

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

FILIPPE DE OLIVEIRA SALLES

**Representação escalar-tensorial em
gravitação modificada**

Juiz de Fora
2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

Salles, Filipe de Oliveira

Representação escalar-tensorial em gravitação modificada / Filipe de Oliveira Salles. – 2011.

82 f.: il.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2010.

1. Cosmologia e Gravitação
2. Teoria Quântica de Campos

CDU 53

FILIPPE DE OLIVEIRA SALLES

Representação escalar-tensorial em gravitação modificada

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Física da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Área de concentração: Teoria Quântica de Campos.

Orientador: Prof. Ilya L. Shapiro

Juiz de Fora
2011

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Filipe de Oliveira Salles

Bacharel em Física pela Universidade Federal de Juiz de Fora e aluno do curso de Mestrado em Física da mesma Universidade. Participante (como aluno) do Grupo de Pesquisa em Teoria Quântica de Campos do Departamento de Física da UFJF, certificado pelo CNPq.

À Fernanda.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, professor Ilya L. Shapiro, pela oportunidade de trabalho tão valiosa, discussões frutíferas, colaboração e orientação; aos meus pais, Vera Lúcia e João Domingos, por estarem sempre presentes; aos meus irmãos, Fábio e Rodrigo, por me darem todo o suporte; a minha namorada, Fernanda Guedes, pelo amor e paciência; ao Domingos Lopes por toda a ajuda com formulários de última hora; a todos os meus amigos no departamento, em especial ao Leandro, Cristhiano, Baltazar e Alexandre pela ajuda em numerosas conversas, ao José Luiz, por todos os conselhos preciosos e ao José Amâncio, pelas contribuições mais que valiosas; a PPG em Física da UFES pelo financiamento ao “III Encontro de Gravitação e Cosmologia Quânticas” e ao IAG/USP pelo financiamento aos Workshops “IX Nova Física no Espaço” e “III Challenges of New Physics in Space”; e finalmente à FAPES, CAPES, CNPq, PPG em Física da UFJF e principalmente FAPEMIG pelo apoio financeiro.

“The universe is simply one of those things that happens from time to time.”

Edward P. Tryon,
Físico Teórico Norte Americano.

Resumo

Salles, Filipe de O.. **Representação escalar-tensorial em gravitação modificada**. Juiz de Fora, 2011. 83p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Física, Universidade Federal de Juiz de Fora.

A necessidade de considerar efeitos quânticos e a presença de singularidades nas soluções da Relatividade Geral indicam o desejo indispensável de estudar diferentes modelos de gravitação modificada. Além disso existe uma esperança de utilizar estes modelos para melhor entendimento da aceleração do Universo. É bem conhecido que estes tipos de teorias podem ser equivalentes aos modelos métrico-escalares, com diferentes mecanismos de equivalência. O objetivo principal do nosso trabalho é sugerir uma modificação e generalização desses mecanismos conhecidos que podem ser aplicados a uma grande variedade de teorias gravitacionais.

No primeiro capítulo fazemos uma revisão histórica sobre as teorias de gravitação e uma breve introdução à teoria $f(R)$. No segundo capítulo utilizamos funções $f(R)$ para a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, calculamos as equações e tentamos encontrar soluções do tipo exponencial. Em seguida, propomos uma generalização dessa teoria, para funções $f(X_i)$, onde X_i pode ser R , $\square R$, Gauss-Bonnet, o quadrado do tensor de Weyl e etc. Por último analisamos as perspectivas futuras desses modelos de gravitação modificada.

No terceiro capítulo desta dissertação sugerimos uma representação escalar-tensorial equivalente para teorias $f(R)$. Em seguida, calculamos as equações do campo gravitacional pelo método direto, utilizando a ação escalar-tensorial e variando-a em relação à métrica esféricamente simétrica. Logo em seguida encontramos as mesmas equações de campo, porém utilizando o método de transformação conforme. Por fim veremos as perspectivas de continuidade desse trabalho, ainda em fase de conclusão.

Palavras-chave

Teoria Quântica de Campos, Gravitação modificada, Cosmologia

Abstract

Salles, Filipe de O.. **Scalar-tensor representation of modified gravity**. Juiz de Fora, 2011. 83p. MSc. Dissertation. Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Física, Universidade Federal de Juiz de Fora.

The need to consider quantum effects and the presence of singularities in the solutions of general relativity indicate the desire necessary to study different models of modified gravity. In addition there is a hope of using these models to better understand the acceleration of the Universe. It is well known that these types of theories can be equivalent to the metric-scalar models with different mechanisms of equivalence. The main goal of our work is to suggest a modification and generalization of these known mechanisms that can be applied to a wide variety of gravitational theories.

In the first part we use functions $f(R)$ for the Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker equations and calculate the many solutions of exponential type. Then, we propose a generalization of this theory for functions of type $f(X_i)$, where X_i can be R , $\square R$, Gauss-Bonnet, the square of the Weyl tensor and so on. Finally we analyze the future prospects of these models of modified gravity.

In the second part of this thesis is a brief introduction to the $f(R)$ theory and suggest a scalar-tensor representation equivalent to this theory. Then, we calculate the gravitational field equations by the direct method using the scalar-tensor action and varying with respect to the spherically symmetric metric. Soon after we find the same field equations, but using the method of conformal transformation. Finally we see the prospects for continuing this work, still in the process and conclusion.

Keywords

Quantum Field Theory, Modified Gravitation, Cosmology

NOTAÇÕES

- Índices gregos variam de 0 a 3.
- Índices latinos variam de 1 a 3.
- A métrica de Minkowski tem a forma $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$.
- O elemento de linha é escrito na forma $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$.
- A conexão afim é definida por

$$\Gamma_{\sigma\rho}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\mu}(\partial_\rho g_{\sigma\mu} + \partial_\sigma g_{\rho\mu} - \partial_\mu g_{\rho\sigma}).$$

- A derivada covariante será denotada por

$$\nabla_\mu T_\beta^\alpha = \partial_\mu T_{\beta\dots}^{\alpha\dots} + \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha T_{\beta\dots}^{\lambda\dots} + \dots - \Gamma_{\beta\mu}^\lambda T_{\lambda\dots}^{\alpha\dots} - \dots$$

onde usamos que $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

- O tensor de Riemann é definido por

$$R_{\beta\lambda\sigma}^\alpha = \partial_\lambda \Gamma_{\beta\sigma}^\alpha - \partial_\sigma \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha + \Gamma_{\beta\sigma}^\nu \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha - \Gamma_{\beta\lambda}^\nu \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha.$$

- O escalar de Ricci (ou escalar de curvatura) é definido como $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, onde chamamos $R_{\mu\nu}$ de tensor de Ricci, sendo dado pela contração $R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda = g^{\lambda\sigma} R_{\sigma\mu\lambda\nu}$.
- O tensor de Einstein é definido como sendo

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R.$$

- O determinante da métrica é dado por $g = \det(g_{\mu\nu})$.
- O operador d'Alembertiano covariante é dado por $\square = g_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu$. Em particular, para um campo escalar, é definido como o divergente covariante $\partial_\mu\Psi$, ou seja,

$$\square\Psi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Psi).$$

- “ dS'' ” → Abreviação para a solução cosmológica das equações de campo de Einstein proposta do Willem de Sitter. Aqui adotamos $a(t) = e^{2Ht}$, onde $a(t)$ é o fator de escala.
- Definimos $\delta g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ e $h = g^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$.

Sumário

Lista de Figuras	11
Lista de Tabelas	12
1 Introdução	13
1.1 Alguns comentários históricos	13
1.2 O modelo do Big Bang	17
1.3 Teorias de Gravitação $f(R)$	23
2 Campos auxiliares em modelos de gravidade modificada	25
2.1 Introdução	25
2.2 Equivalência entre as teorias $f(R)$ e métrica-escalar	26
2.3 Teoria de gravitação modificada em uma forma mais geral	30
2.3.1 Caso com vínculos	34
2.4 Condições de inflação exponencial no caso geral	40
2.5 Conclusão	44
3 Teoria $f(R)$ em uma abordagem escalar-tensorial	45
3.0.1 Exemplo	46
3.1 Calculando as equações de campo pelo método direto	46
3.1.1 Variando a ação	46
3.1.2 Encontrando $\square\psi$ e $\nabla^\mu\nabla_\nu\psi$	47
3.1.3 Achando as equações de campo	49
3.1.4 Usando Schwarzschild	49
3.1.5 Verificando Schwarzschild	51
3.2 Método conforme	52
3.2.1 A métrica fatorizada	53
3.2.2 Utilizando o método conforme	55
3.2.3 Encontrando $\bar{g}^{ij}\bar{R}_{ij}$ e $\bar{g}^{ab}\bar{R}_{ab}$	56
3.2.4 Encontrando as curvaturas \bar{R} e R	58
3.2.5 Usando o método conforme	60
3.3 Perspectivas	62
4 Conclusão e perspectivas futuras de trabalho	63
Referências Bibliográficas	65

A	Apêndice	68
A.1	Encontrando $\square\psi$ para a métrica esfericamente simétrica	68
A.2	Identificando os termos $\nabla^\mu\nabla^\mu\psi$ para a métrica esfericamente simétrica	69
A.3	Cálculo das equações de campo	72
A.4	Encontrando a solução de Schwarzschild modificada	74
A.5	Calculando $\bar{g}^{ij}\bar{R}_{ij}$	76
A.6	Calculando $\bar{g}^{ab}\bar{R}_{ab}$	79
A.7	Fazendo a variação de $F(v, \lambda, \dot{v}, \dot{\lambda}, \ddot{v}, \ddot{\lambda}, v', \lambda', v'', \lambda'')$	82

Lista de Figuras

- 1.1 Mapeamento da radiação cósmica de fundo em micro-ondas feita pelo satélite WMAP

Lista de Tabelas

3.1	Conexões de Levi-Civita para a métrica esfericamente simétrica.	48
3.2	Termos $\nabla^\mu \nabla_\nu \psi$ para métrica esfericamente simétrica	48

Introdução

1.1 Alguns comentários históricos

Em 1905, Albert Einstein ¹ publica sua conhecida Teoria da Relatividade Especial [32],[33],[34],[35], onde esclarece a conexão entre o espaço e o tempo e deduz as consequências físicas vindas desse fato.

Apenas dois anos depois, em 1907, o matemático polonês e alemão Hermann Minkowski ² demonstrou que as idéias de Einstein podiam ser expressas geometricamente somente no caso onde se considera o espaço físico como tendo quatro dimensões, uma dimensão temporal e três dimensões espaciais.

Esta idéia matemática foi em seguida utilizada por Einstein que, através de seu amigo e companheiro de universidade Marcel Grossmann ³, já conhecia a existência da geometria de Riemann ⁴. Considerando a geometria de Riemann em quatro dimensões Einstein conseguiu derivar, em 1915, as leis que regem a gravitação e que generalizam a gravitação de Newton para campos gravitacionais intensos. A idéia básica consiste em entender a gravitação como a curvatura desse espaço-tempo de quatro dimensões.

A Relatividade Geral está baseada em um conjunto ideias, que iremos expor rapidamente abaixo,

¹ Albert Einstein (Ulm, 14 de Março de 1879, Princeton, 18 de Abril de 1955) foi físico teórico alemão radicado nos Estados Unidos.

² Hermann Minkowski (Kaunas, 22 de junho de 1864, Göttingen, 12 de janeiro de 1909) foi matemático e desenvolveu a teoria geométrica dos números e usou métodos geométricos para resolver complexos problemas na teoria dos números, física matemática e a teoria da relatividade.

³ Marcel Grossmann (09 de abril de 1878, Budapeste, 07 de setembro de 1936, Zurique) foi um matemático e um amigo e colega de Albert Einstein, especialista em geometria descritiva.

⁴ Georg Friedrich Bernhard Riemann (Breselenz, Reino de Hanôver, 17 de Setembro de 1826, Selasca, Verbania, 20 de Junho de 1866) foi matemático alemão, com contribuições fundamentais para a análise e a geometria diferencial.

- Princípio Geral da Relatividade: as leis físicas devem ser as mesmas para todos os observadores, inerciais ou não;
- Princípio Geral da Covariância: as leis da física devem ter as mesmas formas em todos os sistemas de coordenadas;
- O movimento inercial se realizará através de trajetórias geodésicas;
- Princípio da Invariância Local de Lorentz ⁵: as leis da relatividade especial se aplicam localmente para todos os observáveis inerciais;
- Curvatura do espaço-tempo: Permite explicar o efeitos gravitacionais em um espaço-tempo curvo;

Uma das principais consequências da gravidade é sua manifestação através da geometria local do espaço-tempo. As bases matemáticas da teoria remontam aos axiomas da geometria euclidiana e às muitas tentativas de provar, durante muitos séculos, o quinto postulado de Euclides ⁶.

A geometria euclidiana, como se sabe, nasceu com Euclides, matemático da biblioteca de Alexandria, cerca de 300 a.c, que pretendeu reunir na obra “Elementos” todos os conhecimentos de geometria que se conhecia até o momento. A geometria euclidiana pretende descrever numa formulação racional à geometria intuitiva do espaço. Parte de definições básicas, tais como ponto “o que não tem partes”, linha “comprimento sem espessura”, reta, plano, ângulo, etc e depois levando a definições mais avançadas. Por exemplo, a de retas paralelas (complanas e que não se intersectam) ainda usada hoje.

Euclides fundamentou as relações entre os objetos através de axiomas ou postulados:

1. É possível traçar um segmento de um ponto para qualquer outro ponto.
2. É possível prolongar qualquer segmento de reta tanto quanto desejarmos.
3. É possível traçar uma circunferência de centro em qualquer ponto e raio qualquer.
4. Todos os ângulos retos são iguais entre si.
5. Se em um plano uma reta intersecta duas outras retas fazendo ângulos internos de um mesmo lado com soma menor que dois retos, então estas duas retas se intersectam em um ponto situado daquele mesmo lado.

O quinto axioma ficou conhecido como “Axioma das Paralelas” porque se prova que é equivalente ao seguinte: “Por um ponto exterior a uma reta passa sempre uma pa-

⁵Hendrik Antoon Lorentz (Arnhem, 18 de julho de 1853, Haarlem, 4 de fevereiro de 1928) foi físico neerlandês que recebeu em 1902 o Nobel de Física por seu trabalho sobre as radiações eletromagnéticas. A maior parte de seus trabalhos envolveu o eletromagnetismo. Deixou seu nome às transformações de Lorentz, que formam a base da teoria da relatividade restrita de Einstein.

⁶Euclides de Alexandria (360 a.C., 295 a.C.) foi professor, matemático platônico e escritor possivelmente grego, muitas vezes referido como o Pai da Geometria. Ele era ativo em Alexandria durante o reinado de Ptolomeu I (323-283 a.C.).

ralela à reta dada”. O primeiro matemático que afirmou a geometria não-euclidiana de forma consciente foi o russo Nicolai Ivanovitch Lobatchevsky ⁷, licenciado pela Universidade de Kazan em 1807, três anos depois desta abrir. Em 1826 fez uma comunicação ao departamento de Matemática e Física em que se nega o quinto axioma, ou seja, na sua geometria, por um ponto exterior a uma reta passa mais do que uma paralela. Submeteu um artigo pela Academia de Ciências de S. Petersburgo, que primeiramente foi rejeitado. Desenvolveu um modelo da sua geometria, que hoje tem o nome de “sempi plano hiperbólico”. Uma importante consequência é a de que a soma dos três ângulos internos de um triângulo é menor do que um ângulo reto.

Por volta da mesma época um jovem matemático húngaro, Janos Bolyai ⁸, desenvolve independentemente, sem qualquer relação com Lobachevsky, um tratado de geometria não-euclidiana, isto é, que nega o quinto axioma de Euclides, que só viria a ser publicado em 1832. Bolyai é por isso também considerado um precursor da geometria não-euclidiana. Nos princípios de 1900 surgem novos modelos de geometria hiperbólica, como o “disco de Poincaré”, inventado pelo francês Henri Poincaré ⁹. Na virada do século os matemáticos debatiam os problemas dos fundamentos lógicos da matemática, também ligados à ideia de unificação coerente das ciências. Basta lembrar que mesmo antes do “annus mirabilis” de Einstein (1905) os físicos propunham dar como completa a compreensão dos fenômenos físicos.

Em 1899 David Hilbert ¹⁰ apresenta uma obra, “Grundlagen der Geometrie”, que resolve e esclarece muitos problemas lógicos relacionados com os fundamentos das geometrias até então conhecidas, as quais têm por base um conjunto de 21 axiomas de incidência, congruência, ordem, paralelas e continuidade, a tal geometria absoluta. Em particular, prova que a demonstração da consistência da geometria euclidiana é equivalente à da consistência dos números naturais. Esta é uma obra notável, que o próprio D. Hilbert foi melhorando em sucessivas edições. Em 1853, Bernhard Riemann, na sua tese de licenciatura apresenta uma ideia analítica de caracterização da geometria. Foi então fundada a geometria Riemanniana. Com a construção da geometria diferencial Riemanniana aparece o conceito de curvatura, de que Gauss já fazia uso para superfícies,

⁷Nicolai Ivanovich Lobachevsky (Níjni Novgorod, 1 de Dezembro de 1792 - Kazan, 24 de Fevereiro de 1856) foi um matemático russo.

⁸János Bolyai (Cluj-Napoca, 15 de dezembro de 1802, Târgu Mures, 27 de janeiro de 1860) foi matemático húngaro, conhecido por seu trabalho em geometria não-euclidiana. Entre 1818 e 1822, estudou no Royal College of Engineering, em Viena. Em 1832 publicou um tratado global sobre a geometria não-euclidiana

⁹Jules Henri Poincaré (Nancy, 29 de abril de 1854 - Paris, 17 de julho de 1912) foi um matemático, físico e filósofo da ciência francês.

¹⁰David Hilbert (Königsberg, 23 de janeiro de 1862 - Göttingen, 14 de fevereiro de 1943) foi um matemático alemão que contribuiu a matemática com idéias brilhantes que distribuíram-se a diversas de suas áreas.

permitindo distinguir, por exemplo, três tipos de geometria em dimensão 2: a geometria hiperbólica, a plana (ou lisa) e a elíptica, conforme a curvatura de Gauss ¹¹ (em dimensão dois é o mesmo que a curvatura de Riemann) seja respectivamente negativa, nula ou positiva. Nesta última, como se pode ver tomando uma esfera com a métrica canônica, nem sequer existem duas retas paralelas, pois as retas são os círculos de raio infinito. Afinal a geometria diferencial se tornou cada vez mais importante, tendo obtido práticas aplicações com a Relatividade, e se encontrando cada vez mais com a álgebra, a topologia e a análise.

O desenvolvimento da geometria do espaço foi de grande importância para a cosmologia uma vez que a teoria relativística da gravitação se apoia inteiramente na ideia de que a geometria do espaço em qualquer local no Universo está diretamente relacionada com a intensidade do campo gravitacional naquele local. Quanto mais intenso é o campo gravitacional então mais forte será a curvatura correspondente.

Poderíamos dizer, de uma maneira bastante livre e baseados exclusivamente nas questões geométricas, que em um contexto cosmológico os três tipos de curvaturas podem nos dar:

- O universo de curvatura positiva corresponde a um universo que se expandirá até uma certa separação entre as galáxias e então contrairá. Este é o chamado universo fechado,
- O universo de curvatura zero corresponde a um universo que se expande para sempre, diminuindo sua velocidade à medida em que faz isso. Este é o chamado universo espacialmente plano,
- O universo de curvatura negativa corresponde a um universo que se expandirá para sempre. Este é o chamado universo aberto.

Gauss demonstrou que não havia razão para a geometria do espaço ser euclidiana. Matematicamente, Einstein utilizou como modelo de espaço-tempo uma variedade pseudo-Riemanianna e suas equações de campo estabelecem que a curvatura da variedade em um ponto está diretamente relacionada com o tensor de energia neste dito ponto; este tensor é a medida da densidade de matéria e energia. A equação de campo possível não é única, existindo possibilidade de outros modelos sem contradizer as observações.

Podemos escrever as equações de Einstein como,

$$R_{\nu\mu} - \frac{1}{2} g_{\nu\mu} R - g_{\nu\mu} \Lambda = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\nu\mu}, \quad (1-1)$$

¹¹Johann Carl Friedrich Gauss (Braunschweig, 30 de Abril de 1777, Göttingen, 23 de Fevereiro de 1855), foi matemático, astrônomo e físico alemão. Conhecido como o príncipe dos matemáticos, muitos o consideram o maior gênio da história da matemática.

onde $R_{\nu\mu}$ é o tensor de curvatura de Ricci, R é o escalar de curvatura de Ricci, $g_{\nu\mu}$ é o tensor métrico, Λ é a constante cosmológica, $T_{\nu\mu}$ é o tensor de energia-momento, c é a velocidade da luz e G é a constante gravitacional universal, de forma similar com o que ocorre com a gravitação Newtoniana. O tensor métrico descreve a variedade e é um tensor simétrico 4×4 , portanto possui 10 componentes independentes. Dada a liberdade de escolha das quatro coordenadas espaço-temporais as equações independentes se reduzem a seis.

As equações de Einstein (1-1) relacionam a curvatura do espaço com a massa-energia. Uma massa qualquer curva o espaço e esta curvatura modela a trajetória de qualquer partícula no espaço curvado por essa massa.

1.2 O modelo do Big Bang

Logo após a publicação da Relatividade Especial de Albert Einstein em 1905 se pode perceber seu caráter limitado, isso porque a teoria estava restrita ao caso de campos gravitacionais pequenos ou desprezíveis. A Teoria da Relatividade Geral proposta pelo próprio Einstein em 1916 preencheu este vazio. Sua teoria tem resultados idênticos aos da gravitação de Isaac Newton ¹² para escalas como a superfície da Terra, mas para grandes dimensões e massas, como as observadas no Universo, os resultados são bastante diferentes.

Podemos dizer que a Teoria da Relatividade Geral é universal no sentido de ser válida mesmo nos casos em que os campos gravitacionais não são pequenos. Trata-se na verdade da teoria da gravidade, descrevendo a gravitação como a ação das massas nas propriedades do espaço e do tempo, que afetam o movimento dos corpos e outras propriedades físicas. Enquanto na teoria de Newton o espaço é rígido, descrito pela geometria Euclidiana, na relatividade geral o espaço-tempo é distorcido pela presença da matéria que ele contém. Um ano depois de propor a relatividade geral, em 1917, Einstein publicou seu artigo histórico sobre cosmologia, “Considerações Cosmológicas sobre a Teoria da Relatividade”, construindo um modelo esférico do Universo. Como as equações da Relatividade Geral não levavam diretamente a um Universo estático de raio finito, mesma dificuldade encontrada com a teoria de Newton, Einstein modificou suas equações, introduzindo a famosa constante cosmológica, para obter um Universo estático, já que ele não tinha nenhuma razão para supor que o Universo estivesse se expandindo ou contraindo. A constante cosmológica age como uma força repulsiva que previne o colapso do Universo pela atração gravitacional.

¹²Sir Isaac Newton (Woolsthorpe, 4 de janeiro de 1643 - Londres, 31 de março de 1727) foi um cientista inglês, mais reconhecido como físico e matemático, embora tenha sido também astrônomo, alquimista, filósofo natural e teólogo.

O holandês Willem de Sitter ¹³ demonstrou em 1917 que a constante cosmológica permite um Universo em expansão mesmo se ele não contivesse qualquer matéria e, portanto, ela é também chamada de energia do vácuo. As observações mostram que o Universo é homogêneo em escalas de 10 a 100 milhões de anos luz e maiores. Para escalas menores, podemos ver estrelas, galáxias e aglomerados de galáxias, mas em larga escala os elementos de volume são homogêneos. A hipótese que o Universo seja homogêneo e isotrópico é chamada de “Princípio Cosmológico”. Em 1929 Hubble ¹⁴, medindo o deslocamento para o vermelho nas linhas espectrais das galáxias observadas por Milton La Salle Humason ¹⁵, e medindo ele próprio suas distâncias, descobre que as galáxias estavam se afastando com velocidades proporcionais às suas distâncias, isto é, quanto mais distante a galáxia, maior sua velocidade de afastamento, porém uma análise direta do gráfico original obtido por Hubble não deixa este fato evidente. Hubble publicou seus resultados para 24 galáxias em 1929, no *Proceedings of the National Academy of Science*, e dois anos mais tarde, junto com Humason, estendeu seus resultados por um fator de 18 em distância. Isso constituiu a primeira evidência para a expansão do Universo, já predita pelo russo Alexander Friedmann ¹⁶ em dois artigos publicados no “*Zeitschrift für Physik*” em 1922 e 1924, e pelo belga Georges-Henri Édouard Lemaître ¹⁷ em 1927, no “*Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*”.

Mesmo com a descoberta da expansão do Universo, muitos pesquisadores acreditavam na Teoria do Estado Estacionário, ou seja, que o Universo era similar em todas as direções e imutável no tempo, com produção contínua de matéria para contrabalançar a expansão observada, mantendo a densidade média constante. Esta teoria foi proposta por

¹³Willem de Sitter (Sneek, 6 de maio de 1872 - Leiden, 20 de novembro de 1934) foi um matemático, físico e astrônomo neerlandês. Willem de Sitter estudou Matemática na Universidade de Groningen e depois integrou o laboratório de Astronomia de Groninga. Trabalhou no observatório do Cabo na África do Sul (1897-1899), e em 1908 foi nomeado para cadeira de Astronomia da Universidade de Leiden. Foi diretor do Observatório de Leiden de 1919 até sua morte.

¹⁴Edwin Powell Hubble (Marshfield, 20 de novembro de 1889 - San Marino, 28 de setembro de 1953) foi um astrônomo estadunidense. Famoso por ter descoberto que as até então chamadas nebulosas eram na verdade galáxias fora da Via Láctea, e que estas afastam-se umas das outras a uma velocidade proporcional à distância que as separa.

¹⁵Milton La Salle Humason ou Milton Lasell Humason (19 de agosto de 1891 - 18 de junho de 1972) foi um astrônomo americano nascido em Minnesota.

¹⁶Alexander Alexandrovich Friedmann (16 de junho de 1888, São Petersburgo, 16 de setembro de 1925, Petrogrado) foi um matemático e cosmólogo russo.

¹⁷Georges-Henri Édouard Lemaître (Charleroi, 17 de julho de 1894 - Louvain, 20 de junho de 1966) foi um padre católico, astrônomo e físico belga.

Herman Bondi ¹⁸, Thomas Gold ¹⁹ e Fred Hoyle ²⁰. Em 1950 Fred Hoyle sugeriu pejorativamente o nome “Big Bang” para o evento de início do Universo, quando iniciou-se a expansão. Edward P. Tryon ²¹ propôs em 1973 (Nature, 246, 396) que o Big Bang ocorreu por uma flutuação quântica do vácuo. Já para destino do Universo existem duas possibilidades: o Universo se expandirá para sempre, ou a expansão parará e haverá novo colapso ao estado denso. Em 1964, a descoberta acidental da radiação de microondas do fundo do universo, uma radiação que vinha de todas as direções, pelos rádio-astrônomos Arno Allan Penzias ²² e Robert Woodrow Wilson ²³, dos Bell Laboratories, reforçou a teoria do Big Bang, ou a Grande Expansão. Penzias e Wilson, que receberam o prêmio Nobel em 1978, publicaram seus resultados do excesso de emissão observado no *Astrophysical Journal* em 1965, e no mesmo volume Robert Henry Dicke ²⁴, Philip James Edward Peebles ²⁵, Peter G. Roll, e David T. Wilkinson ²⁶, publicaram a interpretação do excesso como a detecção da radiação remanescente do Big Bang. A radiação do fundo do universo é o sinal eletromagnético proveniente das regiões mais distantes do Universo (a 13,7 bilhões de anos-luz) e que havia sido predita desde 1948 por Ralph Asher Alpher

¹⁸Sir Hermann Bondi, (01 de novembro de 1919 - 10 de Setembro de 2005) foi um matemático anglo-austríaco e cosmólogo. Ele é mais conhecido por desenvolver a teoria do estado estacionário do universo, com Fred Hoyle e Thomas Gold como uma alternativa à teoria do Big Bang.

¹⁹Thomas Gold (Viena, 22 de maio de 1920 - Ithaca, Nova Iorque, 22 de junho de 2004) foi um cientista austríaco, astrofísico, radicado nos Estados Unidos. Foi professor emérito de astronomia na Universidade de Cornell e membro da Academia Nacional de Ciências dos Estados Unidos.

²⁰Sir Fred Hoyle (Bingley, Yorkshire, 24 de junho de 1915 - Bournemouth, Inglaterra, 20 de agosto de 2001) foi um astrônomo britânico, famoso por algumas teorias que iam de encontro à opinião científica corrente, e um escritor de ficção científica, incluindo alguns livros co-escritos pelo filho, Geoffrey Hoyle. Fred Hoyle passou a maior parte da carreira no Instituto de Astronomia da Universidade de Cambridge, e foi diretor do Instituto vários anos.

²¹Edward P. Tryon é um cientista americano de Terre Haute, Indiana e professor de Física na Hunter College, em Manhattan. Sua especialização é em modelos teóricos de quarks, relatividade geral e cosmologia. Em 1973, ele propôs que o universo é uma flutuação de energia em larga escala de vácuo. Ele é muito citado por sua frase “o universo é simplesmente uma daquelas coisas que acontece de tempos em tempos”.

²²Arno Allan Penzias (Munique, 26 de Abril de 1933) é um físico estadunidense. Foi laureado com o Nobel de Física de 1978, pela descoberta da radiação cósmica de fundo em microondas juntamente com Robert Woodrow Wilson. A experiência de Penzias e Wilson confirmou a teoria do universo inflacionário (vulgarmente conhecida como Big Bang), proposta por Georges Lemaitre e George Gamow, em décadas anteriores.

²³Robert Woodrow Wilson (Houston, 10 de Janeiro de 1936) é um físico estadunidense.

²⁴Robert Henry Dicke (06 de maio de 1916, 04 de março de 1997) foi um físico americano, que fez importantes contribuições para os campos da astrofísica, física atômica, cosmologia e gravidade.

²⁵Phillip James Edwin Peebles (nascido em 25 de abril, 1935) é um distinto físico canadense-americano e cosmólogo teórico.

²⁶David Todd Wilkinson (13 de maio, 1935 - 5 de Setembro de 2002) foi um dos pioneiros de renome mundial no campo da cosmologia, especializado no estudo da radiação cósmica de fundo. Ele nasceu em Hillsdale, Michigan, e se doutorou em física na Universidade de Michigan, sob a supervisão de H. Richard Crane.

²⁷ e Robert Herman ²⁸, associados de George Gamow ²⁹, como a radiação remanescente do estado quente que o Universo se encontrava quando se formou (na verdade quando ele ficou transparente, 380 mil anos depois do Big Bang). Ralph Alpher e Robert Herman publicaram a previsão da radiação do fundo do Universo de 5 K, em 1948, na *Nature*, 162, 774.

A teoria do Big Bang leva em conta que se as galáxias estão se afastando umas das outras, como observado por Edwin Hubble em 1929, então no passado elas deveriam estar cada vez mais próximas, e num passado remoto, cerca de 13,7 bilhões de anos atrás, deveriam estar todas num mesmo ponto, muito quente, uma singularidade espaço-tempo, que se expandiu no Big Bang. O Big Bang criou não somente a matéria e a radiação, mas também o próprio espaço e o tempo. Este é o início do Universo que podemos conhecer.

O padre e cosmólogo Georges-Henri Édouard Lemaître foi provavelmente o primeiro a propor um modelo específico para o Big Bang, em 1927. Ele imaginou que toda a matéria estivesse concentrada no que ele chamou de átomo primordial e que este átomo se partiu em incontáveis pedaços, cada um se fragmentando cada vez mais, até formar os átomos presentes no Universo, numa enorme fissão nuclear.

Independentemente de Lemaître, Alexander Friedmann descobriu toda uma família de soluções das equações da teoria da relatividade geral. A família de soluções para a teoria de relatividade geral encontrada por Friedmann e Lemaître descreve um Universo em expansão. As soluções possíveis das equações da relatividade geral incluem expansão eterna ou recolapso. Se a constante cosmológica for nula, os modelos se dividem em três classes. Se a densidade de matéria for alta suficiente para reverter a expansão, o Universo é fechado, como a superfície de uma esfera mas em três dimensões, de modo que se uma nave viajasse por um tempo extremamente longo em linha reta, voltaria ao mesmo ponto. Se a densidade for muito baixa, o Universo é aberto e continuará se expandindo para sempre. O terceiro caso, chamado de Universo plano, é o limite entre o Universo aberto e o fechado. O Universo neste caso se expande para sempre, mas a velocidade das galáxias seria cada vez menor, chegando a zero no infinito, ainda desconsiderando a energia do vácuo. Neste caso, o Universo é Euclidiano, isto é, tridimensionalmente reto. Em 1940, George Gamow sugere um modelo onde leva em conta fusão nuclear. Ele publicou os re-

²⁷Ralph Asher Alpher (Washington, D.C., 3 de fevereiro de 1921 - Austin, 12 de agosto de 2007) foi um físico e cosmólogo estadunidense. Frequentou a Universidade George Washington, onde encontrou George Gamow, na época professor da universidade, que o acolheu como estudante de doutorado.

²⁸Robert Herman (Bronx, 29 de agosto de 1914 - Austin, 13 de fevereiro de 1997) foi um físico estadunidense. Trabalhou conjuntamente com Ralph Alpher no modelo matemático que predisse, em 1948, a radiação cósmica de fundo, logo após a publicação do artigo expondo a Teoria Alpher-Bethe-Gamov. Trabalhou mais tarde nos laboratórios de pesquisa da General Motors.

²⁹George Gamow (seu nome de nascimento é George Anthony Gamow, 4 de março de 1904, Odessa, Rússia, 19 de agosto de 1968, Boulder, Colorado) foi um físico russo-estadunidense.

sultados em 1948, com Ralph Alpher e Hans Bethe ³⁰. O modelo de Gamow iniciou com partículas fundamentais que se aglomeraram em elementos mais pesados.

Um ítem muito importante na cosmologia é a chamada matéria escura, postulada pela primeira vez por Fritz Zwicky ³¹ em 1937 (*Astrophysical Journal*, 86, 217). Esta é a matéria extra necessária para explicar as curvas de rotação das galáxias e as velocidades observadas das galáxias em aglomerados, maiores que as explicáveis através da matéria observada, chamada matéria luminosa.

Outro modelo de grande importância e muito utilizado atualmente é o de Universo inflacionário. Este modelo de Universo, proposto em 1979 por Alan Harvey Guth ³², do Massachusetts Institute of Technology (MIT), nos Estados Unidos [*Physical Review D* 23, 347 (1981)], e Alexei Starobinsky ³³ [*Pisma Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki* 30, 719 (1979)], na Rússia, e modificado em 1981 pelo russo Andrei Dmitrivitch Linde ³⁴, e pelo americano Paul J. Steinhardt ³⁵, vem de uma das formas das Teorias da Grande Unificação (GUT) das forças forte e eletrofraca que prevê uma quebra de simetria espontânea depois do Big Bang. Esta quebra de simetria, ou transição de fase, faz a gravitação agir repulsivamente, expandindo o Universo.

Na tentativa de conseguir respostas a todas essas teorias em 18 de novembro de 1989, a NASA lançou um satélite chamado Cosmic Background Explorer (COBE), para analisar detalhadamente a radiação do fundo do universo (Cosmic Microwave Background - CMB) operando na faixa de micro-ondas. Como planetas, estrelas, galáxias e nuvens de gás emitem muito pouco micro-ondas, o satélite podia enxergar diretamente a luz que o Universo emitiu quando passou de opaco para transparente, na chamada época da recombinação, cerca de 380 mil anos depois do Big Bang. Os dados obtidos pelo COBE, e divulgados por John Cromwell Mather ³⁶ - cientista coordenador do projeto

³⁰Hans Albrecht Bethe (Estrasburgo, 2 de Julho de 1906 - Ithaca, 6 de Março de 2005) foi um físico estadunidense. Estudou física em Frankfurt e fez o doutorado na Universidade de Munique. Deixou a Alemanha em 1933, quando os Nazistas chegaram ao poder, vivendo primeiro na Inglaterra e a partir de 1935 nos Estados Unidos, onde leccionou na Universidade de Cornell durante a Segunda Guerra Mundial.

³¹Fritz Zwicky (14 de fevereiro de 1898 - 08 de fevereiro de 1974) foi um astrônomo suíço. Trabalhou a maior parte de sua vida no Instituto de Tecnologia da Califórnia, onde fez muitas contribuições importantes em astronomia teórica e observacional.

³²Alan Harvey Guth (New Brunswick, 27 de fevereiro de 1947) é um físico e cosmólogo estadunidense, professor e pesquisador do Massachusetts Institute of Technology.

³³Alexei A. Starobinsky (19 de abril 1948, Moscou) - físico teórico russo, autor de trabalhos sobre gravitação e cosmologia. Um dos fundadores da moderna teoria do nascimento do universo - a teoria da inflação.

³⁴Andrei D. Linde (02 de março 1948, Moscou) - é um físico russo. Professor de Física na Universidade de Stanford. Graduou-se em 1972 na Moscow State University . Ganhou a conceituada Medalha Dirac em 2002 .

³⁵Paul J. Steinhardt (25 de dezembro de 1952) é Professor de Ciência da Universidade de Princeton. Formou-se no Instituto de Tecnologia da Califórnia e obteve o doutorado em Física na Universidade de Harvard. Ele é atualmente diretor do Center for Theoretical Science de Princeton

³⁶John Cromwell Mather (07 de agosto de 1946, Roanoke, Virgínia, EUA) é um astrofísico e cosmólogo

COBE, fitam perfeitamente um corpo negro com temperatura de 2,735 K, com uma incerteza menor que 1%.

Em outro experimento do satélite COBE, divulgado em abril de 1992 por George Smoot ³⁷, também foram detectadas pequeníssimas variações da temperatura nesta radiação. Nos modelos de formação de galáxias, estas flutuações são necessárias para permitir que a matéria formada posteriormente se aglomerasse gravitacionalmente para formar estrelas e galáxias, distribuídas em grupos, bolhas, paredes e vazios, como observamos.

No modelo padrão, as estruturas do Universo são formadas a partir da amplificação gravitacional de pequenas perturbações na distribuição de massa inicial. Seria praticamente impossível haver a formação de estruturas observadas, como galáxias, estrelas, planetas e, portanto, da Terra, sem que houvesse variações de temperatura na radiação do fundo do Universo. Isto devido ao fato de que a radiação e a matéria já estiveram em equilíbrio térmico no Universo primordial e, então, qualquer irregularidade ocorrida na distribuição inicial de matéria seria refletida na distribuição angular desta radiação. A detecção destas flutuações até então era o principal ponto faltante na compreensão da teoria do Big Bang e da formação e evolução do Universo.

O satélite Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) da NASA, lançado em 2001, proporcionou a imagem divulgada por Charles L. Bennett ³⁸ e colaboradores em janeiro de 2010, após sete anos de observações. As regiões vermelhas são mais quentes ($200 \mu\text{K}$) do que a média e as azuis mais frias ($-200 \mu\text{K}$).

Os resultado após sete anos de dados, analisados por Gary F. Hinshaw, David Nathaniel Spergel ³⁹ e colaboradores, indicam que a idade do Universo é de $(13,78 \pm 0,11)$ bilhões de anos e que a matéria normal corresponde a $4,61 \pm 0,15\%$ da massa total. Para tentar resolver esse problema vários modelos físicos foram criados, entre os possíveis candidatos incluem: a constante cosmológica, um campo escalar (quintessência), campos fantasmas, defeitos topológicos, etc. Uma das idéias adotadas foi a modificação da Relatividade Geral (RG).

Na verdade, a ideia de modificar o RG não é nova. Logo após sua apresenta-

ganhador do prêmio Nobel de Física por seu trabalho sobre o satélite Cosmic Background Explorer (COBE), com George Smoot.

³⁷George Fitzgerald Smoot III (Yukon, 20 de fevereiro de 1945) é um astrofísico e cosmologista estadunidense. É doutor em física pelo Instituto de Tecnologia de Massachusetts. Trabalha como catedrático na Universidade da Califórnia (Berkeley). Ganhou o prêmio Nobel de Física em 2006, junto com John Cromwell Mather.

³⁸Dr. Charles L. Bennett (Novembro de 1956) é um astrofísico americano de observação e professor de Física e Astronomia da Universidade Johns Hopkins.

³⁹Nathaniel David Spergel (25 março de 1961), é um astrofísico americano e professor da Universidade de Princeton (atualmente presidente do Departamento de Ciências Astrofísicas), conhecido por seu trabalho sobre o satélite WMAP.

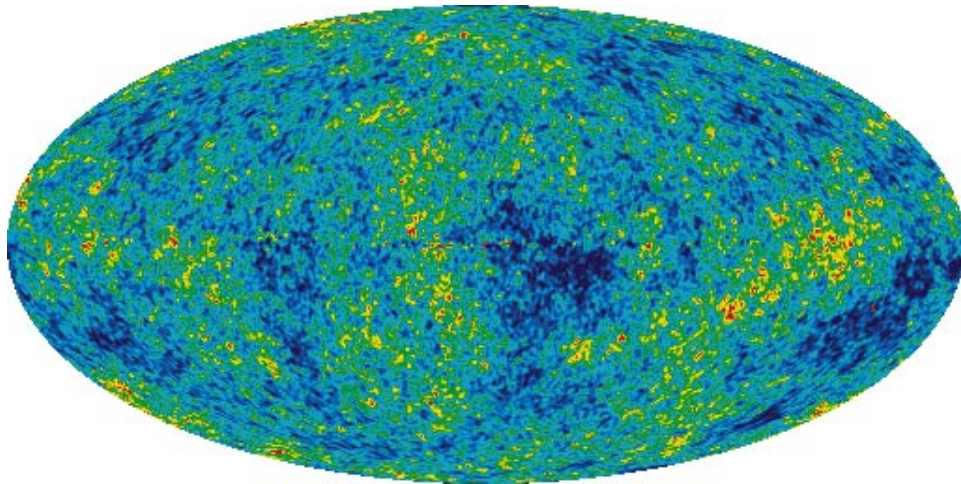


Figura 1.1: Mapeamento da radiação cósmica de fundo em micro-ondas feita pelo satélite WMAP

ção generalizações já foram propostas. A primeira modificação da RG foi introduzida por Weyl, em 1919, incluindo adicionais invariantes de ordem superior na ação de Einstein-Hilbert além do escalar Ricci. Essas modificações foram motivadas por raciocínio puramente teórico e não pela evidência experimental. A motivação para considerar termos de ordem superior na ação tornou-se nos últimos tempos bastante forte. Mais recentemente, a evidência emergente da astrofísica e cosmologia revelou uma nova imagem um tanto inesperado do universo.

Existem várias maneiras de modificar a teoria de Einstein. Provavelmente, a teoria alternativa mais conhecida é do tipo escalar-tensorial (ST) proposta por Brans⁴⁰ e Dicke, em 1961. Outros exemplos de modelos são os “braneworlds”, que têm suas raízes na teoria-M. Aqui, nesta dissertação consideramos uma outra classe de modificações da relatividade geral conhecida como teoria de gravitação $f(R)$. Como veremos em detalhes a seguir, nas teorias $f(R)$ se substitui o escalar de Ricci (R) na ação de Einstein-Hilbert por uma função mais geral da curvatura escalar. Embora algumas das formas propostas para esta função venham sendo provados como não-viáveis, ainda existem muitas outras que merecem atenção.

1.3 Teorias de Gravitação $f(R)$

Como sabemos, as equações da Relatividade Geral podem ser derivadas diretamente da ação de Einstein-Hilbert através do princípio variacional,

⁴⁰Carl Henry Brans (nascido em 13 de dezembro, 1935) é um físico matemático americano conhecido por sua pesquisa sobre os fundamentos teóricos da gravitação elucidados em seu trabalho mais amplamente divulgada, a teoria de Brans-Dicke.

$$S_{EH} = \int \left[\frac{\kappa}{2} R + \mathcal{L}_m \right] \sqrt{-g} d^4x. \quad (1-2)$$

onde \mathcal{L}_m é a densidade Lagrangeana de matéria, R é o escalar de Ricci, g é o determinante da métrica, $\sqrt{-g} d^4x$ é o elemento invariante de 4-volume, $\kappa = 1/8\pi G$ e G é a constante gravitacional de Newton.

A idéia básica que devemos tratar é: como obter um Universo que está acelerando nesta teoria? Podemos modificar a parte material (ou seja, constante cosmológica, quintessência, energia escura e etc) ou podemos modificar a parte geométrica (gravidade modificada ou teorias $f(R)$ ou gravidade não linear).

A nova ação assumirá a seguinte forma generalizada:

$$S_{EHM} = \int \frac{\kappa}{2} f(R) \sqrt{-g} d^4x. \quad (1-3)$$

Podemos ainda utilizar outra teoria (que não é um caso particular da equação acima):

$$S_{EHM} = \int \left[\frac{\kappa}{2} (R + \alpha R^2 + \beta R^{\mu\nu} R_{\nu\mu} + \zeta R^{\mu\nu\rho\gamma} R_{\mu\nu\rho\gamma} + \dots) \right] \sqrt{-g} d^4x. \quad (1-4)$$

Com essas modificações iremos obter equações de campo modificadas, contendo termos que podem descrever a aceleração do Universo. Nós ainda adicionamos termos de ordem mais altas nos invariantes de curvatura no Lagrangeano efetivo do campo gravitacional para incluir correções quânticas.

O próximo passo é descobrir como se comportam essas novas teorias de gravitação e se realmente atendem nossas necessidades. Esse trabalho terá em vista estudar dois modelos, sendo que no capítulo 2 iremos usar a equivalência de teorias $f(R)$ com uma teoria onde incluímos campos auxiliares e investigaremos suas propriedades usando a métrica FRLW. Inicialmente utilizaremos esse método de representação para funções apenas $f(R)$ e logo em seguida faremos uma generalização para funções do tipo $f(X_i)$, onde X_i compreende termos como Gauss-Bonnet, tensor de Weyl e etc. Já no capítulo 3 iremos usar uma representação escalar-tensorial equivalente à $f(R)$ e fazer seu estudo através da métrica esfericamente simétrica em busca de soluções de Schwarzschild modificadas e suas propriedades.

Campos auxiliares em modelos de gravidade modificada

2.1 Introdução

Recentemente está havendo um interesse cada vez mais crescente em teorias do tipo $f(R)$ [1] descritas pela ação

$$S_f = \int d^4x \sqrt{-g} f(R), \quad (2-1)$$

onde $f(R)$ é uma função qualquer diferenciável. É bem conhecido que, sob a condição de que $f''(R) \neq 0$, a teoria é dinamicamente equivalente à teoria métrico escalar com o potencial dependendo da forma da função $f(R)$. Nosso objetivo é discutir essa equivalência em um modelo um pouco diferente. Como uma aplicação do nosso método, vamos ser capazes de generalizar o teorema de equivalência para o caso mais geral, quando a ação depende de uma função de muitas variáveis, $f(X^i)$, com X^i sendo, e.g., R , $\square R$, Gauss-Bonnet e/ou outras quantidades. Notemos que as correções quânticas da Relatividade Geral (provenientes de abordagem semiclássica ou teoria de cordas) podem ser, em certa medida, modeladas por essa função. Outra vantagem do método que apresentamos aqui é que ele pode ser usado, também, para outras teorias, como por exemplo, para modelos do tipo Eddington. Por último, mas não menos importante, nosso método é um pouco mais explícito e simples do que os anteriormente conhecidas, e.g., [2, 3, 4, 5, 6, 7] (veja também [8]). Todas as considerações aqui apresentadas são para $D = 4$ afim de torná-las mais explícitas, mas também podem ser trivialmente generalizadas para um caso arbitrária onde $D \neq 2$. Esta parte do trabalho foi desenvolvida com a colaboração dos professores Davi C. Rodrigues (Departamento de Matemática Aplicada, Universidade Estadual de Campinas, atualmente professor aprovado em concurso para o Departamento de Física da Universi-

dade Federal do Espírito Santo) e Alexei A. Starobinsky (Landau Institute for Theoretical Physics, Moscow, Russia) além do próprio professor Ilya L. Shapiro, é claro.

O capítulo 2 está organizado da seguinte forma. Primeiro consideramos o caso mais simples da teoria (2-1) e usaremos uma maneira simples de mapeamento para o modelo métrico escalar. Esta parte não é essencialmente original, apenas apresentamos aqui de uma forma um pouco mais simples das transformações conhecidas. Um dos aspectos relativamente novos de nossa consideração é o procedimento para corrigir o termo de constante cosmológica na representação de métrica escalar da teoria. Nós também verificamos este procedimento usando a solução do tipo dS exponencial. Em seguida abordamos as teorias da gravidade de uma forma bastante geral, onde a ação contém uma função escalar arbitrária de vários invariantes de curvatura-dependentes, como o R , termo de Gauss-Bonnet, o quadrado do tensor de Weyl e outros. Desenvolvemos uma abordagem sistemática para mapear tais teorias nos modelos de métrica multi-escalares. O passo seguinte é dedicado à formulação de condições gerais para a solução exponencial para as teorias consideradas anteriormente. E finalmente, concluímos o estudo e daremos as propostas futuras.

2.2 Equivalência entre as teorias $f(R)$ e métrica-escalar

Vamos começar a partir de um exemplo simples e pedagógico da teoria (2-1) e encontrar o seu dual métrico escalar. Considere a teoria descrita pela seguinte ação:

$$S_1 = \int d^4x \sqrt{-g} \{ \psi R - V(\psi) \}. \quad (2-2)$$

A teoria (2-2) descreve um escalar dinâmico ψ , apesar de não haver termo cinético para ψ na ação (2-2). Pode-se estabelecer a relação entre as teorias (2-1) e (2-2). A equação de movimento que resulta da variação de ψ em (2-2) tem a forma

$$R = V'(\psi) = \frac{dV}{d\psi}. \quad (2-3)$$

Vamos requisitar que, depois de resolver (2-3) com respeito à ψ e substituindo essa solução $\psi = \psi(R)$ de volta em (2-2), nós obtemos a ação (2-1)

$$\psi(R) \cdot R - V(\psi(R)) = f(R). \quad (2-4)$$

A última condição significa que a equivalência das duas ações é dinâmica, ou seja, mantém os extremos do campo ψ . Mais tarde vamos confirmar a validade deste procedimento através das equações de movimento para ambas as métricas e ψ , que segue um caminho semelhante ao adotado em [5].

Nosso próximo passo será encontrar a relação entre as funções $V(\psi)$ e $f(R)$. Tomando a derivada d/dR da eq. (2-4), chegamos a relação

$$\psi + R\psi'(R) - V'(\psi)\psi'(R) = f'(R). \quad (2-5)$$

Nesta fórmula nós assumimos que $\psi = \psi(R)$ e $R = R(\psi)$. Usando (2-3), a equação (2-5) se reduz imediatamente a relação muito simples

$$\psi = f'(R), \quad (2-6)$$

indicando que a função $R = V'(\psi)$ nada mais é senão o inverso da função $\psi = f'(R)$.

Finalmente, chegamos à seguinte receita para obter os potenciais $V(\psi)$ para uma dada $f(R)$:

a) Calcular $\psi = f'(R)$ e invertê-lo, obtendo-se $R = V'(\psi)$. Note que a possibilidade de inversão requer $f''(R) \neq 0$.

b) Integrar em ψ

$$V(\psi) = \Omega_0 + \int_0^\psi R(\psi) d\psi. \quad (2-7)$$

Devemos notar que uma constante arbitrária de integração Ω_0 em (2-7) corresponde exatamente à constante $f_0 = f(R=0)$, que, aliás, é perdida quando tomamos a derivada $f'(R)$. Além disso, a fim de corrigir a constante Ω_0 pode-se usar a seguinte consideração simples. Usando (2-4) chegamos a

$$V(\psi) = R\psi - f(R), \quad \text{onde } \psi = f'(R), \quad (2-8)$$

Lembre-se que, quando substituído na ação covariante, Ω_0 não pode ser considerada como uma constante irrelevante, porque é multiplicado pelo fator $\sqrt{-g}$. Como (2-7) deve ser igual à (2-8), pode-se então corrigir Ω_0 . Mais tarde, adicionalmente, iremos verificar a validade deste procedimento para uma solução cosmológica do tipo dS .

A receita dada acima permite, em princípio, encontrar a função potencial $V(\psi)$ para uma dada função $f(R)$. Vamos verificar os resultados deste procedimento simples ao nível das equações de movimento. Tomando a variação da equação (2-1) com relação à métrica, obtemos

$$f'(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(Rf' - f) - \nabla_\mu \nabla_\nu f' + g_{\mu\nu} \square f = 0. \quad (2-9)$$

Realizando a mesma operação para (2-2), chegamos a

$$\psi \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right) = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}V(\psi) + \nabla_\mu \nabla_\nu \psi - g^{\mu\nu} \square \psi = 0. \quad (2-10)$$

Pode-se verificar que a equivalência entre (2-9) e (2-10) vale se há uma relação

$$\frac{f'R - f}{f'} = \frac{V(\Psi)}{\Psi}. \quad (2-11)$$

é fácil verificar que a solução dessa equação tem a forma (2-6).

Considere alguns exemplos particulares para o processo descrito acima. O caso mais simples, levando a equações lineares $\Psi = f'(R)$

$$f(R) = \Omega - \kappa^2 R + \frac{\alpha}{2} R^2. \quad (2-12)$$

Usando os resultados anteriores, pode-se facilmente chegar a

$$\Psi(R) = f'(R) = -\kappa^2 + \alpha R \quad \implies \quad V'(\Psi) = R = \frac{\Psi + \kappa^2}{\alpha}. \quad (2-13)$$

Integrando (2-13) nós chegamos à

$$V(\Psi) = \Omega_0 + \frac{\Psi^2}{2\alpha} + \frac{\kappa^2 \Psi}{\alpha}. \quad (2-14)$$

Finalmente, para corrigir a constante de integração, é preciso substituir a derivada $\Psi = -\kappa^2 + \alpha R$ de volta em (2-14) e compará-la com (2-12). Este procedimento nos dará

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{\kappa^4}{2}. \quad (2-15)$$

Pode-se realizar uma simples verificação do procedimento descrito para a fixação de Ω . Para esse fim, iremos agora extrair a solução do tipo dS para as teorias (2-1) e (2-2) para o caso (2-12). A métrica do nosso interesse é

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega \right),$$

$a(t) = \exp\{\sigma(t)\}$ e depois vamos definir $\sigma(t) = H_0 t$. É fácil de se obter a equação para σ para a teoria (2-2),

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_1}{\delta \sigma} = -6e^{-2\sigma} (2\Psi k + \Psi'' + 2\sigma''\Psi + 2\Psi'\sigma' + 2\sigma'^2\Psi) - 4V(\Psi) = 0. \quad (2-16)$$

Aqui a linha representa a derivada com relação ao tempo conforme, e.g.,

$$\sigma' = \frac{d\sigma}{d\eta} = a(t) \frac{d\sigma}{dt},$$

enquanto a derivada com relação ao tempo físico t é denotada pelo ponto. Em termos do

tempo físico e adotando $k = 0$, nós encontraremos a seguinte relação,

$$-12H_0^2\psi - 9H_0\dot{\psi} - 3\ddot{\psi} = 2V. \quad (2-17)$$

Substituindo $\psi = -\kappa^2 + \alpha R$ e tendo em conta que $R = -12H_0^2$ (apenas para solução de de Sitter) para a métrica FRW, obtemos

$$V = 6H_0^2\kappa^2 - 6H_0^2\alpha R \quad (2-18)$$

e finalmente

$$\Omega = 6H_0^2\kappa^2 \quad (2-19)$$

Por outro lado, partindo de

$$S_f = \int d^4x \sqrt{-g} f(R) = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\Omega - \kappa^2 R + \frac{\alpha}{2} R^2 \right] \quad (2-20)$$

chegamos a equação

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_f}{\delta \sigma} = 4\Omega - 6\kappa^2 e^{-2\sigma} (2\sigma'^2 + 2\sigma'') + 18\alpha e^{-4\sigma} (2\sigma'''' - 12\sigma'^2\sigma''). \quad (2-21)$$

É fácil verificar que a solução exponencial corresponde, mais uma vez, a relação (2-19).

Finalmente, para ser mais completo, vamos abordar a possibilidade de utilização da transformação conforme na teoria métrica escalar. é bem sabido que a teoria (2-2) pode ser facilmente mapeada em uma outra com termo escalar cinético. Daremos o tratamento correspondente aqui só para ser completo e para todos que quiserem maiores detalhes favor ver a revisão [14].

Vamos iniciar a partir da transformação conforme

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow \bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \cdot e^{2\sigma(x)} \quad (2-22)$$

na ação (2-2). Um cálculo simples produz o seguinte resultado

$$S_c[g_{\mu\nu}e^{2\sigma}, \psi] = \int d^4x \sqrt{-g} \{ \psi e^{2\sigma} [R - 6(\nabla\sigma)^2 - 6\Box\sigma] - e^{4\sigma} V(\psi) \}, \quad (2-23)$$

onde $(\nabla\sigma)^2 = g^{\mu\nu}\partial_\mu\sigma\partial_\nu\sigma$. Vamos escolher σ tal que $\psi e^{2\sigma} = -\kappa^2$. Então, o primeiro termo $\psi e^{2\sigma} R$ coincide com o termo de Einstein-Hilbert, também o terceiro termo $(-6\psi e^{2\sigma}\Box\sigma)$ se torna derivada total que não afeta as equações do movimento. Afim de proporcionar o

termo cinético tomamos

$$\varphi = 2\sqrt{3}\kappa\sigma, \quad \text{então} \quad \psi = -\kappa^2 \exp\left\{-\frac{\varphi}{\sqrt{3}\kappa}\right\}. \quad (2-24)$$

Logo teremos que

$$S_{min}[g_{\mu\nu}, \varphi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\kappa^2 R + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - U(\varphi) \right\}, \quad (2-25)$$

onde os dois potenciais estão relacionados como

$$U(\varphi) = e^{4\sigma} V(\psi) = \frac{\kappa^4}{\psi^2} V(\psi). \quad (2-26)$$

As fórmulas (2-22), (2-24) e (2-26) nada mais são que a mudança de variáveis na ação (2-2), que a transforma na ação (2-25). Portanto não precisamos verificar a equivalência entre as duas ações por outros meios, como por exemplo examinar as equações do movimento. Finalmente, vamos observar que o caso de multi-escalares pode ser, à princípio, também tratado pela transformação conforme, mas essa transformação não é tão fácil como no caso de um escalar [15].

2.3 Teoria de gravitação modificada em uma forma mais geral

Nós apresentamos uma receita útil e simples de mapear teorias (2-1) em teorias (2-2) ao nível clássico. Este método pode ser generalizado para as ações gravitacionais que são mais gerais que (2-1). No entanto, como veremos a seguir, neste caso, é preciso mais campos escalares. Resultado semelhante foi publicado recentemente em [9] e [10], mas sua derivação parece bastante diferente.

O método pode ser especialmente útil para trabalhar as soluções tipo dS e, portanto, é aplicável para testar vários modelos de gravidade modificada, incluindo os correspondentes às correções quânticas. Considere a seguinte ação gravitacional

$$S_{gen} = \int d^4x \sqrt{-g} f(R, \square R, \tilde{E}, C^2), \quad (2-27)$$

onde $\tilde{E} = E - \frac{2}{3}\square R$, $E = R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - 4R_{\alpha\beta}^2 + R^2$ é o termo topológico Gauss-Bonnet (densidade de Euler) e $C^2 = R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - 2R_{\alpha\beta}^2 + (1/3)R^2$ é o quadrado do tensor de Weyl. Em vista das aplicações cosmológicas, se mostra mais útil considerar \tilde{E} ao invés de E .

Começamos por considerar uma generalização da ação (2-1),

$$S_1 = \int d^4x \sqrt{-g} f(X_i) \quad \text{onde} \quad X_i = R, \square R, \tilde{E}, C^2 \quad (2-28)$$

no caso da ação (2-27), o número de invariantes pode ser facilmente estendido. Para este fim, definimos $i = 1, \dots, N$. Considere a ação dual

$$S_2 = \int d^4x \sqrt{-g} [X_i \psi^i - V(\psi^i)]. \quad (2-29)$$

Vamos seguir o mesmo esquema que aplicamos na seção anterior. As equações para ψ^i assumem a seguinte forma

$$X_i = \frac{\partial V}{\partial \psi^i}. \quad (2-30)$$

Nós substituímos em (2-29), exigindo a equivalência à ação (2-28),

$$S_2 = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \psi^i \frac{\partial V}{\partial \psi^i} - V(\psi^i) \right\} = \int d^4x \sqrt{-g} f(X_i). \quad (2-31)$$

Assumindo

$$f(X_i) = X_i \psi^i - V(\psi^i), \quad (2-32)$$

e tomando a derivada parcial com respeito a X^i em (2-32), nós encontramos que

$$\frac{\partial f}{\partial X_k} = \psi^k + X_i \frac{\partial \psi^i}{\partial X_k} - \frac{\partial V}{\partial \psi^i} \frac{\partial \psi^i}{\partial X_k} \implies \psi^k = \frac{\partial f}{\partial X_k}, \quad (2-33)$$

onde usamos a equação (2-30). As fórmulas (2-30) e (2-33) mostram que sempre temos

$$X_i = \frac{\partial V(\psi)}{\partial \psi_i} \quad \text{e} \quad \psi_k = \frac{\partial f(X)}{\partial X_k}. \quad (2-34)$$

A regrar para derivar $V(\psi^i)$ é muito semelhante ao descrito na seção anterior e tem a seguinte aparência:

a) Calcular $\psi^k = \frac{\partial f(X)}{\partial X_k}$;

b) Resolver essas equações e encontrar $X_k(\psi) = \frac{\partial V}{\partial \psi^k}$;

c) Integrar as últimas relações e encontrar $V(\psi_k)$ até a constante aditiva;

d) Corrigir a constante pela exigência de que as ações coincidam no limite correspondente (normalmente curvatura zero). Observe que esse procedimento pode ser aplicado também para as generalizações não-Riemannianas da Relatividade Geral, incluindo teoria de gravitação com torção.

Vamos considerar um exemplo de como a equivalência com a teoria métrica-escalar pode ser alcançada. Partimos da ação (2-27) com a função

$$f(R, \tilde{E}) = F(R) \cdot \tilde{E}, \quad (2-35)$$

onde $F(R)$ é uma função arbitrária do escalar de curvatura, que será definida mais tarde. A ação equivalente é

$$S_2 = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \Psi R + \chi \tilde{E} - V(\Psi, \chi) \right\}. \quad (2-36)$$

Vamos seguir a receita acima descrita. As equações

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{E}} = \chi = F(R), \quad \frac{\partial f}{\partial R} = \Psi = \tilde{E} F'(R), \quad (2-37)$$

podem ser resolvidas com relação aos dois campos escalares,

$$R = g(\chi), \quad \tilde{E} = \frac{\Psi}{F'(R)} \implies \tilde{E} = \frac{\Psi}{F'_g(g(\chi))}. \quad (2-38)$$

Por outro lado, temos funções inversas

$$R = \frac{\partial V}{\partial \Psi} = g(\chi), \quad \tilde{E} = \frac{\partial V}{\partial \chi} = \frac{\Psi}{F'_g(g(\chi))}. \quad (2-39)$$

Então

$$V(\Psi, \chi) = \int g(\chi) d\Psi + g_1(\chi) = g_1(\chi) + \Psi g(\chi), \quad (2-40)$$

e

$$V(\Psi, \chi) = \int d\chi \frac{\Psi}{F'_g(g(\chi))} + g_2(\Psi) = \Psi \int \frac{d\chi}{F'_g(g(\chi))} + g_2(\Psi). \quad (2-41)$$

Se compararmos as duas formas da função potencial (2-40) e (2-41), torna-se claro que $g(\chi)$ satisfaz a equação funcional

$$g(\chi) = \int \frac{d\chi}{F'_g(g(\chi))} + C. \quad (2-42)$$

E, além disso,

$$g_2(\Psi) - C\Psi = g_1(\chi) = C_1 = \text{const}. \quad (2-43)$$

Não parece possível avançar mais do achamos e por este motivo vamos dar

uma forma mais concreta de $F(R)$. Considere o primeiro caso muito simples $f(R, \tilde{E}) = -\Omega + R\tilde{E}$. Fazendo os mesmos passos como no caso geral, obtemos

$$F(R) = R \implies \chi = R, \quad g(\chi) = \chi, \quad F'(R) = 1.$$

Usando (2-40) e (2-41), podemos obter

$$V(\psi, \chi) = g_1(\chi) + \psi\chi = \psi \int d\chi + g_2(\psi) = \psi\chi + g_2(\psi).$$

é fácil ver que, neste caso, $g_1(\chi) = g_2(\psi) = C$, então finalmente nós temos:

$$V(\psi, \chi) = \psi\chi + C. \quad (2-44)$$

Finalmente, substituindo as relações $\chi = R$ e $\psi = \tilde{E}$ em (2-44), pode-se facilmente verificar que $C = \Omega$. Esse resultado também pode ser verificada por inspeção das soluções exponenciais nos dois casos.

Considere um exemplo um pouco mais complicado, quando

$$f(R, \tilde{E}) = \Omega - \kappa^2 R + \beta \tilde{E} \ln \left(1 + \frac{R}{R_0} \right), \quad (2-45)$$

onde β é apenas uma constante e R_0 é um valor de referência para a curvatura escalar. A expressão (2-45) pode ser vista como parte do grupo de renormalização corrigido na ação de vácuo, onde o parâmetro do grupo de renormalização μ^2 é associado ao escalar de curvatura (veja, e.g., [13] para mais detalhes e referências).

Seguindo os passos dos exemplos anteriores, obtemos

$$\frac{\partial f(R, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}} = \chi = \beta \ln \left(1 + \frac{R}{R_0} \right) \implies R = R_0 \left(e^{\chi/\beta} - 1 \right) \quad (2-46)$$

e

$$\frac{\partial f(R, \tilde{E})}{\partial R} = \psi = \frac{\beta \tilde{E}}{R + R_0} - \kappa^2 \implies \tilde{E} = \frac{R_0}{\beta} (\psi + \kappa^2) e^{\chi/\beta}. \quad (2-47)$$

Na fase seguinte, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(\psi, \chi)}{\partial \psi} = R &\implies V(\psi, \chi) = g_1(\chi) + R_0 \psi e^{\chi/\beta} - R_0 \psi. \\ \frac{\partial V(\psi, \chi)}{\partial \chi} = \tilde{E} &\implies V(\psi, \chi) = g_2(\psi) + R_0 \psi e^{\chi/\beta} + \kappa^2 R_0 e^{\chi/\beta}. \end{aligned}$$

Usando essas duas expressões, é fácil perceber que

$$g_1(\chi) = \kappa^2 R_0 e^{\chi/\beta} + C \quad \text{e} \quad g_2(\Psi) = -R_0 \Psi + C.$$

Finalmente, chegamos ao potencial

$$V(\Psi, \chi) = R_0 \Psi \left(e^{\chi/\beta} - 1 \right) + \kappa^2 R_0 e^{\chi/\beta} - \Omega - \kappa^2 R_0, \quad (2-48)$$

onde a constante $C = -\Omega - \kappa^2 R_0$ foi corrigida segundo o mesmo método que foi utilizado nos casos anteriores.

2.3.1 Caso com vínculos

Pode-se considerar uma expressão mais complicada para a Lagrangiana covariante

$$f(R, \tilde{E}, C^2) = \Omega - \kappa^2 R + \beta \tilde{E} \ln \left(1 + \frac{R}{R_0} \right) + \beta_1 C^2 \ln \left(1 + \frac{R}{R_0} \right). \quad (2-49)$$

Neste ponto pode-se fazer uma observação importante. A primeira vista, a lagrangiana equivalente para este caso deve ter três campos auxiliares, pois existem três estruturas, R , \tilde{E} e C^2 . Ao mesmo tempo, o problema de reduzir a teoria (2-49) é essencialmente equivalente ao da teoria (2-45), com o $\beta \tilde{E}$ por combinação $\beta \tilde{E} + \beta_1 C^2$. Obviamente, neste caso precisamos de apenas dois campos auxiliares, e não três. Em outras palavras, neste caso, o número de campos auxiliares necessários é menor do que aquele que poderia ser pensado apenas por contagem do número de estruturas X_i na ação inicial. Este exemplo mostra que seria interessante ter um critério geral para estabelecer um número exato de campos auxiliares necessários para uma determinada função inicial $f(X_i)$.

Para resolver este problema iremos relembrar alguns conceitos de mecânica analítica. Seja um sistema descrito pela Lagrangeana

$$L = L(q, \dot{q}) \quad (2-50)$$

em um espaço de configurações N -dimensional, representado pelas coordenadas generalizadas q_i , onde $i = 1, \dots, N$. Os \dot{q}_i são as correspondentes velocidades generalizadas.

A passagem para o formalismo Hamiltoniano é feita, primeiramente, pela introdução dos momentos canônicos

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (2-51)$$

No caso de sistemas não vinculados, p_i e q_i são variáveis independentes, representando o chamado espaço de fases. Pode acontecer, entretanto, de haver sistemas onde as relações (2-51) levem à existência de vínculos. Denotamos genericamente esses vínculos por

$$\phi_m = \phi_m(q, p) \quad (2-52)$$

onde $m = 1, \dots, M \leq N$. Os vínculos decorrentes diretamente da relação de definição dos momenta são chamados de vínculos primários. Outros vínculos podem existir, tomando o nome de vínculos secundários.

Sendo o Hamiltoniano canônico (H_c), fazendo variações genéricas de q , \dot{q} e p dadas por δq , $\delta \dot{q}$ e δp , teremos

$$\delta H_c = p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \quad (2-53)$$

Usando a definição de momento canônico, dada por (2-51), imediatamente obtemos

$$\delta H_c = \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \quad (2-54)$$

Como vemos, δH_c é escrita em termos de δq_i e δp_i , o que sugere ser H_c apenas função de q e p . Em termos práticos, a passagem de H_c , dado por $H_c(p, q) = p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q})$, para uma função de q e p , envolve transformações do tipo

$$(q, \dot{q}) \rightarrow (q, p) \quad (2-55)$$

O Jacobiano para esta transformação é determinado pela matriz

$$\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \quad (2-56)$$

chamada matriz Hessiana. Quando o determinante desta matriz é diferente de zero, as transformações (2-55) são sempre possíveis e a Hamiltoniana $H_c(q, p)$ é unicamente determinada. Isto ocorre para o caso onde não existem vínculos. Na presença de vínculos, a matriz Hessiana é singular e, conseqüentemente, nem todos os \dot{q}_i podem ser unicamente escritos em termos de q e p . Considerando que haja M vínculos, haverá M velocidades

adicionais. Portanto, neste caso, a Hamiltoniana não pode ser unicamente determinada em termos de q e p .

O problema de nosso interesse é muito parecido com o que é típico para a transição da descrição de Lagrange para a de Hamilton com vínculos (Ver, por exemplo, livros bem conhecidos [30, 31] para fins de introdução). Na verdade, é análoga à passagem de uma descrição Lagrangiana, sem dependência explícita sobre as coordenadas, para hamiltoniana. Neste caso $f(X^i)$ e $V(\psi_i)$ desempenham o papel da lagrangiana e hamiltoniana, respectivamente, onde os “momenta” são definidos por

$$\psi_i \equiv \frac{\partial f}{\partial X^i}. \quad (2-57)$$

Finalmente, as quantidades $\{X^1, X^2, X^3\}$ desempenham o papel de “velocidades”. Para o caso específico da equação (2-49), estas equações têm a forma

$$\psi_1 = -\kappa^2 + (\beta\tilde{E} + \beta_1 C^2) \frac{1}{R_0 + R}, \quad (2-58)$$

$$\psi_2 = \beta \ln \left(1 + \frac{R}{R_0} \right), \quad (2-59)$$

$$\psi_3 = \beta_1 \ln \left(1 + \frac{R}{R_0} \right), \quad (2-60)$$

nós diretamente observamos a presença de um vínculo, que é uma relação de dependência entre os ψ_i , dada por

$$\phi \equiv \beta_1 \psi_2 - \beta \psi_3 \equiv \beta_1 \chi - \beta \chi_1 = 0. \quad (2-61)$$

Uma vez que o vínculo $\phi(\psi_i)$ vem diretamente da definição desses “momenta”, serão classificados como um vínculo primária [30, 31]. Notemos que a equação $\phi(\psi_i) = 0$ define uma superfície no espaço $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$. Ressalte-se que esse vínculo só representa uma restrição no espaço dos “momentos”, enquanto no espaço das “velocidades” $\{X^1, X^2, X^3\}$ o vínculo não leva a qualquer restrição de espaço, pois se os ψ_i são escritos como funções dos X^k a restrição $\phi(\psi_i)$ torna-se a função $\phi(\psi_i(X^k))$, que é identicamente nulo.

Se este fosse um problema tipicamente hamiltoniano, poderíamos avaliar a evolução dos vínculos primários (por exemplo, o único no exemplo considerado acima) em busca de outras limitações. No entanto o nosso problema atual é simples, porque não envolve qualquer dinâmica. Portanto, apenas os vínculos sem relação com a dinâmica são relevantes aqui, que são os primários.

Antes de prosseguir para a determinação do potencial V , podemos observar aqui

a relação entre a matriz Hessiana

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial X^i \partial X^j} \right)$$

e a presença de vínculos. Em primeiro lugar, se a Hessiana é não-singular, o teorema da função inversa garante que (ao menos localmente) pode-se utilizar a definição (2-57) para expressar X^k como uma função de ψ_i , e, portanto, nenhuma restrição é esperada. No entanto, a Hessiana pode vir a ser degenerada. Por exemplo, no caso de (2-49), esta matriz 3×3 é uma matriz singular (para $R \neq -R_0$), ou seja

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial X^i \partial X^j} \right) = \frac{1}{(R + R_0)^2} \begin{pmatrix} \tilde{E}\beta + C^2\beta_1 & \beta & \beta_1 \\ \beta & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2-62)$$

Portanto, ela tem um único modo zero independente (i.e., um autovetor cujo autovalor correspondente é zero). Na verdade,

$$v = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & -\beta \end{pmatrix} \quad (2-63)$$

pode ser prontamente identificado como o único modo zero linearmente independente do Hessiano (2-62). Notemos que optamos por trabalhar com os modos-zero que multiplicam a matriz Hessiana pela esquerda.

Para concluir esta parte, notamos que cada modo-zero independente gera um vínculo independente. Em particular, através da multiplicação do modo zero v em ambos os lados de (2-57), encontra-se o mesmo vínculo (2-61). Depois, iremos mostrar que cada vínculo independente leva a um modo-zero independente da matriz Hessiana. Ressaltamos que esta relação simples entre modos-zero e vínculos não tem uma contrapartida, em geral, com problemas hamiltonianos com vínculos, uma vez que o correspondente modo-zero pode depender das “coordenadas” (no problema presente, estamos considerando o problema análogo hamiltoniano no qual a lagrangiana depende apenas das velocidades “ X^i ”).

Na presença de vínculos, não se pode usar a primeira relação (2-34) para encontrar V , já que esta relação não é válida na presença de vínculos. Ou seja, teremos que considerar a variação de V na superfície de restrição (na superfície $\phi = 0$),

$$\delta V = \delta(\psi_i X^i - f) = X^i \delta \psi_i + \left(\psi_i - \frac{\partial f}{\partial X^i} \right) \delta X^i = X^i \delta \psi_i. \quad (2-64)$$

Na última etapa acima usamos a definição de momenta (2-57). A equação anterior mostra que V pode ser escrito como uma função apenas de ψ , mesmo se os vínculos estiverem

presentes. Assim, usando a última igualdade,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \psi_i} - X^i \right) \delta \psi_i = 0. \quad (2-65)$$

Agora, usando [31], vemos a extensão da primeira relação de (2-34) para o caso com vínculos,

$$X^i = \frac{\partial V}{\partial \psi_i} + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial \psi_i}. \quad (2-66)$$

Nesta fórmula os λ_m são multiplicadores de Lagrange e ϕ_m , com $m = 1, 2, \dots, M$, são todas as limitações do modelo em questão. No caso particular de (2-49), temos um único vínculo, ou seja, $M = 1$. A introdução destes multiplicadores é necessária, pois a relação entre o X_i e os ψ^k tem de ser estendida, a fim de tornar-se invertível.

Agora estamos em posição de discutir o método de construção de potencial $V(\psi_i)$, no caso de uma teoria com vínculos. O método de integração, que foi utilizado anteriormente, pode ser estendido ao presente caso. No exemplo de $f(R, \tilde{E}, C^2)$, teoria (2-49), se pode resolver a definição de ψ_i e chegar a

$$R = R_0 \left(e^{\chi/\beta} - 1 \right), \quad (2-67)$$

$$\tilde{E} = \frac{R_0}{\beta} e^{\chi/\beta} (\psi + \kappa^2) - \frac{\beta_1}{\beta} C^2. \quad (2-68)$$

Assim, a partir de (2-66) e (2-61) nós achamos

$$R_0 \left(e^{\chi/\beta} - 1 \right) = \frac{\partial V}{\partial \psi}, \quad (2-69)$$

$$\frac{R_0}{\beta} e^{\chi/\beta} (\psi + \kappa^2) - \frac{\beta_1}{\beta} C^2 = \frac{\partial V}{\partial \chi} + \lambda \beta_1, \quad (2-70)$$

$$C^2 = \frac{\partial V}{\partial \chi_1} - \lambda \beta. \quad (2-71)$$

A primeira equação pode ser diretamente integrada, mas a segunda não pode, pois não sabemos como expressar C^2 e λ como funções do ψ_i . No entanto, o multiplicador de Lagrange ainda é livre, assim podemos defini-lo de modo que C^2 desapareça, ou seja, $\lambda = -C^2/\beta$. Por conseguinte, a terceira equação (2-71) torna-se

$$\frac{\partial V}{\partial \chi_1} = 0.$$

Depois disso a expressão de V poderá ser integrada, e $V(\psi_i)$ poderá ser encontrado utilizando procedimentos similares aos utilizados no caso sem vínculos. Podemos notar que o

número de campos auxiliares neste processo é menor do que o número de estruturas N de X_i na teoria inicial de $f(X_i)$. Por exemplo, em (2-49), ainda que nós comecemos a partir de $f(X_i)$, que depende de três grandezas independentes, os potenciais correspondentes V dependem apenas dos dois campos escalares independentes.

A forma do potencial V pode ter impacto sobre as consequências físicas de uma determinada teoria $f(X_i)$. Assim, antes de concluir este exemplo, nós apresentaremos V de uma forma mais geral. Vamos começar, como de costume, a partir de um exemplo simples. Na equação (2-67) fizemos uma opção de selecionar a expressão particular de R em função do χ e χ_1 . Ao mesmo tempo, pode-se expressar R de uma forma mais geral,

$$R = \frac{R_0}{1 + \xi} \left[e^{\chi/\beta} - 1 + \xi(e^{\chi_1/\beta_1} - 1) \right], \quad (2-72)$$

onde ξ é um número real arbitrário diferente de -1 . A escolha em (2-67) corresponde a $\xi = 0$. A partir da versão mais geral (2-72) e da equação (2-58) se pode obter facilmente

$$\beta \tilde{E} + \beta_1 C^2 = R_0 \frac{(\Psi + \kappa^2)}{\xi + 1} \left(e^{\chi/\beta} + \xi e^{\chi_1/\beta_1} \right). \quad (2-73)$$

Agora, em vez de tentar uma integração direta de V (como no caso sem vínculos), podemos expressá-lo na superfície restrita $\phi = 0$, como

$$\begin{aligned} V = \psi_i X^i - f &= \psi_i X^i - \left[\Omega - \kappa^2 R_0 \frac{(e^{\chi/\beta} - 1) + \xi(e^{\chi_1/\beta_1} - 1)}{\xi + 1} + \tilde{E}\chi + C^2\chi_1 \right] \\ &= R_0(\Psi + \kappa^2) \frac{e^{\chi/\beta} - 1 + \xi(e^{\chi_1/\beta_1} - 1)}{\xi + 1} - \Omega \\ &= R_0(\Psi + \kappa^2) \left(e^{\chi/\beta} - 1 \right) - \Omega. \end{aligned} \quad (2-74)$$

Como seria de esperar, a superfície restrita V é independente do valor de ξ . No entanto, a escolha de $\xi = 1$ ou $\xi = 0$, por exemplo, pode ter vantagens uma sobre a outra. Se continuarmos a integração de V , como no método anterior, teríamos como resposta (2-74).

Com a experiência que acabamos de adquirir a partir do exemplo considerado acima, não é difícil adivinhar que, em geral, há uma relação direta entre o número de modos-zero independentes de Hesse e o número de vínculos. Considere o caso em que existem M vínculos independentes dados por

$$\phi_m(\psi_i) = 0, \quad (2-75)$$

com $m = 1, 2, \dots, M$. Supomos que os vínculos são expressos de modo que os gradientes das restrições são linearmente independentes sobre a superfície de restrição (para mais

detalhes, consulte as condições de regularidade sobre a forma de expressar os vínculos [31]).

Uma vez que os vínculos primários $\phi_m(\psi)$ são identicamente nulos quando expressos como funções das variáveis X^i ,

$$0 = \frac{\partial \phi_m(\psi_k(X^j))}{\partial X^i} = \frac{\partial \phi_m(\psi_k)}{\partial \psi_j} \frac{\partial^2 f}{\partial X^i \partial X^j}. \quad (2-76)$$

Então, para cada vínculo independente $\phi_m(\psi_i)$ há um correspondente modo-zero independente da Hessiana dada por

$$(\mathbf{v}^j)_m = \frac{\partial \phi_m}{\partial \psi_j}. \quad (2-77)$$

Em outras palavras, na transformação de uma lagrangiana dada por $f(X^i)$, com $i = 1, 2, \dots, N$, em uma equivalência dada por $\psi_i X^i - V(\psi_i)$, o número de campos escalares auxiliares independentes que aparecem no potencial $V(\psi_i)$ é igual ao posto da Hessiana de $f(X^i)$.

Uma observação relevante é que em geral só precisa-se do potencial V na superfície de restrição, uma vez que, em geral, [31]

$$V = V|_{\phi=0} + \lambda \phi, \quad (2-78)$$

onde $V|_{\phi=0}$ é o potencial na superfície de restrição, mas o vínculo (" primário ") ϕ desaparece quando expresso como uma função do R 's; Assim, é indiferente se usa-se o $f = X^i \psi_i - V$ ou $f = X^i \psi_i - V|_{\phi=0}$.

2.4 Condições de inflação exponencial no caso geral

Como uma aplicação do teorema de equivalência da seção anterior, vamos definir as condições para a existência da solução cosmológica estritamente exponencial. Considere a ação

$$S_{eq} = \int d^4x \sqrt{-g} \{ \psi_1 \square R + \psi_2 R + \psi_3 C^2 + \psi_4 (E - \frac{2}{3} \square R) - V(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) \} \quad (2-79)$$

e a métrica

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = a^2(\eta)(d\eta^2 - dt^2), \quad (2-80)$$

onde

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2-81)$$

A métrica conforme tem a forma

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \text{diag} \left(1, -\frac{1}{1-kr^2}, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta \right) \quad (2-82)$$

Vamos considerar a derivada variacional $\delta S_{eq}/\delta\psi_i$.

$$\begin{aligned} \square R &- \frac{\partial}{\partial\psi_1} V(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) = 0 \\ R &- \frac{\partial}{\partial\psi_2} V(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) = 0 \\ C^2 &- \frac{\partial}{\partial\psi_3} V(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) = 0, \\ (E - \frac{2}{3}\square R) &- \frac{\partial}{\partial\psi_4} V(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) = 0. \end{aligned} \quad (2-83)$$

Além disso, temos a equação para a métrica, que pode ser obtida tomando a derivada da ação com relação ao σ , $\delta S_{eq}/\delta\sigma = 0$, que dará

$$\begin{aligned} &2e^{-4\sigma} (\psi_4'''' + 4k\psi_4'') \\ &- 3e^{-4\sigma} (2k\psi_1'' + 4k\psi_1'\sigma' + 4\sigma'^2\psi_1'\sigma' - 2\psi_1''\sigma'^2 - 4\psi_1'\sigma'\sigma'' + \psi_1'''' + 4\psi_1''\sigma'' + 2\psi_1'\sigma''') \\ &- 3e^{-2\sigma} (2\psi_2k + \psi_2'' + 2\sigma''\psi_2 + 2\psi_2'\sigma' + 2\sigma'^2\psi_2) \\ &- 2V(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) = 0. \end{aligned} \quad (2-84)$$

Vamos apresentar também a equação mais simples para o caso $k = 0$,

$$\begin{aligned} &- 3e^{-4\sigma} (4\sigma'^2\psi_1'\sigma' - 2\psi_1''\sigma'^2 - 4\psi_1'\sigma'\sigma'' + \psi_1'''' + 4\psi_1''\sigma'' + 2\psi_1'\sigma''') \\ &- 3e^{-2\sigma} (\psi_2'' + 2\sigma''\psi_2 + 2\psi_2'\sigma' + 2\sigma'^2\psi_2) \\ &+ 2e^{-4\sigma}\psi_4'''' - 2V(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) = 0. \end{aligned} \quad (2-85)$$

Se supusermos que haja uma solução exponencial $a = a_0 e^{H_0 t}$, ela pode ser substituída nas equações (2-84) e (2-85), com o seguinte resultado:

$$\frac{\partial V}{\partial\psi_1} = \frac{12H_0^2 k}{a^2}, \quad (2-86)$$

$$\frac{\partial V}{\partial\psi_2} = -\frac{6k}{a^2} - 12H_0^2, \quad (2-87)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \psi_3} = 0, \quad (2-88)$$

e

$$\frac{\partial V}{\partial \psi_4} = 24H_0^4 + \frac{16kH_0^2}{a^2}. \quad (2-89)$$

Na equação para o fator conforme encontramos uma expressão mais complicada, de modo que apresentamos apenas o caso onde $k = 0$,

$$\begin{aligned} & -4V - 24H_0^2\psi_2 - 18H_0\dot{\psi}_2 - 6\ddot{\psi}_2 - 72\dot{\psi}_1H_0^3 - 78H_0^2\ddot{\psi}_1 \\ & + 36H_0\dot{\psi}_1 + 6\ddot{\psi}_1 + 24H_0^3\dot{\psi}_4 + 44H_0^2\ddot{\psi}_4 + 24H_0\dot{\psi}_4 = 0 \end{aligned} \quad (2-90)$$

A existência da solução do tipo “ dS ” implica a resolução do sistema de equações (2-86) - (2-90), mas não está claro se isso pode ser feito de uma forma geral.

Vamos tentar uma outra abordagem para soluções de de Sitter. Considere em primeiro lugar teorias como (2-1) e (2-2), que são equivalentes desde que as funções $\psi = f'_R(R)$ e $R = V'_\psi(\psi)$ sejam inversas. Vamos usar este fato para obter o critério de solução tipo dS para as teorias (2-1) e (2-2). A solução dS significa que teremos,

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{4}Rg_{\mu\nu} \quad \text{e} \quad R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{12}R(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}), \quad \text{e também} \quad R = const. \quad (2-91)$$

Como poderemos saber se a solução que leva à (2-91) é possível ou não para a teoria dada? No caso de (2-1) podemos tomar a variação em relação à métrica, $\delta g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$, e chegar à equação

$$\frac{1}{2}f g_{\mu\nu} - R_{\mu\nu}f'_R + (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square)f'_R = 0. \quad (2-92)$$

Inserindo (2-91) na última equação, chegamos a equação algébrica bem conhecida cujas raízes $R = const$ nos dará soluções do tipo dS para modelos de gravidade $f(R)$:

$$\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f - \frac{1}{4}Rg_{\mu\nu}f'_R = 0 \quad \implies \quad Rf'_R = 2f. \quad (2-93)$$

Agora podemos fazer o mesmo para (2-2). As equações equivalentes para (2-92), neste caso, possuem a forma

$$\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\psi R - V) - \psi R_{\mu\nu} = 0, \quad \text{e também} \quad R = V'_\psi. \quad (2-94)$$

Inserindo (2-91) em (2-94), chegamos à equação algébrica para valores constantes de ψ

para todas as possíveis soluções dS :

$$\psi V'_\psi = 2V. \quad (2-95)$$

É fácil ver que a equação (2-95) nada mais é que o mapeamento da relação final na equação (2-93). Para esse fim devemos usar apenas a nossa relação principal $\psi = f'_R(R)$ e $R = V'_\psi(\psi)$ em (2-93). Podemos notar que a relação (2-95) joga exatamente o mesmo papel para a teoria (2-2) como a relação (2-93) joga para para teoria (2-1).

A tarefa seguinte é a obtenção de relações semelhantes para as teorias (2-28) e (2-29). Pode-se notar imediatamente que, nas condições (2-94), temos $X_1 = \square R = 0$ e $X_3 = C^2 = 0$. Portanto, a existência da solução da forma (2-94), diz respeito somente as dependências de $f(X_i)$ em X_2 e X_4 em um caso e à dependência de $V(\psi_i)$ em ψ_2 e ψ_4 em outro caso. Em todos os casos, podemos também considerar E em vez de \tilde{E} .

Primeiro vamos lidar com a Eq.. (2-28). Ao tomar as variações da métrica temos que lembrar que ao final devemos integrar por partes e, em seguida, utilizar as condições (2-94). Portanto, todas as derivadas covariantes, agindo sobre a variação da métrica $h_{\mu\nu}$ ou sobre as componentes do tensor de curvatura, podem ser facilmente negligenciadas. Desta forma, obtemos

$$\delta S_1 = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} h f + f'_R \cdot \delta_h R + f'_E \cdot \delta_h E \right\}. \quad (2-96)$$

Um cálculo muito simples nos dará,

$$\delta_h R \Big|_{dS} = -\frac{1}{4} R h, \quad \text{e} \quad \delta_h E \Big|_{dS} = -\frac{1}{12} R^2 h = -\frac{1}{2} E h, \quad (2-97)$$

onde denotamos $h = h^\mu_\mu$. Então, para todas as soluções dS desta teoria, os invariantes constante R e E , relacionados neste caso com a condição de consistência $E = R^2/4$, também devem satisfazer a equação algébrica

$$f = \frac{1}{2} R f'_R + E f'_E. \quad (2-98)$$

A última equação é uma generalização direta de (2-93) e tem o mesmo potencial teórico da teoria mais geral (2-28) como (2-93) tem para a teoria (2-1).

O próximo passo é obter a extensão da equação (2-95) para o caso mais geral da teoria (2-29). Tomando as três variações necessárias obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_2}{\delta \psi_1} = 0 &\implies R = V'_1 = \frac{\partial V}{\partial \psi_1}, \\ \frac{\delta S_2}{\delta \psi_4} = 0 &\implies E = V'_4 = \frac{\partial V}{\partial \psi_4}, \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\delta S_2}{\delta h_{\mu\nu}} \right|_{dS} = 0 \implies \frac{1}{2}(V - \psi_2 R - \psi_4 E) = -\frac{1}{4}\psi_2 R - \frac{1}{2}\psi_4 E, \quad (2-99)$$

É fácil ver através da eq. (2-99) que uma equação para valores constantes de ψ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, as soluções de Sitter (2-91) tem a mesma forma (2-95) (com ψ_1 em vez de ψ e V dependendo de todos os ψ_i) mesmo que Gauss-Bonnet e outros termos estejam presentes (claro, isso não significa que esses termos não possam ser relevantes).

As outras três equações algébricas decorrem de (2-86), excluindo H_0 (que ainda deve ser encontrado) e usando a relação entre R e E para solução do tipo dS :

$$\frac{\partial V}{\partial \psi_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \psi_3} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \psi_4} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial V}{\partial \psi_2} \right)^2. \quad (2-100)$$

2.5 Conclusão

Vimos nas seções anteriores como realizar um mapeamento de uma teoria gravitacional do tipo $f(X_i)$ em uma teoria de campos auxiliares. O modelo que desenvolvemos é mais geral do que os conhecidos até o momento, em especial, permite lidar com o caso da teoria com vínculos e conduz a um campo de representações auxiliares para as ações que se parecem com as do grupo de renormalização nas correções de ações de vácuo em teorias da gravidade como (2-49). Continuamos o estudo aplicando o modelo em outras teorias, como a exemplo da teoria de Eddington.

Teoria $f(R)$ em uma abordagem escalar-tensorial

As teorias escalares tensoriais da gravitação possuem uma extensa literatura. Em particular, podemos mencionar a equivalência entre uma teoria escalar tensorial e uma teoria do tipo $f(R)$, onde f é uma função do escalar de curvatura. Um exemplo que estudamos é o caso das duas ações a seguir, do tipo,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} f(R), \quad (3-1)$$

onde $f(R)$ é uma função que depende da curvatura, e também,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (\psi R - u(\psi)), \quad (3-2)$$

onde ψ é um campo escalar qualquer.

Fazendo a equivalência entre as ações [38], devemos ter a seguinte relação,

$$f(R) = \psi R - u(\psi). \quad (3-3)$$

Diferenciando em relação a R , teremos,

$$f'(R) = \psi' R + \psi - u' \psi'. \quad (3-4)$$

Sabemos que, diferenciando (3-3) em relação a ψ , encontraremos,

$$R = u'(\psi) = \frac{du}{d\psi}.$$

Substituindo o resultado acima em (3-4),

$$\psi = f'(R), \quad (3-5)$$

daí termos uma relação entre as duas ações que poderá facilitar nossos estudos no

futuro, reduzindo o grau das derivadas e facilitando nossas contas. Por esse motivo, centralizaremos nossos esforços na segunda ação dada.

3.0.1 Exemplo

Podemos utilizar uma função muito simples para exemplificar o método exposto na seção anterior,

$$f(R) = -\kappa R + \frac{\alpha}{2} R^2,$$

usando o resultado $\psi = f'(R)$, temos

$$\psi = f'(R) = -\kappa + \alpha R,$$

e como $u'(\psi) = R$

$$u'(\psi) = R = \frac{\psi + \kappa}{\alpha},$$

podemos escrever o potencial u da seguinte maneira

$$u(\psi) = \Omega + \int_0^\psi R(\psi) d\psi,$$

então, integrando

$$u(\psi) = \Omega + \frac{\kappa^2 \psi}{\alpha} + \frac{\psi^2}{2\alpha},$$

onde Ω é uma constante de integração arbitrária.

Esses modelos de gravitação têm sido bastante discutidos na literatura como prováveis candidatos para a descrição da energia escura. Neste capítulo calcularemos as equações do campo gravitacional por dois métodos diferentes na expectativa futura de encontrar uma solução do tipo Schwarzschild[32],[33],[34] modificada para gravitação escalar tensorial em estudo aqui.

3.1 Calculando as equações de campo pelo método direto

3.1.1 Variando a ação

Como vimos anteriormente, temos a seguinte ação,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (\psi R - u), \quad (3-6)$$

sendo que $u = u(\psi)$. Iremos encontrar as equações de campo (equações de movimento), utilizando a métrica esfericamente simétrica e então buscar as soluções de Schwarzschild modificadas. Para isso, começaremos variando a ação (3-6) em relação à métrica $g_{\mu\nu}$.

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} h(\psi R - u) + \psi \delta R \right\} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} h(\psi R - u) + \psi (\nabla_\mu \nabla_\nu h^{\mu\nu} - \square h - R_{\mu\nu} h^{\mu\nu}) \right\}, \\ \\ \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (R\psi - u) + \nabla^\mu \nabla^\nu \psi - g^{\mu\nu} \square \psi - R^{\mu\nu} \psi \\ &= \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \psi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} u - \nabla_\mu \nabla_\nu \psi + g_{\mu\nu} \square \psi = 0.\end{aligned}\quad (3-7)$$

Desta forma encontramos a seguinte equação,

$$\begin{aligned}\psi G_\nu^\mu + \frac{1}{2} u(\psi) \delta_\nu^\mu - \nabla^\mu \nabla_\nu \psi + \delta_\nu^\mu \square \psi &= 0, \\ G_\nu^\mu &= -\frac{1}{\psi} \left(\frac{1}{2} u(\psi) \delta_\nu^\mu - \nabla^\mu \nabla_\nu \psi + \delta_\nu^\mu \square \psi \right).\end{aligned}\quad (3-8)$$

3.1.2 Encontrando $\square \psi$ e $\nabla^\mu \nabla_\nu \psi$

Agora precisamos encontrar os termos da equação de movimento (3-8). Começaremos pelos termos $\square \psi$ e $\nabla^\mu \nabla_\nu \psi$. Temos que,

$$\begin{aligned}\square \psi &= g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \psi = g^{\mu\nu} \nabla_\mu (\partial_\nu \psi) = g^{\mu\nu} \left[\partial_\mu \partial_\nu \psi - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \psi \right], \\ \\ \square \psi &= g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \psi - g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \psi,\end{aligned}\quad (3-9)$$

onde, para realizarmos essas contas, usaremos a métrica abaixo,

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.\quad (3-10)$$

Para realizar esses cálculos, precisamos encontrar primeiro todos os $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ (conexões) para a métrica acima. Elas são dadas por,

$$\Gamma_{\sigma\rho}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\mu}(\partial_\rho g_{\sigma\mu} + \partial_\sigma g_{\rho\mu} - \partial_\mu g_{\rho\sigma}). \quad (3-11)$$

Fazendo as contas para a métrica dada, os termos abaixo são os únicos que não se anulam,

$\Gamma_{tt}^t = \frac{\dot{v}}{2}$	$\Gamma_{rt}^t = \Gamma_{tr}^t = \frac{v'}{2}$	$\Gamma_{rr}^t = \frac{\dot{\lambda}}{2}e^{(\lambda-v)}$
$\Gamma_{tt}^r = \frac{v'}{2}e^{(v-\lambda)}$	$\Gamma_{rt}^r = \Gamma_{tr}^r = \frac{\dot{\lambda}}{2}$	$\Gamma_{rt}^\theta = \frac{\lambda'}{2}$
$\Gamma_{\theta\theta}^r = -re^{-\lambda}$	$\Gamma_{\phi\phi}^r = -re^{-\lambda}\sin^2\theta$	$\Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r}$
$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin\theta\cos\theta$	$\Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r}$	$\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = -\cot\theta$

Tabela 3.1: Conexões de Levi-Civita para a métrica esfericamente simétrica.

Para as conexões acima encontramos (os detalhes dessa conta podem ser encontrados em A.1), iremos encontrar o seguinte d'Alembertiano:

$$\square\psi = e^{-\lambda}\left[-\psi'' - \frac{v'}{2}\psi' + \frac{\lambda'}{2}\psi' - \frac{2}{r}\psi'\right] + e^{-v}\left[\ddot{\psi} - \frac{\dot{v}}{2}\dot{\psi} + \frac{\dot{\lambda}}{2}\dot{\psi}\right]. \quad (3-12)$$

Agora passaremos a identificar todos termos $\nabla^\mu\nabla_\nu\psi$. Primeiro fazemos,

$$\nabla^\mu\nabla_\nu\psi = g^{\mu\lambda}\nabla_\lambda\nabla_\nu\psi = g^{\mu\lambda}\nabla_\lambda(\partial_\nu\psi) = g^{\mu\lambda}\left[\partial_\lambda\partial_\nu\psi - \Gamma_{\lambda\nu}^\tau\partial_\tau\psi\right],$$

$$\nabla^\mu\nabla_\nu\psi = g^{\mu\lambda}\partial_\lambda\partial_\nu\psi - g^{\mu\lambda}\Gamma_{\lambda\nu}^\tau\partial_\tau\psi. \quad (3-13)$$

Esta é a expressão geral para os $\nabla^\mu\nabla_\nu\psi$. Calculando termo a termo encontramos (termos não nulos, detalhes das contas em A.2),

$\nabla^t\nabla_t\psi = e^{-v}\ddot{\psi} - e^{-v}\frac{\dot{v}}{2}\dot{\psi} - e^{-v}\frac{v'}{2}e^{(v-\lambda)}\psi'$
$\nabla^t\nabla_r\psi = e^{-v}\dot{\psi}' - e^{-v}\frac{\dot{\lambda}}{2}\psi' - e^{-v}\frac{v'}{2}\dot{\psi}$
$\nabla^r\nabla_t\psi = -e^{-\lambda}\dot{\psi}' + e^{-\lambda}\frac{\dot{\lambda}}{2}\psi' + e^{-\lambda}\frac{v'}{2}\dot{\psi}$
$\nabla^r\nabla_r\psi = -e^{-v}\psi'' - e^{-v}\frac{\dot{\lambda}}{2}\dot{\psi} + e^{-\lambda}\frac{\lambda'}{2}\psi'$
$\nabla^\theta\nabla_\theta\psi = -\frac{1}{r}e^{-\lambda}\psi'$
$\nabla^\phi\nabla_r\psi = \frac{1}{r}e^{-\lambda}\psi'$

Tabela 3.2: Termos $\nabla^\mu\nabla_\nu\psi$ para métrica esfericamente simétrica

3.1.3 Achando as equações de campo

Agora temos a coleção de $\nabla^\mu \nabla_\nu \psi$ e também $\square \psi$. Podemos então retornar à variação da ação, (3-8), e substituir esses valores encontrados.

A variação tinha a seguinte forma,

$$G_\nu^\mu = -\frac{1}{\psi} \left(\frac{1}{2} u(\psi) \delta_\nu^\mu - \nabla^\mu \nabla_\nu \psi + \delta_\nu^\mu \square \psi \right).$$

Fazendo as contas, desprezando os casos nulos, iremos encontrar (as contas detalhadas estão em A.3),

$$G_t^t = \frac{1}{\psi} \left(\psi'' - \frac{\lambda'}{2} \psi' + \frac{2}{r} \psi' \right) - \frac{1}{\psi} e^{-\nu} \frac{\dot{\lambda}}{2} \dot{\psi} - \frac{1}{2\psi} u, \quad (3-14)$$

$$G_r^r = \frac{1}{\psi} \left(\dot{\psi}' - \frac{\nu'}{2} \dot{\psi} - \frac{\dot{\lambda}}{2} \psi' \right), \quad (3-15)$$

$$G_t^r = \frac{1}{\psi} e^{-\lambda} \left(-\dot{\psi}' + \frac{\nu'}{2} \dot{\psi} + \frac{\dot{\lambda}}{2} \psi' \right), \quad (3-16)$$

$$G_r^r = \frac{1}{\psi} e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{2} \psi' + \frac{2}{r} \psi' \right) + \frac{e^{-\nu}}{\psi} \left(-\dot{\psi} + \frac{\dot{\nu}}{2} \dot{\psi} \right) - \frac{u}{2\psi}, \quad (3-17)$$

$$G_\theta^\theta = \frac{1}{\psi} e^{-\lambda} \left(\psi'' + \frac{\nu'}{2} \psi' - \frac{\lambda'}{2} \psi' + \frac{1}{r} \psi' \right) + \frac{e^{-\nu}}{\psi} \left(-\dot{\psi} + \frac{\dot{\nu}}{2} \dot{\psi} - \frac{\dot{\lambda}}{2} \dot{\psi} \right) - \frac{u}{2\psi}, \quad (3-18)$$

$$G_\phi^\phi = \frac{1}{\psi} e^{-\lambda} \left(\psi'' + \frac{\nu'}{2} \psi' - \frac{\lambda'}{2} \psi' + \frac{1}{r} \psi' \right) + \frac{e^{-\nu}}{\psi} \left(-\dot{\psi} + \frac{\dot{\nu}}{2} \dot{\psi} - \frac{\dot{\lambda}}{2} \dot{\psi} \right) - \frac{u}{2\psi}. \quad (3-19)$$

Podemos observar que, assim como na solução de Schwarzschild, aqui também encontramos que as equações para as partes angulares são idênticas, ou seja:

$$G_\phi^\phi = G_\theta^\theta.$$

3.1.4 Usando Schwarzschild

Já há muito tempo as soluções de Schwarzschild para as equações de Einstein (G_μ^ν) são conhecidas. Elas são:

$$G_t^t = R_t^t - \frac{1}{2} \delta_t^t = \frac{1}{r^2} - e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) = 0, \quad (3-20)$$

$$G_r^r = R_r^r - \frac{1}{2}\delta_r^r = \frac{1}{r^2} + e^{-\lambda}\left(-\frac{1}{r^2} - \frac{v'}{r}\right) = 0, \quad (3-21)$$

$$G_r^t = R_r^t - \frac{1}{2}\delta_r^t = -e^{-\lambda}\frac{\dot{\lambda}}{r} = 0, \quad (3-22)$$

$$G_\theta^\theta = R_\theta^\theta - \frac{1}{2}\delta_\theta^\theta = \frac{e^{-\lambda}}{r}\left(\frac{\lambda'}{2} - \frac{v'}{2}\right) + e^{-\lambda}\left(\frac{v'\lambda'}{4} - \frac{v''}{2} - \frac{v'^2}{4}\right) + e^{-v}\left(\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\lambda^2}{4} - \frac{\dot{v}\lambda}{2}\right), \quad (3-23)$$

$$G_\phi^\phi = R_\phi^\phi - \frac{1}{2}\delta_\phi^\phi = \frac{e^{-\lambda}}{r}\left(\frac{\lambda'}{2} - \frac{v'}{2}\right) + e^{-\lambda}\left(\frac{v'\lambda'}{4} - \frac{v''}{2} - \frac{v'^2}{4}\right) + e^{-v}\left(\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\lambda^2}{4} - \frac{\dot{v}\lambda}{2}\right). \quad (3-24)$$

Para chegar a esse resultado usamos que,

$$R = g^{tt}R_{tt} + g^{rr}R_{rr} + g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi}R_{\phi\phi},$$

$$R = -\frac{2}{r^2} + e^{-v}\left(\frac{\dot{v}\lambda}{2} - \ddot{\lambda} - \frac{\lambda^2}{2}\right) + e^{-\lambda}\left(\frac{2}{r^2} + 2\frac{v' - \lambda'}{r} + v'' + \frac{v'^2}{2} - \frac{v'\lambda'}{2}\right), \quad (3-25)$$

que é o escalar de curvatura para a métrica utilizada.

Agora, para encontrar as equações de campo modificadas, basta usarmos os resultados que encontraremos para $\square R$ (3-12) e os termos $\nabla^\mu \nabla_\nu \psi$ (tabela 2.2) juntamente com as equações (3-14) - (3-24) e retornar a equação (3-8), onde iremos obter (detalhes das contas em A.4):

$$e^{-\lambda}\left(\psi'' - \frac{\lambda'}{2}\psi' + \frac{2}{r}\psi' + \frac{1}{r^2}\psi - \frac{\lambda'}{r}\psi\right) - e^{-v}\frac{\dot{\lambda}}{2}\dot{\psi} - \frac{u}{2} - \frac{\psi}{r^2} = 0, \quad (3-26)$$

$$\dot{\psi}' - \frac{v'}{2}\dot{\psi} - \frac{\dot{\lambda}}{2}\psi' - \psi\frac{\dot{\lambda}}{r} = 0, \quad (3-27)$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{v'}{2}\psi' + \frac{2}{r}\psi'\right) + \frac{e^{-v}}{\psi}\left(-\dot{\psi} + \frac{\dot{v}}{2}\dot{\psi}\right) - \frac{u}{2\psi} - \frac{\psi}{r^2} + e^{-\lambda}\left(-\frac{1}{r^2} - \frac{v'}{r}\right) = 0, \quad (3-28)$$

$$e^{-\lambda}\left[\psi'' + \frac{v'}{2}\psi' - \frac{\lambda'}{2}\psi' + \frac{1}{r}\psi' + \frac{1}{r}\left(\frac{v'}{2} - \frac{\lambda'}{2}\right)\psi + \left(-\frac{v'\lambda'}{4} + \frac{v''}{2} + \frac{v'^2}{4}\right)\psi\right] + e^{-v}\left[-\dot{\psi} + \frac{\dot{v}}{2}\dot{\psi} - \frac{\dot{\lambda}}{2}\dot{\psi} - \left(\frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\dot{v}\lambda}{4}\right)\psi\right] - \frac{u}{2} = 0. \quad (3-29)$$

Que são as quatro equações principais deste capítulo. Temos três variáveis: v , λ e ψ .

3.1.5 Verificando Schwarzschild

De posse das quatro equações principais dadas na subsecção anterior devemos, antes de passar para a busca das variáveis v , λ e ψ , verificar as contas para ver se essas equações modificadas continuam recaindo para as já conhecidas soluções de Schwarzschild como caso especial.

Para fazer essa verificação da teoria iremos adotar $\psi = 1$ (ou seja, $f = R$) nas equações (3-26), (3-27), (3-28) e (3-29). Primeiro começaremos pela equação (3-26),

$$e^{-\lambda} \left[\psi'' - \frac{\lambda'}{2} \psi' + \frac{2}{r} \psi' + \frac{1}{r^2} \psi - \frac{\lambda'}{r} \psi \right] - e^{-v} \left[\frac{\dot{\lambda}}{2} \psi - \frac{u}{2} - \frac{\psi}{r^2} \right] = 0,$$

Sendo, como dissemos, $\psi = 1$:

$$e^{-\lambda} \left[\overbrace{\psi''}^{=0} - \frac{\lambda'}{2} \overbrace{\psi'}^{=0} + \frac{2}{r} \overbrace{\psi'}^{=0} + \frac{1}{r^2} \overbrace{\psi}^{=1} - \frac{\lambda'}{r} \overbrace{\psi}^{=1} \right] - e^{-v} \left[\frac{\dot{\lambda}}{2} \overbrace{\psi}^{=0} - \frac{u}{2} - \frac{\overbrace{\psi}^{=1}}{r^2} \right] = 0,$$

logo

$$e^{-\lambda} \frac{1}{r^2} - e^{-\lambda} \frac{\lambda'}{r} - \frac{u}{2} - \frac{1}{r^2} = 0.$$

Que, por sua vez, é idêntica à equação (3-20), exceto pelo termo $\frac{u}{2}$, que constitui papel de constante cosmológica.

Agora iremos verificar a equação (3-27):

$$\dot{\psi}' - \frac{v'}{2} \psi - \frac{\dot{\lambda}}{2} \psi' - \psi \frac{\dot{\lambda}}{r} = 0.$$

Para $\psi = 1$,

$$\overbrace{\dot{\psi}'}^{=0} - \frac{v'}{2} \overbrace{\psi}^{=0} - \frac{\dot{\lambda}}{2} \overbrace{\psi'}^{=0} - \overbrace{\psi}^{=1} \frac{\dot{\lambda}}{r} = 0,$$

$$\frac{\dot{\lambda}}{r} = 0,$$

sendo assim, temos $\dot{\lambda} = 0$. Que é um resultado idêntico ao encontrado em (3-22).

Passamos então a verificar (3-28).

$$e^{-\lambda} \left[\left(\frac{v'}{2} + \frac{2}{r} \right) \psi' + \left(\frac{1}{r^2} + \frac{v'}{r} \right) \psi \right] + e^{-v} \left[-\ddot{\psi} + \frac{\dot{v}}{2} \dot{\psi} \right] - \frac{u}{2} - \frac{\psi}{r^2} = 0.$$

Novamente tomando $\psi = 1$,

$$e^{-\lambda} \left[\left(\frac{v'}{2} + \frac{2}{r} \right) \overbrace{\Psi'}^{=0} + \left(\frac{1}{r^2} + \frac{v'}{r} \right) \overbrace{\Psi}^{=1} \right] + e^{-v} \left[-\overbrace{\ddot{\Psi}}^{=0} + \frac{\dot{v}}{2} \overbrace{\dot{\Psi}}^{=0} \right] - \frac{u}{2} - \frac{\overbrace{\Psi}^{=1}}{r^2} = 0,$$

$$e^{-\lambda} \left[\frac{1}{r^2} + \frac{v'}{r} \right] - \frac{u}{2} - \frac{1}{r^2} = 0.$$

Que nos remete à equação (3-21), exceto novamente pelo termo $\frac{u}{2}$.

Agora iremos verificar a última equação, (3-29):

$$e^{-\lambda} \left[\Psi'' + \frac{v'}{2} \Psi' - \frac{\lambda'}{2} \Psi' + \frac{1}{r} \Psi' + \frac{1}{r} \left(\frac{v'}{2} - \frac{\lambda'}{2} \right) \Psi + \left(-\frac{v'\lambda'}{4} + \frac{v''}{2} + \frac{v'^2}{4} \right) \Psi \right] +$$

$$+ e^{-v} \left[-\ddot{\Psi} + \frac{\dot{v}}{2} \dot{\Psi} - \frac{\dot{\lambda}}{2} \dot{\Psi} + \left(-\frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\dot{v}\dot{\lambda}}{4} \right) \Psi \right] - \frac{u}{2} = 0.$$

De novo, $\Psi = 1$:

$$e^{-\lambda} \left[\overbrace{\Psi''}^{=0} + \frac{v'}{2} \overbrace{\Psi'}^{=0} - \frac{\lambda'}{2} \overbrace{\Psi'}^{=0} + \frac{1}{r} \overbrace{\Psi'}^{=0} + \frac{1}{r} \left(\frac{v'}{2} - \frac{\lambda'}{2} \right) \overbrace{\Psi}^{=1} + \left(-\frac{v'\lambda'}{4} + \frac{v''}{2} + \frac{v'^2}{4} \right) \overbrace{\Psi}^{=1} \right] +$$

$$+ e^{-v} \left[-\overbrace{\ddot{\Psi}}^{=0} + \frac{\dot{v}}{2} \overbrace{\dot{\Psi}}^{=0} - \frac{\dot{\lambda}}{2} \overbrace{\dot{\Psi}}^{=0} + \left(-\frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\dot{v}\dot{\lambda}}{4} \right) \overbrace{\Psi}^{=1} \right] - \frac{u}{2} = 0.$$

Assim, ficamos com:

$$e^{-\lambda} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{v'}{2} - \frac{\lambda'}{2} \right) - \left(\frac{v'\lambda'}{4} + \frac{v''}{2} \right) + \frac{v'^2}{4} \right] + e^{-v} \left(-\frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\dot{v}\dot{\lambda}}{4} \right) - \frac{u}{2} = 0.$$

Que finalmente confere com as equações (3-23) e (3-24), exceto pelo termo $\frac{u}{2}$.

Portanto temos uma teoria que retorna às equações de Schwarzschild quando tomamos $\Psi = 1$ e $u = .$ Com essa confirmação, tentaremos encontrar as mesmas equações, só que agora utilizando o método da transformação conforme.

3.2 Método conforme

Nesta seção iremos chegar às mesmas equações de campo encontradas no final da última seção, porém agora não utilizaremos o método tradicional de variar a ação na forma $\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}$. Desta vez utilizaremos o método de transformação conforme, que iniciaremos abaixo.

3.2.1 A métrica fatorizada

Imaginemos ter a seguinte métrica,

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} g_{ab}(x^a) & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & g_{ij}(x^i) \end{bmatrix},$$

e

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} g^{ab}(x^a) & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & g^{ij}(x^i) \end{bmatrix},$$

onde $1 \leq a, b \leq n$ e $n+1 \leq i, j \leq D$.

Vamos verificar como essa escolha de fatorizar a métrica nos facilita encontrar o escalar de curvatura R . Primeiro iremos calcular as conexões, dadas por:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\tau}(\partial_{\mu}g_{\tau\nu} + \partial_{\nu}g_{\mu\tau} - \partial_{\tau}g_{\mu\nu}). \quad (3-30)$$

Calculando para o caso da métrica fatorizada, iremos encontrar,

$$\begin{aligned} \Gamma_{ab}^i &= \frac{1}{2}g^{ij}(\partial_a g_{jb} + \partial_b g_{aj} - \partial_j g_{ab}) = 0, \\ \Gamma_{jb}^i &= \frac{1}{2}g^{il}(\partial_j g_{lb} + \partial_b g_{jl} - \partial_l g_{jb}) = 0, \\ \Gamma_{ij}^a &= \frac{1}{2}g^{ab}(\partial_i g_{cj} + \partial_j g_{ic} - \partial_c g_{ij}) = 0, \\ \Gamma_{bj}^a &= \frac{1}{2}g^{ac}(\partial_b g_{cj} + \partial_j g_{bc} - \partial_c g_{bj}) = 0, \end{aligned}$$

os termos não nulos são:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}(\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}),$$

e

$$\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2}g^{cd}(\partial_a g_{db} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}).$$

Já conhecemos o tensor de Ricci, que é dado por:

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\alpha}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^{\tau}\Gamma_{\tau\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\tau}\Gamma_{\tau\nu}^{\alpha},$$

$$\begin{aligned}
R_{ai} &= \partial_\alpha \underbrace{\Gamma_{ai}^\alpha}_0 - \partial_a \Gamma_{i\alpha}^\alpha + \underbrace{\Gamma_{ai}^\tau}_0 \Gamma_{\tau\alpha}^\alpha - \Gamma_{a\alpha}^\tau \Gamma_{\tau i}^\alpha \\
&= -\underbrace{\partial_a \Gamma_{il}^l}_0 - \underbrace{\Gamma_{ab}^\tau \Gamma_{\tau i}^b}_0 = 0.
\end{aligned}$$

Logo, temos que,

$$R_{ai} = 0. \quad (3-31)$$

Agora encontraremos R_{ij} :

$$\begin{aligned}
R_{ij} &= \partial_\alpha \Gamma_{ij}^\alpha - \partial_i \Gamma_{j\alpha}^\alpha + \Gamma_{ij}^\tau \Gamma_{\tau\alpha}^\alpha - \Gamma_{i\alpha}^\tau \Gamma_{\tau j}^\alpha \\
&= \partial_k \Gamma_{ij}^k - \partial_i \Gamma_{jk}^k + \Gamma_{ij}^l \Gamma_{l\alpha}^\alpha - \Gamma_{il}^\tau \Gamma_{\tau j}^l \\
&= \partial_k \Gamma_{ij}^k - \partial_i \Gamma_{jk}^k + \Gamma_{ij}^l \Gamma_{lk}^k - \Gamma_{il}^k \Gamma_{kj}^l.
\end{aligned}$$

Já R_{ab} terá a forma

$$\begin{aligned}
R_{ab} &= \partial_\alpha \Gamma_{ab}^\alpha - \partial_a \Gamma_{b\alpha}^\alpha + \Gamma_{ab}^\tau \Gamma_{\tau\alpha}^\alpha - \Gamma_{a\alpha}^\tau \Gamma_{\tau b}^\alpha \\
&= \partial_c \Gamma_{ab}^c - \partial_a \Gamma_{bc}^c + \Gamma_{ab}^c \Gamma_{c\alpha}^\alpha - \Gamma_{ac}^\tau \Gamma_{\tau b}^c \\
&= \partial_c \Gamma_{ab}^c - \partial_a \Gamma_{bc}^c + \Gamma_{ab}^c \Gamma_{cd}^d - \Gamma_{ac}^d \Gamma_{db}^c.
\end{aligned}$$

Temos então que

$$R_{ij} = \partial_k \Gamma_{ij}^k - \partial_i \Gamma_{jk}^k + \Gamma_{ij}^l \Gamma_{lk}^k - \Gamma_{il}^k \Gamma_{kj}^l \quad (3-32)$$

$$R_{ab} = \partial_c \Gamma_{ab}^c - \partial_a \Gamma_{bc}^c + \Gamma_{ab}^c \Gamma_{cd}^d - \Gamma_{ac}^d \Gamma_{db}^c \quad (3-33)$$

$$R_{ai} = R_{ia} = 0. \quad (3-34)$$

Com isso, podemos escrever o escalar de curvatura de uma forma mais simples e útil:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{a\nu} R_{a\nu} + g^{i\nu} R_{i\nu} = g^{ab} R_{ab} + g^{ij} R_{ij}.$$

Então chegamos no resultado que desejávamos:

$$R = R(g_{ab}) + R(g_{ij}). \quad (3-35)$$

onde

$$R(g_{ab}) = g^{ab}R_{ab},$$

e

$$R(g_{ij}) = g^{ij}R_{ij}.$$

Desta forma podemos ver que, para encontrar a curvatura para uma determinada métrica, devemos observar se é possível separar essa métrica em blocos. Com isso a curvatura será a soma das curvaturas encontradas em cada bloco, o que em muitos casos facilita enormemente as contas.

3.2.2 Utilizando o método conforme

Agora, relembremos a métrica de Schwarzschild (exceto pelo fato de considerarmos $\dot{\nu} = \dot{\lambda} = 0$, dada anteriormente,

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = e^{\nu(r,t)}c^2 dt^2 - e^{\lambda(r,t)}dr^2 - r^2 d\Omega,$$

onde usamos que $d\Omega = \sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2$. Lembrando que,

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}. \quad (3-36)$$

Podemos fazer a seguinte mudança,

$$(g_{\mu\nu}) = r^2 \begin{pmatrix} r^{-2}e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r^{-2}e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad (3-37)$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\bar{g}_{\mu\nu}}$

logo

$$g_{\mu\nu} = r^2 \bar{g}_{\mu\nu}. \quad (3-38)$$

Escrevendo de forma mais geral teremos que,

$$g_{\mu\nu} = e^{2\sigma} \bar{g}_{\mu\nu}, \quad (3-39)$$

onde, para o caso em que estamos estudando, $e^{2\sigma} = r^2$, que leva a $e^\sigma = r$, logo $\sigma = \ln r$.

Podemos agora perceber facilmente que uma parte da métrica $\bar{g}_{\mu\nu}$ depende apenas de r e de t , enquanto a outra parte depende apenas dos ângulos θ e ϕ . Sabendo disso, podemos fatorizar essa métrica, e assim encontrar a curvatura de forma mais simples que a do método anterior. Adotaremos a seguinte nova notação nesta subseção:

$$(\bar{g}_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \bar{g}_{ab}(x^a) & 0 \\ 0 & \bar{g}_{ij}(x^i) \end{pmatrix}, \quad (3-40)$$

onde $0 \leq a, b \leq 1$ e $2 \leq i, j \leq 3$. Usaremos que

$$(\bar{g}_{ab}) = (\gamma_{ab}) = \begin{pmatrix} e^A & 0 \\ 0 & -e^B \end{pmatrix}, \quad (3-41)$$

$$(\gamma^{ab}) = \begin{pmatrix} e^{-A} & 0 \\ 0 & -e^{-B} \end{pmatrix}, \quad (3-42)$$

e

$$(\bar{g}_{ij}) = (\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad (3-43)$$

$$(\omega^{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sin^2\theta} \end{pmatrix}. \quad (3-44)$$

Fazendo

$$e^A = r^{-2} e^v = e^v e^{\ln r^{-2}} = e^{(v-2\ln r)} = e^{(v-2\sigma)},$$

$$e^B = r^{-2} e^\lambda = e^\lambda e^{\ln r^{-2}} = e^{(\lambda-2\ln r)} = e^{(\lambda-2\sigma)}.$$

Chegamos na seguinte relação,

$$A \equiv v - 2\sigma, \quad (3-45)$$

$$B \equiv \lambda - 2\sigma. \quad (3-46)$$

Por motivo de simplicidade, adotaremos, a partir de agora (apenas neste capítulo), a notação $\mu = 0 \rightarrow ct$, $\mu = 1 \rightarrow r$, $\mu = 2 \rightarrow \theta$ e $\mu = 3 \rightarrow \phi$.

3.2.3 Encontrando $\bar{g}^{ij}\bar{R}_{ij}$ e $\bar{g}^{ab}\bar{R}_{ab}$

Nesta subseção iremos encontrar o escalar de curvatura utilizando a métrica $\bar{g}^{ij} = \omega^{ij}$. Como sempre, temos que calcular primeiro as conexões. E elas são (detalhes em A.5),

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{22}^2 &= 0, \\
\bar{\Gamma}_{23}^2 &= \bar{\Gamma}_{32}^2 = 0, \\
\bar{\Gamma}_{33}^2 &= -\sin\theta\cos\theta, \\
\bar{\Gamma}_{22}^3 &= 0, \\
\bar{\Gamma}_{23}^3 &= \bar{\Gamma}_{32}^3 = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \\
\bar{\Gamma}_{33}^3 &= 0.
\end{aligned}$$

com isso e com as contas feitas em A.5 iremos encontrar,

$$\omega^{ij}\bar{R}_{ij} = \bar{g}^{ij}\bar{R}_{ij} = -2. \quad (3-47)$$

Agora iremos ao segundo escalar de curvatura da métrica fatorizada. Ou seja, queremos encontrar $\bar{g}^{ab}\bar{R}_{ab} = \gamma^{ab}\bar{R}_{ab}$. Os detalhes estão em A.6. Temos as seguintes conexões para essa segunda métrica,

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{a0}^0 &= \frac{1}{2}e^{-A}\partial_a\gamma_{00} = \frac{1}{2}(\delta_a^0\dot{A} + \delta_a^1A'), \\
\bar{\Gamma}_{00}^0 &= \frac{\dot{A}}{2}, \\
\bar{\Gamma}_{10}^0 &= \frac{A'}{2}, \\
\bar{\Gamma}_{11}^0 &= -\frac{1}{2}e^{-A}\partial_0\gamma_{11} = \frac{1}{2}\dot{B}e^{(A-B)}, \\
\bar{\Gamma}_{a1}^1 &= -\frac{1}{2}e^{-B}\partial_a\gamma_{11} = \frac{1}{2}(\delta_a^0\dot{B} + \delta_a^1B'), \\
\bar{\Gamma}_{01}^1 &= \frac{\dot{B}}{2}, \\
\bar{\Gamma}_{11}^1 &= \frac{B'}{2}, \\
\bar{\Gamma}_{00}^1 &= \frac{1}{2}e^{-B}\partial_1\gamma_{00} = \frac{1}{2}A'e^{(A-B)}, \\
\bar{\Gamma}_{ac}^c &= \frac{1}{2}\left[\delta_a^0(\dot{A} + \dot{B}) + \delta_a^1(A' + B')\right],
\end{aligned}$$

o que nos levará, de acordo com as contas detalhadas em A.6, à seguinte curvatura,

$$\bar{g}^{ab}\bar{R}_{ab} = \gamma^{ab}\bar{R}_{ab} = e^{-A}\left[-\ddot{B} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{2} - \frac{\dot{B}^2}{2}\right] + e^{-B}\left[A'' + \frac{A'^2}{2} - \frac{A'B'}{2}\right]. \quad (3-48)$$

3.2.4 Encontrando as curvaturas \bar{R} e R

Já havíamos escrito antes que $\bar{R} = \bar{g}^{ab}\bar{R}_{ab} + \bar{g}^{ij}\bar{R}_{ij}$. Nas últimas seções já encontramos \bar{R}_{ab} e \bar{R}_{ij} . Logo

$$\bar{R} = -2 + e^{-A} \left[-\ddot{B} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{2} - \frac{\dot{B}^2}{2} \right] + e^{-B} \left[A'' + \frac{A'^2}{2} - \frac{A'B'}{2} \right]. \quad (3-49)$$

Agora, usando [12], temos a seguinte relação entre a curvatura R e a curvatura \bar{R} :

$$R = e^{-2\sigma} \left[\bar{R} - 6\bar{\square}\sigma - 6((\bar{\Delta}\sigma)^2) \right], \quad (3-50)$$

onde podemos calcular facilmente $\bar{\square}\sigma$, fazendo

$$\begin{aligned} \bar{\square}\sigma &= \bar{g}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma = \bar{g}^{\mu\nu} \left[\partial_\mu\bar{\nabla}_\nu\sigma - \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\tau\bar{\nabla}_\tau\sigma \right] \\ &= \bar{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\sigma - \bar{g}^{\mu\nu}\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\tau\partial_\tau\sigma. \end{aligned}$$

Usando que $\sigma = \ln r$, teremos,

$$\begin{aligned} \bar{\square}\sigma &= \bar{g}^{11}\partial_1\partial_1\sigma - \bar{g}^{\mu\nu}\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^1\partial_1\sigma \\ &= \bar{g}^{11}\sigma'' - \partial_1\sigma \left[\bar{g}^{00}\bar{\Gamma}_{00}^1 + \bar{g}^{11}\bar{\Gamma}_{11}^1 + \bar{g}^{22}\overbrace{\bar{\Gamma}_{22}^1}^{=0} + \bar{g}^{00}\overbrace{\bar{\Gamma}_{33}^1}^{=0} \right] \\ &= -e^{-B}\sigma'' - \sigma' \left[e^{-A}\frac{1}{2}e^{(A-B)} - e^{-B}\frac{B'}{2} \right] \\ &= -e^{-B}\sigma'' - \sigma' \left[\frac{A'}{2}e^{-B} - \frac{B'}{2}e^{-B} \right], \end{aligned}$$

logo

$$\bar{\square}\sigma = e^{-B} \left[-\sigma'' - \sigma' \left(\frac{A'}{2} - \frac{B'}{2} \right) \right]. \quad (3-51)$$

Iremos achar agora $(\bar{\nabla}\sigma)^2$,

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}\sigma)^2 &= \bar{g}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_\mu\sigma\bar{\nabla}_\nu\sigma = \bar{g}^{\mu\nu}(\partial_\mu\sigma)(\partial_\nu\sigma) \\ &= \bar{g}^{11}\partial_1\sigma\partial_1\sigma \\ &= \bar{g}^{11}(\sigma')^2 \\ &= -e^{-B}(\sigma')^2. \end{aligned} \quad (3-52)$$

Somando as equações encontradas (3-51) e (3-52),

$$\bar{\square}\sigma + (\bar{\nabla}\sigma)^2 = e^{-B} \left[-\sigma'' - \sigma' \left(\frac{A'}{2} - \frac{B'}{2} \right) - (\sigma')^2 \right]. \quad (3-53)$$

Agora, substituindo a equação acima (3-53) e a equação para \bar{R} (3-49) em (3-50) iremos encontrar o seguinte escalar de curvatura:

$$\begin{aligned} R &= e^{-2\sigma} \left[-2 + e^{-A} \left(-\ddot{B} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{2} - \frac{\dot{B}^2}{2} \right) + e^{-B} \left(A'' + \frac{A'^2}{2} - \frac{A'B'}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + e^{-B} \left(6\sigma'' + 6\sigma' \left(\frac{A'}{2} - \frac{B'}{2} \right) + 6(\sigma')^2 \right) \right], \\ &= e^{-2\sigma} \left[-2 + e^{-A} \left(-\ddot{B} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{2} - \frac{\dot{B}^2}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + e^{-B} \left(A'' + \frac{A'^2}{2} - \frac{A'B'}{2} + 6\sigma'' + 6\sigma' \left(\frac{A'}{2} - \frac{B'}{2} \right) + 6(\sigma')^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Podemos ainda melhorar essa equação usando as seguintes relações:

$$A = v - 2\sigma \Rightarrow \dot{A} = \dot{v}, \quad A' = v' - \frac{2}{r}, \quad A'' = v'' + \frac{2}{r^2},$$

$$B = \lambda - 2\sigma \Rightarrow \dot{B} = \dot{\lambda}, \quad B' = \lambda' - \frac{2}{r}, \quad A'' = \ddot{B} = \ddot{\lambda}.$$

Assim, reescrevendo R ,

$$\begin{aligned} R &= e^{-2\sigma} \left[-2 + e^{-A} \left(-\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}\dot{v}}{2} - \frac{\dot{\lambda}^2}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + e^{-B} \left(v'' + \frac{2}{r^2} - \frac{1}{2} \left(v' - \frac{2}{r} \right) \left(\lambda' - \frac{2}{r} \right) + \frac{1}{2} \left(v' - \frac{2}{r} \right)^2 + 3\sigma' \left(v' - \lambda' \right) + 6\sigma'' + 6(\sigma')^2 \right) \right], \\ &= e^{-2\sigma} \left[-2 + e^{-A} \left(-\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}\dot{v}}{2} - \frac{\dot{\lambda}^2}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + e^{-B} \left(v'' + \frac{2}{r^2} - \frac{1}{2} \left(v'\lambda' - \frac{2}{r}v' - \frac{2}{r}\lambda' + \frac{4}{r^2} \right) + \frac{1}{2} \left(v'^2 - \frac{4v'}{r} + \frac{4}{r^2} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 3\sigma' \left(v' - \lambda' \right) + \underbrace{6\sigma'' + 6(\sigma')^2}_{=0} \right) \right], \\ &= e^{-2\sigma} \left[-2 + e^{-A} \left(-\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}\dot{v}}{2} - \frac{\dot{\lambda}^2}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + e^{-B} \left(v'' + \frac{2}{r^2} - \frac{1}{2} v'\lambda' + \frac{v'}{r} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{2}{r^2} + \frac{v^2}{2} - \frac{2v'}{r} + \frac{2}{r^2} + 3\sigma' \left(v' - \lambda' \right) \right) \right], \\ &= e^{-2\sigma} \left[-2 + e^{-A} \left(-\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}\dot{v}}{2} - \frac{\dot{\lambda}^2}{2} \right) + e^{-B} \left(v'' + \frac{2}{r^2} - \frac{v'\lambda'}{2} + \frac{2v'}{r} - \frac{2\lambda'}{r} + \frac{v^2}{2} \right) \right], \\ &= -2e^{-2\sigma} + e^{-(A+2\sigma)} \left[-\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}\dot{v}}{2} - \frac{\dot{\lambda}^2}{2} \right] + e^{-(B+2\sigma)} \left[v'' + \frac{2}{r^2} - \frac{v'\lambda'}{2} + \frac{2v'}{r} - \frac{2\lambda'}{r} + \frac{v^2}{2} \right]. \end{aligned}$$

e finalmente usando que $\sigma = \ln r$, teremos,

$$R = -\frac{2}{r^2} + e^{-\nu} \left[-\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2} - \frac{\dot{\lambda}^2}{2} \right] + e^{-\lambda} \left[\nu'' + \frac{2}{r^2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{2}{r}(\nu' - \lambda') + \frac{\nu'^2}{2} \right]. \quad (3-54)$$

A equação acima é exatamente a mesma da encontrada (3-25). Dessa forma, chegamos ao mesmo escalar de curvatura encontrado na solução de Schwarzschild, mas agora através do método da transformação conforme. Nosso proximo passo é variar a ação dada em função agora de ν e μ .

3.2.5 Usando o método conforme

Relembrando a forma da ação estudada (3-2),

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (\Psi R - u),$$

onde, como já dissemos, $u = u(\Psi)$. Novamente usando [12], temos que,

$$g = \bar{g} e^{2D\sigma},$$

onde D nos indica a dimensão com a qual estamos trabalhando. Logo, no nosso caso, onde $D = 4$,

$$g = \bar{g} e^{8\sigma} \Rightarrow \sqrt{-g} = \sqrt{-\bar{g}} e^{4\sigma}.$$

Temos que,

$$(\bar{g}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} r^{-2}e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r^{-2}e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin^2\theta \end{pmatrix},$$

$$\bar{g} = \det(\bar{g}_{\mu\nu}) = (r^{-2}e^\nu)(-r^{-2}e^\lambda)(-1)(-\sin^2\theta) = -\sin^2\theta r^{-4}e^{(\nu+\lambda)},$$

$$\Rightarrow \sqrt{-\bar{g}} = |\sin^2\theta| r^{-2} e^{\frac{(\nu+\lambda)}{2}},$$

$$\sqrt{-\bar{g}} = \sin^2\theta \frac{e^{\frac{(\nu+\lambda)}{2}}}{r^2}. \quad (3-55)$$

Então, usando esse resultado na ação (3-2), teremos,

$$\begin{aligned}
S &= \int d^4x \sin \theta e^{\frac{(v+\lambda)}{2}} r^2 e^{4\sigma} (\Psi R - u), \\
&= \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{=2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int d^2x \frac{e^{\frac{(v+\lambda)}{2}}}{r^2} \underbrace{e^{4\sigma}}_{r^4} (\Psi R - u).
\end{aligned}$$

Assim,

$$S = 4\pi \int d^2x r^2 e^{\frac{(v+\lambda)}{2}} (\Psi R - u). \quad (3-56)$$

Ainda podemos reescrever a ação acima na forma,

$$S = 4\pi \int d^2x F(v, \lambda, \dot{v}, \dot{\lambda}, \ddot{v}, v', \lambda', v''), \quad (3-57)$$

onde

$$F(v, \lambda, \dot{v}, \dot{\lambda}, \ddot{v}, v', \lambda', v'') = r^2 e^{\frac{(v+\lambda)}{2}} (\Psi R - u). \quad (3-58)$$

Variando a ação (3-57) iremos encontrar as seguintes equações (conta completa em A.7)

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{v}} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial F}{\partial v'} \right) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial F}{\partial v''} \right) = 0, \quad (3-59)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\lambda}} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda'} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{\lambda}} \right) = 0. \quad (3-60)$$

Agora temos que substituir a equação (3-58) na variação encontrada e, através de cálculos laboriosos, porém simples, tentar encontrar as equações de campo encontradas na seção anterior. Fazendo todas as derivadas de F na equação (3-59), encontramos,

$$e^{-\lambda} \left(\Psi'' - \frac{\lambda'}{2} \Psi' + \frac{2}{r} \Psi' + \frac{1}{r^2} \Psi - \frac{\lambda'}{r} \Psi \right) - e^{-v} \frac{\dot{\lambda}}{2} \dot{\Psi} - \frac{u}{2} - \frac{\Psi}{r^2} = 0.$$

Que é exatamente igual a equação (3-26)! Realizando o mesmo processo para a equação (3-60), realizando todas as derivadas de F , encontramos,

$$e^{-\lambda} \left[\left(\frac{v'}{2} + \frac{2}{r} \right) \Psi' + \left(\frac{1}{r^2} + \frac{v'}{r} \right) \Psi \right] + e^{-v} \left(-\ddot{\Psi} + \frac{\dot{v}}{2} \dot{\Psi} \right) - \frac{u}{2} - \frac{\Psi}{r^2} = 0,$$

que é exatamente igual a equação (3-28)! Encontramos as equações de campo, que já havíamos encontrado na seção anterior. As demais são combinações destas duas. Ou seja,

apenas as duas equações acima são L.I. (linearmente independentes). Tendo a certeza que nossas equações de campo estão corretas, podemos passar a analisar suas soluções para as escrevermos como uma forma de Schwarzschild modificada. Estas equações são fundamentais e teremos como próximo trabalho analisar suas propriedades e obter uma solução.

3.3 Perpectivas

No início deste capítulo encontramos as equações do campo gravitacional pelo método direto, variando a ação equivalente em relação à métrica dada. Logo em seguida, utilizamos o método conforme e encontramos essas mesmas equações (somente as equações linearmente independentes).

Ao encontrar essas equações por duas formas distintas podemos ter confiança que elas representem realmente as equações do campo gravitacional que queremos trabalhar.

O próximo passo é resolver essas equações diferenciais e encontrar uma solução, do tipo Schwarzschild modificada, e com isso analisar suas propriedades. Essa equação diferencial poderá ser resolvida por métodos analíticos ou numéricos.

Este capítulo serviu também como uma introdução didática da aplicação do método da transformação conforme. Através desta seção e das contas abertas, incluídas no Apêndice, é possível seguir esses passos e fazer o mesmo tratamento dado aqui para diferentes tipos de métricas e assim ter um método alternativo para se obter as equações de campo. Podemos usar esse fato para obter as equações necessários por um método mais simples ou apenas para verificação destas mesmas equações.

Conclusão e perspectivas futuras de trabalho

Neste trabalho, que levou à presente dissertação apresentada, tivemos contato com vasta quantidade de fontes bibliográficas e também numerosos congressos, workshops e escolas. Isso levou, entre outras coisas, à elaboração do capítulo de introdução histórica, de extrema importância para o entendimento do estágio atual do desenvolvimento das teorias de gravitação e cosmologia. De posse do conhecimento deste passado podemos compreender melhor essas teorias e também desenvolvê-las.

No segundo capítulo, fizemos uma generalização para as já conhecidas teorias de gravitação $f(R)$, onde adotamos funções do tipo $f(R, \square R, \tilde{E}, C^2, \dots)$. Logo em seguida fizemos também a generalização do mapeamento desta teoria para outra onde empregamos vários campos escalares. Por último buscamos uma solução tipo exponencial para as equações encontradas. O próximo passo será interpretar essas equações e retirar suas propriedades físicas.

Já no terceiro capítulo, passamos ao mapeamento de teorias $f(R)$ para teorias escalares. Encontramos as equações do campo gravitacional pelo método convencional de variar a ação em relação à métrica, obtendo equações tipo Schwazschild modificadas (métrica esfericamente simétrica e ausência de matéria). Depois, com o intuito de conferir essas equações, tomamos o limite para $\psi = 1$ e retornamos as equações de Schwazschild já bem conhecidas. Logo depois, encontramos as mesmas equações, mas utilizando o método de transformação conforme. Durante esse capítulo tentamos usar uma abordagem bastante didática, abrindo de forma clara todas as contas (que estão incluídas no apêndice). Com isso esperamos que esse método, exposto de forma transparente e objetiva, possa ser utilizado também em outros tipos de métricas. Por fim, teremos ainda que resolver as equações diferenciais encontradas, seja de forma analítica ou computacional e assim obter as propriedades físicas destas soluções.

Possivelmente a parte mais importante deste trabalho foi o desenvolvimento da técnica simples de mapear teorias de gravitação modificada, como a que utilizamos, em teorias com vários campos escalares e também encontrar os potenciais $V(\psi)$ de forma explícita e clara. Essa generalização pode também ser aplicada a outras classes de teorias

e teremos bastante trabalho no futuro dentro desta perspectiva.

Referências Bibliográficas

- [1] T. P. Sotiriou, V. Faraoni, Rev. Mod. Phys. 82 (2010) 451 [arXiv:0805.1726];
A. De Felice, S. Tsujikawa, Living Rev. Rel. **13** (2010) 3 [arXiv:1002.4928].
- [2] J. O'Hanlon, Phys. Rev. Lett. 29, 137 (1972).
- [3] P. Teyssander and P. Tournenc, J. Math. Phys. 24, 2793 (1983).
- [4] T. Chiba, Phys. Lett. B575, 1 (2003).
- [5] B. Whitt, Phys. Lett. **145B** (1984) 176;
K.-i. Maeda, Phys. Rev. **D39** (1989) 3159;
J. D. Barrow and S. Cotsakis, Phys. Lett. **258B** (1991) 299;
G. Magnano and L.M. Sokolowski, Phys. Rev. **50D** (1994) 5039.
- [6] D. Wands, Class. Quantum Grav. 11 (1994) 269.
- [7] S. Gottlober, H.-J. Schmidt and A. A. Starobinsky, Class. Quantum Grav. 7 (1990) 893-900.
- [8] Sh. Nojiri and S.D. Odintsov, Gen. Rel. Grav. **36** (2004) 1765, hep-th/0308176;
G. Cognola, E. Elizalde, Sh. Nojiri, S.D. Odintsov and S. Zerbini, JCAP **0502** (2005) 010, hep-th/0501096;
Sh. Nojiri and S.D. Odintsov, Lectures at 42nd Karpacz Winter School of Theoretical Physics, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **4** (2007) 115, hep-th/0601213.
- [9] A. De Felice, T. Suyama, JCAP 0906 (2009) 034; arXiv:0904.2092.
- [10] A. De Felice, T. Tanaka, *Inevitable ghost and the degrees of freedom in $f(R,G)$ gravity*. arXiv:1006.4399 [astro-ph.CO].
- [11] A. L. Maroto, I. L. Shapiro, Phys. Lett. B414 (1997) 34.
- [12] D. F. Carneiro, E. A. Freiras, B. Gonçalves, A. G. de Lima and I. L. Shapiro, Gravitation & Cosmology, 10 (2004) 305.

- [13] I. L. Shapiro, *Class. Quantum Grav.* (Topical review) **25** (2008) 103001.
- [14] V. Faraoni, E. Gunzig and P. Nardone, *Fund. Cosmic Phys.* **20** (1999) 121 [gr-qc/9811047].
- [15] D. I. Kaiser, *Phys. Rev. D* **81** (2010) 084044; E-Print: arXiv:1003.1159 [gr-qc].
- [16] M. B. Green, J. B. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
- [17] B. Zwiebach, *Phys. Lett.* **B156B** (1985) 315.
- [18] S. Deser and A. N. Redlich, *Phys. Lett.* **B176** (1986) 350;
B. E. Fridling and A. Jevicki, *Phys. Lett.* **B174** (1986) 75;
D. R. T. Jones and A. M. Lowrence, *Z.Phys.* **C42** (1989) 153;
A. A. Tseytlin, *Phys. Lett.* **B176** (1986) 92.
- [19] M. Asorey, J. L. López, I. L. Shapiro, *Int. Journ. Mod. Phys.* **A12** (1997) 5711.
- [20] I. L. Shapiro, *Phys. Repts.* **357** (2002) 113.
- [21] A. L. Maroto and I. L. Shapiro, *Phys. Lett.* **B414** (1997) 34.
- [22] K. S. Stelle, *Gen. Rel. Grav.* **9** (1978) 353.
- [23] M. Banados, A. Gomberoff, D. C. Rodrigues and C. Skordis, *Phys. Rev.* **D79** (2009) 063515, [arXiv:0811.1270 [gr-qc]].
- [24] A. S. Eddington, *The mathematical theory of Relativity*, (Cambridge University Press, Cambridge 1924).
- [25] E. Schroedinger, *Space-time structure*, (Cambridge University Press, Cambridge 1950).
- [26] M. Ferraris and J. Kijowski, *Gen. Rel. Grav.* **14** (1982) 165.
- [27] E. S. Fradkin and A. A. Tseytlin, *Ann. Phys.* **162** (1985) 31.
- [28] M. Banados and P. G. Ferreira, *Eddington's theory of gravity and its progeny.*, arXiv:1006.1769.
- [29] I.D. Saltas and M. Hindmarsh, *The dynamical equivalence of modified gravity revisited*, arXiv:1002.1710 [gr-qc].
- [30] D.M. Gitman and I.V. Tyutin, *Quantization of Fields with Constraints* (Springer Series in Nuclear and Particle Physics, 1990).

- [31] M. Henneaux, C. Teitelboim, *Quantization of gauge systems* (Princeton, 1992).
- [32] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Field Theory*, Elsevier, 1995.
- [33] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley, New York, 1972.
- [34] C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, San Francisco, 1973.
- [35] R.M., Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, Chicago, 1984.
- [36] N.D. Birrel and P.C.W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
- [37] S.A. Fulling, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [38] I.L. Buchbinder, S.D. Odintsov and I.L. Shapiro, *Effective Action in Quantum Gravity*, IOP Publishing, Bristol, 1992.
- [39] A.Z. Petrov, *Einstein Spaces*, Pergamon, Oxford, 1969.
- [40] B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko and S.P. Novikov, *Modern Geometry - Methods and Applications*, Springer-Verlag, Cambridge, 1984.

Apêndice

A.1 Encontrando $\square\psi$ para a métrica esfericamente simétrica

Temos:

$$\begin{aligned}
 \square\psi &= g^{tt}\partial_t\partial_t\psi + g^{rr}\partial_r\partial_r\psi + g^{\theta\theta}\partial_\theta\partial_\theta\psi + g^{\phi\phi}\partial_\phi\partial_\phi\psi - g^{tt}\Gamma_{tt}^\lambda\partial_\lambda\psi - \\
 &- g^{rr}\Gamma_{rr}^\lambda\partial_\lambda\psi - g^{\theta\theta}\Gamma_{\theta\theta}^\lambda\partial_\lambda\psi - g^{\phi\phi}\Gamma_{\phi\phi}^\lambda\partial_\lambda\psi \\
 &= e^{-v}\ddot{\psi} - e^{-\lambda}\psi'' - e^{-v}\left[\Gamma_{tt}^r\partial_t\psi + \Gamma_{tt}^r\partial_r\psi + \Gamma_{tt}^\theta\partial_\theta\psi + \Gamma_{tt}^\phi\partial_\phi\psi\right] + e^{-\lambda}\left[\Gamma_{rr}^r\partial_r\psi\right] + \\
 &+ \frac{1}{r^2}\left[\Gamma_{\theta\theta}^r\partial_t\psi + \Gamma_{\theta\theta}^r\partial_r\psi\right] + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left[\Gamma_{\phi\phi}^r\partial_t\psi + \Gamma_{\phi\phi}^r\partial_r\psi\right] \\
 &= e^{-v}\ddot{\psi} - e^{-\lambda}\psi'' - e^{-v}\left[\frac{\dot{v}}{2}\psi + \frac{v'}{2}e^{v-\lambda}\psi'\right] + e^{-\lambda}\left[\frac{\dot{\lambda}}{2}e^{\lambda-v}\psi + \frac{\lambda'}{2}\psi'\right] + \\
 &+ \frac{1}{r^2}\left[-re^{-\lambda}\psi'\right] + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left[-r^2\sin^2\theta e^{-\lambda}\psi'\right] \\
 &= e^{-v}\ddot{\psi} - e^{-\lambda}\psi'' - e^{-v}\left[\frac{\dot{v}}{2}\psi + \frac{v'}{2}e^{v-\lambda}\psi'\right] + e^{-\lambda}\left[\frac{\dot{\lambda}}{2}e^{\lambda-v}\psi + \frac{\lambda'}{2}\psi'\right] - \frac{1}{r}e^{-\lambda}\psi' - \frac{1}{r}e^{-\lambda}\psi' \\
 &= e^{-v}\ddot{\psi} - e^{-\lambda}\psi'' - e^{-v}\frac{\dot{v}}{2}\psi - e^{-\lambda}\frac{v'}{2}\psi' + e^{-v}\frac{\dot{\lambda}}{2}\psi + e^{-\lambda}\frac{\lambda'}{2}\psi' - \frac{2}{r}e^{-\lambda}\psi'
 \end{aligned}$$

logo,

$$\square\psi = e^{-\lambda}\left[-\psi'' - \frac{v'}{2}\psi' + \frac{\lambda'}{2}\psi' - \frac{2}{r}\psi'\right] + e^{-v}\left[\ddot{\psi} - \frac{\dot{v}}{2}\psi + \frac{\dot{\lambda}}{2}\psi\right] \quad (\text{A-1})$$

A.2 Identificando os termos $\nabla^\mu \nabla_\mu \psi$ para a métrica esfericamente simétrica

Agora passaremos a identificar todos os termos $\nabla^\mu \nabla_\mu \psi$. Primeiro fazemos,

$$\begin{aligned}\nabla^\mu \nabla_\nu \psi &= g^{\mu\lambda} \nabla_\lambda \nabla_\nu \psi = g^{\mu\lambda} \nabla_\lambda (\partial_\nu \psi) = g^{\mu\lambda} [\partial_\lambda \partial_\nu \psi - \Gamma_{\lambda\nu}^\tau \partial_\tau \psi] \\ \nabla^\mu \nabla_\nu \psi &= g^{\mu\lambda} \partial_\lambda \partial_\nu \psi - g^{\mu\lambda} \Gamma_{\lambda\nu}^\tau \partial_\tau \psi\end{aligned}\quad (\text{A-2})$$

Esta é a expressão geral para os $\nabla^\mu \nabla_\mu \psi$. Calculando termo a termo encontramos, $\mu = t$ e $\nu = t$:

$$\begin{aligned}\nabla^t \nabla_t \psi &= g^{t\lambda} \partial_\lambda \partial_t \psi - g^{t\lambda} \Gamma_{\lambda t}^\tau \partial_\tau \psi = g^{tt} \ddot{\psi} - g^{tt} \Gamma_{tt}^\tau \partial_\tau \psi \\ &= e^{-\nu} \ddot{\psi} - e^{-\nu} [\Gamma_{tt}^t \dot{\psi} + \Gamma_{rr}^r \psi'] = e^{-\nu} \ddot{\psi} - e^{-\nu} \left[\frac{\dot{\nu}}{2} \dot{\psi} + \frac{\nu'}{2} e^{\nu\lambda} \psi' \right] \\ \nabla^t \nabla_t \psi &= e^{-\nu} \ddot{\psi} - e^{-\nu} \frac{\dot{\nu}}{2} \dot{\psi} - e^{-\nu} \frac{\nu'}{2} e^{(\nu-\lambda)} \psi'\end{aligned}\quad (\text{A-3})$$

$\mu = t$ e $\nu = r$:

$$\begin{aligned}\nabla^t \nabla_r \psi &= g^{t\lambda} \partial_\lambda \partial_r \psi - g^{t\lambda} \Gamma_{\lambda r}^\tau \partial_\tau \psi = g^{tt} \dot{\psi}' - g^{tt} \Gamma_{tr}^\tau \partial_\tau \psi \\ &= e^{-\nu} \dot{\psi}' - e^{-\nu} [\Gamma_{tr}^t \dot{\psi} + \Gamma_{tt}^r \psi'] = e^{-\nu} \dot{\psi}' - e^{-\nu} \left[\frac{\dot{\lambda}}{2} \dot{\psi}' + \frac{\nu'}{2} \dot{\psi} \right] \\ \nabla^t \nabla_r \psi &= e^{-\nu} \dot{\psi}' - e^{-\nu} \frac{\dot{\lambda}}{2} \dot{\psi}' - e^{-\nu} \frac{\nu'}{2} \dot{\psi}\end{aligned}\quad (\text{A-4})$$

$\mu = t$ e $\nu = \theta$:

$$\begin{aligned}\nabla^t \nabla_\theta \psi &= g^{t\lambda} \partial_\lambda \partial_\theta \psi - g^{t\lambda} \Gamma_{\lambda\theta}^\tau \partial_\tau \psi = g^{tt} \partial_t \partial_\theta - g^{tt} [\Gamma_{t\theta}^t \dot{\psi} + \Gamma_{t\theta}^r \psi'] \\ \nabla^t \nabla_\theta \psi &= 0\end{aligned}\quad (\text{A-5})$$

Esse resultado é compreensível, já que ψ não tem nenhuma dependência angular, sendo então nulas as derivadas em relação a θ e ϕ .

$$\mu = t \text{ e } \nu = \phi:$$

$$\nabla^t \nabla_\phi \psi = g^{tt} \partial_t \partial_\phi \psi - g^{tt} \Gamma_{t\phi}^\tau \partial_\tau \psi$$

$$\nabla^t \nabla_\phi \psi = 0 \quad (\text{A-6})$$

$$\mu = r \text{ e } \nu = t:$$

$$\begin{aligned} \nabla^r \nabla_t \psi &= g^{rr} \partial_r \partial_t \psi - g^{rr} \Gamma_{rt}^\tau \partial_\tau \psi \\ &= -e^{-\lambda} \dot{\psi}' + e^{-\lambda} \left[\Gamma_{tr}^t \dot{\psi} + \Gamma_{rt}^r \psi' \right] = -e^{-\lambda} \dot{\psi}' + e^{-\lambda} \left[\frac{\dot{\lambda}}{2} \dot{\psi}' + \frac{\nu'}{2} \dot{\psi} \right] \end{aligned}$$

$$\nabla^r \nabla_t \psi = -e^{-\lambda} \dot{\psi}' + e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{2} \dot{\psi}' + e^{-\lambda} \frac{\nu'}{2} \dot{\psi} \quad (\text{A-7})$$

$$\mu = r \text{ e } \nu = r:$$

$$\begin{aligned} \nabla^r \nabla_r \psi &= g^{rr} \partial_r \partial_r \psi - g^{rr} \Gamma_{rr}^\tau \partial_\tau \psi = -e^{-\nu} \psi'' + e^{-\lambda} \left[\Gamma_{rr}^t \dot{\psi} + \Gamma_{rr}^r \psi' \right] \\ &= -e^{-\lambda} \psi'' + e^{-\lambda} \left[\frac{\dot{\lambda}}{2} e^{(\lambda-\nu)} \dot{\psi} + \frac{\lambda'}{2} \psi' \right] \end{aligned}$$

$$\nabla^r \nabla_r \psi = -e^{-\nu} \psi'' - e^{-\nu} \frac{\dot{\lambda}}{2} \dot{\psi} + e^{-\lambda} \frac{\lambda'}{2} \psi' \quad (\text{A-8})$$

$$\mu = r \text{ e } \nu = \theta:$$

$$\nabla^r \nabla_\theta \psi = g^{rr} \partial_r \partial_\theta \psi - g^{rr} \Gamma_{r\theta}^\tau \partial_\tau \psi$$

$$\nabla^r \nabla_\theta \psi = 0 \quad (\text{A-9})$$

$$\mu = r \text{ e } \nu = \phi:$$

$$\nabla^r \nabla_\phi \psi = g^{rr} \partial_r \partial_\phi \psi - g^{rr} \Gamma_{r\phi}^\tau \partial_\tau \psi$$

$$\nabla^r \nabla_\phi \psi = 0 \quad (\text{A-10})$$

$$\mu = \theta \text{ e } \nu = t:$$

$$\nabla^\theta \nabla_t \psi = g^{\theta\theta} \partial_\theta \partial_t \psi - g^{\theta\theta} \Gamma_{\theta t}^\tau \partial_\tau \psi$$

$$\nabla^\theta \nabla_t \psi = 0 \quad (\text{A-11})$$

$$\mu = \theta \text{ e } \nu = r:$$

$$\nabla^\theta \nabla_r \psi = g^{\theta\theta} \partial_\theta \partial_r \psi - g^{\theta\theta} \Gamma_{\theta r}^\tau \partial_\tau \psi$$

$$\nabla^\theta \nabla_r \psi = 0 \quad (\text{A-12})$$

$$\mu = \theta \text{ e } \nu = \theta:$$

$$\nabla^\theta \nabla_\theta \psi = g^{\theta\theta} \partial_\theta \partial_\theta \psi - g^{\theta\theta} \Gamma_{\theta\theta}^\tau \partial_\tau \psi = \frac{1}{r^2} \left[\Gamma_{\theta\theta}^r \psi + \Gamma_{\theta\theta}^r \psi' \right]$$

$$\nabla^\theta \nabla_\theta \psi = -\frac{1}{r} e^{-\lambda} \psi' \quad (\text{A-13})$$

$$\mu = \theta \text{ e } \nu = \phi:$$

$$\nabla^\theta \nabla_\phi \psi = g^{\theta\theta} \partial_\theta \partial_\phi \psi - g^{\theta\theta} \Gamma_{\theta\phi}^\tau \partial_\tau \psi$$

$$\nabla^\theta \nabla_\phi \psi = 0 \quad (\text{A-14})$$

$$\mu = \phi \text{ e } \nu = t:$$

$$\nabla^\phi \nabla_t \psi = g^{\phi\phi} \partial_\phi \partial_t \psi - g^{\phi\phi} \Gamma_{\theta t}^\tau \partial_\tau \psi$$

$$\nabla^\phi \nabla_t \psi = 0 \quad (\text{A-15})$$

$$\mu = \phi \text{ e } \nu = r:$$

$$\nabla^\phi \nabla_r \psi = g^{\phi\phi} \partial_\phi \partial_r \psi - g^{\phi\phi} \Gamma_{\phi r}^\tau \partial_\tau \psi$$

$$\nabla^\phi \nabla_r \psi = 0 \quad (\text{A-16})$$

$\mu = \phi$ e $\nu = \theta$:

$$\nabla^\phi \nabla_\theta \psi = g^{\phi\phi} \partial_\phi \partial_\theta \psi - g^{\phi\phi} \Gamma_{\phi\theta}^\tau \partial_\tau \psi$$

$$\nabla^\phi \nabla_\theta \psi = 0 \quad (\text{A-17})$$

$\mu = \phi$ e $\nu = \phi$:

$$\nabla^\phi \nabla_\phi \psi = g^{\phi\phi} \partial_\phi \partial_\phi \psi - g^{\phi\phi} \Gamma_{\phi\phi}^\tau \partial_\tau \psi = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \Gamma_{\phi\phi}^r \psi'$$

$$\nabla^\phi \nabla_r \psi = \frac{1}{r} e^{-\lambda} \psi' \quad (\text{A-18})$$

A.3 Cálculo das equações de campo

Para $\mu = t$ e $\nu = t$:

$$\begin{aligned} \psi G_t^t &= e^{-\nu} \ddot{\psi} - e^{-\nu} \frac{\dot{\nu}}{2} \dot{\psi} - e^{-\lambda} \frac{\nu'}{2} \psi' - \square \psi - \frac{1}{2} u \\ &= e^{-\nu} \ddot{\psi} - e^{-\nu} \frac{\dot{\nu}}{2} \dot{\psi} - e^{-\lambda} \frac{\nu'}{2} \psi' e^{-\lambda} \left(\psi'' + \frac{\nu'}{2} \psi' - \frac{\lambda'}{2} \psi' + \frac{2}{r} \psi' \right) + \\ &+ e^{-\nu} \left(-\ddot{\psi} + \frac{\dot{\nu}}{2} \dot{\psi} - \frac{\dot{\lambda}}{2} \dot{\psi} \right) \end{aligned}$$

$$G_t^t = \frac{1}{\psi} \left(\psi'' - \frac{\lambda'}{2} \psi' + \frac{2}{r} \psi' \right) - \frac{1}{\psi} e^{-\nu} \frac{\dot{\lambda}}{2} \dot{\psi} - \frac{1}{2\psi} u \quad (\text{A-19})$$

Para $\mu = t$ e $\nu = r$:

$$\psi G_r^t = e^{-\nu} \dot{\psi}' - e^{-\nu} \frac{\nu'}{2} \dot{\psi} - e^{-\lambda} \frac{\dot{\nu}}{2} \psi'$$

$$G_r^t = \frac{1}{\psi} \left(\dot{\psi}' - \frac{v'}{2} \dot{\psi} - \frac{\dot{\lambda}}{2} \psi' \right) \quad (\text{A-20})$$

Para $\mu = t$ e $\nu = \theta$:

$$G_\theta^t = 0 \quad (\text{A-21})$$

Para $\mu = t$ e $\nu = \phi$:

$$G_\phi^t = 0 \quad (\text{A-22})$$

Para $\mu = r$ e $\nu = t$:

$$\psi G_t^r = -e^{-\lambda} \dot{\psi}' + e^{-\lambda} \frac{v'}{2} \dot{\psi} + e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{2} \psi'$$

$$G_t^r = \frac{1}{\psi} e^{-\lambda} \left(-\dot{\psi}' + \frac{v'}{2} \dot{\psi} + \frac{\dot{\lambda}}{2} \psi' \right) \quad (\text{A-23})$$

Para $\mu = r$ e $\nu = r$:

$$\begin{aligned} G_r^r &= \frac{1}{\psi} e^{-\lambda} \left(-\dot{\psi}' + \frac{v'}{2} \dot{\psi} + \frac{\dot{\lambda}}{2} \psi' \right) + e^{-\lambda} \left(\psi'' + \frac{v'}{2} \psi' - \frac{\lambda'}{2} \psi' + \frac{2}{r} \psi' \right) + \\ &+ e^{-\nu} \left(-\ddot{\psi} + \frac{\dot{v}}{2} \dot{\psi} - \frac{\dot{\lambda}}{2} \dot{\psi} \right) - \frac{u}{2} \end{aligned}$$

$$G_r^r = \frac{1}{\psi} e^{-\lambda} \left(\frac{v'}{2} \psi' + \frac{2}{r} \psi' \right) + \frac{e^{-\nu}}{\psi} \left(-\ddot{\psi} + \frac{\dot{v}}{2} \dot{\psi} \right) - \frac{u}{2\psi} \quad (\text{A-24})$$

Para $\mu = r$ e $\nu = \theta$:

$$G_\theta^r = 0 \quad (\text{A-25})$$

Para $\mu = r$ e $\nu = \phi$:

$$G_\phi^r = 0 \quad (\text{A-26})$$

Para $\mu = \theta$ e $\nu = t$:

$$G_t^\theta = 0 \quad (\text{A-27})$$

Para $\mu = \theta$ e $\nu = r$:

$$G_r^\theta = 0 \quad (\text{A-28})$$

Para $\mu = \theta$ e $\nu = \theta$:

$$\psi G_\theta^\theta = -\frac{1}{r} e^{-\lambda} \dot{\psi}' + e^{-\lambda} \left(\psi'' + \frac{v'}{2} \psi' - \frac{\lambda'}{2} \psi' + \frac{2}{r} \psi' \right) + e^{-\nu} \left(-\ddot{\psi} + \frac{\dot{v}}{2} \dot{\psi} - \frac{\dot{\lambda}}{2} \dot{\psi} \right)$$

$$G_{\theta}^{\theta} = \frac{1}{\psi} e^{-\lambda} \left(\psi'' + \frac{v'}{2} \psi' - \frac{\lambda'}{2} \psi' + \frac{1}{r} \psi' \right) + \frac{e^{-v}}{\psi} \left(-\ddot{\psi} + \frac{\dot{v}}{2} \dot{\psi} - \frac{\dot{\lambda}}{2} \dot{\psi} \right) - \frac{u}{2\psi} \quad (\text{A-29})$$

Para $\mu = \theta$ e $\nu = \phi$:

$$G_{\phi}^{\theta} = 0 \quad (\text{A-30})$$

Para $\mu = \phi$ e $\nu = t$:

$$G_t^{\phi} = 0 \quad (\text{A-31})$$

Para $\mu = \phi$ e $\nu = r$:

$$G_r^{\phi} = 0 \quad (\text{A-32})$$

Para $\mu = \phi$ e $\nu = \theta$:

$$G_{\theta}^{\phi} = 0 \quad (\text{A-33})$$

Para $\mu = \phi$ e $\nu = \phi$:

$$\psi G_{\phi}^{\phi} = -\frac{1}{r} e^{-\lambda} \psi' + e^{-\lambda} \left(\psi'' + \frac{v'}{2} \psi' - \frac{\lambda'}{2} \psi' + \frac{2}{r} \psi' \right) + e^{-v} \left(-\ddot{\psi} + \frac{\dot{v}}{2} \dot{\psi} - \frac{\dot{\lambda}}{2} \dot{\psi} \right)$$

$$G_{\phi}^{\phi} = \frac{1}{\psi} e^{-\lambda} \left(\psi'' + \frac{v'}{2} \psi' - \frac{\lambda'}{2} \psi' + \frac{1}{r} \psi' \right) + \frac{e^{-v}}{\psi} \left(-\ddot{\psi} + \frac{\dot{v}}{2} \dot{\psi} - \frac{\dot{\lambda}}{2} \dot{\psi} \right) - \frac{u}{2\psi} \quad (\text{A-34})$$

Podemos observar que, assim como na solução de Schwarzschild, aqui também encontramos que as equações para as partes angulares são idênticas, ou seja,

$$G_{\phi}^{\phi} = G_{\theta}^{\theta}$$

A.4 Encontrando a solução de Schwarzschild modificada

$\nu = t$ e $\mu = t$;

$$G_t^t = \frac{1}{\psi} \left(\psi'' - \frac{\lambda'}{2} \psi' + \frac{2}{r} \psi' \right) - \frac{1}{\psi} e^{-\nu} \frac{\dot{\lambda}}{2} \dot{\psi} - \frac{1}{2\psi} u$$

Mas

$$G_t^t = \frac{1}{r^2} - e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right)$$

Logo

$$0 = \frac{1}{r^2} - e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) = \frac{1}{\Psi} \left(\Psi'' - \frac{\lambda'}{2} \Psi' + \frac{2}{r} \Psi' \right) - \frac{1}{\Psi} e^{-\nu} \frac{\dot{\lambda}}{2} \dot{\Psi} - \frac{1}{2\Psi} u$$

$$e^{-\lambda} \left(\Psi'' - \frac{\lambda'}{2} \Psi' + \frac{2}{r} \Psi' + \frac{1}{r^2} \Psi - \frac{\lambda'}{r} \Psi \right) - e^{-\nu} \frac{\dot{\lambda}}{2} \dot{\Psi} - \frac{u}{2} - \frac{\Psi}{r^2} = 0 \quad (\text{A-35})$$

$$\mathbf{v} = t \mathbf{e}_\mu = r;$$

$$G_r^t = -e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r} = \frac{1}{\Psi} e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{2} \Psi' + \frac{2}{r} \Psi' \right) + \frac{e^{-\nu}}{\Psi} \left(-\dot{\Psi} + \frac{\dot{\nu}}{2} \dot{\Psi} \right) - \frac{u}{2\Psi}$$

$$\Psi \frac{\dot{\lambda}}{r} = -\dot{\Psi} + \frac{\nu'}{2} \dot{\Psi} + \frac{\dot{\lambda}}{2} \Psi'$$

$$\dot{\Psi}' - \frac{\nu'}{2} \dot{\Psi} - \frac{\dot{\lambda}}{2} \Psi' - \Psi \frac{\dot{\lambda}}{r} = 0 \quad (\text{A-36})$$

$$\mathbf{v} = r \mathbf{e}_\mu = r;$$

$$G_r^r = \frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left(-\frac{1}{r^2} - \frac{\nu'}{r} \right) = \frac{1}{\Psi} e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{2} \Psi' + \frac{2}{r} \Psi' \right) + \frac{e^{-\nu}}{\Psi} \left(-\dot{\Psi} + \frac{\dot{\nu}}{2} \dot{\Psi} \right) - \frac{u}{2\Psi}$$

$$0 = e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{2} \Psi' + \frac{2}{r} \Psi' \right) + \frac{e^{-\nu}}{\Psi} \left(-\dot{\Psi} + \frac{\dot{\nu}}{2} \dot{\Psi} \right) - \frac{u}{2\Psi} - \frac{\Psi}{r^2} + e^{-\lambda} \left(-\frac{1}{r^2} - \frac{\nu'}{r} \right)$$

$$e^{-\lambda} \left[\left(\frac{\nu'}{2} + \frac{2}{r} \right) \Psi' + \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) \Psi \right] + e^{-\nu} \left(-\dot{\Psi} + \frac{\dot{\nu}}{2} \dot{\Psi} \right) - \frac{u}{2} - \frac{\Psi}{r^2} = 0 \quad (\text{A-37})$$

$$\mathbf{v} = \theta \mathbf{e}_\mu = \theta;$$

$$G_\theta^\theta = e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{2} - \frac{\nu'}{2} \right) + e^{-\nu} \left(\frac{\nu' \lambda'}{4} - \frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} \right) + e^{-\nu} \left(\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\lambda'^2}{4} - \frac{\dot{\nu} \dot{\lambda}}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{\Psi} e^{-\lambda} \left(\Psi'' + \frac{\nu'}{2} \Psi' - \frac{\lambda'}{2} \Psi' + \frac{1}{r} \Psi' \right) + \frac{e^{-\nu}}{\Psi} \left(-\dot{\Psi} + \frac{\dot{\nu}}{2} \dot{\Psi} - \frac{\dot{\lambda}}{2} \dot{\Psi} \right) - \frac{u}{2\Psi}$$

$$e^{-\lambda} \left[\Psi'' + \frac{v'}{2} \Psi' - \frac{\lambda'}{2} \Psi' + \frac{1}{r} \Psi' + \frac{1}{r} \left(\frac{v'}{2} - \frac{\lambda'}{2} \right) \Psi + \left(-\frac{v'\lambda'}{4} + \frac{v''}{2} + \frac{v'^2}{4} \right) \Psi \right] + e^{-v} \left[-\ddot{\Psi} + \frac{\dot{v}}{2} \dot{\Psi} - \frac{\dot{\lambda}}{2} \dot{\Psi} + \left(-\frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\dot{v}\dot{\lambda}}{4} \right) \Psi \right] - \frac{u}{2} = 0 \quad (\text{A-38})$$

$$v = \phi \text{ e } \mu = \phi;$$

$$\begin{aligned} G_{\phi}^{\phi} &= e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{2} - \frac{v'}{2} \right) + e^{-v} \left(\frac{v'\lambda'}{4} - \frac{v''}{2} - \frac{v'^2}{4} \right) + e^{-v} \left(\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\lambda^2}{4} - \frac{\dot{v}\dot{\lambda}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{\Psi} e^{-\lambda} \left(\Psi'' + \frac{v'}{2} \Psi' - \frac{\lambda'}{2} \Psi' + \frac{1}{r} \Psi' \right) + \frac{e^{-v}}{\Psi} \left(-\ddot{\Psi} + \frac{\dot{v}}{2} \dot{\Psi} - \frac{\dot{\lambda}}{2} \dot{\Psi} \right) - \frac{u}{2\Psi} \end{aligned}$$

$$e^{-\lambda} \left[\Psi'' + \frac{v'}{2} \Psi' - \frac{\lambda'}{2} \Psi' + \frac{1}{r} \Psi' + \frac{1}{r} \left(\frac{v'}{2} - \frac{\lambda'}{2} \right) \Psi + \left(-\frac{v'\lambda'}{4} + \frac{v''}{2} + \frac{v'^2}{4} \right) \Psi \right] + e^{-v} \left[-\ddot{\Psi} + \frac{\dot{v}}{2} \dot{\Psi} - \frac{\dot{\lambda}}{2} \dot{\Psi} + \left(-\frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\dot{v}\dot{\lambda}}{4} \right) \Psi \right] - \frac{u}{2} = 0 \quad (\text{A-39})$$

Novamente podemos perceber que as partes angulares em θ e em ϕ são iguais.

A.5 Calculando $\bar{g}^{ij} \bar{R}_{ij}$

Temos a métrica

$$(\bar{g}_{ij}) = (\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (\text{A-40})$$

$$(\omega^{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sin^2\theta} \end{pmatrix} \quad (\text{A-41})$$

Iremos encontrar o escalar de curvatura utilizando a métrica $\bar{g}^{ij} = \omega^{ij}$. Como sempre, temos que calcular as conexões,

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{ij}^k &= \frac{1}{2} \bar{g}^{kl} (\partial_i \bar{g}_{lj} + \partial_j \bar{g}_{il} - \partial_l \bar{g}_{ij}) \\ \bar{\Gamma}_{ij}^k &= \frac{1}{2} \omega^{kl} (\partial_i \omega_{lj} + \partial_j \omega_{il} - \partial_l \omega_{ij}) \end{aligned}$$

Calculando

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{ij}^k &= \frac{1}{2} \omega^{kk} (\partial_i \omega_{kj} + \partial_j \omega_{ik} - \partial_k \omega_{ij}) \\
&= \frac{1}{2} \omega^{kk} (\delta_{kj} \partial_i \omega_{kj} + \delta_{ik} \partial_j \omega_{ik} - \delta_{ij} \partial_k \omega_{ij}) \\
&= \frac{1}{2} \omega^{kk} (\delta_{kj} \delta_j^3 \partial_i \omega_{33} + \delta_{ik} \delta_i^3 \partial_j \omega_{33} - \delta_{ij} \delta_i^3 \partial_k \omega_{33}) \\
&= \frac{1}{2} \omega^{kk} (\delta_{kj} \delta_j^3 \delta_i^2 \partial_2 \omega_{33} + \delta_{ik} \delta_i^3 \delta_j^2 \partial_2 \omega_{33} - \delta_{ij} \delta_i^3 \delta_k^2 \partial_2 \omega_{33})
\end{aligned}$$

Sem muita conta, tiramos diretamente que

$$\partial_2 \omega_{33} = \partial_\theta (-\sin^2 \theta) = -2 \sin \theta \cos \theta$$

Daí tiramos que,

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k = \sin \theta \cos \theta \omega^{kk} (-\delta_{kj} \delta_j^3 \delta_i^2 - \delta_{ik} \delta_i^3 \delta_j^2 + \delta_{ij} \delta_i^3 \delta_k^2) \quad (\text{A-42})$$

Agora podemos facilmente encontrar os outros fatores,

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{ij}^2 &= \sin \theta \cos \theta (-\delta_{2j} \delta_j^3 \delta_i^2 - \delta_{i2} \delta_i^3 \delta_j^2 + \delta_{ij} \delta_i^3 \delta_2^2) \\
\bar{\Gamma}_{ij}^2 &= \delta_{ij} \delta_i^3 \sin \theta \cos \theta \\
\bar{\Gamma}_{ij}^3 &= \sin \theta \cos \theta \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} \right) (-\delta_{3j} \delta_j^3 \delta_i^2 - \delta_{i3} \delta_i^3 \delta_j^2) \\
\bar{\Gamma}_{ij}^3 &= \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) (\delta_j^3 \delta_i^2 + \delta_i^3 \delta_j^2)
\end{aligned}$$

Agora podemos escrever a coleção de $\bar{\Gamma}$ s,

$$\bar{\Gamma}_{22}^2 = 0 \quad (\text{A-43})$$

$$\bar{\Gamma}_{23}^2 = \bar{\Gamma}_{32}^2 = 0 \quad (\text{A-44})$$

$$\bar{\Gamma}_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta \quad (\text{A-45})$$

$$\bar{\Gamma}_{22}^3 = 0 \quad (\text{A-46})$$

$$\bar{\Gamma}_{23}^3 = \bar{\Gamma}_{32}^3 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (\text{A-47})$$

$$\bar{\Gamma}_{33}^3 = 0 \quad (\text{A-48})$$

encontramos também que

$$\bar{\Gamma}_{2k}^k = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (\text{A-49})$$

$$\bar{\Gamma}_{3k}^k = 0 \quad (\text{A-50})$$

De posse destes resultados, podemos finalmente encontrar \bar{R}_{ij} ,

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ij} &= \partial_k \bar{\Gamma}_{ij}^k - \partial_i \bar{\Gamma}_{jk}^k + \bar{\Gamma}_{ij}^l \bar{\Gamma}_{lk}^k - \bar{\Gamma}_{il}^k \bar{\Gamma}_{kj}^l \\ &= \partial_2 \bar{\Gamma}_{ij}^2 - \delta_i^2 \partial_2 \bar{\Gamma}_{jk}^k + \bar{\Gamma}_{ij}^2 \bar{\Gamma}_{2k}^k - \bar{\Gamma}_{il}^2 \bar{\Gamma}_{2j}^l - \bar{\Gamma}_{il}^3 \bar{\Gamma}_{3j}^l \\ &= \partial_2 \bar{\Gamma}_{ij}^2 - \delta_i^2 \delta_j^2 \partial_2 \bar{\Gamma}_{2k}^k + \bar{\Gamma}_{ij}^2 \bar{\Gamma}_{2k}^k - \underbrace{\bar{\Gamma}_{i2}^2}_{0} \underbrace{\bar{\Gamma}_{2j}^2}_{0} - \bar{\Gamma}_{i3}^2 \bar{\Gamma}_{2j}^3 - \bar{\Gamma}_{i2}^3 \bar{\Gamma}_{3j}^2 - \bar{\Gamma}_{i3}^3 \bar{\Gamma}_{3j}^3 \\ &= -\delta_{ij} \delta_i^3 \partial_\theta (\sin \theta \cos \theta) - \delta_i^2 \delta_j^2 (\cos \theta \sin^{-1} \theta) - \delta_{ij} \delta_i^3 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) - \\ &\quad - \delta_i^3 \bar{\Gamma}_{33}^2 \delta_j^3 \bar{\Gamma}_{23}^3 - \delta_i^3 \bar{\Gamma}_{32}^3 \delta_j^3 \bar{\Gamma}_{33}^2 - \delta_i^2 \bar{\Gamma}_{23}^3 \delta_j^2 \bar{\Gamma}_{32}^3 \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ij} &= -\delta_{ij} \delta_i^3 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - \delta_i^2 \delta_j^2 \left(-1 - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right) - \\ &\quad - \delta_{ij} \delta_i^3 \cos^2 \theta - 2\delta_i^3 \delta_j^3 \bar{\Gamma}_{33}^2 \bar{\Gamma}_{23}^3 - \delta_i^2 \delta_j^2 (\bar{\Gamma}_{23}^3)^2 \\ &= \delta_{ij} \delta_i^3 (-2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \delta_i^2 \delta_j^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} \right) + 2\delta_i^3 \delta_j^3 \cos^2 \theta - \delta_i^2 \delta_j^2 \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= \delta_{ij} \delta_i^3 (-2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + 2\delta_i^3 \delta_j^3 \cos^2 \theta - \delta_i^2 \delta_j^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right) \end{aligned}$$

Chegamos a,

$$\bar{R}_{ij} = \delta_{ij} \delta_i^3 (\sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta) + 2\delta_i^3 \delta_j^3 \cos^2 \theta + \delta_i^2 \delta_j^2 \quad (\text{A-51})$$

Fazemos agora,

$$\begin{aligned} \omega^{ij} \bar{R}_{ij} &= \omega^{33} (\sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta) + 2\omega^{33} \cos^2 \theta \omega^{22} = \omega^{22} + \sin^2 \theta \omega^{33} \\ &= -1 + \sin^2 \theta \left(-\frac{1}{\sin^2 \theta} \right) = -1 - 1 = -2 \end{aligned}$$

Logo, chegamos ao escalar de curvatura, que era nosso objetivo,

$$\omega^{ij} \bar{R}_{ij} = \bar{g}^{ij} \bar{R}_{ij} = -2 \quad (\text{A-52})$$

A.6 Calculando $\bar{g}^{ab}\bar{R}_{ab}$

Para a métrica,

$$(\bar{g}_{ab}) = (\gamma_{ab}) = \begin{pmatrix} e^A & 0 \\ 0 & -e^B \end{pmatrix} \quad (\text{A-53})$$

$$(\gamma^{ab}) = \begin{pmatrix} e^{-A} & 0 \\ 0 & -e^{-B} \end{pmatrix} \quad (\text{A-54})$$

iremos encontrar o segundo escalar de curvatura da métrica fatorizada. Ou seja, queremos encontrar $\bar{g}^{ab}\bar{R}_{ab} = \gamma^{ab}\bar{R}_{ab}$. Temos,

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{ab}^c &= \frac{1}{2}\bar{g}^{cd}(\partial_a\bar{g}_{db} + \partial_b\bar{g}_{ad} - \partial_d\bar{g}_{ab}) \\ &= \frac{1}{2}\gamma^{cd}(\partial_a\gamma_{db} + \partial_b\gamma_{ad} - \partial_d\gamma_{ab}) \\ &= \frac{1}{2}\gamma^{cc}(\partial_a\gamma_{cb} + \partial_b\gamma_{ac} - \partial_c\gamma_{ab}) = \frac{1}{2}\gamma^{cc}(\delta_{cb}\partial_a\gamma_{bb} + \delta_{ac}\partial_b\gamma_{aa} - \delta_{ab}\partial_c\gamma_{aa}) \end{aligned}$$

Fazemos,

$$\gamma_{bb} = \delta_b^0 g_{00} + \delta_b^1 g_{11} = \delta_b^0 e^A - \delta_b^1 e^B$$

Diferenciando em relação à a ,

$$\begin{aligned} \partial_a\gamma_{bb} &= \delta_a^0\partial_0 g_{bb} + \delta_a^1\partial_1 g_{bb} \\ &= \delta_a^0[\delta_b^0\partial_0 e^A - \delta_b^1\partial_0 e^B] + \delta_a^1[\delta_b^0\partial_1 e^A - \delta_b^1\partial_1 e^B] \end{aligned}$$

Adotando a seguinte notação,

$$\partial_0 A = \dot{A}$$

$$\partial_1 A = A'$$

$$\partial_0 B = \dot{B}$$

$$\partial_1 B = B'$$

Assim, a diferenciação acima toma a seguinte forma,

$$\begin{aligned}
\partial_a \gamma_{bb} &= \delta_a^0 [\delta_b^0 \dot{A} e^A - \delta_b^1 \dot{B} e^B] + \delta_a^1 [\delta_b^0 A' e^A - \delta_b^1 B' e^B] \\
&= e^A [\delta_a^0 \delta_b^0 \dot{A} + \delta_a^1 \delta_b^0 A'] - e^B [\delta_a^0 \delta_b^1 \dot{B} + \delta_a^1 \delta_b^1 B']
\end{aligned}$$

Usaremos o resultado que nos diz,

$$\begin{aligned}
\partial_0 \gamma_{00} &= e^A \dot{A} \\
\partial_0 \gamma_{11} &= -e^B \dot{B} \\
\partial_1 \gamma_{00} &= e^A A' \\
\partial_1 \gamma_{11} &= -e^B B'
\end{aligned}$$

Agora iremos calcular os $\bar{\Gamma}_{ab}^c$:

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{ab}^0 &= \frac{1}{2} e^{-A} (\delta_{0b} \partial_a \gamma_{bb} + \delta_{a0} \partial_b \gamma_{aa} - \delta_{ab} \partial_0 \gamma_{aa}) \\
\bar{\Gamma}_{ab}^1 &= -\frac{1}{2} e^{-B} (\delta_{1b} \partial_a \gamma_{bb} + \delta_{a1} \partial_b \gamma_{aa} - \delta_{ab} \partial_1 \gamma_{aa})
\end{aligned}$$

Podemos encontrar a coleção de $\bar{\Gamma}$'s,

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{a0}^0 &= \frac{1}{2} e^{-A} \partial_a \gamma_{00} = \frac{1}{2} (\delta_a^0 \dot{A} + \delta_a^1 A') \\
\bar{\Gamma}_{00}^0 &= \frac{\dot{A}}{2} \\
\bar{\Gamma}_{10}^0 &= \frac{A'}{2} \\
\bar{\Gamma}_{11}^0 &= -\frac{1}{2} e^{-A} \partial_0 \gamma_{11} = \frac{1}{2} \dot{B} e^{(A-B)} \\
\bar{\Gamma}_{a1}^1 &= -\frac{1}{2} e^{-B} \partial_a \gamma_{11} = \frac{1}{2} (\delta_a^0 \dot{B} + \delta_a^1 B') \\
\bar{\Gamma}_{01}^1 &= \frac{\dot{B}}{2} \\
\bar{\Gamma}_{11}^1 &= \frac{B'}{2} \\
\bar{\Gamma}_{00}^1 &= \frac{1}{2} e^{-B} \partial_1 \gamma_{00} = \frac{1}{2} A' e^{(A-B)} \\
\bar{\Gamma}_{ac}^c &= \frac{1}{2} [\delta_a^0 (\dot{A} + \dot{B}) + \delta_a^1 (A' + B')]
\end{aligned}$$

Com essa coleção acima, podemos finalmente encontrar o tensor de Ricci para a métrica γ_{ab} :

$$\bar{R}_{ab} = \partial_c \bar{\Gamma}_{ab}^c - \partial_a \bar{\Gamma}_{bc}^c + \bar{\Gamma}_{ab}^c \bar{\Gamma}_{cd}^d - \bar{\Gamma}_{ac}^d \bar{\Gamma}_{db}^c$$

$$\begin{aligned} \bar{R}_{00} &= \partial_c \bar{\Gamma}_{00}^c - \partial_0 \bar{\Gamma}_{0c}^c + \bar{\Gamma}_{00}^c \bar{\Gamma}_{cd}^d - \bar{\Gamma}_{0c}^d \bar{\Gamma}_{d0}^c \\ &= \partial_0 \bar{\Gamma}_{00}^0 - \partial_1 \bar{\Gamma}_{00}^1 - \partial_0 \left[\frac{1}{2} (\dot{A} + \dot{B}) \right] + \bar{\Gamma}_{00}^0 \bar{\Gamma}_{0d}^d + \bar{\Gamma}_{00}^1 \bar{\Gamma}_{1d}^d - \bar{\Gamma}_{0c}^0 \bar{\Gamma}_{00}^c + \bar{\Gamma}_{0c}^1 \bar{\Gamma}_{10}^c \\ &= \frac{\ddot{A}}{2} + \frac{1}{2} \left[A'' e^{(A-B)} + A' (A' - B') e^{(A-B)} \right] - \frac{\ddot{A}}{2} - \frac{\ddot{B}}{2} + \frac{\dot{A}}{2} \left(\frac{\dot{A}}{2} + \frac{\dot{B}}{2} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} A' e^{(A-B)} \frac{1}{2} (A' + B') - \bar{\Gamma}_{00}^0 \bar{\Gamma}_{00}^0 - \bar{\Gamma}_{01}^0 \bar{\Gamma}_{00}^1 - \bar{\Gamma}_{00}^1 \bar{\Gamma}_{10}^0 - \bar{\Gamma}_{01}^1 \bar{\Gamma}_{10}^1 \\ &= \frac{\ddot{A}}{2} + \frac{1}{2} A'' e^{(A-B)} + \frac{1}{2} A' (A' - B') e^{(A-B)} - \frac{\ddot{A}}{2} - \frac{\ddot{B}}{2} + \frac{1}{4} \dot{A} (\dot{A} + \dot{B}) + \\ &+ \frac{1}{4} A' e^{(A-B)} (A' + B') - \frac{\dot{B}^2}{4} - \frac{\dot{A}^2}{4} - \left(\frac{A'}{2} \frac{1}{2} A' e^{(A-B)} \right) (2) \end{aligned}$$

fazendo as contas, com as devidas simplificações, iremos encontrar,

$$\bar{R}_{00} = -\frac{\ddot{B}}{2} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{4} - \frac{\dot{B}^2}{4} + e^{(A-B)} \left[\frac{A''}{2} + \frac{A'^2}{4} - \frac{A'B'}{4} \right] \quad (\text{A-55})$$

Encontraremos agora \bar{R}_{11} .

$$\begin{aligned} \bar{R}_{11} &= \partial_c \bar{\Gamma}_{11}^c - \partial_1 \bar{\Gamma}_{1c}^c + \bar{\Gamma}_{11}^c \bar{\Gamma}_{cd}^d - \bar{\Gamma}_{1c}^d \bar{\Gamma}_{d1}^c \\ &= \partial_0 \bar{\Gamma}_{11}^0 - \partial_1 \bar{\Gamma}_{11}^1 - \partial_1 \left[\frac{1}{2} (A' + B') \right] + \bar{\Gamma}_{11}^0 \bar{\Gamma}_{0d}^d + \bar{\Gamma}_{11}^1 \bar{\Gamma}_{1d}^d - \bar{\Gamma}_{10}^d \bar{\Gamma}_{d1}^0 - \bar{\Gamma}_{11}^d \bar{\Gamma}_{d1}^1 \\ &= \frac{1}{2} \ddot{B} e^{(B-A)} + \frac{1}{2} \dot{B} (\dot{B} - \dot{A}) e^{(B-A)} + \underbrace{\frac{B''}{2}} - \frac{A''}{2} - \underbrace{\frac{B''}{2}} + \frac{1}{2} \dot{B} e^{(B-A)} \left(\frac{\dot{A}}{2} + \frac{\dot{B}}{2} \right) + \\ &+ \frac{B'}{2} \left(\frac{A'}{2} + \frac{B'}{2} \right) - \bar{\Gamma}_{10}^0 \bar{\Gamma}_{01}^0 - \bar{\Gamma}_{10}^1 \bar{\Gamma}_{11}^0 - \bar{\Gamma}_{11}^0 \bar{\Gamma}_{01}^1 - \bar{\Gamma}_{11}^1 \bar{\Gamma}_{11}^1 \\ &= \frac{1}{2} \ddot{B} e^{(B-A)} + \frac{1}{2} \dot{B} (\dot{B} - \dot{A}) e^{(B-A)} - \frac{A''}{2} + \frac{1}{2} \dot{B} e^{(B-A)} \left(\frac{\dot{A}}{2} + \frac{\dot{B}}{2} \right) - \\ &- \frac{A'^2}{4} - \frac{B'^2}{4} - \left[\frac{\dot{B}\dot{B}}{2} e^{(B-A)} \right] (2) \\ &= e^{(B-A)} \left[\underbrace{\frac{\ddot{B}}{2}} + \underbrace{\frac{\dot{B}^2}{2}} - \frac{\dot{B}\dot{A}}{2} + \frac{\dot{B}\dot{A}}{4} + \frac{\dot{B}^2}{4} - \underbrace{\frac{\dot{B}^2}{2}} \right] - \frac{A''}{2} + \frac{A'B'}{4} + \frac{\overbrace{B'^2}}{2} - \frac{A'^2}{4} - \frac{\overbrace{B'^2}}{2} \end{aligned}$$

Temos então, finalmente que,

$$\bar{R}_{11} = -\frac{A''}{2} - \frac{A^2}{4} + \frac{A'B'}{4} + e^{(B-A)} \left[\frac{\ddot{B}}{2} - \frac{\dot{B}\dot{A}}{4} + \frac{\dot{B}^2}{4} \right] \quad (\text{A-56})$$

De posse dos resultados A-55 e A-56, podemos escrever o tensor de curvatura,

$$\begin{aligned} \gamma^{ab} \bar{R}_{ab} &= \gamma^{00} \bar{R}_{00} + \gamma^{11} \bar{R}_{11} = e^A \bar{R}_{00} - e^B \bar{R}_{11} \\ &= e^{-A} \left[-\frac{\ddot{B}}{2} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{4} - \frac{\dot{B}^2}{4} \right] + e^{-B} \left[\frac{A''}{2} + \frac{A^2}{4} - \frac{A'B'}{4} \right] + \\ &+ e^{-A} \left[-\frac{\ddot{B}}{2} + \frac{\dot{B}\dot{A}}{4} - \frac{\dot{B}^2}{4} \right] = e^{-A} \left[-\ddot{B} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{2} - \frac{\dot{B}^2}{2} \right] + e^{-B} \left[A'' + \frac{A^2}{2} - \frac{A'B'}{2} \right] \end{aligned}$$

Então, finalmente teremos,

$$\bar{g}^{ab} \bar{R}_{ab} = \gamma^{ab} \bar{R}_{ab} = e^{-A} \left[-\ddot{B} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{2} - \frac{\dot{B}^2}{2} \right] + e^{-B} \left[A'' + \frac{A^2}{2} - \frac{A'B'}{2} \right] \quad (\text{A-57})$$

A.7 Fazendo a variação de $F(v, \lambda, \dot{v}, \dot{\lambda}, \ddot{\lambda}, v', \lambda', v'')$

Primeiro fazemos,

$$\begin{aligned} \delta S &= S(v + \delta v, \lambda + \delta \lambda, \dots) - S(v\lambda, \dots) = 4\pi \int d^2x F(v + \delta v, \lambda + \delta \lambda, \dots) - \\ &- 4\pi \int d^2x F(v\lambda, \dots) \\ &= 4\pi \int d^2x \left[F(v + \delta v, \lambda + \delta \lambda, \dots) - F(v\lambda, \dots) \right] \\ &= 4\pi \int d^2x \left[\underbrace{F(v\lambda, \dots)} + \frac{\partial F}{\partial v} \delta v + \frac{\partial F}{\partial \dot{v}} \delta \dot{v} + \frac{\partial F}{\partial v'} \delta v' + \frac{\partial F}{\partial v''} \delta v'' + \frac{\partial F}{\partial \lambda} \delta \lambda + \frac{\partial F}{\partial \dot{\lambda}} \delta \dot{\lambda} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial F}{\partial \lambda'} \delta \lambda' + \frac{\partial F}{\partial \ddot{\lambda}} \delta \ddot{\lambda} - \underbrace{F(v\lambda, \dots)} \right] \quad (\text{A-58}) \end{aligned}$$

resolvendo cada ítem da equação acima separadamente,

$$\begin{aligned} \int d^2x \frac{\partial F}{\partial \dot{v}} \delta \dot{v} &= \int \left(\int \frac{\partial F}{\partial \dot{v}} \delta \dot{v} dt \right) dr \\ &= \int \left(\underbrace{\frac{\partial F}{\partial \dot{v}} \delta v}_{=0} - \int \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial \dot{v}} \delta v dt \right) dr = - \int d^2x \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial \dot{v}} \delta v \end{aligned}$$

Logo,

$$\int d^2x \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{v}}} \delta \dot{\mathbf{v}} = - \int d^2x \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{v}}} \delta \mathbf{v} \quad (\text{A-59})$$

Pegando outro termo,

$$\begin{aligned} \int d^2x \frac{\partial F}{\partial \ddot{\mathbf{v}}} \delta \ddot{\mathbf{v}} &= \int \left(\int \frac{\partial F}{\partial \ddot{\mathbf{v}}} \delta \ddot{\mathbf{v}} dt \right) d^2x \\ &= \int \left(\underbrace{\frac{\partial F}{\partial \ddot{\mathbf{v}}} \delta \dot{\mathbf{v}}}_{=0} - \int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{v}}} \right) \delta \dot{\mathbf{v}} dt \right) d^2x = - \int \left(\int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{v}}} \right) \delta \dot{\mathbf{v}} dt \right) d^2x \\ &= - \int \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{v}}} \right) \underbrace{\delta \mathbf{v}}_{=0} - \int \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{v}}} \delta \mathbf{v} dt \right) d^2x = \int d^2x \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{v}}} \right) \delta \mathbf{v} \end{aligned}$$

Logo

$$\int d^2x \frac{\delta F}{\delta \ddot{\mathbf{v}}} \delta \ddot{\mathbf{v}} = \int d^2x \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{v}}} \right) \delta \mathbf{v} \quad (\text{A-60})$$

retornando com esses resultados em A-58 teremos,

$$\begin{aligned} \delta S &= 4\pi \int d^2x \left\{ \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{v}}} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}'} \right) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}''} \right) \right] \delta \mathbf{v} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\partial F}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\lambda}} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda'} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{\lambda}} \right) \right] \delta \lambda \right\} = 0 \end{aligned}$$

Com isso, chegamos finalmente as equações,

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{v}}} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}'} \right) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}''} \right) = 0 \quad (\text{A-61})$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\lambda}} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda'} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{\lambda}} \right) = 0 \quad (\text{A-62})$$