ESTUDANDO CONTEÚDOS MATEMÁTICOS COM DIRECIONAMENTOS DE MODELAGEM MATEMÁTICA: O CASO DA FUNÇÃO AFIM

Lorena Luquini de Barros Abreu

Juiz de Fora (MG)

Abril, 2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Pós-Graduação em Educação Matemática
Mestrado Profissional em Educação Matemática

Lorena Luquini de Barros Abreu

ESTUDANDO CONTEÚDOS MATEMÁTICOS COM DIRECIONAMENTOS DE MODELAGEM MATEMÁTICA: O CASO DA FUNÇÃO AFIM

Orientador: Prof. Dr. Orestes Piermatei Filho

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Juiz de Fora (MG)
Abril, 2011

Lorena Luquini de Barros Abreu

ESTUDANDO CONTEÚDOS MATEMÁTICOS COM DIRECIONAMENTOS DE MODELAGEM MATEMÁTICA: O CASO DA FUNÇÃO AFIM

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Orestes Piermatei Filho
Orientador

Prof. Dr. Dale William Bean
Convidado externo UFJF

Prof. Dr. Carlos Alberto Santana Soares
Convidado interno UFJF

Dedico este trabalho ao meu marido, Paulo Henrique Abreu, meu companheiro para todas as horas.

AGRADECIMENTOS

Foram muitas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a concretização deste trabalho. Agradeço a todas elas, e a Deus, que me ilumina e guia, o responsável pela minha vida. Em especial, sou grata ao amigo e professor Orestes Piermatei Filho que, com sua dedicada orientação, exerceu um papel fundamental no caminhar desta pesquisa, pela amizade, carinho, atenção, por torcer sempre pela minha vitória, por me ajudar a trilhar o caminho acadêmico, confiando e depositando em mim uma imensa responsabilidade, cujos frutos se encontram aqui nesta dissertação; ao professor Dr. Dale William Bean, por todas as sugestões, textos compartilhados e orientações, primordiais no desenvolvimento do trabalho, por aceitar participar da banca examinadora, por depositar credibilidade no meu potencial e trabalho, por auxiliar a comunidade de Modelagem Matemática; ao professor Dr. Carlos Alberto Santana Soares (Carlão) que, por estar mais próximo de meu orientador, se fez presença importante nesta pesquisa; aos suplentes da mesa, professor Amarildo e professora Regina Franchi, por aceitarem o convite e estarem dispostos a ajudar; à minha família, meu pai José Marcio, minha mãe Rosa, minha irmã Geórgia, meus avós Totônio e Veninha e os demais, por me apoiarem e torcerem sempre por minhas conquistas; ao meu marido Paulo, pelo apoio incondicional, pela força, pelo incentivo, pela paciência e por toda a demonstração de carinho e confiança nesta etapa de minha vida; aos professores das disciplinas que cursei no Mestrado (UFJF), Amarildo Melchiades da Silva, Orestes Piermatei Filho, Regina Coeli Moraes Kopke e Ana Cristina Barbosa, por favorecerem discussões que me fizeram crescer como pesquisadora; a todos os integrantes da turma 2009: Ricardo, Mageri, Marcílio, Maria Helena, Élida, Carlos Renato, Wagner, Bessa, Lukinha, Alessandro e José Mário, amigos que tive a oportunidade de conhecer nesta nova etapa da vida, pela troca de experiências, mostrando-se pessoas tão especiais; à direção da Escola Estadual Sebastião Patrus de Sousa, seus professores e alunos, pelo apoio e por acreditarem na minha caminhada; aos meus quatro alunos que embarcaram comigo na Pesquisa de Campo, auxiliando-me nas interpretações acerca da Modelagem Matemática; à direção, professores e alunos do Colégio Estadual Professor Kopke, por entenderem que o meu crescimento enquanto pesquisadora vai diretamente auxiliar no aprendizado de meus alunos; à Vanessa Lobo pelas correções efetuadas no texto; à Terezinha

Maneghite pelas correções de Português; enfim, a todos os integrantes do programa do Mestrado Profissional de Educação Matemática da UFJF, que não mediram esforços para que o curso fosse tão brilhante e me oportunizasse um crescimento fundamental na área da Educação Matemática e na Modelagem Matemática de forma especial.

Muito obrigada a todos!

“A matemática é o alfabeto com o qual
DEUS escreveu o universo”.
Pitágoras

RESUMO

A presente pesquisa constitui-se em trabalhar com as funções matemáticas mediante as contribuições concedidas pela prática da Modelagem Matemática, por meio de uma concepção que permite ao educador desenvolver uma busca pela interação proveniente da matemática contextualizada na realidade dos estudantes. Sendo assim, ao contrário dos métodos de ensino mais tradicionais, o estudo aponta para a possibilidade de compreensão acerca do conteúdo de funções afins, tomando como base as implicações obtidas em um grupo de quatro alunos do 1º ano do Ensino Médio e, metodologicamente, utilizando-se da Modelagem Matemática para tal fim. A pesquisa divide-se em cinco capítulos que buscam nortear o educador para a importância inicial do conteúdo de funções na educação brasileira, os ensinamentos práticos direcionados aos alunos em uma pesquisa de campo, que buscou aproximar a disciplina à realidade em que esses estudantes se inserem, por meio de uma situação-problema envolvendo os alunos em uma pizzaria próxima à escola. Dessa forma, realidade e matemática tornam-se indissolúveis ferramentas para os alunos compreenderem situações cotidianas que integram a disciplina às mais variadas experiências, garantindo-se ao corpo docente e discente amplas possibilidades de desenvolverem, juntos, o entendimento de tal disciplina, numa interação necessária a qualquer aprendizado de qualidade.

Palavras-Chaves: Educação Matemática. Modelagem Matemática. Funções. Interação. Ensino e Aprendizagem da Matemática.

ABSTRACT

This research consists on working with mathematical functions through contributions made by the Mathematical Modeling practice, using a model which allows the educator to develop a search for interaction using mathematics contextualized in the students' reality. Thus, opposite to the more traditional teaching methods, this study indicates the possibility of understanding content related to affine functions, based on the results obtained in a group composed by four students from first year of high school in Brazil and, methodologically, using the mathematical modeling for this purpose. This research is divided in five chapters that seek to guide the educator to the initial importance of the functions content in the Brazilian education, the practical lessons targeted to students in a field research, which sought to bring the subject closer to the students' reality through a problem-situation involving students in a pizzeria near the school. Hence, reality and mathematics become inextricable tools for students to understand common situations, that incorporate the subject to a variety of experiences, ensuring teachers and students wide possibilities to develop together an understanding of this subject, with the necessary interaction to accomplish quality learning.

Key Words: Mathematics Education. Mathematical Modeling. Functions. Interaction. Teaching and Learning of Mathematics.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 A trajetória profissional

Compreender a relevância da presente pesquisa é, primeiramente, delinear a íntima relação que a profissão de educadora e sua importância adquiriram em minha vida. Ser educadora é uma realização pessoal e profissional. Há cerca de 14 anos, sou professora de matemática e já vivi as mais variadas experiências, atuando em turmas de Ensino Fundamental (do 6º ao 9º ano) e de Ensino Médio (1ª, 2ª e 3ª séries). A preocupação com minha prática docente é constante, assim como vivencio uma busca do despertar nos alunos o prazer em estudar e aprender matemática.

Sempre trabalhei em escolas da rede pública estadual e municipal de ensino, com estudantes dos mais variados níveis sociais e financeiros, que, não raras vezes, frequentam a escola com o intuito de se divertir, ou mesmo para suprir a ausência de apoio familiar, diante da realidade em que seus pais se inserem, trabalhando o dia todo fora, não podendo contribuir de forma mais eficaz para o desenvolvimento de seus filhos.

Há nove anos, tive meu primeiro contato com a Educação Matemática, cursando uma especialização na mesma instituição em que concluí minha graduação[1]. O curso me proporcionou repensar a matemática e a maneira como ela estava sendo ministrada em minhas salas de aula. Uma das disciplinas era a Modelagem Matemática, e, em grupo, tive a oportunidade de desenvolver um trabalho de Modelagem, utilizando triângulos, *"A Geometria dos telhados"*, o qual me proporcionou um primeiro contato com a Modelagem Matemática e foi responsável por despertar em mim sentimentos de fascinação pela matéria.

Transferindo-me para a cidade de Juiz de Fora, continuei a ministrar aulas de matemática em escolas da rede pública, que, em sua grande maioria, não oferecem recursos para os professores desenvolverem atividades diferenciadas; com remuneração precária, os professores se veem obrigados a buscar várias escolas como forma de contornarem as dificuldades financeiras. Sendo assim, acabam por ministrar suas aulas de forma tradicional, ficando a leitura e a busca de alternativas

[1] Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, Santa Marcelina na cidade de Muriaé- MG.

diferenciadas, muitas vezes, em segundo plano. Fiquei nessa situação por algum tempo, até tomar conhecimento que, na Universidade Federal de Juiz de Fora, começaria o Mestrado Profissional em Educação Matemática, a formação que sempre almejei cursar. Optei pela redução da minha carga horária de trabalho em busca do aperfeiçoamento que se faz imprescindível na minha profissão, algo que diretamente se destina a auxiliar minha prática docente, para que, apesar de todos os desafios, possa desenvolver trabalhos visando ao crescimento e ao prazer de meus alunos no estudo da matemática.

1.2 Delineando a Pesquisa

A presente pesquisa está diretamente ligada à necessidade de metodologias inovadoras que possibilitem a interação dos alunos diante da disciplina Matemática. Sendo assim, o objetivo geral consiste em apresentar atividades envolvendo funções afins, de modo que os estudantes atribuam significados no seu uso em situações contextualizadas. Tais atividades, voltadas ao cotidiano dos alunos, têm a finalidade de investigar temas de suas realidades com autonomia e criatividade.

A investigação, por sua vez, é primordial para que situações sejam levantadas e resolvidas, desenvolvendo nos alunos o senso crítico, a percepção acerca de questões que vão além da sala de aula. A questão direcionadora resume-se em: como a Modelagem Matemática pode contribuir para a contextualização de matemática no cotidiano dos alunos, para que eles possam atribuir significados ao conceito da função afim?

Para isso, a Modelagem Matemática é utilizada como principal metodologia empregada na busca pela conexão entre professores e alunos. A prática contribui para a formação de profissionais da área envolvidos com a possibilidade de compreensão por parte dos alunos, quando esses se envolvem com situações pertinentes no seu dia a dia.

Utilizando-se da busca pelo conceito de funções afins, o trabalho aponta os vários mecanismos para se alcançar a prática da Modelagem, direcionando para os principais passos de sua realização.

Dessa forma, na busca de alcançar esse objetivo, a pesquisa será desenvolvida em cinco capítulos, item 2 ao item 6 do Sumário. No capítulo

Importância de funções para a matemática, demonstra-se o seu surgimento na educação brasileira, ressalta-se o Ensino Tradicional Vigente (ETV) utilizado por muitos educadores, mas falho em certos pontos por não possibilitar ao aluno a participação tão necessária à sua aprendizagem, aborda-se a superficialidade dos livros didáticos ao tratarem de funções, impossibilitando, muitas vezes, o entendimento dos alunos, visto que as explicações são sucintas e pouco condizentes com a realidade que os cerca. Mencionam–se com muita propriedade os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) que norteiam o trabalho dos professores e retratam a importância de se trabalharem funções fazendo-se associações ao cotidiano dos alunos. Dessa forma, apontam para a preservação pela busca do saber, direito dos alunos, que devem ser estimulados a encontrar situações que remetam a suas experiências.

Em um segundo momento, procede-se à leitura de algumas concepções de Modelo e Modelagem Matemática, enfatizando-se os pensamentos de alguns autores que trabalham com essa tendência, entre os quais encontram-se, com suas colocações pertinentes, Bassanezi (2002) e Bean (2001, 2007, 2009), que apontam para o caráter exploratório dos alunos. O primeiro, com sua percepção acerca do modelo, explica-o como uma linguagem clara e sem ambiguidades; o segundo, classifica modelos como criações humanas e, por isso mesmo, totalmente passíveis de situações cotidianas. Ambos ratificam a propriedade interativa presente na concepção de Modelo e Modelagem Matemática, transmitindo, assim, a contextualização de situações que remetam os alunos ao questionamento, à aprendizagem e à utilização dos ensinamentos em seus dia a dia.

O capítulo Revisão de Literatura remete a teorias e trabalhos que guiam a aplicação e defendem a Modelagem Matemática. Assim, é possível tecerem-se algumas reflexões da Modelagem Matemática em relação à educação matemática crítica, como ao currículo e à construção de modelos. Destacam-se também as etapas sugeridas por Burak para o encaminhamento de atividades envolvendo a Modelagem, etapas essas que embasarão a Pesquisa de Campo.

Em O comércio de pizzas: trabalhando a função afim com direcionamentos de Modelagem Matemática, é apresentado o planejamento das atividades a serem desenvolvidas com quatro alunos voluntários de uma escola estadual. O tema sugerido pela pesquisadora é *“O Comércio de Pizzas”*, e a visita dos alunos a uma pizzaria localizada no entorno da escola, buscando situações matemáticas para serem analisadas e exploradas na Pesquisa de Campo. Levantam-se algumas questões que podem ser observadas pelos alunos, buscando-se associá-las ao programa de matemática oferecido pelos livros didáticos.

O capítulo Descrição do Trabalho de Campo: a matemática compreendida por meio do Tema “O Comércio de Pizzas” descreve a Pesquisa de Campo, com trechos da transcrição dos encontros desta pesquisadora com os alunos participantes, demonstrando as implicações que levaram ao surgimento de variadas questões dentro da matemática, o que a surpreende e a seus alunos pela variedade de possibilidades matemáticas encontradas na pizzaria. Segue-se a realização das tarefas pelos próprios alunos, que resulta na construção de modelos que acabam por responder às suas inquietações e anseios.

A experiência de campo foi de suma importância para a compreensão da necessidade de interação, requisito básico para o desenvolvimento de práticas que, como a Modelagem Matemática, garantem ao professor aplicar as mais variadas questões, ao invés de contentar-se com repetições, abrindo espaço para a inovação tão almejada nessa área.

2 IMPORTÂNCIA DE FUNÇÕES PARA A MATEMÁTICA

As funções são fundamentais em todas as áreas da matemática, e o enfoque atual no ensino de seu conceito foi concebido, através do desenvolvimento da *Teoria de Conjuntos,* por Cantor e Frege, no final do século XIX. “Porém, segundo registros de papiros egípcios, as funções estão intimamente ligadas às origens da Matemática e têm aparecido direta ou indiretamente nos grandes passos do desenvolvimento da Ciência.” (GÓMEZ; VILELA, 2007, p. 78).

As funções fazem parte da natureza e muitas situações do cotidiano são modeladas através de funções, mas nem sempre o aluno é levado a fazer essas comparações.

> A nossa natureza é mesmo descrita e modelada matematicamente segundo Sistemas Dinâmicos envolvendo uma ou mais funções que descrevem trajetórias quando se trata de movimento, ou evolução quando se trata de interação entre processos. Isto é, as funções também têm vida e são os tijolos fundamentais com os quais os matemáticos vêm construindo e modelando o nosso mundo físico. (GÓMEZ; VILELA, 2007, p. 78).

Assim, é possível observar e perceber no mundo diversas situações que incidem nas muitas relações de associação e correspondência compreendidas através das funções matemáticas.

> Se você viajar de ônibus da cidade de Campos para o Rio de Janeiro, comprará um bilhete na rodoviária para embarcar num determinado ônibus. Eis a primeira associação: a você, como viajante, foi designado um ônibus, dentre todos aqueles que compõem a frota da companhia escolhida para realizar a viagem. O bilhete que você comprará possui um determinado código, indicando exatamente qual o lugar que você deverá ocupar dentro do ônibus. Eis outra associação: a você, como passageiro, foi designada uma dentre as várias poltronas do ônibus. Qualquer outro passageiro terá de ocupar outra poltrona, que também lhe será designada no momento de comprar o bilhete. (GÓMEZ; VILELA, 2007, p. 79).

Nesse exemplo, há duas funções: uma com o domínio formado pelos passageiros que viajam de Campos para o Rio, e o contradomínio é formado pelos ônibus da companhia que fazem o trajeto, a função associa cada passageiro a determinado ônibus nesse caso; a outra função na situação-problema possui como domínio o conjunto de passageiros que irão embarcar e, como contradomínio, o conjunto de poltronas do ônibus. A imagem, por sua vez, são as poltronas ocupadas por passageiros. Esse exemplo configura uma situação rotineira na qual aparecem os conceitos de função pouco explorada por educadores nas salas de aula. Outra relação possível é explorar o fato de existirem poltronas nas quais possa se sentar mais de um passageiro. Os passageiros serão associados de dois a dois, recebendo as passagens com os respectivos números.

Outra situação que associa função pode ser observada também na área de Biologia:

> Você é um ser único! De fato, a natureza, para distingui-lo dentre todos os outros seres humanos, associou-lhe um código genético, descrito pela cadeia de DNA (ácido desoxirribonucléico) do seu organismo. Assim, a natureza faz uma associação que a cada um dos seres humanos faz corresponder um único código genético. Observe que existem códigos genéticos que ainda não estão associados a ser humano algum. Contudo, as últimas descobertas da Engenharia Genética indicam que, num futuro não muito distante, poderemos ter dois seres humanos compartilhando o mesmo código genético. (GÓMEZ, VILELA, 2007, p. 80).

Nesse exemplo, percebe-se que existe uma função onde o conjunto dos seres vivos forma o domínio da função. O contradomínio é formado pelos possíveis códigos (DNA). A função, nesse caso, caracteriza-se pela correspondência de cada ser vivo ao seu código de DNA.

Dessa forma, a função é possível de ser trabalhada por meio de associações de fatos cotidianos na vida real, para que os alunos percebam suas reais aplicações e o significado que atribuem a suas vidas. Para melhor elucidar a questão, é necessário compreender o surgimento do conteúdo função nas salas de aula de matemática na educação brasileira.

2.1 Função na Educação Brasileira

Atualmente, no Brasil, a função está inserida como conteúdo na disciplina de matemática. Essa inserção deve-se, em grande parte, aos acontecimentos oriundos do ano de 1929:

> O processo de inserção do tema função entre os conteúdos da nossa matemática do secundário está diretamente vinculado à criação, concretizada no ano letivo de 1929, de uma nova disciplina escolar do ensino brasileiro denominada matemática, resultante da unificação de três outras, até então independentes: a aritmética, a álgebra e a geometria. (BRAGA, 2006, p. 25).

O ano de 1929 ficou marcado no colégio Pedro II, no Rio de Janeiro, como o momento em que foi permitida a implantação da disciplina matemática, que resultou da unificação de aritmética, álgebra e geometria. Esse colégio era considerado padrão e isso significou um grande feito na época.

Para a nova disciplina, a matemática, o Colégio Pedro II aprovou um programa do 1º ano, seguindo instruções para sua execução, "reservaram para a *noção de função* um papel nunca antes assumido no ensino das matemáticas" (BRAGA, 2006, p. 65, grifo do autor). E ainda:

> Atendendo a essas instruções, em meados do 2° semestre de 1929, é publicado o volume I do *Curso de Matemática Elementar* de Euclides Roxo, um livro didático considerado revolucionário para o padrão da época. Antes dessa edição, podem ser observadas, em poucos manuais como, por exemplo, os de Álgebra das coleções FIC e FTD, incursões pelo tema *função,* mas que não ensejavam o amplo caráter metodológico preconizado pelas instruções pedagógicas acima referidas. (BRAGA, 2006, p. 65, grifo do autor).

O autor Euclides de Medeiros Guimarães Roxo, catedrático e diretor do externato do Colégio Pedro II, foi, "também o principal mentor e articulador do processo que intentava implantar em nosso país as concepções do movimento internacional de modernização da matemática do secundário do início do século XX" (BRAGA, 2006, p. 65).

> Em 15 de janeiro de 1929 é assinado o Decreto 18.564 que oficializa o aceite da proposta renovadora e, em 15 de março do mesmo ano, a Congregação aprova o programa de matemática do 1° ano, que tem aplicação imediata. A cronologia das mudanças a serem implementadas, enviada por Roxo ao Diretor Geral do Departamento Nacional de Educação, informava que a nova orientação, válida somente para o 1° ano em 1929, seria estendida, em 1930, ao 2° ano e, assim sucessivamente, a todos os anos do curso. (BRAGA, 2006, p. 69-70).

Em meados do 2° semestre de 1929, foi publicado o primeiro volume da coleção da autoria de Euclides Roxo, **Curso de Matemática Elementar**, elaborado de acordo com as mudanças ocorridas. Em 1930, o mesmo autor edita o segundo volume destinado a alunos do 2° ano.

Ainda, segundo Braga, a transformação da matemática escolar, no ano de 1931, foi referendada por uma reforma, a Reforma Francisco Campos. “Com essa reforma, o ensino secundário passa a ter dois ciclos: um fundamental, de cinco anos, e outro complementar, de dois anos, este último visando à preparação para o curso superior.” (BRAGA, 2006, p. 70).

Alguns autores de livros didáticos reservaram em cada volume um dos últimos capítulos para a representação gráfica.

“Dessa forma, apesar de os autores atenderem ao programa oficial, percebe-se alguma intencionalidade em afastar função dos dois primeiros anos do secundário ou, no mínimo, relegá-la a segundo plano.” (BRAGA, 2006, p. 138). Como afirma Braga, apenas os livros de autoria de Euclides Roxo concretizavam as instruções relativas a essas séries.

Após dez anos de vigência da Reforma Francisco Campos, de certa forma referendada pelo programa de matemática da Reforma Capanema, houve adaptações ao novo formato: Curso ginasial, clássico e científico:

> Assim, de acordo com o programa de matemática para o curso ginasial oficializado pelo ministro Gustavo Capanema, através da portaria Ministerial de 11 de junho de 1942, função fica restrita à quarta série. O programa de matemática da Reforma Capanema aparenta referendar uma possível prática do cotidiano escolar induzida pela *vulgata* da Reforma Francisco Campos. Aqueles capítulos sobre função, com poucos exercícios, apresentados nos finais dos livros do primeiro e segundo anos, agora, são

> descartados oficialmente. O restante da abordagem funcional que comparecia nos três últimos anos do curso fundamental foi redistribuída em um novo formato: pequena parte na quarta série ginasial e o restante no clássico ou científico. (BRAGA, 2006, p. 141).

Ocorreu uma série de conflitos e pressões contrárias à Reforma Capanema, diante das propostas inovadoras que subjugavam o ensino vigente e induziam para uma prática escolar mais próxima do cotidiano.

"Os meios ligados à igreja pleiteavam um curso mais humanista com menos ênfase ao ensino de função; os setores ligados ao ensino militar preferiam um ensino de matemática sem conexões." (BRAGA, 2006, p.141-142). Os professores, por sua vez, questionavam a eficiência da modernidade no atendimento das finalidades ditas ideais. A verdade é que toda mudança gera conflitos, o contato com o novo gera insegurança e medo do que pode surgir.

Com a Reforma Capanema, o tema função passou a participar dos conteúdos programáticos, sendo, nos primeiros anos, aplicados de forma mais branda e, nos anos finais, mais sistematicamente. Atualmente, o contato que os alunos têm com o conteúdo de funções está sob a responsabilidade dos livros didáticos utilizados no 9º ano do Ensino Fundamental e na 1ª série do Ensino Médio. Observam-se heranças remanescentes dessas reformas nos conteúdos explanados nesses livros, e o educador acaba por ministrar suas aulas sem explicitar um conhecimento do surgimento desse conteúdo na disciplina de matemática.

Com esse panorama sobre função em escolas brasileiras, pode-se observar o quanto sua elaboração foi complexa e que ainda há muito a ser feito acerca de um trabalho envolvendo funções conforme é proposto pelos currículos escolares e pelos livros didáticos dos mais diversos autores.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) possuem, entre suas orientações, algumas diretrizes para os professores trabalharem a mtemática de forma mais relacionada ao dia a dia do educando. Os PCNs abrem as portas para um trabalho voltado para a vida e o interesse dos alunos, para que possam associar a matemática estudada na escola com o seu cotidiano, fazendo as devidas conexões.

Na luz dos PCNs, é necessário levantar alguns questionamentos para melhor conduzir essa investigação, tais como: As funções, da forma que são trabalhadas, oportunizam ao estudante uma conexão com sua vivência diária? Atendem ao que é proposto pelos Parâmetros Curriculares Nacionais?

A seguir, algumas propostas desses parâmetros para o ensino de funções na disciplina de matemática serão apresentadas.

2.2 Os Parâmetros Curriculares Nacionais e o estudo das Funções

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) trazem a contextualização sociocultural como uma grande competência, como uma forma de aproximar o aluno de sua realidade, fazendo-o vivenciar e reconhecer a diversidade que o cerca, sendo capaz de interpretar e atuar nessa realidade.

O estudo de funções, de acordo com as propostas do PCNEM, faz-se necessário para auxiliar o aluno na interpretação da sociedade e sua atuação nela.

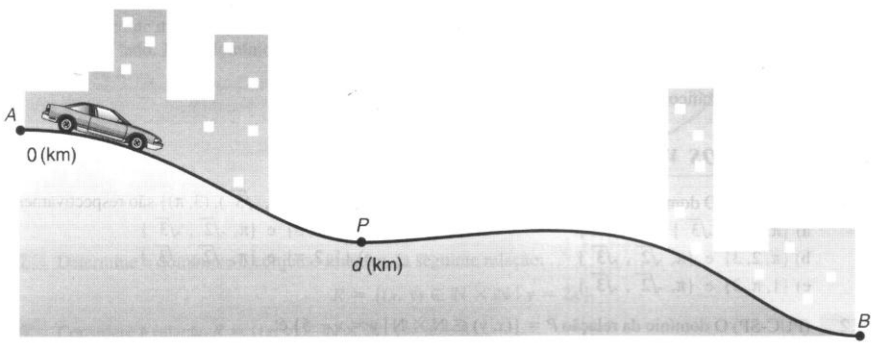
> O estudo das **funções** permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no **conceito de função** e em suas **propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos** e **nas aplicações dessas funções.** (BRASIL, 1999, p. 118, grifo do autor).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais orientam, ainda, que o ensino de funções na forma tradicional estabelece como pré-requisitos o estudo de números reais, conjuntos e operações; depois disso, definem-se relações, e as funções são definidas como relações particulares. Para se fazer uma análise das funções, todo esse percurso é necessário? Se o aluno se depara com situações contextualizadas, não consegue compreender a ideia de função?

O estudo de funções no Ensino Fundamental é destacado no 9º ano; já no Ensino Médio, fica submetido à primeira série, cabendo ao aluno deglutir tudo o que é oferecido pelos livros didáticos e pelos currículos aos quais os educadores são sujeitos pelo “sistema” e precisam sobremaneira segui-los. Não seria mais proveitoso que esse conteúdo fosse distribuído ao longo das três séries, sendo respeitadas a maturidade e a compreensão desses alunos? O estudo de todas as funções (composta, inversa, linear, quadrática, modular, exponencial e logarítmica) em apenas um ano de escolaridade pode colaborar com o crescimento e a compreensão dos alunos?

Ainda de acordo com os PCNEM, “o ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente” (BRASIL, 1999, p. 118). Toda linguagem que for excessivamente formal deve ser deixada de lado, e uma seleção prévia de conteúdos necessários à maturidade desejada para o aluno faz-se plausível.

As diretrizes vêm sendo apresentadas pelos autores de livros didáticos na forma de contextualização, não necessariamente através de metodologias alternativas. Um exemplo disso encontra-se no livro **Matemática 1,** do autor Manoel Paiva, que, ao introduzir função na sua obra, levanta o seguinte problema:



Suponha que um automóvel percorra um trecho AB de uma estrada a uma velocidade constante de 80 km/h.
Fonte: (PAIVA, 2000, p. 98).

Paiva complementa a situação-problema:

> Consideremos A como ponto de partida e associemos a ele a marca 0 km. A cada ponto *P*, do trecho AB, associemos a marca *d* km, que é a distância de *P* até *A*, medida ao longo da trajetória. Que distância terá percorrido o automóvel após duas horas da partida? (PAIVA, 2000, p. 98).

Ao se resolver essa situação, é apresentada em seu livro a equação *d = 80. 2 km*, onde *d = 160 km*:

t (horas)	*d* (quilômetros)
2	160
3	240
4	320
⋮	⋮

Figura 1: Relação tempo e distância do problema de Paiva.
Fonte: (PAIVA, 2000, p. 98).

E acrescenta:

> Note que para cada valor de *t* se associa um **único** valor de *d*. Por isso dizemos que a distância *d* é dada em **função** do tempo *t*. Podemos expressar a distância em função do tempo pela seguinte equação: $d = 80t$. Essa equação substitui, com vantagens, a tabela anterior. (PAIVA, 2000, p. 98, grifo do autor).

Paiva ainda questiona qual seria a distância após 4 horas da partida, dizendo que basta para isso fazer o $t = 4$, obtendo-se 320 km. O problema apresentado por Paiva está contextualizado, ou seja, ele pensou nos automóveis e numa possível velocidade no decorrer de todo o seu percurso. Logo após é apresentada a tabela e a equação relacionando a distância com o tempo.

Aos olhos dos alunos, essa situação é bastante artificial, pois eles sabem que, na vida real, um percurso feito por um automóvel não é tão perfeito. Nas condições propostas pela situação-problema, poderiam vir a questionar como um carro manteria durante todo o seu percurso uma velocidade de 80 km/h? Não seria mais plausível que os alunos participassem da situação proposta sugerindo, investigando, questionando e associando-a ao seu cotidiano?

Alguns autores de livros didáticos estão procurando explicar funções com algumas situações-problema ligadas ao cotidiano dos alunos, como, por exemplo, a relação do número de litros de gasolina e o preço a pagar, os quilômetros rodados por um táxi e o número de litros de gasolina. Muitas vezes, usam uns valores forçados, para que o gráfico seja esboçado nas perfeitas condições e, a seguir, definem as funções como relações particulares, conforme afirmam os PCNEM.

É necessário que se levantem alguns questionamentos: o conteúdo de funções, assim como os conteúdos da disciplina de matemática precisam ser trabalhados numa sequência linear, para que haja aprendizado por parte dos alunos? Um aluno que frequenta uma turma de 6º ano não é capaz de entender uma relação funcional? Não se podem trabalhar noções de funções sem o prévio conhecimento de conjuntos? Não seria válido que se introduzissem novas metodologias e novas tecnologias para o ensino do conceito de funções? Cabe ao educador refletir e tentar posicionar seus planos de aula dentro de suas demandas de trabalho.

O educador deve adequar a linguagem funcional à série, ou turma em que está sendo ministrada a aula, pois, dependendo da definição, o aluno de uma turma de 6º ano não irá conceber e compreender. Cada um tem o seu tempo, e esse deve ser respeitado em cada contexto. Dessa forma:

> Na resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas, oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução. E, para isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido. (BRASIL, 1999, p. 110).

Além da resolução de problemas, que oportuniza ao aluno questionamentos e mesmo uma relação da matemática com sua realidade, existem outras tendências que são objetos de estudos em Educação Matemática; todas procuram despertar no aluno a vontade e o prazer de aprender matemática, a que o ensino tradicional vigente nem sempre atende satisfatoriamente.

O Ensino Tradicional Vigente (ETV), entendido como aquele no qual o professor possui o papel de expositor de conteúdos, cabendo ao aluno resolver exercícios de forma repetitiva, sem, contudo, participar na construção de seus conhecimentos, apresenta abordagens abertas a críticas ao trabalhar funções. Dentre elas, destacam-se:

. A definição de função parte de uma situação-problema programada exclusivamente para mostrar ao aluno uma lei de *f(x)* em função de *x*.

. São apresentadas as leis gerais das funções, dentre elas $f(x) = ax + b$; $f(x) = ax^2 + bx + c$; $f(x) = a^x$; dentre outras, com o objetivo de mostrar os coeficientes e levar os alunos às aplicações de números no lugar das variáveis *x* para se encontrarem os possíveis valores de *f(x)*.

. O esboço de gráficos com o auxílio de uma tabela genérica é apresentado aos alunos, nas diversas escolas, sem muita preocupação com as devidas interpretações.

. Os símbolos de conjuntos utilizados para conceituar e para aplicações envolvendo funções não estimulam, nem tampouco despertam nos alunos, o prazer e a vontade de estudar esse conteúdo.

Sendo assim, "os problemas de aplicação não devem ser deixados para o final deste estudo, mas devem ser motivo e contextos para o aluno aprender funções" (BRASIL, 1999, p. 118). O estudo de funções possui uma riqueza de situações e exemplos para descreverem fenômenos do cotidiano e levarem os alunos à crítica das situações descritas.

Só a contextualização não é suficiente para que o aluno compreenda, interprete e construa a noção de função. A introdução das funções através de novas metodologias, como a Resolução de Problemas, assim como a Modelagem Matemática, dentre outras metodologias, facilitam e auxiliam o trabalho dos professores que querem desenvolver nos alunos um senso crítico e levá-los à busca de situações da vida fora do ambiente escolar.

As aplicações que aparecem nos livros didáticos de matemática são, na maioria das vezes, superficiais e fogem da realidade dos alunos, tendo a definição formal de função como objetivo a ser alcançado. Um exemplo disso pode ser observado no livro **Matemática Completa,** dos autores José Ruy Giovanni, José Roberto Bonjorno e José Ruy Giovanni Jr, que, ao explanarem a função do 1º grau, apresentam um desenho de um retângulo de base *x* e altura 10 cm e acrescentam que, “designando por *p* a medida do perímetro desse retângulo, podemos estabelecer entre *p*, *x* e *10* a relação expressa pela fórmula matemática: $p = 2x + 20$, sendo $2x + 20$ um polinômio do primeiro grau” (GIOVANNI, J.; BONJORNO, J.; JUNIOR, J., 2002, p. 58). Logo após, comenta-se que a medida *p* do perímetro é dada em função da medida *x* da base e mostra-se: $f(x) = 2x + 20$ ou $y = 2x + 20$. Se for designada por *S,* a medida da área, estabelece-se a fórmula matemática: $S = 10x$. Comenta-se que a área é dada em função da base e mostra-se: $f(x) = 10x$ ou $y = 10x$.

Após essa explanação, é dito que ambas as equações representam um polinômio do 1º grau na variável *x*. Observa-se que o objetivo principal dos autores é mostrar a lei, ou fórmula matemática, que representa as funções do 1º grau, não usando conhecimentos trazidos pelos estudantes, ou mesmo uma indagação do que eles entendem por função.

A definição de função é mencionada logo abaixo dessa situação: “Toda função polinomial representada pela fórmula matemática $\mathbf{f(x) = ax + b}$ ou $\mathbf{y = ax + b}$, com $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, definida para todo *x* real, é denominada **função do 1º grau**.” (GIOVANNI, J.; BONJORNO, J.; JUNIOR, J., 2002, p. 58, grifo do autor).

Exemplos e exercícios de aplicações são enfatizados em seguida. O aluno que tem maior facilidade em reproduzir o que foi explicado pelo professor alcança bons resultados, os demais acabam consolidando a ideia de que a matemática é muito difícil e que não conseguem aprendê-la. Sendo assim:

> A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Esta competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticas, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas. (BRASIL, 1999, p. 109).

Observa-se que, para introduzir funções, alguns autores, como os acima citados, fazem uso da própria matemática (no caso, um problema da geometria) para tal fato. Não seria interessante que fossem usados problemas do cotidiano do estudante, mais práticos e ligados ao seu “mundo-real”?

Em suma, as propostas dos PCNEM de matemática se resumem na formação integral do aluno e, para auxiliá-lo nessa caminhada, o educador pode e deve ajustar suas aulas de forma a contribuir para a formação de jovens críticos e atuantes na vida social e profissional.

2.3 O Ensino Tradicional Vigente (ETV)

São muitas as dificuldades que os educadores matemáticos enfrentam em suas práticas diárias, principalmente nas salas de aula. Os conteúdos a serem trabalhados são determinados, em grande parte, por currículos que, muitas vezes, seguem o que é cobrado em vestibulares ou provas externas, não levando em consideração a necessidade do aluno em compreender a matemática como uma disciplina presente e constante em seus cotidianos. Os professores são sujeitos ao cumprimento desse programa, assegurando, assim, a continuidade do Ensino Tradicional Vigente.

Ao caracterizar a metodologia da Assimilação Solidária como uma proposta interventora na sala de aula, Silva (2000, p. 151) discorre sobre alguns pontos que o Ensino Tradicional Vigente aborda, pois nele o “foco principal está no conteúdo e no professor.”

Segundo Baldino (1995 apud Silva 2000):

> Quando, p. ex., o professor volta-se para o quadro e começa a “dar a matéria”, ou no momento em que define o horário de provas, está evocando um contrato implícito, que assim o é porque não pressupõe negociação entre professor e alunos. O contrato implícito do ETV ocorre com perfeita naturalidade, e é justamente essa naturalidade que inibe as possibilidades de modificação: se é “natural” que assim seja, não pode ser de outro jeito. Dentro deste contexto, espera -se ver os alunos sentados em fileiras e o professor em pé defronte do quadro, falando e escrevendo. (BALDINO apud SILVA, 2000, p. 152).

O ETV é adotado por um grande número de professores, “pensa-se que o professor transmite o conhecimento ‘mostrando’ e que o aluno aprende ‘vendo’” (SILVA, 2000, p. 152). Sendo assim, em uma turma na qual o educador assume uma postura tradicional, os alunos constituem-se meros ouvintes, cabendo ao professor ser o transmissor de teorias matemáticas e apresentador de exemplos para ilustrarem o que foi previamente demonstrado.

O professor que trabalha de maneira tradicional acaba por assumir uma postura de detentor do saber e do conhecimento necessário a ser transmitido aos alunos, ficando esses últimos com o dever de frequentarem no mínimo 70% das aulas e repetirem através de exercícios e de provas escritas o que foi "ensinado" pelo docente. Sendo assim, "no ETV alardeia-se a preocupação com a injustiça de reprovar o aluno que sabe, exatamente para desviar a atenção da injustiça que mais se comete, ao aprovar o que não sabe" (BALDINO, 1995, p. 2).

Na busca de romper com esse tradicionalismo que permanece até os dias atuais e pautando-se no desejo de encontrar uma alternativa que auxilie o trabalho dos educadores, desenvolveu-se a presente pesquisa, utilizando-se da metodologia da Modelagem Matemática, a fim de nortear e auxiliar um trabalho com o conteúdo de funções afins.

2.4 Alguns comentários

Analisando-se alguns livros didáticos utilizados por muitos professores para o trabalho de funções no Ensino Médio, observa-se que as diferenças entre eles são mínimas; alguns procuram problemas, outros partem da definição direta das funções. Enfim, percebe-se que o Ensino Tradicional Vigente permanece e com ele a preocupação de transmissão de conteúdos e aplicações diretas de fórmulas e leis que prevalecem desde os tempos remotos.

Conforme Braga (2006), em 1837, Dirichlet definiu as funções como: "Se uma variável *y* está relacionada com uma variável *x* de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a *x*, existe uma regra segundo a qual um valor único de *y* fica determinado, então se diz que *y* é função da variável *x*".

Ainda hoje, no século XXI, os livros didáticos são elaborados, e os currículos organizados, com base nessa mesma definição, com uma imensa preocupação em se mostrar a regra ou lei da função, não se associando a matemática com o cotidiano do educando.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais orientam que os estudos de funções devem levar os alunos a expressarem as relações entre suas grandezas e serem capazes de modelar situações-problema, permitindo que eles façam conexões dentro e fora da própria matemática, abrindo, assim, um leque de possibilidades para o educador dirigir seu trabalho. Os livros didáticos, da forma como estão trazendo os conteúdos, contribuem em todos esses aspectos orientados pelo PCNEM?

Há muito ainda a ser feito, cada vez mais emergem estudos de propostas alternativas que visem a um trabalho voltado para as propostas dos PCNEM, ou seja, uma formação integral do educando.

Uma proposta para a tentativa de romper com o Ensino Tradicional é o referencial teórico oriundo da Modelagem Matemática culminando no modelo em si, que, nesse caso, resume-se nas leis de formação para cada função. Essa proposta se preocupa com a pesquisa e a busca, por meio do interesse do aluno, por questões que julguem pertinentes com sua realidade e, através delas, a construção de modelos e a interpretação dos mesmos auxiliam no aprendizado de funções.

A proposta de um trabalho com a Modelagem Matemática busca de certa maneira um rompimento com a linearidade curricular, ou seja, os problemas levantados que determinarão os conteúdos a serem trabalhados, e esses conteúdos, interligados à situação pesquisada e proposta pelos alunos, serão compreendidos pelos mesmos, visto que eles pesquisaram e querem saber o desfecho da situação que foi apresentada. O professor pode sugerir temas e direcionar para o estudo de determinados assuntos, mas várias situações surgirão em torno da questão pesquisada, sendo passíveis de serem trabalhadas enfocando a Modelagem Matemática. Quando conseguem fazer conexões da matemática com sua vida cotidiana, os alunos conseguem aprender, pois percebem suas aplicações e não ficam simplesmente resolvendo inúmeras inequações, equações e vários conteúdos que são oferecidos artificialmente por inúmeros educadores nas salas de aula de matemática.

3 ALGUMAS CONCEPÇÕES DE MODELO E MODELAGEM MATEMÁTICA

O presente capítulo tem como objetivo o Modelo e a Modelagem Matemática para o desenvolvimento e encaminhamento das atividades. Muitos autores perpassam pelas duas definições e não conseguem sequer distingui-las, nomeando tudo como se fosse a Modelagem Matemática, produzindo dúvidas entre os leitores desses trabalhos.

Será oportunizada também uma concepção sobre Modelagem, a qual será adotada no decorrer deste trabalho.

3.1 Como é concebido o Modelo na Modelagem Matemática

Vários autores procuram definir Modelo ao explicitar trabalhos via Modelagem Matemática. Alguns conceitos serão citados, assim como a concepção de modelo que será utilizada no presente trabalho.

Um autor que utiliza a Modelagem em suas aulas é o Rodney Carlos Bassanezi. Em seu livro **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática uma nova estratégia**, 2002, apresenta sua definição de modelo, explicando que, quando se procura refletir sobre uma porção da realidade para, posteriormente, agir sobre ela, isso é formalizado através do modelo. O autor tece comentários sobre o modelo objeto e o modelo teórico:

> Modelo Objeto é a representação de um objeto ou fato concreto; suas características predominantes são a estabilidade e a homogeneidade das variáveis. Tal representação pode ser pictórica (um desenho, um esquema compartimental, um mapa, etc.), conceitual (fórmula matemática) ou simbólica. A representação por estes modelos é sempre parcial, deixando escapar variações individuais e pormenores do fenômeno ou do objeto modelado. Um modelo epidemiológico (sistema de equações diferenciais) que considera o grupo de infectados como sendo homogêneo, onde todos os seus elementos têm as mesmas propriedades é um exemplo de modelo objeto; Um desenho para representar o alvéolo usado pelas abelhas é também um modelo desse tipo.
>
> Um modelo teórico é aquele vinculado a uma teoria geral existente – será sempre construído em torno de um modelo objeto com um código de interpretação. Ele deve conter as mesmas características que o sistema real, isto é, deve representar as mesmas variáveis essenciais existentes no

> fenômeno e suas relações são obtidas através de hipóteses (abstratas) ou de experimentos (reais). (BASSANEZI, 2002, p. 19-20).

Bassanezi (2002, p. 20) chama, ainda, “simplesmente de Modelo Matemático um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado”. O objetivo de Bassanezi é a construção de um modelo onde seus alunos irão aplicar conhecimentos matemáticos para resolvê-lo. Essa construção do modelo é elaborada pelos alunos através de situações cotidianas; o professor auxilia e sugere algumas situações que recaiam nas equações diferenciais. Bassanezi afirma que o modelo deve ter uma linguagem clara e sem ambiguidades, “além de proporcionar um arsenal enorme de resultados (teoremas) que propiciam o uso de métodos computacionais para calcular suas soluções numéricas” (BASSANEZI, 2002, p. 20).

Um argumento que merece destaque na conceituação de Bassanezi é o fato de o aluno precisar ter conhecimento matemático prévio para que possa “atacar” o modelo. Os modelos que são construídos por esse autor visam a aplicações, especialmente de equações diferenciais, com as quais ele trabalha no ensino superior.

O Ensino Tradicional Vigente (ETV) adota a seguinte ordem de considerações: teoria matemática → apresentação de modelos prontos → solução via teoria matemática estudada previamente. Dessa forma, os estudantes não participam e não conectam a matemática com seu cotidiano, apenas memorizam fórmulas e como resolvê-las.

É preferível colocar os alunos em contato com situações-problema que afligem suas vidas diárias, fora do ambiente escolar, oportunizando-lhes a pesquisa e a busca por situações que sejam de seu interesse. A partir das situações apresentadas por esses alunos, eles poderão modelar e compreender os problemas. Após a solução do problema já modelado (o modelo em si), serão capazes de fazer uma análise crítica da solução do modelo matemático para explicar o problema do cotidiano.

Já a autora Biembengut (1999) veio contribuir com a definição do modelo matemático como algo que retrata aspectos da situação pesquisada. “Um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real denomina-se *modelo* *matemático."* (BIEMBENGUT, 1999, p. 20). Assim, a autora retrata a importância da matemática na elaboração de modelos matemáticos, sendo que esses possibilitam uma compreensão melhor de um fenômeno em estudo:

> Um modelo pode ser formulado em termos familiares, utilizando-se expressões numéricas ou fórmulas, diagramas, gráficos ou representações geométricas, equações algébricas, tabelas, programas computacionais, etc. Por outro lado, *quando se propõe um modelo, ele é proveniente de aproximações realizadas para se poder entender melhor um fenômeno e nem sempre tais aproximações condizem com a realidade*. Seja como for, um modelo matemático retrata, ainda que em uma visão simplificada, aspectos da situação pesquisada. (BIEMBENGUT, 1999, p. 20, grifo nosso).

Biembengut comenta ainda a respeito de alguns procedimentos que, segundo ela, são imprescindíveis para a elaboração de um modelo matemático:

> **a)**Interação:
>
> **.** reconhecimento da situação-problema;
>
> **.** familiarização com o assunto a ser modelado $\rightarrow$ pesquisa.
>
> **b)**Matematização:
>
> **.** formulação do problema $\rightarrow$ hipótese;
>
> **.** resolução do problema em termos do modelo.
>
> **c)**Modelo matemático:
>
> **.** interpretação da solução;
>
> **.** validação do modelo $\rightarrow$ uso.
>
> (BIEMBENGUT, 1999, p. 21).

A interação acontece durante a pesquisa sobre o assunto que se pretende estudar, pesquisa essa que ocorre em livros didáticos, revistas, experiências de campo, dentre outros meios. "A situação problema torna-se cada vez mais clara, à medida que se vai interagindo com os dados." (BIEMBENGUT, 1999, p. 22).

A etapa da matematização é a mais complexa e desafiadora, normalmente se subdivide em formulação do problema e resolução. Nessa etapa, os alunos deverão conceituar a situação-problema por meio de premissas e pressupostos na forma que eles admitem uma reformulação na linguagem matemática, e para isso a criatividade e experiência são necessárias.

Para haver a conclusão do modelo, deve ser feita uma checagem para verificar sua aproximação com a situação-problema representada. Para isso, deve ser feita uma interpretação do modelo e a verificação de sua adequabilidade. Se acaso o modelo não atender às necessidades propostas, deve ser retomada a etapa de matematização, fazendo-se os ajustes necessários. "É importante, ao concluir o modelo, a elaboração de um relatório que registre todas as facetas do desenvolvimento, a fim de propiciar seu uso de forma adequada." (BIEMBENGUT, 1999, p. 23).

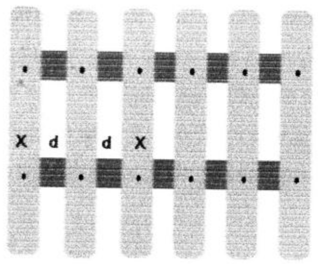
Burak (2004), com muita propriedade, exemplifica um modelo matemático:

> Na Modelagem a idéia de modelo fica ampliada, constituindo-se como uma representação. Assim, uma tabela de supermercado pode se constituir em um modelo, pois permite uma tomada de decisão como também a planta baixa de uma casa permite, também, a tomada de uma decisão. (BURAK, 2004, p. 6).

Burak demonstra a construção de um modelo em uma atividade envolvendo professores e alunos de uma 4ª série. Inicialmente, trabalhou-se um modelo de forma empírica, e os alunos precisavam construir um modelo para saberem quantas ripas e seus respectivos espaços eram necessários para cercar um terreno. Em um primeiro momento, alguns passos foram seguidos:

> . foi feito o desenho, em escala, de parte do comprimento da cerca, mais precisamente 1 m;
> . nesse 1 m, foram sendo colocadas as ripas, de 10 cm de largura;
> . a largura do intervalo, foi igual a largura da ripa.
> . Contaram-se as ripas necessárias para cobrir 1 m do perímetro;
> . estabeleceu-se uma regra de três, para determinar o número de ripas. (BURAK, 2004, p. 7).

Em um segundo momento, os professores, a partir dos dados disponibilizados, deduziram um modelo genérico, considerando *x* como a largura de cada ripa e *d* a distância entre duas ripas consecutivas.



N de ripas	Nº de intervalos.
1	0
2	1
3	2
4	3
.	.
.	.
n	n - 1

Figura 2: Largura e distância em relação a duas ripas.
Fonte: (BURAK, 2004, p. 7)

Para se estabelecer o comprimento qualquer da cerca, foram fornecidos os dados a seguir:

> Comprimento = número de ripas vezes largura de cada ripa mais o número de intervalos vezes a distância entre os intervalos. Então:
> *C = nx + d (n – 1)*
> *C = nx + dn – d*
> *C = n (x + d) – d* Modelo Matemático onde, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$
> (BURAK, 2004, p. 7- 8, grifo nosso).

A partir do modelo construído, novas situações podem ser levantadas pelo professor, sempre instigando os alunos a pensarem sobre o mesmo.

O autor Bean (2001) comenta sucintamente sobre trabalhos envolvendo Modelos e Modelagem Matemática. Em sua concepção de modelo, os alunos criam modelos matemáticos para representarem situações dadas. De acordo com o autor, em referência ao modelador profissional:

> As características e relações, extraídas de hipóteses e aproximações simplificadoras, são traduzidas em termos matemáticos (o modelo), nos quais a matemática reflete a situação do problema. Durante e depois da criação do modelo, o profissional verifica a coerência da matemática e a validade do modelo no contexto do problema original. Os ajustes,

> modificações ou novos modelos serão realizados ao longo do processo, até que um modelo aceitável dê conta do enfrentamento do problema. (BEAN, 2001, p. 51).

Bean complementa que:

> A essência da modelagem matemática consiste em um processo no qual as características pertinentes de um objeto ou sistema são extraídas, com a ajuda de hipóteses e aproximações simplificadoras, e representadas em termos matemáticos (o modelo). (BEAN, 2001, p. 53).

O modelo que é criado através das hipóteses e aproximações é sempre aberto à crítica e ao aperfeiçoamento. “São construções humanas, criadas no intuito de nortear nossa interação com o mundo.” (BEAN, 2007, p. 48). O autor distingue o uso, a análise, o ajuste e a criação de modelos; o último sendo a modelagem.

> [...] *utilizamos modelos* na reprodução da realidade, *analisamos modelos* para fazer uma leitura crítica da realidade, *ajustamos modelos* para lidar com incongruências na realidade de forma a mantermos as premissas, hipóteses e recortes que fundamentam esses modelos; e *criamos modelos* com o objetivo de orientar nossas atividades a partir de novas premissas, hipóteses ou recortes, no intuito de lidar com ou promover transformações na realidade. (BEAN, 2007, p. 49, grifo do autor).

Para exemplificar um modelo matemático, Bean cita o modelo para representar o crescimento da população do mundo, proposto por Thomas Robert Malthus em 1789, que é expresso por: $\frac{d}{dt}P(t) = nP(t)$.

Esse modelo contribui para analisar o crescimento populacional em um curto período de tempo. Com esse modelo, Malthus predisse que a população humana teria um crescimento em progressão geométrica, caso não ocorressem fatores de controle de epidemias ou mesmo falta de alimentos.

O presente trabalho buscará a concepção de modelo proposta por Bean, concebendo a criação dos modelos como construções humanas, criadas no intuito de nortear a interação com o mundo. Essas construções estão sempre abertas a críticas, para que sejam ajustadas na luz de objetivos, tecnologias e conhecimentos.

Na pesquisa exploratória, sempre que pertinente, serão levantadas as premissas e pressupostos, que, na concepção de Bean, são essenciais na análise de situações envolvendo a modelagem matemática.

3.2 Como é concebida a Modelagem Matemática

Uma descrição de Modelagem Matemática não é uma tarefa simples, uma vez que se encontram inúmeras obras em que os autores julgam estar trabalhando Modelagem, mas cada qual apresenta sua definição acerca de suas experiências e trabalhos envolvendo essa tendência.

Buscando as diversas concepções acerca da Modelagem, utiliza-se Barbosa, que enxerga no trabalho com a Modelagem uma oportunidade para que os alunos possam questionar situações por meio da Matemática, e sua preocupação não é com o produto final, pois esse dependerá do encaminhamento que surgirá na medida em que a atividade é desenvolvida pelos alunos. Acredita inclusive que, dependendo dos encaminhamentos, o modelo matemático possa nem ser construído.

Barbosa (2001, p. 6, grifo do autor) define que "*Modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e / ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade*". Entende-se que essa indagação ocorre no momento em que o aluno cria problemas e tece perguntas fazendo investigações na busca de soluções.

Beatriz D'Ambrósio (1989) analisa o trabalho com a modelagem como um caminho que vai auxiliar a quebra da dicotomia entre a matemática escolar e aquela que o aluno utiliza em sua vida. "Os modelos matemáticos são formas de estudar e formalizar fenômenos do dia a dia." (Ambrósio, 1989, p. 3). O educador, ao trabalhar nessa linha, possibilita aos seus alunos um maior significado ao que estudam, tornando-os críticos.

Considerado o precursor do trabalho com a Modelagem Matemática, Bassanezi (1994, p. 61) prioriza a modelagem como um processo dinâmico e a define como "arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real".

Bassanezi (2002) cita alguns exemplos de seu trabalho com a Modelagem Matemática, dentre os quais destaca-se uma modelagem desenvolvida em um curso de Especialização cujo tema é Abelha. Tal trabalho foi escolhido por um grupo de cinco professores do Ensino Médio, no curso de Especialização realizado em Guarapuava, em 1982.

Inicialmente, esse grupo de educadores coletou os dados e para isso “contaram” as abelhas de uma colmeia e fizeram a média de quantas abelhas pousavam por minuto. Foram analisando e constataram que, quando os favos estavam cheios, as abelhas trabalhavam menos. Com relação à modelagem, levantaram algumas questões, como dança das abelhas, geometria dos alvéolos, viscosidade do mel, dinâmica da população de abelhas, polinização, etc.

Comenta-se, aqui, a geometria dos alvéolos, usados para o desenvolvimento populacional da colmeia e para o depósito de mel. O grupo foi pesquisando e percebendo que, em uma colmeia, cada indivíduo possui uma função específica.

Foi feito um corte transversal em um favo, apresentando a configuração de um mosaico formado pela repetição de hexágonos regulares. Foram, através dos ângulos, tentando descobrir as possíveis configurações para um favo e o estudo de polígonos regulares foi-se tornando necessário. Observaram que cada alvéolo se encaixa com outros alvéolos paralelos, e o estudo de áreas de figuras planas foi acontecendo.

Também com esse trabalho estudou-se a dinâmica de uma colmeia, a postura da rainha, a quantidade de ovos colocados por dia e a quantidade de abelhas operárias. A partir de toda essa pesquisa, os modelos matemáticos foram surgindo e com eles o estudo de cálculo e equações diferenciais.

O trabalho de Bassanezi partiu de um tema escolhido por seus alunos, a “Abelha”, e todo o conteúdo de matemática foi surgindo de acordo com o interesse e questionamentos dos estudantes e as necessidades de cálculos para a construção dos modelos, ou seja, houve um interesse dos discentes pelo tema, e a modelagem os auxiliou no decorrer da pesquisa.

Já Burak (2004) concebe a Modelagem Matemática como alternativa metodológica para o ensino de matemática e seu trabalho deve ser iniciado a partir do interesse dos grupos; destaca aspectos que considera importantes para um trabalho envolvendo a Modelagem Matemática: maior interesse dos grupos, pois esses poderão manifestar-se escolhendo o que gostariam de estudar; interação maior no processo de ensino e aprendizagem, pois os grupos, ao trabalharem com aquilo que sugeriram, tornam-se corresponsáveis por suas aprendizagens; a Modelagem oportuniza também a demonstração de uma forma diferenciada de conceber a educação, cabendo ao professor uma mudança de postura para estabelecer relações afetivas com os discentes, passando a ser um mediador entre o conhecimento matemático e o conhecimento do aluno.

Ao trabalhar utilizando a Modelagem, Burak a desenvolve em cinco etapas:

> a) escolha do tema;
> b) pesquisa exploratória;
> c) levantamento dos problemas;
> d) resolução dos problemas;
> e) análise crítica das soluções (BURAK, 2004, p. 3).

Uma explanação mais detalhada dessas etapas acontecerá mais adiante, no quarto capítulo.

Já Biembengut (1999, p. 20) define a Modelagem Matemática como "o processo que envolve a obtenção de um modelo". Ainda complementa que "o modelador deve ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas" (BIEMBENGUT, 1999, p. 20). E ressalta:

> A modelagem matemática é, assim, uma arte, ao formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas para uma solução particular, mas que também sirvam, posteriormente, como suporte para outras aplicações e teorias. Grosso modo, pode-se dizer que matemática e realidade são dois conjuntos disjuntos e a modelagem é um meio de fazê-las interagir. (BIEMBENGUT, 1999, p. 20).

Para exemplificar o processo de Modelagem Matemática, Biembengut apresenta o seguinte esquema:

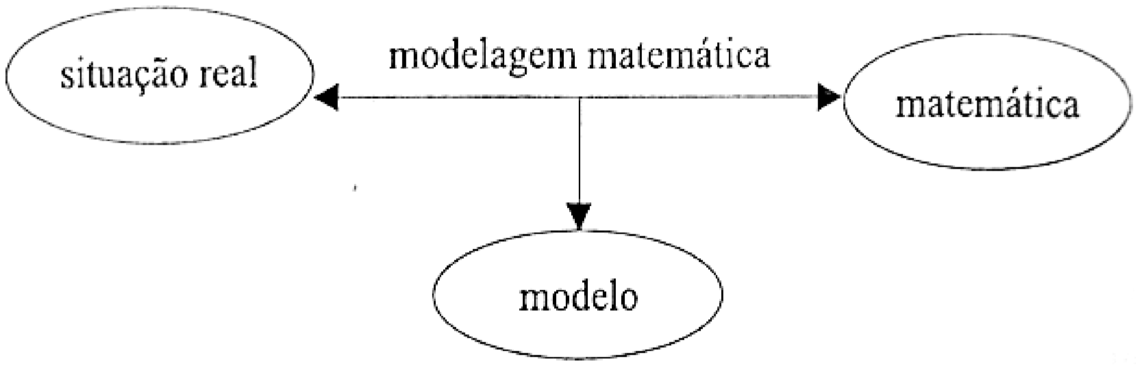


Figura 3: Esquema representativo da conceituação de modelagem matemática.
Fonte: (BIEMBENGUT, 1999, p. 21)

Bean, há alguns anos, trabalha e pesquisa a modelagem matemática. O autor concebe a aplicação de modelos como sendo “o processo de utilizar conceituações e modelos vigentes”, enquanto a modelagem se caracteriza por uma construção de modelos novos (2007, p. 39).

Bean conceitua a modelagem matemática, no sentido abrangente, como “uma atividade, entre uma variedade de possíveis atividades, utilizada para lidar com situações problemáticas empregando a linguagem matemática” (2007, p. 48). Ele concebe a modelagem como um processo de construção de modelos para lidar com situações dadas e, para nortear essa construção, são apresentadas as hipóteses, premissas e recortes. De acordo com Bean:

> Reconheço que todos os nossos modelos fundamentam-se em premissas, hipóteses e recortes que acentuam e desprezam aspectos daquilo que entendemos por realidade. Entendo que a modelagem envolve a mudança em algumas das premissas, hipóteses e recortes ou, ao abordar um novo problema, a formulação de novas premissas e hipóteses, e efetua recortes de acordo tanto com o fenômeno quanto com os objetivos. (2007, p. 49).

No IV Encontro de Educação Matemática de Ouro Preto, Bean (2009) apresenta alguns exemplos de atividades envolvendo a modelagem matemática. Um deles foi retirado de Peled e Bassan-Cincinatus (2005):

> Dois amigos, Maria e José, compraram um bilhete lotérico juntos. Maria pagou R$ 3 e José R$ 2. Seu bilhete ganhou R$ 40, Como é que eles devem compartilhar o dinheiro? (BEAN, 2009, p. 92, tradução do autor).

Nessa situação-problema, a questão é a forma como devem compartilhar esse dinheiro. Uma premissa para resolver essa situação é que a divisão de bens deve ser feita de acordo com os valores que foram investidos. Assim sendo, pode-se ter como pressuposto que a divisão deve ser proporcional, e muitos dirão que a divisão deve ser feita na razão 3:2, Maria ganhará R$ 24 e José R$ 16.

Ao analisar essa situação, o aluno, ou o grupo envolvido, pode supor que Maria e José são bons amigos e resolvem compartilhar o prêmio em quantidades iguais, baseado no princípio da equidade do dinheiro investido com base nas suas práticas cotidianas. Pensando dessa forma, o aluno estará errando a questão? Muitas vezes, são formuladas questões almejando-se respostas de acordo com os pressupostos do educador e não é valorizado o que os alunos pensaram naquela situação problemática.

Para Bean, o modelo que os professores utilizam vai depender de premissas e pressupostos, que variam dentro das inúmeras situações envolvidas. As premissas são as teorias ou princípios que guiam o raciocínio, e os pressupostos são afirmações úteis em termo do objetivo, não havendo, contudo, pretensão de comprová-las. Em modelagem, os pressupostos devem estar coerentes com as premissas.

Outra situação comentada por Bean no citado artigo, retirada de um trecho do livro Tomaz e David (2008), onde o tema água está problematizado em um projeto para alunos de 8º e 9º anos de Ensino Fundamental. O objetivo do trabalho foi a conscientização da importância e do uso responsável da água.

Os alunos envolvidos com a atividade buscaram as contas de água de suas residências e precisavam determinar a média do consumo por pessoa. Muitos questionamentos foram levantados. A professora supôs que só as pessoas de sua residência deveriam ser consideradas. Alguns alunos já queriam a inclusão de animais de estimação, e outros queriam considerar a faxineira e pessoas que frequentavam as residências esporadicamente.

Aí, a conceituação de “consumidor de água” na residência, que remeterá à modelagem e à forma como se vai modelar, dependerá sempre do objetivo e das premissas e pressupostos levantados em cada situação-problema.

O trabalho que será desenvolvido com alunos de uma turma de 1º ano do Ensino Médio adotará as concepções de Bean, em que a Modelagem é vista como um processo que se caracterizará pela construção de modelos novos, objetivando a transformação da concepção da realidade. Partindo-se do problema, fazendo indagações e questionamentos, os alunos poderão compreender o conceito e as características de funções afins, sem utilizá-las simplesmente como aplicações de equações matemáticas sem nenhuma relação com os seus cotidianos.

Conhecer a concepção de vários autores é importante para o educador que pretende trabalhar com a Modelagem Matemática em suas salas de aula. Isso possibilita um posicionamento diante de tantas definições acerca dessa tendência e para isso um estudo teórico se torna fundamental.

4 REVISÃO DE LITERATURA

Esta revisão de literatura tem os seguintes objetivos:

1) Identificar diferentes concepções de Modelagem Matemática.

2) Apresentar uma visão global dos trabalhos na área de Modelagem Matemática.

3) Apresentar uma concepção de Modelagem Matemática que será utilizada no presente trabalho.

Entre as pesquisas realizadas, encontram-se vários estudos a partir da década de 1990 desenvolvidos na área de Modelagem Matemática. É possível buscar uma diversidade de concepções e definições acerca do trabalho envolvendo essa tendência, algumas se convergem e outras são divergentes.

Optou-se pela divisão deste capítulo em três etapas:

4.1 Reflexões a respeito de Modelagem Matemática em relação à educação matemática crítica, o currículo e a construção de modelos.

4.2 Modelagem Matemática como Prática em Sala de Aula.

4.3 Algumas práticas de Modelagem Matemática em sala de aula e a Modelagem Matemática com as Tecnologias da Informação e da Comunicação.

Na seção 4.1, será oportunizado ao leitor um passeio pela literatura, para que conheça as mais recentes pesquisas e as concepções de diversos autores que possuem trabalhos utilizando a Modelagem Matemática como fio condutor. Na seção 4.2, serão disponibilizados alguns exemplos de práticas no uso da Modelagem em salas de aula. Já na seção 4.3, serão apresentados comentários de alguns trabalhos onde a Modelagem acontece via tecnologias da Informação e Comunicação.

4.1 Reflexões a respeito de Modelagem Matemática em relação à Educação Matemática Crítica, o Currículo e a construção de Modelos

Burak (2004) enfatiza que a Modelagem Matemática no Brasil teve seus primeiros estudos na década de 1980 na Universidade Estadual de Campinas-UNICAMP, em Biomatemática, com um grupo de professores, coordenado pelo professor Dr. Rodney Carlos Bassanezi, do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC), envolvendo modelos de crescimento cancerígenos.

A seguir, serão destacados alguns exemplos de trabalhos e algumas discussões teóricas de autores que abraçam a causa e desenvolvem pesquisas que possibilitam aos alunos o encontro com o desenvolvimento de modelos que os auxiliem na resolução de inúmeras situações-problema.

A busca pela literatura e por autores que desenvolvem trabalhos com a Modelagem Matemática permite um olhar diferenciado e, muitas vezes, até confuso acerca de tantas interpretações e entendimentos do que vem a ser essa tendência.

Apresentam-se algumas definições e experiências vivenciadas por autores de perspectivas e objetivos diferenciados, com o intuito de se construírem subsídios para o planejamento e encadeamento das atividades da pesquisa exploratória deste estudo. Foi feita uma seleção desses autores, visto que são inúmeros os trabalhos catalogados nessa área de estudo. O terceiro capítulo permite o aprofundamento do assunto com definição, e exemplos, de alguns autores sobre trabalhos com a Modelagem Matemática. Também, mais subsídios com o propósito de nortear trabalhos futuros envolvendo essa tendência.

Nas inúmeras reflexões e em alguns trabalhos que envolvem a educação matemática crítica, a corrente sociocrítica, o ambiente de aprendizagem e o envolvimento da modelagem no currículo, será apresentado, posteriormente, um breve relato com a descrição de possíveis caminhos para estudos em que a Modelagem Matemática é direcionadora.

4.1.1 A Educação Matemática Crítica – A Corrente Sociocrítica [2]

Ao se pesquisarem artigos e dissertações que têm suas raízes na Modelagem Matemática, verificam-se autores que fazem reflexões acerca da matemática crítica e acreditam que os alunos devem ser orientados, nas aulas de matemática com uma direção crítica, para que possam se posicionar diante de uma sociedade que, por sua vez, é crítica.

Jacobini e Wodewotzki (2006) desenvolvem uma reflexão acerca da Modelagem Matemática como um instrumento de ação política na sala de aula. Relatam que o professor, ao aplicar a modelagem, tem a intenção de ensinar matemática, e a exploração das aplicações matemáticas e a construção de modelos oferecem ao aluno oportunidades de uma convivência com conteúdos úteis e com significados. Trabalhando somente nessa perspectiva, o professor olha exclusivamente o conteúdo, não considerando a formação crítica dos estudantes enquanto cidadãos presentes numa sociedade que possui forte presença da matemática.

Jacobini e Wodewotzki relatam ainda que a educação crítica se insere por posturas democráticas nas salas de aula com posicionamentos críticos, indagações e reflexões, por discussões relacionadas com referências democráticas, objetivando reações às contradições sociais, transformando, assim, as estruturas da sociedade.

Em uma sala de aula crítica, tanto o educador, quanto os educandos devem assumir o papel de participantes na aprendizagem, sendo a preparação para o exercício da cidadania o foco principal. A matemática, por sua vez, deve ser trabalhada como um instrumento de análise das características críticas de relevância social (JACOBINI; WODEWOTZKI, 2006). Os autores têm como objetivo, em um trabalho com a Modelagem, direcionar suas aulas para o crescimento político e social do estudante.

A escolha da atuação política na sala de aula, segundo Jacobini e Wodewotzki, não significa a desvalorização da matemática acadêmica, nem mesmo a construção de modelos. Afirmam:

[2] A palavra sócio-crítica foi adaptada à nova regra ortográfica, portanto escreve-se sociocrítica.

> Essa escolha tem a ver com a intenção de, primeiro, extrapolar a exclusividade do foco da aprendizagem na compreensão da matemática em si. E, segundo, formar um estudante (i) crítico, investigador e conhecedor de problemas que afligem a sociedade; (ii) sensível para refletir sobre situações sociais, econômicas, do meio ambiente etc., ou sobre políticas públicas de interesse da sociedade; (iii) consciente da importância da participação democrática dos cidadãos, quer em relação a decisões sobre assuntos que dizem respeito aos interesses e às aspirações da comunidade, quer em relação ao acesso democrático de toda a população aos serviços sociais, públicos e de qualidade, tais como saúde, educação, moradia e trabalho; (iv) envolvido na luta democrática pela conquista da igualdade de direitos, deveres e oportunidades entre os homens e pelo fim de qualquer forma de preconceito e de discriminação (...); (v) consciente da importância e da necessidade da sua participação na comunidade como um sujeito formador, questionador (...); (vi) interessado em compartilhar o conhecimento resultante do processo de aprendizagem em algum contexto (social, político, econômico, educacional, a escola, a própria sala de aula, etc.). (JACOBINI; WODEWOTZKI, 2006. p. 85).

A matemática deve extrapolar os cálculos e aplicações que, geralmente, são trabalhados pelos educadores. Uma reflexão crítica acerca da comunidade onde os alunos se inserem auxilia-os enquanto cidadãos, tornando-os críticos, investigadores e conscientes de seus papéis no exercício de sua cidadania.

Pinheiro (2008, p. 31) corrobora com Jacobini e Wodewotzki, ao afirmar que "é imprescindível que as pessoas não apenas aceitem o conteúdo numérico, mas, sobretudo, que estejam sempre atentas para os impactos que ele tem para a sociedade."

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) destacam que a matemática deve ser trabalhada com o objetivo de promover o desenvolvimento e aquisição de competências, para que o aluno se integre à sociedade como cidadão e possa modificar e melhorar sua realidade. Dessa forma, para Pinheiro,

> Uma educação matemática crítica e reflexiva, trabalhada em torno dos modelos e pressupostos utilizados para se obter certos resultados, poderá favorecer às pessoas uma cidadania mais participativa em situações comuns como as audiências de programas televisivos e outros estudos estatísticos que são apresentados em meios de comunicação social. (2008, p. 36).

A relação entre professores e alunos deve ser dialógica, e o aluno deve ser convidado a ser um cidadão crítico. A importância do diálogo é destacada por Freire (1970), que ressalta uma pedagogia emancipadora, que defende a prática do diálogo entre professor e aluno, garantindo, assim, uma troca de saberes e, portanto, um aprendizado mútuo. Então, os dois lados podem tanto ensinar como aprender, uma vez que o processo de interação garante que ambos os lados se beneficiem, por serem seres com uma bagagem de conhecimento própria. Dessa forma, por meio da aprendizagem, professor e aluno podem desenvolver diferentes posturas, atuando diretamente no crescimento intelectual dos dois lados.

O papel do educador é possibilitar aos estudantes a crítica e o questionamento, e isso só vai se despertar se o aluno participar da construção de seu conhecimento. O professor deve assumir o papel de auxiliador, e não de transmissor de conteúdos, visto que, enquanto escuta e permite que o aluno contribua com suas colocações, também aprende. Tudo deve acontecer de forma recíproca, conforme citou Paulo Freire, o “professor-dos-estudantes” e os “estudantes-do-professor”, os quais, na troca de experiências, crescem cada vez mais.

Jacobini e Wodewotzki discorrem sobre um trabalho que foi aprovado para o IV Congresso Nacional de Educação e Modelagem Matemática, que envolveu dois projetos, em que se permitiu aos alunos envolvidos a possibilidade de críticas e reflexões.

O primeiro projeto, Orçamento Participativo (OP), foi desenvolvido na disciplina de Estatística, com os alunos em discussões políticas e de cidadania, sobre participação democrática da população em decisões na própria comunidade. Foi demonstrada aos estudantes a investigação do processo de composição do orçamento baseado na participação dos municípios, através de fóruns, assembleias e do Conselho Municipal.

Com o segundo projeto desenvolvido, Tributação e Imposto de Renda (TIR), organizado nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral, foram suscitadas discussões matemáticas relacionadas aos modelos construídos, simulações de seus resultados e reflexões acerca do trabalho realizado.

> Dentre essas reflexões destacamos: as críticas sobre possíveis injustiças existentes no atual modelo brasileiro de cobrança do imposto de renda (que é composto por apenas duas faixas para tributação); as discussões decorrentes tanto dessas críticas como das simulações realizadas a respeito da necessidade de estudos sobre a viabilidade de alíquotas superiores a 27,5% (para que rendimentos maiores possam ser taxados com porcentagens também maiores); as preocupações com a desigual

> distribuição de renda no país; as discussões sobre a relação entre tributo e cidadania, caracterizada pela percepção da relação entre Estado e Governo, cidadão e democracia, tributos e impostos; a necessidade do envolvimento de toda a sociedade no combate à sonegação, à corrupção e à impunidade. (JACOBINI; WODEWOTZKI, 2006, p. 80-81).

Jacobini ressalta que, em ambos os projetos, os estudantes se interessaram por discussões relacionadas com a democracia, como “a proporcionalidade democrática nas diversas instâncias políticas e a questão da participação e do envolvimento da população na ação de governabilidade” (JACOBINI; WODEWOTZKI, 2006, p. 81).

> Com essas discussões tributárias, sociais, de cidadania e de democracia, propiciadas pelos resultados obtidos com a aplicação da modelagem matemática, introduzimos, nesses cenários, o componente político-reflexivo para investigação (conscientização política). Através dos trabalhos pedagógicos, comunitários e voluntários, realizados pelos futuros engenheiros com alunos da 8ª série da escola municipal Dr. João Alves dos Santos, (projeto OP), e com adolescentes do COMEC- Centro de Orientação ao Menor de Campinas (projeto TIR), realçamos e reforçamos tal componente. (JACOBINI; WODEWOTZKI, 2006, p. 81-82).

Expandir essas atividades para além das salas de aula possibilitou uma maior integração e um espaço para os jovens que se contrastavam. Estudantes universitários, provenientes de famílias de classe média, de um lado e, do outro, adolescentes pertencentes a famílias de baixa renda e moradores da periferia de Campinas, não raro com deficiência escolar, especialmente na matemática. Acrescentam-se, ainda, os adolescentes do COMEP (Centro de Orientação ao Menor de Campinas) e o seu envolvimento com infrações à lei.

O debate acerca dessas questões mostrou aos estudantes que eles estavam preparados para reflexões sobre seus relacionamentos com a sociedade e para perceber a matemática como um instrumento de análise das características de relevância social.

Ainda nesse passeio pelas concepções e pesquisas acerca da Modelagem Matemática e para complementar as indagações acerca da Educação Matemática Crítica, é necessário conhecer características importantes da corrente sociocrítica e sua atuação dentro de trabalhos com a Modelagem Matemática. Alguns autores recorrem à corrente sociocrítica como um apoio para trabalharem a Modelagem Matemática, como uma forma potencializadora de reflexões sobre a matemática.

Barbosa (2001) cita Kaiser-Messmer (1991), que discute duas visões internacionais acerca da Modelagem: a pragmática e a científica. Na corrente pragmática, o currículo deve remover conteúdos matemáticos que não são aplicáveis em outras áreas e ensinar conteúdos úteis para a sociedade. Essa corrente focaliza a construção de modelos matemáticos.

Já a corrente científica busca o estabelecimento de relações com outras áreas, partindo da matemática, e a Modelagem nessa corrente é tida como forma de introduzir novos conceitos.

De acordo com Barbosa,

> A corrente pragmática volta-se para aspectos externos da matemática enquanto que a científica, para os internos. O foco permanece, portanto, na matemática e sua capacidade de resolver problemas de outras áreas. (2001, p. 3).

Barbosa (2001, p. 4), percebendo o estacionamento no conhecimento matemático e um interesse muito pequeno pelo conhecimento reflexivo, sugere uma terceira corrente, a sociocrítica. Para o autor, “nem matemática nem modelagem são ‘fins’, mas sim ‘meios’ para questionar a realidade vivida.”

Esse mesmo autor concebe a Modelagem como direcionadora a críticas, em que os alunos transitam para a dimensão de um conhecimento reflexivo, cabendo ao professor ajudá-lo nesse processo. Com o intuito de exemplificar a corrente sociocrítica, Barbosa tece um exemplo imaginário, onde os alunos precisavam planejar os gastos com publicidade de uma empresa. Para isso, consultaram preços de vários publicitários, para que fossem produzidas as propagandas. Buscaram também os preços cobrados pelos canais de televisão e rádios, para que essas propagandas fossem efetuadas e encontraram uma solução, através de programação linear. Além do envolvimento com a Modelagem Matemática e com conhecimentos matemáticos, uma série de questões pode ser levantada a respeito do que fizeram, como as descritas a seguir.

> “Este resultado é válido?”, “Por que?”, “Como podemos garantir?”, “Ao traduzirmos a situação em termos matemáticos, o que perdemos?”, “O que ganhamos?”, “O que garante os procedimentos matemáticos adotados?”, “Há pressupostos implícitos?”, “As manipulações matemáticas podem nos dizer algo sobre a situação?”. Mais ainda: “É seguro tomar a decisão baseada nesta abordagem matemática do problema?”, Por que é importante a propaganda para a empresa?”, “Qual o impacto sobre as vendas?”, “Que papel a mídia desempenha nos hábitos das pessoas?”, “Qual a relação com o consumismo?”, “Somos autônomos perante a mídia?” (BARBOSA, 2001, p. 4).

Além dessas questões, várias outras poderiam ser formuladas acerca dessa situação-problema. “O que chamamos de corrente sócio-crítica de Modelagem sublinha que as atividades devem potencializar a reflexão sobre a matemática, a própria Modelagem e seu significado social.” (BARBOSA, 2001 p. 4).

Jacobini com muita propriedade afirma que:

> A educação crítica insere-se e desenvolve-se num contexto caracterizado, de um lado por discussões relacionadas com formas de dominação (econômicas e culturais), com problemas sociais, com críticas e com relações democráticas que objetivam transformações nas estruturas sociais, políticas, econômicas e éticas da sociedade; de outro, por construções de ambientes democráticos nas salas de aula que garantam o diálogo entre os participantes do processo de ensino e de aprendizagem, igualdade entre eles, constantes questionamentos e indagações, reflexões e reações às contradições. (JACOBINI, 2007, p. 125 apud in ANDRADE, 2008, p.53-54).

Entende-se como sociocrítica uma perspectiva que oportuniza ao aluno a reflexão e o diálogo, sendo a sala de aula um ambiente democrático, no qual essa reflexão é fundamental para a busca de uma aprendizagem.

A perspectiva sociocrítica evidencia o caráter cultural e social da matemática. Ela suscita indagações e questionamentos acerca das atividades desenvolvidas e proporciona o debate e a discussão das aplicações dessa ciência na sociedade. O diálogo se apresenta como uma peça chave, para que ocorra a aprendizagem e para a construção de ambientes democráticos nas salas de aula. Uma reflexão acerca desses ambientes é necessária para nortear trabalhos onde a Modelagem Matemática está envolvida. Essa perspectiva desafia o Ensino Tradicional Vigente e o currículo linear.

4.1.2 Uma possibilidade de ruptura com o currículo linear

Para Machado (1995 apud Klüber e Burak, 2007), o maior problema enfrentado em relação às disciplinas escolares é a linearidade acerca da apresentação dos conteúdos, que dificulta muito o desenvolvimento de conceitos, por solicitar uma ordem onde os pré-requisitos se tornam essenciais. A ideia de linearidade não consegue dar conta da construção do conhecimento, que, na maior parte das vezes, acontece numa grande desordem.

Klüber e Burak entendem a Modelagem como uma possibilidade de romper com essa linearidade curricular pelo fato de nela, não serem os conteúdos os determinadores dos problemas, e sim os problemas que determinarão os conteúdos a serem trabalhados.

Para exemplificarem a contextualização a partir da Modelagem Matemática, Klüber e Burak citam Soistak (2006); o tema escolhido pelos alunos foi *a "Cultura do Soja".* No decorrer desse trabalho, os estudantes procuraram saber os valores para a venda do soja, estudaram a cotação do dólar em relação ao real e a outras moedas e tiveram a oportunidade de dar significados aos conteúdos de proporção e sistema monetário. Dessa forma:

> O contexto, então, não é apenas aquele que o indivíduo ou grupo está inserido, mas também o mundo que ele vive e convive, influencia e é influenciado. Dito de outra maneira, o conteúdo matemático foi contextualizado, o que permitiu avaliar o contexto do mercado, as diferenças, as discrepâncias e outras variáveis do gênero. Permitiu extrapolar o simples contexto da matemática com característica mais internalista e encontrar relações em outras esferas de significado, como a econômica. (KLÜBER; BURAK, 2007, p. 7- 8).

Os conteúdos trabalhados nesse tipo de contextualização surgem da necessidade e mantêm ligação com o contexto dos alunos, professores, escola e mesmo a sociedade. No desenvolvimento do trabalho proposto por Soistak (2006), aconteceram algumas mudanças: "a principal mudança ocorreu no sentido dos alunos poderem desenvolver uma pequena plantação de soja na propriedade do colégio que estudavam" (KLUBER; BURAK, 2007, p. 8).

Os alunos envolvidos no trabalho propunham realizar um levantamento acerca do que e de quanto precisavam para plantar soja numa área de 2 km de perímetro.

> Esse tipo de situação não possui respostas fechadas, prontas, que apenas um modelo ou fórmula matemática resolve. Necessita de um pensamento mais qualitativo, abrangente e, por conseguinte, que outras questões subjacentes sejam enunciadas e respondidas. Questões do tipo: Que unidades de medida são utilizadas para o plantio? O quilômetro? O metro? O Alqueire ou Hectare? Quais as diferenças e as relações entre elas? E assim por diante. (KLÜBER; BURAK, 2007, p. 8).

Nesse trabalho fica confirmada a Modelagem como uma possibilidade de romper com o currículo linear, quando os alunos envolvidos na atividade sentem a necessidade de elaborar uma análise dos dados que foram coletados em relação às variações de preços e mesmo a quantidade de soja produzida. Para atender aos interesses dos principais envolvidos, no caso os alunos, há uma necessidade de se aprofundar porcentagem e regra de três.

Se o professor estivesse preocupado apenas com os conteúdos selecionados para o 1º ano, que esses alunos cursavam, não conceberia a necessidade de retornar a esses conteúdos, visto que são determinados para uma 6ª série do Ensino Fundamental. Mas foi retomado e com uma visão diferente, como um instrumento de interpretação da situação estudada pelos alunos. Além desses conteúdos, foram desenvolvidas também unidades de medidas, que não eram previstas para uma turma de Ensino Médio.

Num trabalho focando a Modelagem, os conteúdos que surgem não seguem uma ordem rígida e linear, e conteúdos ditos de outras séries podem e devem aparecer nas situações-problema, como observado anteriormente no trabalho de Soistak, cabendo ao professor auxiliar seus alunos e trabalhar esses conteúdos na medida em que forem necessários.

Klüber e Burak (2007, p. 13) enfatizam que “(...) a Modelagem permite a intersecção com outras áreas do conhecimento e não precisa necessariamente ser desenvolvida em uma disciplina de matemática”. E veem um trabalho com a Modelagem como uma possibilidade de diálogo e um caminho que possibilita o rompimento com a hegemonia da transmissão. Ao aluno é atribuída a tarefa de interação e cooperação em todo o processo de ensino e aprendizagem.

A proposta de um trabalho com a Modelagem Matemática, conforme apresentado, busca uma inversão do processo curricular que se encontra nas escolas, pois os conteúdos surgem devido às suas necessidades e dentro das situações-problema buscadas pelos alunos, derrubando-se assim, a “ordem” que o currículo tradicional impõe aos conteúdos matemáticos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais propõem essa ruptura com os currículos lineares e abrem-se para muitas discussões, quando propõem trabalhos interdisciplinares e a valorização de tudo aquilo que os estudantes sobremaneira levam de suas experiências e vivências fora do ambiente escolar.

4.1.3 Premissas e Pressupostos na concepção de Bean

Bean (2007) tece alguns comentários acerca de sua concepção de Modelagem Matemática, a qual entende como um processo cujo propósito é a transformação da realidade.

Os modelos, construídos através do processo de modelagem, vão sofrendo modificações para se adaptarem à realidade dos alunos, e a motivação e compreensão de conteúdos matemáticos ajudam nesse processo. Bean concebe a Matemática Aplicada como um ponto de partida para descrever o processo de modelar e, atualmente, a fundamentação epistemológica vigente do processo. Em nota de rodapé, cita:

> Atualmente, a base filosófica que serve como pano de fundo para compreender o que é modelagem matemática é o realismo representacionista. Sob esta ótica, os modelos representam ou espelham a Realidade que, por sua vez, é concebida como única e exterior ao ser humano. É uma realidade da qual, em princípio, o ser humano pode se aproximar com seus modelos. (BEAN, 2007, p. 36-37).

Essa base conceitual que remete à ciência moderna para descrever a modelagem matemática fundamenta-se numa disjunção entre a realidade e a matemática. De acordo com Bean:

> Essa base também fundamenta a descrição de matemática aplicada que, por sua vez, diferencia áreas do conhecimento e atuação. Para o matemático aplicado, a origem dos problemas que ele aborda está na parte “não matemática” da realidade. (2007, p. 48, texto da figura 1).

Bean, cuja concepção de modelagem não está de acordo com as bases filosóficas vigentes, aponta que “a modelagem se caracteriza pela construção de novos modelos para situações onde os modelos vigentes não se adequam aos fenômenos, sob a luz dos objetivos do modelador” (2007, p. 39). Entende-se que a utilização de modelos vigentes é a reprodução da realidade, cabendo à modelagem a transformação dessa realidade. Para a compreensão de Bean:

> Entendo, por reprodução da realidade, a continuidade das atividades de uma comunidade, de maneira que sua interação com o mundo seja norteada por conceituações e modelos que se fundamentam nas premissas e hipóteses tradicionais da comunidade. E, por transformação da realidade, entendo que as atividades da comunidade se transformam, de maneira que sua interação com o mundo seja norteada por conceituações e modelos que se fundamentam em premissas e hipóteses diferenciadas daquelas que fundamentam os modelos tradicionais. (2007, p. 39).

Quando os modelos são eficazes para nortear as interações com o mundo, eles se tornam parte da realidade. Bean diferencia a aplicação de modelos de modelagem:

> Desta perspectiva, a aplicação de modelos e a modelagem, embora, como processos, compartilhem competências e habilidades inter-relacionadas, possuem exigências, propósitos e efeitos diferenciados. Enquanto a aplicação reproduz a realidade por utilizar modelos vigentes nos quais os recortes, hipóteses e premissas tradicionais se adequam ao que está estabelecido a respeito de fenômenos, a modelagem, por sua vez, reconceitualiza e muda a compreensão de fenômenos, ou transforma o enfoque desse entendimento, fundamentando-se em novas hipóteses, premissas ou recortes e transformando o modo como compreendemos e interagimos com o mundo, ou seja, transforma a realidade. (2007, p. 42).

Para Bean, a matemática pertence à realidade e essa vai envolver conceituações e modelos, sejam esses matemáticos ou não. Concebendo a matemática como parte da realidade, encontra-se uma inconsistência em fundamentar a modelagem numa base conceitual que vem estabelecer uma disjunção entre a realidade e a matemática. Assim, no mesmo artigo citado anteriormente, Bean vem contradizer a conceituação dicotômica "*realidade – matemática"* para fundamentar sua concepção acerca do que é a modelagem matemática. O autor entende ser essa dicotomia problemática ao se acreditar que a matemática faz parte da realidade, ou ainda, concebe-se a modelagem matemática na própria matemática, como Cifuentes e Negrelli (2006 apud BEAN, 2007, p. 53-54).

Em sua concepção, Bean afirma que os modelos são construídos utilizando--se várias linguagens, dentre elas a matemática; "por linguagem, entendo os meios de expressão e comunicação" (2007, p. 44). E completa:

> Entendo por modelos, estruturas conceituais cuja aceitação sociocultural numa comunidade ou numa sociedade é devida à sua capacidade de nortear atividades da comunidade, de forma que essas atividades atendam às necessidades, interesses e aspirações dos membros da comunidade ou da sociedade mais ampla. (BEAN, 2007, p. 44).

O modelo entendido por Bean serve como um norteador do pensamento e das ações. A matemática aplicada é vista por Bean como uma atividade de aplicar modelos e construir modelos, sendo esses fundamentados em premissas e pressupostos. De acordo com Bean (2007, p. 47, texto da figura 2), "a realidade é a interação do ser humano com o mundo em que o ser humano cria modelos para nortear essa interação. Dessa maneira, os modelos e as atividades compõem uma unidade que faz parte da realidade".

Com as transformações que ocorrem no mundo, os modelos e as atividades também se transformam, com o intuito de atender aos interesses da comunidade. Os modelos são construções humanas que auxiliam as atividades no mundo. Bean explica que essas construções são construtos conceituais para auxiliar na organização de respostas para situações problemáticas e estão representadas por meio de uma, ou de uma variedade de linguagens. De acordo com Bean (2007, p. 48, texto da figura 3),

> Utilizamos as linguagens como ferramenta para lidar com situações problemáticas. Em alguns casos, podemos remediar uma situação ao aplicar conceituações ou modelos vigentes para nortear a atividade. Em outros casos, criamos novos modelos. (BEAN, 2007, p. 48).

Bean (2007, p. 48) explana ainda que “a modelagem matemática, no sentido abrangente, é uma atividade, entre uma variedade de possíveis atividades, utilizada para lidar com situações problemáticas empregando a linguagem matemática”.

Partindo dessa base conceitual, o autor questiona as situações matemáticas juntamente com a linguagem matemática e distingue atividade de modelagem de outras que utilizam modelos e linguagem matemática.

> Reconheço que todos os nossos modelos fundamentam-se em premissas, hipóteses e recortes que acentuam e desprezam aspectos daquilo que entendemos por realidade. Entendo que a modelagem envolve a mudança em algumas das premissas, hipóteses e recortes ou, ao abordar um novo problema, a formulação de novas premissas e hipóteses, e efetua recortes de acordo tanto com os fenômenos quanto com os objetivos. (BEAN, 2007, p. 49).

Os modelos são utilizados, analisados, ajustados e criados objetivando a orientação das atividades para se promoverem transformações na realidade. A construção de modelos, para Bean, é uma atividade que independe da origem do problema abordado, da área de conhecimento considerada e da relação entre realidade e matemática.

> Esse processo de formular modelos a partir de premissas, hipóteses e recortes da realidade que sejam promissores no sentido de nortear atividades com o intuito de atender às necessidades, interesses e aspirações é o que entendo por modelagem. (BEAN, 2007, p. 54).

Para exemplificar melhor as premissas e pressupostos, Bean (2009) fala a respeito de um problema, retirado de Barbosa (2006), em que uma professora aproveita uma reportagem de jornal para trabalhar questões socioeconômicas. A matéria jornalística em questão relata um auxílio que o governo disponibilizaria aos agricultores de subsistência na forma de doação de sementes. Foi apresentado o seguinte recorte:

> As sementes de feijão e milho doados pelo Governo começaram a ser distribuídas ontem a tarde. São 37,5 toneladas de sementes- 25 de feijão e 12,5 de milho. Aproximadamente 8000 agricultores de subsistência serão beneficiados. De acordo com o prefeito, cada agricultor receberá 3kg de feijão e 2 kg de milho. (BEAN, 2009, p. 100, tradução do autor).

A professora foi indagando os alunos a respeito dos critérios utilizados pelo governo para a distribuição das sementes. A argumentação dos estudantes partia da hipótese de que as famílias deviam receber quantidades diferentes de sementes pelo fato de possuírem necessidades diferentes.

> A questão dos critérios remete aos pressupostos. Remete a valores. Os alunos rejeitaram o pressuposto (hipótese) do governo de que cada família deve receber a mesma quantidade de sementes; propõem um pressuposto alternativo, segundo o qual famílias com mais membros receberiam mais sementes. Ou seja, os alunos conceituaram a distribuição de sementes diferentemente da conceituação do modelo do governo, que se fundamenta na eqüidade entre as famílias. É a formulação do pressuposto de que famílias maiores devem receber mais sementes que constitui a modelagem nessa atividade. A matematização dessa conceituação foi por proporcionalidade, um conceito de repartição que, além da média aritmética, está presente nos conhecimentos matemáticos de alunos dessa faixa etária. (BEAN, 2009, p. 101).

Os alunos, em um trabalho com a Modelagem, podem lançar mão de outros pressupostos, como não aceitar as hipóteses do governo de que todas as famílias deveriam receber a mesma quantidade de sementes. Podem, por exemplo, levar em consideração a extensão de terras pertencentes às famílias, formulando alternativas que repercutam diretamente na forma de distribuição vigente.

Bean (2009, p. 102) finaliza, dizendo sobre a reportagem apresentada aos alunos: “nada diz a respeito da premissa de que o auxílio por distribuição de sementes era uma medida adequada no contexto das dificuldades que os agricultores de subsistência da região estavam passando”. Quem sabe, se isso fosse mencionado, os alunos não tomariam outros rumos em seus pensamentos e concordariam com o pressuposto do governo na divisão igualitária?

Numa comunhão com as ideias de Bean, vai aqui uma apropriação acerca das premissas e dos pressupostos que surgem em seus estudos de modelagem matemática: as premissas são as teorias ou princípios que uma pessoa, conscientemente ou não, utiliza para fundamentar seu raciocínio; já os pressupostos são afirmações do que está compreendido como realidade, sem a pretensão de se comprovar isso.

4.2 Modelagem Matemática como prática em sala de aula

Neste momento, a partir do estudo realizado em vários trabalhos e experiências de autores que utilizam a Modelagem Matemática como guia, que acreditam que um trabalho com essa tendência seja válido ao professor, para que esse possa auxiliar o aluno na crítica, na pesquisa e na vontade de buscar e aprender cada dia mais, algumas abordagens são feitas.

4.2.1 Ambientes de Aprendizagem

A Modelagem Matemática, para Barbosa (2001), é vista como uma oportunidade para os alunos indagarem alguns procedimentos fixados. Essa indagação é feita por meio da matemática e pode tomar encaminhamentos diversos. “Esta natureza ‘aberta’ que sustentamos para as atividades de Modelagem nos impossibilita de garantir a presença de um modelo matemático propriamente dito na abordagem dos alunos.” (BARBOSA, 2001, p. 5).

Barbosa apresenta a noção de ambiente de aprendizagem trazida por Skovsmose (2000), que se refere a ele como as condições nas quais os alunos são estimulados a desenvolver determinadas atividades. O termo “ambiente” diz respeito a um lugar ou espaço que cerca, envolve. O autor cita o ensino tradicional como sendo um ambiente de aprendizagem, pois, segundo ele, esse ambiente estimula o desenvolvimento de certas atividades. A história da matemática, se utilizada como recurso didático, é vista também como um ambiente, e assim por diante.

E esse ambiente citado por Barbosa é colocado como um convite aos alunos, pois ele acredita que o envolvimento dos alunos ocorre na medida em que seus interesses sejam atendidos mediante o convite feito pelo professor. O aluno deve ser convidado a participar em seu processo de aprendizagem, e não a ser simplesmente um sujeito apático em um ambiente onde só o professor possui o direito à voz.

O convite faz uma referência à indagação e à investigação. “A indagação não se limita à explicitação do problema, mas uma atitude que permeia o processo de resolução”. Se for considerado o ponto de vista sociocrítico, os conhecimentos matemáticos, os da própria modelagem e os reflexivos se integram, oportunizando aos alunos a indagação. Já a investigação “é o caminho pelo qual a indagação se faz” (BARBOSA, 2001, p. 6).

Barbosa discorre sobre seu entendimento a respeito de um trabalho com a Modelagem Matemática, que, conforme mencionado anteriormente, é concebida por ele como um ambiente de aprendizagem. Segundo o autor,

> O entendimento de Modelagem que estamos apresentando privilegia situações com circunstâncias que as sustente. O crescimento de uma planta, o fluxo escolar na escola, a construção de uma quadra de esportes, o custo com propaganda de uma empresa, a criação comercial de perus, o sistema de distribuição de água num prédio, etc. são alguns exemplos possíveis. (BARBOSA, 2001, p. 7).

Em trabalhos com a Modelagem, o aluno, segundo Barbosa, deve ser convidado a se integrar, e pesquisar, inserido ao ambiente de aprendizagem que a Modelagem Matemática proporciona.

4.2.2 Etapas de Burak para Modelagem Matemática em sala de aula

Burak (2004) compreende a Modelagem Matemática como uma metodologia alternativa para o Ensino de Matemática e acredita que o trabalho com essa metodologia se inicia a partir do interesse do grupo ou dos grupos envolvidos no processo. O autor destaca alguns aspectos que considera importantes para um trabalho acerca dessa tendência:

1°) Maior interesse do(s) grupo(s), onde lhes são oferecidas oportunidades de escolha de temas que julgarem interessantes e discussão dos mesmos, podendo compartilhar ideias com os colegas e o professor.

2°) Interação maior no processo de ensino e aprendizagem; aos grupos de alunos é oportunizado um trabalho com temas de que gostam e que possuem significados para eles, tornado-os corresponsáveis pela aprendizagem.

3°) Demonstração de uma forma diferenciada de conceber a educação e, em consequência, a adoção de uma nova postura do professor, diferente da postura de transmissor de conteúdos. O fato de compartilhar o processo de ensino com os grupos acarreta uma mudança de postura do professor, favorecendo, assim, o estabelecimento de relações mais afetivas entre ele e os alunos envolvidos no processo.

Em um trabalho que envolva a Modelagem Matemática na sala de aula, Burak desenvolve cinco etapas:

a) escolha do tema;

b) pesquisa exploratória;

c) levantamento dos problemas;

d) resolução do(s) problema(s) e o desenvolvimento da matemática relacionada ao tema;

e) análise crítica da(s) solução(ões).

A escolha do tema, na concepção de Burak, deve vir dos interesses dos grupos envolvidos no processo, partindo de conhecimentos que cada aluno tem sobre o assunto a ser abordado, tornando, assim, o ensino da matemática dinâmico e mais significativo para os estudantes e os grupos. O professor pode apresentar aos discentes alguns temas e incentivá-los na busca de outros que sejam de seus interesses.

Os conteúdos a serem trabalhados são determinados por problemas que são levantados por meio de uma pesquisa exploratória, ou pesquisa de campo. Ao contrário do currículo linear, os problemas levantados pelos grupos vão determinar os conteúdos a serem trabalhados. Isso gera muitas vezes insegurança e preocupação entre os professores, que recebem currículos ordenados com os conteúdos estabelecidos de acordo com as séries. Esse é um grande desafio a ser superado, como afirma o autor:

> A Modelagem enseja, ainda de forma natural e indissociável, o ensino e a pesquisa, pois ao trabalhar com temas diversos, de livre escolha do grupo ou dos grupos, favorece a ação investigativa como forma de conhecer, compreender e atuar naquela realidade. Não se pode intervir, de forma adequada, numa realidade que não se conhece. Assim, ao trabalhar um tema, procura-se conhecer as várias dimensões ou aspectos envolvidos que compõem essa realidade. Por exemplo, ao se trabalhar com o tema a "indústria cerâmica", procura-se conhecer as várias dimensões que constituem essa realidade, sejam elas políticas, sociais, econômicas, estruturais, dentre outras. (BURAK, 2004, p. 5).

As dimensões acima citadas são levantadas na pesquisa de campo. A experiência de campo vai ajudar na terceira etapa, o levantamento dos problemas, ajudando a formar um comportamento mais atento "[...] tornando os alunos capazes de realizar uma leitura mais atenta da realidade, atributos importantes na formação de um pesquisador" (BURAK, 2004, p. 5). E ainda:

> Na Modelagem Matemática os problemas apresentam características distintas dos problemas apresentados na maioria dos livros textos, pois são conseqüência da coleta dos dados, de natureza qualitativa ou quantitativa, provenientes da pesquisa exploratória:
> **.** São elaborados a partir dos dados coletados na pesquisa de campo;
> **.** Possuem, geralmente caráter genérico;
> **.** Estimulam a busca e a organização dos dados;
> **.** Favorecem à compreensão de uma determinada situação (BURAK, 2004, p. 5).

Citado por Burak como exemplo, um problema foi levantado pelo grupo de um curso de Modelagem, a tarefa de calcular o custo de transporte do barro até o local onde se fabricavam telhas e tijolos. Essa situação gerou discussão e vários aspectos foram considerados, dentre eles:

> **.** Qual a distância do local onde se encontra o barro até onde são fabricadas as telhas e tijolos.
> **.** Qual(is) o(s) meio(s) de transporte possíveis de serem usados?
> Essa questão pode ensejar o levantamento de várias hipóteses, tais como: caminhão, carroça, vagonete, sistema mecânico e outros. A análise de cada uma das hipóteses levantadas pode ensejar outras hipóteses. Tomemos, a

> título de exemplo, a hipótese de que o transporte seja feito por caminhão. Naturalmente surgem novas questões. Qual a capacidade do caminhão? Qual a necessidade da indústria? Qual o combustível utilizado? Qual o consumo de combustível do caminhão: Quando carregado? Quando vazio? Qual o tempo gasto na locomoção? No carregamento? (BURAK, 2004, p. 6).

Na quarta etapa do processo, os problemas elaborados que determinarão os conteúdos a serem trabalhados. “Ainda, no contexto do tema escolhido, podem ser desenvolvidos vários conteúdos matemáticos provenientes dos dados coletados e a partir das hipóteses levantadas pelo professor ou pelos grupos.” (BURAK, 2004, p.6).

Nessa etapa, segundo Burak, é oportunizada a construção dos modelos matemáticos, como uma representação, podendo valer-se de fórmulas, tabelas de preços ou mesmo equações já conhecidas. Os modelos construídos pelos alunos podem ser modelos de funções, dependendo da situação-problema que eles estiverem investigando.

A quinta e última etapa, a análise crítica das soluções, é marcada pela criticidade, contribuindo para a formação de cidadãos participativos. Dessa forma,

> A análise crítica das soluções é a etapa marcada pela criticidade, não apenas em relação à matemática, mas em outros aspectos, como a viabilidade e a adequabilidade das soluções apresentadas, que muitas vezes são lógica e matematicamente coerentes, porém inviáveis para a situação em estudo. É uma etapa que favorece a reflexão acerca dos resultados obtidos no processo e como estes podem ensejar a melhoria das decisões e ações. (KLÜBER; BURAK, 2007, p. 4).

Um trabalho de Modelagem Matemática que perpasse por essas cinco etapas, para Burak, favorece a interação com o meio ambiente, pois o ponto de partida é o cotidiano do aluno, e vem contribuir para um melhor desenvolvimento e crescimento dos estudantes, que, ao percorrerem esse caminho, podem se tornar cidadãos mais críticos e capazes de questionar e buscar as soluções para a situação-problema em estudo.

Essas cinco etapas utilizadas por Burak na realização de trabalhos envolvendo a Modelagem Matemática, juntamente com suas concepções e com fontes acerca da definição e propriedades da função afim, serão o instrumental no planejamento da pesquisa exploratória, que será esplanada no capítulo seguinte, com o intuito de se alcançar o objetivo de estudo, que é o de apontar os vários mecanismos para se alcançar a prática de Modelagem, direcionando para seus principais passos de realização.

4.3 Algumas práticas de Modelagem Matemática em sala de aula

Disserta-se acerca de alguns trabalhos que foram realizados, com temáticas diferenciadas, mas considerando a Modelagem como uma Metodologia na tentativa de mudar o ensino de matemática, que muitas vezes se torna monótono e desinteressante para os estudantes.

4.3.1 Questões ambientais

Santos e Bisognin (2007) dissertam acerca de um trabalho que desenvolveram em uma turma de 8ª série do Ensino Fundamental utilizando a Modelagem Matemática como estratégia de ensino. O tema do trabalho foi "*Poluição do ar, do solo e das águas"*, que possibilitou discussões de conteúdos, como o de funções, alguns conceitos de estatística, e revelou uma maior motivação e envolvimento dos alunos.

> De acordo com Blum, citado por Barbosa (2003b, p.67), as principais razões para a inclusão da Modelagem na sala de aula são:
> - Motivação: os alunos sentir-se-iam mais estimulados para o estudo de matemática, já que vislumbrariam a aplicabilidade do que estudam na escola;
> - Facilitação da aprendizagem: os alunos teriam mais facilidade em compreender as idéias matemáticas, já que poderiam conectá-las a outros assuntos;
> - Preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas: os alunos teriam a oportunidade de desenvolver a capacidade de aplicar matemática em diversas situações, o que é desejável para moverem-se no dia-a-dia e no mundo do trabalho;
> - Desenvolvimento de habilidades gerais de exploração: os alunos desenvolveriam habilidades gerais de investigação;
> - Compreensão do papel sóciocultural da matemática: os alunos analisariam como a matemática é usada nas práticas sociais. (SANTOS; BISOGNIN, 2007, p. 102).

Ao usar a Modelagem Matemática, o professor tem a oportunidade de transformar sua prática através da motivação dos alunos, do interesse, da participação e da vontade de aprenderem e crescerem cada vez mais, juntamente com a possibilidade de refletirem e criticarem acerca das atividades.

Santos e Bisognin desenvolveram o trabalho utilizando como procedimentos metodológicos as cinco etapas sugeridas por Burak, comentadas no item anterior: escolha do tema, pesquisa exploratória, levantamento dos problemas, resolução dos problemas e análise crítica das soluções.

Para a apresentação do tema aos alunos, a professora levou dois filmes[3] ligados ao meio ambiente e um texto[4] relacionado ao assunto. Após leitura e discussões, alguns alunos questionaram, querendo entender o porquê de o consumo de energia elétrica contribuir para a poluição do ar. Após muita conversa, iniciou-se um questionamento sobre como é calculada a conta de energia elétrica em suas residências.

Levaram as contas de suas casas para a sala de aula e exploraram os conceitos presentes nas mesmas. Os alunos indagaram sobre a fórmula que era utilizada para o cálculo das contas. A professora apresentou uma conta-exemplo e, ao compará-la com as contas que tinham levado, os alunos verificaram que o valor que varia é a quantidade do consumo.

> Pela observação da conta-exemplo, perceberam que o seu total está relacionado ao consumo, que varia. Esse total representa a quantidade de kwh consumidos, multiplicados pela tarifa e tendo adicionados os encargos e o imposto ICMS, sendo representado pelos alunos da seguinte forma:
> Total da conta (T) = Valor que varia (Quantidade). Tarifa + encargos + ICMS
> Fazendo-se a relação que varia = x, tem-se:
> $T = x$. Tarifa + encargos + ICMS (SANTOS; BISOGNIN 2007, p. 107)

---

[3] "Ecologia II- Problemas do Meio Ambiente: *"O Ar"* e *"Ilha das flores".* O primeiro apresenta as origens de graves problemas ambientais e mostra o que pode acontecer no futuro, caso persistam as atuais condições de poluição do meio ambiente. O outro relata a questão do lixo e relaciona esse tema ambiental a um problema social (SANTOS; BISOGNIN, 2007, p. 106).

[4] *"O que eu posso fazer"*, do livro Guia para o Planeta Terra, de autoria de Art Sussman, que trata da poluição mundial e dos seus impactos ambientais. O texto contém uma série de dados sobre o crescimento exponencial da população mundial e aponta para a questão da produção e do consumo da energia elétrica como um dos elementos que causam impacto na poluição do meio ambiente. O texto afirma que, em certos países, os cidadãos tendem a causar um impacto maior sobre o meio ambiente devido ao alto consumo de energia elétrica (SANTOS; BISOGNIN, 2007, p. 106).

Pode-se perceber a análise da conta de energia elétrica para deduzir um modelo para a conta. Um dos alunos disse que o cálculo do ICMS é 30% do valor total e todos os alunos chegaram na seguinte relação:

> Total (*T*) = Tarifa. *X* + encargos emergenciais + 30% do valor total (*T*)
> De acordo com a descrição dos conceitos faturados da tabela da conta de energia elétrica do mês de julho de 2005, o cálculo apresentou-se da seguinte forma:
> Total (*T*) = 0,31043. *X* + 1,40 + 0,30 *T*
> *T* – 0,30 *T* = 0,31043. *X* + 1,40
> $T = \frac{0,31043}{0,7} + \frac{1,40}{0,7}$ Ou seja *T* = 0,4435. *X* + 2
> (SANTOS; BISOGNIN 2007, p. 108).

Algumas questões poderiam ser levantadas e discutidas nesse trabalho, como, por exemplo: por que a tarifa é 0,31, e não 0,20 ou 0,40? Quem disse que a conta deve ter base principal em kwh?

Após toda uma análise acerca do consumo de energia elétrica, os alunos questionaram o quanto cada família contribui para a poluição do meio ambiente. A professora orientou os alunos a pesquisarem a relação entre a quantidade de *kwh* consumidos e a quantidade de gás carbônico emitido, assim como a quantidade de árvores que seriam necessárias para diminuir a emissão de poluentes. Além de conteúdos matemáticos, a professora pôde trabalhar a poluição ambiental em toda a sua profundidade.

> Durante a realização desse trabalho, os jornais locais publicaram a reportagem sobre o ajuste na conta de luz das residências, devido à nova taxa de iluminação pública que estava em tramitação na Câmara de Vereadores da cidade. A professora, então, questionou: se aprovada a lei sobre o aumento do valor da taxa de iluminação pública, pode-se prever em quanto aumentará a nossa conta de luz? Além disso, é possível prever o quanto a iluminação pública pode contribuir para a emissão de gases na atmosfera? (SANTOS; BISOGNIN 2007, p. 108).

Nesse trabalho, as autoras poderiam questionar aos alunos o porquê de se cobrar essa nova taxa, como decidiram esse valor, ou seja, ir mais além, explorando novas premissas e pressupostos para a situação em questão. A realidade deve ser aceita como ela é e um questionamento do porquê desse aumento deveria ser levantado.

A reportagem do jornal foi apresentada aos alunos e, a partir dos dados e do modelo que haviam construído, eles puderam fazer o cálculo de quanto pagariam pela luz, caso fosse aprovada a nova lei. Puderam calcular também a emissão de gás carbônico com essa nova iluminação. “Com essas atividades, foi possível explorar, além do conceito de função, noções de estatística, como construção e análise de gráficos e tabelas.” (SANTOS; BISOGNIN, 2007, p. 109).

Santos e Bisognin ainda comentam que muitas outras atividades puderam ser realizadas com a temática da poluição ambiental, como:

> Qualidade do ar - poluentes: suas fontes e efeitos; Água: o mais precioso bem; Resíduos industriais e lixo, tendo a oportunidade de trabalhar porcentagens, gráficos de barras, de colunas e de setores (2007, p. 109).

Após todo esse trabalho, Santos e Bisognin concluem:

> Trabalhar com a Modelagem Matemática, em uma turma regular do Ensino Fundamental, foi um grande desafio, pois é necessário vencer obstáculos, entre eles: a desmotivação dos alunos para aprender matemática; a estrutura formal da escola que cria barreiras e inibe iniciativas dos professores; a rigidez do programa a cumprir; a carga horária semanal que os professores do Ensino Fundamental devem cumprir; o tempo necessário para o estudo do tema; a ausência de bibliotecas e de laboratórios de computação junto às escolas. (2007, p. 111).

Mesmo diante dos obstáculos, acima citados, as professoras insistem que um trabalho utilizando a Modelagem Matemática é muito gratificante, pois notaram uma maior motivação dos alunos e uma melhora significativa nas avaliações posteriores.

Também a respeito de questões ambientais, Ferreira e Wodewotzki (2007) relatam uma ação desenvolvida pelas professoras com os temas Água, Lixo, Energia Elétrica e Desmatamento, com a confecção de alguns modelos, como previsão do crescimento populacional e da produção de lixo do município de Rio Claro.

As atividades realizadas por Ferreira e Wodewotzki envolveram 10 alunos voluntários de uma 7ª série de uma escola estadual de Rio Claro, onde foi aplicado um questionário referente à educação ambiental, para verificar o comportamento deles frente ao meio ambiente, e outro questionário de identificação do aluno.

Durante o desenvolvimento do trabalho, os alunos escolheram os temas: Lixo, Água, Energia Elétrica e Desmatamento.

“A partir da escolha dos temas, houve uma grande dificuldade inicial na proposição de problemas, pois os alunos, em geral, estão condicionados a receber tarefas prontas e não a pensar, questionar a realidade.” (FERREIRA; WODEWOTZKI, 2007, p. 119-120). Para a construção dos modelos, os alunos fizeram uso da planilha Excel e de vários conteúdos matemáticos já vistos em sala de aula, dentre eles porcentagem, regra de três, unidades de medidas, áreas, volumes, ferramentas estatísticas. Mas, segundo as autoras, apareceram muitas dificuldades na utilização de conteúdos matemáticos em uma situação real.

Iniciado o trabalho, primeiramente construíram um modelo de previsão do crescimento da população, com dados obtidos do IBGE, e puderam comparar o crescimento da população Urbana e Rural de Rio Claro. Após alguns encontros e diálogos entre pesquisadora e alunos, conseguiram obter o modelo $P_n = P_o . (1+i)n$, em que P_o é a população inicial, P_n é a população no ano n, e i é a taxa de crescimento anual. Os alunos construíram esse modelo com o objetivo de prever o crescimento da população de Rio Claro, baseando-se em dados fornecidos pelo IBGE.

Esse modelo possibilitou aos alunos o cálculo das taxas de crescimento da população. Para auxiliar nos cálculos, a matemática surgiu através de potências, radiciação e produtos notáveis. Para fazerem a previsão do crescimento da população, utilizaram o Excel, e, para isso, fórmulas dessa ferramenta. A parte algébrica gerou muitas dificuldades para os alunos e foram necessárias várias aulas para o desenvolvimento desse modelo.

Sendo assim, “essa atividade permitiu o conhecimento da planilha Excel. Também entenderam a necessidade de fazer simplificações para obter uma solução e refletir sobre ela, verificando a ocorrência de incoerências e enganos” (FERREIRA; WODEWOTZKI, 2007, p. 123-124).

A Modelagem Matemática é também desenvolvida via tecnologias de informação e comunicação. Alguns exemplos de trabalhos desenvolvidos com essa temática serão demonstrados posteriormente.

4.3.2 Tecnologias de informação e da comunicação

A inserção dos computadores no dia a dia de todas as pessoas tornou o mundo informatizado. “Pode-se dizer que a familiaridade com esse tipo de recurso adquire hoje importância comparada às habilidades de leitura, escrita e contagem.” (FRANCHI, 2007, p. 182-183). E mais:

> Para a criação de ambientes que se beneficiem das características dessa nova mídia, o professor é levado a refletir sobre sua prática pedagógica. Não se trata de desenvolver seqüências de atividades no estilo da chamada instrução programada, em que o computador assume o papel do professor transmissor de conhecimento, continuando o aluno na posição de receptor. Se o que se busca é colocar o aluno interagindo com o conhecimento, o uso do computador adquire outra dimensão. (FRANCHI, 2007, p. 183).

O aluno que participa e interage com as atividades e com o software leva o professor a assumir um papel de intermediador, aquele que questiona e provoca reflexões. A informática é vista como auxiliadora em alguns trabalhos onde a Modelagem Matemática está presente.

> O trabalho conjunto da Informática com a Modelagem trouxe novas possibilidades para a Modelagem. Muitas das dificuldades do processo de Modelagem ficaram superadas pela facilidade de coleta e tratamento dos dados e pela manipulação das representações (matrizes, planilhas, gráficos ou equações) através da utilização de softwares e da Internet. O modelo pode ser construído com mais liberdade, sem o receio de que o tratamento matemático possa ser demasiadamente complicado, ou difícil de ser abordado naquela etapa de escolaridade. A utilização da informática pode também facilitar a comunicação entre as pessoas envolvidas no processo de construção do modelo, possibilitando um constante diálogo em momentos não presenciais. (FRANCHI, 2007, p. 185-186).

O computador será objeto de consulta dos alunos, quando o julgarem necessário nas atividades que serão desenvolvidas neste trabalho.

4.3.3 Informática e Modelagem Matemática

Franchi (2007) procura apresentar a Modelagem Matemática e a Informática como tendências para a Educação Matemática, entendendo que sua utilização pode facilitar e contribuir para o desenvolvimento de competências para a atuação crítica na sociedade.

Franchi (2007, p.181) não nega a importância que um currículo tem:

> [...] como instrumento para o desenvolvimento de processos de conservação ou transformação de valores sociais através da apropriação pelos indivíduos do conhecimento historicamente acumulado e da utilização desse conhecimento como forma de ação crítica na sociedade. (2007, p. 181).

A autora afirma que são muitos os argumentos que defendem a inclusão da Modelagem nos currículos de matemática. Um argumento é que “o processo de construção de modelos pode ajudar a desenvolver habilidades, tais como a observação, a exploração, a criatividade, a resolução de problemas” (FRANCHI, 2007, p.181).

Franchi acredita ainda que a utilização da modelagem nas aulas repercute diretamente na contribuição para uma aprendizagem significativa da matemática, além de motivar o aluno para o assunto a ser abordado, onde ele precisa conhecer o fenômeno que vai ser estudado e também terá a oportunidade de perceber a importância dessa ciência. Para que o aluno colete os dados, o auxílio da informática pode ser interessante e ajudar em alguns pontos.

O computador já faz parte do dia a dia de milhares de pessoas, o mundo se encontra informatizado, e a familiaridade com esse recurso é de grande importância tanto para educadores quanto para educandos, aumentando-se assim, as possibilidades de observação e experimentação.

Franchi exemplifica um trabalho realizado por ela, cujo tema foi *"Dengue"*, com os alunos do curso de Engenharia Química da UNIMEP (Universidade Metodista de Piracicaba). Segundo Franchi, muitas são as possibilidades de trabalhos relacionados ao tema; por exemplo, o crescimento da população do mosquito, o controle biológico da larva ou o controle dos criadouros. Em relação ao controle de criadouros, pode-se estudar "conservação de espelhos d'água, piscinas ou tanques" (FRANCHI, 2007, p. 187).

A função que foi encontrada pelos alunos e que está melhor detalhada em Franchi (2007) é um construto conceitual para a previsão da quantidade de cloro.

> A atividade descrita se caracteriza como um ambiente de aprendizagem com Modelagem Matemática e Informática na medida em que os alunos são convidados a investigar e indagar sobre uma situação com referência na realidade, por meio da Matemática, usando a Informática para a investigação. Em atividades desse tipo, os recursos utilizados, as diferentes abordagens adotadas, as análises e as comparações feitas propiciam um constante "ir e vir" entre a Modelagem e a Informática que enriquece os processos de construção do conhecimento matemático, contribuindo para o desenvolvimento das potencialidades dos envolvidos. (FRANCHI, 2007, p. 189).

4.3.4 A internet e a Modelagem Matemática

Em ambientes de aprendizagem através da Modelagem e da Informática, os professores e os alunos participam do processo, e a organização das atividades vai depender do tipo de atividade desenvolvida.

Borba e Malheiros (2007) reproduzem alguns exemplos de atividades desenvolvidas com estudantes de graduação e com professores de Matemática em cenários presenciais e à distância.

> O pano de fundo de parte dessa discussão são os trabalhos desenvolvidos na disciplina "Matemática Aplicada", ministrada no curso de Ciências Biológicas da Unesp de Rio Claro, com a utilização das TICs. Essa disciplina tem o mesmo docente, o primeiro autor desse capítulo, para a maioria de suas turmas, desde 1993. (BORBA; MALHEIROS, 2007, p. 196).

Borba, diante de suas dificuldades frente a um trabalho com a utilização das tecnologias de informação, tem a ideia de criar a CVM[5], “ambiente virtual de apoio ao professor que trabalha com esse enfoque e para intercâmbio e ajuda mútua entre professores e pesquisadores que utilizam a Modelagem em suas salas de aula”.

A Internet é usada por um grande número de pessoas e pode ser utilizada como um meio para a realização de projetos, sendo, nesse caso, “fonte de informação ou colaboradora da análise” (BORBA; MALHEIROS, 2007, p. 199).

O GPIMEM[6] está envolvido em vários projetos, entre eles o TIDIA- Ae[7], com o objetivo de desenvolver ferramentas para a composição de um ambiente de aprendizagem eletrônica. O CVM foi implementado em um ambiente TIDIA- Ae.

> Esse centro é um ambiente para que questões relacionadas à Modelagem sejam investigadas, havendo troca de informações e experiências a partir da participação coletiva de professores e pesquisadores. Ele pode também ser considerado um “lócus virtual” para intercâmbio e interferência no cotidiano da sala de aula, tendo como base a Internet para desenvolvimento e execução de projetos de Modelagem. (BORBA; MALHEIROS, 2007, p. 202).

Todos os que se integram ao CVM buscam a aprendizagem e trocas de experiências em um espaço virtual e também o utilizam como um espaço para pesquisas. “Com o CVM, pretende-se, entre outras coisas, compreender algumas das possibilidades de a Internet transformar práticas pedagógicas ligadas à Modelagem.” (BORBA; MALHEIROS, 2007, p. 203).

O curso *“Tendências em Educação Matemática-ênfase em Modelagem Matemática”* foi ministrado a distância com uma carga horária de 39 horas, e as atividades propostas eram leituras prévias de livros, artigos e teses sobre o tema. Dois alunos eram escolhidos para mediar as discussões junto com o docente responsável. Utilizavam o Chat, comunicador instantâneo, hipertexto e fórum para preparar questões que fomentariam as discussões.

---

[5] Centro Virtual de Modelagem, um lócus virtual para apoio e pesquisa entre educadores que possuem interesse em Modelagem.
[6] Grupo de Pesquisa em Informática, em outras Mídias e em Educação Matemática.
[7] Tecnologia da Informação no Desenvolvimento da Internet Avançada- Aprendizado eletrônico.

> Além dos encontros síncronos, os alunos deveriam, logo no início do curso, em duplas, escolher um tema para um projeto de Modelagem a ser desenvolvido a distância, em horário extra às sessões de Chat, sendo que parte de algumas sessões de bate-papo foram dedicadas à discussão dos projetos. Em particular, as duas últimas aulas do curso foram destinadas para a apresentação e discussão dos projetos pelas duplas. Cada dupla possuía uma área no ambiente para o desenvolvimento de seus projetos e pôde utilizar as ferramentas disponíveis no ambiente para a comunicação entre si (componentes da dupla) e com os professores do curso (autores deste capítulo). (BORBA; MALHEIROS, 2007, p. 204).

Alguns temas, como telefonia fixa, lixo, futebol, alimentação e nutrição, hanseníase e semáforo inteligente, foram desenvolvidos por alunos desse curso, tendo a última versão disponibilizada para os demais colegas.

A partir desse curso, a autora Malheiros investiga como se dá a elaboração de projetos de Modelagem totalmente a distância por duplas de professores de matemática que, na maioria das vezes, nem se conhece presencialmente. Malheiros investigou a escolha do tema que partia quase sempre de interesses próprios sobre um determinado assunto. Outro aspecto que ela analisou diz respeito ao papel das TICs no desenvolvimento dos trabalhos, onde pôde perceber algumas duplas utilizando bastante as tecnologias, além de outros recursos como o MSN[8], e-mails e até mesmo o telefone em alguns casos, além do *Word, Excel* e de câmeras digitais.

A Internet está se espalhando rapidamente, e, em um futuro próximo, os alunos terão acesso a ela como possuem acesso a uma calculadora hoje. Os problemas abordados pelos livros didáticos não serão mais problemas, uma vez que um site de busca mostrará sua resolução. “Temos que pensar que o que será problema de fato para os alunos pode depender da Internet. Esse é um novo elo de ligação entre Modelagem e Internet”. (BORBA; MALHEIROS, 2007, p. 208).

Questões como essas podem gerar transformações em uma “sala de aula de Matemática”, e a Modelagem juntamente com a Internet podem se tornar importantes para a aprendizagem. “Estaremos vendo como a Internet e as pedagogias baseadas em projetos ajudam a modificar a maneira como as “disciplinas” dominam a organização do currículo escolar”. (BORBA; MALHEIROS, 2007, p. 208).

---

[8] Serviço de mensagem instantânea para Web.

5 O COMÉRCIO DE PIZZAS: TRABALHANDO A FUNÇÃO AFIM COM DIRECIONAMENTOS DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Conforme delineado no capítulo Importância de Funções para a Matemática, o livro didático tem ênfase na definição de função afim, principalmente através de relações entre conjuntos de números reais, e apresenta as leis de formação e a construção de seus gráficos partindo de uma tabela de valores.

Cabe ao professor, a partir dos conteúdos programáticos, com apoio no livro didático e outras fontes, desenvolver atividades que se aproximem das experiências dos alunos, para que eles possam usar esses conteúdos matemáticos de forma contextualizada, com o intuito de atribuírem significados aos conteúdos e conceitos matemáticos.

A busca por um referencial teórico que auxilie na quebra dessa forma tradicional de tratar as funções mostra que há algumas metodologias alternativas para o educador que podem direcionar suas aulas por um caminho que desperte nos alunos o prazer, a vontade e a conexão da matemática com o seu cotidiano. Uma metodologia alternativa é a Modelagem Matemática, pois o professor, ao trabalhar com essa tendência, possibilita aos alunos a pesquisa e a busca de matemática em situações reais, tornando-os sujeitos participantes na construção de conceitos matemáticos. Como coloca Biembengut (1999, p. 36), “a modelagem matemática no ensino pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ainda desconhece ao mesmo tempo que aprende a arte de modelar, matematicamente”.

O ensino de funções afins com o auxílio da Modelagem Matemática, conforme mencionado no capítulo Revisão de Literatura, vem buscar uma ruptura com o currículo linear, pois a Modelagem proporciona aos estudantes a participação na construção de seus conhecimentos. As situações-problema levantadas pelos alunos, ou mesmo sugerida pelos professores, estão associadas à realidade desses alunos, para que eles possam investigar e buscar soluções para suas inquietações e anseios.

5.1 Visita às pizzarias: uma busca por situações matemáticas

Na busca de artigos e trabalhos com a temática da Modelagem Matemática, algumas ideias apareceram para um trabalho experimental com alguns alunos de Ensino Médio.

No artigo "*Modeling with Functions*" (1996), os autores[9] apresentam exemplos de problemas de funções que foram trabalhados por seus alunos utilizando a Modelagem Matemática como fio condutor. Para o trabalho com a função afim, colocam a seguinte situação:

> Considere os preços de pizza oferecidos pela Gumpy's Pizza e Pizza Shack, demonstrado na tabela abaixo. Como essas duas companhias põem preços nos vários tamanhos de pizza? Como essas duas empresas de pizza determinam os seus preços? Estão usando o mesmo modelo?

Gumpy's Pizza		*Pizza Shack Pizza*	
Diâmetro	Custo	Diâmetro	Custo
20 cm	$ 6,50	25 cm	$ 7,00
30 cm	$ 9,00	35 cm	$ 10,75

(COONEY, T. et al. 1996, p. 222, tradução nossa).

Partindo dessa situação-problema, o Sr. Kubiak, professor da turma em questão, inicia toda uma discussão e, aos poucos, os alunos vão tentando resolvê-la, para encontrar um modelo que expresse o preço cobrado pela pizza de acordo com seu diâmetro.

A ideia de trabalhar na escola questões encontradas em uma pizzaria parecia bem pertinente. Surge, então, a oportunidade de buscar uma determinada pizzaria, observar o cardápio, perceber que, para alguns sabores de pizzas, a relação de preços fornecia valores proporcionais aos seus diâmetros. A partir daí, levar os alunos para esse ambiente para terem a oportunidade de pesquisar e perceber essa linearidade, possivelmente, auxiliaria o trabalho com as funções.

Como muitos adolescentes possuem o hábito de ir a pizzarias com os pais ou amigos, a oportunidade de se buscar uma ligação de pizzas com a matemática pode despertar o interesse e a curiosidade; eles poderão pesquisar o que há de

[9] Thomas J. Cooney, Stephen I. Brown, John A. Dossey, Georg Schrage, Erich Ch. Wittmann.

matemática por trás dos valores, sabores, tamanhos, molhos e todas as variáveis possíveis dentro do que é oferecido por esses restaurantes.

5.2 Modelagem Matemática e as pizzarias

Um trabalho utilizando a Modelagem Matemática como uma estratégia de ensino exige esforço e dedicação dos professores.

> Para se utilizar dessa estratégia, é necessário saber, a *priori*, o tempo disponível dos alunos para trabalho extra-classe, o número de horas-aula do curso em questão e o conhecimento matemático comum a todos os participantes. Definidas essas condições, o professor pode optar por apresentar e propor o estudo dos modelos matemáticos clássicos e, posteriormente, realizar a modelagem matemática, ou optar por iniciar com a modelagem, intercalando, adequadamente, a exposição de modelos. (BIEMBENGUT, 1999, p. 37).

Antes de iniciar um trabalho com a Modelagem Matemática, o professor deve atuar no sentido de estimular os alunos a participarem do processo.

"Essa demonstração pode ser iniciada com a definição de modelagem matemática, mostrando como esse método pode valer para o aprendizado de conteúdos matemáticos. Tornar os alunos cientes do processo é o primeiro passo." (BIEMBENGUT, 1999, p. 37). A sugestão de olhar qual matemática aparece nas situações de pizzarias pode despertar, ou mesmo aguçar, a curiosidade dos discentes; a pizza é uma receita muito saborosa e aceita por grande parcela da população.

A pesquisa exploratória surge da sugestão da professora acerca da ida a uma pizzaria, para que os alunos possam buscar situações matemáticas nesse ambiente, e, a partir dos dados coletados por eles, vários conteúdos poderão ser trabalhados, dentre eles a função afim, visto que os selecionados cursam a primeira série do Ensino Médio, já tiveram contato com as funções afins no 9° ano e também no início do primeiro.

A elaboração e o embasamento da pesquisa são sustentados pelas cinco etapas mencionadas por Burak e que foram detalhadas no capítulo Revisão de Literatura: escolha do tema, pesquisa exploratória; levantamento dos problemas;

resolução dos problemas e o desenvolvimento da matemática relacionada ao tema; análise crítica das soluções. No desenrolar das atividades, as premissas e os pressupostos serão discutidos, dentro da concepção de Bean e conforme mencionadas nos capítulos Algumas concepções de Modelo e Modelagem Matemática e Revisão de Literatura.

5.2.1 Escolha do tema

A escolha de um tema para ser desenvolvido em Modelagem Matemática, segundo Burak (2010, p.19), "parte do interesse do grupo ou dos grupos de estudantes envolvidos". O professor deve procurar conhecer o entorno da escola, ou mesmo o bairro, para que possa sugerir temas, ou deixar que os estudantes escolham temas pertinentes aos seus interesses.

Baseando-se em Barbosa (2001), podem-se classificar os casos de modelagem em três formas distintas:

> 1) Caso 1. O professor apresenta a descrição de uma situação-problema, com as informações necessárias à sua resolução e o problema formulado, cabendo aos alunos o processo de resolução ...
>
> 2) Caso 2. O professor traz para a sala um problema de outra área da realidade, cabendo aos alunos a coleta das informações necessárias à sua resolução ...
>
> 3) Caso 3. A partir de temas não-matemáticos, os alunos formulam e resolvem problemas. Eles também são responsáveis pela coleta de informações e simplificação das situações-problema ... (BARBOSA, 2001, p. 8-9).

Em todos esses casos, o professor deve dialogar com os alunos para auxiliá-los no processo.

Ao propor o tema *"O Comércio de pizzas"*, o professor está direcionando seu trabalho para o caso 2, em que o tema é sugerido por ele, e os alunos vão a campo em busca de dados qualitativos e quantitativos que respondam a algumas indagações acerca de preços, uso de proporcionalidade, possíveis conclusões a respeito das funções afins e outros conteúdos matemáticos que possam surgir.

A tabela abaixo exemplifica melhor a participação dos alunos e professores nos casos de Modelagem.

	Caso 1	*Caso 2*	*Caso 3*
Elaboração da situação--problema	professor	professor	professor/aluno
Simplificação	professor	professor/aluno	professor/aluno
Dados qualitativos e quatitativos	professor	professor/aluno	professor/aluno
Resolução	professor/aluno	professor/aluno	professor/aluno

Tabela 1: Participação de alunos e professores em trabalhos com a modelagem.
Fonte: (BARBOSA, 2001, p. 9).

Os casos mencionados por Barbosa são regiões de possibilidades de trabalhos com a temática da Modelagem Matemática, ele complementa que “os professores e os alunos podem se envolver com diferentes maneiras de implementar a Modelagem no currículo” (BARBOSA, 2001, p. 9).

Os educadores se veem cercados, em grande número de escolas, por conteúdos que devem ser trabalhados e de forma linear. Dessa maneira, fica inviável pensar em trabalhos com o auxílio da Modelagem, pois nessa, os conteúdos serão levantados de acordo com as necessidades que as situações-problema apresentarão.

A busca por um caminho novo que contrarie os currículos propostos assusta, mas Burak (2010, p. 20) explicita que “quando esse novo se manifesta é preciso ser capaz, ter coragem, e rever nossas teorias e ideias de modo a possibilitar sua entrada”. Na concepção de Burak, os professores precisam, sair da condição de “seguidores” para se tornarem “buscadores” e, ao adotarem uma metodologia mais aberta, essa busca começa a acontecer.

5.2.2 Pesquisa exploratória

A pesquisa exploratória, segundo Burak, acontece de forma natural, pelo desejo dos alunos em conhecer melhor o assunto. No caso, essa pesquisa acontecerá através de uma visita in loco na pizzaria conhecida pelos alunos envolvidos no processo.

> Conhecer mais sobre o tema, buscar informações no local onde se localiza o interesse do grupo de pessoas envolvidas, além de se constituir em uma das premissas para o trabalho nessa visão de Modelagem é uma etapa importante na formação de um estudante mais crítico. (BURAK, 2010, p. 21).

Antes da visita às pizzarias, torna-se necessária a definição de algumas questões que nortearão os alunos para a coleta de dados e informações. A conversa informal e o debate com os alunos auxiliarão na elaboração das questões que serão levadas aos locais de pesquisa, no caso, as pizzarias.

Biembengut observa que o tema escolhido, muitas vezes, é abrangente e requer um planejamento.

> Assim, o professor propõe que cada grupo:
> . levante questões sobre o tema;
> . faça uma pesquisa (levantamento de dados) a fim de se familiarizar com o tema escolhido;
> . entreviste um especialista no assunto, em momento adequado e se for conveniente. Os dados levantados propiciarão outras questões. (BIEMBENGUT, 1999, p.38).

Em um primeiro momento, o professor deixa o assunto pizzas em aberto, para verificar onde os estudantes o levam, assumindo o papel de mediador da dinâmica. Uma possível questão norteadora pode ser o questionamento acerca do que seja uma boa pizza? Nessa hora, pode-se notar em que momento a matemática aparece na fala dos alunos, e o educador pode mencionar algumas questões para orientá-los, pois o objetivo traçado é trabalhar as funções afins e outros conteúdos que podem surgir, valendo-se de dados reais pesquisados pelos estudantes nesses restaurantes. As concepções adotadas por Bean, e também assumidas neste trabalho, ganham espaço, pois as questões levantadas podem receber posicionamentos diversos de acordo com as premissas e os pressupostos adotados tanto pelos professores quanto pelos alunos envolvidos na pesquisa.

Algumas questões que podem ser sugeridas pelo professor: se for fixado o sabor da pizza, o preço é proporcional ao diâmetro? Ainda, fixando o sabor da pizza, o preço é proporcional ao peso? A margem de lucro (%) do vendedor é a mesma para tamanhos diferentes de pizza de mesmo sabor? A margem de lucro se altera, quando se muda o sabor da pizza? É necessário deixar os alunos desenvolverem e levantarem questionamentos pertinentes ao que se propõe o estudo. “Essa etapa possibilita a formação de um estudante mais atento, mais sensível às questões do seu objeto de estudo.” (BURAK, 2010, p. 21).

Depois de levantadas todas as questões a serem investigadas nas pizzarias, o professor pode fazer algumas perguntas direcionadas, para conhecer a maturidade matemática dos sujeitos de pesquisa. Dentre outras, algumas possíveis questões: o que poderia ser feito, através da matemática, para se estudar o problema da proporcionalidade entre preço e tamanho (ou peso)? Qual a melhor maneira para registrar essa relação entre preço e tamanho (ou peso)? Pode-se sugerir uma montagem das informações coletadas em forma de tabelas, para possibilitar um olhar mais direcionado aos dados e possíveis percepções de como são dados os preços às pizzas do estabelecimento em questão.

Um simples passeio organizado para uma tarde nas pizzarias do entorno da escola pode se tornar mais do que um simples passeio, pode ensejar o estudo de temas diversos, como materiais utilizados na confecção de pizzas, quantidade desses materiais, preços estipulados para a venda dessas pizzas, a obtenção de lucros ou prejuízos de acordo com o tamanho das mesmas.

5.2.3 Levantamento dos problemas

Os dados que foram coletados na pesquisa exploratória é que vão sustentar o levantamento dos problemas relativos ao tema. O professor, assumindo o papel de mediador, é uma pessoa muito importante no trabalho com Modelagem, ele “pode contribuir de forma significativa com o estudante no desenvolvimento de sua autonomia, na formação de um espírito crítico” (BURAK, 2010, p. 21).

Retornando da visita às pizzarias, um novo debate deve ser estimulado sobre o que pode ser feito com as informações que foram coletadas, com o professor sempre mediando, auxiliando com sugestões que possam direcionar os olhares para as ações matemáticas que vão surgir.

Vários conteúdos podem emergir a partir dos dados coletados pelos alunos na pesquisa exploratória. Enfatizando o conteúdo de funções, o educador pode dar ênfase à ideia intuitiva, às grandezas envolvidas e à qualidade dessas grandezas (se discreta ou contínua). Podem surgir exemplos, além das funções lineares, de função constante, função afim, função identidade, dentre outras. O professor, mediando o levantamento dos problemas acerca dos valores que os alunos buscarem na pizzaria, pode trabalhar vários conteúdos, ou mesmo uma unidade de conteúdos. Uma mesma situação-problema pode tomar encaminhamentos diversos, dependendo dos pressupostos adotados pelos alunos, cabendo ao professor saber escutar e valorizar os significados levantados por eles nas situações encontradas na pizzaria.

Para trabalhar as ideias intuitivas de função, o professor mediador pode levantar algumas questões com os dados pesquisados na pizzaria. Um exemplo que pode ser explorado, diante de muitos outros que podem surgir, dependendo dos dados colhidos: Carlos vai a essa pizzaria e deseja comprar pizzas de sabor Portuguesa no tamanho de 30 cm de diâmetro. Quanto ele pagará se comprar uma, duas, três, dez e x pizzas desse sabor e nessas condições? Intuitivamente, os alunos perceberão que estão relacionando a quantidade de pizzas com seus respectivos valores.

Para incentivar os alunos a pensarem nas funções lineares, uma situação a ser colocada pelo professor tem relação com a taxa de entrega que as pizzarias cobram. Por exemplo, se a pizzaria cobra uma taxa de entrega de R$ 4,00, pode-se perguntar quanto a pizzaria receberá se uma, duas, três, vinte e x pessoas fizerem encomendas. Eles podem descobrir o modelo que atenda a essa situação, que no caso é $f(x) = 4 . x$.

Dante (2008, p. 54) define assim a função linear: “**Função Linear** f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por f(x) = ax para todo $x \in \mathbb{R}$. Nesse caso, a = 1 e b = 0”.

Com o modelo que ele construiu em mãos, o aluno pode fazer associações, esboçar e analisar o gráfico da função linear e mesmo perceber que ela é um modelo matemático para os problemas de proporcionalidade direta.

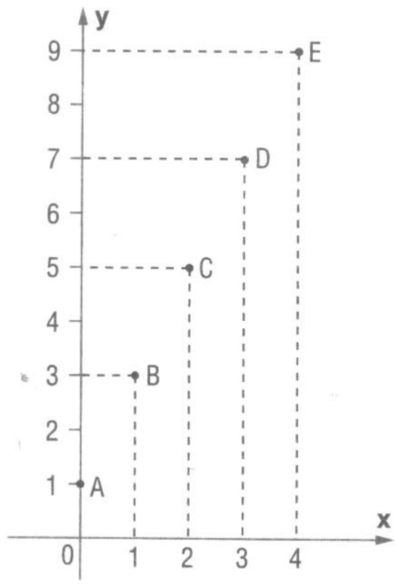
> É possível provar que:
> Se uma função f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma proporcionalidade, então f(*x*) = *ax*, em que *a* = f(*1*), para todo ***x*** positivo.
> Por outro lado, já vimos que a função linear f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por f(*x*) = *ax*, em que $a \in \mathbb{R}$ é uma constante.
> Quando *a* > 0, a função linear f(*x*) = *ax* transforma um número real positivo ***x*** num número positivo *ax*. Portanto, define, com essa restrição, uma proporcionalidade f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. O coeficiente ***a*** chama-se fator de proporcionalidade ou constante de proporcionalidade. (DANTE, 2008, p. 68, grifo do autor).

A demonstração do teorema fundamental da proporcionalidade se encontra no livro do Elon Lages Lima (1997, p. 94).

Orientar, se necessário, a construção de tabelas com os tamanhos e preços das pizzas, por exemplo, questionando-se sempre, para que os alunos percebam o que está acontecendo. O esboço de um ou mais gráficos, através da marcação dos pontos em um plano cartesiano, pode ser um bom caminho.

> Para construir o gráfico de uma função dada por *y* = f(*x*), com $x \in$ D(*f*), no plano cartesiano, devemos:
>
> - construir uma tabela com valores de ***x*** escolhidos convenientemente no domínio **D** e com valores correspondentes para *y* = f(*x*);
> - a cada par ordenado (*x*, *y*) da tabela associar um ponto do plano cartesiano;
> - marcar um número suficiente de pontos, até que seja possível esboçar o gráfico da função.
>
> Exemplos:
> 1º) Vamos construir o gráfico da função dada por f(*x*) = 2*x* + 1, sendo o domínio D = { 0, 1, 2, 3, 4}.
> (DANTE, 2008, p. 42, grifo do autor).

x	y = f(x) = 2x + 1
0	1
1	3
2	5
3	7
4	9



> Nesse caso, o gráfico da função é o conjunto dos pontos **A, B, C, D** e **E** (DANTE, 2008, p. 42, grifo do autor).

De posse dos gráficos, o segundo passo é perguntar aos alunos se existe ou não alguma proporcionalidade entre preços e tamanho (ou peso) das pizzas. Pedir-lhes que analisem a variação entre dois pontos do eixo-*x* e os respectivos dois pontos do eixo-*y*.

Buscando-se os conceitos de função afim no livro de Dante, o autor faz alguns comentários acerca da taxa de variação:

> O parâmetro a de uma função afim f(x) = $ax + b$ é chamado de taxa de variação (ou taxa de crescimento). Para obtê-lo, bastam dois pontos quaisquer, porém distintos, (x_1, f(x_1)) e (x_2, f(x_2)), da função considerada. Assim, f(x_1) = $ax_1 + b$ e f(x_2) = $ax_2 + b$, de onde obtemos que f(x_2) – f(x_1) = $a(x_2 - x_1)$ e, portanto, $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.
> (DANTE, 2008, p. 55, grifo nosso).

Essa taxa de variação *a* é sempre constante para cada função afim. “Por exemplo, a taxa de variação da função afim f(x) = 5x + 2 é 5 e a da função g(x) = -2x + 3 é -2”. (DANTE, 2008, p. 55). Os alunos, de posse dos valores das pizzas e seus diâmetros, por exemplo, poderão analisar a taxa de variação, tomando dois valores quaisquer do gráfico.

Suscitar um questionamento, se é possível saber o preço de uma pizza de tamanho intermediário entre aqueles coletados na pesquisa. Por exemplo, se uma pizzaria faz pizzas de tamanhos 20, 30, e 40 centímetros, qual seria o valor para uma pizza de 25 ou 35 cm? "Construir no estudante a capacidade de levantar e propor problemas, advindos de dados coletados e mediada pelo professor é, sem dúvida, um privilégio educativo." (BURAK, 2010, p. 22).

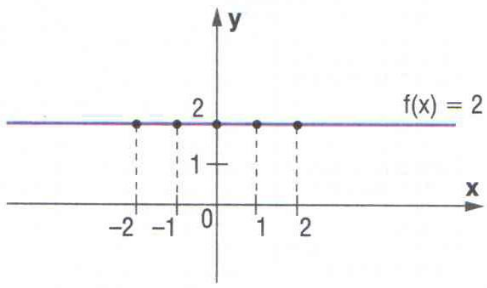
Outro questionamento possível deve-se ao fato de a pizzaria oferecer o rodízio de pizzas; se o rodízio acontece, o valor a ser pago é fixo, independe da quantidade de fatias que a pessoa comer. Sendo assim, há a possibilidade de se explorar a função constante.

> Função constante
> f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por f(x) = b para todo $x \in \mathbb{R}$. Nesse caso, a = 0. Alguns exemplos:
>
> - f(x) = 3
> - f(x) = $\frac{3}{4}$
> - f(x) = -2
> - f(x) = $\sqrt{2}$
>
> (DANTE, 2008, p. 54, grifo nosso).

Após os alunos construírem o modelo que coloca preço na pizzaria que oferece o sistema de rodízio, podem esboçar seu gráfico e perceber o comportamento da função constante.

> Observe agora a construção do gráfico da função constante f(x) = 2 para qualquer x $\in \mathbb{R}$ no plano cartesiano.
> f(x) = 2

x	f(x)
−2	2
−1	2
0	2
1	2
2	2



> O gráfico da função constante f(x) = b é uma reta paralela ao eixo-***x*** que passa pelo ponto (0, b). Nesse caso, Im (f) = {b} .
> (DANTE, 2008, p. 59, grifo nosso).

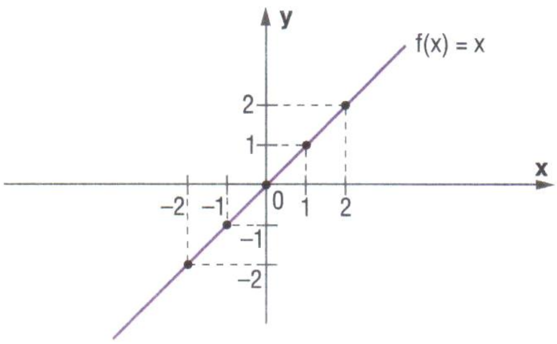
Há lugares que vendem fatias de pizzas. Se todas elas forem vendidas por um valor fixo, como, por exemplo, R$ 1,00, pode ser explorada a função identidade, pois os alunos, nessa situação-problema, iriam encontrar o modelo *f(x) = 1.x*.

Dante (2008, p. 54) define:“função Identidade: f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por f(*x*) = *x* para todo $x \in \mathbb{R}$. Nesse caso, *a* = 1 e *b* = 0”.

Com o modelo em mãos, os alunos poderão esboçar o gráfico dessa função identidade, que será do tipo:

Função Identidade (*a* = 1 e *b* = 0)
f(*x*) = *x*

x	f(x)
−2	−2
−1	−1
0	0
1	1
2	2



Observe que o gráfico da função identidade f(x) = x é a bissetriz do 1º e do 3º quadrantes. (DANTE, 2008, p.58).

O tema “O Comércio das Pizzas” pode ser explorado em suas mais diversas formas, e o professor pode aproveitar a riqueza do tema para trabalhar vários conteúdos, inclusive as funções. A etapa do levantamento dos problemas, na Modelagem, promove o desenvolvimento da autonomia do estudante, oportunizando a ele a “liberdade de conjeturar, construir hipóteses, analisar as situações e tomar decisões” (BURAK, 2010, p.22).

Também nessa etapa, as concepções de Bean poderão guiar o raciocínio do professor e dos alunos, lembrando que várias hipóteses podem surgir, e as respostas vão depender do que os alunos adotam como verdade naquela situação. Conforme mencionado na página 58, na visão de Bean, as premissas são as teorias ou princípios que uma pessoa, conscientemente ou não, utiliza para fundamentar seu raciocínio, já os pressupostos são afirmações do que está compreendido como realidade.

5.2.4 Resolução dos problemas e o desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema

Nesse momento, os conteúdos matemáticos ganham importância e significado, e é feito uso de todas as ferramentas matemáticas disponíveis.

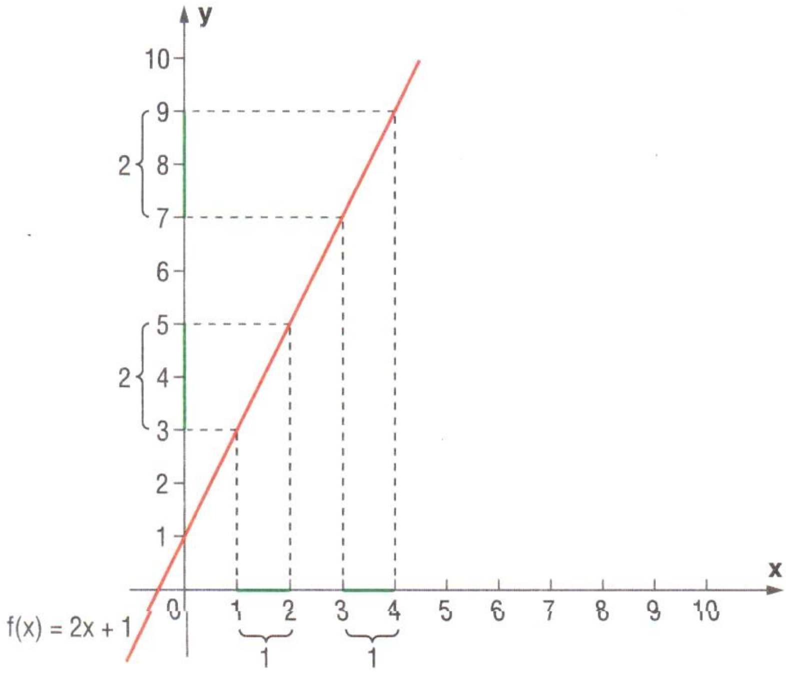
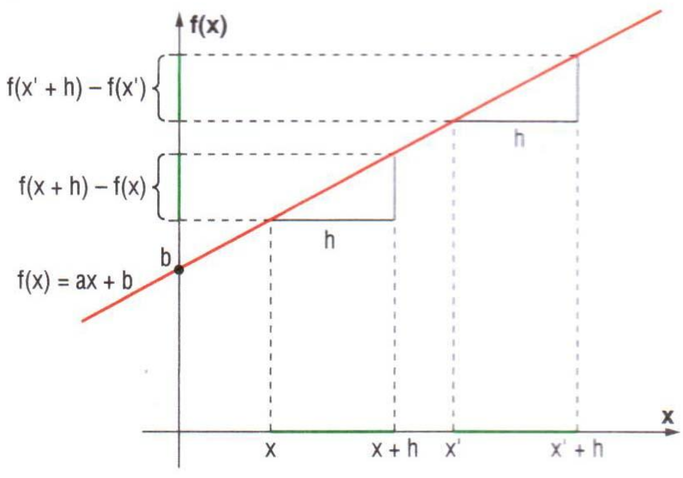
> Pode acontecer que para a resolução de um problema, o conteúdo necessário à sua resolução, ainda não tenha sido trabalhado pelo aluno, então é um momento importante para que o professor, na condição de mediador favoreça ao estudante a construção desse conhecimento. (BURAK, 2010, p. 22).

De volta aos dados que foram coletados nas pizzarias, o professor mediador pode sugerir aos alunos a construção de uma reta que liga os pontos do gráfico no plano cartesiano, indagar se o valor previsto para as pizzas de tamanhos intermediários também pertence a essa reta, colocar a questão: por que isso acontece?

Conduzir os alunos à conclusão de que uma variação *h* em *x* produz uma variação em *y* que depende apenas desse *h*. Essa condição caracteriza o que é conhecido como função afim.

> É possível, mediante critérios como os que apresentaremos logo a seguir, saber que uma certa função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é afim sem que os coeficientes *a* e *b* sejam fornecidos explicitamente. Neste caso, obtém-se *b* como o valor que a função dada assume quando $x = 0$. O número $b = f(0)$ às vezes se chama o valor inicial da função f. Quanto ao coeficiente *a*, ele pode ser determinado a partir do conhecimento dos valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ que a função f assume em dois pontos distintos (porém arbitrários) x_1 e x_2. Com efeito, conhecidos.
>
> $$f(x_1) = ax_1 + b$$
>
> e $$f(x_2) = ax_2 + b,$$
>
> obtemos $$f(x_2) - f(x_1) = a\,(x_2 - x_1),$$
>
> portanto $$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$
>
> Dados x, $x + h \in \mathbb{R}$, com $h \neq 0$, o número $a = [f(x + h) - f(x)] / h$ chama-se taxa de crescimento (ou taxa de variação) da função f no intervalo de extremos x, $x + h$.(LIMA et al, 1997, p.87).

Dante descreve essa variação da função afim da seguinte forma:

> As funções afins são as únicas funções (crescentes ou decrescentes) para as quais acréscimos iguais dados a ***x*** ($x + h$) e a ***x***' ($x' + h$) correspondem a acréscimos iguais dados por f ($x + h$) – f(x) e f ($x' + h$) – f (x').
> Analise o gráfico da função f (x) = 2x + 1:
>
> 
>
>
> (DANTE, 2008, p. 60).
>
> Demos dois acréscimos iguais a 1 em ***x*** e obtivemos dois acréscimos iguais a 2 em ***y***.
> De um modo geral, em qualquer função afim f(x) = ax +b, temos:
>
> 
>
>
> (DANTE, 2008, p. 60).

> Demos dois acréscimos iguais a ***h*** em ***x*** e obtivemos dois acréscimos iguais em **f(*x*)**:
> f (x + h) – f (x) = f (x' + h) – f (x') (DANTE, 2008, p. 60, grifo do autor).

É de suma importância estimular os alunos a encontrarem uma lei de formação para a função afim, partindo das informações do gráfico. Espera-se que eles encontrem uma fórmula geral ($f(x) = ax + b$) para as funções afins. Nesse momento, o educador, “criando alternativas que permitam ao estudante buscar uma solução para o problema” (BURAK, 2010, p. 22), pode valer-se de situações empíricas para primeiras aproximações e, posteriormente, desenvolver o conteúdo de forma analítica, com alguma formalização matemática.

Observando o gráfico que foi construído, os alunos podem retirar dele dois pontos distintos e determinar o coeficiente *a* e o coeficiente *b,* resolvendo um sistema de equações, conteúdo que pode ser revisto a partir das necessidades dos alunos envolvidos. Por exemplo, de posse dos valores dos diâmetros das pizzas e de seus respectivos preços, os alunos podem, através do sistema de equações, buscar um modelo que coloque o preço nos diversos tamanhos daquele sabor de pizza.

> Uma função afim f(x) = ax + b fica inteiramente determinada quando conhecemos dois dos seus valores f(x_1) e f(x_2) para quaisquer $\boldsymbol{x_1}$ e $\boldsymbol{x_2}$ reais, com $\boldsymbol{x_1} \neq \boldsymbol{x_2}$. Ou seja, com esses dados determinamos os valores de ***a*** e de ***b***.
> Por exemplo:
> **.** se f(*2*) = -2, então para x = 2 tem-se f(x) = -2, ou seja, -2 = 2a + b;
> **.** se f(*1*) = 1, então para x = 1 tem-se f(x) = 1, ou seja, 1 = a + b.
> Determinamos os valores de ***a*** e ***b*** resolvendo o sistema de equações:
> $$\begin{cases} 2a+b=-2 \\ a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=-2 \\ \underline{-2a-2b=-2} \end{cases}$$
> $$-b = -4 \Rightarrow b = 4$$
> Como a + b =1, então a + 4 = 1 $\Rightarrow$ a = -3
> Logo a função afim f(x) = ax +b tal que f(*2*) = -2 e f(*1*) = 1 é dada por f(x) = -3x + 4.
> (DANTE, 2008, p. 54-55, grifo do autor).

Na passagem acima, o aluno encontra o modelo que atende a suas indagações com relação a preços, pesos ou mesmo outros questionamentos buscados na visita às pizzarias. O modelo, segundo BURAK (2010, p. 23), “pode ser entendido como uma representação”.

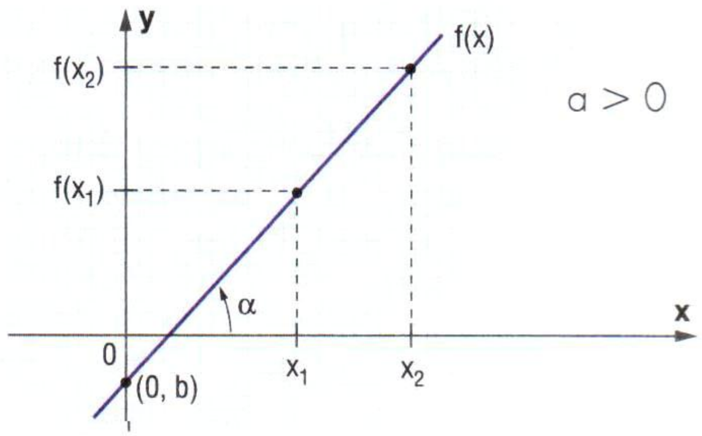
O professor pode, a partir desse modelo, estimular os alunos a observarem e a determinarem as constantes *a* e *b*, mostrando que para isso basta conhecer os valores $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ para dois valores diferentes quaisquer de x_1 e x_2.

Dante, em seu livro didático, tece exemplos para a determinação da função afim, quando são conhecidos os seus valores em dois pontos distintos e, em seguida, generaliza:

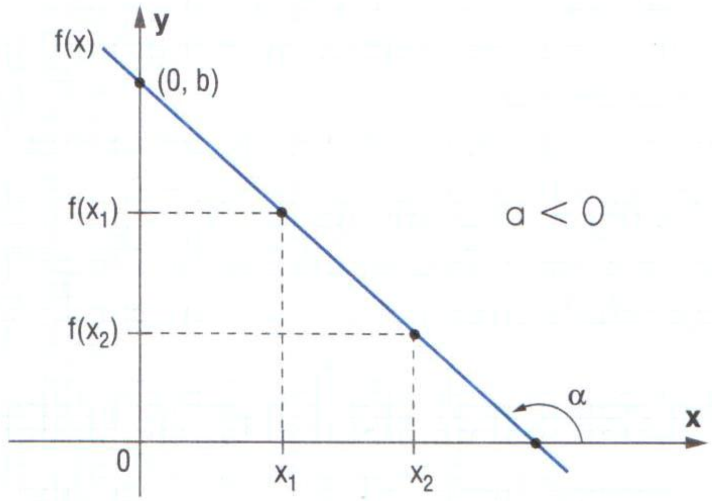
> De modo geral, conhecendo y_1 = f (x_1) e y_2 = f (x_2) para $\boldsymbol{x_1}$ e $\boldsymbol{x_2}$ reais quaisquer, com $x_1 \neq x_2$, podemos explicitar os valores **a** e **b** da função f (*x*) = *ax* + *b*, determinando-a completamente.
> Assim:
>
> $$\left.\begin{array}{l} y_1 = f(x_1) = ax_1 + b \\ y_2 = f(x_2) = ax_2 + b \end{array}\right\}$$
>
> $y_2 - y_1 = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1) \Rightarrow a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $x_1 \neq x_2$.
> Substituindo esse valor de ***a*** em $y_1 = f(x_1) = ax_1 + b$, obtemos o valor de ***b***:
>
> $$y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)x_1 + b \Rightarrow y_1(x_2 - x_1) = y_2x_1 - y_1x_1 + b(x_2 - x_1) \Rightarrow$$
>
> $$\Rightarrow y_1x_2 - y_1x_1 - y_2x_1 + y_1x_1 = b(x_2 - x_1) \Rightarrow b = \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1}, x_1 \neq x_2$$
>
> (DANTE, 2008, p.55, grifo do autor).

Os alunos podem ser levados também a encontrar uma fórmula para determinação da constante *a* através do quociente da variação de *f* e da variação entre dois valores quaisquer de *x*. A partir desse ponto, os alunos terão condições de interpretar o crescimento e decrescimento de *f* a partir do sinal de *a*. Estimular os alunos para concluírem algo acerca do comportamento gráfico da reta e crescimento/ decrescimento da função através de seu coeficiente *a*.

> Já vimos que uma função afim f(*x*) = *ax* + *b* tem como gráfico uma reta (que indicamos por *y* = *ax* + *b*) não- vertical, ou seja, não paralela ao eixo ***y***.
> A ordenada do ponto onde a reta intersecta o eixo ***y*** é sempre ***b***.
> Já vimos que o número ***a*** chama-se taxa de variação ou taxa de crescimento da função. Quanto maior o valor absoluto de ***a***, mais a reta se afasta da posição horizontal.
> Para $a \neq 0$ existem duas possibilidades:
> (DANTE, 2008, p. 60, grifo do autor).



a > 0, ***f*** é crescente.
(DANTE, 2008, p. 60).



a < 0, ***f*** é decrescente.
(DANTE, 2008, p. 61).

> Logo, ***f*** é crescente se a taxa de crescimento é positiva, e decrescente se a taxa de crescimento é negativa.
> Assim, o que determina se a função afim f(*x*) = *ax* + *b*, com $a \neq 0$, é crescente ou decrescente é o sinal de ***a***. Se ***a*** é positivo, ela é crescente; se ***a*** é negativo, ela é decrescente.
> No caso de *a* = 0, o valor de f(*x*) permanece constante [f(*x*) = *b*] e o gráfico de ***f*** é a reta paralela ao eixo ***x*** que passa por (0, *b*). (DANTE, 2008, p. 61, grifo do autor).

O professor mediador pode levantar outros questionamentos, e, através do diálogo com os alunos, outros conteúdos e situações matemáticas podem surgir e todos eles serem explorados e trabalhados com o auxílio da Modelagem Matemática.

Exemplos de situações que podem surgir com o tema "*O Comércio de Pizzas*": os alunos construíram modelos que possibilitaram o estudo de funções afins, lineares, identidades e constantes, conforme mencionado anteriormente. O professor pode sugerir que eles encontrem valores para *f(1), f(4), f(7), f(10),* por exemplo, visto que esses valores (*1, 4, 7, 10*) se apresentam como uma Progressão Aritmética (P.A.) e eles buscarão algumas sequências. Possibilitar aos alunos a interpretação dessas sequências leva-os a compreensão e à ligação das funções afins com a Progressão Aritmética (P.A.).

> Há um relacionamento muito importante entre a função afim e a progressão aritmética, que veremos agora.
> Já vimos que uma progressão aritmética (PA) é uma seqüência em que cada termo, a partir do segundo, é o termo anterior mais uma constante, chamada *razão* da progressão aritmética. Por exemplo, a seqüência:
> 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, ...
> é uma progressão aritmética de razão 3.
> Consideremos agora a função afim f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por f(x) = 2x + 1.
> Vamos constatar que:
> f(1), f(4), f(7), f(10), f(13), f(16), f(19), ...
> é também uma progressão aritmética.
> Assim,
> f(x) = 2x + 1
> f(1) = 3; f(4) = 9; f(7) = 15; f(10) = 21; f(13) = 27; f(16) = 33; f(19) = 39; etc.
> Podemos observar que:
> 3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, ...
> é uma progressão aritmética e sua razão é 6 (2. 3).
> (DANTE, 2008, p. 57).

De forma geral, os livros didáticos não mencionam a associação das funções afins com a P.A, e o aluno vai estudar as progressões em um outro momento, seguindo a ordem estabelecida pelo currículo linear.

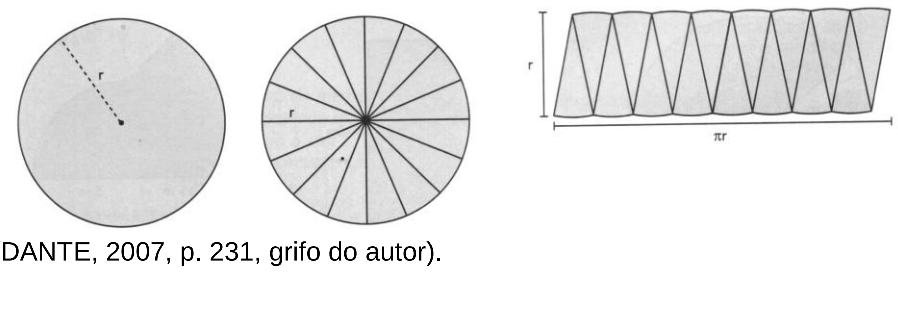
Outra situação que pode surgir, e o professor aproveitá-la é o comprimento da pizza e sua respectiva área. Sendo assim, a geometria plana ganha significados e pode ser trabalhada através da conexão da pizza, que possui a forma redonda com perímetro e área de regiões circulares.

Na sua coleção de livros didáticos para o Ensino Fundamental, Dante (2007), menciona:

> Há mais de 2000 anos o ser humano descobriu uma relação entre a medida do comprimento de uma circunferência (***C***) e a medida de seu diâmetro (***d***). Antigos povos usaram essa descoberta para desenhar suas construções.
> A primeira relação usada foi: *C* = *d* . 3.
> Depois foi descoberta uma relação mais precisa:
> $C = d.3\frac{10}{71}$
> Durante séculos os matemáticos tentaram encontrar um valor exato para o número que deve ser multiplicado por ***d*** para obter ***C***. Primeiramente usaram fração; depois decimal. A decimal que eles encontraram era infinita, sem que resultasse em uma dízima periódica:
> *C* = *d* . 3,14159265358979323846...
> Atualmente, com o uso do computador, já se encontraram trilhões de casas decimais para esse número, sem que se obtivesse uma dízima periódica.
> Para evitar o uso da casa decimal complicada foi adotado o símbolo π (pi).
> Assim, a fórmula que representa a relação entre a medida do comprimento da circunferência e a medida do diâmetro é indicada assim:
> *C* = *d* . π ou *C* = π *d* ou ainda *C* = 2 π *r* (A medida do diâmetro é o dobro da medida do raio). (DANTE, 2007, p. 214, grifo do autor).

Na visita à pizzaria, os alunos podem buscar o diâmetro das pizzas e com ele descobrir o comprimento da circunferência de cada pizza (perímetro) e a área das mesmas.

Uma das demonstrações da área do círculo, e mencionada também por Dante, segue abaixo:

> O círculo abaixo foi dividido em um número par de setores circulares que formaram uma figura cujo contorno lembra um paralelogramo. Sua base mede a metade do comprimento da circunferência $\left(\frac{2\pi r}{2} = \pi r\right)$ e sua altura mede ***r***.
> A área dessa figura, que é também a área do círculo, é *A* = $\pi r \; r = \pi r^2$.
>
> 
>
>
> (DANTE, 2007, p. 231, grifo do autor).

Ao trabalhar perímetro e área do círculo, a forma como as pizzas são apresentadas, o professor pode explorar as unidades de medidas, tanto para o comprimento das pizzas quanto para o valor de suas áreas.

Nos diálogos entre os alunos e o professor mediador, podem surgir questões envolvendo razão, proporção, lucro, porcentagem e mesmo a regra de três.

Uma situação que pode ser suscitada pelo professor é fazer um levantamento do lucro que o dono do estabelecimento obtém vendendo a quantidade de pizzas que ele mencionou. Esse lucro pode ser calculado semanal ou mensal, podendo, inclusive, levantar questões de lucro, ou mesmo prejuízo, que podem ocorrer se as metas de venda não forem alcançadas.

Um trabalho com esse viés proporciona aspectos positivos para os estudantes envolvidos. Como bem menciona Burak:

> Outro aspecto positivo e significativo para o estudante é a perspectiva de resolução dos problemas, diferente da forma encontrada na maioria dos livros textos. No contexto a resolução de problemas ganha contornos e significados diferentes, a forma ou maneira usual de se resolver problemas: 1) os problemas são elaborados a partir dos dados coletados em campo; 2) prioriza a ação do estudante na elaboração; 3) parte sempre de uma situação contextualizada; 4) favorece a criatividade, 5) confere maior significado ao conteúdo matemático usado na resolução; 6) favorece a tomada de decisão. (2010, p. 22-23).

5.2.5 Análise crítica das soluções

Esta etapa se constitui em um momento especial, em que serão discutidas e analisadas as soluções encontradas. Sendo assim, tal etapa “possibilita tanto o aprofundamento de aspectos matemáticos como dos aspectos não matemáticos envolvidos no tema” (BURAK, 2010, p. 24).

Voltando às questões levantadas nas pizzarias, alguns questionamentos podem ser suscitados, pelos alunos e pelo professor mediador: o que pode ser dito em relação à proporcionalidade entre preço e tamanho (ou peso das pizzas)? Analisando-se os gráficos e as leis de formação que encontraram para as funções afins, o que é possível concluir em relação ao lucro da pizzaria? O que podem dizer das funções afins? Questionar também se os alunos perceberam outras situações-problema no seu cotidiano que poderiam ser apresentadas com o auxílio da Modelagem Matemática. Perguntar-lhes se existem outras funções, além das afins, que podem modelar outros problemas de situações diferentes. Deixar que eles comentem acerca dessa atividade, da função afim e da introdução dela com o auxílio da Modelagem Matemática.

Na etapa análise crítica das soluções, o aluno terá oportunidade de justificar seus procedimentos, trocar ideias. De acordo com Burak:

> É também nessa etapa que se fazem algumas justificativas, alguns procedimentos mais particulares. Também é um momento propício para se mostrar e, comentar as soluções empíricas e as mais formais, pois, muitas vezes, nessa faze de escolaridade, se parte do empírico para o formal. Mostra-se a importância de alguma formalização, de justificativa de procedimentos, enfim é um momento de interação entre os grupos, de trocas de ideias e de reflexões. (2010, p. 24).

A atividade com o tema *“O Comércio de Pizzas”* possibilita ao educador trabalhar uma gama de conteúdos matemáticos e aos alunos possibilita fazer associações dos mesmos com uma situação real; no caso, a pizzaria utilizada para pesquisas e investigações.

Além da pizzaria, os alunos podem buscar outros estabelecimentos e outras situações que também possibilitem um rico trabalho com uma quantidade grande de conteúdos, que vão aparecendo de acordo com as necessidades levantadas por eles. O estabelecimento em questão pode ser um supermercado, uma *lan house*, um posto de gasolina; também uma visita à EMBRAPA (Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária), uma visita ao IBAMA (Instituto Brasileiro do Meio Ambiente), dentre outros. Esses estabelecimentos podem auxiliar professores e alunos quando trabalharem função e outros conteúdos com o auxílio da Modelagem Matemática.

O professor não deve temer um trabalho com esse viés e precisa estar aberto às indagações dos alunos e ao surgimento de situações matemáticas diversas. Com um olhar bem direcionado às questões dos alunos, o professor pode trabalhar uma infinidade de conteúdos que surgirão, e os alunos terão interesse nos mesmos para buscarem o modelo que atenda às suas inquietações.

6 DESCRIÇÃO DO TRABALHO DE CAMPO: A MATEMÁTICA COMPREENDIDA POR MEIO DO TEMA "O COMÉRCIO DE PIZZAS"

Conforme mencionado no capítulo O comércio de pizzas: trabalhando a função afim com direcionamentos de Modelagem Matemática, a visita a uma pizzaria com os alunos oferece uma gama de possibilidades de trabalhar conteúdos matemáticos. Além de possibilitar constatações, o trabalho de campo objetiva responder a várias indagações dentro das inúmeras possibilidades de se trabalhar a matemática em uma pizzaria, um ambiente frequentado por muitos alunos, localizada no entorno de suas residências, que certamente desperta neles um grande interesse.

6.1 A pesquisa de campo: metodologia

A pesquisa de campo desenvolvida com os alunos é de caráter qualitativo, tendo sido abordado o estudo de caso.

> O plano geral do estudo de caso pode ser representado como um funil. Num estudo qualitativo, o tipo adequado de perguntas nunca é muito específico. O início do estudo é representado pela extremidade mais larga do funil: os investigadores procuram locais ou pessoas que possam ser objecto do estudo ou fonte de dados e, ao encontrarem aquilo que pensam interessar--lhes, organizam então uma malha larga, tentando avaliar o interesse do terreno ou as fontes de dados para os seus objectivos. (BOGDAN; BIKLEN, 2003, p. 89).

Os alunos participantes foram escolhidos pelo pesquisador, que, para a coleta de dados, dispôs de um Caderno de Campo, um gravador de áudio, para gravar a fala dos alunos nas discussões gerais em todos os encontros, e folhas de registros.

A pesquisa de campo, de caráter qualitativo, foi norteada pelas cinco características propostas por Bogdan e Biklen (2003).

A primeira delas salienta que, na investigação qualitativa, a fonte direta dos dados é o ambiente natural, no qual o investigador torna-se o instrumento principal. "Os investigadores qualitativos frequentam os locais de estudo porque se preocupam com o contexto. Entendem que as ações podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência." (BOGDAN; BIKLEN, 2003, p. 48).

A segunda característica reforça a investigação qualitativa como descritiva. "A palavra escrita assume particular importância na abordagem qualitativa, tanto para o registro dos dados como para a disseminação dos resultados." (BOGDAN; BIKLEN, 2003, p. 49). Na abordagem qualitativa, nada é trivial, pois tudo pode apresentar pistas que esclarecem o objeto de estudo.

A terceira característica remete aos investigadores de uma pesquisa qualitativa, aqueles que se interessam mais pelo processo do que pelos resultados ou produtos. Os caminhos percorridos pelos sujeitos de pesquisa são muito mais valorizados do que um simples resultado final.

Os dados da pesquisa qualitativa são analisados de forma indutiva pelos investigadores, o que constitui o quarto passo.

> Para um investigador qualitativo que planeje elaborar uma teoria sobre o seu objecto de estudo, a direcção desta só se começa a estabelecer após a recolha dos dados e o passar de tempo com os sujeitos. (BOGDAN; BIKLEN, 2003, p. 50).

O quinto passo proposto por Bogdan e Biklen reforça a importância do significado na abordagem qualitativa. "Os investigadores que fazem uso deste tipo de abordagem estão interessados no modo como diferentes pessoas dão sentido às suas vidas." (BOGDAN; BIKLEN, 2003, p. 50).

Investigadores qualitativos são aqueles que questionam e dialogam com os sujeitos da pesquisa, estabelecem estratégias e consideram as experiências trazidas desses sujeitos.

6.2 O cenário da investigação

O trabalho foi realizado com alunos de uma turma de primeira série do Ensino Médio, composta de 38 discentes, período diurno da Escola Estadual Sebastião Patrus de Sousa, Rua Ouro Preto nº 373, bairro Santa Terezinha, situada na cidade de Juiz de Fora, Minas Gerais.

O trabalho investigativo aconteceu num período extraturno, com duas horas semanais de duração, totalizando-se seis encontros. Quatro alunos foram convidados a participar das atividades pela pesquisadora, também docente da turma.

A utilização do contraturno escolar deveu-se ao fato de as aulas serem distribuídas em períodos de 50 minutos, sendo a turma muito numerosa, além de uma grande quantidade de conteúdos estarem previstos no currículo da escola. As atividades, podendo ocorrer em períodos mais extensos, proporcionam uma atenção mais direcionada e facilitam as análises e posteriores conclusões.

No desenrolar das atividades, os alunos foram distribuídos em duplas, mantendo-se as mesmas duplas até o término do trabalho.

O objetivo era que esses quatro alunos pesquisassem, em uma pizzaria nas proximidades da escola, dados que pudessem auxiliar no levantamento de modelos, para que estudassem as funções afins, além de outros conteúdos que surgissem, com o propósito de atingirem as respostas.

6.3 Descrição do ambiente

A Escola Estadual Sebastião Patrus de Sousa está situada na cidade de Juiz de Fora, em Minas Gerais, e pertence à Superintendência Regional de Ensino de Juiz de Fora. Atende a alunos de classe média que residem próximo à área escolar e também a alunos oriundos de outros bairros, que optam pelo deslocamento para estudar em uma escola renomada, com histórico de muitos alunos terem sido aprovados no vestibular, especialmente na Universidade Federal de Juiz de Fora.

Caracteriza-se por ser uma escola de grande porte, com 56 salas de aula em funcionamento, sendo 19 salas no turno matutino com aproximadamente, 760 alunos de Ensino Médio. Para auxiliar nas atividades extraclasses, os professores têm a sua disposição um salão de festas, uma biblioteca, uma sala de vídeo e um laboratório de informática.

6.4 Desenvolvendo o trabalho de campo: algumas considerações

O trabalho de campo consiste em um levantamento de informações feito pelas duplas de alunos em uma pizzaria da cidade para colherem informações acerca de preços das pizzas e suas respectivas relações. Os encontros ocorreram na escola, com a pesquisadora mediando os debates e incentivando os alunos na busca de repostas às situações levantadas.

A investigação qualitativa possui como foco o ensino-aprendizagem de funções afins através da Modelagem Matemática, aproveitando também outros conteúdos que possam surgir de acordo com o interesse e as investigações dos alunos.

A questão norteadora do trabalho de campo é: como a Modelagem Matemática pode contribuir para a contextualização de Matemática no cotidiano dos alunos, para que eles sejam capazes de atribuir significados ao conceito de função afim?

Os alunos da referida escola são de classe média, muitos frequentam pizzarias, até mesmo já organizaram uma confraternização de final de ano em uma pizzaria. Por ser uma realidade dos alunos envolvidos, tal ambiente foi sugerido para investigações, coleta de dados e conclusões nos encontros semanais, que não aconteceram de forma consecutiva, pelo fato de os estudantes terem disponibilidade às segundas-feiras e, terem ocorrido muitos feriados nesse dia da semana.

A organização e o encaminhamento das atividades foram apoiados nas orientações de Burak (2004), explicitadas no capítulo Revisão de Literatura, e utilizadas na estrutura do capítulo O Comércio de pizzas: trabalhando a função afim com direcionamentos de Modelagem Matemática. São elas: escolha do tema, pesquisa exploratória, levantamento dos problemas, resolução dos problemas e desenvolvimento da matemática relacionada ao tema e análise crítica das soluções. As considerações de Bean ajudaram nas análises das questões levantadas pela pesquisadora e pelos alunos no caminhar dos encontros. Os capítulos Algumas concepções de Modelo e Modelagem Matemática, Revisão de Literatura e O

Comércio de pizzas: trabalhando a função afim com direcionamentos de Modelagem Matemática, foram suportes teóricos para comentários da pesquisadora nas conclusões dos encontros.

A escolha do assunto foi sugerido pela professora, na busca de direcionar e provocar a ideia de relações/funções nas múltiplas comparações/relações possíveis dentro do tema, com a expectativa de que os alunos relacionassem proporcionalidade com funções afins e pudessem surgir questionamentos acerca de outras funções e outros conteúdos matemáticos, e o professor pesquisador trabalhasse uma gama de conteúdos.

A pesquisa exploratória, in loco em uma pizzaria da cidade, foi presidida pelos estudantes, que buscaram algumas respostas para questionamentos levantados na sala de aula.

No levantamento dos problemas, os estudantes foram incentivados a relacionar os preços com os tamanhos ou peso das pizzas e a relatar acerca da margem de lucro da pizzaria.

Perpassando pela resolução dos problemas e o desenvolvimento da matemática relacionada ao tema, esperava-se que os alunos quantificassem a situação para chegarem ao uso da matemática como uma linguagem. Nesse momento, eles puderam caracterizar a função afim através de coeficientes e gráficos.

Na etapa da análise crítica, os participantes teceram alguns comentários para responder às questões iniciais, como a relação entre preços e tamanhos/pesos através da ferramenta matemática funções afins, dentre outras indagações e questionamentos.

6.5 Descrição dos encontros com os alunos

A transcrição completa dos encontros com os alunos se encontra no apêndice. Perpassam-se os momentos cruciais e as situações que foram primordiais ao crescimento de ambos, pesquisadora e participantes da pesquisa.

Conforme mencionado anteriormente, o trabalho de campo foi realizado com quatro alunos, nomeados aqui por pseudônimos escolhidos por eles próprios antes de serem iniciadas as atividades.

6.5.1 Primeiro encontro

No primeiro encontro, o assunto *“O comércio de pizzas”* é oferecido aos alunos, e eles são convidados a pesquisá-lo.

Geraldo, Juninho, Fabregas e Jhon Jhonas, são os alunos que, nesse primeiro momento, disseram o que imaginavam que iam encontrar na pizzaria, tudo isso mediado pela pesquisadora que incentivava o diálogo.

> Pesq.: O que é uma boa pizza para vocês?
> [Aquela que possui muito recheio, eles disseram. Alguns falaram de sua preferência pela massa mais grossa, outros pela mais fina. Foram mencionados alguns sabores.].
> Pesq.: Vocês acham que a matemática está presente nas pizzarias?
> Juninho: Sim, na parte contábil.
> Jhon Jhonas: Sim, primeiro pro cara fazer o recheio dele, aí ele não vai pôr muito disso, muito daquilo.
> Juninho: Tem que ter a proporção. Em uma pizza pequena ele não vai colocar o recheio de uma pizza grande, ele vai colocar de acordo.
> Geraldo: A matemática aparece na hora de partir os pedaços.

Deixar os alunos se expressarem acerca do que imaginam encontrar na pizzaria é necessário, pois nesse momento podem aparecer questões matemáticas, e eles se expressam sobre o que poderão encontrar de matemática nesse passeio. Juninho já fala em proporção e preenchimento dos recheios de acordo com o tamanho das pizzas. Jhon Jhonas, indiretamente, fala sobre a proporção, também mencionando a quantidade de recheio. Juninho já pensa no dinheiro que gastará na pizzaria, enquanto que Geraldo pensa na matemática, quando precisa repartir os pedaços.

Conforme mencionado por Burak e relatado no capítulo Revisão de Literatura, os alunos devem se familiarizar com o tema e cabe ao professor oportunizá-los ao diálogo para que perceba o que mencionam a respeito, no caso *"O Comércio de Pizzas".*

> Pesq.: O que vocês podem falar acerca de preços que são cobrados pelas pizzas? Como são dados esses preços?
> Jhon Jhonas: Pelo tamanho e pelo produto que gasta.
> Juninho: É baseado no preço de compras dos ingredientes né.
> Jhon Jhonas: E pelo tamanho também né.
> Fabregas: Eles acrescentam o preço de compra dos ingredientes e acrescentam mais um pouco.
> Pesq.: Então o comerciante tem que olhar o que gasta de ingredientes...
> Jhon Jhonas: E colocar uma porcentagem de lucro.

O aluno Fabregas diz que, para o dono da pizzaria colocar preço em suas pizzas, ele dá o valor dos ingredientes e acrescenta mais um pouco; e Jhon Jhonas diz que o dono deve colocar uma porcentagem de lucro. Foi-lhes permitido dizer sobre tudo o que esperavam encontrar na visita e já mencionavam situações matemáticas, como lucro, porcentagem, proporcionalidade, dentre outras. O diálogo vai de encontro ao que eles acham que é feito em todas as pizzarias, principalmente a questão do lucro, pois sem isso não compensa manter tal comércio.

De acordo com as concepções de Bean, mencionadas no capítulo Revisão de Literatura os alunos partem do pressuposto de que todas as pizzarias geram algum lucro e já mencionam que esse lucro é obtido depois de serem descontados os ingredientes gastos na confecção das pizzas.

> Pesq.: Como vocês acham que são calculados os valores, ou preços dessas pizzas?
> Jhon Jhonas: De acordo com o que ele gasta para comprar.
> Juninho: De acordo com o que ele gasta né, com o cara que fica fazendo a pizza, com o atendimento, a conta do estoque, junta tudo.

Percebe-se na fala de Jhon Jhonas e de Juninho que, para eles, os preços das pizzas são calculados de acordo com as despesas do estabelecimento, e as suas falas deixa claro que se deve “juntar tudo” e, de acordo com o dizer de Jhon Jhonas, é necessário fixar-se uma porcentagem de lucro.

> Pesq.: Se eu passar uma reta na metade da pizza, de que lembramos na matemática?
> Jhon Jhonas: O raio.
> Geraldo: De um lado a outro é o diâmetro.
> Pesq.: À medida que eu aumento a forma, o que acontece?
> Jhon Jhonas: O diâmetro aumenta.

A pesquisadora e professora mediadora propõe hipóteses para orientar as discussões e aproveitar ao máximo aquilo que os alunos mencionaram acerca de situações matemáticas. Com a questão levantada, surgiu a conexão do que eles se lembram ao fazer um corte na pizza passando por sua metade. Dessa forma, Geraldo logo afirma que, se for de um lado ao outro, é o diâmetro, e Jhon Jhonas, por sua vez, diz que esse diâmetro aumenta se o tamanho da forma da pizza for aumentado. Esses alunos já trazem a concepção de diâmetro e de raio e associam naturalmente suas concepções com o formato da pizza, que geralmente é circular. As intervenções da pesquisadora acontecem no sentido de levantar questionamentos, o que caracteriza a segunda etapa mencionada por Burak e explicitada nos capítulos Revisão de Literatura e O comércio de pizzas: trabalhando a função afim com direcionamentos de Modelagem Matemática, nas seções 4.2.2 e 5.2.2, quando enfatiza que os conteúdos a serem trabalhados são determinados por problemas que precisam ser levantados por meio de uma pesquisa exploratória ou uma pesquisa de campo.

> Pesq.: Se eu fixar o sabor, por exemplo, pizza de calabresa, e nessa pizzaria existirem vários tamanhos de pizza (por exemplo: pequena, média e grande), como vocês acham que aumenta esse preço?
> Fabregas: O preço aumenta porque vai colocar mais recheio, vai aumentar a massa.
> Jhon Jhonas: Tá querendo dizer também que o diâmetro, ele ajuda bastante a diferenciar o preço.
> Pesq.: Como?

> Jhon Jhonas: Às vezes, ele tem uma medida lá, quantos centímetros, uma coisa assim. Por exemplo, de 5 cm em 5 cm aumenta 1 real. Deve ter um padrão eu acho!

Jhon Jhonas acha que deve haver um padrão para se aumentar o preço das pizzas e que o diâmetro auxilia diretamente na diferenciação do preço.

> Pesq.: Outra possível indagação, a margem de lucro do vendedor, será que é a mesma para os diferentes sabores de pizza?
> Jhon Jhonas: Às vezes, até uma pizza que ele vende mais barato ele está tendo mais lucro.
> Pesq.: Será que a margem de lucro altera, quando eu mudo o sabor da pizza?
> Jhon Jhonas: Altera. Às vezes pode ser positivo ou negativo, mas altera.
> Fabregas: Às vezes ele ganha uns R$ 10,00 na pizza de mussarela e, na sofisticada, para não ficar muito cara, ele ganha só uns R$10,00 também, e a pessoa vai e compra duas de mussarela por estar mais em conta!

Percebe-se nesse momento que os alunos estão discutindo acerca do lucro do dono da pizzaria, que, segundo eles, altera, quando se muda o sabor das pizzas. Eles até partem do pressuposto, de acordo com Bean no capítulo Revisão de Literatura, seção 4.1.3, de que nas pizzas mais caras o comerciante ganha menos, devido ao preço elevado dos ingredientes.

Os quatro participantes, agrupados em duas duplas, compostas por Jhon Jhonas e Juninho, e por Geraldo e Fabregas, receberam uma folha para colocar algumas questões a serem levadas à pizzaria localizada no entorno da escola, para buscarem algumas respostas e posteriores questionamentos. As questões que as duplas levantaram se encontram no apêndice (p.192-193).

6.5.2 Segundo encontro

Neste momento, a pesquisadora e os alunos participantes foram visitar a pizzaria localizada próxima à escola deles e na qual a pesquisa está sendo desenvolvida. As questões elaboradas pelas duplas foram levadas, e o Sr. D, dono do estabelecimento, dispôs-se a ajudar os alunos, respondendo e esclarecendo as dúvidas que tiveram.

> Juninho: A pizzaria oferece quantos sabores de pizzas?
> Sr. D: 46 sabores e com preços variados. A maior, de 35 cm de diâmetro, possui valores entre R$ 28,90 a R$ 31,90.
> Juninho: Qual o tamanho das pizzas que estão disponíveis no estabelecimento?
> Sr. D: Pequena (25 cm); média (30 cm) e grande (35 cm).
> Jhon Jhonas: Quanto ao preço final da pizza, existem variações diante dos sabores?
> Sr. D: Sim, pizzas com ingredientes mais caros, custam mais.
> Jhon Jhonas: Como a venda da pizza pode influenciar o pagamento dos funcionários?
> Sr. D: O estabelecimento possui 9 funcionários e todos possuem salário fixo, que independe da quantidade de pizzas vendidas.
> Jhon Jhonas: O garçom ganha comissão?
> Sr. D: Não.
> Fabregas: Como vocês fazem para contar o lucro ou prejuízo?
> Sr. D: Do total de pizzas vendidas**,** retiro os valores dos ingredientes utilizados e das despesas, inclusive o salário dos funcionários, e obtenho um lucro médio de 35%.
> Juninho: Qual tipo de pizza é o mais vendido no estabelecimento?
> Sr. D: O tipo mais vendido é o à Moda da Casa.
> Juninho: Quantas em média são vendidas?
> Sr. D: Somente do sabor À moda da casa eu não sei dizer, mas ao todo eu vendo uma média de 250 pizzas por semana.
> Jhon Jhonas: Vocês trabalham com entregas? Se sim, quais os valores?
> Sr. D: Sim. Os valores variam de acordo com a distância dos bairros a serem entregues. Por exemplo, no Mariano Procópio, um bairro próximo, a taxa de entrega é de R$ 3,00, se for o bairro São Pedro, por exemplo, o valor é de R$ 6,00.
> Geraldo: Como vocês calculam o preço, de acordo com o tamanho da pizza? Qual delas gera mais lucro: pequena, média ou grande?
> Sr. D: A diferença de cada tamanho (pequena, média ou grande) é de R$ 2,00. O lucro é proporcional ao tamanho da pizza.
> Fabregas: Qual o tamanho de pizza que mais costuma vender?
> Sr. D: A família, com 35 cm de diâmetro.
> Geraldo: Vocês vendem mais em dias úteis ou finais de semana?
> Sr. D: Os dias que as pizzas são mais vendidas são na sexta-feira, no sábado e no domingo.
> Fabregas: A margem de lucro é a mesma em todos os tamanhos?
> Sr. D: Sim.
> Juninho: Vocês fazem a metade da pizza de um sabor e a outra metade de outro? Se sim, como isso é cobrado?
> Sr. D: Sim. Quando se pede dois sabores se paga o valor da mais cara.
> Jhon Jhonas: Qual é o ingrediente mais utilizado nos recheios de pizzas?
> Sr. D: O ingrediente mais utilizado é a mussarela. Ela tem um custo para mim de R$10,00 o quilo, e eu compro por semana 100 quilos de mussarela.
> Pesq.: O senhor vende mais pizzas aqui na pizzaria ou há mais entregas?
> Sr. D: É equilibrado.

Os alunos fizeram as devidas anotações, que constam no apêndice (p. 196-198), e solicitaram ao Sr. D um cardápio para observar e anotar alguns valores de pizzas que eram oferecidas lá. O cardápio e os respectivos valores se encontram no apêndice (p. 194-195).

Após a coleta de dados e o esclarecimento das questões que foram levantadas, a pesquisadora convidou os alunos a escolherem um sabor de pizza e eles puderam saborear essa deliciosa massa. Eles adoraram a visita!

6.5.3 Terceiro encontro

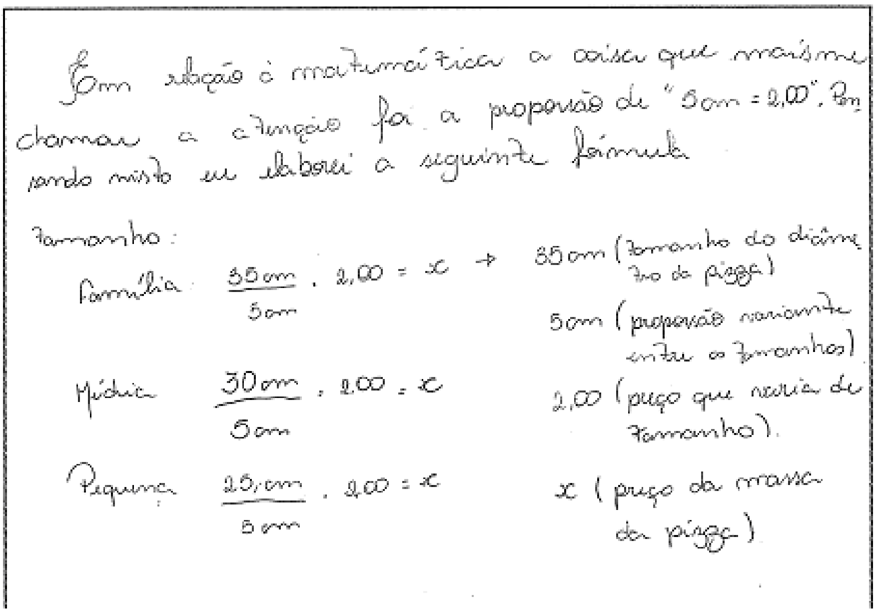
Ao iniciar esse encontro, os alunos foram questionados sobre o passeio e o que acharam de positivo, ou mesmo negativo, na visita à pizzaria.

> Pesq.: Vocês gostaram de ir à pizzaria? O que vocês acham possível de ser feito com tudo o que conseguimos de informações? Vocês pensaram o que poderíamos fazer diante dos dados?
> Juninho: Foi surpreendente! Nunca achei que tinha tanta coisa de matemática em uma pizzaria.
> Pesq.: Você pode especificar melhor que coisas são essas?
> Juninho: Há! Muito número né, pra produção de pizza, pra preço, pra tudo, muita coisa diferente, não achei que tinha tanta coisa.
> Fabregas: É muito número mesmo.

Os alunos ficaram surpresos ao retornarem da visita, pois perceberam a gama de informações ligada à matemática existente na pizzaria. Fabregas enfatiza: “é muito número mesmo”.

Nesse momento, foi concedido aos alunos o diálogo e a oportunidade de expressarem tudo o que buscaram com a visita à pizzaria. De acordo com Jacobini e Wodewotzki, na seção 4.1.1 do capítulo Revisão de Literatura, em uma sala de aula crítica, tanto o educador, quanto os educandos devem assumir o papel de participantes na aprendizagem. Esses autores criticam uma sala que não permite a participação dos alunos e dos educadores na construção dos conhecimentos.

Fabregas: Tudo aqui tem matemática né! Se você parar para olhar, tudo aqui tem matemática.
Pesq.: Vocês conseguem ver alguma relação dessa matemática aí com o que a gente estuda dentro da sala?
Fabregas: Porcentagem.
Juninho: Tem algumas equações que dá pra gente montar. Pelo custo de produção, pelo custo de cada pizza, por cada tipo de pizza, dá para montar um montão de equação.
Pesq.: Como Juninho que você pensou?
Juninho: Ó, dá para fazer tipo, a cada 5 cm de massa é igual a R$ 2,00. Dá para tipo, fazer o total de diâmetro da pizza que é de 35 cm, dividir por 5 e multiplicar por 2 e achar o preço total, só da massa. [O aluno pediu para fazer um registro disso em uma folha.]. Depois a gente vê o tipo de pizza, vai tirar o preço total pelo preço que a gente achou aqui e ver o tanto de recheio que vai dar. O preço do recheio vai ser o total que a gente vai ver, tanto o lucro, quanto a despesa.



Em relação à matemática a coisa que mais me chamou a atenção foi a proporção de "5cm = 2,00". Pensando nisto eu elaborei a seguinte fórmula

Tamanho:

Família $\frac{35cm}{5cm} \cdot 2,00 = x$ → 35cm (tamanho do diâmetro da pizza)

Média $\frac{30cm}{5cm} \cdot 2,00 = x$ 5cm (proporção variante entre os tamanhos)

Pequena $\frac{25cm}{5cm} \cdot 2,00 = x$ 2,00 (preço que varia de tamanho).

x (preço da massa da pizza)

Figura 4: Transcrição do apêndice, registro de Juninho.

Na página 100, Juninho tem uma ideia de como são colocados os preços na pizzaria que iriam visitar, dizendo que esses deveriam ser baseados no preço de compra dos ingredientes. Na sua fala, continua com essa ideia, sugerindo, inclusive, a montagem de equações, buscando com isso o custo de cada pizza. Juninho parte do pressuposto de que deve descobrir o valor que o dono da pizzaria gasta com a massa da pizza, para depois retirar esse valor e descobrir o preço do recheio. Os registros feitos por ele, na figura 5, dispostos acima, permitem a percepção da busca por um modelo que respondesse ao seu objetivo.

O modelo de Juninho para o preço da massa:

$$\frac{\text{cm de diâmetro}}{5 \text{ cm}} \text{ x } 2,00 = x$$

Ele parte do pressuposto de que o acréscimo de R$2,00 para cada acréscimo de 5 cm de diâmetro encontra-se somente o preço da massa.

Diante da preocupação de Juninho, ao querer descobrir quanto Sr. D gasta com a massa da pizza para, depois, descobrir o quanto ele gasta com o recheio, buscando uma forma de achar o lucro e as despesas que ele possui com o estabelecimento, a pesquisadora percebe as ideias de porcentagem.

Fabregas complementa:

> Fabregas: A diferença de cada tamanho da pizza é de R$ 2,00 e o lucro é proporcional ao tamanho da pizza, então eles têm o mesmo gasto com os produtos para fazer a pizza, para comprar e para fazer. Mas isso também tem que ter um lucro para vender. Vende a pizza, mas eles também têm que ter um lucro para eles, porque têm que pagar os funcionários, produtos. Eles têm que ter dinheiro todo mês, para comprarem os produtos, e mesmo assim tem que ter uma média de mais ou menos 35% de lucro.

Os 35% de lucro são referentes ao que o Sr. D disse que ganha com a venda de cada pizza, a fala de Fabregas denota claramente a sua preocupação com a questão do lucro, uma vez que enfatiza que o dono deve pagar todas as despesas e, ao final, obter um lucro de 35%. Essa questão do lucro é polêmica, uma vez que a lucratividade depende da quantidade e dos valores de todas as pizzas que são vendidas. O Sr. D disse somente que tira uma média de 35% de lucro, não especificando maiores detalhes.

A questão de lucro, ou mesmo prejuízo, abre uma discussão acerca das premissas e dos pressupostos, concebidas por Bean e já analisadas nos capítulos Algumas concepções de Modelo e Modelagem Matemática e Revisão de Literatura. Os alunos podem fazer diversas considerações acerca dos valores vendidos e dos possíveis lucros, partindo, inclusive, do pressuposto de o Sr. D ganhar os 35% de lucro mencionados na visita.

> Pesq.: Diante dos dados, da relação que vocês observaram acerca dos R$ 2,00 a mais, quando fixamos um mesmo sabor, o que acham viável de fazer para auxiliar nas interpretações dos dados?
> Juninho: Montar uma tabela.
> Pesq.: Sim, poderia.
> Pesq.: Essa tabela com todos os sabores?

> Juninho: Não, a gente escolhe um representante, pois tem muita pizza com os preços repetidos.

Quando observaram o cardápio da pizzaria, os alunos perceberam que o Sr. D determinava os preços em suas pizzas usando um aumento de R$ 2,00, de tamanho para tamanho, e o diâmetro, por sua vez, sofria um aumento de 5 cm em 5 cm.

Aparece na fala dos alunos a possibilidade de se construir uma tabela e a escolha de um sabor de pizza representante. Perceberam que havia pizzas de sabores diferentes com o mesmo preço. Os problemas começam a ser levantados, o que condiz com a terceira etapa concebida por Burak, no capítulo Revisão de Literatura, seção 4.2.2.

Agrupados em duplas, construíram tabelas relacionando sabores, tamanhos e preços.

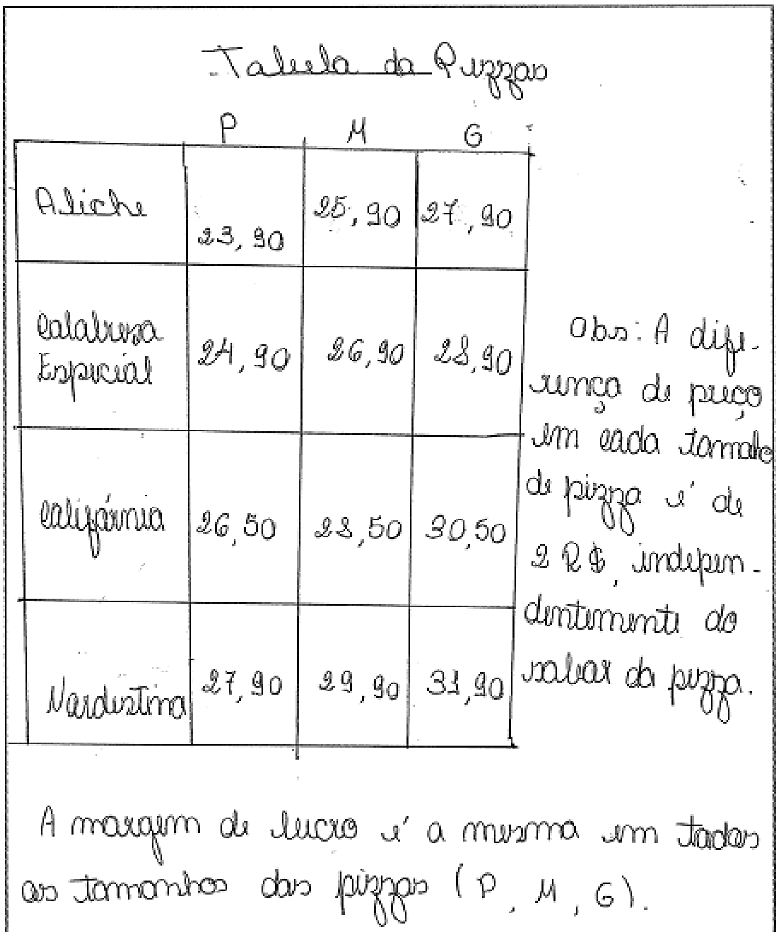


Tabela de Pizzas

	P	M	G
Aliche	23,90	25,90	27,90
Calabresa Especial	24,90	26,90	28,90
Califórnia	26,50	28,50	30,50
Nardestina	27,90	29,90	31,90

Obs: A diferença de preço em cada tamanho de pizza é de 2 R$, independentemente do sabor da pizza.

A margem de lucro é a mesma em todos os tamanhos das pizzas (P, M, G).

Figura 5: Transcrição apêndice, registro dos estudantes: Geraldo e Fabregas.

Juninho, ao observar sua tabela, faz a seguinte colocação:

> Juninho: Eu tive uma ideia para um exercício de matemática! Dá pra fazer tipo, a gente sabe que a proporção de tamanho para tamanho é R$ 2,00 e eu só anotei aqui um tamanho de cada, dá pra saber o preço dos outros tamanhos, analisando o preço de um só. Por exemplo, a Nordestina grande é R$ 31,90 e se eu quiser saber a média é só eu diminuir R$ 2,00 desse preço que eu vou saber. É só diminuir ou aumentar R$ 2,00 ou R$ 4,00.

Assim, Juninho apontou que, se tiver apenas o valor de um tamanho de pizza, ele consegue descobrir os demais, bastando para isso aumentar ou diminuir R$ 2,00. Com essa colocação, intuitivamente, o aluno percebe que as funções afins formam uma progressão aritmética (P.A.), e, no caso dos preços, a razão é 2. A associação das funções afins com a Progressão Aritmética foi mencionada no capítulo O comércio de pizzas: trabalhando a função afim com direcionamentos de Modelagem Matemática, na seção 5.2.4, e retirada de Dante (2008, p. 57).

> Pesq.: Se eu quisesse saber a área das pizzas, alguém saberia me dizer?
> Juninho: Divide o diâmetro por 2, você vai achar o raio. Pega o raio, multiplica por 6,28 e você acha a área. 6,28 é duas vezes o π. [Confundiu área com comprimento da circunferência.].
> Fabregas: A área é complicado.
> Pesq.: Vou deixar que vocês pesquisem qual é a área da circunferência.

Como professora e mediando os diálogos dos alunos, a pesquisadora sempre levantava alguns questionamentos para estimulá-los, guiá-los, e fazê-los perceber em que circunstâncias a matemática aparecia em suas falas. Na pergunta da área, Juninho confunde área com perímetro, ou comprimento da circunferência. Fabregas afirma ser a área complicada. Nesse momento, é-lhes permitido pesquisar para colocarem em um próximo encontro a relação da área, para que possam calcular as áreas das pizzas. Professora mediadora, a pesquisadora os incentiva sempre, para que eles próprios buscassem aquilo de que precisavam para os cálculos, dentro do assunto escolhido.

> Pesq.: O que podemos fazer para tentarmos tirar mais algumas conclusões? Vocês estão relacionando o tamanho com o preço. Quando relacionamos duas coisas, o que podemos perceber, dentro da matemática?

> Geraldo: Função.
> Pesq.: Como assim, Geraldo?
> Geraldo: O preço aumenta em função do tamanho, em função do diâmetro da pizza.
> Pesq.: Que função seria essa? É possível fazer alguma coisa para nos auxiliar?
> Juninho: Dá para fazer uma fórmula né, tentar montar uma fórmula.
> Fabregas: É, é.
> Juninho: A gente pega algumas fórmulas que a gente já viu e tenta encaixar. Acho que do segundo grau não dá não, acho que só do primeiro mesmo.
> Pesq.: Por que você acha que é do primeiro grau, Juninho?
> Juninho: Porque está relacionando o tamanho. A cada 5 cm, aumenta o tamanho. Então a, espera aí, deixa eu pensar.

O aluno Geraldo já menciona a palavra função, dizendo que o preço aumenta em função do tamanho, ou seja, do diâmetro da pizza. Juninho, por sua vez, fala em montar uma fórmula e acha que é função do primeiro grau, mas fica pensativo.

> Pesq.: Como é uma função do primeiro grau para você, Juninho?
> Juninho: Uai, tem uma incógnita, mais um número, é igual a um total. Ela é $a + b$.
> Geraldo: $ax + b$, ou melhor, $bx + c$
> Juninho: É $ax +b = y$
> Pesq.: O que mais caracteriza uma função do primeiro grau?
> Juninho: O gráfico dela é sempre uma reta.
> Pesq.: O que pode auxiliar vocês a perceberem se é ou não do primeiro grau?
> Geraldo: Fazer o gráfico.

Os alunos, por meio de intenso diálogo, vão concluindo alguns pontos relevantes para caracterizarem a função afim. Recordam-se de sua fórmula geral, e Geraldo acha conveniente o esboço do gráfico, pois, segundo ele, o gráfico da função afim é uma reta. É importante salientar que os quatro alunos participantes já tiveram contato com a função afim no nono ano e na primeira série, antes mesmo dos encontros com a pesquisadora.

Neste momento, os alunos, em duplas, começaram a fazer esboços de gráficos. Cada dupla escolheu por volta de três sabores na tabela de valores que trouxeram da pizzaria.

A dupla Geraldo e Fabregas escolheu quatro sabores de pizzas e construiu uma tabela com sabores, tamanhos e seus respectivos preços, esboçou o gráfico de um sabor, no caso a Aliche, relacionando o preço (eixo-*x*) com o diâmetro (eixo-*y*).
A dupla Juninho e Jhon Jhonas escolheu seis sabores de pizzas e construiu uma tabela com sabores, pegou um tamanho aleatoriamente e o seu preço; para esboçar o gráfico (ver figura 6), fixou o sabor da pizza Califórnia e relacionou o preço (eixo-*x*) com o respectivo diâmetro (no eixo-*y*); logo após, esboçou o diâmetro no eixo-*x* e o preço no eixo-*y*, no sabor Veneziana. Juninho registra alguns comentários ao lado dos gráficos, na tentativa de obter uma fórmula que fornecesse o preço do recheio da pizza, passando, em seguida, para a porcentagem desse valor.

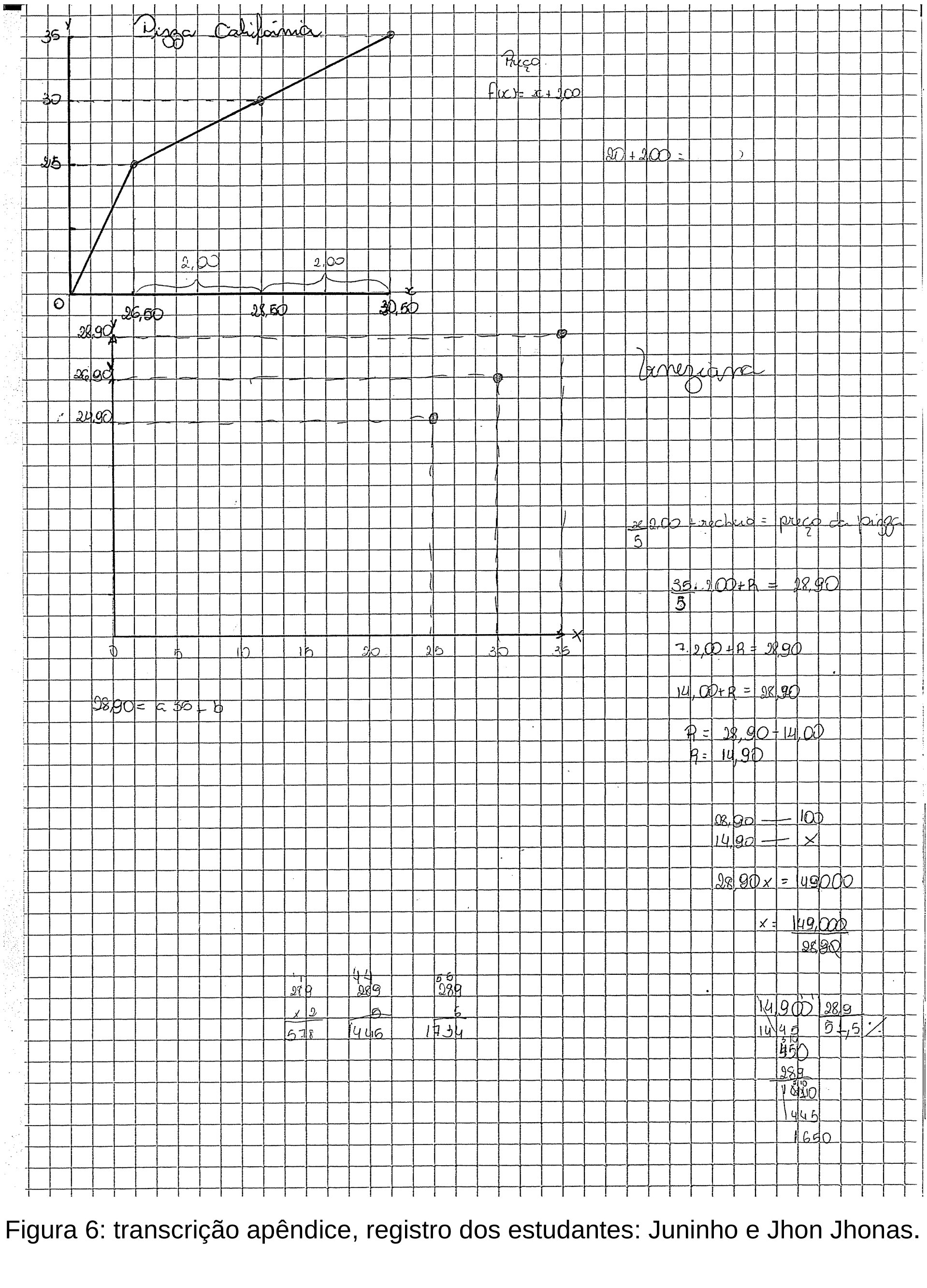


Figura 6: transcrição apêndice, registro dos estudantes: Juninho e Jhon Jhonas.

Na figura, Juninho registra o modelo que encontrou na busca de um preço a ser cobrado para a massa das pizzas, somando a esse modelo o recheio. Ele conceitua o valor da pizza em termos de massa e recheio, como ele já havia levantado na figura 5. A seguir, o modelo que ele constrói para calcular o valor do recheio:

$\frac{35}{5} \text{ x } 2{,}00 + R = 28{,}90$; relacionou os 35 cm de diâmetro com o preço de R$ 28,90.

Analisando-se a partir das premissas e pressupostos, estudos de Bean, percebe-se como premissa a valor das pizzas, que, para Juninho, é determinado por valores dos ingredientes. Foram utilizados dois pressupostos:

1) O preço da massa varia R$ 2,00 para cada 5 cm de diâmetro.
2) O preço do recheio é um valor fixo de acordo com o sabor da pizza.

> Pesq.: O que vocês perceberam ao traçarem os gráficos?
> Juninho: Ficou um gráfico do primeiro grau, o da reta.
> Pesq.: Será que, a partir desse gráfico, e de outros também, pois existem outros sabores, é possível você descobrir um modelo que atenda a qualquer valor que for colocado nessa pizzaria?
> Fabregas: É.
> Pesq.: Eu gostaria que vocês pesquisassem acerca dessa possibilidade para um próximo encontro.

Os alunos, em suas respectivas duplas, esboçaram alguns gráficos e foi-lhes perguntado se existia a possibilidade de construírem um modelo que atendesse a qualquer valor que fosse colocado nessa pizzaria. Eles disseram que sim, mas ficaram pensativos. Foi-lhes sugerido para um próximo encontro. Curiosos e ansiosos por descobrirem esse modelo, disseram que pesquisariam.

> Pesq.: Então, você tem alguns pares que utilizou para traçar esse gráfico, certo?
> Juninho: Sim.
> Pesq.: Quais são esses pares?
> Juninho: (25; 24,90); (30;26,90) e (35;28,90).
> Pesq.: Será que com esses pontos é possível vocês descobrirem qual é o modelo dessa função? Será que a Lei que vocês mencionaram anteriormente seria um modelo?
> [O silêncio se faz presente por alguns minutos.].

Os alunos retornam para a casa com essa atividade: tentar buscar um modelo que possibilitasse obter os preços das pizzas daquela pizzaria visitada anteriormente.

6.5.4 Quarto encontro

No início do quarto encontro, foi questionado aos alunos se pesquisaram e tentaram construir um modelo que fornecesse preço às pizzas da pizzaria visitada por eles, como proposto anteriormente.

> Juninho: Eu achei num site de pesquisa. Eu procurei um modo de achar a lei de uma função olhando o gráfico. E achei que para isso eu preciso montar um sistema de equações do primeiro grau, e a base desse sistema é dado na lei da função do primeiro grau $f(x) = ax + b$.

Juninho consegue descobrir que é preciso montar um sistema de equações a partir da lei da função do primeiro grau para descobrir o modelo, e Fabregas, Jhon Jhonas e Geraldo concordam com sua colocação. Ele utilizou a Internet, buscando um site que auxiliasse na resolução de sua questão. A Internet, conforme mencionado no capítulo Revisão de Literatura, na seção 4.3.4, pode ser um guia para trabalhos envolvendo a Modelagem, o que de fato ocorreu, auxiliou a pesquisa de Juninho.

Os quatros participantes, em duplas, solicitaram folhas de papéis quadriculados para construir gráficos. Cada dupla escolheu um sabor de pizza dentre os 46 que estavam sendo oferecidos no cardápio e desenhou uma tabela relacionando o diâmetro com seu respectivo preço e, em seguida, fez os esboços dos gráficos.

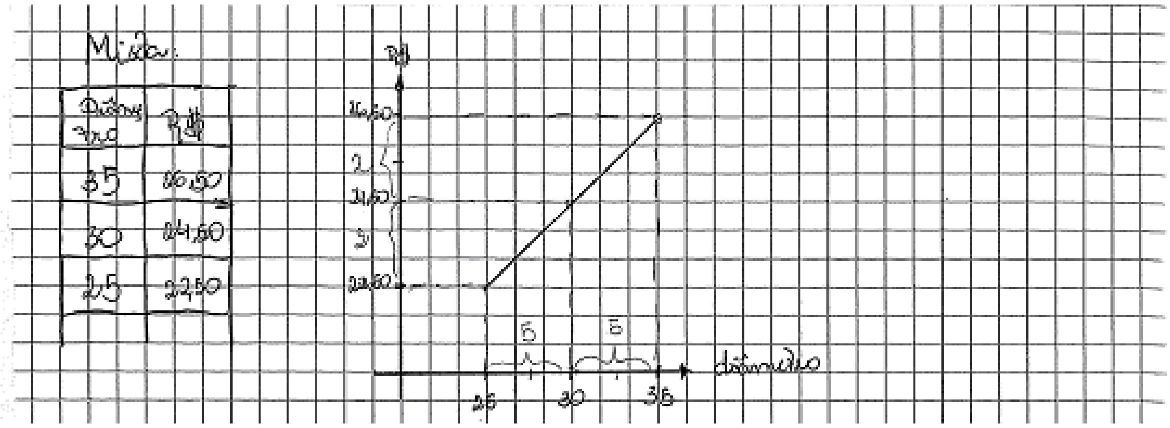


Figura 7: transcrição apêndice, registro dos estudantes: Juninho e Jhon Jhonas.

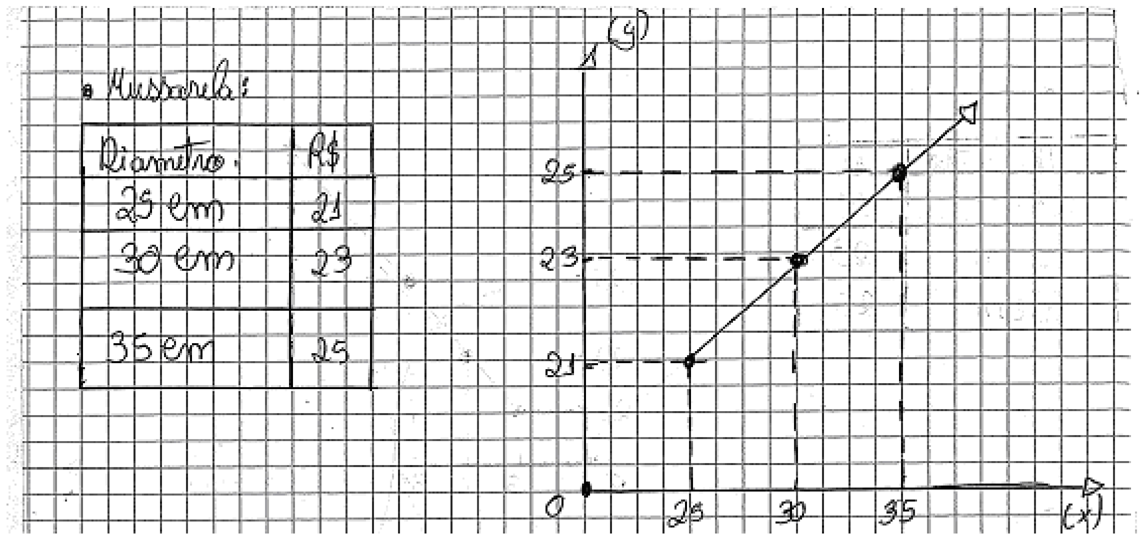


Figura 8: transcrição apêndice, registro dos estudantes: Geraldo e Fabregas.

> Pesq.: O Juninho comentou que é uma função afim (1º grau). Por que você acha que é uma função do 1º grau, Juninho?
> Juninho: Porque a linha do gráfico é uma reta.
> [O diálogo permanece, e os alunos percebem e comentam sempre a questão da variação de R$ 2,00 nos preços, enquanto o diâmetro varia 5 cm.].

Quando observam que o gráfico traçado é uma reta, os alunos acreditam ser uma função afim. Importante ressaltar que eles sempre comentam que o preço da pizza aumenta de R$ 2,00 em R$ 2,00, enquanto seu diâmetro aumenta de 5 cm em 5 cm.

> Pesq.: Quantos pontos foram ligados em cada gráfico?
> Jhon Jhonas: Três.

> Pesq.: Como posso escrever esses pontos?
> Juninho: Em pares.
> Pesq.: Esses pares são chamados pares ordenados. Escrevam para mim esses pares.

Os alunos escreveram os pares ordenados, colocando os três pares para a pizza Mista e os três para a pizza Mussarela. Com os três pontos, puderam pensar no sistema que Juninho havia mencionado no início do encontro. Em duplas, montaram um sistema para a pizza Mista e outro para a Mussarela. As duplas resolveram os sistemas, com a ajuda da pesquisadora na conferência de algumas contas.

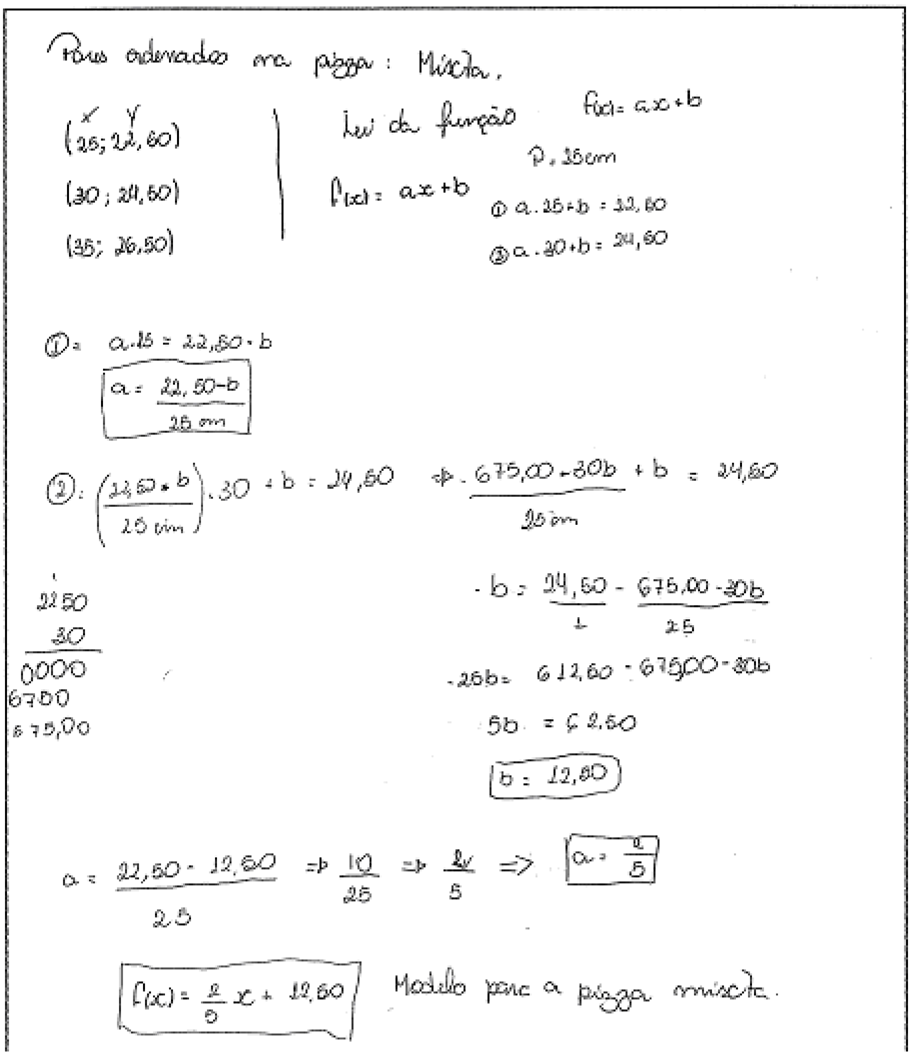


Figura 9: transcrição apêndice, registro dos estudantes: Juninho e Jhon Jhonas buscando o modelo para a pizza de sabor “Mista”.

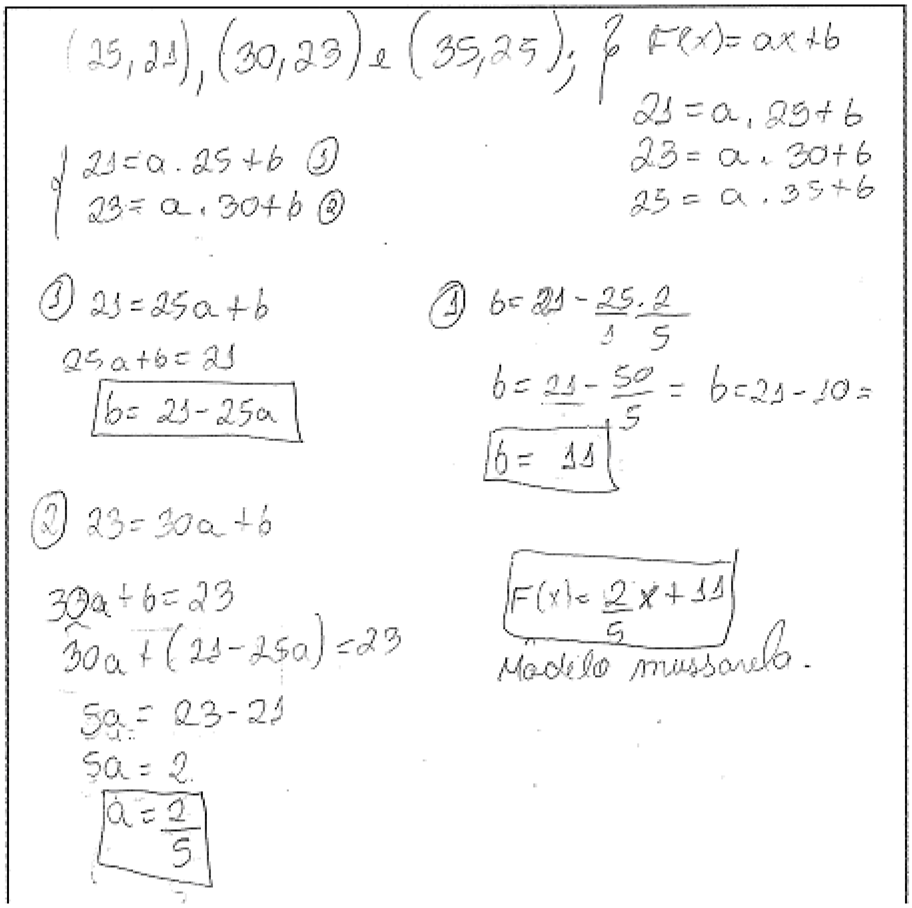


Figura 10: transcrição apêndice, registro dos estudantes: Geraldo e Fabregas buscando o modelo para a pizza de sabor “Mussarela”.

> Pesq.: E aí, Juninho, achou o Modelo?
>
> Juninho: Consegui, professora! [Com bastante vibração.]. Deu *f(x)* = $\frac{2}{5}$ *x + 12,50.*
>
> Pesq.: E o Jhon Jhonas achou?
>
> Jhon Jhonas: Sim, é *f(x)* = $\frac{2}{5}$ *x + 11.*

Nesse momento emocionante, os alunos vibraram muito por conseguirem descobrir um modelo que possibilitasse colocar preço em qualquer tamanho na pizza Mista e na pizza Mussarela. Jhon Jhonas fica meio “grilado”, quando observa que o coeficiente *b* é diferente nos dois modelos e acaba concluindo que ele tem a ver com o preço das pizzas, que varia. A Lei de formação da função foi descoberta (modelo), associando-se os valores e sabores de pizzas que eles quiseram escolher, ou seja, fazendo-se uma conexão com o cotidiano dos alunos, conforme orientam os

Parâmetros Curriculares Nacionais, no capítulo Importância de funções para a Matemática, seção 2.2.

> Pesq.: Eu sugiro que a gente faça o seguinte: nós podemos verificar para ver se esse modelo atende a todos os tamanhos de pizzas? O Jhon Jhonas ficou meio grilado porque o *b* de uma pizza está diferente do da outra. Tem alguma coisa com valores iguais?
> Jhon Jhonas: O *a.*
> Pesq.: Olhando para os gráficos construídos, vocês percebem alguma relação do *a* com esses gráficos?
> Jhon Jhonas: O *a* é exatamente o *y* sobre o *x*.
> Juninho: É a variação do *y* sobre a variação do *x*.
> Pesq.: Essa variação do *y* sobre a variação do *x* é que caracteriza a função do primeiro grau, que vocês já constataram no gráfico.
> [Perceberam que o *a* é calculado pela variação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.].

Nesse momento, observando os gráficos que eles construíram, os alunos concluem que o valor de *a* = $\frac{2}{5}$ é a variação de dois em dois reais do eixo-*y* sobre a variação de cinco em cinco centímetros no eixo-*x*, ou seja, eles caracterizaram a função afim através da taxa de variação, conforme foi mencionada por Dante, no capítulo O comércio de pizzas: trabalhando a função afim com direcionamentos de Modelagem Matemática, em que a relação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ fornece um valor constante.

> Pesq.: Vamos verificar se esse modelo que vocês descobriram vale para todos os pares que vocês mencionaram acima?
> [Os alunos fizeram as verificações e perceberam que os modelos atendem a todos esses pontos.].

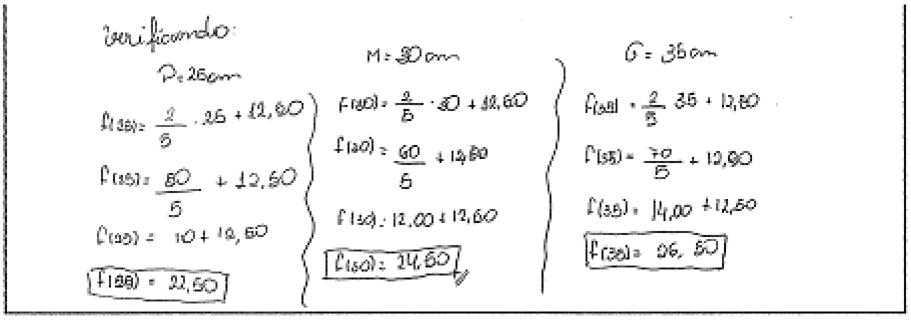


Figura 11: transcrição apêndice, registro dos estudantes Juninho e Jhon Jhonas verificando a validade do modelo da pizza “Mista”.

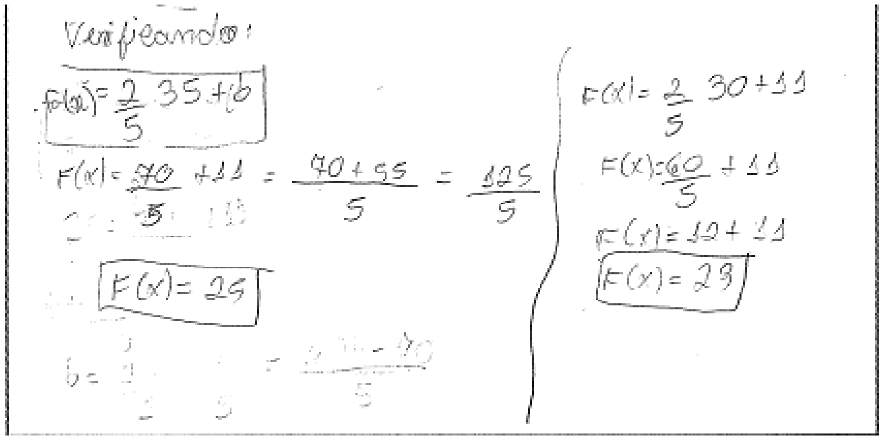


Figura 12: transcrição apêndice, registro dos estudantes Geraldo e Fabregas verificando a validade do modelo da pizza "Mussarela".

Pesq.: Vocês disseram que com esses modelos é possível o Sr. D colocar preços nas pizzas: Mista e Mussarela. E se, por acaso, ele resolver fabricar pizzas de 22,5 cm de diâmetro? É possível vocês descobrirem o preço?
Juninho: É só jogar no lugar do *x*.
Jhon Jhonas: A de 22,5 cm de diâmetro custa R$ 20,00.
Juninho: A minha deu R$ 21,50.
Pesq.: E se fosse uma pizza de 32,5 cm de diâmetro?
Jhon Jhonas: Pelo que aumenta ou diminui eu acho que 2,5 cm é R$ 1,00.
Juninho: Na minha não, na minha aumenta R$ 4,00. [Depois fica pensativo e fala que a dele é R$ 1,00 também.].
Pesq.: O que significa esse R$ 1,00?
Jhon Jhonas: Eu acho que é a distância, é o intervalo aqui do *y*, professora.
Juninho: Se eu colocar no domínio o 32,5 cm, ele vai estar exatamente entre o 30 cm e o 35 cm. E 32,50 cm é exatamente a metade de R$ 2,00.

Com os alunos felizes, ao verificarem que o modelo que construíram era válido para colocar preço nos três tamanhos de uma determinada pizza oferecida por essa pizzaria, a pesquisadora vai instigando para que eles percebessem que os outros tamanhos, no caso 22,5 cm e 32,5 cm de diâmetro, pertenciam ao mesmo gráfico; então, eles percebem que cada 2,5 cm de diâmetro gera um aumento de R$ 1,00 no valor da pizza.

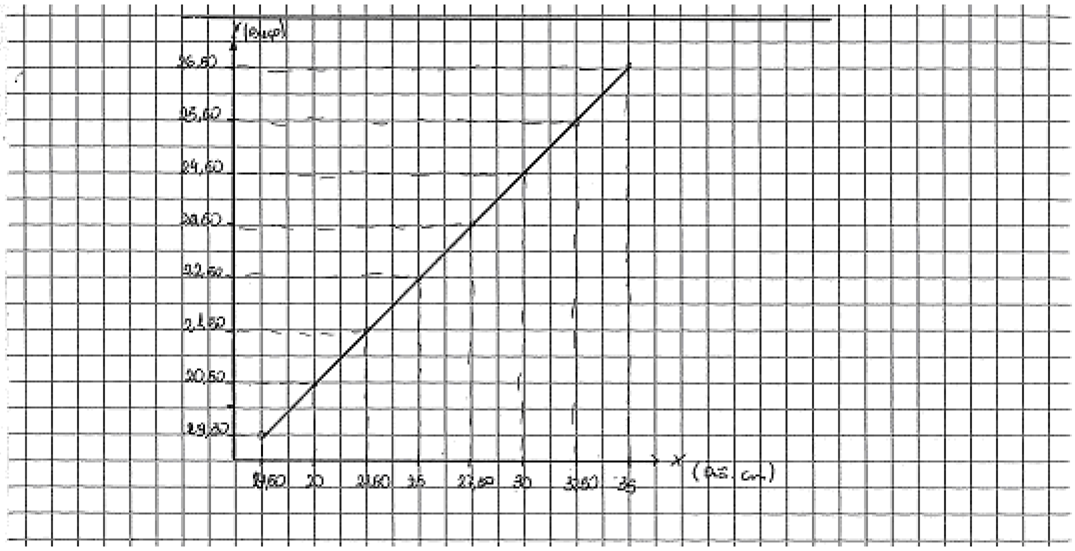


Figura 13: transcrição apêndice, registro dos estudantes Juninho e Jhon Jhonas, gráfico relacionando o diâmetro com preços para a pizza “Mista”

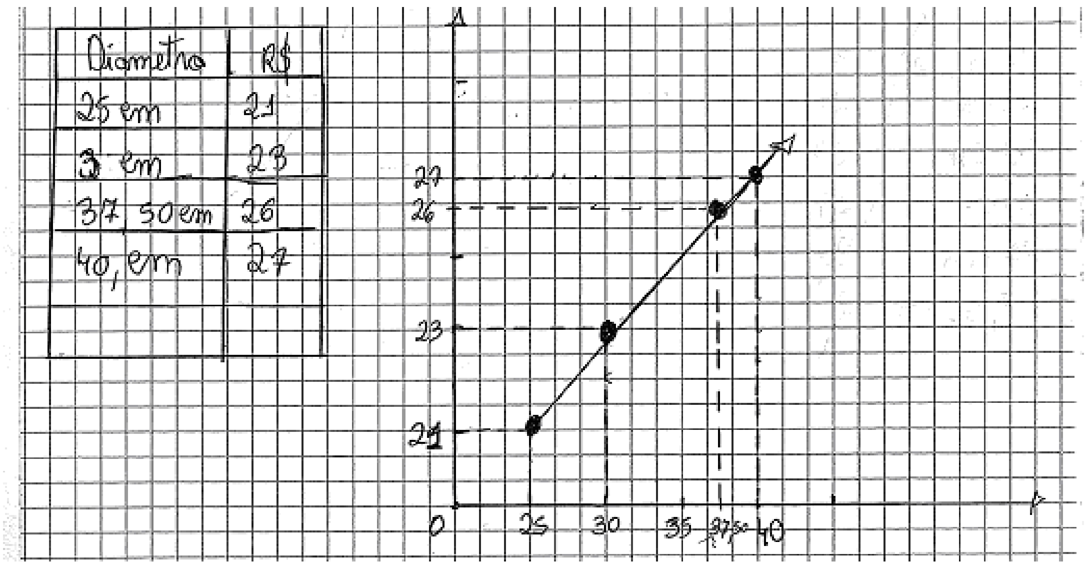


Figura 14: transcrição apêndice, registro dos estudantes Geraldo e Fabregas, gráfico relacionando o diâmetro com preços para a pizza “Mussarela”

> Pesq.: Vocês acham que tem alguma coisa a ver o *a* com crescimento e decrescimento da função?
> Juninho: Tem, porque se o *a* for negativo, vai ser para baixo. Se for positivo, vai ser crescente, e se for negativo, decrescente.
> Jhon Jhonas: Eu acho que o *a* não poderia ser negativo, porque tamanho da pizza negativo não ia dar né.

É possível perceber em suas falas, que o coeficiente *a* é o responsável pelo crescimento e decrescimento da função; Jhon Jhonas menciona que o *a* não pode ser negativo porque um preço de pizza negativo não existiria. Os alunos dialogam e questionam acerca do que é ou não possível dentro da situação e, a cada problema levantado, de acordo com as concepções de Burak, eles questionam e buscam soluções viáveis. Crescimento e decrescimento da função de acordo com o coeficiente *a*, retirado de Dante (2008), é mencionado no capítulo O comércio de pizzas: trabalhando a função afim com direcionamentos de Modelagem Matemática, na seção 5.2.4.

> Pesq.: Para finalizarmos, eu gostaria de saber o que ficou para vocês da aula de hoje?
> Juninho: A aula de hoje foi realmente conclusiva, porque eu nunca imaginaria que só vendo os preços com o total lá ia achar uma fórmula louca dessa aqui. Foi muito legal!
> Jhon Jhonas: Muito legal mesmo!
> Juninho: Agora eu vou chegar na pizzaria com o meu pai e vou falar, ó pai ó, deixa eu calcular isso aqui.

Na busca de um modelo que atribuísse preço à pizza que a dupla escolheu, os alunos recordaram vários conteúdos matemáticos, como a montagem das tabelas, construção de gráficos, pares ordenados, sistemas de equações, crescimento e decrescimento da função. Tudo isso foi surgindo da necessidade deles para deduzirem o modelo, e a pesquisadora foi incentivando e permitindo que eles falassem e concluíssem várias coisas de forma prazerosa. Percebe-se na fala de Juninho que ele nunca imaginou encontrar uma fórmula só vendo os preços oferecidos pela pizzaria. Por poderem associar a pizzaria com a matemática apreendida na sala de aula, os alunos vibraram. Os Parâmetros Curriculares Nacionais orientam que o educador faça associações da matemática da escola com o cotidiano desses estudantes, mas o que se percebe é uma enorme distância dessas matemáticas. O trabalho que está sendo desenvolvido mostra que uma aproximação é possível, e essa distância pode ser diminuída.

> Pesq.: Se encomendarmos uma pizza gigante, com 100 cm de diâmetro, qual será o seu valor?

> Juninho: $\frac{2}{5}x + 12{,}50$ igual ao preço total. É só jogar 100 cm no lugar do *x*. Vai dar R$ 52,50.
> Juninho: A gente pode depois de tudo o que construímos colocar algumas situações-problema. Por exemplo: um pizzaiolo fez uma pizza aberta na mão, ele mediu e deu 27,5 cm de diâmetro. Qual é o valor que ele deve cobrar dessa pizza?

Um questionamento passível de ser levantado em relação à sugestão da confecção de uma pizza gigante de 100 cm de diâmetro é a quantidade de material para cobrir a área dessa pizza (quadrática), e, conforme mencionou Burak, na etapa 5, fazer-se uma análise crítica das soluções. Em uma pizza com 100 cm de diâmetro, fica complicado para o dono da pizzaria colocar recheio, pois geraria uma área de 7854 cm^2. Esse ponto não foi muito discutido nesta pesquisa, mas é passível de ser levantado e analisado.

Nesse momento, eles percebem que, com o modelo nas mãos, vários questionamentos podem ser feitos e vão ser respondidos. Acrescentar valores no lugar do *x,* ou mesmo do *f(x)*, não é mais algo mecânico, como muitos livros didáticos colocam, mas algo perfeitamente compreendido pelos alunos, que farão aplicações nos modelos que eles próprios construíram. Juninho se sente livre para sugerir uma situação-problema que pode ser levantada, dentre várias outras, e será respondida mediante as aplicações nos modelos descobertos.

6.5.5 Quinto encontro

Nesse encontro, foram levantados alguns questionamentos para direcionar os participantes na busca de novas situações e modelos que atendam às situações da pizzaria do Sr. D.

> Pesq.: Uma outra questão: se eu for a essa pizzaria e comprar pizzas de calabresa. Que relações podem ser estabelecidas se eu comprar: 1, 2, 3, 4, 40, e *x* pizzas de calabresa de 35 cm?
> Fabregas: Tem que ver o preço da pizza de calabresa. [solicitou o cardápio para a busca do preço da pizza grande de calabresa e verificou que custa R$ 28,90.].
> [Os alunos pensam, discutem e registram que *x* pizzas nas dadas condições acima custarão R$ 28,90 vezes *x*.].

Pesq.: Se eu quisesse comprar 20 pizzas de calabresa de 35 cm de diâmetro, quanto eu pagaria?
Geraldo: Vinte vezes R$ 28,90.
Pesq.: Se eu quero um número indeterminado de pizzas, como eu posso representar?
Fabregas: *x* . 28,90.

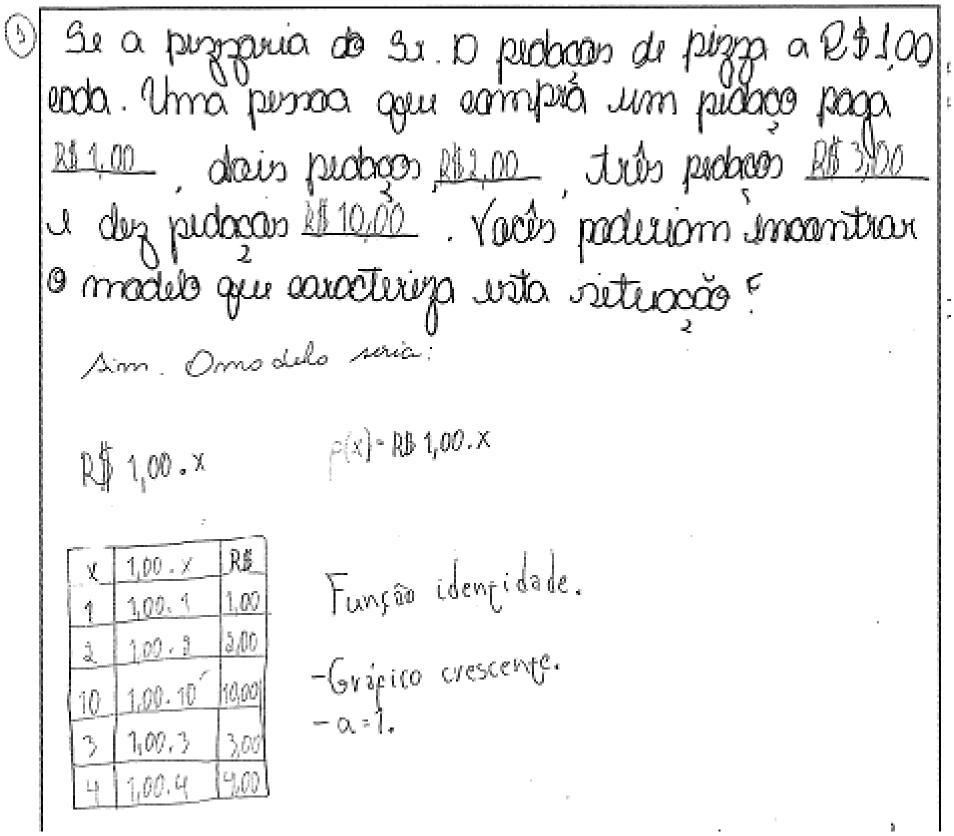
Relacionar a quantidade ao preço leva os alunos a pensarem na função de forma intuitiva, pois os participantes da pesquisa deduziram o modelo *f(x) = 28,90 . x* somente associando a quantidade de pizzas de calabresa aos seus respectivos preços.

Pesq.: Vou fazer um novo questionamento:
Fabricando cerca de 250 pizzas por semana, o Sr. D disse que compra 100 kg de mussarela. Se ele dobrar a quantidade de pizza, comprará ____; e se triplicar ____; e se quadriplicar ____. E se ele fabricar *x* pizzas?
Fabregas: Se ele dobrar, ele precisa comprar 200 kg de mussarela.
Pesq.: Se forem *x* pizzas?
Juninho: *x* vezes 100.
Juninho: Não, não é 100 . *x* não. Se eu chamar o *x* de 250, eu vou colocar 100 vezes 250, que vai dar 2500 [silencia por um instante.]. A relação é de 250 para 100.
Geraldo: Então divide 250 por 100 ué, e quanto mais pizza for...
Juninho: A cada 2,5 pizzas, um quilo.

Com essa questão, os alunos pensam nas funções, relacionando a quantidade de mussarela de que o Sr. D precisa comprar com o número de pizzas que ele fabrica. Juninho percebe que cada pizza gasta, em média, 400 gramas de mussarela, visto que o Sr. D disse que compra 100 kg de mussarela para fabricar 250 pizzas. Nesse momento, menciona-se também a existência de algumas pizzas que não levam mussarela no recheio e de outras que levam uma quantidade maior, por isso os 400 gramas são uma média.

Pesq.: Agora, vocês receberão uma folha e vou colocar algumas situações para que vocês pensem, em duplas, em uma forma de resolvê-las:
Se a pizzaria do Sr. D vendesse pedaços de pizzas a R$ 1,00 cada. Uma pessoa que compra um pedaço pagaria ____ ;e 2 pedaços; ____; 3 pedaços _____; 10 pedaços _____.
Vocês poderiam encontrar o modelo que caracteriza essa situação?

Em duplas, os alunos receberam folhas para registrar o que pensaram.



5 Se a pizzaria do Sr. D pedaços de pizza a R$1,00 cada. Uma pessoa que comprá um pedaço paga R$ 1,00, dois pedaços R$ 2,00, três pedaços R$ 3,00 e dez pedaços R$ 10,00. Vocês poderiam encontrar o modelo que caracteriza esta situação?

Sim. O modelo seria:

R$ 1,00 . x

f(x) = R$ 1,00 . x

x	1,00 . x	R$
1	1,00 . 1	1,00
2	1,00 . 2	2,00
10	1,00 . 10	10,00
3	1,00 . 3	3,00
4	1,00 . 4	4,00

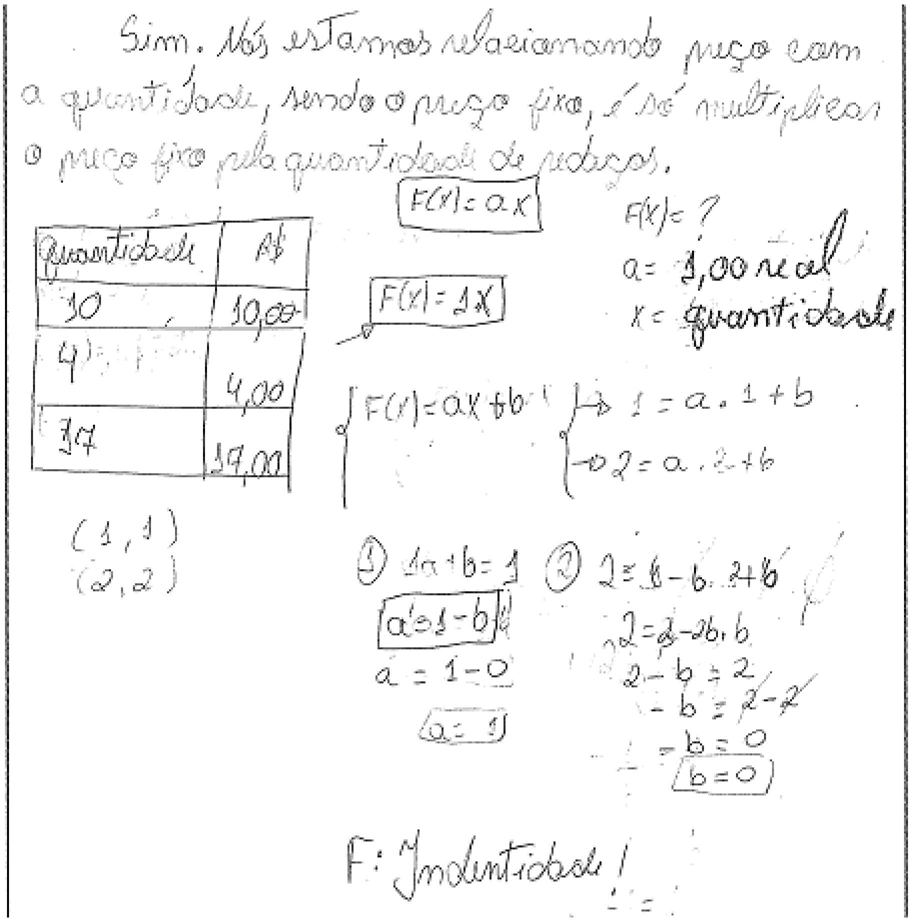
Função identidade.

-Gráfico crescente.
-a = 1.

Figura 15: transcrição apêndice, registro dos estudantes Geraldo e Fabregas buscando um modelo para a situação levantada pela pesquisadora.

> Fabregas: *f(x) = 1 . x.*
> Pesq.: Explique como você pensou Fabregas.
> Fabregas: Porque aqui, deixa eu ver como vou te explicar: *a* é o preço fixo, R$ 1,00, e *x* é a quantidade de pedaços de pizzas.
> Geraldo: *f(x)* é o preço total.
> Pesq.: Falta alguma coisa nessa função?
> Fabregas: O *b* ou o *c.*
> Geraldo: Ele é zero.
> Fabregas: Zerinho.
> Pesq.: Será que há alguma maneira de você descobrir se realmente ele é zero? Vocês se recordam do encontro passado, há um jeito para vocês descobrirem o modelo que atende a essa função?
> [Em duplas, os alunos pegaram dois pontos e foram tentar achar o *a* e o *b* através do sistema de equações, como haviam feito no encontro anterior. Constataram que realmente *f(x) = 1x* é o modelo que atende a essa situação.].

Diante dessa situação-problema, eles deduzem um modelo de uma função identidade, utilizaram o sistema de equações novamente para terem certeza de que o coeficiente $b = 0$. A função identidade foi conceituada por Dante (2008) e relatada no capítulo O comércio de pizzas: trabalhando a função afim com direcionamentos de Modelagem Matemática, seção 5.2.3.



Sim. Nós estamos relacionando preço com a quantidade, sendo o preço fixo, é só multiplicar o preço fixo pela quantidade de pedaços.

Quantidade	R$
10	10,00
4	4,00
17	17,00

$\boxed{F(x)=a.x}$

$\boxed{F(x)=1x}$

F(x) = ?
a = 1,00 real
x = quantidade

$F(x)=ax+b \rightarrow 1 = a.1+b$
$\rightarrow 2 = a.2+b$

(1, 1)
(2, 2)

① $1a+b=1$
$\boxed{a=1-b}$
$a = 1-0$
$\boxed{a=1}$

② $2=(1-b).2+b$
$2=2-2b+b$
$2-b=2$
$-b=\cancel{2-2}$
$-b=0$
$\boxed{b=0}$

F: Identidade!

Figura 16: transcrição apêndice, registro dos estudantes Juninho e Jhon Jhonas buscando um modelo para a situação levantada pela pesquisadora.

> Pesq.: Que características deve ter esse gráfico para representar uma função do primeiro grau?
> Jhon Jhonas: A variação do *y* tem que estar sempre na mesma variação do *x*, professora.
> Pesq.: Explique melhor isso, Jhon Jhonas.
> Jhon Jhonas: Aqui sempre muda R$ 1,00 [aponta para o eixo-*y.*] e aqui vai sempre aumentar um pedaço [aponta para o eixo-*x.*]. Em cada pedaço, aumenta R$ 1,00, aí é uma função do primeiro grau.
> Geraldo: O *y* vai aumentar do mesmo jeito que o *x.*

Neste momento, percebe-se que a noção de função do primeiro grau, especialmente a função *f(x) = x* por meio da variação, ficou clara para os quatro participantes. Jhon Jhonas aponta para o gráfico e fala com convicção que o preço aumenta de R$ 1,00 em R$ 1,00, enquanto o número de pedaços aumenta de 1 em 1.

> Pesq.: Essa função, que vocês disseram que é do primeiro grau, tem um nome especial. Vocês poderiam me dizer o nome dela?
> [Todos ficaram curiosos acerca do nome que esse tipo de função recebe. Falaram algumas características dela, pediram dicas para a pesquisadora, mas do nome eles não se lembraram, e a pesquisadora precisou dizer que é a função identidade.].

Registraram algumas características da função identidade.

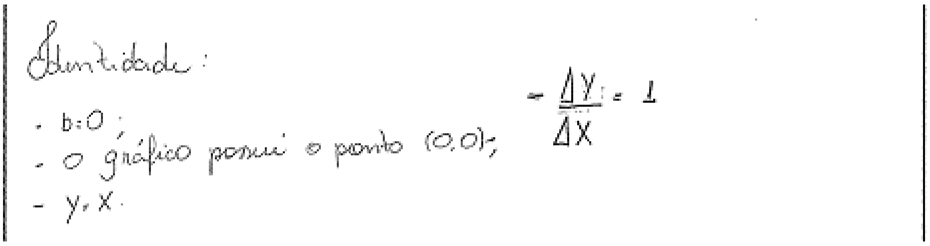

Identidade:
- $b = 0$;
- o gráfico possui o ponto $(0,0)$;
- $y = x$.
- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$

Figura 17: transcrição apêndice, registro dos estudantes: Geraldo e Fabregas.

> Pesq.: A segunda situação que vou deixar para vocês questionarem é: se a pizzaria do Sr. D trabalhasse com rodízios e o valor por pessoa fosse R$ 15,00, quanto pagaria uma pessoa que consumisse 1 pedaço ____, 2 pedaços _____, 10 pedaços?
> [Fizeram uma tabela relacionando o número de pedaços ao preço fixo de R$ 15,00 e esboçaram um gráfico.]. Apêndice (p. 212, 214, 215, 216).
> Pesq.: Como ficou esse gráfico? Esse gráfico é o quê?
> Geraldo: Constante.
> Pesq.: Por que constante, Geraldo?
> Geraldo: Porque o *y* não varia?
> Pesq.: Como ficaria então a lei dessa função?
> Geraldo: *f(x) = 15*.

Geraldo, após a construção do gráfico, caracteriza a função como constante, mas Jhon Jhonas fica meio inseguro se o modelo é *f(x) = 15* e pede para fazer a verificação através do sistema de equações, conforme fez nos modelos anteriores. A conceituação da função constante é também mencionada por Dante (2008) e citada no capítulo O comércio de pizzas: trabalhando a função afim com direcionamentos de Modelagem Matemática, na seção 5.2.3.

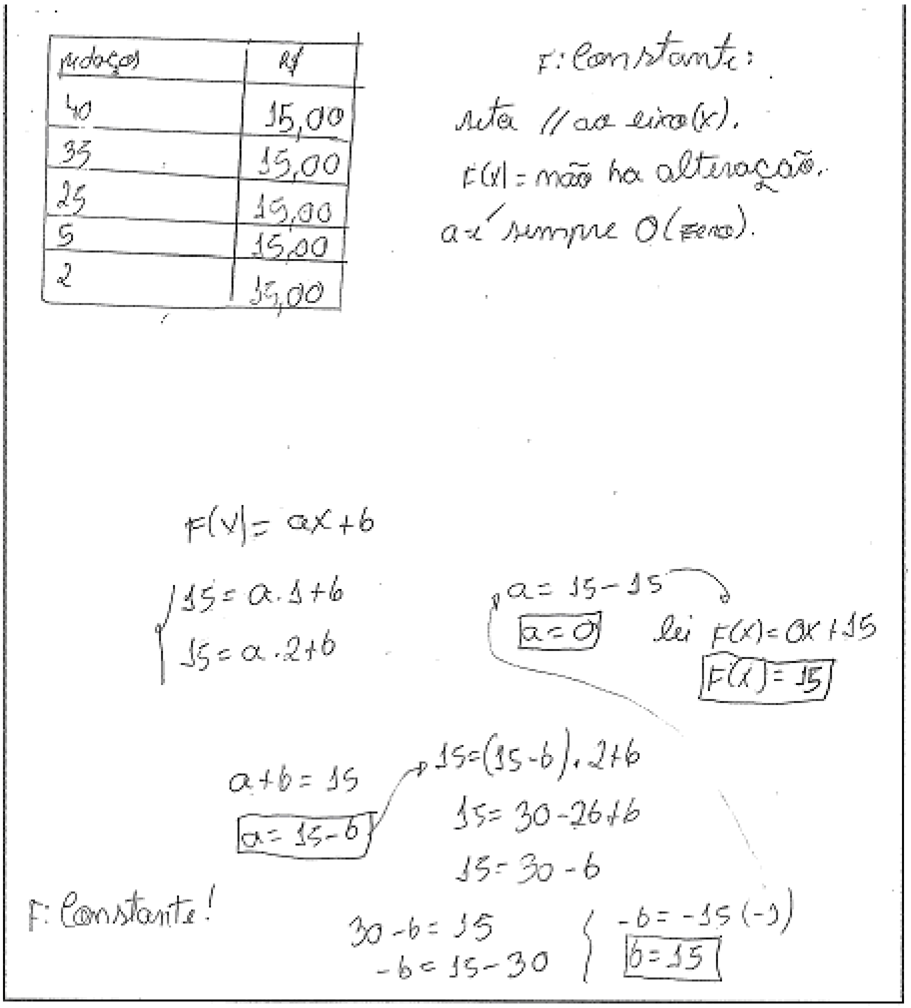


Figura 18: transcrição apêndice, registro dos estudantes: Jhon Jhonas e Juninho, buscando um modelo para a função constante.

> Pesq.: Após vocês terem encontrado o modelo, me digam como é a função constante.
> Fabregas: O *a* é zero.
> Jhon Jhonas: O *x* também é zero, consequentemente.
> Pesq.: Então a lei dessa função é de que tipo?
> Fabregas: O *y* é sempre o mesmo valor.
> Pesq.: Que valor é esse?
> Fabregas: Nesse caso é R$ 15,00.

Nesse momento, os alunos levantando algumas características que percebiam na função constante, fazem os devidos registros, que se encontram no apêndice (p. 212, 217). Levantaram novamente o valor do *a* através da variação e perceberam que ele realmente é zero.

> Pesq.: Agora vamos analisar uma terceira situação:
> Na pizzaria do Sr. D, vocês questionaram acerca dos valores que são cobrados nas entregas de pizzas. O valor estipulado para entregas em bairros próximos é de R$ 3,00; conforme mencionou o Sr. D.
> Algumas pessoas que moram próximas a essa pizzaria ligam e encomendam pizzas. Se 1 pessoa faz a encomenda, a pizzaria receberá_____ de taxa de entrega. E se 2 pessoas encomendarem? E se 3 pessoas encomendarem? E se 10 pessoas encomendarem?
> Vocês poderiam encontrar o modelo que caracteriza essa situação?
> [Os alunos, em duplas, esboçaram o gráfico que representa essa situação.].
> Pesq.: Qual a lei que você encontrou, Juninho?
> Juninho: R$ 3,00 vezes *x.*
> Geraldo: *f(x) = 3. x*
> Pesq.: E o Jhon Jhonas?
> Jhon Jhonas: A mesma.
> Pesq.: Esse gráfico para vocês lembra uma função?
> Geraldo: Sim, o primeiro grau.
> [Todos concordaram.].
> Pesq.: Vocês acham que é do primeiro grau por quê?
> Fabregas: É uma reta.
> Juninho: O gráfico é uma reta crescente, com a variação de *y*, proporcional à variação de *x*.

A lei ou modelo da função foi encontrada, e, depois de observarem o gráfico, os alunos disseram ser do primeiro grau por perceberem ser uma reta o esboço do gráfico.

> Pesq.: O que mais caracteriza essa função?
> Juninho: Está faltando o *b*, ele é zero, então ela é uma função identidade?
> Pesq.: Será que ela é identidade?
> Juninho: Não, não.
> Geraldo: Na função identidade, o *a* tem que ser 1.
> Pesq.: No nosso caso, o *a* foi 3, então ela recebe um outro nome.
> Jhon Jhonas: Função o quê?
> Pesq.: O *a* é diferente de zero, e o *b* é zero, como é chamada essa função?
> Jhon Jhonas: Eu acho que é a linear então.

Na primeira situação-problema, os alunos perguntam acerca de possíveis nomes que as funções podem receber e se recordam de que já haviam estudado isso. Instigados vão se recordando de alguns nomes, dentre eles, a linear, por isso Jhon Jhonas diz que acha que é linear então. Dante também define a função linear no capítulo O comércio de pizzas: trabalhando a função afim com direcionamentos de Modelagem Matemática, na seção 5.2.3.

> Pesq.: Se zero pessoa encomendar, ele não vai ganhar dinheiro. Zero pessoa, zero real, que ponto é esse?
> Geraldo: É a origem.
> Pesq.: Será que a função linear sempre passa pela origem?
> Jhon Jhonas: Sim, começa na origem.
> Pesq.: Será que qualquer função linear passa pela origem?
> Juninho: Sim.
> Jhon Jhonas: Sim.
> Fabregas: Eu acho que passa.

Levantando várias características da função linear e registrando, os alunos conversam e caracterizam essa função de forma tranquila, sem muita preocupação com nomes e fórmulas prontas. Percebe-se, através dos diálogos citados, que os alunos caracterizaram as funções (linear, constante, identidade) sem uma preocupação com todo o rigor que a linguagem matemática oferece. Os diálogos e as intervenções da pesquisadora contribuem para a criticidade dos alunos; de acordo com Barbosa, seção 4.1.1, o diálogo se apresenta como uma peça chave, para que ocorra a aprendizagem e para a construção de ambientes democráticos nas salas de aula.

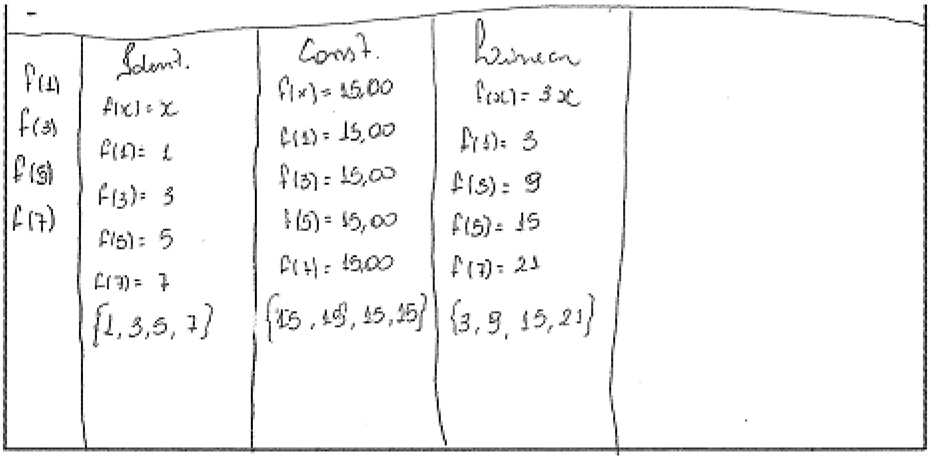
6.5.6 Sexto encontro

O encontro tem início com a pesquisadora perguntando aos alunos o que haviam descoberto no encontro anterior. Eles se recordam dos três modelos que encontraram: função identidade, constante e linear.

> Pesq.: Com esses três modelos agora, eu sugiro que achem *f(1), f(3), f(5) e f(7)* de cada um deles.
> Pesq.: O que seria esse *f(1), f(3), f(5) e f(7)*?
> Geraldo: Imagem?
> Juninho: *f(1)* é aplicar o *1* no lugar de *x* no modelo.
> Pesq.: Para buscar o quê?
> Fabregas: o *y*.
> Pesq.: O que é o *y* em uma função?
> Geraldo: A imagem.

Os valores do domínio *(1, 3, 5, 7)* sugeridos estão em Progressão Aritmética, isso oportuniza aos alunos a percepção de que as funções afins podem ser definidas com o auxílio dessas progressões.

Como mencionou Geraldo, e os demais concordaram, fazer o *f(1), f(3), f(5) e f(7)* é buscar a imagem das funções.



	Ident.	Const.	Linear	
f(1)	f(x) = x	f(x) = 15,00	f(x) = 3x	
f(3)	f(1) = 1	f(1) = 15,00	f(1) = 3	
f(5)	f(3) = 3	f(3) = 15,00	f(3) = 9	
f(7)	f(5) = 5	f(5) = 15,00	f(5) = 15	
	f(7) = 7	f(7) = 15,00	f(7) = 21	
	{1, 3, 5, 7}	{15, 15, 15, 15}	{3, 9, 15, 21}	

Figura 19: transcrição apêndice, relato dos quatro estudantes.

> [Pegaram os três modelos e substituíram os *x* por *1, 3, 5* e *7* e encontraram três sequências: *(1, 3, 5,7)*; *(15, 15, 15, 15)*; *(3, 9, 15, 21)*.].
> Pesq.: Agora olhem essas três seqüências que encontraram e busquem algumas características nelas.
> Pesq.: Sim, essas são algumas características, pensem em mais algumas. Tentem analisar a primeira sequência *(1, 3, 5, 7)*.
> Geraldo: Tá aumentando de dois em dois.
> Pesq.: E a segunda sequência *(15, 15, 15, 15)*, o que vocês podem observar?
> Juninho: Não está somando nem subtraindo nada.
> Pesq.: Então não está somando nem subtraindo nada? De quinze para quinze...
> Juninho: Zero. Uai 15 + 0.
> Pesq.: E a última sequencia *(3, 9, 15, 21)*?
> Fabregas: Sequência de seis em seis.
> Juninho: Números ímpares, múltiplos de 3.
> Geraldo: A diferença entre eles é -6.

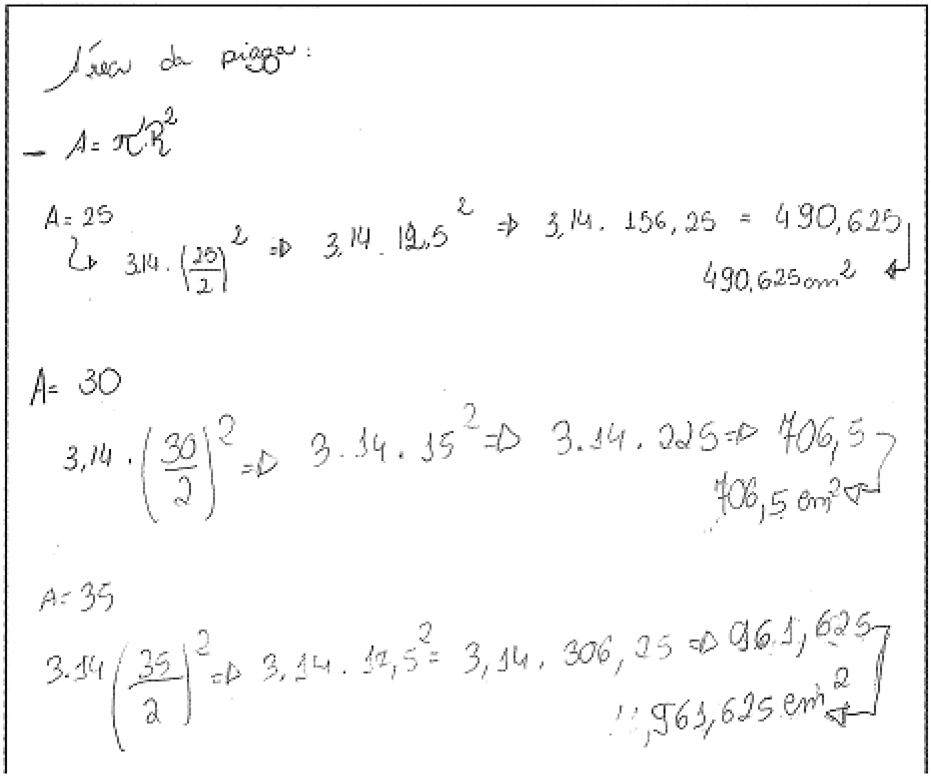
No Levantamento desses questionamentos, percebe-se na fala dos alunos a possibilidade de se introduzir a Progressão Aritmética, partindo-se de conceitos de funções: afins, constantes, lineares e identidades. Eles deixam claro que, de um termo para outro, soma-se um mesmo número; intuitivamente, eles associam as funções com as progressões aritméticas. Essas sequências são, então, questionadas. Retomam-se os gráficos que eles construíram no quarto encontro, para que pudessem perceber, através dos eixos (*x* e *y*), que há um número que somado ao anterior gera o segundo. Registros dos alunos no apêndice (p. 220).

> Pesq.: No dia eu questionei a vocês como acham que eu consigo calcular a área dessa pizza. Um de vocês disse que era para eu pegar o raio e multiplicar por 6,28, ou seja, confundiu o comprimento da circunferência com a área. Na oportunidade, eu sugeri que vocês pesquisassem em casa como eu calculo a área das regiões circulares. Alguém conseguiu encontrar essa relação?
> Juninho: É π r. 0,5?
> Geraldo: Não, é πr^2.
> Juninho: É verdade.
> Pesq.: O que vocês acham que é essa relação $A = \pi r^2$?
> [Todos ficam pensativos.].
> Juninho: É uma função quadrática né?
> Pesq.: Por que Juninho?
> Juninho: Porque o π já tem o valor dele, que é universal, 3,14. O raio é a imagem que pode variar. Aí podemos substituir o raio por *x* e vai ficar um termo ao quadrado, o *x* ao quadrado.
> Pesq.: Você acha então que é uma função quadrática. O que estaria em função do quê?
> Juninho: A área em função do raio ao quadrado.

Percebe-se na fala dos estudantes a menção à imagem e domínio, associados às áreas das pizzas; já dialogam com termos técnicos que viram na sala de aula e tentam fazer conexões. Rapidamente, colocam a incógnita *x* no lugar do raio, pois sentem-se mais à vontade em trabalhar com *x* e *y*, pois estão habituados nesse ambiente.

Os alunos buscaram e trouxeram a relação que permite o cálculo da área da pizza, e Juninho vai mais além ao mencionar que é uma função quadrática, pois o *x* está elevado ao quadrado, segundo ele. É lhes sugerido que calculem a área dos três tamanhos de pizzas que a pizzaria oferece. [Solicitaram um papel e foram dialogando entre si para encontrarem a área das pizzas de 25 cm, 30 cm e 35 cm oferecidas na pizzaria do Sr. D.].

À medida que o diálogo ia acontecendo foi possível falar um pouco nas unidades de medida, no caso das pizzas, centímetros quadrados. Para que eles pensassem nessas situações, a pesquisadora os instigava a todo momento.



Área da pizza:

$A = \pi \cdot R^2$

A= 25

$3,14 \cdot \left(\frac{25}{2}\right)^2 \Rightarrow 3,14 \cdot 12,5^2 \Rightarrow 3,14 \cdot 156,25 = 490,625$

$490,625\ cm^2$

A= 30

$3,14 \cdot \left(\frac{30}{2}\right)^2 \Rightarrow 3.14 \cdot 15^2 \Rightarrow 3.14 \cdot 225 \Rightarrow 706,5$

$706,5\ cm^2$

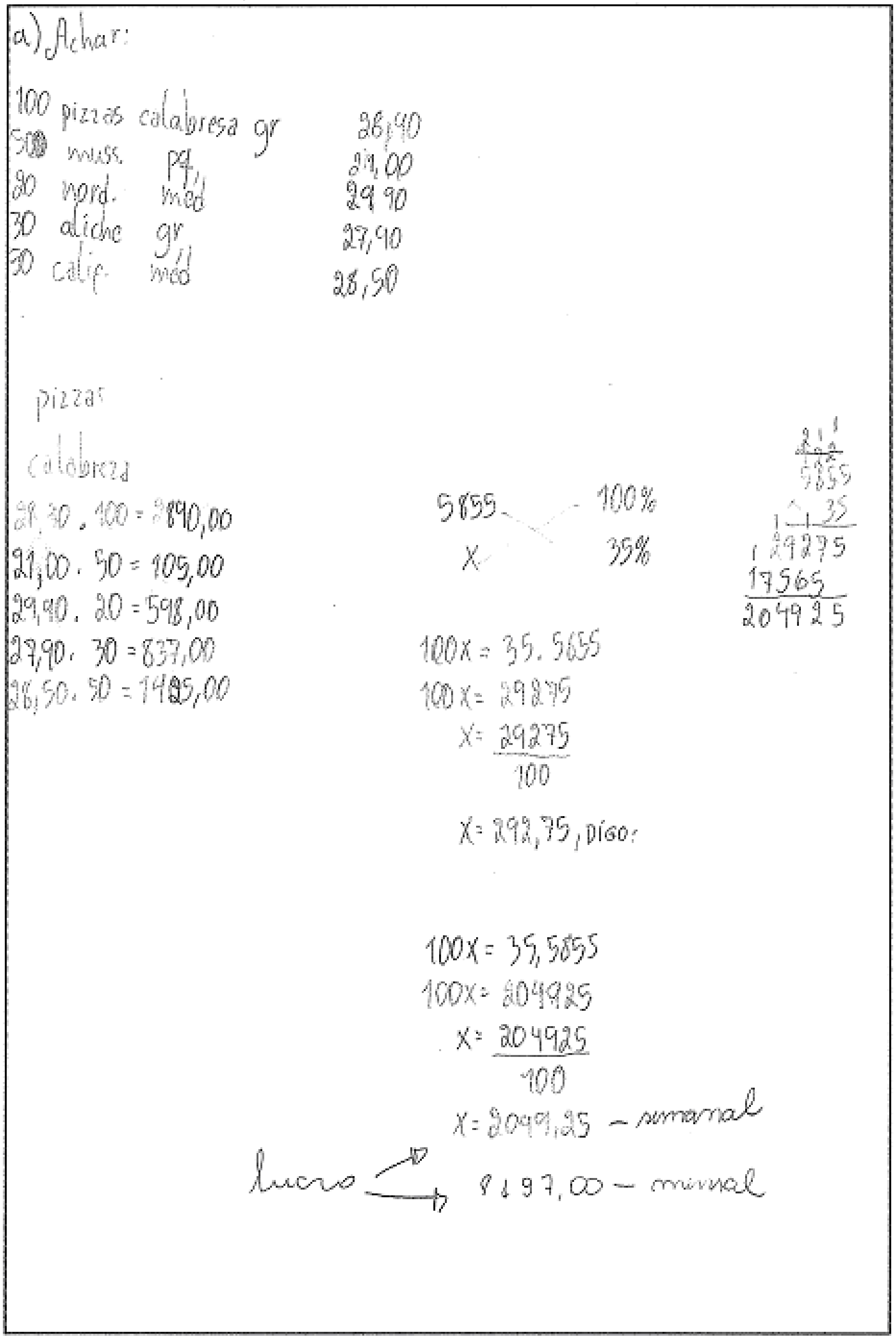
A= 35

$3.14 \left(\frac{35}{2}\right)^2 \Rightarrow 3,14 \cdot 17,5^2 = 3,14 \cdot 306,25 \Rightarrow 961,625$

$961,625\ cm^2$

Figura 20: transcrição apêndice, registro dos quatro alunos, calculando a área das pizzas.

Pesq.: Vou abordar mais uma questão para que possam refletir acerca dela: uma das questões que vocês levantaram lá na pizzaria foi acerca do lucro ou do prejuízo do dono do estabelecimento, ele afirmou que ganha em média 35 % de lucro e que vende em média 250 pizzas por semana. Digam quanto ele receberá de lucro em uma semana que ele venda: 100 pizzas de calabresa grandes, 50 pizzas de mussarela pequenas, 20 Nordestinas médias, 30 de Aliche grandes e 50 de Califórnia médias.
[Os quatro alunos começaram a discutir e registrar o que pensam acerca desse lucro numa folha.].
Pesq.: Geraldo disse que o lucro é de R$ 292,75.
Juninho: Só isso.
Geraldo: Eu multipliquei o tanto de pizzas que vendeu pelo preço, somei o preço das pizzas e fiz a regra de três para achar a porcentagem. Peguei o preço total e tirei os 35% de lucro.



a) Achar:

100 pizzas calabresa gr 28,90
50 muss. pq. 21,00
20 nord. méd 29,90
30 aliche gr 27,90
50 calip. méd 28,50

pizzas
calabresa
28,90 . 100 = 2890,00
21,00 . 50 = 105,00
29,90 . 20 = 598,00
27,90 . 30 = 837,00
28,50 . 50 = 1425,00

5855 — 100%
x — 35%

5855
× 35
29275
17565
204925

100x = 35 . 5855
100x = 29275
x = 29275/100
x = 292,75 , Digo:

100x = 35,5855
100x = 204925
x = 204925/100
x = 2049,25 – semanal
lucro → 8197,00 – mensal

Figura 21: transcrição apêndice, registro dos quatro alunos, buscando o lucro do Sr. D.[10]

[10] Os alunos obtiveram um erro ao calcularem o valor das 50 pizzas de Mussarela pequenas, pois o valor de R$ 21,00 vezes as 50 pizzas da situação-problema levantada geram o valor de R$ 1050,00, e não R$ 150,00, como registraram. Perceberam que erraram nos cálculos , mas não encontraram o somatório correto, que é de R$ 6800,00. Com essa soma, encontram-se R$ 2380,00 de lucro semanal e R$ 9520,00 de lucro mensal.

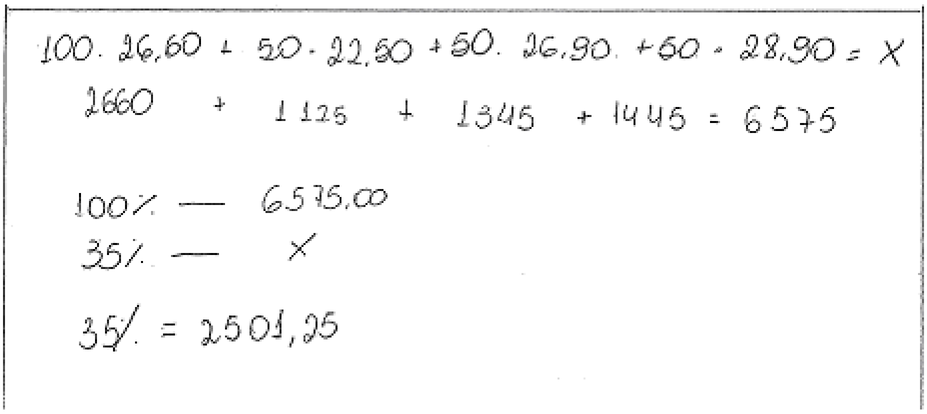


Figura 22: transcrição apêndice, registro dos quatro alunos buscando o lucro do Sr.D na segunda situação levantada pela pesquisadora.[11]

> Juninho: Está dando R$ 2049,25.
> Fabregas: Eu achei esse valor de R$ 292,75 muito baixo também.
> Juninho: Se for colocar 70% em cima de R$ 295,25 não dá R$ 5855,00.
> Pesq.: Por que você achou o valor R$ 295,25 muito baixo Juninho?
> Juninho: Porque se for dividir 50% ia dar dois mil novecentos e pouco e 30% não pode ser tão baixo.

Os alunos buscam a porcentagem de lucro do Sr. D na situação levantada pela pesquisadora, e Juninho não hesita em dizer que Geraldo errou nos cálculos, pois, mentalmente, ele percebe que a metade de R$ 5855,00 é cerca de R$ 2900,00 e que 35% desse valor não podem ser apenas R$ 295,25, como mencionou Geraldo. Então Geraldo confere e encontra um erro em seus cálculos. Mesmo ao consertar os cálculos, o somatório encontrado, R$ 5855,00, está equivocado, pois, ao multiplicarem as 50 pizzas de Mussarela pequenas, encontram R$ 105,00, ao invés de R$ 1050,00. Sem perceber essa incoerência, Geraldo utiliza a regra de três, buscando a porcentagem de lucro do Sr. D.

> Pesq.: Supondo que o Sr. D venda em um mês essa mesma quantidade de pizzas por semana, qual será o seu lucro mensal?
> Juninho: Se for o mesmo modelo, vai ser sempre R$ 2049,25 na mão dele.
> Pesq.: E por mês?
> Geraldo: Vai dar mais ou menos R$ 8000,00.
> Juninho: Vai dar um pouquinho mais. Dá R$ 8197,00.

[11] Os 35% que os alunos buscaram nessa segunda situação geram um valor de R$ 2301,25.

A situação hipotética é o Sr. D vendendo a mesma quantidade de pizzas e os mesmos sabores. Esse valor de R$ 2049,25 foi calculado em cima do valor de R$ 5855,00. Ao serem questionados do lucro mensal, já fazem uma aproximação para cerca de R$ 8000,00.

Embora os alunos não tenham percebido o erro nos cálculos, eles partiram do pressuposto de que, vendendo esses sabores e essas quantidades de pizzas, o Sr. D terá um lucro de cerca de R$ 8000,00.

Juntamente com a professora, os alunos poderiam estabelecer outras simulações para calcular o lucro que o dono do estabelecimento teria. Há uma ampla possibilidade de combinações dos sabores de pizzas, assim como de seus respectivos valores. Os 35% de lucro foram calculados com base na declaração do Sr. D, que esse é seu lucro médio.

> Pesq.: Vamos agora supor que, numa determinada semana, o Sr. D venda: 100 pizzas Napolitanas grandes, 50 Milho Verde pequenas, 50 Catupiry Especial médias e 50 Firenze grandes. Quanto ele receberia de lucro? [Solicitam uma folha para os registros.].
> Pesq.: Juninho, explica como vocês pensaram?
> Juninho: Professora montamos uma expressão, achamos o resultado de cada uma e somamos. A porcentagem de 35% do total aqui, de R$ 6575,00 deu R$ 2501,25.
> Pesq.: Na primeira situação, quanto foi o lucro semanal mesmo?
> Juninho: R$ 2049,00.
> Pesq.: E na segunda situação?
> Juninho: Deu R$ 2501,25.
> Pesq.: Houve alguma diferença nos lucros?
> Jhon Jhonas: Deu.

Os 35% de R$ 6575,00 são R$ 2301,25; eles obtiveram um erro de cálculos, mas perceberam que os valores eram diferentes pelo fato de os sabores de pizzas serem diferentes, consequentemente, os preços e, por sua vez, o lucro também é variável. Partiu-se da simulação de que o Sr. D tenha vendido esses novos sabores e com aqueles tamanhos. Essa situação de lucro pode ser calculada de acordo com o número e o tamanho de pizzas adotados em cada situação e cabe ao educador respeitar as escolhas do seu aluno.

> Pesq.: Se, ao invés de vender 250 pizzas por semana, ele vender apenas 150. O que acontecerá com seu lucro?

Juninho: Vai diminuir.
Fabregas: É, vai diminuir. Ele paga os funcionários mensalmente independente do tanto que ele vender?
Pesq.: Vocês questionaram isso lá não se recordam?
Juninho: É fixo.
Fabregas: Então ele vai ter menos lucro.
Pesq.: Pode acontecer de ele não ter lucro nenhum?
Fabregas: Não.
Geraldo: Pode.
Fabregas: Só se ele vender abaixo da meta.

Com os questionamentos sendo levantados, os alunos puderam perceber a questão do lucro, também do prejuízo, e comentaram até mesmo a possibilidade de a pizzaria vir a falir se não conseguir vender uma quantidade suficiente de pizzas, pois o Sr. D possui várias despesas fixas e precisa vender uma quantidade de pizzas que lhe possibilite pagá-las e obter um lucro; caso contrário, não compensa para ele manter o negócio. Com essa discussão, percebe-se a oportunidade de levantar a construção de outro modelo, acerca da renda do dono da pizzaria, definindo-se os valores variáveis e os valores fixos.

6.6 Algumas conclusões dos participantes da pesquisa

Ao término do sexto encontro, Fabregas, Geraldo, Juninho e Jhon Jhonas falam um pouco do trabalho desenvolvido; registrando em uma folha que se encontra no apêndice (p. 224-227).

A seguir, o relato de alguns desses momentos:

Fabregas: Foi interessante! A matemática deixou também de ser um pouco chata, porque dentro de sala de aula é chata. Algumas vezes, igual hoje, foi legal, mas foi cansativo, mas deu para a gente aprender bastante coisa. É isso aí.
Juninho: Para mim foi uma experiência muito legal, eu nunca tinha pensado em trabalhar com pizzaria. Eu achei que a matemática era uma coisa que a gente só trabalhava com números dentro de sala, números em escritório e eu não achei que a pizzaria ia chegar tão longe assim com a matemática. Foi uma maneira muito legal de aprender a matemática, foi uma coisa meio inesperada para mim, ver tanta coisa de matemática numa pizzaria, igual achar uma função do primeiro grau no preço de uma pizza. Achei muito interessante!
Geraldo: Nunca vi tanto número numa pizza só!

Jhon Jhonas: Só vou contar uma experiência rápida: eu sempre pensava em sala de aula como que eu ia aplicar as experiências do colégio na minha vida, eu estou falando sério mesmo. Eu sempre pensava, para quê que eu estou aprendendo isso. Eu achei bem interessante o trabalho, bem legal mesmo porque parece que abre assim a nossa cabeça para a gente ver essas aplicações. Foi bem legal o trabalho, a gente se divertiu lá e tudo mais foi bem legal pra gente saber também aplicar as coisas. Igual eu aprendi a aplicar essas coisas na minha vida, vendo que está sempre no cotidiano, vendo que posso abrir um negócio próprio, já tenho mais ou menos uma manha, uma noção. Muito interessante professora!

Geraldo: Dentro de sala eu já falei um monte de vezes: cara isso aí que eu estou aprendendo aonde eu vou usar? Isso aí responde tudo. Eu falava, função do segundo grau, aonde eu vou usar isso?

Pesq.: Deixa me interferir um pouquinho. Percebo que a angústia de vocês em tentar associar um pouco a matemática com alguma coisa da vida de vocês começou a ser iluminada. Vocês puderam ver que há a possibilidade de trabalhar de forma diferente. E com relação à matemática em si, o que foi possível para vocês, ou recordarem, ou aprenderem ou a fazerem ligações?

Jhon Jhonas: A parte de fazer o sistema foi assim bem recordado.

Juninho: Nossa, desde o ano passado que eu não via sistema de equação, aí veio para eu nunca mais esquecer.

Geraldo: E olha que no ano passado nós estudamos sistemas até falar chega.

Pesq.: Qual a diferença dos sistemas que você aprendeu no ano passado pro que a gente fez agora? Será que há alguma diferença?

Geraldo: Tem porque eu aprendi a aplicar o sistema em algumas situações. Lá não, lá dava um exemplo de uns números passava um monte e a gente tinha que fazer.

Pesq.: Então a diferença que você menciona é que agora você aplicou em alguma situação e essa situação é o que para você?

Juninho: Uai da nossa realidade.

Geraldo: Só vendo você falar assim, são coisas que acontecem o tempo inteiro e a gente nem percebe.

Pesq.: Vocês acham que o tema que eu sugeri “O Comércio de Pizzas” foi válido ou não, foi um tema legal?

Juninho: No início foi bem nada a ver, eu achei que eu ia chegar na pizzaria perguntar o preço e pronto acabou, é a única coisa de matemática que eu vou perguntar. Aí chegamos lá vimos diâmetro, preço, lucro, tudo que a gente podia ver na matemática. Chegando aqui a gente afundou na matemática, chegamos no gráfico da pizzaria, chegamos à ..., e ainda aprendemos aquele negócio de achar o *a* das funções, nós vimos muita coisa.

Jhon Jhonas: Eu nunca ia imaginar que nossas perguntas iam dar em alguma coisa.

Juninho: Eu achei uma loucura no início, mas, agora no final eu vi que valeu muito a pena.

Pesq.: O que vocês aprenderam de matemática com essa experiência?

Fabregas: A gente pode perceber na montagem dos gráficos, a respeito do que é uma função afim, constante, identidade.

Juninho: A gente recordou as funções: identidade, linear e a afim, a gente recordou proporção.

Geraldo: Área da circunferência, diâmetro.
Juninho: A gente também recordou a equação quadrática.
Jhon Jhonas: Eu acho que o mais importante, eu tive pensando, tem gente que não consegue se dar bem em matemática e eu sei qual pode ser a solução delas. Muitos professores só fazem a matemática na decoreba mesmo, as pessoas tinham que levar a entender a matemática, aí fica mel na chupeta para ela né.
Fabregas: Aí fica muito mais interessante.
Pesq.: Estudar função dessa forma foi diferente do que vocês normalmente estudam na sala de aula? [Todos disseram que sim.].
Juninho: Porque é uma forma aplicada de estudar. Porque na hora que estamos estudando na sala, a professora fala assim, isso aqui é a função do primeiro grau e a gente tem que ficar assim, quando eu ver esse número, desse jeito ele representa uma função do primeiro grau. Aqui a gente viu um modo de associar a função do primeiro grau com uma realidade nova.
Geraldo: Eu acho que é muito diferente, e assim é melhor de aprender também.
Fabregas: Porque a gente presta mais atenção também.
Geraldo: Na sala de aula é muita repetição.
Pesq.: Então com o que seria uma simples visita em uma pizzaria foi possível a gente trabalhar uma infinidade de coisas.
Juninho: É. Um bimestre da escola.
Pesq.: Ou mais não é. Retornamos a alguns conteúdos que nem são estudados no primeiro ano, mas surgiram de acordo com nossas necessidades. Eu gostaria de dizer que gostei muito de trabalhar com vocês, agradeço a contribuição de todos, tenho certeza de que me ajudaram bastante e o que dialogamos e construímos tem um valor imenso para vocês também, pois poderão levar aonde forem o que vimos no decorrer dessa experiência.
A intenção da Educação Matemática, eu busquei mais especificamente a Modelagem Matemática, é buscar um trabalho de forma diferenciada, porque percebo que essa forma tradicional e repetitiva de sala de aula necessita de mudanças.
Eu quis buscar na pizzaria uma realidade de vocês, uma possibilidade de vocês perceberem que matemática existe lá e como podemos trabalhar com esses valores de forma dinâmica e mais interessante. Espero que essa experiência nova contribua para um crescimento maior de vocês e que frutifique e desperte em vocês a vontade de buscar e crescer cada dia mais.

Diante do trabalho desenvolvido e da fala dos alunos, pode-se perceber que eles clamam por mudanças, carecem urgentemente de professores que procurem trabalhar a matemática de forma diferenciada, fazendo associações com a realidade deles. No retorno da visita à pizzaria, quando se começou a trabalhar tudo o que foi coletado, os alunos associando a matemática que aprenderam nas salas de aula com a matemática que buscaram lá, na realidade deles, ficaram deslumbrados. É possível perceber, nas conclusões finais, o quanto eles necessitam de fazer associações, de entender o porquê e para que estão estudando determinados conteúdos.

Ainda há uma desconexão muito grande da matemática da rua com a matemática da escola. Os estudantes clamam por mudanças, acham mais fácil aprender a matemática dessa forma.

A Modelagem Matemática auxilia o educador a trabalhar fazendo essa conexão da matemática da escola com a matemática encontrada em situações da realidade dos alunos.

6.7 Algumas interpretações da pesquisa

O objetivo desta pesquisa, já explicitado no capítulo Importância de funções para a Matemática, foi a busca de situações cotidianas dos alunos, tendo como direcionadora a Modelagem Matemática e o seu auxílio para tal contextualização da matemática nesse dia a dia, para que eles pudessem atribuir significados ao conceito de função. Neste momento, é de bom tom esclarecer que aqui se compreende a atribuição de significados de uma forma ampla, que ao utilizar determinado conceito em um contexto, o aluno possa atribuir significados a esse conceito.

A título de maior esclarecimento, exemplifica-se o conceito de “taxa de variação constante”, cuja definição se encontra no capítulo O comércio de pizzas: trabalhando a função afim com direcionamentos de Modelagem Matemática, nas páginas (82 e 85), retiradas de Dante (2008) e Lima (1997), vai caracterizar a função afim. No trabalho de campo realizado com os estudantes, eles atribuíram o significado de uma taxa de variação constante a preço e a comprimento, ao perceberem, na visita à pizzaria, que a variação do preço das pizzas é diretamente proporcional à variação no diâmetro. Cada variação de R$ 2,00 no preço corresponde a uma variação de 5 cm no diâmetro das pizzas. Essa taxa de variação percebida no cardápio da pizzaria possui um significado, pois foi contextualizada pelo uso da função para modelar o preço das pizzas. Em contrapartida, ao se utilizar simplesmente o coeficiente “a” em $y = ax + b$, conceituado nos livros didáticos como taxa de variação, isso produz outros significados. Um significado atribuído a uma taxa de variação não é o mesmo relacionado ao coeficiente angular, por exemplo, pois esse remete a aspectos geométricos.

Em outros contextos e usos do conceito de taxa de variação constante, os significados seriam diferentes. Se, por exemplo, for considerada uma velocidade constante de um carro, são produzidos alguns significados; se for analisado o coeficiente angular de uma reta, será feita uma contextualização na própria matemática, atribuindo-se outros significados.

O trabalho com os discentes, seguindo-se as orientações de Burak, foi desenvolvido e contextualizado no cotidiano deles, conforme diálogos dessa pesquisadora e seus alunos participantes da pesquisa. Os significados produzidos por eles com as atividades propostas foram diferentes daqueles que são mencionados nos livros, haja vista que puderam associar preços e tamanhos das pizzas com situações matemáticas.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No desenvolvimento da pesquisa, procurei responder à questão norteadora deste trabalho: Como a Modelagem Matemática pode contribuir para a contextualização de matemática no cotidiano dos alunos, para que eles possam atribuir significados ao conceito de função afim? Para isso, realizei um estudo de literatura, buscando autores que procedessem a atividades com direcionamentos da Modelagem Matemática. No decorrer desse estudo, algumas ideias surgiram e com elas a possibilidade da realização de um Trabalho de Campo para verificar a plausibilidade de utilização da Modelagem Matemática em salas de aula dos ensinos Fundamental e Médio.

Por ser professora de Ensino Médio há alguns anos e pela inquietação acerca do trabalho de funções que muitos livros didáticos apresentam, resolvi direcionar minha pesquisa para a busca de uma forma diferenciada de trabalhar esse conteúdo, de modo a despertar nos alunos o interesse e o prazer de aprenderem esse tópico. Pesquisando vários autores (Bassanezi, Bean, Burak, Biembengut, Barbosa), conforme apresentado na pesquisa, fiz a opção de um trabalho de funções afins através da Modelagem Matemática. “A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual”. (BASSANEZI, 2002, p. 24).

Com a Pesquisa de Campo, realizada com quatro alunos de uma primeira série do Ensino Médio, fica demonstrado o quanto a Modelagem Matemática pode auxiliar o trabalho do educador matemático. Vale ressaltar que esses alunos já haviam estudado a função afim, carregando algumas noções e definições da mesma.

A realização desta pesquisa é fundamentada em cinco etapas, mencionados por Burak (2004, 2010), que norteiam o trabalho com a Modelagem Matemática: escolha do tema, pesquisa exploratória, levantamento dos problemas, resolução dos problemas e o desenvolvimento da matemática relacionada ao tema e análise crítica das soluções. As considerações de Bean acerca da construção de modelos com premissas e pressupostos também complementaram as análises. As ideias de Bean a respeito da construção de modelos com premissas e pressupostos tiveram um importante papel, na pesquisa, entre as ideias de modelagem matemática na comunidade de educadores matemáticos, trabalhando e escrevendo com ou sobre a modelagem. Os estudos de Bean auxiliaram todo o trabalho de campo, possibilitando o levantamento de situações novas e interpretando as possíveis conclusões a que os alunos chegavam. Uma única situação-problema pode ser interpretada de várias maneiras, dependendo das premissas e dos pressupostos adotados pelos alunos envolvidos na situação.

Como pesquisadora e professora desses quatro alunos, sugeri o tema, *“O Comércio de Pizzas”,* como um convite aos alunos, que, rapidamente, aceitaram o desafio e buscaram questões que pudessem nortear uma possível visita a uma pizzaria localizada no entorno da escola estadual em que eles estavam cursando a primeira série. Conforme menciona Barbosa, na página 59, a modelagem é um ambiente de aprendizagem, e o aluno deve ser convidado a participar desse ambiente. Na pesquisa, o tema foi sugerido, mas, como educadora, poderia ter deixado que os próprios alunos escolhessem temas que fossem condizentes com suas realidades. No caso de *“O Comércio de Pizzas”,* eles acharam interessante a possibilidade de buscar em uma pizzaria, que faz parte da realidade deles, situações matemáticas, ou não necessariamente matemáticas, que respondessem a suas curiosidades e anseios.

Feito o levantamento dos problemas, o agendamento e visita à pizzaria, as questões dos quatro alunos foram sendo respondidas e esclarecidas pelo dono do estabelecimento. Com os dados coletados e o direcionamento da pesquisadora, as questões matemáticas surgiram e, conforme apresentado no capítulo Descrição do trabalho de campo: a matemática compreendida por meio do tema “O comércio de pizzas, e no apêndice, os alunos, muito entusiasmados, descobriram um modelo que atribuísse preço às pizzas com os sabores escolhidos por eles, sendo o modelo construído uma função afim, visto que, nessa pizzaria, o preço das pizzas aumentava de R$ 2,00 em R$ 2,00, enquanto o tamanho de 5 cm em 5 cm.

Na Modelagem Matemática, os conteúdos surgem a partir da necessidade dos grupos, e isso inibe muitos educadores, provoca neles insegurança, pois não têm como prever o que vai acontecer e que conteúdos vão surgir a partir de temas escolhidos a partir da realidade dos grupos envolvidos. A pesquisa foi gratificante para mim, para os alunos envolvidos, assim como a confirmação do quanto a matemática se faz presente em uma pizzaria, e como é possível relacioná-la com situações de sala de aula.

Além da função afim, surgiram questões de geometria plana envolvendo área e perímetro das pizzas, questionamentos que levam à função identidade, à função linear, à função constante, às noções intuitivas de função, a sistemas de equações, porcentagem, proporcionalidade, progressão aritmética. Para os alunos, ver tantas implicações matemáticas em uma pizzaria foi um fato surpreendente.

Mencionada no capítulo Revisão de Literatura, a corrente sociocrítica, que tem por objetivo educacional a abordagem de situações sociais por meio da matemática, pode auxiliar nas interpretações e nos diálogos com os estudantes. Como menciona Barbosa, citado na página 50, “o que chamamos de corrente sócio-crítica de Modelagem sublinha que as atividades devem potencializar a reflexão sobre a matemática, a própria Modelagem e seu significado social” (BARBOSA, 2001, p. 4). O diálogo entre pesquisadora e alunos sobre a renda, o lucro, ou mesmo a possível falência do Sr. D, estimula-os à crítica e à reflexão de uma situação real.

A realização da Pesquisa de Campo mostrou, através dos resultados e das falas dos alunos, que a Modelagem Matemática pode contribuir para a contextualização de matemática no cotidiano deles. “Toda prática é fruto de uma forma particular de ver, de pensar e de compreender o mundo que nos cerca.” (BURAK, 2010, p. 12).

Ao término da Pesquisa de Campo, os estudantes relatam o que acharam da atividade e da possibilidade de se estudar matemática com o auxílio da Modelagem:

> Fabregas: Foi interessante! A matemática deixou também de ser um pouco chata.
>
> Juninho: Eu achei que a matemática era uma coisa que a gente só trabalhava com números dentro de sala, números em escritório e eu não achei que a pizzaria ia chegar tão longe assim com a matemática. Foi uma maneira muito legal de aprender a matemática, foi uma coisa meio inesperada para mim, ver tanta coisa de matemática numa pizzaria, igual achar uma função do primeiro grau no preço de uma pizza. Achei muito interessante!
>
> Jhon Jhonas:... eu sempre pensava em sala de aula como que eu ia aplicar as experiências do colégio na minha vida, eu estou falando sério mesmo. Eu sempre pensava, para quê que eu estou aprendendo isso. Eu achei bem interessante o trabalho, bem legal mesmo porque parece que abre assim a nossa cabeça para a gente ver essas aplicações,... eu aprendi a aplicar essas coisas na minha vida, vendo que está sempre no cotidiano...
>
> Jhon Jhonas: Muitos professores só fazem a matemática na decoreba mesmo, as pessoas tinham que levar a entender a matemática.
>
> Geraldo: Na sala de aula é muita repetição.

Na fala dos alunos, podemos avaliar o quanto eles clamam por mudanças dentro de suas salas de aula. Fabregas menciona que a matemática “deixa de ser um pouco chata”, ou seja, o trabalho com uma metodologia alternativa despertou nele o interesse por essa disciplina. Vale ressaltar que Fabregas, considerado um aluno com baixo rendimento em Matemática, nos encontros oferecidos, era o primeiro a chegar e se mostrava superinteressado e participativo. Juninho entende que a Matemática não se limita a números que podem ser trabalhados somente em sala de aula e nos escritórios. Pensando assim, achou tudo inédito e ficou bem surpreso, quando descobriu o modelo que colocava preço nas pizzas no estabelecimento visitado. Já Jhon Jhonas admite que sempre se questionava em sala de aula como ele aplicaria o aprendido no colégio em sua vida, e, com a pesquisa, encontra algumas respostas para suas indagações; salienta, ainda, que muitos professores só fazem a matemática “na decoreba”, ou seja, o ensino tradicional é percebido por ele e, certamente, por inúmeros outros alunos. Geraldo complementa a fala de Jhon Jhonas dizendo que na sala de aula há muita repetição.

Percebe-se nos alunos uma empolgação pelo aprendizado, pois entendem que podem conduzir um trabalho de matemática, principalmente com os dados oriundos de suas próprias realidades, coletados por eles, com um tema de interesse deles, associando aplicações da matemática com às situações que vivenciam cotidianamente.

O professor que abraça o trabalho com a Modelagem Matemática pode encontrar algumas barreiras: falta de tempo, de material, de apoio, de colaboração, tanto da direção escolar, como dos próprios colegas de trabalho. Bassanezi (2002) menciona esses obstáculos. É possível contornarem-se algumas dessas barreiras, e o educador pode adaptar suas aulas para dar ao seu aluno a oportunidade de fazer essa conexão da matemática com situações de seu cotidiano.

Outro obstáculo que a Modelagem oferece aos educadores é o fato de fugir ao cumprimento de um currículo de forma linear, e, na maioria das escolas, o educador tem um currículo pronto, que precisa ser seguido num curto espaço de tempo. Bassanezi (2002) também deixa claro esse obstáculo, que pode tornar o trabalho com essa metodologia inviável para muitos professores.

É de suma importância considerar também que a Pesquisa de Campo foi desenvolvida com um número reduzido de alunos, o que facilita um trabalho mais direcionado, podendo o educador atender melhor aos grupos envolvidos. Com salas de aula superlotadas, que é uma realidade para muitos, o trabalho torna-se mais desgastante para o educador, que se encontra solitário para auxiliar muitos grupos.

Na busca de uma mudança de postura na sala de aula, o professor se depara com muitos obstáculos, sente-se muitas vezes incomodado. Mas, como demonstrado na pesquisa, ao utilizar a Modelagem Matemática, os alunos se sentem muito mais entusiasmados, e a aprendizagem acontece de forma tranquila, pois há a possibilidade de buscarem em seus cotidianos situações que lhes despertem interesse e curiosidade.

A pesquisa engrandeceu os alunos participantes e esta pesquisadora. A participação dos alunos no Trabalho de Campo, com a visita à pizzaria, com as questões matemáticas que surgiam e iam sendo respondidas com a metodologia da Modelagem Matemática, constituiu uma oportunidade de reflexão sobre essa nova forma de aprender matemática. Para mim, a contribuição está relacionada ao meu desenvolvimento como professora e pesquisadora. Com a pesquisa, pude entender melhor a proposta de trabalhos com a Modelagem Matemática como fio condutor, refletir sobre os papéis da escola, do professor, do aluno e da comunidade em geral.

Acredito que são grandes as contribuições desta pesquisa, mas sei que ela não se esgota o estudo deste tema. Minhas expectativas são de que novas pesquisas sejam desenvolvidas, focando as possibilidades e limitações do trabalho com Modelagem Matemática nas escolas. Além de adotar o Ensino Fundamental e o Médio, é preciso conhecer como esta proposta se configura no nível superior. Esse conhecimento beneficia programas, fortalece ações de formação de professores, para que possam aplicar nas suas respectivas salas de aula.

O ensino-aprendizagem de funções e outros conteúdos que possam surgir de acordo com o tema envolvido, no âmbito do Ensino Médio, por meio da Modelagem Matemática, é um possível caminho para a ação pedagógica do professor em sala de aula, por se tratar de um ambiente investigativo e que possibilita a reflexão e a criticidade dos alunos. Levar a Modelagem Matemática para a pizzaria se configurou uma possibilidade de trabalho com essa tendência. Existem muitas outras dinâmicas de ensino-aprendizagem na abordagem de Modelagem e seu estudo.

É importante que o educador compreenda a necessidade de interação proveniente da aplicação sistemática da Modelagem, contabilizando os frutos positivos em relação à prática, por meio de dinâmicas que, longe de elevarem modismos ou simplórias indicações, comprovem os efetivos ganhos no aprendizado e na vida dos alunos.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Mirian Maria. **Ensino e aprendizagem de estatística por meio da modelagem matemática**: uma investigação com o ensino médio. 2008. 196 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2008.

BALDINO, R. R. **Assimilação solidária onze anos depois**. Unesp: Rio Claro, 1995. (mimeo).

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. **Anais...** Caxambu: ANPED, 2001.1 CD-ROM.

______. Uma perspectiva de Modelagem Matemática. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2003, Piracicaba. **Anais...**Piracicaba: UNIMEP, 2003. 1 CD-ROM.

BARBOSA, Jonei Cerqueira; CALDEIRA, Ademir Donizeti.; ARAÚJO, Jussara de Loiola. (Orgs.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira:** pesquisas e práticas educacionais.Recife: SBEM, 2007. p. 99-132.

BASSANEZI, Rodney. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002. 389 p.

BEAN, Dale. O que é modelagem matemática? **Educação Matemática em Revista**. São Paulo, n. 9/10, p. 49-57, abr. 2001.

______. Modelagem matemática: uma mudança de base conceitual. In: Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 5., 2007, Ouro Preto. **Anais...** Ouro Preto: CNMEM, 2007. p. 35-58.

______. Modelagem: uma conceitualização criativa da realidade. In: Encontro de Educação Matemática de Ouro Preto, 4., 2009, Ouro Preto. **Anais...** Ouro Preto: EEMOP, 2009, p. 90- 104.

BIEMBENGUT, Maria Salett. **Modelagem Matemática & implicações no ensino e aprendizagem de matemática.** Blumenal: Furb, 1999. 134 p.

BORBA, Marcelo de Carvalho. MALHEIROS, Ana Paula dos S. Diferentes formas de interação entre internet e modelagem: desenvolvimento de projetos e o CVM. In: BARBOSA, Jonei Cerqueira; CALDEIRA, Ademir Donizeti.; ARAÚJO, Jussara de Loiola. (Orgs.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira:** pesquisas e práticas educacionais.Recife: SBEM, 2007. p. 195-211.

BRAGA, Ciro. **Função: a alma do ensino da matemática.** São Paulo: Annablume; FAPESP, 2006. 174 p.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais**: Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: SEMT, 1999. 141 p.

BURAK, Dionísio. Modelagem Matemática e a Sala de Aula. In: I EPMEM -Encontro Paranaense da Modelagem Na Educação Matemática., 2004, Londrina. **Anais...** Londrina: I EPMEM, 2004. 10 p.

______. Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. **Revista de Modelagem Na Educação Matemática**, Blumenal, v. 1, n. 1, p.10-27, 2010.

BIKLEN, Sari; BOGDAN, Robert. **Investigação qualitativa em educação.** Porto: Porto, 2003. 336 p.

COONEY, J. et al. Modeling with Function. In:______. **Mathematics, Pedagogy and Secondary Teacher Education.** EUA: 1996. p. 221-280.

D'AMBRÓSIO, BEATRIZ S. Como ensinar matemática hoje? **Temas e Debates.** Brasília, ano 2, n. 2, p. 15-19, 1989.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática :** Volume único/ manual do professor. São Paulo: Ática, 2005. 504 p.

______. **Tudo é matemática:** sétima série. 2. ed. São Paulo: Ática, 2007. 288 p.

FERREIRA, Denise Helena L.; WODEWOTZKI, Maria Lucia L. Questões ambientais e modelagem matemática: uma experiência com alunos do ensino fundamental. In: BARBOSA, Jonei Cerqueira; CALDEIRA, Ademir Donizeti.; ARAÚJO, Jussara de Loiola. (Orgs.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira:** pesquisas e práticas educacionais.Recife: SBEM, 2007. p. 115-132.

FRANCHI, Regina Helena de Oliveira L. Ambientes de aprendizagem fundamentados na modelagem matemática e na informática como possibilidades para a educação matemática. In: BARBOSA, Jonei Cerqueira; CALDEIRA, Ademir Donizeti.; ARAÚJO, Jussara de Loiola. (Orgs.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira:** pesquisas e práticas educacionais.Recife: SBEM, 2007. p. 177-194.

FREIRE P. **Pedagogia do oprimido**. São Paulo: Paz e Terra, 1970. 184 p.

GIOVANI, J.; BONJORNO, J.; JUNIOR, J**. Matemática Completa**: Volume único. São Paulo: FTD, 2002. 592 p.

GÓMEZ, Jorge J. Delgado; VILELA, Maria Lúcia T. Pré-Cálculo; Volume 2, Módulos 3 e 4. 4. ed. 2007, Rio de Janeiro. **Fundação Cecierj / Consórcio Cederj...** Rio de Janeiro: Fundação Centro de Ciências e Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro, 2007.

JACOBINI; Otávio Roberto; WODEWOTZKI, Maria Lucia L. Uma reflexão sobre a Modelagem Matemática no Contexto da Educação Matemática Crítica. **Bolema**, Rio Claro, ano 19, n. 25, p. 71-88, maio 2006.

KLÜBER, T. E; BURAK, D. Modelagem Matemática: pontos que justificam sua utilização no ensino. In: IX ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte, MG. **Anais...** Belo Horizonte: UNI-BH, 2007. p 1-19.

LIMA, Elon Lages. et al. **A Matemática do Ensino Médio:** volume 1. 2. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 1997. 233 p.

PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática I**. São Paulo: Moderna, 2000. 653 p.

PINHEIRO, Nilcéia Aparecida Maciel. Educação Matemática Crítica: Discutindo sobre suas Perspectivas e Contribuições para o Ensino- Aprendizagem da Matemática. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 52, p. 29-49, jan./jun. 2008.

SANTOS, Lozicler Maria Moro dos.; BISOGNIN, Vanilde. Experiências de ensino por meio da Modelagem Matemática na Educação Fundamental. In: BARBOSA, Jonei Cerqueira; CALDEIRA, Ademir Donizeti.; ARAÚJO, Jussara de Loiola. (Orgs.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira:** pesquisas e práticas educacionais.Recife: SBEM, 2007. p. 99-114.

SILVA, Maria Regina Gomes da. Assimilação Solidária: Análise de uma intervenção. **Quadrante**, Portugal, v. 9, n. 1, p.147-167, 2000.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. **Bolema – Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, n. 14, p.66-91, 2000.

APÊNDICE

APÊNDICE A - O projeto de campo: “O Comércio de Pizzas”[12]

1º Encontro: 18/10/2010

Descrição do Encontro:

Pesq.: Vocês todos frequentam ou já frequentaram pizzarias?

[A resposta dos alunos foi unânime, dizendo que sim, que já foram e que de vez em quando vão às pizzarias.].

Pesq.: O que vocês pensam quando é mencionada a palavra PIZZARIA?

[As respostas foram do tipo: “coisa gostosa”, “algo diferente”, no final tem “conta para pagar”.].

Pesq.: O que é uma boa pizza para vocês?

[Aquela que possui muito recheio, eles disseram. Alguns falaram de sua preferência pela massa mais grossa, outros pela mais fina. Foram mencionados alguns sabores.].

[Foi colocado para os alunos pela pesquisadora que eles utilizarão a matemática para responder a algumas questões, que serão levantadas e colhidas por eles em uma pizzaria.].

A Pesquisadora projetou alguns slides, retirados da internet, referente ao dia da pizza em que vários pizzaiolos fazem poemas, comentários e críticas referentes às pizzas. Essa apresentação teve o propósito de despertar os discentes para o tema.

Com o consentimento e aceitação de todos os alunos participantes, ficou definida a visita à pizzaria para coleta de dados e informações.

Pesq.: Vocês acham que a matemática está presente nas pizzarias?

Juninho: Sim, na parte contábil.

Jhon Jhonas: Sim, primeiro pro cara fazer o recheio dele, aí ele não vai pôr muito disso, muito daquilo.

Juninho: Tem que ter a proporção. Em uma pizza pequena ele não vai colocar o recheio de uma pizza grande, ele vai colocar de acordo.

---

[12] No apêndice A encontra-se a transcrição que a pesquisadora fez do áudio que foi utilizado por ela no decorrer dos seis encontros com os quatro alunos: Juninho, Geraldo, Fabregas e Jhon Jhonas. Procura-se transcrever da maneira que eles falaram, não se preocupando com uma linguagem formal. Para comentar algum gesto ou fato ocorrido, utiliza-se o texto entre colchetes [ ].

Geraldo: A matemática aparece na hora de partir os pedaços.

Pesq.: Explique melhor essa questão dos pedaços. Vejo que pensou no caso de repartir a pizza em tamanhos diferentes não é?

Juninho: Eles têm a medida, mas, não pegam uma maquininha e pluf, cortou. Eu acho que eles vão cortando assim, tipo, metade aqui, depois eles cortam a outra metade, a outra metade, até chegar no pedaço. [O aluno gesticula com a mão mostrando os cortes através dos diâmetros.].

Pesq.: O que vocês podem falar acerca de preços que são cobrados pelas pizzas? Como são dados esses preços?

Jhon Jhonas: Pelo tamanho e pelo produto que gasta.

Juninho: É baseado no preço de compras dos ingredientes né.

Jhon Jhonas: E pelo tamanho também né.

Fabregas: Eles acrescentam o preço de compra dos ingredientes e acrescentam mais um pouco.

Pesq.: Então o comerciante tem que olhar o que gasta de ingredientes...

Jhon Jhonas: E colocar uma porcentagem de lucro.

Pesq.: Uma pizzaria que venda vários tamanhos de pizzas por exemplo, como será que eles colocam os preços nessas pizzas?

Jhon Jhonas: Pela quantidade de recheio.

Fabregas: Quanto maior mais cara.

Juninho: E quanto mais sofisticado também, pois uma pizza de mussarela não vai ser o mesmo preço de uma pizza de cogumelo, por exemplo. Ingredientes mais em conta, pizzas mais baratas.

Jhon Jhonas: O rodízio já não é assim.

Juninho: O rodízio pega vários sabores pelo preço que você pagou fixo.

[Abriu-se uma discussão acerca de lucro do dono ao optar pela pizzaria a rodízio. Há pessoas que comem muito, com essa haveria um “prejuízo” e há algumas que comem muito pouco, aonde os donos obtêm lucro.].

Pesq.: Qual é a forma da pizza?

[Em unanimidade, eles responderam: redonda.].

Pesq.: Como vocês acham que são calculados os valores, ou preços, dessas pizzas?

Jhon Jhonas: De acordo com o que ele gasta para comprar.

Juninho: De acordo com o que ele gasta né, com o cara que fica fazendo a pizza, com o atendimento, a conta do estoque, junta tudo.

Pesq.: Se eu passar uma reta na metade da pizza, de que lembramos na matemática?

Jhon Jhonas: O raio.

Geraldo: De um lado a outro é o diâmetro.

Pesq.: À medida que eu aumento a forma, o que acontece?

Jhon Jhonas: O diâmetro aumenta.

Pesq.: Se eu fixar o sabor, por exemplo, pizza de Calabresa, e nessa pizzaria existirem vários tamanhos de pizza (por exemplo: pequena, média e grande), como vocês acham que aumenta esse preço?

Fabregas: O preço aumenta porque vai colocar mais recheio, vai aumentar a massa.

Jhon Jhonas: Tá querendo dizer também que o diâmetro, ele ajuda bastante a diferenciar o preço.

Pesq.: Como?

Jhon Jhonas: Às vezes, ele tem uma medida lá, quantos centímetros, uma coisa assim. Por exemplo, de 5 cm em 5 cm aumenta 1 real. Deve ter um padrão eu acho!

Pesq.: Posso ter pizza de diâmetro 15 cm, 20 cm, 25 cm. Vocês acham então que o preço varia de acordo com o diâmetro?

[Todos disseram sim.].

Pesq.: Será que eu posso dizer que o preço é proporcional ao diâmetro? Essa é uma indagação que vocês podem buscar uma resposta com a visita à pizzaria.

Pesq.: Se eu fixar novamente o sabor da pizza, será que o preço pode ser proporcional ao peso dela?

Juninho: Também.

Pesq.: Outra possível indagação: a margem de lucro do vendedor, será que é a mesma para os diferentes sabores de pizza?

Jhon Jhonas: Às vezes, até uma pizza que ele vende mais barato ele está tendo mais lucro.

Pesq.: Será que a margem de lucro altera, quando eu mudo o sabor da pizza?

Jhon Jhonas: Altera. Às vezes pode ser positivo ou negativo, mas altera.

Fabregas: Às vezes ele ganha uns R$ 10,00 na pizza Mussarela e, na sofisticada, para não ficar muito cara, ele ganha só uns R$10,00 também, e a pessoa vai e compra duas de Mussarela por estar mais em conta!

Pesq.: Outra questão possível: será que o salário dos funcionários está vinculado às vendas?
Fabregas: Ele tem que pagar os funcionários também né. Por isso que ele tem que colocar o preço da pizza, o lucro dele, mais um valor para pagar os funcionários. Vamos supor que a pizza custa R$ 5,00, aí ele tem que aumentar um preço para ganhar lucro, mais o preço para pagar o funcionário e ainda ficar com lucro.
[Fizeram um comentário acerca da gorjeta que os funcionários ganham, além dos salários.].
Pesq.: Pode ser levantado também se essa pizzaria vende pedaços de pizza. Se sim, como seria o valor desses pedaços?
Juninho: Ver se um conjunto de pedaços ultrapassaria o valor de uma pizza inteira. Eu acho que sim, normalmente os outros metem a mão quando vendem pouco, no caso os pedaços.
Pesq.: Vocês comentaram do rodízio no início. Será que esta pizzaria trabalha com rodízio? Se sim, qual é o valor do rodízio?
[Sugeriram uma questão acerca da média de pessoas que freqüentam o estabelecimento por semana.].
Pesq.: Além das questões que mencionamos acima, vocês estão livres para elaborarem outras que gostariam de obter respostas através das conversas e dos dados coletados.
Os alunos foram distribuídos em duas duplas para pensarem e formularem as questões que levarão na visita a uma pizzaria. Dialogaram e registraram as seguintes questões:

Questões levantadas pelos participantes da pesquisa para nortearem a visita à pizzaria:

Grupo 1. Integrantes: Jhon Jhonas e Juninho

1) Tipos de pizzas?
2) Tamanho das pizzas que estão disponíveis no estabelecimento?
3) Quanto ao preço final da pizza, existem variações diante dos sabores?
4) Gasto mensal considerando o pagamento de dívidas, funcionários e contas.
5) Como a venda da pizza pode influenciar o pagamento dos funcionários?

6) Tabela de preços quanto ao tamanho das pizzas.
7) Qual tipo de pizza é a mais vendida no estabelecimento? Quantas em média são vendidas?
8) Como é calculado o preço do rodízio?
9) Como é calculado o preço da pizza em relação ao recheio?
10) Se houver entregas, como é calculado o preço da entrega?
11) Como é produzida uma pizza?
12) Existe proporção entre os tamanhos das pizzas?
13) O tamanho das pizzas influencia no lucro?
14) Qual tamanho de pizza é o mais vendido?
15) Qual tipo de pizza é a mais vendida?
16) Dado um sabor de pizza, como é calculado o valor das variações de preço de acordo com o tamanho?

Grupo 2. Integrantes: Fabregas e Geraldo

1) Como vocês aplicam o preço do rodízio?
2) Como vocês fazem para contar o lucro ou prejuízo?
3) O garçom ganha comissão?
4) Vocês têm alguma meta de venda? Se tiver, qual seria?
5) Vocês usam que porcentagem de lucro (margem)?
6) Como vocês calculam o tamanho da pizza de acordo com o preço? Qual dá mais lucro, pequena, média ou grande?
7) Qual o tamanho de pizza que mais costuma vender?
8) Vocês vendem mais em dias úteis ou finais de semana?
9) A margem de lucro é a mesma em todos os tamanhos?

Depois de formuladas as questões, a pesquisadora tece alguns questionamentos para testar a maturidade matemática dos participantes da pesquisa.
Pesq.: Que matemática vocês acham que vão utilizar para responderem a essas indagações que foram levantadas?
Geraldo: Tem umas que são questões de função.
Pesq.: Como assim?

Geraldo: Acho que é o lucro em função do preço.

Jhon Jhonas: Preço *x*, aí põe o tamanho da pizza. Aí põe lá o lucro é igual a *x* mais alguma coisa.

Pesq.: Então vocês pensaram na questão da função.

Jhon Jhonas: O preço e tamanho da pizza para poder descobrir o lucro. Tem que ver mais ou menos como vai ser a resposta encontrada lá na pizzaria pra gente poder montar a função. Penso no preço, junto com o tamanho da pizza pra gente descobrir o lucro.

Pesq.: Depois de colhidas as informações, o que vocês acham que seria bom fazer com os dados para ajudar em suas interpretações?

Juninho: Um texto.

Fabregas: Tipo um esquema.

Pesq.: Se a gente pegar preço e tamanho ou peso igual o Jhon Jhonas falou a questão do preço de acordo com o tamanho, vocês vão lá e vão procurar isso e anotarem. Quando estiverem com as anotações na mão, o que seria mais conveniente fazer com esses dados?

Jhon Jhonas: A gente podia levar para esse lado aí da função.

Pesq.: Que tipo de função você pensou?

Jhon Jhonas: A do primeiro grau. Primeiro grau simples, bem simplesinha.

Pesq.: O que te levou a pensar que é uma função do primeiro grau?

Jhon Jhonas: É que tem que ser números e números bem simples, por exemplo, pesa 4 kg, aí o preço dela é R$ 22,00, por exemplo. Aí a gente podia diminuir o preço dela assim, pois o que pesa lá [gesticulou com as mãos] é o prejuízo dele. A gente podia diminuir e colocar igual ao lucro. Bem simplesinha assim.

Pesq.: Como vocês definem a função do primeiro grau?

Jhon Jhonas: Tem que ter *x*, o *a* e depende muito né. Sempre falta um na maioria das vezes.

Juninho: Falta um o quê?

Jhon Jhonas: O *a* ou o *b*.

Juninho: Primeiro grau tem o *a* e o *b*, não tem o *c*.

Pesq.: Com os dados na mão, o que podemos montar para facilitar o nosso olhar?

Juninho: Uma fórmula.

Jhon Jhonas: A gente tem que fazer um padrão mais ou menos.

Geraldo: Pode fazer um desenho, um esquema.

Pesq.: Como seria esse esquema?

Geraldo: Um gráfico.

Juninho: Uma tabela.

2º Encontro: 25/10/2010

Descrição do Encontro:

Este encontro foi destinado à visita in loco a uma pizzaria localizada no bairro da escola. A pesquisadora e os alunos foram juntos para tentarem colher dados e informações acerca das questões que foram propostas por eles no encontro anterior.

Fomos recebidos pelo dono do estabelecimento (Sr, D) que se dispôs a esclarecer as questões levantadas pelos grupos de alunos.

A primeira questão levantada foi a respeito de rodízios de pizza, e foram esclarecidos que nesta pizzaria não há rodízios, porque os rodízios, segundo o dono são oferecidos com pizzas de tamanho médio e com menos recheio. Relatou também que pizzarias a rodízio são muito frequentadas por grupos de adolescentes, que acabam "bagunçando" um pouco o ambiente, e sua pizzaria oferece um ambiente mais familiar.

Alguns questionamentos foram sendo levantados pelos alunos, com as perguntas intercaladas para que todos participassem, e o Sr. D, se propôs a ajudá-los.

Juninho: A pizzaria oferece quantos sabores de pizzas?

Sr. D: 46 sabores e com preços variados. A maior, de 35 cm de diâmetro, possui valores entre R$ 28,90 a R$ 31,90.

Juninho: Qual o tamanho das pizzas que estão disponíveis no estabelecimento?

Sr. D: Pequena (25 cm); média (30 cm) e grande (35 cm).

Jhon Jhonas: Quanto ao preço final da pizza, existem variações diante dos sabores?

Sr. D: Sim, pizzas com ingredientes mais caros, custam mais.

Jhon Jhonas: Como a venda da pizza pode influenciar o pagamento dos funcionários?

Sr. D: O estabelecimento possui 9 funcionários e todos possuem salário fixo, que independe da quantidade de pizzas vendidas.

Jhon Jhonas: O garçom ganha comissão?

Sr. D: Não.

Fabregas: Como vocês fazem para contar o lucro ou prejuízo?

Sr. D: Do total de pizzas vendidas**,** retiro os valores dos ingredientes utilizados e das despesas, inclusive o salário dos funcionários, e obtenho um lucro médio de 35%.

Juninho: Qual tipo de pizza é o mais vendido no estabelecimento?

Sr. D: O tipo mais vendido é A Moda da Casa.

Juninho: Quantas em média são vendidas?

Sr. D: Somente do sabor A Moda da Casa eu não sei dizer, mas ao todo eu vendo uma média de 250 pizzas por semana.

Jhon Jhonas: Vocês trabalham com entregas? Se sim, quais os valores?

Sr. D: Sim. Os valores variam de acordo com a distância dos bairros a serem entregues. Por exemplo, no Mariano Procópio, um bairro próximo, a taxa de entrega é de R$ 3,00, se for o bairro São Pedro, por exemplo, o valor é de R$ 6,00.

Geraldo: Como vocês calculam o preço, de acordo com o tamanho da pizza? Qual delas gera mais lucro: pequena, média ou grande?

Sr. D: A diferença de cada tamanho (pequena, média ou grande) é de R$ 2,00. O lucro é proporcional ao tamanho da pizza.

Fabregas: Qual o tamanho de pizza que mais costuma vender?

Sr. D: A família, com 35 cm de diâmetro.

Geraldo: Vocês vendem mais em dias úteis ou finais de semana?

Sr. D: Os dias que as pizzas são mais vendidas são na sexta-feira, no sábado e no domingo.

Fabregas: A margem de lucro é a mesma em todos os tamanhos?

Sr. D: Sim.

Juninho: Vocês fazem a metade da pizza de um sabor e a outra metade de outro? Se sim, como isso é cobrado?

Sr. D: Sim. Quando se pede dois sabores paga-se o valor da mais cara.

Jhon Jhonas: Qual é o ingrediente mais utilizado nos recheios de pizzas?

Sr. D: O ingrediente mais utilizado é a Mussarela. Ela tem um custo para mim de R$10,00 o quilo, e eu compro por semana 100 quilos de mussarela.

Pesq.: O senhor vende mais pizzas aqui na pizzaria ou há mais entregas?

Sr. D: É equilibrado.

Os alunos perguntaram se podiam olhar e anotar alguns valores de pizzas. O Sr. D entregou a eles um cardápio que é distribuído nas entregas, mas os sabores e preços foram escolhidos e colocados pelos alunos.

Venho explicitar os sabores e seus respectivos preços na tabela abaixo:

SABORES	PEQUENA	MÉDIA	GRANDE
Aliche	R$ 23,90	R$ 25,90	R$ 27,90
Atum	R$ 22,50	R$ 24,50	R$ 26,50
Bolonheza	R$ 27,90	R$ 29,90	R$ 31,90
Calabresa Especial	R$ 24,90	R$ 26,90	R$ 28,90
Califórnia	R$ 26,50	R$ 28,50	R$ 30,50
Catupiry Especial	R$ 24,90	R$ 26,90	R$ 28,90
Champignon	R$ 23,90	R$ 25,90	R$ 27,90
Firenze	R$ 24,90	R$ 26,90	R$ 28,90
Frango especial	R$ 24,90	R$ 26,90	R$ 28,90
Gorgonzola	R$ 22,90	R$ 24,90	R$ 26,90
Milho Verde	R$ 22,50	R$ 24,50	R$ 26,50
Mixta	R$ 22,50	R$ 24,50	R$ 26,50
Mussarela	R$ 21,00	R$ 23,00	R$ 25,00
Napolitana	R$ 22,60	R$ 24,60	R$ 26,60
Nonna Itália	R$ 22,60	R$ 24,60	R$ 26,60
Nordestina	R$ 27,90	R$ 29,90	R$ 31,90
Pizzaiolo	R$ 24,90	R$ 26,90	R$ 28,90
Portuguesa	R$ 23,90	R$ 25,90	R$ 27,90
Suíça	R$ 23,90	R$ 25,90	R$ 27,90
Tropical	R$ 25,90	R$ 27,90	R$ 29,90
Veneza	R$ 24,90	R$ 26,90	R$ 28,90
Romeu e Julieta	R$ 22,90	R$ 24,90	R$ 26,90
Chocolate	R$ 26,50	R$ 28,50	R$ 30,50

Após a coleta de dados e o esclarecimento das questões que foram levantadas, a pesquisadora convidou os participantes a escolherem um sabor de pizza e eles puderam saborear essa deliciosa massa. Eles adoraram a visita.

3º Encontro: 08/11/2010

Descrição do Encontro:

O encontro foi iniciado com uma conversa informal, com a pesquisadora indagando aos sujeitos de pesquisa sobre os dados que eles buscaram no encontro anterior na pizzaria.

Pesq.: Vocês gostaram de ir à pizzaria? O que vocês acham possível de ser feito com tudo o que conseguimos de informações? Vocês pensaram o que podemos fazer diante dos dados?

Juninho: Foi surpreendente! Nunca achei que tinha tanta coisa de matemática em uma pizzaria.

Pesq.: Você pode especificar melhor que coisas são essas?

Juninho: Há! Muito número né, pra produção de pizza, pra preço, pra tudo, muita coisa diferente, não achei que tinha tanta coisa.

Fabregas: É muito número mesmo.

Pesq.: O que vocês acharam do passeio?

Fabregas: A gente matou uma curiosidade também, que era a margem de lucro, se era a mesma em todos os tamanhos.

Pesq.: O que você percebeu com relação a isso Fabregas?

Fabregas: Não, porque tipo, a gente tava questionando aquela coisa, será que a pizza pequena dá mais lucro ou mais prejuízo do que a pizza média dá para a pizza grande. A gente descobriu que todas têm a mesma margem de lucro. E de compra para os produtos e para a venda da pizza também.

Pesq.: O que mais vocês podem perceber acerca de tantas informações que coletamos na pizzaria? Vocês percebem algo de matemática que pode ser estudado com esses dados?

Juninho: Nome assim eu não lembro mais eu sei de alguns cálculos que dá para fazer para calcular tipo o preço da massa, só do recheio, só com as coisas que a gente pegou.

Fabregas: Tudo aqui tem matemática né! Se você parar para olhar, tudo aqui tem matemática.
Pesq.: Vocês conseguem ver alguma relação dessa matemática aí com o que a gente estuda dentro da sala?
Fabregas: Porcentagem.
Juninho: Tem algumas equações que dá pra gente montar. Pelo custo de produção, pelo custo de cada pizza, por cada tipo de pizza, dá para montar um montão de equação.
Pesq.: Como Juninho que você pensou?
Juninho: Ó, dá para fazer tipo, a cada 5 cm de massa é igual a R$ 2,00. Dá para tipo, fazer o total de diâmetro da pizza que é de 35 cm, dividir por 5 e multiplicar por 2 e achar o preço total, só da massa. [O aluno pediu para fazer um registro disso em uma folha.]. Depois a gente vê o tipo de pizza, vai tirar o preço total pelo preço que a gente achou aqui e ver o tanto de recheio que vai dar. O preço do recheio vai ser o total que a gente vai ver, tanto o lucro, quanto a despesa.
Geraldo: É é.
Fabregas: A diferença de cada tamanho da pizza é de R$ 2,00 e o lucro é proporcional ao tamanho da pizza, então eles têm o mesmo gasto com os produtos para fazer a pizza, para comprar e para fazer. Mas isso também tem que ter um lucro para vender. Vende a pizza, mas eles também têm que ter um lucro para eles, porque têm que pagar os funcionários, produtos. Eles têm que ter dinheiro todo mês, para comprarem os produtos, e mesmo assim tem que ter uma média de mais ou menos 35% de lucro. [Os alunos mencionaram muito a questão do preço das pizzas sofrer um acréscimo de R$ 2,00 e o tamanho, um aumento de 5 cm em seu diâmetro.].
Pesq.: Quais são mesmos os tamanhos das pizzas?
Geraldo: Pequena (25 cm de diâmetro), média (30 cm de diâmetro) e a família (35 cm de diâmetro)
Pesq.: O que é diâmetro?
Juninho: É a maior medida de lado a lado da circunferência.
Pesq.: Vocês pensam algo de matemática que possa auxiliar na hora de colocar esses preços nas pizzas? Como disseram anteriormente, a cada R$ 2,00 de aumento da pizza aumenta-se 5 cm em seu diâmetro.

Juninho: Eu tenho pra mim, que essa diferença de 5 cm, inicialmente só vai influenciar na produção da massa da pizza. Eu acho que esse R$ 2,00 a menos, R$ 2,00 a mais, é justamente pelos ingredientes da pizza, da massa mesmo. R$ 2,00 é igual a 5 cm a mais de pizza [gesticulando que é da pizza pequena para a média.]. R$ 2,00 é igual a menos 5 cm de pizza [gesticulando que é da grande para a média.].

Pesq.: Então vocês acham que esses R$ 2,00 a mais é pelo custo da massa e dos ingredientes?

Geraldo: É

Juninho: Eu acho que é só da massa mesmo.

Fabregas: E dos ingredientes eu acho. Não, eu acho que os ingredientes não, pois R$ 2,00 é muito pouco, para aumentar os ingredientes.

Pesq.: Diante dos dados, da relação que vocês observaram acerca dos R$ 2,00 a mais, quando fixamos um mesmo sabor, o que acham viável de fazer para auxiliar nas interpretações dos dados?

Juninho: Montar uma tabela.

Pesq.: Sim, poderia.

Pesq.: Essa tabela com todos os sabores?

Juninho: Não, a gente escolhe um representante, pois tem muita pizza com os preços repetidos.

Fabregas: Um representante de cada preço eu acho.

Pesq.: Então vocês sugeriram uma tabela, o que teria nessa tabela?

Geraldo: O preço, o sabor, o tamanho.

Fabregas: O diâmetro.

[Nesse momento, os alunos distribuídos em duplas conforme no primeiro encontro (Juninho e Jhon Jhonas e Fabregas e Geraldo) receberam folhas, réguas e papéis quadriculados, para construírem a tabela sugerida por eles. Cada dupla escolheu alguns sabores, através do cardápio que receberam na pizzaria e esboçaram tabelas, relacionando sabores, tamanhos e preços.].

Pesq.: Fabregas o que você pensou ao desenhar essa tabela?

Fabregas: Que a diferença de preço é de R$ 2,00, independente do tamanho da pizza, se é pequena, média ou grande. E a margem de lucro também, é a mesma, de lucro ou prejuízo em cada tamanho da pizza.

Pesq.: O que você relacionou nessa tabela?

Fabregas: A diferença dos preços das pizzas pela quantidade de massa. Tem umas que pode ser os produtos mais caros. A grande da Aliche é o preço da pequena da Nordestina, deve ser por causa dos produtos. Os da pizza Nordestina devem ser mais caros.

Juninho: Eu tive uma ideia para um exercício de matemática! Dá pra fazer tipo, a gente sabe que a proporção de tamanho para tamanho é R$ 2,00 e eu só anotei aqui um tamanho de cada, dá pra saber o preço dos outros tamanhos, analisando o preço de um só. Por exemplo, a Nordestina grande é R$ 31,90 e se eu quiser saber a média é só eu diminuir R$ 2,00 desse preço que eu vou saber. É só diminuir ou aumentar R$ 2,00 ou R$ 4,00.

Pesq.: Fabregas, o que você colocou na sua tabela?

Fabregas: Eu coloquei quatro sabores e os tamanhos das pizzas (pequena, média e grande) e os preços. Estou relacionando os tamanhos das pizzas com os preços. O tamanho está relacionado ao diâmetro da pizza.

Pesq.: Por que o preço se relaciona com o diâmetro?

Juninho: Porque a pizza tem forma redonda.

Pesq.: Se eu quisesse saber a área das pizzas, alguém saberia me dizer?

Juninho: Divide o diâmetro por 2, você vai achar o raio. Pega o raio, multiplica por 6,28 e você acha a área. 6,28 é duas vezes o π. [Confundiu área com comprimento da circunferência.].

Fabregas: A área é complicado.

Pesq.: Vou deixar que vocês pesquisem qual é a área da circunferência.

Pesq.: Com as tabelas que vocês construíram vocês acham que é possível descobrir um modelo que coloque preço a essas pizzas?

Juninho: Eu acho que tem. O preço do recheio mais o preço da fabricação da massa da pizza é igual ao preço final. E do preço final a gente tira o lucro.

Geraldo: E mais uma margem aí para ganhar lucro na pizza. Porque se não ele vai estar vendendo a pizza só para comprar o material.

Pesq.: O que podemos fazer, para tentar enxergar melhor essa variação do preço e do diâmetro?

Geraldo: Aquele negócio de proporção. Quanto mais aumentar o tamanho, mais aumenta o preço.

Pesq.: O que podemos fazer para tentarmos tirar mais algumas conclusões? Vocês estão relacionando o tamanho com o preço. Quando relacionamos duas coisas, o que podemos perceber, dentro da matemática?

Geraldo: Função.

Pesq.: Como assim, Geraldo?

Geraldo: O preço aumenta em função do tamanho, em função do diâmetro da pizza.

Pesq.: Que função seria essa? É possível fazer alguma coisa para nos auxiliar?

Juninho: Dá para fazer uma fórmula né, tentar montar uma fórmula.

Fabregas: É, é.

Juninho: A gente pega algumas fórmulas que a gente já viu e tenta encaixar. Acho que do segundo grau não dá não, acho que só do primeiro mesmo.

Pesq.: Por que você acha que é do primeiro grau, Juninho?

Juninho: Porque está relacionando o tamanho. A cada 5 cm, aumenta o tamanho. Então a, espera aí, deixa eu pensar.

Pesq.: O Juninho acha que é do primeiro grau e você Fabregas?

Fabregas: Eu também.

Pesq.: Como é uma função do primeiro grau para você, Juninho?

Juninho: Uai, tem uma incógnita, mais um número, é igual a um total. Ela é $a + b$.

Geraldo: $ax + b$, ou melhor, $bx + c$.

Juninho: É $ax + b = y$.

Pesq.: O que mais caracteriza uma função do primeiro grau?

Juninho: O gráfico dela é sempre uma reta.

Pesq.: O que pode auxiliar vocês a perceberem se é ou não do primeiro grau?

Geraldo: Fazer o gráfico.

Pesq.: Vocês acham que devem fazer um gráfico misturando todos os valores e sabores?

Juninho: Não, melhor separado.

Fabregas: Escolher um tamanho e misturar os sabores.

[Os sujeitos de pesquisa, em duplas quiseram esboçar gráficos relacionando os dados coletados. Para os esboços foram utilizadas folhas de papeis quadriculados, régua, lápis, caneta e borracha.].

Juninho: Posso relacionar o preço com o tamanho?

Pesq.: Sim. Como será esse gráfico?

Juninho: O *x* vai ser o tamanho e o *y* vai ser o preço. Eu to pensando aqui porque o tamanho não vai variar, o preço vai então, eu acho que o tamanho vai ter que ficar no eixo *x* e o preço no *y*.

Pesq.: Se você está relacionando o tamanho com o preço, sim. Se acharem necessário, podem esboçar mais de um gráfico, sem problemas.

Juninho: Eu acho melhor eu fazer o preço em função do tamanho. Eu acho que fica uma coisa mais fácil de pensar. Depois quando eu achar o resultado aqui eu faço do outro jeito.

Neste momento, os alunos em duplas começaram a fazer esboços de gráficos. Cada dupla escolheu uns três sabores na tabela de valores que trouxeram da pizzaria.

A dupla (Geraldo e Fabregas) escolheram quatro sabores de pizzas, e construíram uma tabela com sabores, tamanhos e seus respectivos preços. Esboçaram o gráfico de um sabor, no caso Aliche relacionando o preço (eixo-*x*) com o diâmetro (eixo-*y*).

A dupla (Juninho e Jhon Jhonas) escolheram seis sabores de pizzas, e construíram uma tabela com sabores, pegaram um tamanho aleatoriamente e o seu preço. Para esboçarem o gráfico, fixaram o sabor da pizza Califórnia e relacionaram o preço (eixo-*x*) com o respectivo diâmetro (no eixo-*y*). Depois esboçaram o diâmetro no eixo-*x* e o preço no eixo-*y*, no sabor Veneziana. Fabregas registra alguns comentários ao lado dos gráficos, tentando uma fórmula que fornecesse o preço do recheio da pizza, passando em seguida para a porcentagem desse valor. Gráficos no apêndice (p. 201-202).

[Inicia-se um diálogo acerca dos gráficos.].

Juninho: Ficou meio louco, porque tipo se eu jogar qualquer número, vai dar qualquer diâmetro lá, igual aqui eu joguei o *x* 20 + 2,00 deu 22. Diâmetro 22, não tem na pizzaria.

Pesq.: O que vocês perceberam ao traçarem os gráficos?

Juninho: Ficou um gráfico do primeiro grau, o da reta.

Pesq.: Será que, a partir desse gráfico, e de outros também, pois existem outros sabores, é possível você descobrir um modelo que atenda a qualquer valor que for colocado nessa pizzaria?

Fabregas: É.

Pesq.: Eu gostaria que vocês pesquisassem acerca dessa possibilidade para um próximo encontro.

Geraldo: Para isso eu tenho que achar uma fórmula certa né.

Pesq.: Como seria essa fórmula certa Geraldo?

Geraldo: *ax* + *b*, o *a* seria o, eu acho que era o tamanho mais, por exemplo, a pizza pequena, aí coloca o tamanho dela 25 + 5 aí dá o preço.

Juninho: Eu posso criar outros diâmetros para fazer um gráfico mais incorpado?

Pesq.: Você pode pensar em outros sim.

Juninho: Eu vou colocar o *y* no *x* e o *x* no *y* para ver se dá alguma diferença.

Geraldo: [Fica muito pensativo.]! Porque aqui se eu colocar o diâmetro e ele for 20 o preço já diminui para R$ 21,90 no caso. Mas se eu puser, por exemplo, R$ 23,00 ou R$ 24,00, assim eu não consigo achar.

Pesq.: Será que teria um modelo nesta situação?

Geraldo: É isso que eu estou tentando pensar. [Olha para o gráfico que construiu e fica muito pensativo.]!

Juninho: Estou colocando aqui na minha fórmula, *x* dividido por *5* vezes *R$ 2,00* mais o recheio igual ao preço da pizza. Aí eu peguei aqui o diâmetro *25. 35* dividido por *5* deu *7* vezes *2* mais o recheio é igual a *R$ 28,90. R$ 14,00* mais recheio igual a *R$ 28,90*. Aí para eu achar o *R*, coloco. Recheio igual a *R$ 28,90 menos R$ 14,00*. Deu recheio igual a *R$ 14,90*, aí eu tentei achar uma porcentagem do preço do recheio, no preço total. *R$ 28,90* para *100*, assim como *R$ 14,90* para *x*. Só que ia dar um número tão grande, tanta divisão que eu fui lá e aproximei, *51,5%.* Essa explicação consta no apêndice (p. 202).

Pesq.: Esse *51,5%* é o que?

Juninho: É o preço do recheio. Estou relacionando diâmetro com preço para eu achar um valor para o *R* (recheio). Aí eu vou colocar, *51,5%* aqui no lugar do *R*. Um embananou!

Pesq.: Como é o segundo gráfico que você desenhou?

Juninho: Uma reta.

Pesq.: O que você pode perceber olhando para esse gráfico?

Juninho: Que também tem proporção. Tanto o preço com o diâmetro quanto o diâmetro com o preço.

Pesq.: Que variação você percebe no eixo-*x* Juninho?

Juninho: De cinco em cinco e no eixo-*y* de dois em dois.

Pesq.: Você disse anteriormente que esse gráfico é uma reta e que representa uma função do primeiro grau. Como é uma função do primeiro grau para você?

Juninho: *ax* + *b*?

Pesq.: Pode ser.

Juninho: O *f(x)* no meu caso é o diâmetro. Não é o preço, o *x* que é o diâmetro.

Pesq.: Então você tem alguns pares que utilizou para traçar esse gráfico certo?

Juninho: Sim.

Pesq.: Quais são esses pares?

Juninho: (*25; 24,90); (30;26,90) e (35;28,90).*

Pesq.: Será que com esses pontos é possível vocês descobrirem qual é o modelo dessa função? Será que a Lei que vocês mencionaram anteriormente seria um modelo?

[O silêncio se faz presente por alguns minutos.].

Pesq.: Vou deixar essa questão em aberto para vocês pesquisarem e tentarem buscar uma resposta para o próximo encontro. O objetivo é vocês buscarem um modelo para atender os preços das pizzas que vocês escolheram, diante de tudo que foi colocado no decorrer do encontro de hoje. Mãos a obra!

4º Encontro: 22/11/2010

Descrição do Encontro:

Inicia-se o encontro com a professora perguntando se algum aluno pesquisou e tentou encontrar um modelo que relacionasse o tamanho (diâmetro da pizza) com seus respectivos preços.

Juninho: Eu achei num site de pesquisa. Eu procurei um modo de achar a lei de uma função olhando o gráfico. E achei que para isso eu preciso montar um sistema de equações do primeiro grau, e a base desse sistema é dado na lei da função do primeiro grau, $f(x) = ax + b$.

Comentou ainda que tentou achar esse modelo, mas utilizou em uma equação o sabor Nordestina e na outra, Mussarela.

Pesq.: Ao misturar os sabores, Nordestina com Mussarela vocês acham possível, descobrir um modelo que atenda a essa situação?

Juninho: Não, tem que ser um modelo para cada pizza.

[Os alunos pediram uma folha de papel quadriculado, resolveram escolher dois sabores de pizzas, desenharam uma tabela, relacionando diâmetro com seu respectivo preço e em seguida esboçaram seus gráficos.]. Gráficos e tabelas no apêndice (p. 200-204).

Pesq.: Olhando para esses gráficos que vocês traçaram o que percebem neles?

Jhon Jhonas: Eu percebi que de 5 em 5 cm aqui no caso na minha pizza aumentou R$ 2,00. Isso aí já estava bem claro né.

Pesq.: Vamos tentar descobrir um modelo que permita colocar preço nessas pizzas?

Pesq.: Vocês disseram que fixando o diâmetro, o preço varia, de acordo com os sabores das pizzas. Certo?

[Todos disseram sim.].

Pesq.: O Juninho comentou que é uma função afim (1º grau). Por que você acha que é uma função do 1º grau, Juninho?

Juninho: Porque a linha do gráfico é uma reta.

[O diálogo permanece, e os sujeitos percebem e comentam sempre a questão da variação de R$ 2,00 nos preços, enquanto o diâmetro varia 5 cm.].

Pesq.: Quantos pontos foram ligados em cada gráfico?

Jhon Jhonas: Três.

Pesq.: Como posso escrever esses pontos?

Juninho: Em pares.

Pesq.: Esses pares são chamados pares ordenados. Escrevam para mim esses pares.

[Eles escreveram os três pares. Para a pizza Mista os pares foram *(25; 22,50), (30; 24,50), (35; 26,50)* e para a pizza Mussarela os pares encontrados foram *(25; 21), (30; 23), (35; 25)].*

Pesq.: Será que com esse três pontos Juninho é possível pensar no sistema que vocês tinham falado?

Juninho: Deve dar, porque eu já tinha conseguido fazer a primeira parte.

Jhon Jhonas: A lei da função do primeiro grau é $f(x) = ax + b$

Pesq.: E se a gente pegasse dois pontos desses para tentarmos descobrir o que está acontecendo.

[Nesse momento os alunos se concentraram na busca do modelo que pudesse colocar preços nas pizzas que eles escolheram, uma dupla escolheu a de sabor Mista e a outra escolheu de Mussarela. Com os dois pares ordenados, chegaram ao sistema que Juninho já havia pesquisado na internet. Resolveram os sistemas, com algumas intervenções da professora para a conferência de algumas contas.]. Resolução no apêndice (p. 205, 208).

Pesq.: E aí, Juninho, achou o Modelo?

Juninho: Consegui, professora! [Com bastante vibração.]. Deu $f(x) = \frac{2}{5}x + 12{,}50.$

Pesq.: E o Jhon Jhonas achou?

Jhon Jhonas: Sim, é $f(x) = \frac{2}{5}x + 11.$

Pesq.: Vocês acham que agora é possível construir o modelo para qualquer sabor de pizza?

Jhon Jhonas: Eu acho que não porque o meu *b* deu 11, o do Juninho deu 12,50.

Juninho: É só jogar no sistema de equação.

Jhon Jhonas: O *b* está dando errado por quê?

Pesq.: Será que o *b* está errado?

Jhon Jhonas: Eu acho que o *b* deve ser o lucro da porcentagem dele né.

Juninho: Eu acho que *b* é o recheio.

Jhon Jhonas: A gente podia tirar a porcentagem do preço da pizza, para ver se vai dar a mesma coisa, o que você acha?

Pesq.: Eu sugiro que a gente faça o seguinte: nós podemos verificar para ver se esse modelo atende a todos os tamanhos de pizzas? O Jhon Jhonas ficou meio “grilado” porque o *b* de uma pizza está diferente do da outra. Tem alguma coisa, com valores iguais?

Jhon Jhonas: O *a.*

Pesq.: Será que o *a* é o mesmo independente do sabor de pizza que eu escolher?

Juninho: Ele vai relacionar diretamente com um valor fixo, que é o diâmetro. É 25; 30 e 35.

Pesq.: Qual é o valor do *a*?

Juninho: Ele deu $\frac{2}{5}$.

Pesq.: Olhando para os gráficos construídos, vocês percebem alguma relação do *a* com esses gráficos?

Jhon Jhonas: O *a* é exatamente o *y* sobre o *x*.

Juninho: É a variação do *y* sobre a variação do *x*.

Pesq.: Essa variação do *y* sobre a variação do *x* é que caracteriza a função do primeiro grau, que vocês já constataram no gráfico.

[Perceberam que o *a* é calculado pela variação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.].

Juninho: Nossa eu poderia ter poupado um monte de contas!

Pesq.: Quem é o *b*? Por que seus valores estão diferentes?

Juninho: É pelos ingredientes.

Jhon Jhonas: Ele tem a ver com o valor. As pizzas são de valores diferentes, então o *b* é diferente.

Pesq.: Vamos verificar se esse modelo que vocês descobriram vale para todos os pares que vocês mencionaram acima?

[Os alunos fizeram as verificações e perceberam que os modelos atendem a todos esses pontos.]. Resolução no apêndice (p. 205, 208).

Juninho: Nossa! Meu Deus do céu. Olha professora vou te contar, eu estava te achando louca quando você chegou pra gente e falou que a gente ia buscar um modelo para essa pizzaria. De onde que eu vou tirar? Nossa, vou te contar hein! [Nesse momento Juninho vibra quando descobre que o modelo que ele encontrou era válido para os três tamanhos da pizza Mista.].

O Jhon Jhonas precisou de algumas orientações na resolução de seu sistema linear.

Pesq.: Então se vocês retornarem à pizzaria e apresentarem para o Sr. D esse modelo ele consegue colocar preço em qualquer tamanho da pizza Mista?

Juninho: Sim.

Pesq.: Vocês acham que esse modelo vale para qualquer pizza?

Juninho: Não, porque a variação do *b* vai dar uma variação de preço.

Juninho: Se a gente conseguir classificar os tipos de pizzas (juntar as que possuem o mesmo valor), conseguimos fazer um único modelo que dê preço em todas elas.

Pesq.: Vocês disseram que com esses modelos é possível o Sr. D colocar preços nas pizzas: Mista e Mussarela. E se, por acaso, ele resolver fabricar pizzas de 22,5 cm de diâmetro? É possível vocês descobrirem, o preço?

Juninho: É só jogar no lugar do *x*.

Jhon Jhonas: A de 22,5 cm de diâmetro custa R$ 20,00.

Pesq.: Esse diâmetro de 22,5 cm é maior ou menor do que os que a pizzaria oferece?

Jhon Jhonas: É menor, então tem que custar menos. E aponta para a pizza de 25 cm que custa R$ 21,00.

Juninho: A minha deu R$ 21,50.

Pesq.: E se fosse uma pizza de 32,5 cm de diâmetro?

Jhon Jhonas: Vai custar R$ 26,00. Percebeu, ao observar o gráfico que não podia ser esse valor, visto que a de 35 cm custava R$ 25,00.

E completa:

Jhon Jhonas: Pelo que aumenta ou diminui eu acho que 2,5 cm é R$ 1,00.

Juninho: Na minha não, na minha aumenta R$ 4,00. [Depois fica pensativo e fala que a dele é R$ 1,00 também.].

Pesq.: O que significa esse R$ 1,00?

Jhon Jhonas: Eu acho que é a distância, é o intervalo aqui do *y,* professora.

Juninho: Se eu colocar no domínio o 32,5 cm, ele vai estar exatamente entre o 30 cm e o 35 cm. E 32,50 cm é exatamente a metade de R$ 2,00.

[A professora solicita nesse momento a construção de um novo gráfico com o acréscimo desses novos valores: 22,5 cm e 32,5 cm e deixa livre se eles quiserem acrescentar outros valores.]. Gráficos no apêndice (p. 207).

Pesq.: Depois de construídos os gráficos, o que vocês podem perceber?

Juninho: Que a variação mesmo de preço a cada 2,5 cm varia R$ 1,00.

Pesq.: Os pontos que você encontrou Juninho, todos eles pertencem ao gráfico?

Juninho: Sim, eu coloquei até o 17,5 cm e cheguei no preço de R$ 19,50.

Pesq.: Por que será que esses pontos pertencem a esse gráfico?

Jhon Jhonas: Professora eu percebi o seguinte, se fosse outra pizzaria que trabalhasse com o diâmetro diferente, picado, só ia dá pra gente usar essa fórmula se aqui, se o espaço de variação entre esses espaços aqui, fosse sempre relacionado assim ao mesmo valor dos espaços ali, aí ia dá pra gente usar essa fórmula [aponta para a variação no eixo-*x* e no eixo-*y*.]. Se fosse fora disso [gesticula um gráfico com pontos desordenados] não poderíamos utilizar essa fórmula.

O Jhon Jhonas explicita que sempre temos que guardar uma variação em *x* e uma variação em *y* iguais (para esboçarmos esse gráfico, nos moldes da função afim).

Pesq.: É isso aí gente! O que vai caracterizar uma função do 1º grau, conforme vocês mesmos concluíram é essa variação, delta *y* vai estar sempre para a variação delta *x*. Isso gera o valor de quem?

Jhon Jhonas: do *a*

[Nesse momento pediram para registrarem as variações e seus respectivos valores.].

Pesq.: Vocês encontraram o *a*, através da variação delta *y* por delta *x*, ele resultou em $\frac{2}{5}$. Será que esse valor de *a* é sempre o mesmo em qualquer sabor de pizza que eu comprar nessa pizzaria?

Juninho: Sim, porque vai variar sempre R$ 2,00 em cada pizza e o tamanho varia de 5 cm em 5 cm, em todas as pizzas. Então o *a* de todas vai ser $\frac{2}{5}$.

Pesq.: E o *b* é sempre o mesmo?

Jhon Jhonas: Não o *b* já vai ser a variação dos preços né.

Pesq.: Tem alguma possibilidade do *b* ser o mesmo?

Jhon Jhonas: Sim, se as pizzas forem de mesmo sabor, ou sabores diferentes e preços iguais.

Pesq.: Vocês acham que tem alguma coisa a ver o *a* com crescimento e decrescimento da função?

Juninho: Tem, porque se o *a* for negativo, vai ser para baixo. Se for positivo, vai ser crescente, e se for negativo, decrescente.

Jhon Jhonas: Eu acho que o *a* não poderia ser negativo, porque tamanho da pizza negativo não ia dar né.

Pesq.: Diante do que disseram, no modelo que construíram o *a* é sempre positivo e de valor $\frac{2}{5}$. Essa função é chamada...

Juninho: Afim.

Jhon Jhonas**:** Do 1º grau.

[Registraram que o *a* é positivo e por isso a função é crescente.].

Jhon Jhonas: Professora, você falou que a gente vai chegar no fim do trabalho e ir lembrando se a nossa conclusão está sempre certa, eu lembro que no primeiro dia a gente discutiu disso, se era ou não função do primeiro grau, agora estou tendo a resposta.

Pesq.: Para finalizarmos, eu gostaria de saber o que ficou para vocês da aula de hoje?

Juninho: A aula de hoje foi realmente conclusiva, porque eu nunca imaginaria que só vendo os preços com o total lá ia achar uma fórmula louca dessa aqui. Foi muito legal!

Jhon Jhonas: Muito legal mesmo!

Juninho: Agora eu vou chegar na pizzaria com o meu pai e vou falar, ó pai ó, deixa eu calcular isso aqui.

Pesq.: Nesse modelo que você encontrou Juninho eu posso jogar qualquer tamanho de pizza para saber seu valor?

Juninho: Se for Mista sim.

Pesq.: Se encomendarmos uma pizza gigante, com 100 cm de diâmetro, qual será o seu valor?

Juninho: $\frac{2}{5}x + 12{,}50$ igual ao preço total. É só jogar 100 cm no lugar do *x*. Vai dar R$ 52,50.

Juninho: A gente pode depois de tudo o que construímos colocar algumas situações--problema. Por exemplo: um pizzaiolo fez uma pizza aberta na mão, ele mediu e deu 27,5 cm de diâmetro. Qual é o valor que ele deve cobrar dessa pizza?

Pesq.: Sim, podemos agora levantar várias situações. Com o Modelo nas mãos, fica mais fácil para vocês analisarem as situações. Outra que eu poderia colocar: O Juninho foi à pizzaria com R$ 100,00. Com esse valor é possível ele pedir que façam para ele uma pizza de quantos centímetros? E inúmeras outras questões podem ser levantadas.

[Encerramos o encontro pelo avançar do tempo, mas os alunos gostaram tanto que queriam continuar para tentarem buscar mais coisas de matemática dentro dos dados coletados na pizzaria.].

5º Encontro: 22/11/2010

Descrição do Encontro:

Pesq.: Nesse encontro, vocês continuarão buscando situações do ponto de vista da matemática que respondam a indagações e questionamentos diante dos dados que vocês buscaram na pizzaria. Vou levantar algumas questões para que possam refletir e registrarem o que pensaram.

Pesq.: Que relações vocês podem observar com os dados que vocês coletaram lá na pizzaria? Indo lá, na hora que vocês olharam o cardápio e fizeram as perguntas, até mesmo na hora que vocês construíram os modelos, que relações vocês observaram?
Fabregas: Que a cada 5 cm de diâmetro o preço das pizzas varia de R$ 2,00 em R$ 2,00. O preço se relaciona com o diâmetro.
Pesq.: Quando afirmam que o preço se relaciona com o diâmetro, vocês recordam de alguma matemática?
Juninho: Eu lembro de função.
Fabregas: Eu penso logo nos gráficos mesmo, nas funções também.
Pesq.: Uma outra questão: se eu for a essa pizzaria e comprar pizzas Calabresa. Que relações podem ser estabelecidas se eu comprar: 1, 2, 3, 4, 40, e *x* pizzas de calabresa de 35 cm?
Fabregas: Tem que ver o preço da pizza de Calabresa. [solicitou o cardápio para a busca do preço da pizza grande de calabresa e verificou que custa R$ 28,90.].
[Os alunos pensam, discutem e registram que *x* pizzas nas dadas condições acima custarão R$ 28,90 vezes *x.*].
Pesq.: Se eu quisesse comprar 20 pizzas de calabresa de 35 cm de diâmetro, quanto eu pagaria?
Geraldo: Vinte vezes R$ 28,90.
Pesq.: Se eu quero um número ilimitado de pizzas, como eu posso representar?
Fabregas: *x . 28,90*.
Pesq.: Que relação podemos estabelecer?
Fabregas: De quantidade com preço.
Pesq.: Os ingredientes que o Sr. D vai comprar vão estar relacionados com a quantidade de pizzas que vão ser fabricadas não é?
Juninho: Sim.
Pesq.: Vou fazer um novo questionamento:
Fabricando cerca de 250 pizzas por semana, o Sr. D disse que compra 100 kg de Mussarela. Se ele dobrar a quantidade de pizza, comprará ____; e se triplicar ____; e se quadriplicar ____. E se ele fabricar *x* pizzas?
Fabregas: Se ele dobrar, ele precisa comprar 200 kg de mussarela.
Pesq.: Se forem *x* pizzas?
Juninho: *x* vezes 100.

Juninho: Não, não é *100 . x* não. Se eu chamar o *x* de 250, eu vou colocar 100 vezes 250, que vai dar 2500 [silencia por um instante.]. A relação é de 250 para 100.

Geraldo: Então divide 250 por 100 ué, e quanto mais pizza for...

Juninho: A cada 2,5 pizzas, um quilo.

Pesq.: Quanto de Mussarela que uma pizza gasta?

Fabregas: Uma pizza gasta 250 gramas de mussarela.

[Nesse momento eles buscaram a quantidade de mussarela utilizada em uma pizza, percebendo que é 400 gramas, aproximadamente, pois segundo eles existem pizzas que levam mais e outras que levam menos Mussarela em seus recheios.].

Pesq.: Agora, vocês receberão uma folha e vou colocar algumas situações para que vocês pensem, em duplas, em uma forma de resolvê-las:

Se a pizzaria do Sr. D vendesse pedaços de pizzas a R$ 1,00 cada. Uma pessoa que compra um pedaço pagaria ____; e 2 pedaços ____; 3 pedaços _____; 10 pedaços, _____.

Vocês poderiam encontrar o modelo que caracteriza essa situação?

[Em duplas, pensaram e questionaram.]. A primeira dupla, Fabregas e Geraldo explicaram:

Fabregas: *f(x) = 1 . x.*

Pesq.: Explique como você pensou Fabregas.

Fabregas: Porque aqui, deixa eu ver como vou te explicar, *a* é o preço fixo, R$ 1,00 e *x* é a quantidade de pedaços de pizzas.

Geraldo: *f(x)* é o preço total.

Fabregas: É o preço que você vai pagar.

Juninho: É é.

Pesq.: Se eu for até lá e pedir 20 pedaços quanto eu pagarei?

Fabregas: R$ 20,00, *a* vezes *x.*

Pesq.: Falta alguma coisa nessa função?

Fabregas: O *b* ou o *c.*

Pesq.: Por que está faltando o *b*? O que acontece com ele?

Jhon Jhonas: O *b* eu acho que eu lembro direito era o diâmetro, não, não.

Pesq.: O *b* do último encontro eram as variações do preço. Não era?

Jhon Jhonas: O preço foi fixo e o *b* é zero então?

Juninho: É é.

Geraldo: Ele é zero.

Fabregas: Zerinho.

Pesq.: Será que há alguma maneira de você descobrir se realmente ele é zero? Vocês se recordam do encontro passado, há um jeito para vocês descobrirem o modelo que atende a essa função?

[Em duplas, os alunos pegaram dois pontos e foram tentar achar o *a* e o *b* através do sistema de equações, como haviam feito no encontro anterior. Constataram que realmente $f(x) = 1x$ é o modelo que atende a essa situação.].

Pesq.: Esse modelo que vocês encontraram é uma função do primeiro grau?

Fabregas: Sim.

Juninho: É, porque o *x* está elevado à primeira potência.

Pesq.: O Geraldo fez o gráfico. Como ficou esse gráfico?

Geraldo: Uma reta.

Pesq.: Caracterizem para mim essa reta.

Juninho: É crescente.

Geraldo: É positiva.

Pesq.: Que características deve apresentar esse gráfico para representar a função do primeiro grau?

Jhon Jhonas: A variação do *y* tem que estar sempre na mesma variação do *x*, professora.

Pesq.: Explique melhor isso, Jhon Jhonas.

Jhon Jhonas: Aqui sempre muda R$ 1,00 [aponta para o eixo-*y*.], e aqui vai sempre aumentar um pedaço [aponta para o eixo-*x*.]. Em cada pedaço, aumenta R$ 1,00, aí é uma função do primeiro grau.

Geraldo: O *y* vai aumentar do mesmo jeito que o *x.*

Pesq.: Vocês disseram por cada pedaço consumido, a pessoa paga R$ 1,00 a mais. Essa variação do *y* com a variação do *x* representam o quê para vocês?

Juninho: o *a*, como vimos no outro encontro.

Jhon Jhonas: é o *a.*

Pesq.: Essa função, que vocês disseram que é do primeiro grau, tem um nome especial. Vocês poderiam me dizer o nome dela?

Juninho: Afim.

Fabregas: Deu um branco. Fala aí Juninho.

Jhon Jhonas: Professora você sabe né, fala aí.

[Todos ficaram curiosos acerca do nome que esse tipo de função recebe. Falaram algumas características dela, pediram dicas para a pesquisadora, mas do nome eles não se lembraram, e a pesquisadora precisou dizer que é a função identidade.].

Pesq.: Caracterizem para mim essa função identidade.

Juninho: Há eu sei o gráfico dela vai ser sempre crescente porque um é maior que zero.

Pesq.: Gráfico crescente nesse caso aí é ou não Geraldo?

Geraldo: É.

Pesq.: Registrem para mim essas informações.

Juninho: Função crescente, pois o *a* é 1, maior que zero.

Pesq.: Qual foi o modelo que encontraram?

Juninho: *f(x) = 1,00 . x*

Pesq.: Com esse modelo eu consigo comprar qualquer quantidade de pedaços que eu quiser?

Jhon Jhonas: Sim senhora.

Pesq.: A segunda situação que vou deixar para vocês questionarem é: se a pizzaria do Sr. D trabalhasse com rodízios e o valor por pessoa fosse R$ 15,00, quanto pagaria uma pessoa que consumisse 1 pedaço ____, 2 pedaços _____, 10 pedaços?

[Fizeram uma tabela relacionando o número de pedaços ao preço fixo de R$ 15,00 e esboçaram um gráfico.].

Pesq.: Vamos interpretar o gráfico agora, dessa segunda situação.

Juninho: É função afim, ó função constante.

Pesq.: Qual é a diferença dos gráficos? [Neste momento todos silenciam por um instante.].

Pesq.: Jhon Jhonas o que é o seu *x*?

Jhon Jhonas: É o 15.

Pesq.: O que estamos utilizando como preço até esse momento?

Geraldo: O eixo-*y*.

Jhon Jhonas: É porque é o *y* que varia né!

Juninho: Mas na função constante o *y* não varia não.

Pesq.: Jhon Jhonas, vamos considerar a quantidade de pedaços como fixo, ou seja, eixo-*x*, a gente está relacionando a quantidade de pedaços com o preço. O preço a gente considera no caso como eixo-*y*.

Jhon Jhonas: Tá, mas deixa eu ver o gráfico.

Pesq.: Como ficou esse gráfico? Esse gráfico é o quê?

Geraldo: Constante.

Pesq.: Por que constante, Geraldo?

Geraldo: Porque o *y* não varia?

Pesq.: Como ficaria então a lei dessa função?

Geraldo: $f(x) = 15$.

Jhon Jhonas: Eu pensei o seguinte, $f(x)$ é igual... A função normal do primeiro grau é assim $f(x) = ax + b$, então $f(x)$ a gente poderia estar falando que o x é que é 15, mas não é isso que eu quero dizer, eu quero dizer que...

Juninho: Não ficou certo na cabeça dele de acordo com a lei da função.

Pesq.: Você não concorda que seja 15, vamos verificar se realmente é 15?

Jhon Jhonas: É, matemática é para provar.

Pesq.: Qual é a lei se ela for uma função do primeiro grau, Jhon Jhonas?

Jhon Jhonas: $f(x) = ax + b$

Pesq.: Se a pessoa comer um pedaço quanto ela paga?

Jhon Jhonas: R$ 15,00.

Pesq.: E se forem dois?

[Recordaram do encontro anterior e pegaram dois pontos para buscarem o modelo através do sistema linear.].

Pesq.: Após vocês terem encontrado o modelo, me digam como é a função constante.

Fabregas: O a é zero.

Jhon Jhonas: O x também é zero, consequentemente.

Pesq.: Então a lei dessa função é de que tipo?

Fabregas: O y é sempre o mesmo valor.

Pesq.: Que valor é esse?

Fabregas: Nesse caso é R$ 15,00.

Pesq.: Por que o gráfico que vocês construíram ficou deitado?

Fabregas: Porque o y não varia. O x pode ser 1 que vai pagar R$ 15,00.

Geraldo: Pode ser 1000 que vai pagar R$ 15,00.

Pesq.: Se todos os valores que vocês escolherem para o x, como disseram ligam ao valor de R$ 15,00, o gráfico gera uma reta, e como é essa reta?

Fabregas: Paralela ao eixo-x.

[Foram registrando as características da função constante em uma folha.].

Juninho: A gente tinha achado no encontro passado que o *a* era a variação do *y* sobre a variação do *x*. Como a gente acha ele aqui?

Pesq.: Eu é que pergunto, quando a função é constante, o que vai acontecer?

Juninho: A variação quinze sobre, um?

Pesq.: O *x* no caso é de um em um pedaço, e o *y*?

Juninho: É 15.

Pesq.: Que variação há entre 15 e 15?

Juninho: Nenhuma.

Geraldo: Nenhuma.

Juninho: Então é zero sobre um.

Pesq.: Por isso que o *a* é zero, entendeu?

Juninho: Não precisava nem de ter feito a conta, olhando que o *a* é zero e anulando o *a* dava 15 direto.

Pesq.: Se você optasse por olhar pela variação através do gráfico, sim. Nós vimos que o *a* é a variação do *y* sobre a variação do *x*.

Juninho: Quando o *a* dá zero anula a do primeiro grau e fica só o 15.

Pesq.: Agora vamos analisar uma terceira situação:

Na pizzaria do Sr. D vocês questionaram acerca dos valores que são cobrados nas entregas de pizzas. O valor estipulado para entregas em bairros próximos é de R$ 3,00, conforme mencionou o Sr. D.

Algumas pessoas que moram próximas a essa pizzaria ligam e encomendam pizzas. Se 1 pessoa faz a encomenda, a pizzaria receberá_____ de taxa de entrega. E se 2 pessoas encomendarem? E se 3 pessoas encomendarem? E se 10 pessoas encomendarem?

Vocês poderiam encontrar o modelo que caracteriza essa situação?

[Os alunos, em duplas, esboçaram o gráfico que representa essa situação.].

Pesq.: Depois de esboçarem o gráfico dessa terceira situação, o que ele está relacionando?

Juninho: O número de encomendas com o preço.

Pesq.: O número de encomendas está relacionado aonde no plano?

Jhon Jhonas: no *x*.

Pesq.: E as encomendas, os valores?

Fabregas: No eixo-*y*.

Pesq.: Qual a lei que você encontrou, Juninho?

Juninho: R$ 3,00 vezes *x.*

Geraldo: $f(x) = 3.\, x$

Pesq.: E o Jhon Jhonas?

Jhon Jhonas: A mesma.

Pesq.: Esse gráfico para vocês lembra uma função?

Geraldo: Sim, o primeiro grau.

[Todos concordaram.].

Pesq.: Vocês acham que é do primeiro grau por quê?

Fabregas: É uma reta.

Juninho: O gráfico é uma reta crescente, com a variação de *y*, proporcional à variação de *x*.

Pesq.: Como que é essa variação Juninho?

Juninho: De 3 em 3 no eixo-*y* e de 1 em 1 no eixo-*x*.

Pesq.: Essa variação quem é?

Juninho: É o *a.* [Todos concordaram com Juninho.].

Pesq.: Então se eu olhasse para esse gráfico e colocasse três sobre um, eu já teria o valor do *a*, direto?

Jhon Jhonas: Sim, sem fazer contas.

Pesq.: O que mais caracteriza essa função?

Juninho: Está faltando o *b*, ele é zero, então ela é uma função identidade?

Pesq.: Será que ela é identidade?

Juninho: Não, não.

Geraldo: Na função identidade, o *a* tem que ser 1.

Pesq.: No nosso caso, o *a* foi 3, então ela recebe um outro nome.

Jhon Jhonas: Função o quê?

Pesq.: O *a* é diferente de zero, e o *b* é zero, como é chamada essa função?

Jhon Jhonas: Eu acho que é a linear então.

Pesq.: Se vocês quiserem uma confirmação, busquem nos livros as características da função linear.

Pesq.: Além dos modelos de semana passada vocês conseguiram encontrar mais três modelos hoje. Já encontraram cinco modelos de situações encontradas na pizzaria. Fizeram gráficos, analisaram, perceberam seus comportamentos.

Pesq.: Essa última função, para vocês é crescente ou decrescente?

[Todos disseram ser crescente.].

Pesq.: Tem mais uma coisa que podemos observar quando a função é linear, por exemplo, quando o *x* é zero. Nenhuma pessoa encomendou pizzas, quanto que o dono vai receber?

[Todos disseram, nada.].

Pesq.: Se zero pessoa encomendar, ele não vai ganhar dinheiro. Zero pessoa, zero real, que ponto é esse?

Geraldo: É a origem.

Pesq.: Será que a função linear sempre passa pela origem?

Jhon Jhonas: Sim, começa na origem.

Pesq.: Será que qualquer função linear passa pela origem?

Juninho: Sim.

Jhon Jhonas: Sim.

Fabregas: Eu acho que passa.

Juninho: Por que você acha?

Geraldo: Por que todo número vezes zero é zero?

Juninho: Quando eu chamar o *x* de zero o *y* vai ser zero também.

Pesq.: Então uma característica da função linear é que ela passa pela origem, pelo (0,0).

Pesq.: Gostei muito da atuação de vocês hoje, já construíram cinco modelos e em um próximo encontro vamos observar mais situações diferentes.

6º Encontro: 06/12/2010

Descrição do Encontro:

Pesq.: No último encontro vocês encontraram um modelo para a função identidade, um modelo para a função linear, e um modelo para a função constante se lembram? Eu gostaria que vocês registrassem quais foram esses modelos que vocês encontraram.

Juninho: De função afim, de função identidade e de função linear.

Pesq.: Para a função identidade vocês se recordam do modelo que encontraram?

Geraldo: *f(x) = 1.x.*

Pesq.: Qual foi o outro modelo que vocês encontraram? Quando mencionamos a possibilidade dessa pizzaria trabalhar com rodízios de pizza, se lembram?

Juninho: Função constante.

Fabregas: *f(x) = 15.*

Pesq.: No outro modelo nós relacionamos a questão das entregas de pizzas, lembram? Se a pessoa mora em um bairro próximo a taxa é de R$ 3,00, se recordam? Vocês acharam o modelo da função o quê?

Juninho: Linear. *f(x) = 3x*.

[Recordamos as características dessas funções que eles já haviam mencionado no encontro anterior.].

Pesq.: Com esses três modelos agora, eu sugiro que achem *f(1), f(3), f(5) e f(7*) de cada um deles.

Pesq.: O que seria esse *f(1), f(3), f(5) e f(7)*?

Geraldo: Imagem?

Juninho: *f(1)* é aplicar o *1* no lugar de *x* no modelo.

Pesq.: Para buscar o quê?

Fabregas: O *y*.

Pesq.: O que é o *y* em uma função?

Geraldo: A imagem.

Pesq.: Todos acham que é a imagem?

[Todos disseram sim.].

[Pegaram os três modelos e substituíram os *x* por *1, 3, 5 e 7* e encontraram três sequências: *(1, 3, 5,7); (15, 15, 15, 15); (3, 9, 15, 21)*.].

Pesq.: Agora olhem essas três sequências que encontraram e busquem algumas características nelas.

Jhon Jhonas: Na identidade professora, quando o *f(x)* for algum número qualquer, vai sempre se repetir esse número, por exemplo, se *f(x) = 5* vai sempre ser o *f(x) = 5*. Igual aqui deu *(1, 3, 5, 7)*. Já na constante vai ser sempre o valor do *x*, vai ser sempre *15* e na linear vai ser todos múltiplos de *3*.

Pesq.: Sim, essas são algumas características, pensem em mais algumas. Tentem analisar a primeira sequência, *(1, 3, 5, 7)*.

Geraldo: Tá aumentando de dois em dois.

Juninho: Só números ímpares.

Fabregas: Aumentando aqui de dois em dois.

Pesq.: E a segunda sequência *(15, 15, 15, 15)*, o que vocês podem observar?

Juninho: Não está somando nem subtraindo nada.

Pesq.: Então não está somando nem subtraindo nada? De quinze para quinze...

Juninho: Zero. Uai *15 + 0*.

Fabregas: É ué.

Pesq.: De *15* para *15* eu não posso dizer que é *15 + 0*?

Geraldo: Ou pode ser *15 - 0*.

Pesq.: Que características a mais apresenta essa sequência?

Juninho: Não altera o valor, sempre *15, 15, 15*...

Fabregas: Mantém o valor.

Pesq.: Eu poderia dizer que é quinze mais zero?

Fabregas: Poderia mais eu acho que isso não é uma soma.

Pesq.: E se fosse vezes zero?

Fabregas: Vezes zero é diferente, porque quinze vezes zero vai dar zero.

Pesq.: E a última sequência *(3, 9, 15, 21)*?

Fabregas: Sequência de seis em seis.

Juninho: Números ímpares, múltiplos de 3.

Geraldo: A diferença entre eles é -6.

Pesq.: Nós estamos vendo várias fórmulas e modelos dentro das funções principalmente a função do primeiro grau, que é a que constatamos mais fatos nessa pizzaria. Então, eu gostaria de mostrar para vocês uma coisa, na primeira sequência vocês me disseram que está somando 2, será que é uma característica da função do primeiro grau sempre eu somar o mesmo número? Em todas as sequências que vocês construíram, podem observar que é possível eu somar o número anterior a um mesmo número para encontrar o número posterior. Essa soma que fazemos, depois vocês vão estudar é uma P.A. (Progressão Aritmética). Nas sequências em P.A., o número anterior é acrescentado de um novo número que é a razão. A razão é o que está sendo somado ao número anterior para gerar o outro termo. Essa é uma outra forma de definirmos a função afim. Eu posso ter uma função afim somando um valor ao termo anterior para eu gerar o outro termo. Esse termo será sempre o mesmo para ser função afim?

Geraldo: Acho que sim.

Pesq.: Vou pegar os gráficos que vocês construíram lá no primeiro encontro para vocês observarem novamente. Lembra que vocês disseram que na função afim, com os dados da pizzaria, vou de 5 em 5 cm de diâmetro e o preço vai de R$ 2,00 em R$ 2,00? [Olharam para os gráficos e perceberam que está somando 5 cm no diâmetro e R$ 2,00 no preço das pizzas.].

Pesq.: Essa é a característica da função afim, a gente vai somando o mesmo número no anterior para gerar um outro. Essa é outra maneira de analisarmos a função afim.

Pesq.: No segundo encontro que tivemos, perguntei a vocês qual é a forma da pizza, o que vocês me disseram?

Fabregas: Que era redonda.

Pesq.: No dia eu questionei a vocês como acham que eu consigo calcular a área dessa pizza. Um de vocês disse que era para eu pegar o raio e multiplicar por 6,28, ou seja, confundiu o comprimento da circunferência com a área. Na oportunidade, eu sugeri que vocês pesquisassem em casa como eu calculo a área das regiões circulares. Alguém conseguiu encontrar essa relação?

Juninho: É πr. 0,5?

Geraldo: Não, é πr^2.

Juninho: É verdade.

Pesq.: Todos concordam?

Fabregas: Acho que é isso.

Pesq.: O que é esse πr^2?

Geraldo: É o diâmetro da pizza vezes o π.

Juninho: Não, é o diâmetro dividido por dois e ao quadrado, vezes o 3,14 de π.

Pesq.: Essa relação me permite encontrar...

Juninho: A área.

Pesq.: O que vocês acham que é essa relação $A = \pi r^2$?

[Todos ficam pensativos.].

Juninho: É uma função quadrática né?

Pesq.: Por que Juninho?

Juninho: Porque o π já tem o valor dele, que é universal, 3,14. O raio é a imagem que pode variar. Aí podemos substituir o raio por *x* e vai ficar um termo ao quadrado, o *x* ao quadrado.

Pesq.: Você acha então que é uma função quadrática. O que estaria em função do quê?

Juninho: A área em função do raio ao quadrado.

Pesq.: Todos concordam com a colocação do Juninho?

[Todos disseram que sim.].

Pesq.: Lá na pizzaria existem quantos tamanhos de pizza?

Fabregas: Três tamanhos: pequena, média e família.

Pesq.: Vocês seriam capazes de calcular a área dessas pizzas?

Juninho: Sim.

Pesq.: O que é área?

Juninho: Quantos centímetros cabem dentro da pizza.

Fabregas: É é.

Pesq.: Eu gostaria que vocês encontrassem a área das pizzas que são oferecidas lá na pizzaria.

[Solicitaram um papel e foram dialogando uns com os outros para encontrarem a área das pizzas de 25, 30 e 35 cm que são oferecidas na pizzaria do Sr. D.].

À medida que foram dialogando foi possível falar um pouco nas unidades de medida, no caso das pizzas, centímetros quadrados. A pesquisadora sempre instigando para que eles pensassem nessas situações.

Pesq.: Eu poderia dizer que essas pizzas possuem 25 metros de diâmetro?

Juninho: Nossa!

Pesq.: Vocês devem ter muito cuidado, às vezes registram as coisas e não pensam no que estão fazendo. O Juninho assustou com minha colocação da pizza com 25 metros de diâmetro, então devem sempre pensar nas unidades de medida que devem ser coerentes com o que vocês estão analisando. A unidade ela vai ser colocada de acordo com o que estamos tratando, pode ser desde uma formiga até o tamanho de uma estrada.

Pesq.: Se a pizza que vocês analisaram possui 25 cm de diâmetro, a área que encontraram 490,625 estará em centímetros quadrados. Por que é centímetro quadrado?

Fabregas: Porque é área.

Pesq.: Por que eu coloco a unidade elevada ao quadrado?

Fabregas: Duas dimensões.

Pesq.: Se fosse volume?

Geraldo: Seria ao cubo.

Pesq.: O que quer dizer esse 490,625 cm^2?

Juninho: São 490 cm^2 completos. Quadradinhos que cabem na pizza.

Pesq.: Então se eu pegar 490 quadradinhos de 1 cm cada eu consigo colocar dentro dessa pizza?

Jhon Jhonas: Sim.

Juninho: E esse 625 professora?

Pesq.: É a parte decimal, ou seja, você coloca 490 quadradinhos e ainda falta um pedacinho, que é esse 0,625 cm^2. Esse valor não chega a ser um quadradinho, é menos que o valor de um.

Pesq.: Na segunda pizza que valor vocês encontraram para a área?

Juninho: 706,5 cm^2.

Pesq.: E a última?

Jhon Jhonas: 11,3825 cm^2.

Juninho: Dá 1138.

[Pararam por um instante e perceberam que não havia uma coerência, pois se a de 30 cm possuía uma área de 706,5 cm^2, a de 35 cm não poderia ser 11,3825 cm^2.].

Pesq.: É isso aí, vocês devem aprender a interpretar os dados que vocês encontraram, o que na maioria das vezes vocês não fazem. Sempre analisarem, verem se a resposta encontrada responde ao que foi pedido.

[Refizeram as contas e encontraram 961,625 cm^2.].

Pesq.: E se eu quisesse fazer o comprimento dessas pizzas como eu faria?

Juninho: $2\pi r^2$. Ó, $2\pi r$.

Pesq.: Se essa pizzaria, por exemplo, fabricasse pizzas de 20 cm de diâmetro. Qual seria sua área?

Juninho: Seria 20 dividido por 3,14, vezes 10 ao quadrado. Ia dar 314 cm^2, deu certinho.

Pesq.: E se ela fabricasse pizza de 40 cm?

Jhon Jhonas: A mesma coisa.

Juninho: 628 cm^2.

Jhon Jhonas: Não.

[Verificaram as contas e utilizaram a calculadora para auxiliá-los.].

Juninho: Dá 1254 cm^2.

[Geraldo fica pensativo e tentando uma nova forma para descobrir esse valor.].

Pesq.: Geraldo o que você pensou? Pode compartilhar com a gente.

Geraldo: Eu pensei em achar a diferença. Achei a diferença e tentei somar.

Juninho: Através da variação.

Geraldo: Mas não deu certo.

Pesq.: Por que será que não deu certo?

Juninho: Por que é um termo quadrado? Se fosse uma função afim daria, mas não é.

Pesq.: Se fosse função afim, poderia achar a razão ali, o termo que você somaria que daria certo. O Geraldo já conseguiu, pensando dessa forma mostrar que não é função afim, pois ele não encontrou o termo que somaria ali.

Pesq.: Vou abordar mais uma questão para que possam refletir acerca dela: uma das questões que vocês levantaram lá na pizzaria foi acerca do lucro ou do prejuízo do dono do estabelecimento, que afirmou que ganha em média 35 % de lucro e que vende em média 250 pizzas por semana. Digam quanto ele receberá de lucro em uma semana que ele venda: 100 pizzas Calabresa grandes, 50 pizzas Mussarela pequenas, 20 Nordestinas médias, 30 Aliche grandes e 50 Califórnia médias.

[Os quatro alunos começaram a discutir e registrar o que pensam acerca desse lucro em uma folha.].

Pesq.: Geraldo disse que o lucro é de R$ 292,75.

Juninho: Só isso.

Pesq.: Geraldo, explica o que você fez.

Geraldo: Eu multipliquei o tanto de pizzas que vendeu pelo preço, somei o preço das pizzas e fiz a regra de três para achar a porcentagem. Peguei o preço total e tirei os 35% de lucro.

Pesq.: Todos concordam com a colocação de Geraldo? O total que ele achou é de R$ 5855,00.

Juninho: Está dando R$ 2049,25.

Fabregas: Eu achei esse valor de R$ 292,75 muito baixo também.

Juninho: Se for colocar 70% em cima de R$ 295,25 não dá R$ 5855,00.

Jhon Jhonas: Eu acho que ele fez direitinho, professora.

[Fizeram as conferências das contas com o auxílio da calculadora e perceberam um erro de cálculo na regra de três.].

Pesq.: Por que você achou o valor R$ 295,25 muito baixo, Juninho?

Juninho: Porque se for dividir 50% ia dar dois mil novecentos e pouco e 30% não pode ser tão baixo.

Juninho: Dois mil e pouco por semana, vou montar uma pizzaria também!

Geraldo: Deu R$ 2049,25 [Depois de conferir todas as contas.].

Fabregas: É isso mesmo.

Pesq.: Supondo que o Sr. D venda em um mês essa mesma quantidade de pizzas por semana, qual será o seu lucro mensal?

Juninho: Se for o mesmo modelo, vai ser sempre R$ 2049,25 na mão dele.

Pesq.: E esse valor é em quanto tempo?

Juninho: Por semana. [Todos concordam com ele.].

Pesq.: E por mês?

Geraldo: Vai dar mais ou menos R$ 8000,00.

Juninho: Vai dar um pouquinho mais. Dá R$ 8197,00.

Pesq.: Isto é fazendo a suposição que ele venda a mesma quantidade de pizza e que elas sejam do mesmo tamanho e dos mesmos sabores, pois sabemos que isso é bem variável.

Pesq.: Vamos agora supor que, numa determinada semana, o Sr. D venda: 100 pizzas Napolitanas grandes, 50 Milho Verde pequenas, 50 Catupiry Especial médias e 50 Firenze grandes. Quanto ele receberia de lucro?

[Solicitam uma folha para os registros.].

Pesq.: Juninho, explica como vocês pensaram?

Juninho: Professora, montamos uma expressão, achamos o resultado de cada uma e somamos. A porcentagem de 35% do total aqui, de R$ 6575,00 deu R$ 2501,25.

Pesq.: Na primeira situação, quanto foi o lucro semanal mesmo?

Juninho: R$ 2049,00.

Pesq.: E na segunda situação?

Juninho: Deu R$ 2501,25.

Pesq.: Houve alguma diferença nos lucros?

Jhon Jhonas: Deu.

Pesq.: Por que será?

Juninho: Porque aumentou o lucro.

Pesq.: Por que aumentou o lucro de um para o outro?

Geraldo: Porque aumentou a quantidade de pizzas vendidas.

Pesq.: Então aumentou a quantidade de pizzas vendidas? Quais foram essas quantidades?

Juninho: Não. É a mesma quantidade, 250. É porque vendeu mais pizzas caras do que pizzas baratas aqui.

Pesq.: Então o lucro varia?

Fabregas: Varia.

Jhon Jhonas: Varia.

Pesq.: Vai depender de quê?

Geraldo: Do tamanho das pizzas.

Jhon Jhonas: Preços, sabores.

Pesq.: Se, por exemplo, o Sr. D recebe com as vendas de uma semana um valor de R$ 4000,00. Esse dinheiro fica todo para ele?

[Todos disseram que não.].

Fabregas: Ele tem que pagar os funcionários, tem os gastos com os alimentos.

Pesq.: Quantos por cento aproximadamente ele gasta?

Fabregas: 70.

Juninho: 65%.

Pesq.: O total, pagando seus funcionários e despesas e retirando seu lucro representa...

Juninho: 100%.

Pesq.: Então se ele ganhar R$ 4000,00 para ele sobra mais ou menos quanto?

[Pensam por um instante.].

Juninho: Com R$ 1400,00.

Pesq.: Se, ao invés de vender 250 pizzas por semana, ele vender apenas 150. O que acontecerá com seu lucro?

Juninho: Vai diminuir.

Fabregas: É, vai diminuir. Ele paga os funcionários mensalmente, independente do tanto que ele vender?

Pesq.: Vocês questionaram isso lá não se recordam?

Juninho: É fixo.

Fabregas: Então ele vai ter menos lucro.

Pesq.: Pode acontecer de ele não ter lucro nenhum?

Fabregas: Não.

Geraldo: Pode.

Fabregas: Só se ele vender abaixo da meta.

Juninho: Ele pode vender só o necessário para sobreviver e não ter lucro.

Geraldo: Pode vender uma quantidade também que ele nem pague as despesas.

Pesq.: Se ele vende uma quantidade que não lhe permite pagar as despesas ele começa a ter prejuízos não é mesmo? Se ficar dessa forma por muito tempo o que pode acontecer?

Jhon Jhonas: Fecha.

Juninho: Vai falir.

Pesq.: Como que o Sr. D coloca os preços nas suas pizzas?

[Ficaram um pouco pensativos.].

Juninho: É pelo preço do ingrediente! Ingrediente mais caro vai ocasionar uma pizza mais cara.

Pesq.: De um tamanho para outro o que ele faz?

Juninho: Ele aumenta R$ 2,00.

Fabregas: Em cada 5 cm.

Pesq.: Segundo o Sr. D isso é o que?

Juninho: Uma proporção.

Pesq.: Todas as pizzas possuem o mesmo preço?

Fabregas: Não, varia com os ingredientes. Ingredientes mais caros, pizzas mais caras.

Pesq.: Então gente, esses foram alguns questionamentos, diante de todos os outros que vimos nos encontros anteriores e que são possíveis de serem feitos com o trabalho da pizzaria. Existem várias outras indagações e questionamentos que a matemática poderia nos auxiliar, poderíamos até mesmo ficar um ano inteiro buscando respostas diante de tantos dados que vocês buscaram na pizzaria do Sr. D. Mas por enquanto vamos parar e quem sabe em uma outra oportunidade continuamos com outros questionamentos e indagações. Eu gostaria nesse momento que cada um falasse um pouquinho sobre a pesquisa, o que vocês acharam de ver a matemática dessa outra forma, se foi válido, se foi diferente da forma como é trabalhada na sala de aula. Gostaria que se posicionassem um pouco. Depois vou entregar uma folha para que registrem também.

Fabregas: Foi interessante! A matemática deixou também de ser um pouco chata, porque dentro de sala de aula é chata. Algumas vezes, igual hoje, foi legal, mas foi cansativo, mas deu para a gente aprender bastante coisa. É isso aí.

Juninho: Para mim foi uma experiência muito legal, eu nunca tinha pensado em trabalhar com pizzaria. Eu achei que a matemática era uma coisa que a gente só trabalhava com números dentro de sala, números em escritório e eu não achei que a pizzaria ia chegar tão longe assim com a matemática. Foi uma maneira muito legal de aprender a matemática, foi uma coisa meio inesperada para mim, ver tanta coisa de matemática numa pizzaria, igual achar uma função do primeiro grau no preço de uma pizza. Achei muito interessante!

Geraldo: Nunca vi tanto número numa pizza só!

Jhon Jhonas: Só vou contar uma experiência rápida: eu sempre pensava em sala de aula como que eu ia aplicar as experiências do colégio na minha vida, eu estou falando sério mesmo. Eu sempre pensava, para que eu estou aprendendo isso. Eu achei bem interessante o trabalho, bem legal mesmo porque parece que abre assim a nossa cabeça para a gente ver essas aplicações. Foi bem legal o trabalho, a gente se divertiu lá e tudo mais foi bem legal pra gente saber também aplicar as coisas. Igual eu aprendi a aplicar essas coisas na minha vida, vendo que está sempre no cotidiano, vendo que posso abrir um negócio próprio, já tenho mais ou menos uma manha, uma noção. Muito interessante professora!

Geraldo: Dentro de sala eu já falei um monte de vezes: cara isso aí que eu estou aprendendo aonde eu vou usar? Isso aí responde tudo. Eu falava, função do segundo grau, aonde eu vou usar isso?

Pesq.: Deixa me interferir um pouquinho. Percebo que a angústia de vocês em tentar associar um pouco a matemática com alguma coisa da vida de vocês começou a ser iluminada. Vocês puderam ver que há a possibilidade de trabalhar de forma diferente. E com relação à matemática em si, o que foi possível para vocês, ou recordarem, ou aprenderem ou a fazerem ligações?

Jhon Jhonas: A parte de fazer o sistema foi assim bem recordado.

Juninho: Nossa, desde o ano passado que eu não via sistema de equação, aí veio para eu nunca mais esquecer.

Geraldo: E olha que no ano passado nós estudamos sistemas até falar chega.

Pesq.: Qual a diferença dos sistemas que você aprendeu no ano passado pro que a gente fez agora? Será que há alguma diferença?

Geraldo: Tem porque eu aprendi a aplicar o sistema em algumas situações. Lá não, lá dava um exemplo de uns números passava um monte e a gente tinha que fazer.

Pesq.: Então a diferença que você menciona é que agora você aplicou em alguma situação, essa situação é o que para você?

Juninho: Uai da nossa realidade.

Geraldo: Só vendo você falar assim, são coisas que acontecem o tempo inteiro e a gente nem percebe.

Pesq.: Vocês acham que o tema que eu sugeri “O Comércio de Pizzas” foi válido ou não? Foi um tema legal?

Juninho: No início foi bem nada a ver, eu achei que eu ia chegar na pizzaria perguntar o preço e pronto acabou, é a única coisa de matemática que eu vou perguntar. Aí chegamos lá, vimos diâmetro, preço, lucro, tudo que a gente podia ver na matemática. Chegando aqui a gente afundou na matemática, chegamos no gráfico da pizzaria, chegamos à ... e ainda aprendemos aquele negócio de achar o *a* das funções, nós vimos muita coisa.

Jhon Jhonas: Eu nunca ia imaginar que nossas perguntas iam dar em alguma coisa.

Juninho: Eu achei uma loucura no início, mas, agora no final, eu vi que valeu muito a pena.

Pesq.: O que vocês aprenderam de matemática com essa experiência?

Fabregas: A gente pode perceber na montagem dos gráficos, a respeito do que é uma função afim, constante, identidade.

Juninho: A gente recordou as funções: identidade, linear e a afim, a gente recordou proporção.

Geraldo: Área da circunferência, diâmetro.

Juninho: A gente também recordou a equação quadrática.

Jhon Jhonas: Eu acho que o mais importante, eu tive pensando, tem gente que não consegue se dar bem em matemática, e eu sei qual pode ser a solução delas. Muitos professores só fazem a matemática na decoreba mesmo, as pessoas tinham que levar a entender a matemática, aí fica mel na chupeta para ela né.

Fabregas: Aí fica muito mais interessante.

Pesq.: Estudar função dessa forma foi diferente do que vocês normalmente estudam na sala de aula?

[Todos disseram que sim.].

Juninho: Porque é uma forma aplicada de estudar. Porque na hora que estamos estudando na sala, a professora fala assim, isso aqui é a função do primeiro grau e a gente tem que ficar assim, quando eu ver esse número, desse jeito ele representa uma função do primeiro grau. Aqui a gente viu um modo de associar a função do primeiro grau com uma realidade nova.

Geraldo: Eu acho que é muito diferente, e assim é melhor de aprender também.

Fabregas: Porque a gente presta mais atenção também.

Geraldo: Na sala de aula é muita repetição.

Pesq.: Então com o que seria uma simples visita em uma pizzaria foi possível a gente trabalhar uma infinidade de coisas.

Juninho: É. Um bimestre da escola.

Pesq.: Ou mais não é. Retornamos a alguns conteúdos que nem são estudados no primeiro ano, mas surgiram de acordo com nossas necessidades. Eu gostaria de dizer que gostei muito de trabalhar com vocês, agradeço a contribuição de todos, tenho certeza de que me ajudaram bastante e o que dialogamos e construímos tem um valor imenso para vocês também, poderão levar aonde forem o que vimos no decorrer dessa experiência.

A intenção da Educação Matemática, eu busquei mais especificamente a Modelagem Matemática, é buscar um trabalho de forma diferenciada, porque percebo que essa forma tradicional e repetitiva de sala de aula necessita de mudanças.

Eu quis buscar na pizzaria, uma realidade de vocês, uma possibilidade de perceberem que matemática existe lá e como podemos trabalhar com esses valores de forma dinâmica e mais interessante. Espero que essa experiência nova contribua para um crescimento maior de vocês e que frutifique e desperte a vontade de buscar e crescer cada dia mais.

Gostaria que registrassem em uma folha o que ficou de positivo, ou mesmo de negativo com toda a experiência que vivenciaram.

Questões levantadas pelos sujeitos de pesquisa para nortearem a visita à pizzaria:

1- Tipos de pizzas?

2- Tamanho das pizzas que estão disponíveis no estabelecimento?

3- Quanto ao preço final da pizza, existe variações diante dos sabores?

4- ~~Gasto mensal considerando considerando o pagamento de~~ NÃO ~~dívidas, funcionários e contas~~

5- Como a venda da pizza pode influênciar o pagamento dos funcionários?

6- Tabela de preços quando ao tamanho das pizzas.

7- Qual tipo de pizza é mais vendida no estabelecimento? Quantas em média são vendidas?

8- ~~Como é calculado o preço do rodízio~~?

9- Como é calculado o preço da pizza em relação ao recheio?

10- Se houver entregas, como é calculado o preço da entrega?

11- Como é produzida uma pizza?

12- Existe proporsão entre os tamanhos das pizzas?

13- O tamanho das pizzas influência no lucro?

14- Qual tamanho de pizza é o mais vendido?

15- Qual tipo de pizza é a mais vendida?

16- Dado um sabor de pizza, ~~é o mais barato~~, como é calculado o valor das variações de preço de acordo com o tamanho?

Figura 1: 1º encontro, questões levantadas pela dupla: Juninho e Jhon Jhonas.

Questões levantadas pelos sujeitos de pesquisa para nortearem a visita à pizzaria:

1- Como vocês aplicam o preço do rodízio? X
2- Como vocês fazem para contar o lucro ou prejuízo? X
3- O garçom ganha comissão? X
4- Vocês têm alguma meta de venda? Se tiver, qual seria? X
5- Vocês usam que porcentagem de lucro (margem)? X
6- Como vocês calculam o tamanho da pizza de acordo com o preço? Qual dá mais lucro pequena, média ou grande? X
7- Qual o tamanho de pizza que mais costuma vender? X
8- Vocês vendem mais em dias úteis ou finais de semana? X
9- A margem de lucro é a mesma em todos os tamanhos? X

Figura 2: 1º encontro, questões levantadas pela dupla: Geraldo e Fabregas.

A verdadeira pizza napolitana

ALICHE G - 27,90 M - 25,90 P 23,90
Molho de tomate, mussarela, filé de anchovas, tomate fatiado, parmesão, azeitonas.

ATUM
Molho de tomate, atum importado, tomate fatiado, cebola, azeitonas e orégano. 26,50 → 24,50 → 22,50

ATUM COM MUSSARELA
Molho de tomate, mussarela, atum, tomate fatiado, azeitonas e orégano.

BOLONHEZA = Vendes Fina
Molho de tomate, mussarela, carne moída, tomate fatiado, queijo parmesão, azeitonas e orégano.

CALABRESA ESPECIAL 28,90 26,90 24,90
Molho de tomate, mussarela, calabresa fatiada, champignon, cebola, azeitonas e orégano.

CALIFÓRNIA → 30,50 28,50 26,50
Molho de tomate, presunto, catupiry, pêssegos, figos e ameixas.

CALZONE DE FRANGO - Pizza Fechada
Molho de Tomate, frango, catupiry, cebola, parmesão ralado, azeitonas e orégano.

CALZONE DE FRANGO - Pizza Aberta
Molho de tomate, frango, catupiry, cebola, parmesão ralado, azeitonas, orégano.

CALZONE FORNELLO - Pizza Fechada
Molho de tomate, atum, palmito, mussarela, parmesão ralado, azeitonas e orégano.

CALZONE FORNELLO - Pizza Aberta
Molho de tomate, atum, palmito, mussarela, permesão Ralado, azeitonas, orégano

CATUPIRY ESPECIAL 28,90 26,90 24,90
Molho de tomate, catupiry, calabresa fatiada, parmesão ralado, alho, azeitonas e orégano.

CARIOCA
Molho de Tomate, mussarela, salaminho, tomate fatiado, azeitonas e orégano.

CHAMPIGNON 27,90 25,90 23,90
Molho de tomate, mussarela, champignon, cebola, azeitonas e orégano.

FIRENZE 28,90 26,90 24,90
Molho de tomate, mussarela, calabresa, alho, cebola, azeitonas, orégano.

FRANGO DESFIADO
Molho de tomate, frango desfiado, filetes de mussarela, tomate fatiado, azeitonas e orégano.

FRANGO ESPECIAL = calabresa -
Molho de tomate, frango desfiado, catupiry, tomate fatiado, cebola, azeitonas e orégano.

GORGONZOLA 26,90 24,90 22,90
Molho de tomate, queijo gorgonzola, azeitonas e orégano,

LOMBIMHO
Molho de tomate, mussarela, lombo fatiado, tomate fatiado, cebola, azeitonas e orégano.

LIGHT
Molho de tomate, mussarela, ricota, champignon, cebola, tomate fatiado, queijo parmesão, azeitonas e orégano.

MARGHERITA
Molho de tomate, mussarela, tomate fatiado, manjericão, azeitonas e orégano.

MILHO VERDE 26,50 24,50 22,50
Molho de Tomate, mussarela, milho verde, cebola, parmesão, azeitonas e orégano.

MINEIRINHA
Molho de tomate, catupiry, mussarela, lombo fatiado, tomate fatiado, azeitonas e orégano.

MIXTA 26,50 24,50 22,50
Molho de tomate, mussarela, presunto picado, azeitonas, orégano.

MUSSARELA 25,00 23,00 21,00
Molho de tomate, queijo mussarela, azeitonas e orégano.

NAPOLITANA 26,60 24,60 22,60
Molho de tomate, mussarela, tomate fatiado, queijo parmesão, azeitonas e orégano.

NONNA ITÁLIA IDEM NAPOLITANA
Molho de tomate, mussarela, frango desfiado, milho verde, cebola, azeitonas e orégano.

NORDESTINA 31,90 29,90 27,90
Molho de tomate, mussarela, carne seca desfiada, pimentão, tomates, cebolas, azeitonas e orégano.

PAULISTA
Molho de tomate, mussarela, batata palha frita, tomate fatiado, parmesão, azeitonas e orégano.

PIZZAIOLO = Calabresa
Molho de tomate, frango, mussarela, palmito, bacon, azeitonas e orégano.

TODAS AS PIZZAS PODEM SER FEITAS COM BORDAS DE CATUPIRY, CHEDDAR OU 4 QUEIJOS

Todas as pizzas contêm molho de molho de tomate, azeitonas e orégano. A pizza meia a meio será cobrada pela de maior valor. Qualquer ingrediente acrescentado à pizza será cobrado à parte.

[redacted] [redacted]

Figura 3: 2º encontro, frente do cardápio oferecido pelo Sr. D aos quatro alunos.

Figura 4: 2º encontro, verso do cardápio oferecido pelo Sr. D aos quatro alunos.

Coleta de dados em uma visita a uma pizzaria:

1- O senhor   m Não trabalha com rodízio.

1= 36 tipos

2- 28,90 com →

3- F. 35 cm
M. 30 cm
P. 25 cm

4- O salário não influência no preço.

5- O tipo mais vendido é o Moda da Casa.

6- M.- 2,00 que maior   F > M > P.

7- O preço da entrega varia com a distância.

O preço

P → 25,90
M → 27.90
G → 29.90
moda da casa.

8- São vendidos cerca de 250 pizzas./semana

9- Quando se pede dois sabores paga-se o preço da mais cara.

10 No estoque o ingrediente mais utilizado é a mussarela. R$ = 10,00 Kg compra semanal de 100 K.

Figura 5: 2º encontro, respostas do Sr. D às perguntas levantadas pela dupla Juninho e Jhon Jhonas.

Coleta de dados em uma visita a uma pizzaria:

1. Não trabalha com rodízio, pois a Fornello seria um lugar mais familiar e com o rodízio teria muitos adolecentes "bagunceiros".

2. calcula uma média de 35%.

3. O garçom não ganha comissão.

4. Não existe uma meta especifica mensal-mente.

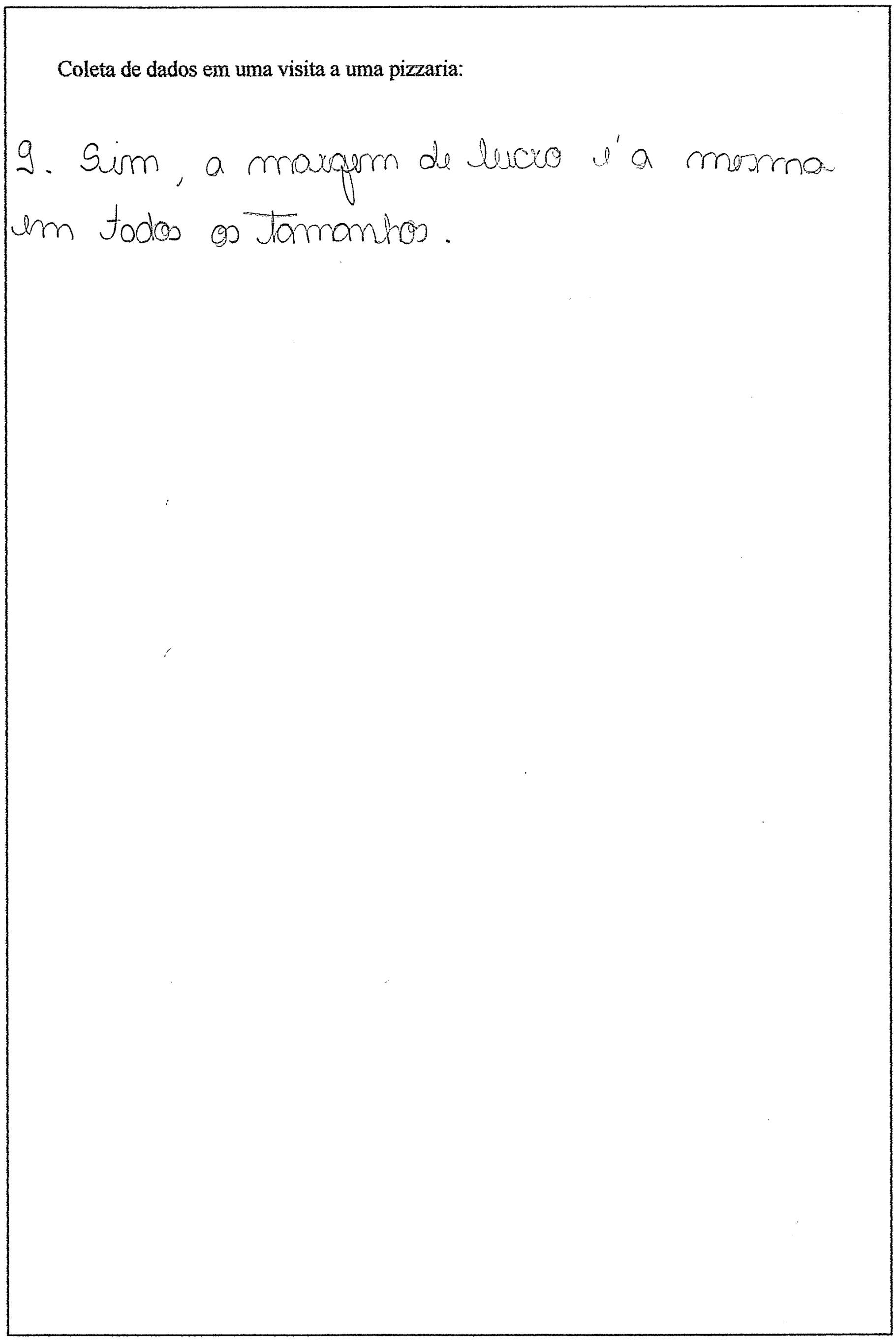
5. 35%.

6. A diferença de cada tamanho (pequena, média ou grande) e de 2R$. O lucro e proporcional ao tamanho da pizza.

7. Familia, 35 cm.

8. Os dias em que as pizzas são mais vendidas são na sexta-feira, sabado e domingo.

Figura 6: 2º encontro, respostas do Sr. D às perguntas levantadas pela dupla Fabregas e Geraldo.



Coleta de dados em uma visita a uma pizzaria:

9. Sim, a margem de lucro é a mesma em todos os tamanhos.

Figura 7: 2º encontro, respostas do Sr. D às perguntas levantadas pela dupla Fabregas e Geraldo.

Em relação à matemática a coisa que mais me chamou a atenção foi a proporsão de "5cm = 2,00". Pensando nisto eu elaborei a seguinte fórmula

Tamanho:

Família $\frac{35cm}{5cm} \cdot 2,00 = x$ → 35cm (tamanho do diâmetro da pizza)

5cm (proporsão variante entre os tamanhos)

Média $\frac{30cm}{5cm} \cdot 2,00 = x$ 2,00 (preço que varia de tamanho).

Pequena $\frac{25cm}{5cm} \cdot 2,00 = x$ x (preço da massa da pizza)

Figura 8: 3º encontro, pensamentos de Juninho, buscando um modelo.

Tabela da Pizzas

	P	M	G
Aliche	23,90	25,90	27,90
Calabresa Especial	24,90	26,90	28,90
Califórnia	26,50	28,50	30,50
Nordestina	27,90	29,90	31,90

Obs: A diferença de preço em cada tamanho de pizza é de 2 R$, independentemente do sabor da pizza.

A margem de lucro é a mesma em todos os tamanhos das pizzas (P, M, G).

Figura 9: 3º encontro, tabela de sabores e preços das pizzas: Fabregas e Geraldo.

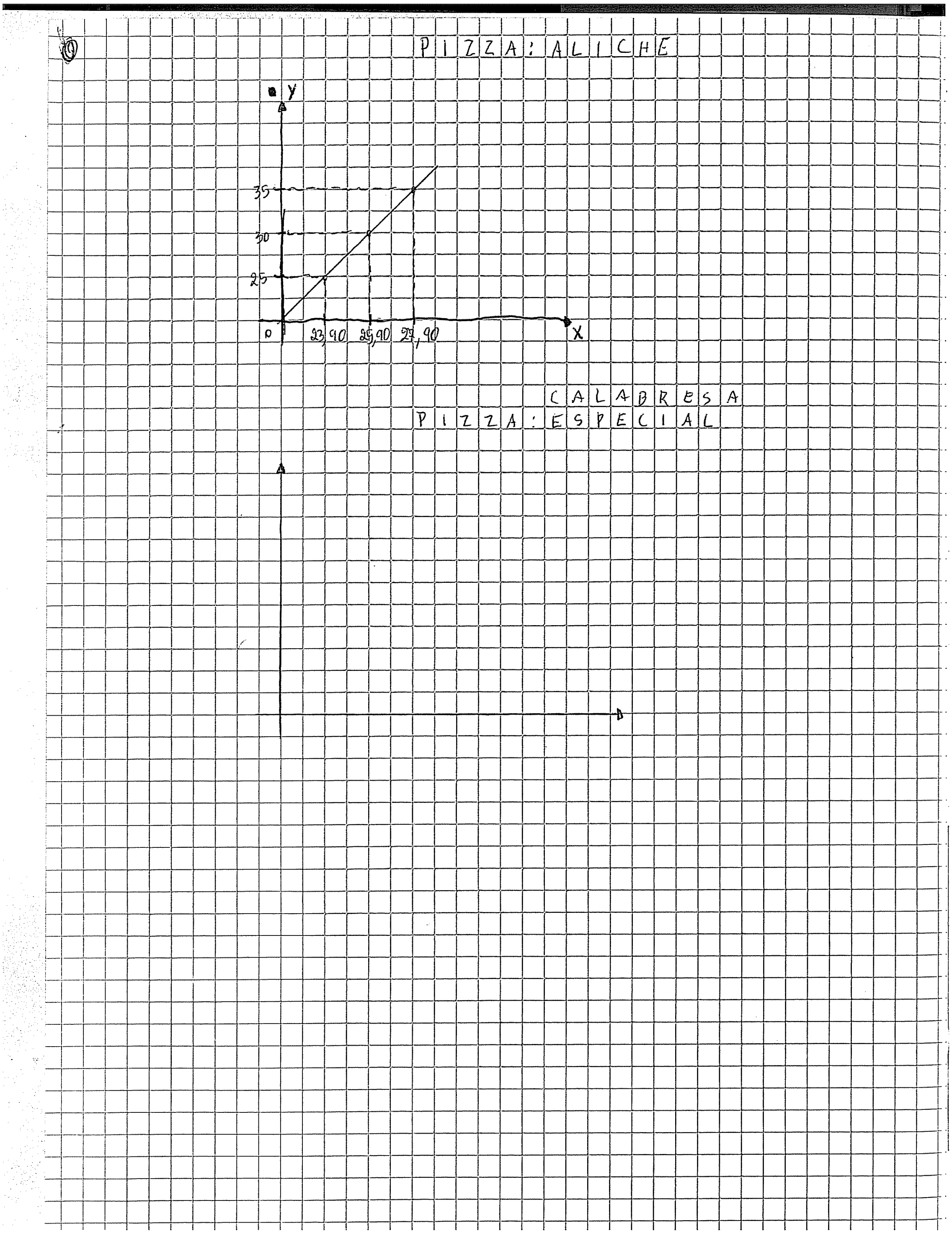


Figura 10: 3º encontro, gráfico que relaciona preço com diâmetro: Fabregas e Geraldo.

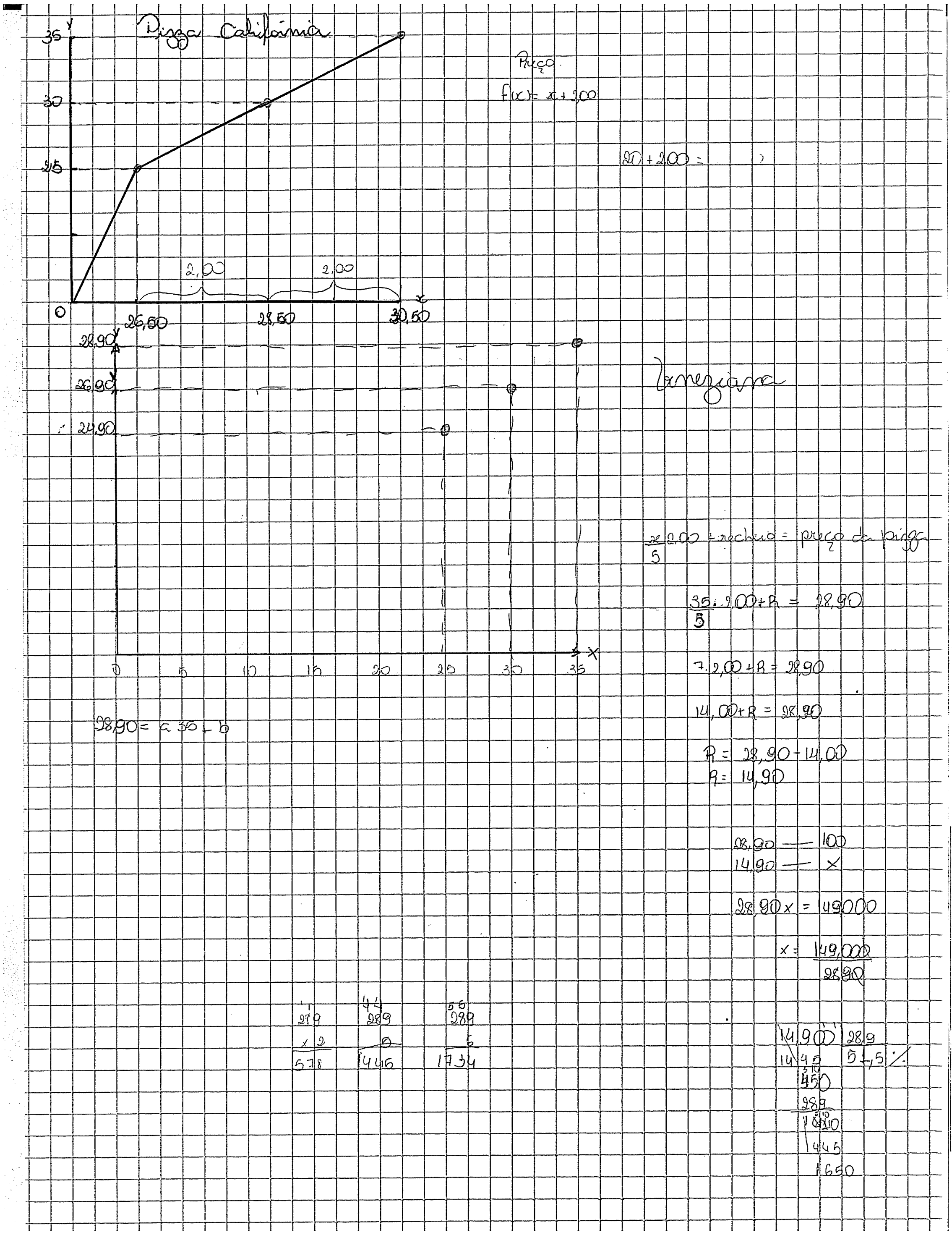


Figura 11: 3º encontro, gráficos e registros da dupla: Juninho e Jhon Jhonas.

Tabela das Pizzas:

Tipo de PIZZA	Tamanho	Preço
Nordestina	grande	31,90
Mussarela	pequena	21,00
Mussarela	grande	25.00
Califórnia	Médio	28,50
Aliche	Pequeno	23.90
Misseta	Média	24,50

Figura 12: 3º encontro, tabela da dupla: Juninho e Jhon Jhonas.

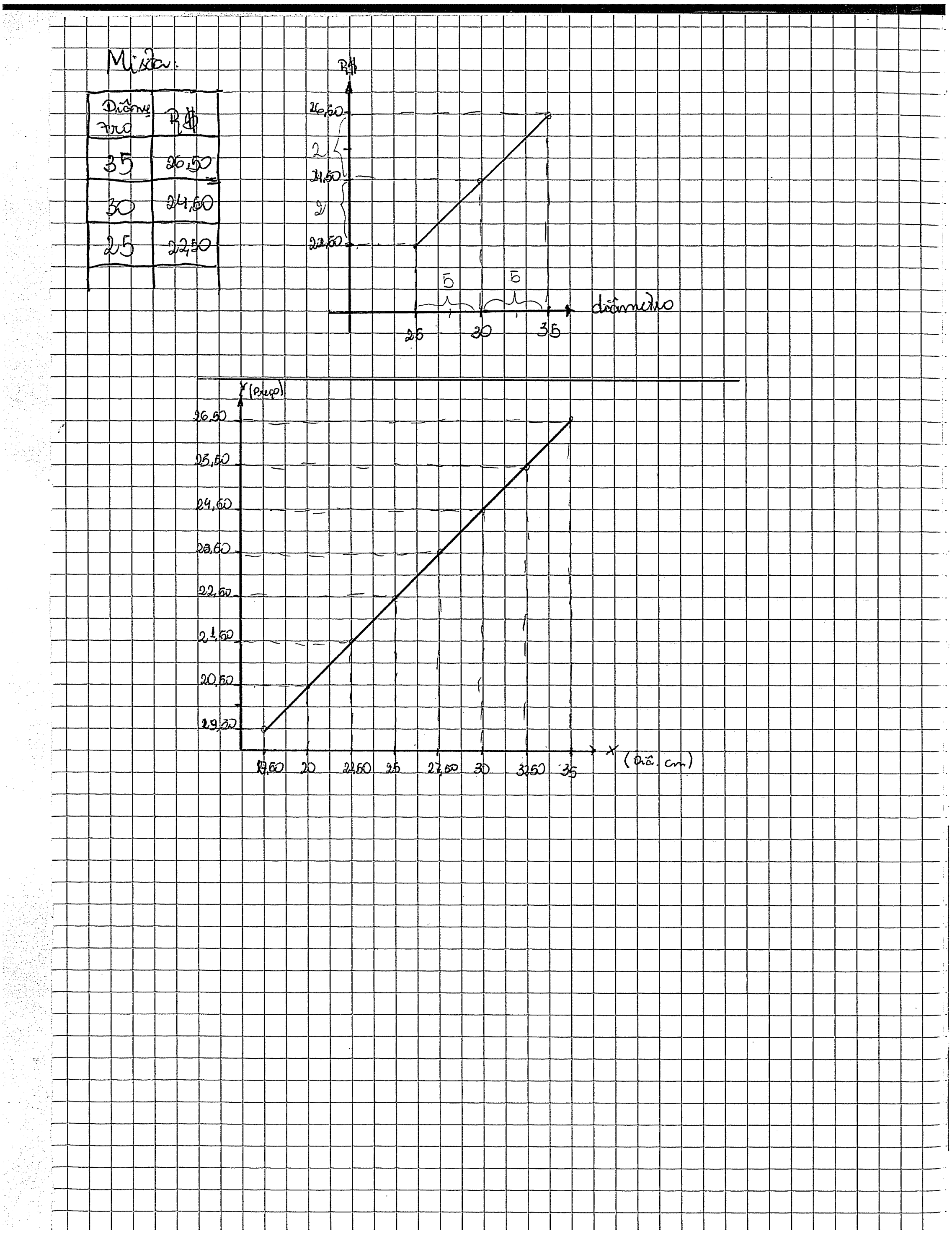
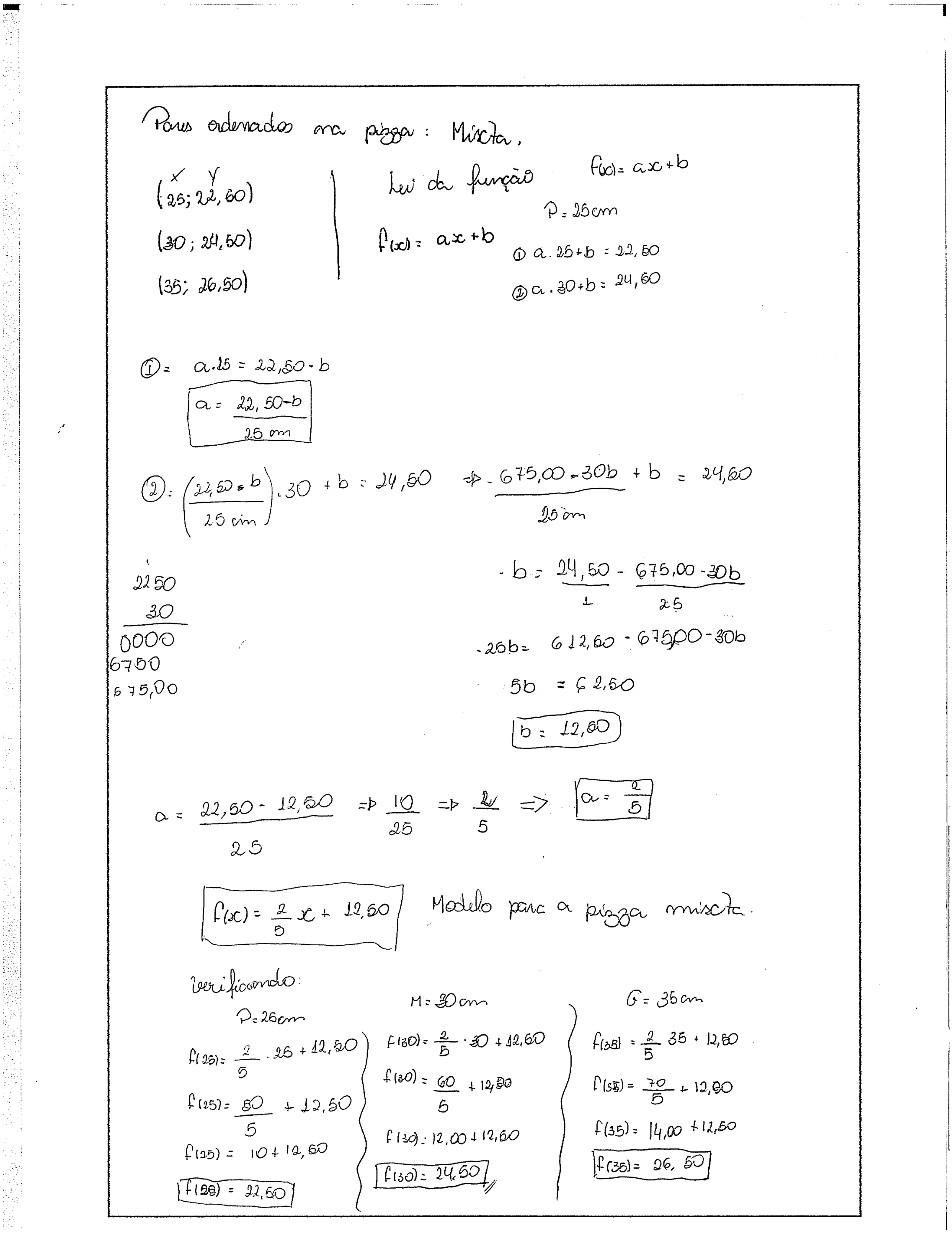


Figura 13: 4º encontro, registros da dupla: Juninho e Jhon Jhonas.



Pares ordenados na pizza: Mixta.

x y
(25; 22,50)
(30; 24,50)
(35; 26,50)

Lei da função $f(x) = ax + b$

$f(x) = ax + b$

P = 25cm

① $a \cdot 25 + b = 22,50$
② $a \cdot 30 + b = 24,50$

①: $a \cdot 25 = 22,50 - b$

$\boxed{a = \frac{22,50 - b}{25 \text{ cm}}}$

②: $\left(\frac{22,50 - b}{25 \text{ cm}}\right) \cdot 30 + b = 24,50 \Rightarrow \frac{675,00 - 30b}{25 \text{ cm}} + b = 24,50$

$\cdot b = \frac{24,50}{1} - \frac{675,00 - 30b}{25}$

$\cdot 25b = 612,50 - 675,00 - 30b$

$5b = 62,50$

$\boxed{b = 12,50}$

2250
30
0000
6750
675,00

$a = \frac{22,50 - 12,50}{25} \Rightarrow \frac{10}{25} \Rightarrow \frac{2}{5} \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{5}}$

$\boxed{f(x) = \frac{2}{5}x + 12,50}$ Modelo para a pizza mixta.

verificando:

P = 25cm

$f(25) = \frac{2}{5} \cdot 25 + 12,50$

$f(25) = \frac{50}{5} + 12,50$

$f(25) = 10 + 12,50$

$\boxed{f(25) = 22,50}$

M = 30cm

$f(30) = \frac{2}{5} \cdot 30 + 12,50$

$f(30) = \frac{60}{5} + 12,50$

$f(30) = 12,00 + 12,50$

$\boxed{f(30) = 24,50}$

G = 35cm

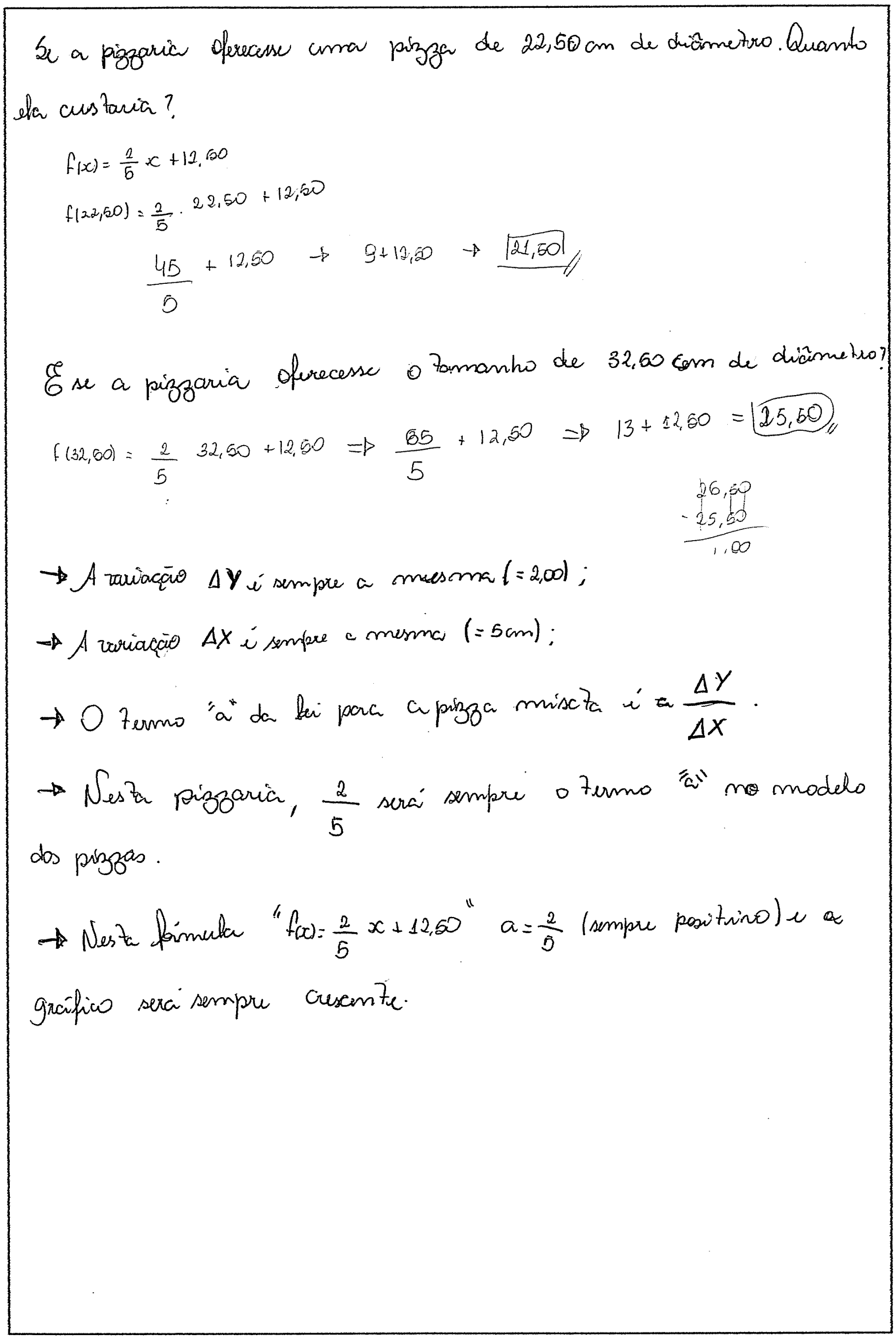
$f(35) = \frac{2}{5} \cdot 35 + 12,50$

$f(35) = \frac{70}{5} + 12,50$

$f(35) = 14,00 + 12,50$

$\boxed{f(35) = 26,50}$

Figura 14: 4º encontro, Juninho e Jhon Jhonas: buscando um modelo para a pizza Mista.



Se a pizzaria oferecesse uma pizza de 22,50 cm de diâmetro. Quanto ela custaria?

$f(x) = \frac{2}{5} x + 12,50$

$f(22,50) = \frac{2}{5} \cdot 22,50 + 12,50$

$\frac{45}{5} + 12,50 \to 9 + 12,50 \to \boxed{21,50}$

E se a pizzaria oferecesse o tamanho de 32,50 cm de diâmetro?

$f(32,50) = \frac{2}{5}\ 32,50 + 12,50 \Rightarrow \frac{65}{5} + 12,50 \Rightarrow 13 + 12,50 = 25,50$

$26,50 - 25,50 = 1,00$

→ A variação ΔY é sempre a mesma (= 2,00);

→ A variação ΔX é sempre a mesma (= 5 cm);

→ O termo "a" da lei para a pizza mista é a $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$.

→ Nesta pizzaria, $\frac{2}{5}$ será sempre o termo "a" no modelo das pizzas.

→ Nesta fórmula "$f(x) = \frac{2}{5} x + 12,50$" $a = \frac{2}{5}$ (sempre positivo) e o gráfico será sempre crescente.

Figura 15: 4º encontro, registros de Juninho e Jhon Jhonas: interpretando o modelo que encontraram.

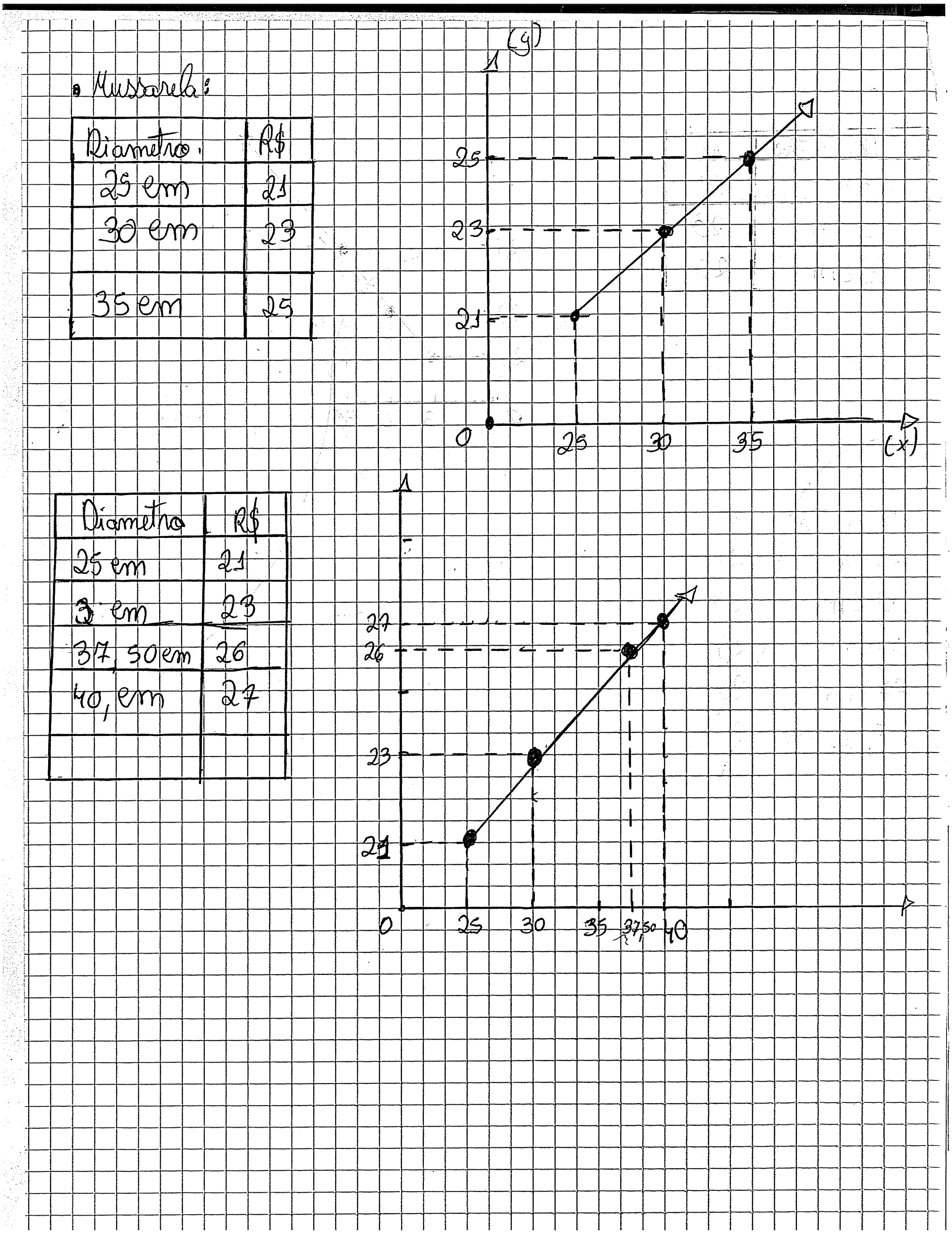
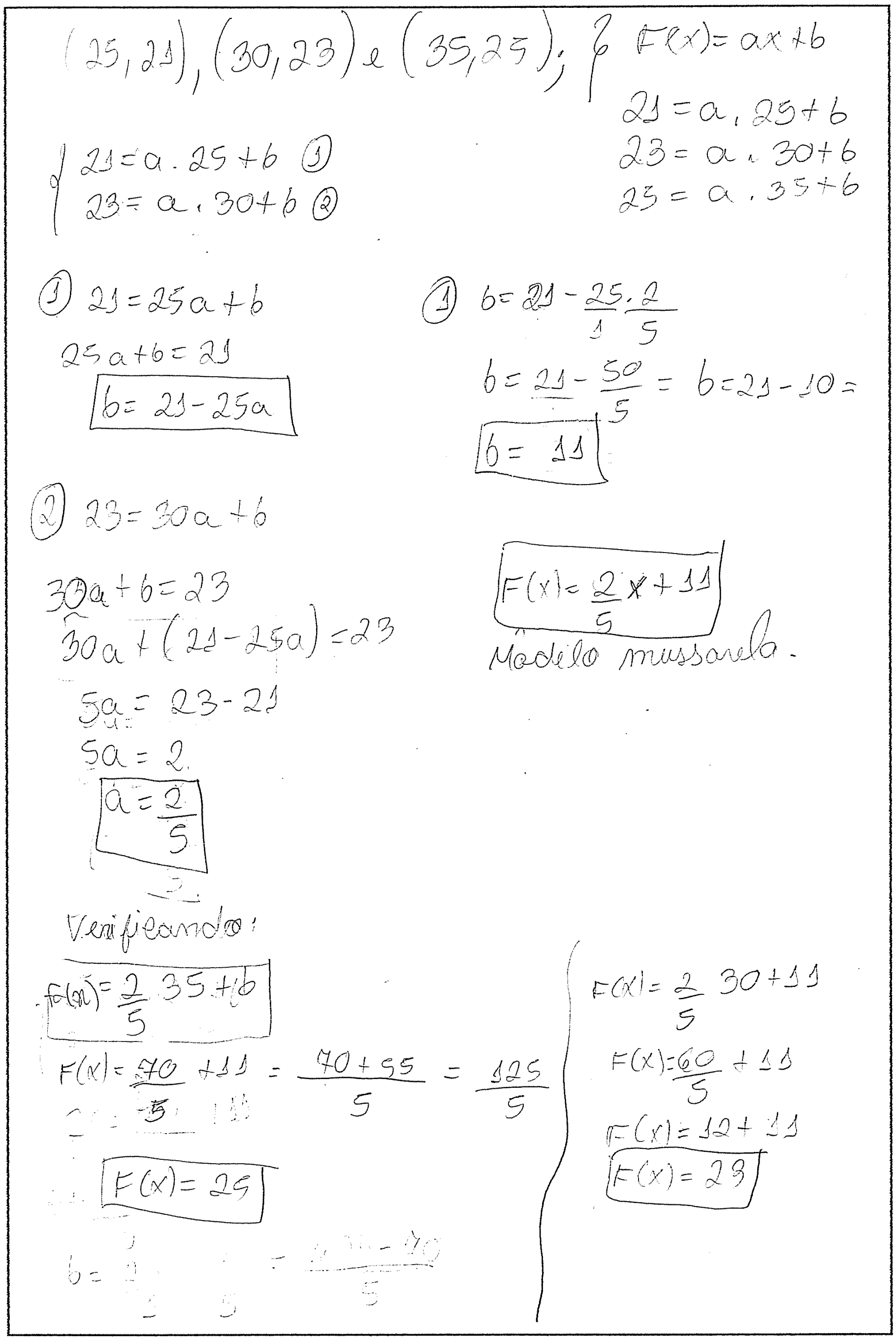


Figura 16: 4º encontro, registros da dupla: Fabregas e Geraldo.



(25, 21), (30, 23) e (35, 25); $F(x) = ax + b$

$21 = a \cdot 25 + b$
$23 = a \cdot 30 + b$
$25 = a \cdot 35 + b$

$\begin{cases} 21 = a \cdot 25 + b \quad (1) \\ 23 = a \cdot 30 + b \quad (2) \end{cases}$

(1) $21 = 25a + b$
$25a + b = 21$
$\boxed{b = 21 - 25a}$

(1) $b = 21 - \frac{25}{1} \cdot \frac{2}{5}$
$b = 21 - \frac{50}{5} = b = 21 - 10 =$
$\boxed{b = 11}$

(2) $23 = 30a + b$

$30a + b = 23$
$30a + (21 - 25a) = 23$
$5a = 23 - 21$
$5a = 2$
$\boxed{a = \frac{2}{5}}$

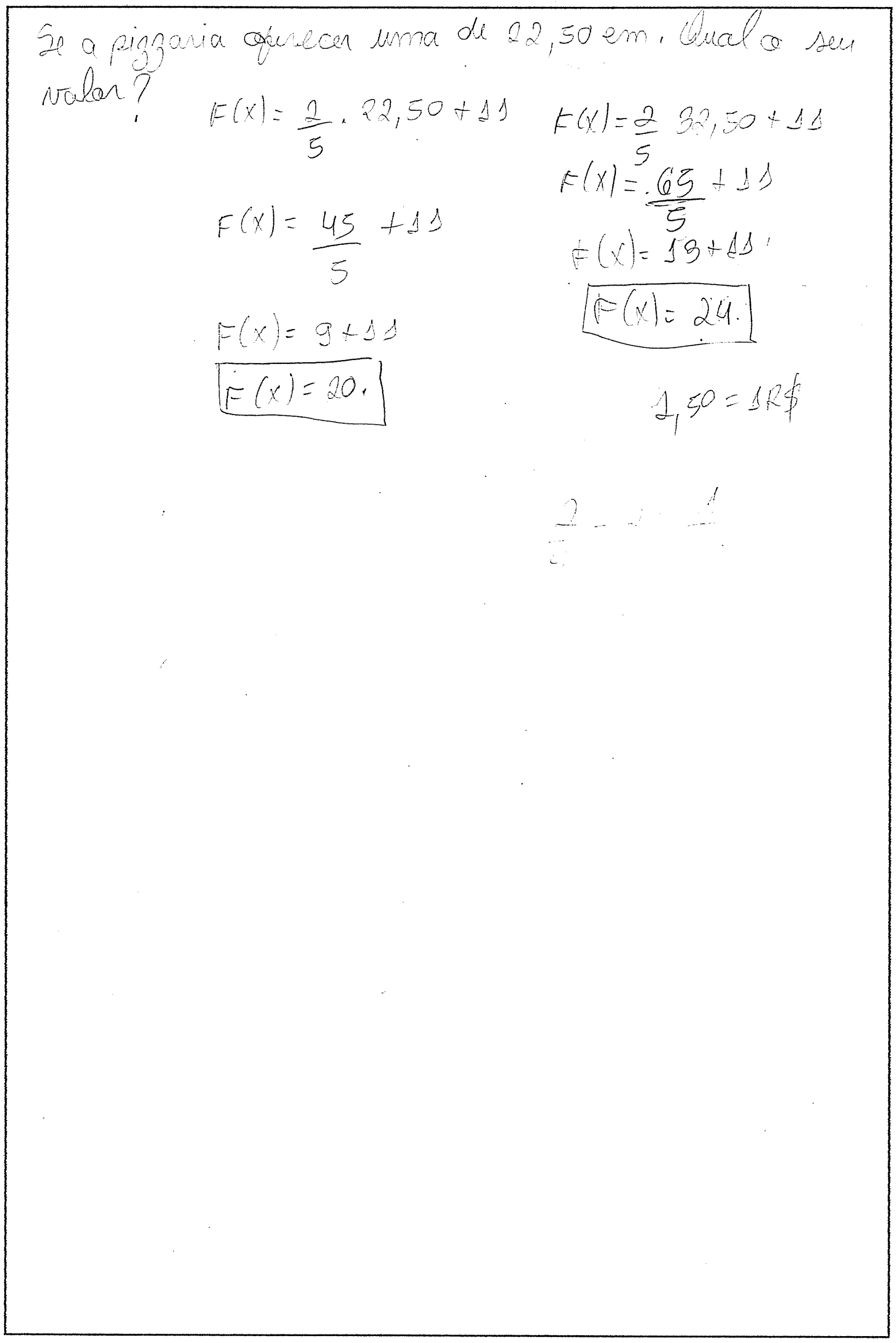
$\boxed{F(x) = \frac{2}{5}x + 11}$
Modelo mussarela.

Verificando:

$\boxed{F(x) = \frac{2}{5} 35 + b}$
$F(x) = \frac{70}{5} + 11 = \frac{70 + 55}{5} = \frac{125}{5}$
$\boxed{F(x) = 25}$

$F(x) = \frac{2}{5} 30 + 11$
$F(x) = \frac{60}{5} + 11$
$F(x) = 12 + 11$
$\boxed{F(x) = 23}$

Figura 17: 4º encontro, modelo para pizza de Mussarela, Fabregas e Geraldo.


Se a pizzaria oferecer uma de 22,50 em. Qual o seu valor?

$F(x) = \frac{2}{5} \cdot 22{,}50 + 11$

$F(x) = \frac{45}{5} + 11$

$F(x) = 9 + 11$

$\boxed{F(x) = 20.}$

$F(x) = \frac{2}{5}\, 32{,}50 + 11$

$F(x) = \frac{65}{5} + 11$

$F(x) = 13 + 11$

$\boxed{F(x) = 24.}$

1,50 = 1R$

Figura 18: 4º encontro, registros de Fabregas e Geraldo.

Se eu comprar pizzas de Calabresa de 35 cm na Pizzaria do Sr. D.

1 pizza : 28,90

2 pizza : 57,80

3 pizzas : 86,70

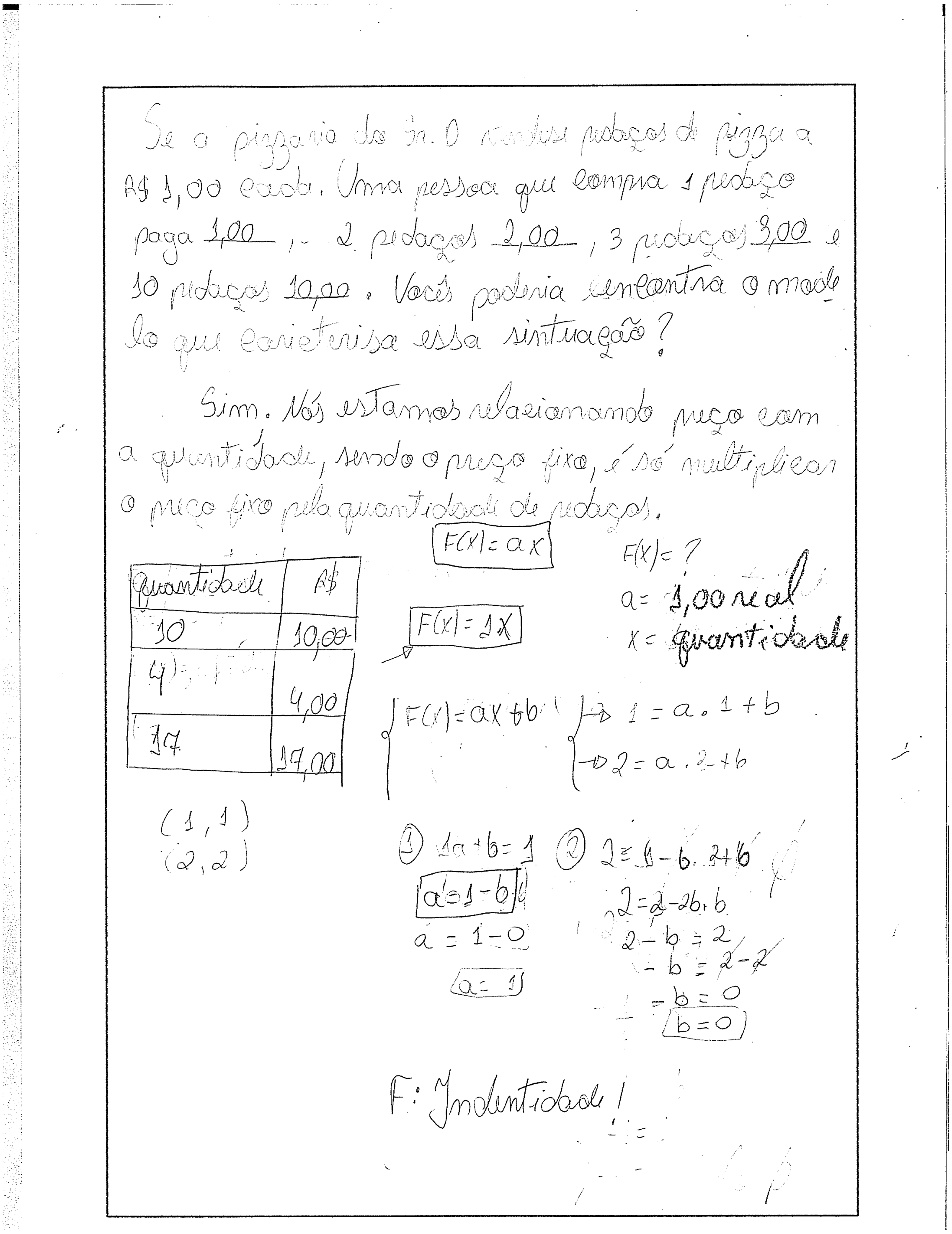
10 pizzas = 289,00

X pizzas = 28,90 . X = R$ total.

O sr. D fabrica cerca de 250 pizzas por semana e gasta 100 Kg de musarela

250 pizza	=	100 Kg
500	=	200 Kg
750	=	300 Kg
1000	=	400 Kg
X	=	$\frac{25}{100}$ X

Figura 19: 5º encontro, registro dos quatro alunos participantes.



Se a pizzaria do Sr. O vendesse pedaços de pizza a R$ 1,00 cada. Uma pessoa que compra 1 pedaço paga 1,00, 2 pedaços 2,00, 3 pedaços 3,00 e 10 pedaços 10,00. Você poderia encontra o modelo que caracterisa essa sintuação?

Sim. Nós estamos relacionando preço com a quantidade, sendo o preço fixo, é só multiplicar o preço fixo pela quantidade de pedaços.

$\boxed{F(X) = aX}$

$F(X) = ?$

$a = 1,00$ real

$x =$ quantidade

$\boxed{F(X) = 1X}$

Quantidade	R$
10	10,00
4	4,00
17	17,00

(1, 1)
(2, 2)

$F(X) = aX + b$
$\begin{cases} 1 = a \cdot 1 + b \\ 2 = a \cdot 2 + b \end{cases}$

(1) $1a + b = 1$
$\boxed{a = 1 - b}$
$a = 1 - 0$
$\boxed{a = 1}$

(2) $2 = (1 - b) \cdot 2 + b$
$2 = 2 - 2b + b$
$2 - b = 2$
$-b = 2 - 2$
$-b = 0$
$\boxed{b = 0}$

F: Indentidade!

Figura 20: 5º encontro, Jhon Jhonas e Juninho caracterizando a função Identidade.

2) Se a pizzaria do Sr. D trabalhase com rodizio e o valor por pessoa fosse R$ 15,00. Se a pessoa comer um pedaço de pizza, pagará 15,00, dois pedaços de pizza 15,00, três pedaços, doze pedaços 15,00.

Vocês poderiam encontrar o modelo que caracterize essa sintuação?

pedaços	R$
40	15,00
35	15,00
25	15,00
5	15,00
2	15,00

F: Constante:

reta // ao eixo(x).

F(x) = não ha alteração.

a = é sempre 0 (zero).

$F(x) = ax + b$

$\begin{cases} 15 = a \cdot 1 + b \\ 15 = a \cdot 2 + b \end{cases}$

$a + b = 15$

$\boxed{a = 15 - b}$

$15 = (15 - b) \cdot 2 + b$

$15 = 30 - 2b + b$

$15 = 30 - b$

$30 - b = 15$

$-b = 15 - 30$

$-b = -15 \; (-1)$

$\boxed{b = 15}$

$a = 15 - 15$

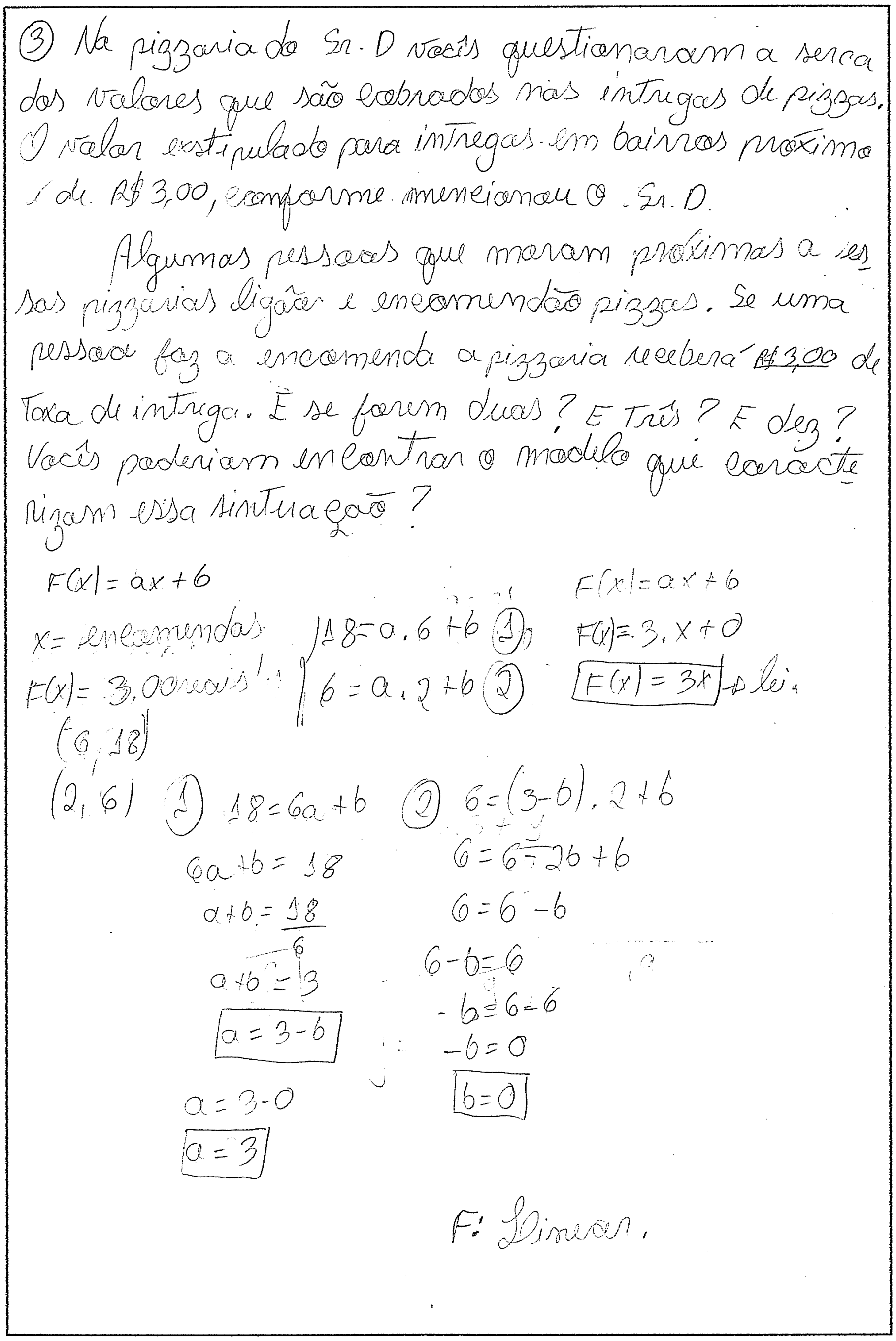
$\boxed{a = 0}$

lei $F(x) = 0x + 15$

$\boxed{F(x) = 15}$

F: Constante!

Figura 21: 5º encontro, Jhon Jhonas e Juninho caracterizando a função Constante.



③ Na pizzaria do Sr. D vocês questionaram a serca dos valores que são cobrados nas intregas de pizzas. O valor estipulado para intregas em bairros próximo é de R$ 3,00, conforme mencionou o Sr. D.

Algumas pessoas que moram próximas a essas pizzarias ligarão e encomendarão pizzas. Se uma pessoa faz a encomenda a pizzaria receberá R$ 3,00 de Taxa de intrega. E se forem duas? E Três? E dez? Vocês poderiam encontrar o modelo que caracterizam essa sintuação?

$F(x) = ax + b$

x = encomendas

$F(x) = 3{,}00$ reais

$(6, 18)$

$(2, 6)$

$\begin{cases} 18 = a \cdot 6 + b & (1) \\ 6 = a \cdot 2 + b & (2) \end{cases}$

(1) $18 = 6a + b$

$6a + b = 18$

$a + b = \frac{18}{6}$

$a + b = 3$

$\boxed{a = 3 - b}$

$a = 3 - 0$

$\boxed{a = 3}$

(2) $6 = (3 - b) \cdot 2 + b$

$6 = 6 - 2b + b$

$6 = 6 - b$

$6 - b = 6$

$-b = 6 - 6$

$-b = 0$

$\boxed{b = 0}$

$F(x) = ax + b$

$F(x) = 3 \cdot x + 0$

$\boxed{F(x) = 3x}$ → lei.

F: Linear.

Figura 22: 5º encontro, Jhon Jhonas e Juninho caracterizando a função Linear.

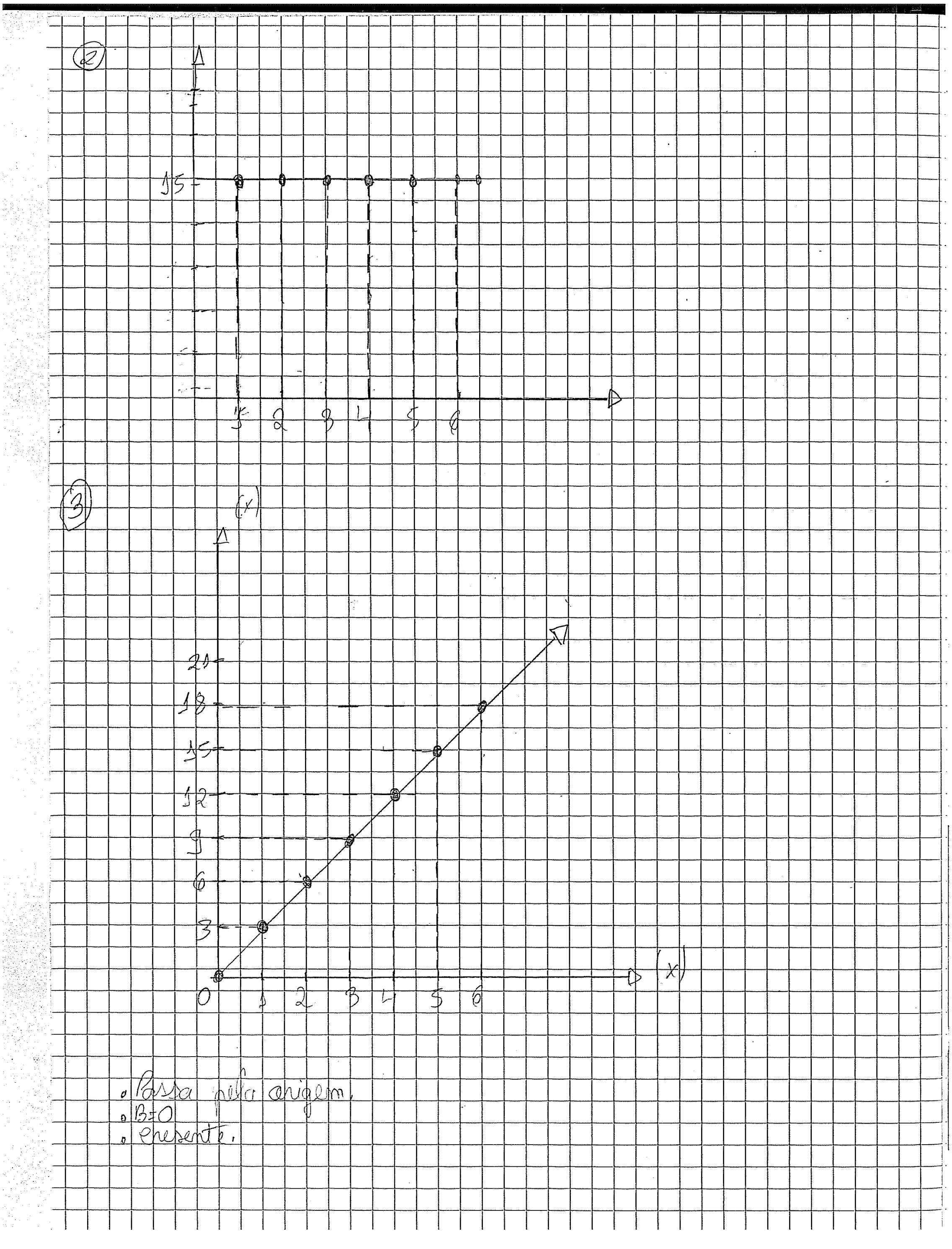
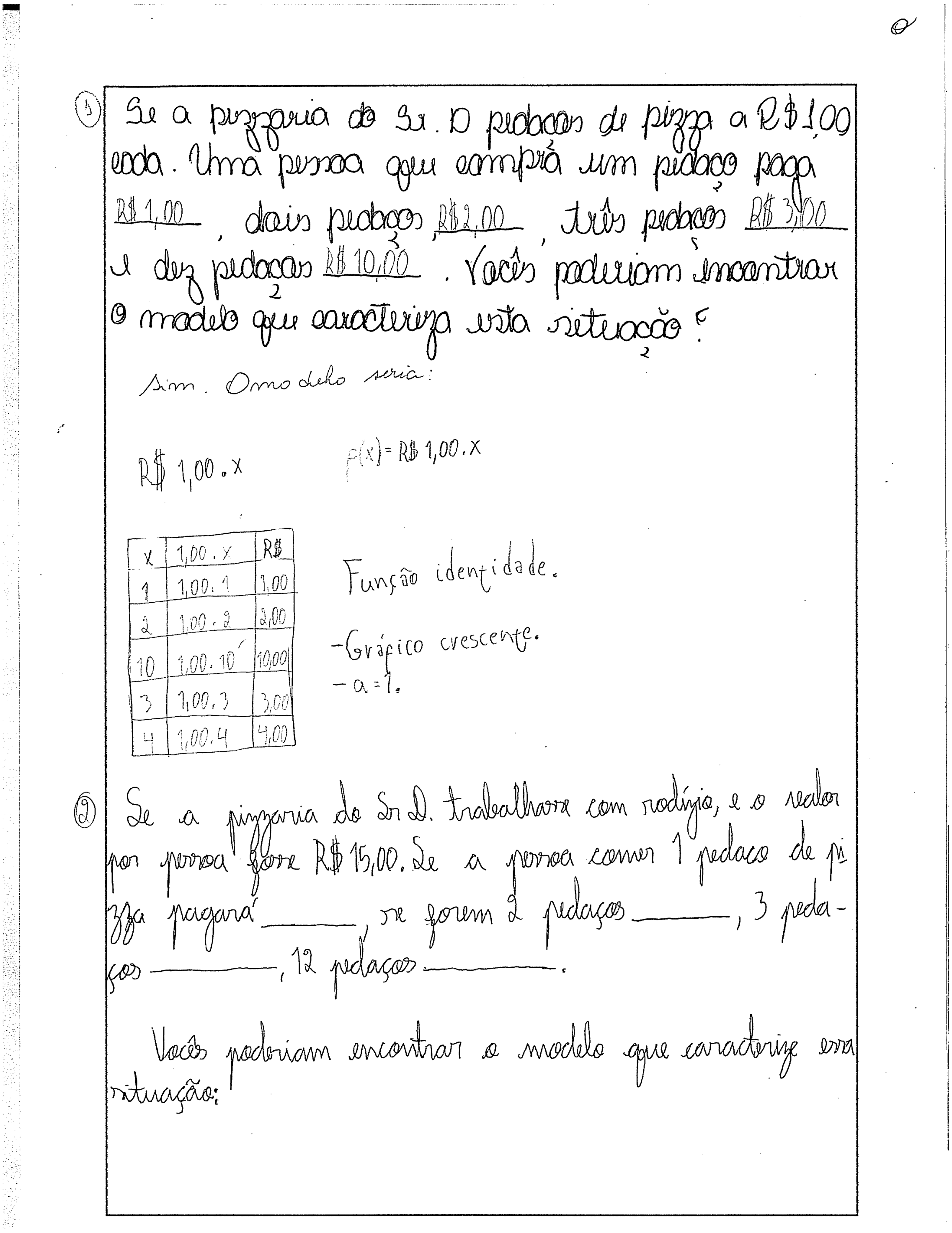


Figura 23: 5º encontro, gráfico da função Constante e Linear, Fabregas e Geraldo.



① Se a pizzaria do Sr. D pedaços de pizza a R$ 1,00 cada. Uma pessoa que comprá um pedaço paga R$ 1,00 , dois pedaços R$ 2,00 , três pedaços R$ 3,00 e dez pedaços R$ 10,00 . Vocês poderiam encontrar o modelo que caracteriza esta situação?

Sim. O modelo seria:

R$ 1,00 . x

f(x) = R$ 1,00 . x

x	1,00 . x	R$
1	1,00 . 1	1,00
2	1,00 . 2	2,00
10	1,00 . 10	10,00
3	1,00 . 3	3,00
4	1,00 . 4	4,00

Função identidade.

-Gráfico crescente.

- a = 1.

② Se a pizzaria do Sr. D. trabalhasse com rodízio, e o valor por pessoa fosse R$ 15,00. Se a pessoa comer 1 pedaço de pizza pagará ______, se forem 2 pedaços ______, 3 pedaços ______, 12 pedaços ______.

Vocês poderiam encontrar o modelo que caracterize essa situação:

Figura 24: 5º encontro, modelo da função Identidade: Jhon Jhonas e Juninho.

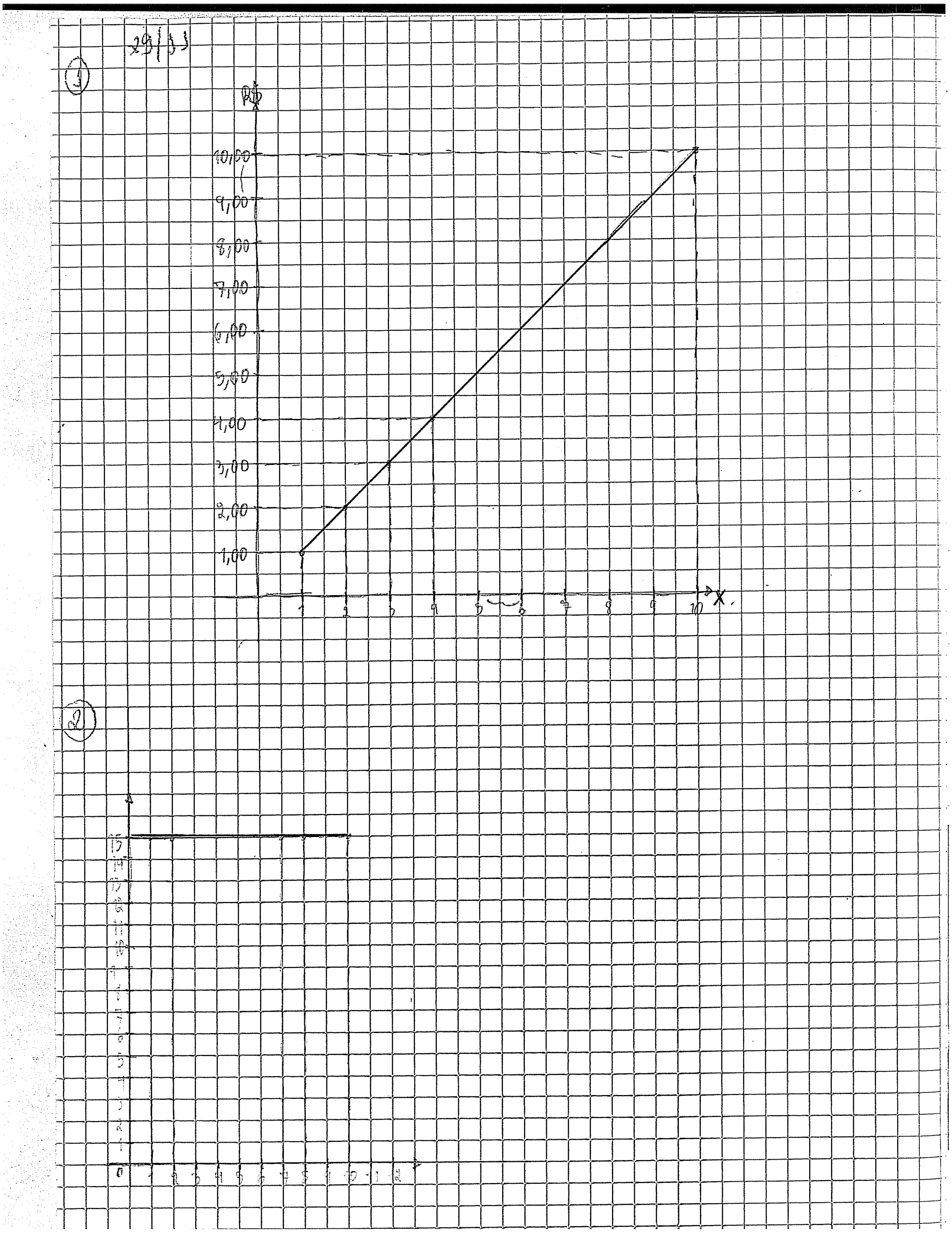
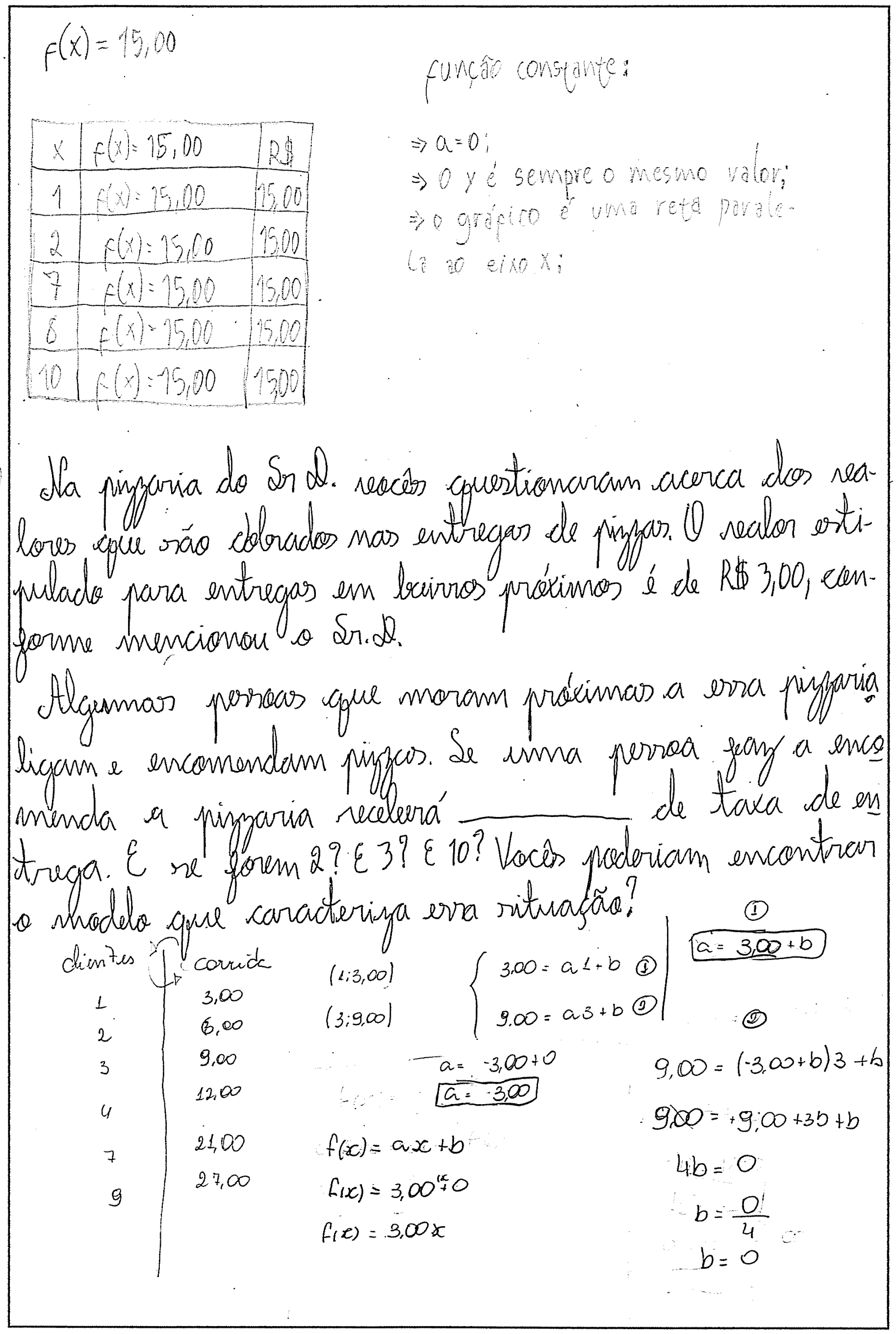


Figura 25: 5º encontro, gráfico das funções: Identidade e Constante, esboçados por Jhon Jhonas e Juninho.



f(x) = 15,00

função constante:

x	f(x) = 15,00	R$
1	f(x) = 15,00	15,00
2	f(x) = 15,00	15,00
7	f(x) = 15,00	15,00
6	f(x) = 15,00	15,00
10	f(x) = 15,00	15,00

⇒ a = 0;
⇒ o y é sempre o mesmo valor;
⇒ o gráfico é uma reta paralela ao eixo x;

③ Na pizzaria do Sr. D. vocês questionaram acerca dos valores que são cobrados nas entregas de pizzas. O valor estipulado para entregas em bairros próximos é de R$ 3,00, conforme mencionou o Sr. D.

Algumas pessoas que moram próximas a essa pizzaria ligam e encomendam pizzas. Se uma pessoa faz a encomenda a pizzaria receberá ________ de taxa de entrega. E se forem 2? E 3? E 10? Vocês poderiam encontrar o modelo que caracteriza essa situação?

clientes	corrida
1	3,00
2	6,00
3	9,00
4	12,00
7	21,00
9	27,00

(1; 3,00)
(3; 9,00)

$$\begin{cases} 3{,}00 = a1 + b & (1) \\ 9{,}00 = a3 + b & (2) \end{cases}$$

(1) $\boxed{a = 3{,}00 + b}$

$a = -3{,}00 + 0$

$\boxed{a = -3{,}00}$

(2)

$9{,}00 = (-3{,}00 + b)3 + b$

$9{,}00 = +9{,}00 + 3b + b$

$4b = 0$

$b = \frac{0}{4}$

$b = 0$

$f(x) = ax + b$

$f(x) = 3{,}00x + 0$

$f(x) = 3{,}00x$

Figura 26: 5º encontro, modelo para função Constante e Linear, Jhon Jhonas e Juninho.

Gráfico 3

- Lei: $f(x) = 3,00x$;
- uma reta crescente;
- Esta é uma função linear;
- $a = 3,00$ e $b = 0$
- Na função linear a origem localiza-se na origem do plano (0,0).

Figura 27: 5º encontro, analisando a função e Linear: Jhon Jhonas e Juninho.

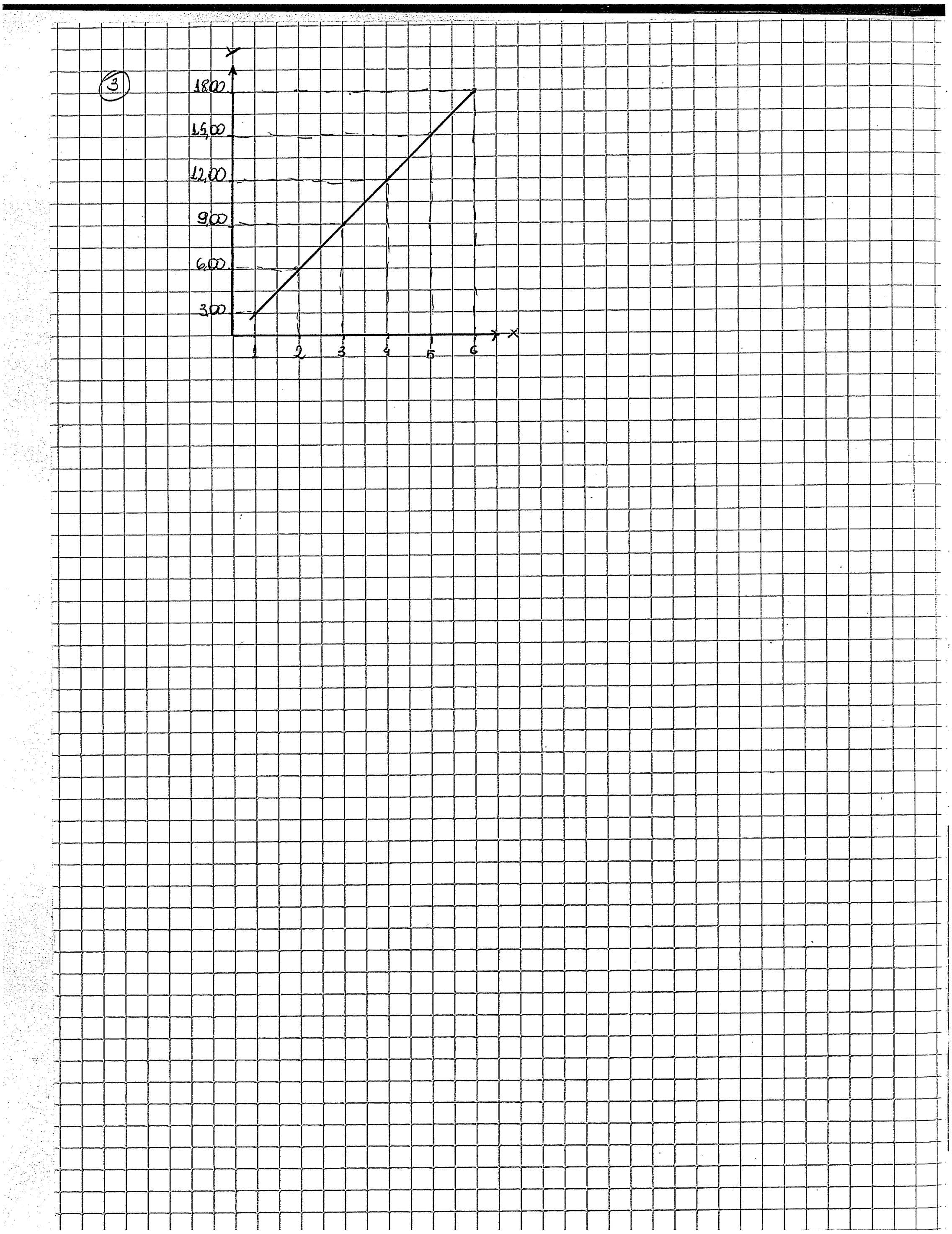


Figura 28: 5º encontro, Gráfico da função e Linear: Jhon Jhonas e Juninho.

Modelos de funções:

Identidade = $f(x) = x$

Constante = $f(x) = 15{,}00$

Linear = $f(x) = 3x$

Identidade:

- $b = 0$;
- o gráfico possui o ponto $(0,0)$; $= \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$
- $y = x$.

Constante:

- gráfico com reta paralela ao eixo X;
- $a = 0$

Linear:

- $b = 0$
- o gráfico possui o ponto $(0,0)$
- $a > 0$ ou $a < 0$
-

	Ident.	Const.	Linear
	$f(x) = x$	$f(x) = 15{,}00$	$f(x) = 3x$
$f(1)$	$f(1) = 1$	$f(1) = 15{,}00$	$f(1) = 3$
$f(3)$	$f(3) = 3$	$f(3) = 15{,}00$	$f(3) = 9$
$f(5)$	$f(5) = 5$	$f(5) = 15{,}00$	$f(5) = 15$
$f(7)$	$f(7) = 7$	$f(7) = 15{,}00$	$f(7) = 21$
	$\{1, 3, 5, 7\}$	$\{15, 15, 15, 15\}$	$\{3, 9, 15, 21\}$

Figura 29: 6º encontro, os quatro alunos participantes associando Modelos com a P.A.

Área da pizza:

— $A = \pi \cdot R^2$

A = 25

$\hookrightarrow 3{,}14 \cdot \left(\frac{25}{2}\right)^2 \Rightarrow 3{,}14 \cdot 12{,}5^2 \Rightarrow 3{,}14 \cdot 156{,}25 = 490{,}625$

$490{,}625\,cm^2$

A = 30

$3{,}14 \cdot \left(\frac{30}{2}\right)^2 \Rightarrow 3.14 \cdot 15^2 \Rightarrow 3.14 \cdot 225 \Rightarrow 706{,}5$

$706{,}5\,cm^2$

A = 35

$3.14 \left(\frac{35}{2}\right)^2 \Rightarrow 3{,}14 \cdot 17{,}5^2 = 3{,}14 \cdot 306{,}25 \Rightarrow 961{,}625$

$961{,}625\,cm^2$

Figura 30: 6º encontro, os quatro alunos participantes calculando a Área das pizzas.

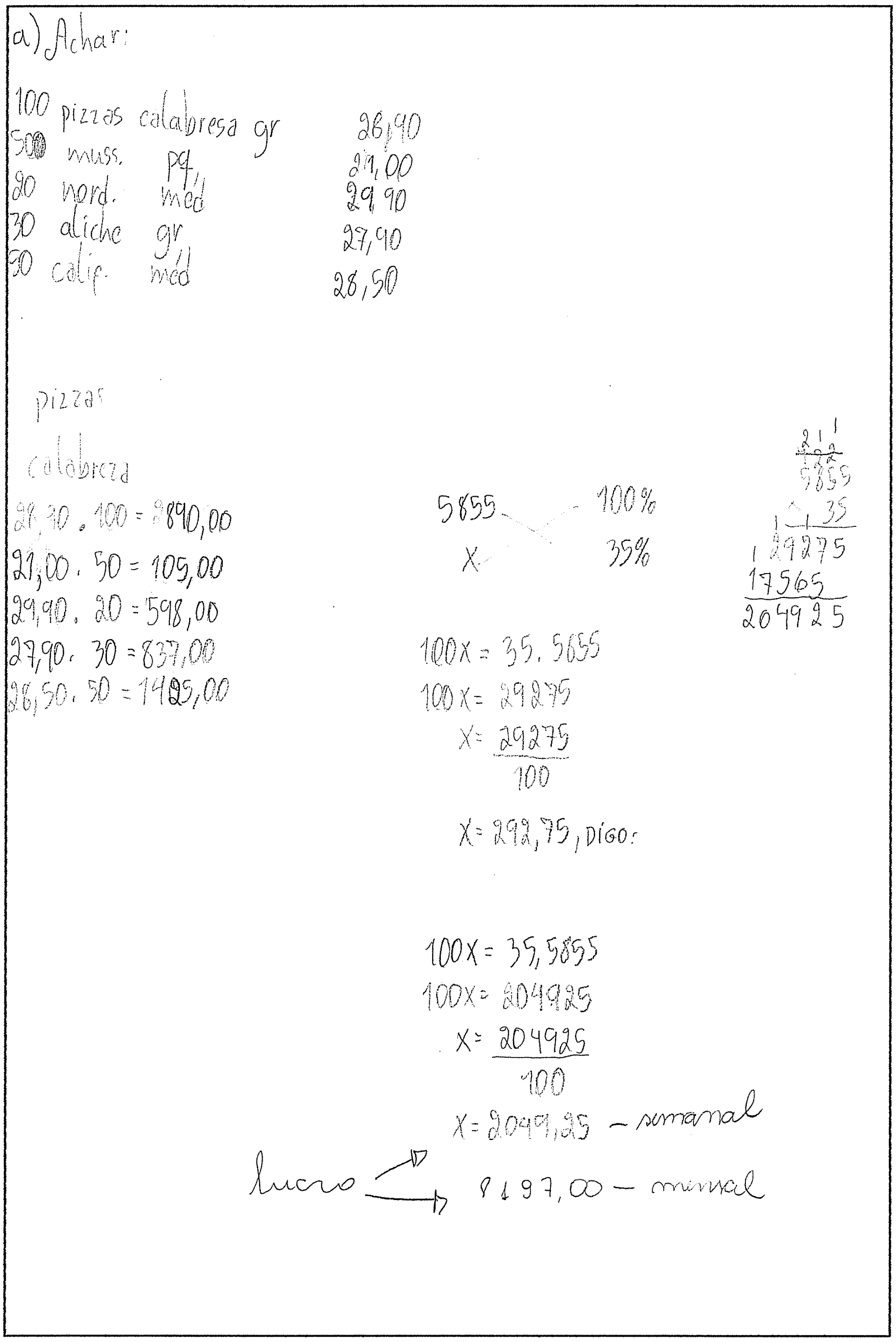


Figura 31: 6º encontro, os quatro alunos participantes procurando o lucro do Sr. D.

$100 \cdot 26{,}60 + 50 \cdot 22{,}50 + 50 \cdot 26{,}90 + 50 \cdot 28{,}90 = X$

$2660 + 1125 + 1345 + 1445 = 6575$

100% — $6575{,}00$

35% — X

$35\% = 2501{,}25$

Figura 32: 6º encontro, os quatro alunos participantes procurando o lucro do Sr. D.

Eu achei legal pois essa pesquisa nos mostrou como aplicar o que nós aprendemos de matemática em situações do nosso cotidiano. Esse método é até mais fácil de aprender do que o que se usa no colégio.

Esse método até poderia ser usado para ensinar pessoas com dificuldade em certas áreas da Matemática.

Eu achava que essas fórmulas todas, só se usava para passar no Vestibular, mas aí aprendi uma forma de aplicar na realidade.

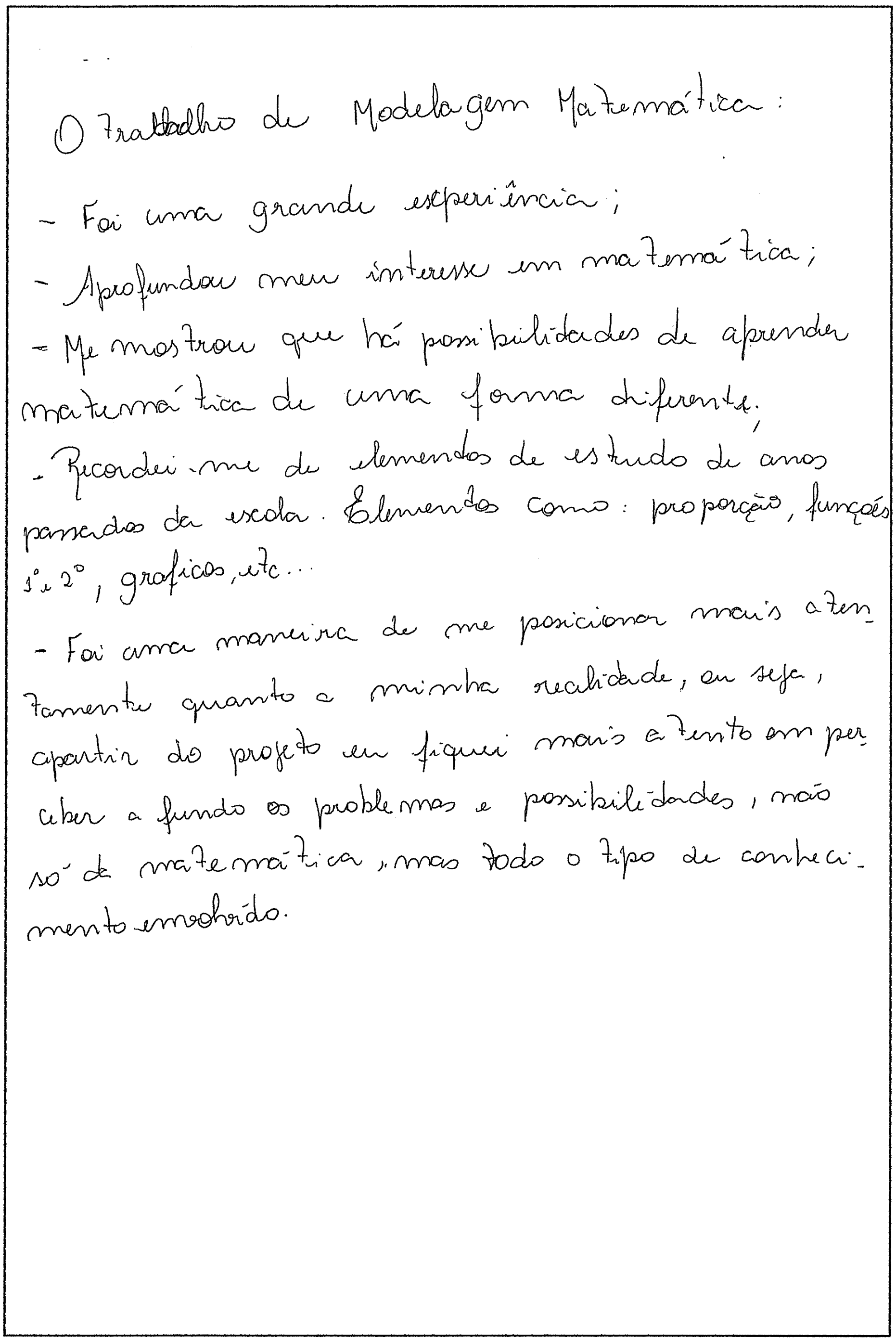
Geraldo.

Figura 33: 6º encontro, conclusões de Geraldo.

A experiencia foi muito boa em todos os aspectos tiramos conclusões que eu particulamente não iria imaginar. A forma em que trabalhamos ajudou bastante na busca dos resultados da matematica e espero levar esta experiencia como uma lição no dia a dia e espero tambem ter mais oportunidades como esta que tivemos daqui pra frente.

Fabregas.

Figura 34: 6º encontro, conclusões de Fabregas.



O Trabalho de Modelagem Matemática:

- Foi uma grande experiência;
- Aprofundou meu interesse em matemática;
- Me mostrou que há possibilidades de aprender matemática de uma forma diferente.
- Recordei-me de elementos de estudo de anos passados da escola. Elementos como: proporção, funções 1º e 2º, graficos, etc...
- Foi uma maneira de me posicionar mais atentamente quanto a minha realidade, ou seja, apartir do projeto eu fiquei mais atento em perceber a fundo os problemas e possibilidades, não só de matemática, mas todo o tipo de conhecimento envolvido.

Figura 35: 6º encontro, conclusões de Juninho.

Bom o Trabalho foi assim:
- Foi ótimo para nós Trabalharmos matemática de uma maneira mais "clara", fora da sala de alu, digo, aula.
- Recordamais várias partes muito importantes que aprendemos na sala de aula mas são despersebidas muitas vezes.
- A maneira de aplicar o nosso conhecimento, de estudo, na nossa vida cotidiana foi eselente para nós!
- Aprendemos com muito mais facilidade a analizar gráficos, descutimos como que a matemática faz parte de nossa vida.
- Como que as conclussões se foram aparecendo, foi momentos de estudo que não da para se Trocar por nada, é imcomparavél!

Figura 36: 6º encontro, conclusões de Jhon Jhonas.

APÊNDICE B - Produto para divulgação da dissertação / Oficina destinada a professores

Modelagem Matemática: um possível caminho para o trabalho com funções afins

PROPOSTA DE UMA OFICINA

Modelagem Matemática: um possível caminho para o trabalho com funções afins

Lorena Luquini de Barros Abreu[13]
Universidade Federal de Juiz de Fora
llbabreu@gmail.com

Resumo

Esta oficina tem o propósito de oferecer um contato com a Modelagem Matemática, perpassando por suas concepções, exemplificando alguns trabalhos e oportunizando aos participantes a uma atividade lúdica, para que possam, posteriormente, oferecê-la a seus alunos. A utilização de recursos tecnológicos, assim como a atividade a ser desenvolvida, visa a contribuir para o aperfeiçoamento de educadores de qualquer nível de ensino. Esta oficina é fruto de um trabalho de pesquisa da autora para a obtenção do grau de mestre na Universidade Federal de Juiz de Fora. Ao compartilhar sua experiência com seus alunos e oferecendo a oportunidade aos participantes de relacionarem a Modelagem Matemática com situações de uma pizzaria, espera-se incentivar e alertar os interessados a trabalharem dentro dessa tendência.

Palavras chave: Modelagem Matemática. Matemática Escolar. Interação. Funções.

Justificativa

Ao propor esta oficina, a autora pretende compartilhar a pesquisa, por ela desenvolvida para a obtenção do grau de mestre, em que buscou autores e trabalhos envolvendo a Modelagem Matemática, um assunto que sempre lhe despertou interesse e curiosidade. A Modelagem Matemática ainda se configura como desconhecida para muitos educadores, por isso a autora acredita que, compartilhando sua experiência e oportunizando os participantes a um trabalho prático, possa contribuir para a expansão dessa metodologia que pode

[13] Lorena Luquini de Barros Abreu; Mestranda em Educação Matemática pela Universidade Federal de Juiz de Fora; Professora efetiva do Estado do Rio de Janeiro-RJ e Professora efetivada do Estado de Minas Gerais-MG.

sobremaneira chegar às salas de aula, auxiliando os educadores e aproximando a matemática ao cotidiano dos alunos.

Trabalhar conteúdos matemáticos trilhando o caminho da Modelagem Matemática pode favorecer o aprendizado dos alunos, pois a Modelagem possibilita uma aproximação da matemática a situações do dia a dia, contribuindo, assim, para que sejam cidadãos críticos e participativos na construção de seus conhecimentos.

A utilização dos livros didáticos nem sempre faz essa aproximação, e a experiência da autora, com o trabalho de funções, em especial a função afim, com dados coletados e pesquisados pelos alunos em uma pizzaria, possivelmente permitirá aos participantes desta oficina que aperfeiçoem seus conhecimentos acerca dessa metodologia, ou dela tomem ciência.

Objetivos

Esta oficina tem como objetivo a apresentação de concepções, trabalhos e teorias acerca da Modelagem Matemática, para que o educador dela se aproxime, conheça e possa vislumbrar a possibilidade de utilizá-la em suas escolas. Também oferece dados coletados pelos alunos em uma pizzaria, no trabalho de campo da autora, e os participantes serão convidados a vivenciar uma situação de Modelagem Matemática, para que possam, posteriormente, levar aos seus ambientes de trabalho, familiarizando-se com essa tendência.

Plano de ação

O plano de ação da oficina será distribuído em três tempos.

1º tempo - 30 min: será feita uma apresentação expositiva de algumas concepções da Modelagem Matemática, alguns trabalhos que já foram realizados percorrendo esse caminho, assim como a exposição do trabalho de campo que a pesquisadora desenvolveu, visando a exercitar função afim com os dados colhidos pelos alunos participantes em uma pizzaria.

2° tempo - 40 min: neste segundo momento, os participantes serão distribuídos em grupos (dois ou três participantes), para que possam trocar ideias e vivenciar uma situação de Modelagem Matemática e, posteriormente, desenvolver a atividade nas salas de aula. Nos grupos, de posse dos dados já coletados na pesquisa de campo da autora em uma pizzaria, os participantes serão incentivados a pensar em situações matemáticas que podem ser vivenciadas e exploradas. Neste momento, eles serão convidados a ser os alunos e, posteriormente, fazendo análises e buscando a confecção de modelos que atendam aos seus anseios, assumirão o papel de professores.

3° tempo - 50 min: no terceiro momento, cada grupo compartilhará com os demais o seu pensamento, as possibilidades e caminhos para desenvolver a Modelagem Matemática em suas respectivas realidades. A troca de experiências sempre possibilita o aprendizado e o crescimento de todos os participantes.

É nesta hora que os dados e os modelos confeccionados pelos alunos na pesquisa de campo da dissertação serão oferecidos para uma comparação, com as situações que foram levantadas pelos participantes. A importância de os alunos irem à pizzaria, vivenciarem uma situação cotidiana, levantarem questionamentos será explanada.

Procedimento metodológico da oficina

Esta oficina resume-se em apresentar concepções e trabalhos acerca da Modelagem Matemática, familiarizando os participantes com o tema e partilhando uma experiência de campo realizada em uma pizzaria, o que possibilitou o trabalho com funções e outros conteúdos matemáticos.

A abordagem escolhida para desenvolver esta oficina foi a troca de experiências, da autora com os participantes e dos participantes com a autora, visto que os participantes serão convidados a trabalhar em grupos, a trocar experiências, a questionar a possibilidade de levarem a Modelagem Matemática para suas realidades.

Alguns tópicos importantes

O Ensino Tradicional Vigente (ETV)

Muitos educadores enfrentam angústias e desmotivação devido à forma como a matemática é ensinada, com currículos engessados e sem muito questionamento por parte dos alunos e até mesmo dos professores. Segundo SILVA (2000, p. 151), no ensino tradicional vigente, “o foco principal está no conteúdo e no professor”.

Em uma turma em que o educador assume uma postura tradicional, os alunos são ouvintes, cabendo ao professor ser o transmissor de teorias matemáticas e apresentador de exemplos que ilustrem o que foi previamente demonstrado.

Os alunos que se veem sob o regime do ETV, clamam por mudanças que os levem a participar na construção de seus conhecimentos. Algumas metodologias alternativas são oferecidas, para que o educador possa buscar uma forma diferenciada de ensinar a matemática, pois da maneira que vem sendo feita não desperta, nem tampouco desencadeia, no aluno o prazer em aprendê-la.

Funções e sua relevância

As funções fazem parte da natureza humana e muitas situações do cotidiano são modeladas através de funções.

Quando se presta atenção ao mundo, ao cotidiano, descobrem-se muitas relações de associação e correspondência.

> Se você viajar de ônibus da cidade de Campos para o Rio de Janeiro, comprará um bilhete na rodoviária para embarcar num determinado ônibus. Eis a primeira associação: a você, como viajante, foi designado um ônibus, dentre todos aqueles que compõem a frota da companhia escolhida para realizar a viagem. O bilhete que você comprará possui um determinado código, indicando exatamente qual o lugar que você deverá ocupar dentro do ônibus. Eis outra associação: a você, como passageiro, foi designada uma dentre as várias poltronas do ônibus. Qualquer outro passageiro terá de ocupar outra poltrona, que também lhe será designada no momento de comprar o bilhete. (GÓMEZ; VILELA, 2007, p.79).

Nesse exemplo, há duas funções. Uma com o domínio formado pelos passageiros que viajam de Campos para o Rio, e o contradomínio é formado pelos ônibus da companhia que fazem o trajeto; nesse caso, a função associa cada passageiro a determinado ônibus. A outra função que aparece na situação problema tem como domínio o conjunto de passageiros que irá embarcar num dado ônibus, e como contradomínio o conjunto de poltronas do ônibus. A imagem, por sua vez, são as poltronas que foram ocupadas por passageiros. Esse exemplo configura uma situação rotineira em que aparecem os conceitos de função e pouco explorada por educadores nas salas de aula.

A função deve ser trabalhada fazendo-se associações com situações da vida real, oportunizando aos alunos a percepção de suas aplicações e importância.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)

Os Parâmetros curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) trazem a contextualização sociocultural como uma grande competência, como uma forma de aproximar o aluno de sua realidade, fazendo com que ele vivencie e reconheça a diversidade que o cerca e seja capaz de interpretar e atuar nessa realidade.

> O estudo das **funções** permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no **conceito de função** e em suas **propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos** e **nas aplicações dessas funções.** (BRASIL, 1999, p.118, grifo do autor).

Os parâmetros sugerem a autonomia e deixam os educadores com a liberdade de direcionar suas aulas, para que seus alunos sejam capazes de atuar de forma crítica no meio ao qual estão inseridos.

Beatriz D’Ambrósio (1989, p. 3) analisa o trabalho com a modelagem como um caminho que vai auxiliar a quebra da dicotomia entre a matemática escolar e aquela que o aluno utiliza em sua vida. “Os modelos matemáticos são formas de estudar e formalizar fenômenos do dia a dia.” O educador, ao trabalhar nessa linha, oportuniza a seus alunos um maior significado ao que estudam, tornando-os críticos.

A metodologia da Modelagem Matemática pode contribuir para posicionamentos críticos, levando os alunos a se expressarem e interpretarem situações de seu ambiente social com o auxílio da matemática.

Concepções de Modelo

Biembengut (1999) contribui com a definição do modelo matemático como algo que retrata aspectos da situação pesquisada. “Um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real, denomina-se *modelo matemático.”* (BIEMBENGUT, 1999, p.20, grifo do autor). Assim, a autora retrata a importância da matemática na elaboração de modelos matemáticos, sendo que esses possibilitam uma compreensão melhor de um fenômeno em estudo:

> Um modelo pode ser formulado em termos familiares, utilizando-se expressões numéricas ou fórmulas, diagramas, gráficos ou representações geométricas, equações algébricas, tabelas, programas computacionais, etc. Por outro lado, *quando se propõe um modelo, ele é proveniente de aproximações realizadas para se poder entender melhor um fenômeno e nem sempre tais aproximações condizem com a realidade.* Seja como for, um modelo matemático retrata, ainda que em uma visão simplificada, aspectos da situação pesquisada. (BIEMBENGUT, 1999, p. 20. grifo nosso).

O modelo, segundo Biembengut, retrata aspectos da situação pesquisada pelos alunos, ou seja, esses terão oportunidades de buscar situações de seus cotidianos, de pesquisar e construir modelos que respondam aos seus anseios.

A partir do modelo construído, novas situações podem ser levantadas pelo professor, sempre instigando os alunos a pensarem sobre o mesmo.

Concepções de Modelagem Matemática

Encontram-se inúmeros trabalhos e diversas definições de Modelagem Matemática. Aqui, algumas definições e considerações serão partilhadas.

Barbosa (2001, p. 6) descreve que “Modelagem é um ambiente de aprendizagem na qual os alunos são convidados a indagar e / ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade.” Entende-se que essa indagação ocorre no momento em que o aluno cria problemas e tece perguntas fazendo investigações na busca de soluções.

Bassanezi (1994, p. 61) prioriza a modelagem como um processo dinâmico utilizado com o intuito de se obter tese de modelos matemáticos e a define como “arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê--los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”.

Já Biembengut (1999) define a Modelagem Matemática como “o processo que envolve a obtenção de um modelo.” E ainda complementa que “o modelador deve ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas” (BIEMBENGUT, 1999, p. 20).

Já Burak (2004) concebe a Modelagem Matemática como alternativa metodológica para o ensino de matemática e seu trabalho deve ser iniciado a partir do interesse dos grupos; destaca aspectos que considera importantes para um trabalho envolvendo a Modelagem Matemática: maior interesse dos grupos, pois esses poderão se manifestar, escolhendo o que gostariam de estudar; interação maior no processo de ensino e aprendizagem, pois os grupos, ao trabalharem com aquilo que sugeriram, tornam-se corresponsáveis por suas aprendizagens; a Modelagem oportuniza também uma demonstração de uma forma diferenciada de conceber a educação, cabendo ao professor uma mudança de postura para estabelecer relações afetivas com os alunos, passando a ser um mediador entre o conhecimento matemático e o conhecimento do aluno.

Ao trabalhar utilizando a Modelagem, Burak a desenvolve em cinco etapas:

> a) escolha do tema;
> b) pesquisa exploratória;
> c) levantamento dos problemas;
> d) resolução dos problemas;
> e) análise crítica das soluções (BURAK, 2004, p. 3).

De acordo com Bean (2007, p. 48), “a modelagem matemática, no sentido abrangente, é uma atividade, entre uma variedade de possíveis atividades, utilizada para lidar com situações problemáticas empregando a linguagem matemática.” Ele concebe a modelagem como um processo de construção de modelos para lidar com situações, e, para efetuar essa construção, são colocadas as hipóteses, premissas e recortes.

No IV Encontro de Educação Matemática de Ouro Preto, Bean (2009) apresenta alguns exemplos de atividades envolvendo a modelagem matemática. Um deles foi retirado de Peled e Bassan-Cincinatus (2005):

> Dois amigos, Maria e José, compraram um bilhete lotérico juntos. Maria pagou R$ 3 e José R$ 2. Seu bilhete ganhou R$ 40, Como é que eles devem compartilhar o dinheiro? (BEAN, 2009, p. 92, tradução do autor).

A problemática envolvida nessa situação é a forma como deve ser compartilhado o dinheiro. Uma premissa para resolver essa situação é que a divisão de bens deve ser feita de acordo com os valores que foram investidos. Assim sendo, pode-se ter como pressuposto a divisão proporcional e muitos dirão que a divisão deve ser feita na razão 3:2, e Maria ganhará R$ 24, e José R$ 16.

Ao analisar essa situação, o aluno, ou o grupo envolvido, pode supor que Maria e José são bons amigos e resolvem compartilhar o prêmio em quantidades iguais, baseado no princípio da equidade, com base nas suas práticas cotidianas. Pensando dessa forma, o aluno estará errando a questão? Muitas vezes são formuladas questões almejando-se respostas de acordo com os pressupostos do educador, e não é valorizado o que os alunos pensaram naquela situação problemática.

Para Bean, o modelo que os professores utilizam vai depender de premissas e pressupostos, e essas variam dentro das inúmeras situações envolvidas. As premissas são as teorias ou princípios que guiam o raciocínio, e os pressupostos são afirmações úteis em termos do objetivo, não havendo, contudo, pretensão serem comprovados. Em modelagem, os pressupostos devem estar coerentes com as premissas.

A pesquisa de campo, realizada em uma pizzaria localizada no entorno da escola onde os alunos envolvidos estudavam, foi apoiada nas cinco etapas mencionadas e justificadas por Burak, e as concepções de Bean auxiliaram nas análises através das premissas e dos pressupostos.

Como já explicitado, que, a busca da Modelagem Matemática direciona o educador, que possibilita aos alunos a oportunidade de questionarem e fazerem associações, levantando uma situação-problema, buscando soluções para os questionamentos levantados.

Pizzarias: uma possibilidade de trabalhar funções afins com o auxílio da Modelagem Matemática

Os livros didáticos dão ênfase à definição de função afim, principalmente através de relações entre conjuntos de números reais, e apresenta as leis de formação, propriedades e diretrizes, assim como a construção de seus gráficos, partindo de uma tabela de valores.

Cabe ao professor, a partir dos conteúdos programáticos, com apoio no livro didático e outras fontes, desenvolver atividades que aproximem das experiências dos alunos, para que eles possam usar esses conteúdos matemáticos de forma contextualizada, com o intuito de lhes atribuírem significados e aos conceitos matemáticos.

Uma metodologia alternativa é a Modelagem Matemática, em que o professor, ao trabalhar com essa tendência, possibilitará aos seus alunos a pesquisa e a busca de matemática em situações de seus cotidianos, tornando-os sujeitos participantes na construção de conceitos matemáticos.

Muitos adolescentes têm o hábito de ir a pizzarias com os pais, com amigos, e a oportunidade de buscarem uma ligação de pizzas com a matemática pode despertar o interesse e a curiosidade, pois eles poderão pesquisar o que há de matemática por trás dos valores, sabores, tamanhos, molhos e de todas as variáveis possíveis dentro do que é oferecido por esses restaurantes.

Quatro alunos de uma primeira série do Ensino Médio foram selecionados para participar da pesquisa de campo; a ida a uma pizzaria, a coleta de dados e informações despertaram neles o interesse, a motivação e alegria.

Com os dados em mãos e tendo a pesquisadora como uma mediadora, os alunos descobriram o modelo que colocava preço nas pizzas oferecidas pelo estabelecimento. Vários conteúdos foram surgindo, a partir das necessidades deles, para desenvolverem os modelos.

O que seria, a princípio, uma simples visita, permitiu o trabalho com funções afins, lineares, constantes, identidades, sistemas de equações, geometria plana (área, perímetro, diâmetro, raio), porcentagem, lucro. Uma rica experiência que será partilhada nesta oficina.

Guias de trabalho

1ª etapa: Apresentação e comentários

Nesta etapa, serão demonstradas as considerações teóricas explicitadas acima, com o objetivo de familiarizar os participantes com os Modelos e a Modelagem Matemática enquanto uma alternativa metodológica para os educadores matemáticos.

A exposição, neste primeiro momento, será baseada nos autores cujas teorias fundamentaram o trabalho da autora nos três capítulos de sua dissertação_ Importância de funções para a matemática, Algumas concepções de Modelo e Modelagem Matemática e Revisão de Literatura_ intitulada “estudando conteúdos matemáticos com direcionamentos de modelagem matemática: o caso da função afim”. Além dos slides utilizados na apresentação teórica, pretende-se oferecer aos participantes uma pequena apostila com tópicos que darão um suporte e auxiliarão os professores a refletirem as possibilidades da utilização da Modelagem Matemática em seus ambientes de trabalho.

A pesquisa de campo será partilhada como uma possibilidade de se trabalharem funções com direcionamentos da Modelagem Matemática, não somente as afins, mas todo o conteúdo que for levantado, delineando-se a amplitude que essa tendência oferece.

2ª etapa: Trabalho em grupos: possibilidades para a Modelagem Matemática

Neste segundo momento, pretende-se comentar um pouco do trabalho de campo realizado com quatro alunos convidados a irem a uma pizzaria e coletarem dados que, posteriormente, foram utilizados para a discussão e o levantamento de conteúdos matemáticos. O detalhamento de todo o trabalho de campo, assim como as transcrições dos alunos se encontram no capítulo Descrição do trabalho de campo: a matemática compreendida por meio do tema “O comércio de pizzas” e no apêndice da dissertação desta autora.

Como atividade prática, esta oficina vai propor aos participantes que se distribuam em grupos, para que possam vivenciar uma discussão em torno da atividade e levantar outras abordagens e sugestões para o trabalho de modelagem na pizzaria.

Ao invés de uma visita a uma pizzaria, pouco viável devido ao tempo disponível para a oficina, apresentam-se aos grupos as questões que os alunos da autora formularam para levantar informações na pizzaria visitada por eles.

Os participantes da pesquisa foram levados a uma pizzaria e os dados apresentados são frutos dos questionamentos deles. Algumas questões levantadas: A pizzaria oferece quantos sabores de pizzas? Qual o tamanho das pizzas que estão disponíveis no estabelecimento? Como a venda da pizza pode influenciar o pagamento dos funcionários? O garçom ganha comissão? Como vocês fazem para contar o lucro ou prejuízo? Qual tipo de pizza é o mais vendido no estabelecimento? Quantas pizzas, em média, são vendidas? Vocês trabalham com entregas? Se sim, quais os valores? Como vocês calculam o preço, de acordo com o tamanho da pizza? Qual delas gera mais lucro: pequena, média ou grande? Qual o tamanho de pizza é mais vendido? A margem de lucro é a mesma em todos os tamanhos? Qual é o ingrediente mais utilizado nos recheios de pizzas?

O dono da pizzaria respondeu a esses e a outros questionamentos, e os respectivos dados serão distribuídos para os participantes, juntamente com um cardápio e os preços oferecidos por esse estabelecimento.

A verdadeira pizza napolitana

ALICHE G - 27,90 M - 25,90 P 23,90
Molho de tomate, mussarela, filé de anchovas, tomate fatiado, parmesão, azeitonas.

ATUM
Molho de tomate, atum importado, tomate fatiado, cebola, azeitonas e orégano. 26,50 24,50 22,50

ATUM COM MUSSARELA
Molho de tomate, mussarela, atum, tomate fatiado, azeitonas e orégano.

BOLONHEZA = Verdes Tina
Molho de tomate, mussarela, carne moída, tomate fatiado, queijo parmesão, azeitonas e orégano.

CALABRESA ESPECIAL 28,90 26,90 24,90
Molho de tomate, mussarela, calabresa fatiada, champignon, cebola, azeitonas e orégano.

CALIFÓRNIA 30,50 28,50 26,50
Molho de tomate, presunto, catupiry, pêssegos, figos e ameixas.

CALZONE DE FRANGO - Pizza Fechada
Molho de Tomate, frango, catupiry, cebola, parmesão ralado, azeitonas e orégano.

CALZONE DE FRANGO - Pizza Aberta
Molho de tomate, frango, catupiry, cebola, parmesão ralado, azeitonas, orégano.

CALZONE FORNELLO - Pizza Fechada
Molho de tomate, atum, palmito, mussarela, parmesão ralado, azeitonas e orégano.

CALZONE FORNELLO - Pizza Aberta
Molho de tomate, atum, palmito, mussarela, permesão Ralado, azeitonas, orégano

CATUPIRY ESPECIAL 28,90 26,90 24,90
Molho de tomate, catupiry, calabresa fatiada, parmesão ralado, alho, azeitonas e orégano.

CARIOCA
Molho de Tomate, mussarela, salaminho, tomate fatiado, azeitonas e orégano.

CHAMPIGNON 27,90 25,90 23,90
Molho de tomate, mussarela, champignon, cebola, azeitonas e orégano.

FIRENZE 28,90 26,90 24,90
Molho de tomate, mussarela, calabresa, alho, cebola, azeitonas, orégano.

FRANGO DESFIADO
Molho de tomate, frango desfiado, filetes de mussarela, tomate fatiado, azeitonas e orégano.

FRANGO ESPECIAL = calabresa
Molho de tomate, frango desfiado, catupiry, tomate fatiado, cebola, azeitonas e orégano.

GORGONZOLA 26,90 24,90 22,90
Molho de tomate, queijo gorgonzola, azeitonas e orégano,

LOMBIMHO
Molho de tomate, mussarela, lombo fatiado, tomate fatiado, cebola, azeitonas e orégano.

LIGHT
Molho de tomate, mussarela, ricota, champignon, cebola, tomate fatiado, queijo parmesão, azeitonas e orégano.

MARGHERITA
Molho de tomate, mussarela, tomate fatiado, manjericão, azeitonas e orégano.

MILHO VERDE 26,50 24,50 22,50
Molho de Tomate, mussarela, milho verde, cebola, parmesão, azeitonas e orégano.

MINEIRINHA
Molho de tomate, catupiry, mussarela, lombo fatiado, tomate fatiado, azeitonas e orégano.

MIXTA 26,50 24,50 22,50
Molho de tomate, mussarela, presunto picado, azeitonas, orégano.

MUSSARELA 25,00 23,00 21,00
Molho de tomate, queijo mussarela, azeitonas e orégano.

NAPOLITANA 26,60 24,60 22,60
Molho de tomate, mussarela, tomate fatiado, queijo parmesão, azeitonas e orégano.

NONNA ITÁLIA IDEM NAPOLITANA
Molho de tomate, mussarela, frango desfiado, milho verde, cebola, azeitonas e orégano.

NORDESTINA 31,90 29,90 27,90
Molho de tomate, mussarela, carne seca desfiada, pimentão, tomates, cebolas, azeitonas e orégano.

PAULISTA
Molho de tomate, mussarela, batata palha frita, tomate fatiado, parmesão, azeitonas e orégano.

PIZZAIOLO = Calabresa
Molho de tomate, frango, mussarela, palmito, bacon, azeitonas e orégano.

TODAS AS PIZZAS PODEM SER FEITAS COM BORDAS DE CATUPIRY, CHEDDAR OU 4 QUEIJOS

Todas as pizzas contêm molho de molho de tomate, azeitonas e orégano. A pizza meia a meio será cobrada pela de maior valor. Qualquer ingrediente acrescentado à pizza será cobrado à parte.

Figura 1: Cardápio da pizzaria

Com esses dados em mãos, mais o cardápio que os alunos coletaram, os integrantes serão convidados a uma discussão acerca do que é possível trabalhar oferecendo aos alunos o tema *"O Comércio de Pizzas".*

É possível, com o desenvolvido do trabalho de campo, trabalhar as funções afins, visto que, nessa pizzaria, os preços das pizzas sofrem acréscimos de R$ 2,00 enquanto os tamanhos sofrem um acréscimo de 5 cm de diâmetro. Foi considerando um sabor de pizza e seus valores, como exemplo a de Mussarela, escolhida pelos alunos envolvidos na pesquisa.

MUSSARELA	
TAMANHO (cm)	PREÇO (R$)
25	21,00
30	23,00
35	25,00

Com esses dados coletados, é possível encontrar um modelo que coloque preço aos vários tamanhos de pizza desse sabor. Com apenas dois pares ordenados, é possível a construção de um gráfico, a percepção de que se trata de uma função afim e, por fim, a construção de um modelo que, nesse caso, conforme explicitado com maiores detalhes no apêndice da dissertação, é $y = \frac{2}{5}x + 11$. Os alunos, com os modelos que eles construíram em mãos, sentem-se motivados, e vários conceitos podem ser levantados, como o valor que o coeficiente *a* assume, a definição da função afim como uma variação em que, a cada R$ 2,00 de aumento no preço da pizza, aumenta-se 5 cm no diâmetro. Outros sabores de pizza, além de Mussarela, serão distribuídos, para que os participantes possam fazer comparações e levantar questionamentos.

Com os dados em mãos, este momento da oficina será destinado ao levantamento de vários pontos que os participantes julguem pertinentes de serem explorados com a visita a uma pizzaria.

3ª etapa: Debate final

Os grupos serão convidados a partilhar entre si as experiências que elaboraram, sejam elas inéditas ou mesmo alguma situação que, por ventura, tenham trabalhado com seus alunos e que seja compatível com os dados coletados na pizzaria e oferecidos a eles no segundo momento.

A troca de experiências é fundamental, pois todos terão a oportunidade de sair da oficina com algumas ideias, para que possam iniciar um trabalho, ou mesmo prosseguir com ele, tendo a Modelagem Matemática como direcionadora.

Finalizando a oficina, os dados e modelos construídos pelos sujeitos da pesquisa serão apresentados para complementar as possibilidades da Modelagem Matemática. É um momento de se mencionar também que existem inúmeras situações ligadas ao cotidiano dos alunos que possibilitam um rico trabalho com essa tendência.

Se forem considerados os preços das pizzas crescendo em função de sua área, é possível serem exploradas funções quadráticas. Ao se pesquisar o crescimento de algumas plantas e árvores, é possível levantarem-se questões que recaiam na função exponencial. O crescimento dos casos de AIDS, ou mesmo os casos de Dengue no Brasil, ou na cidade dos alunos envolvidos no processo de Modelagem, possibilitam o trabalho com funções. É preciso deixar claro aos participantes que há novas possibilidades de se estudarem funções e outras situações matemáticas percorrendo-se o caminho da Modelagem Matemática; que um único tema pode levantar inúmeros questionamentos; que a aprendizagem de conteúdos diversos vão surgir de acordo com a necessidade dos alunos envolvidos.

Na dissertação da autora desta oficina, a experiência de campo, que será partilhada, foi de suma importância para a compreensão da necessidade de interação, requisito básico para o desenvolvimento de práticas que, como a Modelagem Matemática, garantem ao professor aplicar as mais variadas questões, não se contentando apenas com repetições. Abre-se, assim, uma inovação tão almejada nessa área.

INFORMAÇÕES GERAIS	
Título da oficina: Modelagem Matemática: um possível caminho para o trabalho com funções afins	
Instituição dos autores: Universidade Federal de Juiz de Fora	
Nome dos autores: Lorena Luquini de Barros Abreu	
País dos autores: Brasil	
Número de horas mais convenientes (2):	2 horas
Nível de escolarização para o qual será dirigido (Educação Infantil, Anos iniciais do Ensino, Anos finais do Ensino Fundamental, Ensino Médio, Ensino Superior, ou geral):	Geral
Número máximo de pessoas:	20 pessoas
Equipamentos audiovisuais ou informáticos (Projetor multimídia, TV, etc.):	Projetor Multimídia, Computador

REFERÊNCIAS

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. **Anais...** Caxambu: ANPED, 2001.1 CD-ROM.

BASSANEZI, Rodney. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002. 389 p.

BEAN, Dale. Modelagem matemática: uma mudança de base conceitual. In: Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 5., 2007, Ouro Preto. **Anais...** Ouro Preto: CNMEM, 2007. p. 35-58.

______. Modelagem: uma conceitualização criativa da realidade. In: Encontro de Educação Matemática de Ouro Preto, 4., 2009, Ouro Preto. **Anais...** Ouro Preto: CEMOP, 2009, p. 90- 104.

BIEMBENGUT, Maria Salett. **Modelagem Matemática & implicações no ensino e aprendizagem de matemática.** Blumenal: Furb, 1999. 134 p.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais**: Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: SEMT, 1999. 141 p.

BURAK, Dionísio. Modelagem Matemática e a Sala de Aula. In: I EPMEM -Encontro Paranaense da Modelagem Na Educação Matemática., 2004, Londrina. **Anais...** Londrina: I EPMEM, 2004. 10 p.

D'AMBRÓSIO, BEATRIZ S. Como ensinar matemática hoje? **Temas e Debates.** Brasília, ano 2, n. 2, p. 15-19, 1989.

GÓMEZ, Jorge J. Delgado; VILELA, Maria Lúcia T. Pré-Cálculo; Volume 2, Módulos 3 e 4. 4. ed. 2007, Rio de Janeiro. **Fundação Cecierj / Consórcio Cederj...** Rio de Janeiro: Fundação Centro de Ciências e Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro, 2007.

SILVA, Maria Regina Gomes da. Assimilação Solidária: Análise de uma intervenção. **Quadrante**, Portugal, v. 9, n. 1, p.147-167, 2000.

ANEXO

ANEXO A - Termo de Compromisso Ético

TERMO DE COMPROMISSO ÉTICO

Este termo de compromisso pretende esclarecer os procedimentos que envolvem a pesquisa, e a utilização dos dados nela coletados. Tem o objetivo de deixar o mais transparente possível a relação entre os envolvidos e o tratamento e uso das informações que serão colhidas.

As atividades realizadas, videografadas e transcritas, servirão como material para pesquisas que procuram entender melhor o aprendizado de funções afins com o auxílio da Modelagem Matemática. O acesso aos registros videografados será exclusivo do grupo de pesquisa, que assume o compromisso de não divulgá-los, e os registros escritos das mesmas serão feitos preservando-se a identidade dos sujeitos em sigilo através dos pseudônimos por eles escolhidos. Nas pesquisas que utilizarem o material coletado não será feita menção ao ano e a Instituição onde o curso foi realizado para a preservação da identidade do grupo.

As informações provenientes da análise dessas entrevistas poderão ser utilizadas pelos pesquisadores em publicações e eventos científicos e divulgadas a todos aqueles que se interessarem pelas pesquisas, na forma acima indicada.

Juiz de Fora, 18 de outubro de 2010.

_____________________________   _____________________________

Orestes Piermatei Filho   Lorena L. de Barros Abreu

_____________________________   _____________________________

Sujeito de Pesquisa   Pais ou Responsáveis

____

Direção da Instituição

ANEXO B - Autorização para Participação em Pesquisa

<u>AUTORIZAÇÃO PARA PARTICIPAÇÃO EM PESQUISA</u>

Senhores pais ou responsáveis pelo aluno(a) ___________________________________.
Venho solicitar que seu filho (a) possa comparecer à Escola Estadual Sebastião Patrus de Sousa em algumas tardes, nos dias _________________, para participarem de uma pesquisa que estou realizando para meu trabalho de Mestrado Profissional em Educação Matemática na Universidade Federal de Juiz de Fora.
A participação deles é primordial, pois através de pesquisas buscamos uma forma diferenciada para auxiliar os educadores e consequentemente a aprendizagem de seus filhos.
Os encontros ocorrerão dentro da escola, sendo necessária uma volta pelo bairro para coleta de algumas informações, e essa volta será com o acompanhamento da professora e pesquisadora.
Tudo o que será abordado proporcionará o crescimento de seu filho(a) e o sigilo dele(a) será preservado.
Aguardo sua compreensão e autorização.
Juiz de fora, 18 de outubro de 2010.
Professora e pesquisadora, Lorena Luquini de Barros Abreu.

____

Assinatura dos Pais ou responsáveis