, seguida da opção “*exercícios propostos em níveis de dificuldades diferentes*”.

4º- Em relação à dificuldade de compreensão dos conteúdos, 9 alunos apontaram “*anéis quocientes*” como o item mais complexo, seguido de 4 indicações para “*ideais maximais*”.

5º- Perguntados sobre a relevância do estudo de Álgebra Moderna para a formação do professor de Matemática, a grande maioria, 11 alunos, considerou importante; porém, mesmo aqueles que já atuam em sala de aula não justificaram com clareza essa questão. Alguns, embora apontassem pontos interessantes do conteúdo como anéis e polinômios, admitiram “falta de maturidade” para justificar suas respostas.

A fim de esclarecer, apresentaremos alguns trechos das respostas dos estudantes:

“O que ocasionalmente pode ocorrer é certa dificuldade em “ligar” o que se estuda na faculdade (em Álgebra I, por exemplo) com o que se faz em sala de aula quando o material utilizado é muito “pesado” ou carregado na notação.”

“Sim, mas não com toda intensidade como é visto.”

“Sim, principalmente a parte de polinômios.”

“Sim, mas não sei explicar.”

“Não tenho maturidade para expressar tal.”

6º- Quando indagados se outras disciplinas do curso apresentaram-se tão ou mais abstratas quanto a Álgebra Moderna, 8 alunos responderam afirmativo com indicações para *Análise e Álgebra Linear*.

4.2 AS OBSERVAÇÕES EM SALA DE AULA

Nesta seção apresentaremos os registros feitos durante as aulas do curso de Álgebra I, conservando a linguagem matemática formal e destacando os pontos de conflitos dos alunos sob o olhar do nosso referencial. Intenciona-se mostrar, como num “diário de bordo”, o desenvolvimento das aulas com ênfase na análise da comunicação entre o professor e os estudantes. A apresentação não necessariamente está em ordem linear, pois, mesmo respeitando a ementa do curso, entendemos que na complexa dinâmica da sala de aula, tópicos distintos da matéria vieram à tona em momentos a priori não programados. Enfatizamos que a apresentação dos conteúdos matemáticos visa esclarecer, dispondo ao leitor os instantes em que as dificuldades foram detectadas.

O curso iniciou-se, como é comum, com o professor apresentando os conteúdos que seriam trabalhados, as referências bibliográficas com a indicação do livro-texto e demais orientações sobre avaliações, horário de atendimento, entre outras.

4.2.1 Sobre o conceito de anel

O primeiro conceito apresentado foi o de anel, posto da seguinte forma: Seja A um conjunto não vazio munido de duas operações, chamadas soma (+) e produto (\cdot). Chama-se $(A, +, \cdot)$ um anel se as condições seguintes forem verificadas, quaisquer que sejam x, y e z pertencentes a A .

- a) $x + y = y + x$ (*comutatividade da soma*)
- b) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (*associatividade da soma*)
- c) existe um único elemento 0 (zero), tal que $0 + x = x + 0 = x$ (*existência de elemento neutro para soma*)
- d) $\forall x \in A$, existe um único elemento $-x$, tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$ (*existência de inverso aditivo*)
- e) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (*associatividade do produto*)
- f) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$; $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$ (*distributividade à esquerda e à direita*)

Deve-se observar que tanto as duas operações – soma e produto – quanto as seis condições acima apresentadas constituem a definição formal da estrutura algébrica anel.

O professor mostrou que o conjunto dos inteiros Z , com as operações usuais, é um anel, uma vez que as propriedades anteriores são satisfeitas; enquanto, para os números naturais N , a não existência do inverso aditivo ou simétrico ($-x$) inviabiliza este conjunto como anel.

Não se registrou nenhum questionamento dos alunos em relação à exemplificação de Z como anel; entendemos tratar-se de um conjunto numérico com o qual o estudante tem amplo contato em sua vida escolar. A nossa conjectura é que a imagem conceitual dos alunos sobre o que é a estrutura matemática anel foi formada a partir do exemplo numérico do conjunto Z , ou seja, o conhecimento da definição formal de anel, no simbolismo de seus axiomas, não garantiu, por si só, a compreensão desse conceito por parte dos alunos.

Se, na perspectiva do referencial, adquirir um conceito é formar imagens do mesmo, acreditamos que Z permitiu à turma a constituição de uma imagem e uma definição conceituais de anel, pois, sempre quando solicitados, recorriam a esse

exemplo e o expressavam durante as aulas. Dessa maneira, a partir do momento em que a imagem conceitual de anel se formou, as propriedades da definição formal pareceram permanecer inativas ou até mesmo ser esquecidas.

Segundo Vinner (1991), pode-se imaginar um andaime onde o papel da definição formal aparece como suporte para a construção da imagem, que, uma vez concretizada, pode dispensar a definição.

Na sequência do estudo de anel, outras três propriedades foram apresentadas. O anel $(A, +, \cdot)$ é chamado:

g) comutativo se $\forall x, y \in A, x \cdot y = y \cdot x$

h) com unidade, se $\exists 1 \in A, 1 \neq 0, x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$

i) sem divisores de zero se $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$

O anel que preenche as 3 condições anteriores é denominado *domínio de integridade* e, por sua vez, será chamado *corpo* se $\forall x \in A, x \neq 0$, existir x^{-1} tal que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$, isto é, todo elemento x não nulo tem *inverso multiplicativo* x^{-1} .

Os alunos perceberam que o anel Z satisfaz as condições (g), (h) e (i) acima, elevando-se a um domínio de integridade, pois para quaisquer de seus elementos vale a comutatividade do produto, existe a unidade (elemento 1) e, para que o produto de dois de seus elementos seja zero, é necessário que ambos sejam nulos ou pelo menos um deles seja zero. No entanto, como os únicos elementos invertíveis de Z são 1 e -1, não o chamamos de corpo. Diferentemente, o conjunto dos racionais Q e o dos números reais \mathfrak{R} são corpos, uma vez que todos os seus elementos, exceto o zero, possuem inversos multiplicativos.

Vimos essa passagem como uma ampliação da imagem conceitual inicial do estudante acerca do conceito de anel. Assim, em relação às propriedades (g), (h) e (i), tomando novamente Z como exemplo e, para corpos, os conjuntos dos racionais Q e o dos reais \mathfrak{R} , notamos novamente, durante as aulas, que os alunos têm imagens conceituais desenvolvidas em relação a esses exemplos, não se registrando dúvidas relevantes.

Todavia, a solicitação do professor à turma para que dessem outros exemplos de estruturas em que essas propriedades anteriores não fossem válidas, veio acompanhada de certa introspecção e nenhuma resposta foi dita. O fato de não se

ouvir resposta não garante, necessariamente, que os alunos não soubessem. Talvez, não tivessem certeza.

Percebeu-se, então, a necessidade de se explorar mais o relacionamento entre a definição formal e a construção de contra-exemplos, isto é, situações onde uma ou mais propriedades do conceito não se verificam. Foi proposto, então, que se analisasse o conjunto $M_2(\mathfrak{R}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ das matrizes reais 2x2. O anel $(M_2, +, \cdot)$ é

não comutativo, possui o elemento neutro $0_M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ para a soma e a unidade $1_M =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Os alunos puderam observar, por exemplo, que no conjunto $X = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in$

$M_2(\mathfrak{R})$ todos os elementos são divisores de zero como se verifica no produto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, para quaisquer $b_1, b_2 \in \mathfrak{R}$.

O conjunto $Y = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathfrak{R} \right\}$ trata-se de um anel comutativo, com

unidade e sem divisores de zero. Vejamos:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a_1 a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \text{ ou } a_2 = 0.$$

Após a elaboração e discussão das várias situações acima envolvendo as matrizes $M_2(\mathfrak{R})$, pareceu-nos que a imagem conceitual dos estudantes sobre a existência de estruturas *não comutativas* se fundamentou de novo sobre um conteúdo, a priori já estudado, que é o das matrizes. Essa conjectura se apoia, dentro da transição do pensamento matemático elementar para o mais avançado, na necessidade de o estudante operar inicialmente com os números para atingir depois um maior nível de abstração. Neste caso, seria a generalização para o conjunto das matrizes $M_n(\mathfrak{R})$ a partir de $M_2(\mathfrak{R})$.

Outro conjunto discutido foi o dos anéis de classes de restos $Z_m = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1} \}$, em que o elemento $\bar{a} \in Z_m$ é a classe dos números que deixa resto a na divisão por m , sendo válidas as operações $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$ e $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$. Embora não seja estudado na educação básica, Z_m é visto na disciplina de Teoria dos Números, pré-requisito do curso de Álgebra I aqui analisado. Percebemos que Z_m propiciou à turma formar novas imagens conceituais acerca do termo “divisor de zero”, que se mostrava como um fator de conflito potencial quando se comparava esses conjuntos, digamos menos “comuns”, com os mais tradicionais como o dos reais. Por exemplo, no anel $Z_6 = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5} \}$ tem-se $\bar{2} \cdot \bar{3} = \overline{2 \cdot 3} = \bar{6} = \bar{0}$, isto é, dois elementos do conjunto são diferentes de zero e o produto deles é zero, donde se conclui que $\bar{2}$ e $\bar{3}$ são divisores de zero em Z_6 . Mais à frente, analisaremos em detalhes as dificuldades observadas em relação ao anel Z_m enquanto conjunto quociente.

A estranheza manifestada pela turma em relação ao termo *divisor de zero*, levou o professor a destacar para os licenciandos, futuros professores de Matemática, a necessidade de compreenderem, por exemplo, a resolução de equações do 2º grau incompletas do tipo $ax^2 + bx = 0$, com base na propriedade de “sem divisores de zero”. No ensino médio, em estruturas de corpos como a dos reais \mathfrak{R} , resolvemos a equação:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x &= 0 \Rightarrow \\ x \cdot (x - 3) &= 0 \Rightarrow \\ x = 0 \text{ ou } x - 3 &= 0. \end{aligned}$$

A exemplificação acima permitiu aos alunos compreender que, se operarmos em anéis como Z_6 ou em determinadas matrizes, a resolução anterior não se verifica. Foi um momento, a nosso ver, significativo para os licenciandos, alguns já atuando como professores na educação básica, pois puderam ampliar as suas imagens acerca do procedimento, feito muitas vezes de maneira “automática”, quando da resolução de equações desse tipo, apoiada nas propriedades das estruturas algébricas que sustentam tais operações.

Decorrente dos axiomas de anel, foi proposto à turma que demonstrassem outras propriedades, tais como:

- a) $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$
 b) $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$
 c) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$
 d) $(-1) \cdot x = -x$
 e) $(-1) \cdot (-1) = 1$

As demonstrações acima aparecem também como exercícios propostos no livro-texto do curso. Embora, durante a aula em que essas questões foram corrigidas, não se registrassem dúvidas importantes, ao inspecionarmos as avaliações, percebemos que alguns alunos não conseguiram êxito, conforme se verifica a seguir:

a) $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$
 $0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 = 0(x + 0)$; como A é anel sabemos que $x + 0 = 0 + x$; então $0(x + 0) = 0(0 + x) = 0 + 0 \cdot x = 0$ o.p

b) $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$
 $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y$
 $-(x \cdot y) + x \cdot y = (-x) \cdot y + x \cdot y$ o.p
 $0 = (-x) \cdot y + x \cdot y$
 $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y$

Figura 9 – Resolução apresentada na 1ª prova referente às propriedades de anel.

b)	$-(x \cdot y) = (-x \cdot y) = x(-y)$
1ª	$-(x \cdot y) = (-x \cdot y)$
	$(x \cdot y) + [(-x) \cdot y] = (x \cdot y) + (-x \cdot y) = x - x + y - y = 0$
	$\therefore (-x \cdot y) = -(x \cdot y)$
2ª	$-(x \cdot y) = x(-y)$
	$(x \cdot y) + [x(-y)] = (x \cdot y) + (-x \cdot y) = x - x + y - y = 0$
	$\therefore x(-y) = -(x \cdot y)$
3ª	$(-x \cdot y) = x(-y)$ diretamente da 1ª e da 2ª

Figura 10 – Resolução apresentada na 1ª prova referente às propriedades de anel.

Parece-nos que, até aquele momento, alguns alunos ainda não haviam construído uma imagem conceitual capaz de permitir-lhes tais demonstrações, mesmo já tendo contato prévio com as resoluções. Outra conjectura possível está no fato de que eles podem ter buscado uma resposta intuitiva, sem consulta aos axiomas da definição formal, haja vista as imagens conceituais formadas a partir da utilização dessas propriedades de forma automática, sem demonstração, na Álgebra básica.

A propriedade distributiva, tão amplamente utilizada desde o ensino fundamental, está na base das demonstrações anteriores como se observa no caso de $0 \cdot x = 0$ a seguir:

$$\begin{aligned}
 0 \cdot x &= (0 + 0) \cdot x \\
 0 \cdot x &= 0 \cdot x + 0 \cdot x \\
 0 \cdot x + (-0 \cdot x) &= 0 \cdot x + 0 \cdot x + (-0 \cdot x) \\
 0 &= 0 \cdot x
 \end{aligned}$$

As observações aqui feitas nos levam também a pensar na possibilidade de que aqueles que conseguiram desenvolver as demonstrações na prova, poderiam

estar apenas repetindo um procedimento “memorizado” a partir das resoluções feitas em aula.

4.2.2 O conflito do subanel

Na apresentação de subanel, percebemos um fator de conflito potencial em relação à definição formal e às caracterizações desse conceito.

Consideremos a seguinte definição de subanel:

*Seja $A, +, \cdot$ um anel e B um subconjunto não vazio de A , fechado para as operações de soma e multiplicação de A . B é um **subanel** de A se B for um anel com as operações de A .*

A partir da definição apresentada, pode-se inferir que um subanel, enquanto subconjunto não vazio de algum anel, conserva as operações de adição e multiplicação do anel, porém restritas aos elementos do subanel. Herda também as propriedades de anel, que são a associatividade, a comutatividade, existência de elemento neutro e de simétrico para a soma, associatividade do produto e distributividade do produto em relação à soma.

Talvez, por questões de não repetição ou mesmo de síntese, processo próprio da linguagem matemática, a definição formal de subanel é apresentada nos livros de Álgebra de maneira simplificada com ênfase na sua caracterização, pressupondo a capacidade do leitor em perceber essa transição entre os dois conceitos, anel e subanel. Para um leitor experiente como um professor da área, as “sutilezas matemáticas” do texto ou essas entrelinhas podem ser captadas facilmente, ao passo que, para estudantes iniciantes, esses detalhes podem passar despercebidos.

Em relação às caracterizações de subanel, tem-se, no livro-texto de Gonçalves (1999, p. 43), a proposição de que um subconjunto B é subanel de um anel $(A, +, \cdot)$ se e somente se são verificadas as seguintes condições:

- a) $0 \in B$ (o elemento neutro de A pertence a B)
- b) $x, y \in B \Rightarrow x - y \in B$ (B é fechado para a diferença)
- c) $x, y \in B \Rightarrow x \cdot y \in B$ (B é fechado para a produto)

Analisemos a), b) e c) acima. Por hipótese $0 \in B$, $0 - x = -x \in B$, conclui-se que o simétrico de qualquer elemento está no subanel. Se tomarmos x e y pertencentes a B , então $x - (-y) = x + y$ também estará em B . Logo, B é fechado para a soma, preservando as suas propriedades comutativa, associativa e distributiva, possui simétrico aditivo e, pelas hipóteses, é também fechado para a multiplicação e tem elemento neutro da adição. Deve-se notar a não necessidade de se mencionar que B é um conjunto não vazio, pois isso está dito na condição (a).

Durante a aula, o professor partiu da hipótese de que o subanel B é não vazio, caracterizando-o da seguinte maneira:

$(B, +, \cdot)$ será um subanel de A , ($B \neq \emptyset$) se:

$$(a_1) x - y \in B, \quad \forall x, y \in B.$$

$$(b_1) x \cdot y \in B, \quad \forall x, y \in B.$$

Nessa caracterização, os alunos precisariam perceber a não necessidade de se escrever a condição (a) do livro texto.

Notamos um certo desconforto de parte da turma com a diferença entre o que se apresentava no quadro de aula e o que constava no livro, confirmado na seguinte indagação de uma aluna:

- Professor, não precisa mostrar que o zero está no subanel?

O professor interveio e respondeu que a hipótese $B \neq \emptyset$, juntamente com a condição " $x - y \in B$ ", garantem a existência do elemento neutro 0 . Explicando melhor: como $B \neq \emptyset$, tome $x \in B$. Por hipótese, $x - x = 0 \in B$.

Os critérios de caracterização de subanel, a partir das condições de ser fechado para a diferença e para o produto, levaram, a nosso ver, os alunos a uma tendência a abandonarem as demais propriedades de anel, como se o subanel não fosse também um anel. Parece-nos que a imagem conceitual formada com a caracterização de subanel se sobrepôs à definição formal desse conceito, enquanto teste relativamente mais simples de se verificar se determinado conjunto é ou não subanel, comparado ao trabalho de verificação de cada uma das propriedades da definição de anel. Todavia, a não observância de que, nas condições apresentadas

para o teste de subanel, está implícita toda a definição de anel pode levar o estudante à formação de imagens conflitantes da interação desses conceitos.

A fim de ratificar as considerações anteriores, vimos que, quando os alunos citavam exemplos de subanel, pareciam resistir em vê-los como anéis. Em diferentes momentos, o professor, ao solicitar à turma casos de subanel, obtinha como respostas os conjuntos $2Z = \{ 0, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \dots \}$, $3Z = \{ 0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \dots \}$ etc. As imagens dos conjuntos nZ como subanéis de Z já pareciam bem sedimentadas; porém, os alunos não expressavam essas estruturas como anéis quando questionados pelo professor, como se, na perspectiva deles, as propriedades de anel não fossem “absorvidas” pelo subanel, ressalvados os casos de não existência da propriedade na nova estrutura, como o fato de $2Z$ não possuir unidade.

4.2.3 As dificuldades com os exercícios do livro

Neste momento do curso, após estudar os conceitos de anel e subanel, a turma já apresentava desconforto com os exercícios propostos do livro-texto (GONÇALVES, 1999). As queixas eram registradas quando o professor fazia a correção de alguns exercícios em sala de aula e durante o atendimento de dúvidas no departamento.

Numa inspeção das 20 questões propostas para anel e das 14 para subanel, percebe-se que são, em sua maioria, demonstrações. Se pressupormos válida, segundo o nosso referencial, a necessidade de se passar pelos níveis de procedimento e processo para se atingir o nível de pensamento matemático avançado, o proceito, a proposição de tarefas do tipo “*prove que*” ou “*mostre que*” requer, em nosso entendimento, a capacidade, tanto de generalização de casos particulares, quanto de expansão das definições matemáticas estudadas pelo aluno.

Observamos que esses alunos, mesmo em final de curso de licenciatura em Matemática e, a princípio, já tendo estudado outros conteúdos matemáticos abstratos, demonstraram significativas dificuldades na resolução desses exercícios de Álgebra, evidenciando um forte obstáculo ao formalismo algébrico. Se pensarmos que provar em Matemática é como um procedimento de validação que a caracteriza como ciência não experimental e se admitirmos que saber demonstrar é, senão a

mais importante, uma das principais habilidades requeridas de quem estuda Matemática, poderemos entender um pouco o sentimento de ansiedade e, por vezes, de frustração, do qual o estudante é acometido quando está diante dessas tarefas cognitivas.

Para exemplificar nossas argumentações acima, separamos para análise alguns exercícios do livro-texto indicados à turma pelo professor e, posteriormente, por solicitação dos alunos, resolvidos em sala. Procuraremos detalhar as etapas matemáticas da resolução dessas questões com o objetivo de explicitar os requisitos necessários para se alcançar êxito. Tentaremos também trazer as percepções dos alunos durante a resolução das tarefas.

Esperamos, assim, compreender um pouco dos conflitos encontrados pelos estudantes quando estão, pela primeira vez, diante desse tipo de atividade em Álgebra Abstrata.

Ex.1) Seja A um domínio de integridade e a, b e $c \in A$. Prove que, se $a \neq 0$ e $ab = ac$ então $b = c$.

COMENTÁRIOS: Note que, ao se trabalhar com domínios de integridade, faz-se o cancelamento ou corte do termo a nos dois lados da igualdade $ab = ac$, ficando $b = c$. Operamos, naturalmente assim, com os conjuntos numéricos.

Entretanto, a compreensão matemática ou o convencimento da veracidade desse fato se apoia nos axiomas de anel de integridade. De maneira pormenorizada, tem-se:

$$ab = ac$$

pela existência de simétrico aditivo,

$$ab + [-(ac)] = ac + [-(ac)]$$

$$ab - ac = 0$$

pela propriedade distributiva,

$$a(b - c) = 0$$

por hipótese, domínio de integridade não possui divisores de zero,

$$a = 0 \text{ ou } (b - c) = 0$$

ainda, por hipótese, como $a \neq 0$, então,

$$b - c = 0$$

$$b = c.$$

Pode-se perceber que, em todas as etapas da demonstração, foram utilizadas propriedades da definição formal, ou seja, o êxito na realização dessa tarefa não deve seguir apenas consulta à imagem conceitual ou, dito de outra forma, baseando-se em uma resposta intuitiva exclusiva.

No caso de trabalharmos com *corpos*, bastaria utilizar o fato da existência do inverso multiplicativo para todo elemento diferente de zero. Em termos matemáticos:

$$ab = ac,$$

$$a^{-1}ab = a^{-1}ac,$$

$$1b = 1c,$$

$$b = c, \text{ como se quer mostrar.}$$

Ex.2) Seja A um anel tal que $x^2 = x$, $\forall x \in A$. Prove que A é um anel comutativo.

COMENTÁRIOS: Na resolução dessa questão, o professor iniciou com uma pergunta que, a nosso ver, explorou uma resposta intuitiva dos alunos. Existe anel tal que para todo elemento do mesmo tenhamos $x^2 = x$?

Verificou-se que, no anel comutativo $Z_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$, tem-se:

$$\bar{0}^2 = \bar{0},$$

$$\bar{1}^2 = \bar{1}.$$

Assim, pareceu-nos que essa abordagem intuitiva ajudou a turma a elaborar uma compreensão inicial da questão, antes de se passar a um estágio mais rigoroso.

Sobre o rigor, concordamos com Reis (2001) que aquele se dá em níveis, cabendo ao professor a avaliação

[...] de qual nível de rigor é conveniente atingir sem que, com isso, percamos o sentido e a real compreensão das idéias matemáticas. Para isso, devemos levar em consideração, fundamentalmente, o perfil do nosso estudante no que se refere a sua formação matemática anterior e aos objetivos das disciplinas que ministramos para os diversos cursos da carreira universitária, os quais formam profissionais com os mais diferentes espectros. (REIS, 2001, p. 79).

Num segundo momento, os alunos verificaram etapas semelhantes às aquelas que ocorreram no exemplo 1, com a utilização das propriedades da definição formal de anel, assim posto:

$$\begin{aligned}x^2 &= x \Rightarrow \\x^2 - x &= 0 \Rightarrow \\x \cdot (x - 1) &= 0 \Rightarrow \\x &= 0 \text{ ou } x = 1.\end{aligned}$$

Por último, o professor propôs a seguinte situação matemática:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2, \\ \text{como no anel } A, (a + b)^2 &= (a + b), \text{ tem-se} \\ (a + b) &= a^2 + ab + ba + b^2, \\ (a + b) &= a + ab + ba + b, \\ ab + ba &= 0, \\ ab &= -ba, \\ (ab)^2 &= (-ba)^2, \\ ab &= (ba)^2,\end{aligned}$$

concluindo $ab = ba$ e mostrando que o anel A é comutativo.

Nossa análise da resolução dessa questão é que ela permitiu aos estudantes e exigiu deles que percorressem os 3 níveis de sofisticação do pensamento matemático proposto por Tall (1999):

- O nível *procedimento*, com a verificação do conjunto Z_2 como exemplo da questão;
- O *processo*, com a utilização das propriedades de anel;
- O nível *proceito*, com a sofisticação do simbolismo matemático e justificação das passagens presentes no transformismo algébrico, alcançadas por meio da

criatividade matemática utilizada na parte final da demonstração em que se verifica a comutatividade do anel.

Ex.3) Mostre que $Z_3 = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2} \}$ não é subanel de $Z_5 = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4} \}$.

COMENTÁRIOS: Essa questão traz na sua própria notação um fator de conflito. Escrever os elementos de Z_3 com a mesma simbologia de Z_5 pode levar o estudante a visualizar Z_3 como subconjunto de Z_5 . Partindo dessa premissa e testando as duas condições da caracterização de subanel, verificaremos que a diferença e o produto de quaisquer dois elementos de Z_3 permanecem em Z_3 . Isso nos levaria à conclusão equivocada de que Z_3 é subanel de Z_5 .

Na hipótese de a notação matemática não ser problema para o estudante, faz-se necessário o entendimento de que, para ser subanel, não basta testar a diferença e o produto dos seus elementos, mas, antes de mais nada, que seja *subconjunto* do anel. Ou seja, é desejável que se tenha clareza disso quando da consulta à definição formal de subanel.

O fato de o estudante possuir total domínio e compreensão plena da definição formal de um certo objeto matemático é condição suficiente para que ele consiga resolver tarefas mais elaboradas como, por exemplo, os exercícios de demonstração relativos ao assunto?

Embora não se busquem aqui respostas específicas ao questionamento anterior, entendemos, a priori, que, mesmo possuindo imagens conceituais bem ricas acerca de um conceito matemático, não se pode garantir o êxito no cumprimento dessas tarefas de demonstração. Talvez, seja essa uma temática relevante de pesquisa em Educação Matemática com vistas a elucidar a correlação entre construção das imagens e posterior resolução de exercícios.

4.2.4 Os conflitos com o conceito de ideal

Na teoria dos anéis, uma importante classe de subanéis é a dos *ideais*. Um subanel I de um anel A é chamado um ideal de A se para todo $a \in A$ e todo $x \in I$, $xa \in I$ e $ax \in I$. Assim, um subanel de um anel A é um ideal se ele “absorve” os elementos de A , isto é, $a \cdot I \subseteq I$ e $I \cdot a \subseteq I$ para todo elemento a do anel A .

Na definição formal apresentada acima, devemos perceber que estão inseridas as operações e propriedades que compõem a definição de anel e subanel, analisadas anteriormente. É importante que, uma vez constituídas as imagens conceituais desses objetos matemáticos, o estudante possa ampliá-las a partir do contato com o novo objeto matemático, compreendendo que em sua essência os ideais são anéis e, portanto, conservam a estrutura algébrica já estudada.

Durante as aulas observadas, o professor apresentou exemplos de ideal e enfatizou para os alunos a necessidade de perceberem tratar-se de um subanel que absorve os elementos do anel, como o são todos os subanéis $n\mathbb{Z}$ do anel dos inteiros \mathbb{Z} . Para verificarmos, tome $2\mathbb{Z} = \{ 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots \}$; o produto entre quaisquer elementos de $\mathbb{Z} = \{ 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \}$ e de $2\mathbb{Z}$ estará contido no ideal $2\mathbb{Z}$. Mostrou-se também o fato de que, embora um ideal I num anel A seja um subanel de A , a recíproca não é verdadeira. Por exemplo, \mathbb{Z} é um subanel de \mathbb{Q} , mas não é um ideal em \mathbb{Q} , pois $1 \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$, porém $\frac{1}{3} \cdot 1 \notin \mathbb{Z}$.

De modo análogo ao que ocorreu na transição de anel para subanel, percebemos que os alunos tenderam a sobrepor a caracterização apresentada para ideal à definição formal. Essa caracterização pode ser enunciada sob a forma do seguinte teorema:

Um subconjunto não vazio I é um ideal de um anel A se:

- a) $a - b \in I$, para todo $a, b \in I$
- b) $x.a$ e $a.x$ estão em I quando $a \in A$ e $x \in I$.

Parece-nos que o teste acima, na concisão dos seus dois itens, limita a imagem conceitual do objeto matemático em questão, muito embora entendamos tratar-se de um simplificador da verificação de ser ou não ideal. É como se essa restrição da imagem levasse o estudante a perceber os conceitos de anel, subanel e ideal de maneira desconexa ou, melhor dizendo, sem a compreensão de que a estrutura algébrica anel é a base da qual derivam os demais conceitos, ressalvadas as pequenas diferenças.

Foram estudados também os conceitos de ideal maximal e ideal principal. Em termos matemáticos, J é dito um ideal maximal de A quando $J \subset A$, $J \subset I \subset A \Rightarrow I = J$

ou $I = A$ e J será um ideal principal de A se existir $x \in A$ tal que $x \cdot A = J$. Para ilustrar essas definições, temos os exemplos:

1- Os ideais $n\mathbb{Z}$ do anel \mathbb{Z} são todos principais, pois $n \in \mathbb{Z}$ para qualquer $n \in \mathbb{Z}$.

2- O ideal $2\mathbb{Z}$ é maximal em \mathbb{Z} . De fato, se existir um ideal J em \mathbb{Z} , $J \neq 2\mathbb{Z}$ tal que $2\mathbb{Z} \subset J \subset \mathbb{Z}$, então J possui os números pares $2t$ pois contém o conjunto $2\mathbb{Z}$ e algum ímpar $2t + 1$. J ideal, $(2t + 1) - (2t) = 1 \in J$. Logo, $J = \mathbb{Z}$ e $2\mathbb{Z}$ é ideal maximal em \mathbb{Z} .

Na observação das questões de provas sobre ideais, percebemos que os alunos já conseguiam produzir e justificar exemplos de ideal, ideal principal, ideal maximal e as relações entre eles. Conjecturamos, a partir disso, que os alunos tivessem atingido o nível de *processo*, relacionando definições, refletindo sobre exemplos. Entretanto, questões de ideal que necessitavam de demonstrações ainda não eram desenvolvidas pela maioria dos alunos, o que ocorreria em um nível como o 3° estágio do pensamento matemático, o proceito.

As considerações acima podem ser fundadas em algumas resoluções de provas que serão apresentadas a seguir:

l) Em uma das avaliações foi solicitado exemplo, com justificativa pelo aluno, de um anel A e um ideal J de A que fosse principal, mas não fosse maximal.

7) O ideal $4\mathbb{Z}$ é subanel de \mathbb{Z} e gerado pelo 4 pois $2\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$ e $2\mathbb{Z} \neq 4\mathbb{Z}$ mas $4\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z}$, ou seja $4\mathbb{Z}$ é principal mas não é maximal. \checkmark 3,0

7) Seja $A = \mathbb{Z}$ e $J = 4\mathbb{Z}$.
 Note que $J = 4 \cdot \mathbb{Z}$, com $4 \in \mathbb{Z}$. Logo J é principal de A .
 Considere $2\mathbb{Z}$. Temos que $4\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z}$ e $2\mathbb{Z}$ é principal de A , pois $2\mathbb{Z} = 2 \cdot \mathbb{Z}$ e $2 \in \mathbb{Z}$. Assim, $4\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$.
 Portanto, $4\mathbb{Z}$ é principal mas não é maximal. \checkmark 3,0

Figura 11 – Resolução apresentada na 2ª prova sobre as propriedades de ideal.

II) Na questões de demonstração, por exemplo, mostrar que todo ideal de Z_n é principal, têm-se, além de resoluções “em branco”, outras que ratificam dificuldades no desenvolvimento, como se pode verificar a seguir:

1) Temos: $Z_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$
 Suponhamos I um ideal de Z_n . Para todo $x \in Z_n$, existe $a \in Z_n$ tal que $a \cdot x = a \cdot Z_n = Z_n a = x \cdot a = I$, pois $I \subseteq Z_n$ e $I \neq \emptyset$. Assim, I é principal. *oo*

① Seja $\bar{a} \in I$ e $\bar{b} \in Z_n$ sendo I um ideal Z_n .
 então $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab} \in I$. *oo*

Figura 12 – Resolução apresentada na 2ª prova sobre as propriedades de ideal.

As exemplificações acima novamente evidenciam as dificuldades dos alunos com o formalismo matemático, quando da transição dos níveis procedimentais com as estruturas algébricas, por exemplo, operar com conjuntos numéricos, para um nível mais elaborado de abstração necessário ao se trabalhar com demonstrações matemáticas.

4.2.5 Anéis quocientes: um caso especial

Um conceito que se mostrou extremamente complexo para os alunos foi o de anel quociente. Isso ficou evidente na observação dos questionários comentados na seção 5.1 em que, dos doze alunos consultados, nove indicaram esse item como o conteúdo de maior dificuldade de compreensão. A observação do diálogo entre os estudantes nos intervalos de aula ou nos plantões de dúvida confirmou o desconforto dos mesmos em relação à compreensão desse conceito.

Buscou-se, então, a existência de pesquisas a respeito dessa questão. Em um artigo sobre o anel quociente Z_m , Soares & Campos (2008) apoiam a hipótese de

que as dificuldades em se trabalhar com a estrutura quociente estão ligadas à noção de relação de congruência. Segundo as autoras:

[...] ao se trabalhar com um conjunto quociente, vários outros conceitos matemáticos estão em jogo, como classe de equivalência, operação entre classes e conjunto como elemento de outro conjunto, além de conceitos básicos de teoria de conjuntos como as relações de pertinência e inclusão. (SOARES & CAMPOS, 2008).

Em Álgebra Abstrata, uma congruência é uma relação de equivalência compatível com alguma operação algébrica, por exemplo, a congruência módulo m sobre o anel dos inteiros \mathbb{Z} . Um exemplo simples, porém ilustrativo, da noção de congruência encontra-se em Domingues & Iezzi (2003, p. 53) mostrado a seguir:

Se hoje é sexta-feira, que dia da semana será daqui a 1520 dias?

No quadro seguinte, indica-se por 0 o dia de hoje (sexta-feira), por 1 o dia de amanhã (sábado) e assim sucessivamente:

sexta	sábado	domingo	segunda	terça	quarta	quinta
0	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
...

Observa-se que dois números da sequência 0, 1, 2, estão na mesma coluna se, e somente se, sua diferença é divisível por 7. Resta-nos saber em que coluna da tabela acima se encontra o número 1520, encabeçada por um dos números r da primeira linha ($0 \leq r \leq 6$). Logo, para algum inteiro positivo q , temos

$$1520 - r = 7q$$

$$1520 = 7q + r,$$

e, resolvendo a divisão euclidiana, encontra-se $q = 217$ e $r = 1$. Assim, daqui a 1520 dias será sábado.

Questões aritméticas como essa, que trabalham com periodicidade, estão sintetizadas na definição de congruência e apresentada em Domingues & Iezzi (2003, p. 53) do seguinte modo:

“Sejam a , b inteiros quaisquer e m um inteiro não negativo, diz-se que a é congruo a b módulo m se $m \mid (a - b)$, isto é, se $a - b = mq$. Em notação, usa-se também $a \equiv b \pmod{m}$ para expressar que a é congruo a b , módulo m .”

Na hipótese de que somente a definição formal acima não possibilite ao estudante formar imagens que lhe permitam a compreensão plena do conceito de congruência, concordamos com Soares & Campos (2008), ao afirmarem que o não entendimento da relação de congruência como uma ferramenta importante para a construção de novos objetos matemáticos pode levar o estudante a dificuldades na aprendizagem de outros conceitos obtidos do uso da congruência, como anel quociente e grupo quociente.

Identificamos isso, em nosso contexto, durante a aula em que o professor apresentou vários exemplos de anel quociente. Diferentemente de outras situações em que a indicação de exemplos de conjuntos numéricos trazia “significado” para os estudantes após a definição formal da estrutura algébrica, como no caso dos conjuntos $2\mathbb{Z}$, $3\mathbb{Z}$, ..., $n\mathbb{Z}$ serem ideais principais de \mathbb{Z} , a particularização de anel quociente via conjuntos numéricos não se mostrou, a nosso ver, suficiente para evitar as dificuldades de compreensão relativas a esse conteúdo.

Assim, levantamos algumas questões para nos auxiliar na reflexão sobre os conflitos dos estudantes no entendimento da estrutura quociente:

* Que imagens conceituais os estudantes trazem sobre *relação de congruência*, assunto estudado na disciplina Introdução à teoria dos números, pré-requisito de Álgebra I ?

* A elevada quantidade de conceitos matemáticos envolvidos na definição de anel quociente, como *partição de conjunto*, *classes de equivalência*, *congruência*, entre outros, explica o nível de abstração e de conhecimento matemático exigido do estudante para a compreensão dessa estrutura?

Muito embora não possamos aqui esgotar as indagações anteriores, queremos, neste momento, convidar o leitor a assumir um olhar minucioso sobre o fato apontado, na expectativa de que uma reflexão pormenorizada possa nos trazer maior compreensão. Propomos uma análise mais detalhada da definição formal de conjunto quociente, constante nos livros de Álgebra, bem como das observações coletadas em nosso campo de pesquisa relativas às imagens conceituais dos estudantes.

A estrutura quociente é apresentada na maioria dos textos de Álgebra de ensino superior, em sua forma axiomática a partir da definição formal. Esta, apoiada na linguagem da teoria de conjuntos, apresenta vários objetos relacionados como classes de equivalência, relação de equivalência e outros. Entre diferentes maneiras de se apresentar a definição formal, utilizaremos a seguinte:

*Seja R uma relação de equivalência em um conjunto não vazio A . Chama-se **conjunto quociente** de A pela relação R , o conjunto, denotado por A/R , das classes de equivalência da relação R . Em outras palavras,*

$$A/R = \{ \bar{a}; a \in A \}$$

A definição formal de conjunto quociente não difere das definições dos outros conceitos algébricos no que tange à dificuldade de o estudante formar imagem conceitual a partir da definição matemática. Insistimos nessa reflexão com base na percepção de que os alunos criaram imagens conceituais a partir das exemplificações de conjuntos numéricos, como no caso da associação entre o conceito anel e o conjunto dos inteiros Z .

A apresentação e discussão de vários exemplos de anel quociente durante as aulas, inclusive exibindo a partição de conjuntos numéricos, pareceu-nos ainda insuficiente para os alunos superarem os conflitos cognitivos relativos a esse tema. Ou seja, mesmo as exemplificações numéricas, que, em situações anteriores, permitiram a formação de imagens conceituais de certas definições algébricas, nesse caso, não obtiveram o mesmo êxito.

A inspeção dos livros da bibliografia do curso, no capítulo de anel quociente, mostrou-nos uma carência de exemplos baseados em estruturas nas quais os alunos já possuem imagens consolidadas como a do anel Z e seus subanéis. Em alguns casos, inclusive, os textos limitam-se a uma abordagem apenas teórica, com definições, proposições e demonstrações formais.

Nesse sentido, com base nas indagações feitas anteriormente sobre a dificuldade de compreensão da estrutura quociente, faremos as seguintes observações:

- A complexidade, para alunos iniciantes de Álgebra abstrata, em compreender a estrutura quociente passa pelas imagens e definições conceituais que os mesmos

têm em relação aos demais conceitos que estão em jogo, como as classes de equivalência.

- Alunos que possuam imagens vazias ou enfraquecidas dos conceitos matemáticos que gravitam em torno do conjunto quociente, não encontram nos exemplos (numéricos) particulares a condição suficiente para a superação de conflitos de aprendizagem, muito embora possam trabalhar de modo procedimental com essa estrutura.

A partir das conjecturas anteriores, analisaremos os conceitos que estão na base do conjunto quociente, com foco na compreensão desses objetos matemáticos tanto na sua formação quanto nas relações mantidas entre eles.

Em Domingues & Iezzi (2003, p. 78), tem-se que uma relação R sobre um conjunto E não vazio é chamada *relação de equivalência* sobre E se, e somente se, R é reflexiva, simétrica e transitiva. Ou seja, R deve cumprir, respectivamente, as seguintes propriedades:

- a) se $x \in E$, então xRx ;
- b) se $x, y \in E$ e xRy então yRx ;
- c) se x, y e $z \in E$ e xRy e yRz , então xRz .

Para exemplificar, tomemos o conceito de congruência módulo m ($m > 1$) sobre Z abordado anteriormente. Trata-se de uma relação de equivalência, pois satisfaz as três condições da definição:

- a) $x \equiv x \pmod{m}$;
- b) $x \equiv y \Rightarrow y \equiv x \pmod{m}$;
- c) $x \equiv y \pmod{m}$ e $y \equiv z \pmod{m} \Rightarrow x \equiv z \pmod{m}$, $\forall x, y$ e $z \in Z$.

A apresentação da definição formal de relação de equivalência nos mostra que, inserido na abstração do conceito de conjunto quociente, está esse outro objeto matemático abstrato, a relação de equivalência, com o qual o estudante necessitará lidar.

Em Álgebra, diferentemente de outras áreas da Matemática em que se tem a visualização de representações geométricas, por exemplo, no ensino de Cálculo, as estruturas apresentam-se com suas notações simbólicas e abstratas. Cabe ao estudante conseguir abstrair a partir das definições formais apresentadas ou, apoiando-se em imagens já formadas da Aritmética (os conjuntos numéricos), fazer

a generalização para a Álgebra. Existem outras representações visuais formadoras de imagens para os conceitos algébricos?

Em Neri & Cabral (2010), encontramos uma interessante metáfora que explora o conceito de relação de equivalência de forma inicialmente intuitiva. Os autores sugerem que se compare um conjunto a um prato, onde os elementos desse conjunto P são os átomos que o constituem. Esse prato é jogado ao chão e partido em cacos de diversos tamanhos. Um novo conjunto C é formado, onde cada elemento agora é um caco em vez de um átomo, como nos mostra a ilustração:

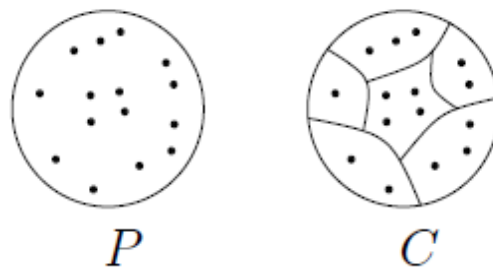


Figura 13 – Metáfora do conjunto quociente (NERI & CABRAL, 2010, p. 81).

Para quaisquer átomos ou elementos a , b e c pertencentes ao prato P :

- a) Cada átomo pertence a um caco.
- b) Se a pertence a um mesmo caco que b , então b pertence ao mesmo caco que a .
- c) Se a pertence ao mesmo caco que b , b pertence ao mesmo caco que c , então a pertence ao mesmo caco que c .

Nessa analogia, a relação de equivalência aRb significa que o átomo a pertence ao mesmo caco que o átomo b . Cada classe de equivalência de P (o prato) é um caco e o conjunto quociente é o conjunto dos cacos, ou seja, $P/R = C$. Note que cada elemento de P é um átomo e cada elemento de C é um caco. Os elementos de P e de C são distintos, embora cada caco seja composto de átomos. Assim não é verdade que P esteja contido em C ou C esteja contido em P .

A discussão feita acerca do conjunto quociente nos revela um conceito que, embora possa ser rotineiro para matemáticos experientes, não nos parece de fácil compreensão para estudantes iniciantes em Álgebra. Observamos que os alunos participantes da pesquisa, mesmo operando, por exemplo, o conjunto $Z_2 = \{ \bar{0}, \bar{1} \}$ como o anel quociente $Z/2Z = \{ \{ \text{pares} \}, \{ \text{ímpares} \} \}$, não compreendiam

todas as características envolvidas. É como se, num primeiro curso de Álgebra Abstrata, conseguissem trabalhar com esse objeto somente no nível procedimento. O avanço para o processo e proceito, talvez, necessite maior tempo de contato com o assunto em questão.

4.2.6 Sobre homomorfismo e isomorfismo

O estudo do homomorfismo e isomorfismo também evidenciou a dificuldade de o estudante formar imagens a partir da definição formal, que garantam a plena compreensão do conceito matemático.

Formalmente, dois anéis A , A' são ditos homomórficos se existe uma função $f: A \rightarrow A'$ tal que:

$$\text{i) } f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$\text{ii) } f(x.y) = f(x).f(y)$$

Se $f: A \rightarrow A'$ é um homomorfismo bijetivo, diz-se que f é um isomorfismo de A sobre A' .

Observamos que os primeiros conflitos dos alunos ocorreram com a notação simbólica da definição de homomorfismo, isto é, no entendimento de que as operações à esquerda do sinal de igual são as de A , enquanto as da direita são de A' . Captamos suas dificuldades na compreensão de que a soma ou multiplicação de dois elementos no conjunto de partida da função f é igual à soma ou produto de suas imagens no conjunto de chegada, ou seja, dois anéis aparentemente diferentes podem comportar-se como se fossem um mesmo anel.

Vejamos um exemplo: sejam os anéis $A = Z_3 = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2} \}$ e o subanel A' de $Z_6 = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5} \}$, dado por $A' = \{ \bar{0}, \bar{2}, \bar{4} \}$. A fim de evitar ambiguidades, denotamos as classes de congruência módulo 3 diferentemente das classes de congruência módulo 6.

Estabelecendo-se uma bijeção f entre A e A' ,

$$\bar{0} \leftrightarrow \bar{0}$$

$$\bar{1} \leftrightarrow \bar{4}$$

$$\bar{2} \leftrightarrow \bar{2}$$

Note que $f(\bar{0} + \bar{1}) = f(\bar{1}) = \bar{4}$ corresponde a $f(\bar{0}) + f(\bar{1}) = \bar{0} + \bar{4} = \bar{4}$. Também $f(\bar{1} \cdot \bar{2}) = f(\bar{2}) = \bar{2}$ equivale a $f(\bar{1}) \cdot f(\bar{2}) = \bar{4} \cdot \bar{2} = \bar{2}$. Diz-se que A e A' são isomorfos, pois trata-se de um mesmo anel, porém com aparências distintas.

Na segunda avaliação, realizada em 10 de maio de 2011, a primeira questão solicitava em seus itens (a) e (b) a definição de homomorfismo e o significado de dois anéis serem isomorfos, respectivamente. O item (c) perguntava se os anéis Z e $2Z$ eram isomorfos.

Inspecionando as resoluções, percebemos que alguns alunos, mesmo desenvolvendo corretamente os itens (a) e (b), não conseguiram trabalhar com a definição formal de isomorfismo para obter êxito na explicação do item (c).

Para confirmar a conjectura anterior, selecionamos uma avaliação em que o estudante pareceu-nos “bem preparado” para a prova, isto é, obteve 22,5 num total de 25,0 pontos, apresentada a seguir:

① a) O que é um homomorfismo entre dois anéis A e A' ?

Um homomorfismo entre dois anéis é a relação estabelecida entre esses dois anéis, tal que obedeça as seguintes condições:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

Ou seja, um anel A' "se comporta" como o anel A . (Um "se comporta" é que posso operar com os dois da mesma maneira).

b) O que significa dizer que dois anéis A e A' são isomorfismos?

Dizer que dois anéis são isomorfos é dizer que esses dois anéis são homomorfismos (como acima letra a) e ainda, essa função estabelecida entre esses dois anéis é bijetora (injetora e sobrejetora).

Ou seja, o anel A "se comporta" como A' e vice-versa.

c) Os anéis \mathbb{Z} e $2\mathbb{Z}$ são isomorfos?

Não. Eles não são isomorfos
tenho que $f(3) \notin 2\mathbb{Z}$

$$\text{logo } f(3+2) = f(3) + f(2)$$

Por isso \mathbb{Z} e $2\mathbb{Z}$ não são isomorfos.

Figura 14 – Resolução apresentada na 3ª prova referente ao conceito de isomorfismo.

Para mostrar que os anéis Z e $2Z$ não são isomorfos, deve-se trabalhar com a negação da definição, isto é, precisamos explicar que não se consegue exibir nenhuma função bijetora entre Z e $2Z$ que satisfaça as condições de isomorfismo. Como esclarecimento, se existe o homomorfismo sobrejetivo $f: Z \rightarrow 2Z$ e Z tem unidade 1, então $f(1)$ é a unidade de $2Z$. Vejamos:

Para todo $b \in 2Z$, $b = f(a)$ para algum a em Z porque f é sobrejetiva. Assim $b.f(1) = f(a).f(1) = f(a.1) = f(a) = b$. Desse modo, $f(1)$ ser a unidade de $2Z$ é uma contradição, pois $2Z$ não possui unidade.

Este parece-nos novamente o caso em que a definição formal foi apreendida de forma “rotinizada”. Na resposta aos dois primeiros itens, bastava seguir a “dedução puramente formal”, isto é, sem consulta à célula da imagem que pode até estar vazia; porém, para obter êxito na interpretação de (c), faz-se necessário possuir imagens conceituais mais elaboradas da definição formal que permitam ao estudante uma melhor compreensão do objeto matemático.

4.2.7 Os conflitos com polinômios

O capítulo de anéis de polinômios foi um dos últimos desenvolvidos no curso. Para a nossa pesquisa, abordaremos até esse tópico no que se refere aos conteúdos de Álgebra.

Durante uma das aulas, registramos um diálogo entre o professor e a turma. Primeiramente, transcreveremos as falas e, a seguir, faremos uma interpretação das mesmas.

PROFESSOR: *Quais os corpos que vocês conhecem?*

TURMA: *Reais, racionais e complexos.*

PROFESSOR: *Todos os corpos são infinitos? Existe algum corpo finito?*

TURMA:(não se ouviram respostas dos alunos)

PROFESSOR: *O conjunto Z_p , com p primo.*

Esse trecho de interação do professor com os alunos reforça, a nosso ver, a tese de como são “ricas” as imagens conceituais que os estudantes têm dos

conjuntos numéricos como o dos reais. O silêncio da turma, quando indagada sobre corpos finitos, não nos pareceu introspecção ou timidez, pois já estávamos em fase final do curso e o entrosamento professor/turma mostrava-se bem desenvolvido.

Ao se definir $A[x]$ como o anel dos polinômios com os coeficientes em um anel ou corpo A , não se sentiu nenhuma dificuldade por parte dos alunos, isto é, ainda que uma definição formal tenha sido apresentada, a passagem da imagem conceitual associada a polinômios sobre uma estrutura algébrica qualquer foi facilmente transitada, como nos seguintes casos:

- 1) $R[x] = \{ \text{anel dos polinômios com coeficientes reais} \};$
- 2) $Z[x] = \{ \text{polinômios com coeficientes no conjunto dos inteiros } Z \};$
- 3) $Z_2[x] = \{ \text{polinômios com coeficientes em } Z_2 \}.$

O professor enfatizou para a turma que em $Z_2[x]$, por exemplo, polinômios aparentemente diferentes na escrita matemática representam a mesma função polinomial como $p(x) = x^2 + 1$ e $q(x) = x^2 - 1$ ou, ainda, $r(x) = x^2 + x$ e $s(x) = 0$. Percebemos esse momento como uma ampliação da imagem dos estudantes sobre os polinômios, uma vez que em $Z_2[x]$ vale a igualdade $(x+1)^2 = x^2 + 1$. Vejamos:

$$\begin{aligned} (x+1)^2 &= (x+1)(x+1), \\ (x+1)^2 &= x^2 + x + x + 1, \\ (x+1)^2 &= x^2 + x(1+1) + 1, \\ (x+1)^2 &= x^2 + x \cdot 0 + 1, \\ (x+1)^2 &= x^2 + 1. \end{aligned}$$

Observemos que, ao longo de toda a educação básica, o estudante formou a imagem do desenvolvimento do produto notável $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$. Agora, em Álgebra Abstrata, ele precisa construir novas imagens para superar possíveis conflitos ao trabalhar com essas novas estruturas algébricas. Por outro lado, não raramente, encontramos estudantes no ensino médio que operam “ $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ ”. A possibilidade dessa notação em estruturas como $Z_2[x]$ reforça esse fator potencial de conflito?

Com o avançar do curso, os alunos estudaram as operações de adição e multiplicação de polinômios, bem como o grau e a igualdade de polinômios.

Na divisão euclidiana de polinômios, percebemos dificuldades por parte dos alunos em operá-la, embora possamos tratar essas operações dentro do nível 1 do

pensamento matemático, o procedimento. O que nos parece é que eles ainda não haviam avançado, nesse nível, nas operações sobre outros corpos que não fossem aqueles com os quais habitualmente se trabalha divisão de polinômios na educação básica, por exemplo, o dos reais. Em particular a divisão de dois elementos de um corpo possa ser mais comum, a ideia a ser trabalhada seria a multiplicação de um elemento pelo inverso do outro. A notação $\frac{a}{b} = ab^{-1}$ nos parece de difícil compreensão quando num corpo qualquer. Para ilustrar nossas argumentações, vejamos algumas situações com base nos exercícios feitos em sala de aula:

1º) Em Z_5 tem-se que $\bar{3} \cdot \bar{2} = \bar{6} = \bar{1}$, isto é, $\bar{3}^{-1} = \frac{1}{\bar{3}} = \bar{2}$.

2º) Em Z_{12} a razão $\frac{\bar{4}}{\bar{5}} = \bar{8}$, pois, ao operarmos $\bar{4} \cdot \bar{5}^{-1}$, é necessário perceber que nesse anel $\bar{5}^{-1} \cdot \bar{5} = \bar{1}$. Logo, o inverso de $\bar{5}$ é o próprio $\bar{5}$, justificando o produto $\bar{4} \cdot \bar{5} = \overline{20} = \bar{8}$.

Sobre o conceito de *polinômio irredutível*, percebemos problemas com a negativa da definição, isto é, entender o que significa um polinômio não ser irredutível ou ser redutível. A fim de compreendermos esse conflito, discutiremos inicialmente a definição formal comumente apresentada pelos livros de Álgebra.

Em Gonçalves (1999, p. 76), tem-se que um polinômio $f(x)$ de grau $\partial f \geq 1$ e pertencente ao domínio $K[x]$, K um corpo, é dito irredutível sobre K se toda vez que $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, então $g(x) = a$ ou $h(x) = b$, onde a e b são constantes em K .

A negativa da definição anterior é dizer que um polinômio $f(x) \in K[x]$ é redutível se são verificadas as seguintes condições:

a) $f(x)$ não é nulo.

b) $f(x)$ pode ser escrito como produto de dois polinômios em $K[x]$ de grau maior ou igual a 1.

Vejamos alguns exemplos:

Ex.1) $f(x) = 2x^2 + 4 \in Q[x]$ não é redutível sobre Q , uma vez que em $2 \cdot (x^2 + 2)$, 2 é constante em $Q[x]$ e $x^2 + 2$ não pode ser escrito como um produto de polinômios de grau 1.

Ex.2) $h(x) = x^2 - 3$ é redutível sobre \mathbb{R} , $x^2 - 3 = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$, mas é irredutível sobre \mathbb{Q} .

Em um momento em que se estudavam critérios de irredutibilidade, a indagação de uma aluna chamou-nos a atenção para um potencial conflito:

Professor, o polinômio é irredutível quando não tem raiz?

No contato com a turma, notamos a formação de uma imagem inicial de que o polinômio é redutível se e somente se possui raiz. A pergunta acima, embora individual, explicitava, de certo modo, um sentimento coletivo.

O professor, ao perceber a necessidade de maiores esclarecimentos acerca dessa questão, passou a apresentar exemplos e contra-exemplos que permitissem aos alunos a superação de possíveis imagens equivocadas. Vejamos dois casos:

Ex. 1) O polinômio $p(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ é redutível sobre \mathbb{Q} , pois $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + 1)$ e não tem nenhuma raiz em \mathbb{Q} .

Ex. 2) Em $\mathbb{Z}_3[x]$, o polinômio $h(x) = x^4 + x^3 + x + \bar{2}$ não possui nenhum zero em \mathbb{Z}_3 . De fato, $h(\bar{0}) = \bar{2}$, $h(\bar{1}) = \bar{2}$ e $h(\bar{2}) = \bar{1}$; mas, $h(x)$ pode ser escrito como $(x^2 + \bar{1})(x^2 + x + \bar{2})$.

É possível que uma das causas desse conflito venha das imagens que o estudante traz do ensino médio ao decompor polinômios de grau 2 sobre \mathbb{R} . Sabe-se que, se $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ e $\partial f = 2$, então f é redutível sobre \mathbb{R} se e somente se tem um zero, pelo menos, em \mathbb{R} . Nesse caso, basta calcular o discriminante Δ da equação do 2º grau $f(x) = 0$ e verificar que $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$, onde a existência das raízes r_1 e r_2 só não ocorrerá quando $\Delta < 0$.

Conforme se apontou como objetivo para este capítulo, procuramos relatar os conflitos de aprendizagem dos alunos da maneira mais próxima possível ao que se observou durante as aulas em cada conteúdo estudado, sem necessariamente nos prendermos a uma cronologia rígida dos fatos. Em algumas passagens, como o caso do anel quociente, vimos a necessidade de discutir em maiores detalhes o conceito algébrico em questão, além de analisar outros objetos matemáticos que estão ao seu redor.

Nesse sentido, nossa intenção foi, a partir de um aprofundamento das relações entre a definição matemática e as manifestações dos alunos ao externar suas imagens, fossem elas na forma de perguntas em sala de aula, nas resoluções

das provas ou nas respostas aos questionários, tentar apontar a origem e as possíveis causas das dificuldades de aprendizagem que emergiram através de conjecturas baseadas no referencial teórico.

Para o próximo capítulo, buscaremos uma categorização dos diversos conflitos expostos nesta secção.

5 CATEGORIZANDO AS ANÁLISES: síntese compreensiva da investigação efetuada

5.1 RETOMANDO A QUESTÃO DE INVESTIGAÇÃO E O OBJETIVO DA PESQUISA

O que evidenciam os conflitos de aprendizagem manifestados por alunos de Licenciatura em Matemática num primeiro curso de Álgebra Abstrata, à luz das interações entre definição formal e imagens conceituais?

O objetivo da pesquisa consistiu em *investigar os diversos conflitos de aprendizagem apresentados por alunos de Licenciatura em Matemática diante de um primeiro curso de Álgebra Abstrata, visando compreendê-los na perspectiva das interações entre a definição matemática formal e as imagens conceituais.*

Como conflitos de aprendizagem, interpretamos, neste trabalho, toda e qualquer dificuldade que nos foi possível identificar quando da interação dos alunos com os conteúdos matemáticos estudados. Ou seja, o termo “conflito” é usado num sentido amplo como catalisador das discordâncias, dúvidas ou contradições evidenciadas na fala e na escrita dos participantes da pesquisa.

Partimos, com base no caminho percorrido nos capítulos anteriores, para produzir uma síntese das análises dos dados da pesquisa. Percebemos que muitos conflitos de aprendizagem observados, ainda que de conteúdos algébricos distintos, apresentaram natureza e formas de manifestação similares, o que, nesse sentido, nos permitiria classificá-los. Iremos propor algumas categorias em que estejam agrupados os diversos conflitos vivenciados pelos estudantes de Licenciatura em Matemática em um primeiro curso de Álgebra Abstrata.

Salientamos que esse olhar sobre os dados é um dos muitos possíveis, pois outras interpretações poderiam ser feitas por outros ângulos. Da perspectiva que olhamos o fenômeno, articulamos a compreensão em 3 categorias:

- 1- As relações entre as imagens conceituais e a definição formal.
- 2- Os conflitos potenciais e os conflitos cognitivos.

3- As transições entre os níveis do pensamento matemático: *procedimento – processo – proceito*.

Considerando a questão norteadora e o objetivo da pesquisa, explicitaremos, a seguir, nosso entendimento sobre cada uma das categorias, num diálogo constante com os dados coletados e analisados, os textos didáticos de Álgebra que compõem a bibliografia do curso, a literatura de Educação Matemática acerca do tema e nossas reflexões sobre o fenômeno estudado.

5.2 AS RELAÇÕES ENTRE AS IMAGENS CONCEITUAIS E A DEFINIÇÃO FORMAL

Recuperando a essência do nosso referencial, vimos que, quando o estudante é apresentado a um conceito matemático, ideias e figuras mentais são elaboradas por ele para trabalhar com esse conceito em diversas situações. A fim de tentar compreender a formação e o papel dessa estrutura conceitual, Tall e Vinner (1981) cunharam o termo **imagem conceitual** para descrever a estrutura cognitiva que cada indivíduo forma do conceito ou objeto matemático, incluindo todas as figuras mentais, que são as visualizações evocadas ao se trabalhar com o conceito em questão.

A imagem que o estudante tem de um conceito pode se modificar ao longo do tempo nas diversas interações entre ambos, podendo até ser vazia, quando nenhum significado é associado ao símbolo ou nome do conceito.

Acreditamos que, nos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, o professor deseja que os alunos tenham imagens cada vez mais próximas da definição matemática precisa, ou seja, intenciona-se que eles adquiram a melhor compreensão possível do conceito estudado.

Nesse sentido, o termo **definição formal** é utilizado habitualmente pela comunidade científica matemática para a descrição de determinado conceito matemático, ressalvadas possíveis particularidades de contextos diferentes. Nesta pesquisa, assumimos, para as definições formais das estruturas algébricas, aquelas observadas nos livros da bibliografia, além das que foram apresentadas pelo professor durante as aulas. Recordamos também ao leitor que a expressão

definição conceitual foi aqui utilizada para descrever a exteriorização das imagens do estudante, através da fala ou da escrita.

A partir da apresentação axiomática das estruturas de anel, subanel, ideal e outras, percebemos que a definição formal não foi suficiente para que os alunos formassem uma imagem conceitual, digamos “significativa”, da compreensão desses conceitos matemáticos. Isso ficou claro na interpretação das observações das aulas, em que, somente a partir de exemplificações de conjuntos numéricos mais “tradicionais”, os alunos formaram imagens conceituais do objeto matemático. Sempre quando solicitados, eles expressavam suas definições conceituais com base nesses exemplos. Vejamos alguns casos:

- * anel \rightarrow conjunto dos números inteiros Z
- * anel não comutativo \rightarrow conjunto de matrizes 2×2
- * corpo \rightarrow conjunto dos reais R
- * subanel \rightarrow conjuntos $2Z, 3Z \dots nZ$

Embora os alunos conseguissem formar imagens das estruturas algébricas acima a partir dos exemplos e contra exemplos estudados, vimos que nem todos os conteúdos de Álgebra I puderam ser compreendidos nessa perspectiva.

O caso mais notável foi o de anel quociente, abordado na secção 5.2.5 do capítulo anterior, em que tanto a definição formal como os exemplos não foram suficientes para produzir imagens que permitissem aos alunos um entendimento amplo dessa estrutura algébrica e dos desdobramentos matemáticos que a cercam. Deixamos aqui a indicação de que futuras pesquisas em Educação Matemática possam tratar mais especificamente de abordagens didáticas relativas a esse conteúdo específico.

5.3 OS CONFLITOS POTENCIAIS E OS CONFLITOS COGNITIVOS

Utilizaremos aqui, de modo mais específico, os termos conflitos potenciais e conflitos cognitivos em conformidade com a definição apresentada pelo nosso referencial.

Um estudante começa a incorporar um conceito quando forma dele alguma imagem. Essa imagem, embora possa ser reforçada ao longo do tempo por

experiências repetidas, pode se revelar inadequada ao contrastar com outras imagens do mesmo conceito.

Dessa maneira, cria-se um conflito entre a imagem anterior, que o estudante acreditava ser definitiva, e a nova imagem, levando a uma versão mais ampla do conceito. Os autores chamam de **fator de conflito potencial** uma parte (ou partes) da imagem conceitual que pode (ou podem) se opor a outra parte (ou outras partes) dessa mesma imagem. Quando a imagem conceitual evocada em determinado instante pelo estudante contém um fator de conflito potencial, temos o **fator de conflito cognitivo**, ou seja, o conflito vem à tona.

Assumimos, em consonância com Tall e Vinner, que converter fatores de conflitos potenciais em conflitos cognitivos é importante para a ascensão a estágios matemáticos superiores, desde que não se transformem em obstáculos intransponíveis ao avanço da aprendizagem.

Em uma abordagem construtivista o conflito é o elemento central da estratégia de construção do conhecimento, pois pode estimular a contradição, a busca pela generalidade dos conceitos e o desenvolvimento do pensamento crítico do estudante.

Nesta pesquisa, talvez não se consiga precisar o momento exato em que conflitos potenciais tornaram-se ou não cognitivos, mas alguns fortes indícios apontam na direção da notação simbólica. Os alunos demonstravam estranheza ao trabalharem com a mesma grafia para os elementos do anel Z_m . O $\bar{1}$ em Z_2 e Z_3 , por exemplo, tem a mesma escrita, mas representa a classe dos números que deixam, respectivamente, resto 1 na divisão por 2 e por 3.

Ainda em Z_m ocorrem situações contrárias à anterior, isto é, casos em que a grafia é diferente, mas os elementos representam a mesma ideia matemática. Exemplificando, em Z_7 o inverso multiplicativo de $\bar{4}$ é o $\bar{2}$, pois $\bar{4} \cdot \bar{2} = \bar{1}$. O estudante necessita ampliar a sua imagem conceitual e perceber que agora $\frac{1}{4}$ ou $\bar{4}^{-1}$ pode ser escrito como $\bar{2}$.

Esses conflitos relacionados à notação foram observados também em polinômios, em que dois polinômios diferentes podem induzir a funções polinomiais iguais. Em $Z_3[x]$, por exemplo, os polinômios distintos $p(x) = x^3$ e $q(x) = x$

representam a mesma função polinomial, uma vez que para cada $a \in Z_3 = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2} \}$ tem-se $a^3 = a$. Vejamos:

$$(\bar{0})^3 = \bar{0}$$

$$(\bar{1})^3 = \bar{1}$$

$$(\bar{2})^3 = \bar{8} = \bar{2}$$

Ressaltamos também que, conforme apresentado na secção 5.2.3, em relação às dificuldades dos alunos com os exercícios propostos do livro-texto, nossa compreensão foi que esses conflitos mostraram-se difíceis de serem superados dentro de um primeiro curso de Álgebra Abstrata. Queremos dizer que, diferentemente dos conflitos com notação relatados anteriormente, aparentemente vencidos pelos alunos ainda durante o curso, o obstáculo imposto pelo formalismo algébrico mostrou-se, a nosso ver, intransponível no sentido do amadurecimento requerido para se trabalhar imerso num grau de abstração matemática mais elevado. No contato direto com os alunos, conseguimos captar um certo sentimento de fracasso diante dessas dificuldades.

5.4 AS TRANSIÇÕES ENTRE OS NÍVEIS DO PENSAMENTO MATEMÁTICO: *PROCEDIMENTO – PROCESSO – PROCEITO*

Nesta pesquisa, não nos preocupamos em buscar uma possível classificação dos alunos com base nos três níveis de sofisticação do pensamento matemático propostos por Tall. Procuramos sim, num olhar mais geral, compreender que ponto de desenvolvimento eles atingiam ao interagirem com os conceitos da Álgebra Moderna. A análise dos dados coletados trouxe-nos subsídios para as reflexões que propomos nesta secção.

Assumimos, em conformidade com o referencial, a existência hierárquica dos três estágios: *procedimento – processo – proceito*. Relembrando as definições e adaptando-as ao nosso contexto, tem-se que o conhecimento de um **procedimento** específico permite ao estudante fazer cálculos matemáticos, manipulando fórmulas ou regras específicas, por exemplo, saber operar o algoritmo da divisão euclidiana de polinômios com coeficientes em um corpo $K[x]$.

Quando o estudante já trabalha matematicamente de forma mais flexível e eficiente, isto é, consegue analisar os resultados de um procedimento realizado ou até mesmo reconhecer a não necessidade de fazê-lo, diremos tratar-se do nível **processo**. Em Álgebra, a aplicação das propriedades das estruturas algébricas na construção e/ou verificação de exemplos seria um caso de processo.

No último nível tem-se o **proceito**, entendido aqui como o momento em que se é capaz de pensar sobre o simbolismo algébrico como uma entidade, movendo-se facilmente entre processo e conceito. O estudante transita melhor dentro do formalismo matemático diante das definições, teoremas ou exercícios que exigem demonstrações.

Pressupomos que a existência de uma escala hierárquica não implica a obrigatoriedade de o estudante ter que passar necessariamente por todas as etapas. Cada indivíduo tem o seu próprio tempo de desenvolvimento cognitivo; uns podem ter a necessidade maior de trabalhar no procedimento, enquanto outros já avançam para o processo no primeiro contato com o conceito matemático.

Inicialmente, numa visão mais ampla sobre todos os conteúdos de Álgebra I estudados (anéis, subanéis, ideais, corpos, anéis-quociente, polinômios), concluímos que os alunos adquiriram um nível procedimental ao lidarem com esses conceitos, embora tenham sido detectados conflitos que, em nosso entendimento, foram superados ao longo do curso.

Um caso que bem exemplifica isso são as operações com os polinômios. O estudante possui imagens conceituais formadas desde o ensino médio de como trabalhar soma, produto e divisão de polinômios com coeficientes em $\mathbb{Q}[x]$ ou $\mathbb{R}[x]$. Se considerarmos, por exemplo, a realização da divisão euclidiana no corpo $\mathbb{Z}_{13}[x]$ de $f(x) = \bar{4}x^4 + \bar{2}x^3 + \bar{6}x + \bar{2}$ por $g(x) = \bar{5}x^2 + x + \bar{2}$ como apenas uma ampliação da imagem conceitual do algoritmo já conhecido, poderemos inferir que continuamos no nível procedimento. Em nosso contexto, percebemos que os conflitos iniciais gerados pela notação dos elementos de \mathbb{Z}_m e suas “novas regras” foram vencidos pelos alunos com a repetição dos exercícios. A observância das questões feitas em prova ratificou as considerações acima.

Outras situações que classificamos como nível de procedimento ocorreram quando os alunos verificavam se determinado conjunto representa ou não uma certa estrutura algébrica. Por exemplo, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} ; a, b \in \mathbb{Z}\}$ é subanel de \mathbb{R} ? Para

responder a essa indagação, bastava aplicar as duas condições da caracterização para ser subanel, isto é, mostrar que a diferença e o produto de dois elementos quaisquer de $Z[\sqrt{2}]$ permanecem nele.

Assim, formada a imagem da definição do objeto matemático, os alunos conseguiam trabalhar com a verificação de suas propriedades através de exemplos e contra exemplos previamente propostos.

A construção, por parte do estudante, de exemplos e contra exemplos justificados pelas condições que compõem a definição de uma estrutura algébrica é vista aqui como nível de processo. Nas avaliações algumas questões como: “*Dê exemplo, justificando, de um anel comutativo sem unidade*” ou “*Dê exemplo, justificando, de um anel A e um ideal J de A que seja principal, mas não seja maximal*” requeriam uma capacidade acima do nível procedimental. O fato de ter que justificar exige do estudante não somente o conhecimento de uma definição ou a aplicação pura e simples de uma regra, mas também a capacidade de interpretar as diferentes relações existentes entre os conceitos matemáticos estudados. De modo geral, os doze alunos participantes mostraram rendimento satisfatório nesse tipo de atividade, o que aponta no sentido de crescimento dentro dos estágios do pensamento matemático, ou seja, em situações específicas, operavam os objetos algébricos de maneira não apenas rotineira ou repetitiva.

Para o último nível, o proceito, reservamos as questões de demonstração, discutidas na secção 5.2.3, constantes no livro de Álgebra e solicitadas em algumas avaliações. Observamos que, embora o professor resolvesse em aula exercícios desse tipo e auxiliasse os alunos durante os plantões de dúvidas, as dificuldades de compreensão não pareciam superadas. Muitas resoluções em provas apresentavam-se em branco, outras eram feitas de maneira equivocada e pouquíssimas indicavam compreensão do que era solicitado.

Outro fator que pode ter contribuído para essa dificuldade encontrada pelos alunos, talvez resida na restrição de imagens conceituais de certos conteúdos matemáticos que se supõe, a princípio, já conhecidos. Por exemplo, várias questões envolviam conceitos estudados desde o ensino básico ou em disciplinas da graduação antecedentes a Álgebra I, tais como: m.d.c, m.m.c, números complexos e outros. Nos momentos de aula em que essas discussões emergiam, os alunos demonstravam “esquecimento” ou até mesmo desconhecimento de determinadas

propriedades matemáticas necessárias para se compreender e realizar corretamente a tarefa.

Assim, percebemos que muitos desses conflitos nasciam do não entendimento do próprio enunciado da questão, ou seja, os elementos matemáticos envolvidos e imersos no formalismo algébrico se mostravam, de certo modo, indecifráveis naquele momento.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Iniciamos a dissertação apresentando um pouco de nossa trajetória docente, os motivos que nos levaram ao mestrado e os caminhos percorridos que nos conduziram ao início desta pesquisa.

Conforme está exposto no capítulo 1, buscamos explicitar para o leitor a questão de investigação e o objetivo principal, deixando subjacente, através de algumas questões norteadoras, a possibilidade de encontrarmos outras respostas com o desenvolvimento do estudo. Pressupomos, naquele momento, a importância do conhecimento da Álgebra Abstrata para a formação do professor de Matemática, bem como para o exercício de sua atividade profissional. Chegamos aqui convictos disso, porém dispostos a apontar alguns caminhos com base numa compreensão mais abrangente em relação ao ponto de partida.

Sentimos a necessidade de entender a Álgebra em seu percurso dentro da História da Matemática. Nesse âmbito, deparamos com diferentes concepções: Álgebra como generalização da Aritmética, como estudo das equações, das estruturas algébricas, entre outras. Vimos também algumas motivações que culminaram com o surgimento das estruturas que hoje chamamos de Álgebra Moderna, como a influência do movimento de Aritmetização da Análise em sua busca pelo rigor matemático.

Esse olhar histórico permitiu-nos o levantamento de informações acerca dos caminhos trilhados pela Álgebra enquanto disciplina curricular no ensino de Matemática. Vimos que a Álgebra iniciou-se na educação básica do Brasil a partir do século XVIII, tendo sido necessária a passagem de mais de dois séculos até a sua oficialização nos currículos dos cursos de formação de professores de Matemática.

A percepção de que foram necessárias décadas e até séculos de trabalho de eminentes matemáticos para se chegar às atuais estruturas algébricas, possibilitou-nos refletir sobre os conflitos vivenciados pelo estudante que depara, pela primeira vez, com o formalismo de objetos como anéis, corpos, polinômios, entre outros. É razoável “entender” as dificuldades de aprendizagem diante de todo esse conhecimento construído durante muitos anos e apresentado modernamente com base em abstrações complexas.

Na busca por subsídio teórico para a compreensão dos processos que envolvem o pensamento matemático avançado, descrevemos a teoria da imagem

conceitual e definição conceitual, proposta por Tall e Vinner. Um ponto básico do referencial para esta pesquisa foram as interações entre a definição formal matemática e as imagens conceituais constituídas pelos alunos. Em diversos momentos, vimos que a apresentação axiomática das estruturas algébricas não se mostrou eficiente na formação de imagens que levassem os alunos à compreensão da definição formal. Em casos mais específicos como o do anel quociente, mesmo com o apoio de exemplos numéricos, verificou-se a constituição de imagens conceituais “fracas” acerca do entendimento desse conteúdo.

No que se refere aos níveis de sofisticação do pensamento matemático indicados por Tall, observamos que todos os participantes superaram os conflitos iniciais e conseguiram trabalhar com as propriedades dos objetos algébricos no nível de procedimento. Em determinadas situações, pareciam avançar para o segundo estágio, o processo, relacionando diferentes definições e até efetuando demonstrações “mais simples”, decorrentes diretas das propriedades iniciais. Todavia, o proceito, aqui entendido como a habilidade de desenvolver tarefas mais complexas, por exemplo, os exercícios de demonstração propostos pelo livro texto de Álgebra, pareceu-nos requerer dos alunos um nível de abstração, senão inatingível, de extrema dificuldade de ser obtido durante um primeiro curso de Álgebra Abstrata.

A opção metodológica por uma abordagem qualitativa de pesquisa permitiu-nos compreender melhor o contexto social investigado. As conjecturas levantadas e refletidas ao longo da dissertação só foram possíveis devido ao convívio permanente entre os pesquisadores (orientador/orientando) e os participantes. Ressaltamos a importância dos diálogos “informais” mantidos com os alunos, assim como das observações de suas manifestações durante as aulas.

Nesse sentido, não nos preocupamos, a priori, em privilegiar a análise de determinado conteúdo estudado ou algum momento específico das aulas; preferimos, sim, capturar as dificuldades dos alunos da maneira mais natural possível à medida que surgiam com o andamento do curso. Dos tópicos de Álgebra apresentados no capítulo 5 - anel, subanel, ideal, anel quociente, isomorfismo e polinômios – identificamos os conflitos mais emergentes e buscamos, no capítulo seguinte, categorizá-los com base no referencial teórico.

Considerando o objetivo geral da pesquisa, *investigar os diversos conflitos de aprendizagem apresentados por alunos de Licenciatura em Matemática diante de um primeiro curso de Álgebra Abstrata*, acreditamos que esse olhar mais amplo sobre o curso, em detrimento de particularizações, levou-nos a reflexões mais abrangentes na busca de respostas à questão de investigação proposta, assim explicitada:

O que evidenciam os conflitos de aprendizagem manifestados por alunos de Licenciatura em Matemática num primeiro curso de Álgebra Abstrata, à luz das interações entre definição formal e imagens conceituais?

Os conflitos investigados evidenciaram as diferenças entre a Álgebra, enquanto campo matemático estruturado em bases formais, e os processos cognitivos requeridos para a sua aprendizagem. Se, por um lado, expressar a Matemática através de uma linguagem rigorosa e concisa diminui as chances de ambiguidades ou interpretações subjetivas, por outro, essa forma de expressão apresenta-se como um forte complicador para alunos iniciantes. A notação simbólica da Álgebra, ao mesmo tempo que possibilita ao matemático se comunicar de modo rápido e preciso, requer do aprendiz, muitas vezes, um grau de abstração demasiadamente elevado, como mostraram as dificuldades dos alunos com os exercícios de demonstração ou no entendimento de determinada definição formal.

Outra evidência aponta para a falta de textos didáticos de Álgebra Moderna voltados à formação de professores de Matemática, que auxiliem o licenciando não só na assimilação dos conceitos algébricos, mas também no desenvolvimento de uma visão crítica dessas estruturas, tão necessária à prática docente. Talvez, esse material que se idealiza possa conter algumas indicações advindas desta pesquisa, como o que se sugere as respostas dos alunos aos questionários analisados na secção 4.1. Entre as propostas, tivemos: exercícios resolvidos e comentados, questões distribuídas em níveis de dificuldades diferentes, abordagens históricas de como se formou os objetos da Álgebra etc.

Também a partir de nossa pesquisa, sugerimos a realização em sala de aula, de exercícios que explorem a definição conceitual, como forma de possibilitar aos estudantes, expressar com palavras, suas imagens conceituais acerca das diversas estruturas algébricas trabalhadas, até mesmo para identificarmos fatores de conflitos de aprendizagem.

Às sugestões anteriores soma-se a possibilidade de se discutir, no âmbito da Educação Matemática, uma ementa de curso mais adequada no que se refere à relação quantidade de conteúdos a serem trabalhados e tempo disponível.

Os resultados de uma pesquisa, embora representem apenas um “épsilon” de contribuição no “infinito” de conhecimento constituído e do que ainda não se conhece, podem apontar caminhos para novos estudos em áreas pouco exploradas. Entendemos que, diferentemente de outras áreas do ensino de Matemática superior, em que se tem uma considerável quantidade de estudos realizados, como Cálculo e Análise, há um campo aberto para pesquisas acerca dos processos de ensino e de aprendizagem de Álgebra Abstrata.

REFERÊNCIAS

- ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais**: pesquisa quantitativa e qualitativa. São Paulo: Pioneira, 2004.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgar Blucher, 1996.
- BRANDEMBERG, J. C. **Uma análise histórico-epistemológica do conceito de grupo**. 2009, 188f. Tese (Pós-graduação em Educação Matemática) – Centro de Ciências Sociais Aplicadas. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2009.
- BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática, v. 3. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Matriz de Referência para o Enem 2009**. Brasília, 2009. Disponível em: http://www.enem.inep.gov.br/pdf/Enem2009_matriz.pdf. Acesso em: 12 set. 2010.
- CORNU, B. Limits. **Advanced Mathematical Thinking**. In TALL, D. *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer, p. 153-166, 1991.
- COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é Matemática?** Tradução Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.
- DOMINGOS, A. M. D. **Compreensão de conceitos matemáticos avançados – a matemática no início do superior**. 2003, 387 f. Tese (Doutorado em Ciências de Educação) – Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2003.
- DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra moderna**. São Paulo: Atual, 2003.
- DREYFUS, T. **Advanced Mathematical Thinking**. In TALL, D. *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer, p. 25-41, 1991.
- DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: **Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica**. Campinas, SP: Papirus, 2009.
- EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Campinas, SP: Unicamp, 2004.
- GONÇALVES, A. **Introdução à álgebra**. Rio de Janeiro. IMPA, 1999.
- MILANI, R. **Concepções infinitesimais em um curso de cálculo**. 2002, 241f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.
- MIORIN, M. **Introdução à História da Educação Matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antônio; FIORENTINI, Dario. Ressonâncias e dissonâncias do movimento pendular entre álgebra e geometria no currículo escolar brasileiro. **Zetetiké**, São Paulo, ano 1, n. 1, p. 19 – 39, 1993.

MONDINI, F. **Modos de conceber a álgebra em cursos de formação de professores de matemática**. 2009, 168f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2009.

MOURA, A. R. L.; SOUZA, M. C. O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois olhares diferentes. **Zetetiké**: Revista semestral do Cempem, Campinas, v. 13, n. 24, p. 11-45, jul./dez. 2005.

NERI, C.; CABRAL, M. **Curso de Análise Real**. 2. ed. Rio de Janeiro: UFRJ, 2010.

PAULA, L. Simbolização. In: _____. **A interpretação geométrica dos números imaginários no século XIX**: a contribuição de Jean Robert Argand (1768-1822). 2007. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2007. p. 17-37.

REIS, Frederico da Silva. **A tensão entre o rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos**. Campinas: Unicamp, Tese de doutorado, 2001.

SANTOS, C. R.; NORONHA, R. T. S. **Monografias científicas**: TCC, dissertação, tese. São Paulo: Avercamp, 2005.

SOARES, M. T. C.; CAMPOS, E. **Dificuldades ligadas a aprendizagem do anel quociente Z_m** . Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, [2008]. Disponível em http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebiapem2008/upload/129-2-A-gt10_campos_ta.pdf. Acesso em: 02 mai. 2011.

SOUZA, S. A. DE O. **O ensino de Álgebra no Curso de Licenciatura em Matemática**. Mestrado em Educação – Centro Universitário Nove de Julho, São Paulo, [2008]. Disponível em <http://www.hottopos.com/vdletras7/suzana.htm>. Acesso em: 03 mai. 2011.

TALL, D. **A Transição para o Pensamento Matemático Avançado: Funções, Limites, Infinito e Prova**, traduzido por Márcia Fusaro Pinto, Departamento de Matemática – Faculdade de Educação, UFMG. Publicado em Grows D. A. (ed) Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Macmillan, New York, p. 495 – 511. 1992. Disponível em: <<http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1992e-trans-toamt.pdf>>. Acesso em: 13 out. 2010.

_____. **Technology and Cognitive Growth in Mathematics: A discussion paper for the conference on Mathematics and new Technologies**. Thessaloniki, Grécia. 1999. Disponível em: <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html>. Acesso em: 10 set. 2010.

_____. **Concept image and concept definition**. 2003. Disponível em <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/conceptimage.html>. Acesso em: 15 set. 2010.

TALL, D.; VINNER, S. **Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity**. Educational Studies in Mathematics. 1981a. Disponível em <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/concept-image.html>. Acesso em: 15 set. 2010.

VINNER, S. **The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics**. In: Advanced Mathematical Thinking. Edited by David Tall. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

ANEXO A – QUESTIONÁRIOS UTILIZADOS NA PESQUISA**MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****SOBRE O PERFIL DOS ALUNOS**

1º semestre/2011

1- É a primeira vez que você cursa a disciplina Álgebra I ?

a) sim

b) não

2- Você cursou “Introdução à Teoria dos Números”, que é pré-requisito para a Álgebra I ?

a) sim

b) não

Em caso afirmativo, poderia precisar o momento ou o período do curso em que isso ocorreu? _____

3- Na condição de estudante da licenciatura, você já teve alguma experiência atuando como professor(a) de matemática?

a) sim

b) não

Se sim, poderia citá-la? _____

4- Das disciplinas estudadas por você até o momento na licenciatura, alguma se apresentou com conteúdos tão ou mais “abstratos” quanto os de Álgebra I ?

a) sim

b) não

Em caso afirmativo, qual(is)? _____

5- Para a formação do professor de matemática, independente do segmento de ensino para o qual venha a lecionar, você considera relevante o estudo dos conceitos matemáticos previstos para o curso de Álgebra I ?

a) sim

b) não

Se necessário, justifique: _____



MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SOBRE AS DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM

1º semestre/2011

1- Em quais partes do livro de álgebra (Adilson Gonçalves) você sente mais dificuldade de compreensão?

a) teoria

b) exemplos

c) exercícios propostos

2- Você tem utilizado outros livros indicados na bibliografia?

a) sim

b) não

Em caso afirmativo, qual(is): _____

3- Na sua opinião, o que um livro de álgebra deveria conter no sentido de facilitar a aprendizagem dos conteúdos?

a) maior quantidade de exemplos numéricos

b) exercícios resolvidos

c) exercícios comentados

d) exercícios propostos em níveis de dificuldades diferentes

4- Você discute os exercícios com os colegas?

- a) sim
- b) não

5- Dos conteúdos já estudados, quais lhe pareceram mais complexos?

- a) anéis
- b) subanéis
- c) ideais
- d) anéis quocientes
- e) polinômios

ANEXO B – CONTEÚDO PROGRAMÁTICO DA DISCIPLINA ÁLGEBRA I



INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Tel: (32)3229-3308 – Fax: (32)3229-3315
E-mail: depto.mat@ufjf.edu.br

Disciplina: Álgebra I Código: MAT001 Pré-Requisitos: Introdução à Teoria dos Números (MAT143)	Número de Créditos: 04 Carga Horária Semanal: 04 horas-aula Carga Horária: 60 horas-aula
--	---

Ementa:

- 1- Grupos
- 2- Anéis e Corpos
- 3- Anéis de Polinômios
- 4- Extensões Algébricas dos Racionais

Bibliografia:

- DEAN, R. A. **Elementos de Álgebra Abstrata**. LTC.
- DOMINGUES, H. H. & IEZZI, G. **Álgebra Moderna**. Atual Editora.
- GONÇALVES, A. **Introdução à Álgebra**. Rio de Janeiro: IMPA, 2001.
- HERSTEIN, I. N. **Tópicos em Álgebra**. Editora Polígono.
- MONTEIRO, L. H. J. **Elementos de Álgebra**. Ao Livro Técnico.
- LEQUAIN, Y. & GARCIA, A. **Álgebra: uma Introdução**. Projeto Euclides.
- HEFEZ, A. **Curso de Álgebra** (Vol 1) . Coleção Matemática Universitária. IMPA.
- GALLIAN, J. A. **Contemporary Abstract Álgebra**. Houghton Mifflin Company, 2005.

Programa Discriminado em Unidades e Sub-unidades:**1- GRUPOS**

Grupos e Subgrupos. Homomorfismos e Isomorfismos. Grupos Cíclicos. Classes Laterais. Subgrupos Normais. Grupos Quocientes.

2- ANÉIS E CORPOS

Anéis. Anéis de Integridade. Corpos. Homomorfismos e Isomorfismos. Ideais. Anéis Quocientes. Característica de um Anel.

3- ANÉIS DE POLINÔMIOS

Polinômios sobre um Anel. Divisão em $A[x]$. Raízes de Polinômios. Polinômios sobre um Corpo. Polinômios em duas ou mais indeterminadas (noções).

4- EXTENSÕES ALGÉBRICAS DOS RACIONAIS

Adjunção de Raízes. Corpo de Decomposição de um Polinômio. Grau de uma Extensão. Construção por meio de Régua e Compasso.

Implantação: Segundo Semestre Letivo de 2006.