

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Física

Rodrigo Machado de Paula

**NOVOS LIMITES PARA O PARÂMETRO DE TSALLIS EM UM ESPAÇO
DE FASES NÃO COMUTATIVO, GRAVIDADE ENTRÓPICA E
EQUAÇÕES DE FRIEDMANN NÃO EXTENSIVAS.**

Juiz de Fora

2016

Rodrigo Machado de Paula

**NOVOS LIMITES PARA O PARÂMETRO DE TSALLIS EM UM ESPAÇO
DE FASES NÃO COMUTATIVO, GRAVIDADE ENTRÓPICA E
EQUAÇÕES DE FRIEDMANN NÃO EXTENSIVAS.**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de física teórica, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Albert C. R. Mendes

Juiz de Fora

2016

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M. de Paula, Rodrigo.

NOVOS LIMITES PARA O PARÂMETRO DE TSALLIS EM UM
ESPAÇO DE FASES NÃO COMUTATIVO, GRAVIDADE ENTRÓPICA
E EQUAÇÕES DE FRIEDMANN NÃO EXTENSIVAS. / Rodrigo Machado
de Paula. – 2016.

59 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Albert C. R. Mendes

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto
de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2016.

1. Tsallis. 2. Não-Extensividade. 3. Princípio Holográfico. 4. Espaço
Emergente. 5. Não-Comutatividade. C. R. Mendes, Albert, orient. II. M.
C. Abreu, Everton, coorientador. III. Título.

Rodrigo Machado de Paula

**NOVOS LIMITES PARA O PARÂMETRO DE TSALLIS EM UM ESPAÇO
DE FASES NÃO COMUTATIVO, GRAVIDADE ENTRÓPICA E
EQUAÇÕES DE FRIEDMANN NÃO EXTENSIVAS.**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de física teórica, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Albert C. R. Mendes - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Everton M. C. Abreu - Coorientador
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Jakson Miranda Fonseca
Universidade Federal de Viçosa

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, Marcy e Rosa, por serem sempre este porto seguro em minha vida e por apoiarem integralmente a realização deste trabalho e aos meus professores, Albert e Everton, pela luz que representaram neste caminho.

“A imaginação é mais importante que o conhecimento.”

Albert Einstein

RESUMO

Este trabalho foi inspirado pelo artigo [1] “*New bounds for Tsallis parameter in a noncommutative phase-space entropic gravity and nonextensive Friedmann equations*”. Inicialmente, é apresentada uma nova teoria que deriva a lei de gravitação de Newton, segunda lei e Relatividade Geral do ponto de vista termodinâmico. Além disso, é apresentada a teoria estatística não-extensiva de Tsallis onde sua principal característica é a inserção do parâmetro q que mede o grau de não-extensividade. Novos limites para este parâmetro são calculados, em um espaço de fases não-comutativo. As equações de Friedmann são derivadas a partir do princípio holográfico e uma generalização não-extensiva para estas equações também é apresentada. Ao final, é feita uma análise dos parâmetros cosmológicos incorporando-se propriedades não-extensivas.

Palavras-chave: Tsallis. Princípio holográfico. Espaço Emergente. Não-extensividade. Não-comutatividade.

ABSTRACT

This work was inspired by the article [1] “*New bounds for Tsallis parameter in a noncommutative phase-space entropic gravity and nonextensive Friedmann equations*”. First of all, it is presented a new theory that obtains Newton’s law for gravity, second law and General Relativity from thermodynamics. Moreover, it is also presented the Tsallis’s nonextensive statistical theory where the principal feature is the insertion of q parameter which quantifies the degree of nonextensivity. New bounds are obtained for this parameter, in a noncommutative phase-space. The Friedmann equations are developed from holographic principles and a nonextensive generalization for this equations are also presented. Finally, it is made an analyses from cosmological parameters proposing nonextensivity properties.

Key-words: .Tsallis. Holographic principle. Emergent space. Nonextensivity. Noncommutativity.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Polímero articulado livre imerso em um banho térmico com temperatura T é puxado para fora de seu estado de equilíbrio (força F). A força entrópica aponta em sentido oposto.	22
Figura 2 – Uma partícula de massa m se aproxima de uma superfície holográfica. A superfície limita a parte emergida do espaço, que contém a partícula, e armazena dados que descrevem a parte do espaço ainda não emergida.	24
Figura 3 – Uma partícula de massa m próxima a uma superfície holográfica esférica. A energia é igualmente distribuída entre os <i>bits</i> ocupados, e é equivalente à massa M que deve emergir dentro da parte do espaço encerrado pela superfície.	27
Figura 4 – Simetria, energia e entropia	32
Figura 5 – A função q -exponencial.	36
Figura 6 – A entropia S_q com probabilidades iguais como função do número de estados W (com $k = 1$), para valores típicos de q	37
Figura 7 – A dependência de p da entropia quando $W = 2$, $S_q = [1 - p^q - (1 - p)^q]/(q - 1)$ para valores típicos de q (com $S_1 = -p \ln p - (1 - p) \ln(1 - p)$).	39

SUMÁRIO

1	Introdução	10
2	Gravitação a Partir das Leis Termodinâmicas	13
2.1	Breve Introdução	13
2.2	Analogia entre Física de Buracos Negros e Termodinâmica	14
2.3	Teoria da Informação e Entropia de Buracos Negros	17
2.4	Expressão para a Entropia de um Buraco Negro	19
2.5	Princípio Holográfico e Gravitação	21
2.5.1	Força Entrópica	21
2.5.2	Leis de Newton a Partir do Princípio Holográfico	23
2.5.2.1	Força e Inércia	24
2.5.2.2	Lei de Newton para a Gravidade	26
2.5.2.3	Inércia e Potencial Gravitacional de Newton	27
2.5.2.4	Equação de Poisson para uma distribuição geral de matéria	28
2.5.2.5	Princípio Holográfico e Relatividade Geral	29
3	Teoria Estatística de Tsallis	31
3.1	Introdução	31
3.2	Simetria, Energia e Entropia	31
3.3	Teoria Estatística de Tsallis	33
3.3.1	Propriedades	36
3.3.1.1	Não-negatividade	36
3.3.1.2	Extremos em Probabilidades Iguais	37
3.3.1.3	Expansabilidade	37
3.3.1.4	Não-Aditividade	37
3.3.1.5	Concavidade e Convexidade	38
3.3.1.6	Conexão com a Derivada de Jackson	38
4	Outros Resultados da Teoria Estatística de Tsallis	40
5	Gravitação Entrópica e Não-Comutatividade	43
5.1	Introdução	43
5.2	Gravitação Entrópica e Não-Comutatividade no Espaço de Fases	43
5.3	Princípio de Equivalência e Limites dos Parâmetros Não-Comutativos	45
5.4	Limite para o Parâmetro q através da Não-Comutatividade	46

6	Universo de Friedmann, Força Entrópica e Estatística Não-Extensiva de Tsallis	48
6.1	Equações de Friedmann a partir da Força Entrópica	48
6.2	Equações de Friedmann Modificadas pela Teoria de Tsallis	50
6.3	Análise de Parâmetros Cosmológicos	51
7	Conclusão	54
	 REFERÊNCIAS	 57

1 Introdução

O grande desafio teórico da física é o da unificação de duas teorias que são os pilares da física moderna: a Relatividade Geral e a Mecânica Quântica. Gravidade é a força que domina em grandes distâncias, mas, ao mesmo tempo, é extremamente fraca em pequenas escalas. Já a Mecânica Quântica é a teoria que descreve o universo dos átomos. As tentativas teóricas que envolvem a unificação da gravidade com as outras forças da natureza em escala microscópica tem-se mostrado problemáticas, já que acabam por levar a muitos problemas, paradoxos e resultados sem sentido [2].

De todas as forças da natureza, gravidade é, sem dúvida, a mais universal. Gravidade influencia e é influenciada por qualquer ente físico que possua energia e está intimamente conectada à estrutura espaço-temporal. Além disso, a natureza universal da gravitação também se evidencia por conta da extrema semelhança de suas equações básicas com as leis da termodinâmica e da hidrodinâmica. Mas, até o momento, não existe uma explicação clara do motivo desta similaridade.

A unificação da gravidade com as outras forças da natureza, em escala microscópica, parece não ser a abordagem correta para a solução deste problema. Por conta disso, muitos físicos têm procurado outros caminhos. Entre as abordagens encontradas na literatura está a que procura entender a gravitação como um fenômeno com um forte caráter termodinâmico, mostrando que as semelhança entre Relatividade Geral e termodinâmica são muito mais profundas e significativas, e que talvez este possa ser o caminho para uma conciliação entre R.G. e M.Q.

Uma série de trabalhos pioneiros de Bekenstein [3] e Hawking [4] mostraram que quantidades como área e massa de um buraco negro estão intimamente associadas à entropia e temperatura, respectivamente. Seguindo esta linha de raciocínio, Jacobson [5] interpretou as equações de campo de Einstein como identidades termodinâmicas, mostrando que estas equações podem ser entendidas como uma equação de estado.

Em um trabalho mais recente, Verlinde [2] nos traz uma derivação heurística da gravitação, tanto newtoniana quanto relativística, para um espaço-tempo estático. O conceito introduzido por Verlinde é análogo ao de Jacobson. O resultado obtido por Verlinde é de que a lei de gravitação de Newton pode ser entendida como uma força entrópica originada por perturbações na informação (armazenada em superfícies holográficas) causadas pelo movimento de corpos massivos quando estes se afastam destas superfícies. Verlinde se utilizou desta ideia em conjunto com o resultado de Unruh e assim obteve a segunda lei de Newton. Seguindo esta linha de raciocínio, Verlinde também deriva a lei de Newton para gravitação utilizando-se do conceito de força entrópica somado ao princípio holográfico e à lei de equipartição de energia.

Temos ainda uma extensão da usual teoria de Boltzmann-Gibbs conhecida como

Teoria Estatística de Tsallis, que considera a possibilidade de uma entropia não-extensiva onde sua principal característica é a adição do parâmetro q que mede o grau de não-extensividade. Uma importante propriedade é a de que quando temos $q \rightarrow 1$ a teoria de Boltzmann-Gibbs é recuperada.

Ao se derivar a Relatividade Geral a partir das leis termodinâmicas fica claro que uma revisão do conceito de espaço-tempo em escalas microscópicas se faz necessária. O modelo contínuo da teia espaço-temporal nesta escala começa a parecer uma idealização sem significado físico.

Baseados nas ideias apresentadas até aqui, uma série de trabalhos têm sido produzidos com o argumento de que uma estrutura não-comutativa do espaço-tempo no espaço de fases também pode ser esperada. O papel que esta propriedade pode desempenhar na derivação da gravitação entrópica foi considerado em [6]. Mais ainda, tem-se argumentado em outros trabalhos que tal propriedade não-comutativa é crucial na abordagem de problemas em cosmologia quântica [7, 8], em termodinâmica do buraco negro de Schwarzschild [9] e o problema da singularidade de buracos negros [10, 11].

Além disso, uma outra aplicação bastante interessante é encontrada em [41]. Neste artigo, as equações que governam a evolução dinâmica do universo de Friedmann são derivadas do ponto de vista da gravidade entrópica, em conjunto com a lei de equipartição de energia mais a temperatura Unruh. Isto é feito realizando-se generalizações de alguns argumentos de Verlinde para a dinâmica espaço-temporal.

O trabalho é organizado da seguinte forma: no capítulo 2 é mostrado como a analogia entre termodinâmica e dinâmica de buracos negros se apresenta e de que forma esta analogia se transforma em algo com um significado físico mais profundo. Baseado nestas ideias, novos desdobramentos se seguem, surgindo assim novos conceitos como princípio holográfico e gravitação entrópica, e de que forma estes conceitos podem desempenhar um papel fundamental no entendimento do fenômeno gravitacional, tanto do ponto de vista newtoniano quanto relativístico.

No capítulo 3, (Teoria Estatística de Tsallis), é apresentado a teoria estatística não-extensiva onde sua principal característica é a inserção do parâmetro de não-extensividade q e suas propriedades. Já no capítulo 4, novos limites para este parâmetro são apresentados, calculados através de hipóteses teóricas que assumem propriedades não-extensivas em conjunto com dados experimentais.

Seguindo esta linha, no capítulo 5, são assumidas propriedades não-comutativas no espaço de fases relativas à estrutura espaço-temporal. Além disso, são mostrados limites que os parâmetros de não-comutatividade devem obedecer de acordo com o princípio da equivalência. Novos limites para o parâmetro q também são obtidos, assumindo-se a existência de uma relação intrínseca entre não-comutatividade e não-extensividade.

No capítulo 6, as equações de Friedmann são obtidas a partir do princípio holográfico e do conceito de força entrópica. Também são apresentadas modificações nas equações de Friedmann utilizando-se da Teoria Estatística de Tsallis. Dessa forma, novos limites para o parâmetro q são obtidos devido à análise dos parâmetros cosmológicos, mostrando que este parâmetro de não-extensividade pode ter desempenhado um papel importante na história da evolução do universo.

2 Gravitação a Partir das Leis Termodinâmicas

2.1 Breve Introdução

Buracos negros podem ser caracterizados por três (e somente três) grandezas: M (massa), \vec{L} (momento angular) e Q (carga elétrica). Dessa forma, existem quatro tipos de buracos negros:

1. Buraco Negro de Schwarzschild: $M \neq 0$, $\vec{L} = 0$ e $Q = 0$;
2. Buraco Negro de Reissner-Nordström: $M \neq 0$, $\vec{L} = 0$ e $Q \neq 0$;
3. Buraco Negro de Kerr: $M \neq 0$, $\vec{L} \neq 0$ e $Q = 0$;
4. Buraco Negro de Kerr-Newman: $M \neq 0$, $\vec{L} \neq 0$ e $Q \neq 0$.

A partir do início dos anos 70, uma série de trabalhos começaram a ser publicados mostrando que existiam inúmeras similaridades entre a física de buracos negros e a termodinâmica. A mais notável talvez seja a similaridade entre o comportamento da área de horizonte de eventos de buracos negros e a entropia: ambas quantidades tendem a aumentar de maneira irreversível. Tal propriedade foi pela primeira vez notada por Floyd e Penrose [12] em um exemplo de extração de energia de um buraco negro de Kerr através de um processo que veio a ser conhecido como Processo de Penrose [13]. Neste processo é proposto que o aumento da área de horizonte de eventos é uma característica geral em qualquer transformação de buracos negros. De forma independente, foi demonstrado por Christodoulou [14, 15] que, em nenhum processo em que o resultado final seja a captura de uma partícula por um buraco negro de Kerr, poderá haver o decréscimo de uma certa quantidade a qual ele chamou de Massa Irredutível de um buraco negro (M_{ir}).

De fato, na maioria das transformações, o resultado é o acréscimo da massa irredutível M_{ir} , com a exceção de certos tipos especiais de processos reversíveis, nos quais o valor de M_{ir} é mantido constante. No entanto, é verificado que este valor é proporcional à raiz quadrada da área do horizonte de eventos de um buraco negro [14, 15]. Assim, o resultado obtido por Christodoulou implica que a área¹ de um buraco negro aumenta na maioria dos processos e, dessa forma, corrobora a conjectura de Floyd e Penrose. A conclusão de Christodoulou também é válida para buracos negros de Kerr com carga elétrica (buracos negros de Kerr-Newman).

Através de uma abordagem completamente diferente de Christodoulou, S. Hawking [4] demonstrou, de forma bastante geral, que a superfície da área de um buraco negro não pode diminuir em qualquer processo. Para um sistema com vários buracos negros, o teorema de Hawking implica que a área de cada buraco negro individual não pode

¹ A partir deste ponto, sempre que aparecer no texto a expressão "área do buraco negro", subentende-se que nos referimos à área do horizonte de eventos do buraco negro.

diminuir, e mais ainda que, quando dois buracos negros se fundem, a área do buraco negro resultante não pode ser menor que a soma das áreas dos dois buracos negros que formaram este sistema. Dessa forma, fica claro que processos envolvendo buracos negros geralmente resultam na direção de um aumento da área de horizonte de eventos. Esta propriedade faz lembrar a segunda lei da termodinâmica, na qual mudanças nos estados de um sistema termodinâmico fechado apontam na direção de um aumento na entropia. Esta comparação motivou que muitos físicos considerassem a física de buracos negros através de uma perspectiva termodinâmica, percebendo que algo como entropia poderia ter um papel importante. Dessa forma, vários esforços foram realizados e a partir daí vários resultados foram obtidos [3, 4, 2, 5]. O principal resultado dessa linha de pesquisa teórica foi mostrar que talvez a Relatividade Geral e a Mecânica Quântica possam estar intimamente entrelaçadas pelas leis da termodinâmica. Neste ponto é importante ressaltar que a entropia de um buraco negro proposto por esta abordagem é diferente da noção de entropia e temperatura de um buraco negro no sentido térmico, convencional. Decidir se esta abordagem da relatividade geral como um fenômeno termodinâmico nada mais é do que uma analogia ou algo com sentido físico mais profundo ainda é uma questão em aberto.

2.2 Analogia entre Física de Buracos Negros e Termodinâmica

Na seção anterior mencionamos a semelhança entre a tendência da área de um buraco negro aumentar, assim como a tendência da entropia também aumentar. Transformações em um buraco negro ou em um sistema de buracos negros tendem para uma direção preferencial no tempo: aquela em que a área do buraco negro aumenta. Da mesma forma, transformações em um sistema termodinâmico fechado tendem para uma direção preferencial no tempo: aquela no qual a entropia aumenta. Em seu artigo de 1973 [3], Bekenstein demonstra que este paralelismo se mostra ainda mais profundo.

A área de um buraco negro se relaciona intimamente com a degradação da energia, tanto quanto esta degradação está relacionada à entropia. Em termodinâmica, a afirmação “a entropia foi aumentada” implica que uma certa quantidade de energia foi degradada, ou seja, esta energia agora não pode mais ser transformada em trabalho. Agora, como já enfatizado por Christodoulou [14, 15], a massa irreduzível M_{ir} de um buraco negro de Kerr, a qual é relacionada à área da superfície A do buraco negro por ²

$$M_{ir} = (A/16\pi)^{1/2}, \quad (2.1)$$

representa a energia que não pode ser extraída através de um processo de Penrose. Nesse sentido, a massa irreduzível é uma energia inerte que não pode mais ser transformada em

² É suposto que $G = c = 1$, a não ser que seja especificado algo diferente

trabalho. Dessa forma, um aumento em A (e conseqüentemente um aumento em M_{ir}), correspondem à degradação de alguma energia do buraco negro, no sentido termodinâmico.

A massa irreduzível de um buraco negro de Schwarzschild é igual à sua massa total. Assim, nenhuma energia pode ser extraída através de um processo de Penrose. Entretanto, a fusão de dois buracos negros de Schwarzschild pode produzir energia na forma de ondas gravitacionais [4]. A única restrição no processo é que a área total do buraco negro não pode diminuir como resultado da fusão [4]. Entretanto, a soma das massas irreduzíveis de buracos negros individuais devem diminuir. É demonstrado que, para um sistema com vários buracos negros, a energia degradada E_d é mais apropriadamente dada por

$$E_d = (\sum A/16\pi)^{1/2} = (\sum M_{ir}^2)^{1/2}, \quad (2.2)$$

do que por $\sum M_{ir}$. De acordo com esta fórmula, a energia degradada de um sistema de buracos negros é menor do que a soma das energias degradadas de buracos negros quando consideradas separadamente. Dessa forma, combinando buracos negros de Schwarzschild que já estão “mortos” (ou seja, sua massa total é a massa irreduzível), pode-se ainda obter energia que realiza trabalho [4]. Analogamente, permitindo-se que dois sistemas termodinâmicos que se encontram em equilíbrio, separadamente, interajam, pode-se obter trabalho, embora cada sistema isolado por si só já não pudesse mais realizar trabalho. Assim, fica evidente mais uma vez o paralelismo entre a área de buracos negros e entropia.

Bekenstein dessa forma propôs então [3] desenvolver uma formulação matemática para a entropia de buracos negros, através da construção de uma expressão análoga à expressão termodinâmica

$$dE = TdS - pdV. \quad (2.3)$$

Por conveniência, todas as equações estão escritas em termos da “área racionalizada” de um buraco negro α definida por

$$\alpha = A/4\pi. \quad (2.4)$$

Bekenstein [3] então considerou um buraco negro de Kerr-Newman (M , \vec{L} e Q diferentes de zero), onde os vetores tridimensionais são escritos em termos das componentes de um sistema de coordenadas euclidiano localizado no infinito. Dessa forma, a área racionalizada de um buraco negro é dada por

$$\begin{aligned} \alpha &= r_+^2 + a^2 \\ &= 2Mr_+ - Q^2, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde

$$\vec{a} = \vec{L}/M, \quad (2.6)$$

$$r_{\pm} = M \pm (M^2 - Q^2 - a^2)^{1/2}. \quad (2.7)$$

Diferenciando-se (2.5) e isolando-se o termo dM , obtém-se

$$dM = \Theta d\alpha + \vec{\Omega} \cdot d\vec{L} + \Phi dQ, \quad (2.8)$$

onde

$$\Theta \equiv \frac{1}{4}(r_+ - r_-)/\alpha, \quad (2.9)$$

$$\vec{\Omega} \equiv \vec{a}/\alpha, \quad (2.10)$$

$$\Phi \equiv Qr_+/\alpha. \quad (2.11)$$

Em (2.8) temos o análogo da expressão termodinâmica (2.3) para os buracos negros: os termos $\vec{\Omega} \cdot d\vec{L}$ e ΦdQ claramente representam o trabalho realizado sobre o buraco negro por um agente externo que aumenta o momento angular e a carga do buraco negro de $d\vec{L}$ e dQ , respectivamente. Assim $\vec{\Omega} \cdot d\vec{L} + \Phi dQ$ representa o análogo de $-pdV$, ou seja, o trabalho realizado sobre um sistema termodinâmico. Comparando-se a expressão (2.8) com as expressões de trabalho realizados sobre corpos em rotação [16] e corpos carregados [17], nota-se que $\vec{\Omega}$ e Φ representam, respectivamente, a frequência angular rotacional e o potencial elétrico do buraco negro [15], [18]. O termo α em (2.8) se assemelha à entropia S em (2.3) como mencionado anteriormente. Para qualquer processo de transformação no buraco negro $d\alpha \geq 0$, enquanto que para qualquer mudança de um sistema termodinâmico fechado $dS \geq 0$. Além disso, fica claro de (2.7) e (2.9) que Θ , o análogo dos buracos negros para a temperatura T , é não negativo como no caso de T . Logo a correspondência formal entre (2.3) e (2.8) torna-se evidente. Neste ponto Bekenstein [3] ressalta que as analogias até então apresentadas, que conectam a termodinâmica com a física de buracos negros e a área com a entropia, são de natureza formal, pois entropia e área apresentam dimensões físicas diferentes. Bekenstein então propõe uma solução para este problema derivando-se uma expressão para a entropia de buracos negros, com as dimensões corretas, a partir do ponto de vista da teoria da informação.

2.3 Teoria da Informação e Entropia de Buracos Negros

A conexão entre entropia e informação é bem conhecida [19]. A entropia de um sistema mede a incerteza ou a falta de informação sobre qual estado, entre todos possíveis, o sistema termodinâmico se encontra em um determinado instante. Suponha que tudo que se saiba sobre a configuração interna de um sistema é que este deva estar em uma das várias possibilidades de estados com probabilidade p_n para o n -ésimo estado. Então a entropia associada à este sistema pode ser dada pela fórmula de Shannon [19]:

$$S = - \sum p_n \ln(p_n). \quad (2.12)$$

Esta fórmula é determinada unicamente por uma pequena quantidade de requisitos bem gerais, que impõe que S tenha uma série de propriedades esperadas para uma função que meça incerteza. Vale a pena aqui ressaltar que esta medida de entropia é adimensional. Isto significa que escolhemos medir temperatura em unidades de energia. Dessa forma a constante de Boltzmann se torna adimensional. Sempre que uma nova informação sobre o sistema é obtida, este processo acaba por impor restrições às probabilidades p_n . Por exemplo, a informação obtida pode ser a de que vários dos p_n se anulam. Tais restrições aos p_n resultam em um decréscimo da entropia. Esta propriedade é formalizada pela relação:

$$\Delta I = -\Delta S, \quad (2.13)$$

onde ΔI corresponde à nova informação que resulta em um decréscimo ΔS na incerteza sobre a configuração interna do sistema.

Um exemplo familiar da relação entre ganho de informação e decréscimo de entropia é a de um gás ideal comprimido isotermicamente em um recipiente fechado. É bem conhecido que sua entropia decresce. Por outro lado, a informação sobre a configuração interna do gás aumenta: após a compressão as moléculas do gás estarão mais localizadas. Logo as posições destas moléculas se restringirão a um volume menor, o que significa mais precisão na informação sobre a localização das moléculas.

A segunda lei da termodinâmica é facilmente compreendida no contexto da teoria da informação. A entropia de um sistema termodinâmico que não se encontra em equilíbrio aumenta, pois a informação sobre a configuração interna do sistema está sendo perdida durante sua evolução devido à extinção dos efeitos de sua condição inicial. É possível para um agente causar um decréscimo na entropia de um sistema através da obtenção de informação sobre a configuração interna do sistema. O exemplo clássico para este fenômeno é conhecido como *demônio de Maxwell*, um experimento mental proposto pelo físico de mesmo nome em 1871, que sugeria que a segunda lei da termodinâmica seria verdadeira apenas estatisticamente. A experiência do demônio de Maxwell propõe um

processo que permite retornar a um estado de temperatura desigual, sem que se gaste energia e diminuindo-se a entropia, o que seria, em princípio, impossível - sempre de acordo com a segunda lei da termodinâmica. Maxwell argumentou que a presença de um ente inteligente microscópico violaria essa lei. Esse minúsculo ser inteligente, mais tarde chamado “demônio”, conseguiria observar o estado microscópico de um sistema físico e aproveitar a ocorrência de flutuações favoráveis para diminuir a entropia. Segundo Maxwell: “*Se concebermos um ser cujas faculdades são tão aguçadas que ele consegue acompanhar cada molécula em seu curso, esse ser, cujos atributos são ainda essencialmente tão finitos quantos os nossos, seria capaz de fazer o que atualmente nos é impossível fazer. Vimos que as moléculas em um recipiente cheio de ar, a uma temperatura uniforme, movem-se com velocidades que não são de modo algum uniformes. Suponhamos agora que tal recipiente é separado em duas porções, A e B, por meio de uma divisória na qual há um pequeno orifício, e que um ser, que pode ver as moléculas individuais, abre e fecha este orifício, de forma a permitir que somente as moléculas mais rápidas passem de A para B, e somente as mais lentas passem de B para A. Ele irá portanto, sem nenhum trabalho, elevar a temperatura de B e baixar a de A, contradizendo a segunda lei da termodinâmica.*” Mas a informação nunca é de graça. Ao se adquirir a informação sobre o sistema, o agente inevitavelmente causa um aumento na entropia no restante do universo que excede ΔI [20]. Assim, embora em um primeiro momento se chegue a conclusão de que a entropia de um sistema decresça, em acordo com (2.13), a entropia total do universo aumenta neste processo.

A unidade convencional de informação é o *bit*, que pode ser definido como a informação acessível quando a resposta para uma pergunta do tipo *sim ou não* é precisamente conhecida (entropia nula). De acordo com (2.13), um *bit* é numericamente equivalente à máxima entropia que pode ser associada à uma pergunta do tipo *sim ou não*, ou seja, a entropia quando nenhuma informação sobre a pergunta está disponível. Pode-se notar facilmente que o valor máximo de (2.12) neste contexto é quando $p_{sim} = p_{n\tilde{a}o} = 1/2$. Assim, nesta unidade, um *bit* equivale à $\ln 2$ de informação.

Tanto quanto um sistema em equilíbrio pode ser completamente descrito macroscopicamente por uma pequena quantidade de parâmetros termodinâmicos (como pressão, temperatura, etc.), também um buraco negro em equilíbrio (de Kerr, por exemplo) pode ser completamente descrito por apenas três parâmetros: *massa, carga e momento angular*. Buracos negros diferentes podem apresentar os mesmos valores para estes três parâmetros e no entanto terem diferentes “*configurações internas*”. Por exemplo, um buraco negro pode ter sido formado pelo colapso de uma estrela (quando esta deixa de realizar fusão nuclear de seus elementos químicos já esgotados, sucumbindo sobre si mesma), o segundo pelo colapso de uma estrela de nêutrons (instantes antes da explosão, a região central da estrela se contrai com a gravidade, fazendo com que elétrons sejam empurrados para os núcleos dos átomos e se combinem com prótons formando nêutrons), um terceiro pelo

colapso de uma *geon* (ondas eletromagnéticas ou gravitacionais que são confinadas em uma região do espaço através da atração gravitacional gerada pela própria energia dos campos), etc. Estas várias alternativas podem ser relacionadas com diferentes possibilidades de configurações internas ao mesmo tempo que todas apresentam, em comum, parâmetros como massa, carga e momento angular. Torna-se então natural introduzirmos o conceito de entropia do buraco negro como a medida da *inacessibilidade* de informação (para um observador externo) do que qual configuração interna específica (ou a probabilidade de tal configuração) é de fato “encontrada” no interior de um buraco negro.

Como já mencionado anteriormente, é importante ressaltar que a entropia de buracos negros aqui discutida não se refere à entropia térmica de um buraco negro. De fato, a entropia aqui discutida se refere à classe de equivalência de todos os buracos negros que contém a mesma massa, carga e momento angular e não à um buraco negro específico. Como já discutido intensamente nas seções anteriores, a medida da entropia de um buraco negro será medida em termos de sua área racionalizada α .

2.4 Expressão para a Entropia de um Buraco Negro

Como argumentado por Bekenstein [3], é assumido que a entropia de um buraco negro deve ser uma função *monotonicamente crescente* de α da seguinte forma:

$$S_{bn} = f(\alpha). \quad (2.14)$$

Após alguns argumentos, Bekenstein então conclui que devemos esperar que $f(\alpha)$ seja linear

$$S_{bn} = \gamma\alpha, \quad (2.15)$$

onde γ é uma constante. Como veremos mais a frente, através de outras hipóteses já mencionadas anteriormente, veremos que a equação (2.15) é a hipótese correta. De acordo com (2.12), S_{bn} tem que ser adimensional. Logo γ deve ter como unidade (comprimento)⁻². A única constante universal que apresenta esta unidade é o inverso do comprimento de Planck ao quadrado (l_p^{-2}). Logo a fórmula (2.15) fica melhor escrita da seguinte forma³

$$S_{bh} = \eta\hbar^{-1}\alpha, \quad (2.16)$$

onde η é adimensional. Uma partícula então que seja capturada pelo buraco negro deverá causar um aumento na entropia da seguinte forma: antes de ser capturada pelo buraco negro, um observador externo pode afirmar que a resposta para a pergunta “*a partícula existe ou não?*” é *sim* antes da partícula ser capturada. Depois de capturada,

³ Os valores de c e G , na unidade considerada, são ambos igual a 1.

um observador externo então já não pode mais conferir uma resposta exata para esta pergunta. Logo, como argumentado anteriormente, Bekenstein postula que um *bit* de informação é perdido, equivalente a uma perda de $\ln 2$ na informação. Em [3], Bekenstein então demonstra que esta perda de informação equivale a um acréscimo na área de um buraco negro tal que:

$$\Delta\alpha_{min} = 2\mu b, \quad (2.17)$$

onde b é o raio próprio da partícula e μ a sua massa. Para uma partícula pontual ($b=0$), teremos que $\Delta\alpha=0$, recuperando assim o resultado obtido por Christodoulou. A equação (2.17) fornece o aumento mínimo possível na área de horizontes de um buraco negro. Como argumentado por Bekenstein, b não pode ser menor que o comprimento de onda de Compton da partícula ou seu raio gravitacional 2μ , qualquer que seja o maior. Baseado neste argumento, Bekenstein então demonstra que os efeitos quânticos determinam que o mínimo valor de $\Delta\alpha$ quando um buraco negro de Kerr captura uma partícula é $2\hbar$. Logo, de (2.14) teremos que

$$dS = \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} d\alpha. \quad (2.18)$$

Substituindo os valores $\Delta S_{min} = \ln 2$ e $\Delta\alpha_{min} = 2\hbar$ em (2.18), teremos

$$\begin{aligned} \ln 2 &= 2\hbar \frac{df}{d\alpha} \\ \frac{1}{2}(\ln 2)\hbar^{-1}d\alpha &= df \\ f &= \frac{1}{2}(\ln 2)\hbar^{-1}\alpha. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Este resultado mostra que a hipótese proposta em (2.14) parece correta. Em unidades convencionais teremos que

$$\begin{aligned} S_{bn} &= \frac{1}{2} \frac{(\ln 2)}{4\pi} k c^3 \hbar^{-1} G^{-1} A \\ &= (1.46 \times 10^{48} \text{ erg K}^{-1} \text{ cm}^{-2}) A \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde k é a constante de Boltzmann. Com este resultado, podemos verificar que a entropia de um buraco negro é enorme, o que caracteriza o alto grau de irreversibilidade do processo de formação do buraco negro.

2.5 Princípio Holográfico e Gravitação

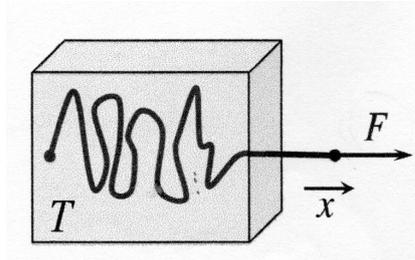
Um dos grandes desafios teóricos da física nos dias atuais, se não o maior, é o de unificar a gravitação com mecânica quântica. É conhecido que tentativas de unificação destas duas teorias, em níveis microscópicos, levam a muitos problemas, paradoxos e dúvidas. Talvez esta abordagem não seja a correta. Dessa forma, inspirado pelas semelhanças entre gravitação e as leis termodinâmicas, Verlinde [2] propõe uma outra abordagem para a solução deste enigma, através do entendimento da força gravitacional como sendo uma *força entrópica*, de tal forma que a ideia fundamental necessária para se derivar gravitação é a informação. Mais precisamente, é a quantidade de informação associada com a matéria e sua localização, independente da forma da dinâmica microscópica, medida em termos de entropia. Variações na entropia quando a matéria é deslocada originam uma força entrópica, que pode tomar a forma de gravidade, como demonstrado por Verlinde [2]. A hipótese mais importante será a de que a informação está associada com uma parte do espaço através do *princípio holográfico*, que basicamente diz que toda informação contida em um volume do espaço pode estar armazenada em uma superfície plana em duas dimensões. Uma forte evidência a favor desta hipótese são os trabalhos de Bekenstein [3] e Hawking [4, 21]. O resultado mais interessante e promissor desta abordagem é que ela mostra que a gravitação pode ser derivada de princípios bastante gerais que são independentes dos detalhes específicos da teoria microscópica.

2.5.1 Força Entrópica

Uma força entrópica é uma força macroscópica efetiva originada em um sistema, com muitos graus de liberdade, através da tendência estatística do aumento da entropia. A equação de força é expressa em termos de diferenças na entropia e é independente dos detalhes da dinâmica microscópica. Neste caso, não existe um campo fundamental associado à força entrópica. Talvez o exemplo mais conhecido de uma força entrópica é a elasticidade de uma molécula de um polímero. Uma única molécula de um polímero pode ser construída através da junção de muitos monômeros de comprimento fixo, aonde cada monômero pode rotacionar livremente em torno dos pontos de ligação e direcionar seu eixo principal em qualquer direção espacial. Cada uma dessas configurações apresenta a mesma energia. Existem muito mais estados quando a molécula é curta comparada à quantidade de estados possíveis quando a molécula é esticada. A tendência estatística de retornar a um estado de máxima entropia origina uma força macroscópica, neste caso, a força elástica.

Através do uso de uma pinça, podemos puxar uma das extremidades do polímero e trazê-lo para uma posição fora do equilíbrio, através de uma força externa F (figura 1). Por conveniência, consideremos a outra extremidade fixa na origem de um sistema de coordenadas e puxamos a outra extremidade ao longo do eixo x . Dessa forma, a entropia

Figura 1 – Polímero articulado livre imerso em um banho térmico com temperatura T é puxado para fora de seu estado de equilíbrio (força F). A força entrópica aponta em sentido oposto.



Fonte: Verlinde, 2010.

deste sistema pode ser escrita na seguinte forma

$$S(E, x) = k_B \ln \Omega(E, x), \quad (2.21)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann e $\Omega(E, x)$ se refere o volume do espaço de configurações de todo o sistema como uma função da energia total E do banho térmico e a posição x da extremidade movida. A dependência em x é de natureza totalmente configuracional: não há nenhuma contribuição para a energia E que dependa de x . No ensemble canônico, a força F é introduzida na função partição da seguinte forma

$$Z(T, F) = \int dE dx \Omega(E, x) e^{-(E+Fx)/k_B T}, \quad (2.22)$$

ou seja, como uma variável externa devido ao comprimento x do polímero. A força F necessária para manter o polímero com um comprimento fixo x , para uma dada temperatura E , pode ser deduzida das seguintes equações:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}, \quad (2.23)$$

$$\frac{F}{T} = \frac{\partial S}{\partial x}. \quad (2.24)$$

Através da análise do balanço de forças, a força externa F deve ser igual, em módulo, à força entrópica, que tenta restaurar o polímero para a sua posição de equilíbrio. Uma força entrópica se caracteriza pelo fato de apontar sempre no sentido de um aumento da entropia e de ser proporcional à temperatura. Para o polímero, pode se mostrar que a força obedece a lei de Hooke

$$F_{polimero} \approx -constante \cdot k_B T \langle x \rangle. \quad (2.25)$$

Este exemplo deixa claro que em um nível microscópico uma força entrópica pode ser conservativa, pelo menos quando a temperatura é mantida constante. A energia potencial correspondente não apresenta significado microscópico nenhum, entretanto, é emergente.

É interessante estudar o balanço de energia e entropia quando permitimos que o polímero retorne à sua posição de equilíbrio gradualmente, ao mesmo tempo em que se permita que a força realize trabalho sobre um sistema externo. Pela conservação da energia, este trabalho deve ser igual à energia extraída do banho térmico. Dessa forma, a entropia do banho térmico será reduzida. Para um banho térmico infinito, este valor deve ser o quanto aumenta a entropia do polímero. Assim, nessa situação, a entropia total se mantém constante. Esta situação pode ser estudada de forma mais detalhada no ensemble microcanônico, pois na energia total é contabilizada a energia do banho térmico. Para a determinação da força entrópica, mais uma vez introduzimos uma força externa F e examinamos o balanço de forças. Consideramos que o ensemble microcanônico é dado por $\Omega(E + Fx, x)$ e impomos que a entropia seja extrema. Isto resulta em

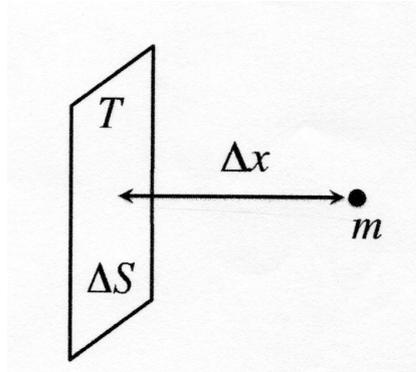
$$\frac{d}{dx}S(E + Fx, x) = 0 \quad (2.26)$$

Pode-se verificar facilmente que esta equação leva à mesmas equações (2.23) e (2.24). Entretanto, no ensemble micro-canônico a temperatura, em geral, é dependente da posição e a força é dependente da energia. O termo Fx pode ser entendido como a energia adicionada ao sistema devido ao esticamento do polímero, que o afasta da sua posição de equilíbrio. Esta equação então nos diz que a energia total é reduzida quando o polímero retorna lentamente para sua posição de equilíbrio, mas que a entropia, em uma primeira aproximação, se mantém constante.

2.5.2 Leis de Newton a Partir do Princípio Holográfico

Para a derivação das leis de Newton através do princípio holográfico, Verlinde [2] argumenta que o espaço pode ser entendido como um estratagema, um meio, introduzido para descrever posições e movimentos de partículas. Dessa forma o espaço nada mais é que um local de armazenagem de informação associada à matéria. Para que possamos recuperar a noção de gravidade, faz-se necessário que esta informação seja armazenada em superfícies planas, ou *telas holográficas*, que nada mais são do que as unidades que surgem a partir da discretização da superfície holográfica. Verlinde então nomeia cada unidade como um *bit*. Dado que a quantidade máxima de informação permitida é finita para cada parte do espaço, é impossível localizar uma partícula com precisão infinita em um ponto de um espaço contínuo. De fato, pontos e coordenadas surgem como conceitos derivados, e não fundamentais. Se assumirmos que a informação é armazenada em pontos de um espaço discretizado (como em um modelo de redes), sem a possibilidade de duplicação

Figura 2 – Uma partícula de massa m se aproxima de uma superfície holográfica. A superfície limita a parte emergida do espaço, que contém a partícula, e armazena dados que descrevem a parte do espaço ainda não emergida.



Fonte: Verlinde, 2010.

desta informação, não obteríamos uma descrição holográfica e nem se conseguiria recuperar a gravitação. Dessa forma, como já dito anteriormente, Verlinde postula que a informação é armazenada em superfícies que separam os pontos do espaço. Assim, tais superfícies tornam-se o local natural para se armazenar informação sobre partículas que se movem de um ponto a outro, ou em termos da superfície que separa estes pontos, de um lado para outro. De um lado teremos espaço e a partícula e do outro nada. Este conceito é conhecido como *espaço emergente*, e é um conceito radicalmente diferente do conceito de espaço do ponto de vista da Relatividade Geral. É assumido que a teoria microscópica tenha uma noção de tempo bem definida e que sua dinâmica seja invariante na translação temporal. Isto permite que se possa definir energia e, através da aplicação de técnicas de física estatística, temperatura. Em conjunto com entropia associada à quantidade de informação, estas hipóteses formam os ingredientes básicos para o desenvolvimento desta teoria.

2.5.2.1 Força e Inércia

Inspirado pela derivação de Bekenstein [3] para a fórmula da entropia de um buraco negro, Verlinde propõe uma abordagem semelhante não mais nas proximidades da área de um buraco negro, mas em um espaço plano não relativístico. Verlinde considera uma pequena área de uma superfície holográfica e uma partícula de massa m que se aproxima desta superfície do lado do qual o espaço já foi emergido (figura 2). Eventualmente a partícula se funde com os graus de liberdade sobre a superfície, mas antes que isso aconteça, a partícula influencia a quantidade de informação que é armazenada na superfície. Motivado pelo argumento de Bekenstein, Verlinde postula que a mudança na entropia associada com a informação na superfície vale

$$\Delta S = 2\pi k_B, \quad (2.27)$$

quando

$$\Delta x = \frac{\hbar}{mc}. \quad (2.28)$$

Verlinde então reescreve a fórmula para a variação da entropia de forma um pouco mais geral, assumindo que a mudança na entropia próxima à superfície holográfica é linear com o deslocamento Δx

$$\Delta S = 2\pi k_B \frac{mc}{\hbar} \Delta x. \quad (2.29)$$

Para entender porque ΔS também é proporcional à massa m , considere a situação em que uma partícula é dividida em duas ou mais sub-partículas. Cada sub-partícula carrega então sua própria mudança na entropia associada após um deslocamento Δx . Como entropia e massa são ambas aditivas, é natural então concluir que uma variação na entropia seja proporcional à massa. Mas como surge a força nesse contexto? Segundo Verlinde, utilizando-se da analogia de um processo de osmósi através de uma membrana semi-permeável, quando uma partícula tem uma justificativa entrópica para estar de um lado da membrana e a membrana apresenta uma certa temperatura, sobre a partícula atuará uma força efetiva tal que

$$F\Delta x = T\Delta S. \quad (2.30)$$

Esta é a força entrópica. Dessa forma, para que se tenha uma força não nula, faz-se necessário uma temperatura diferente de zero. Da segunda lei de Newton, sabemos que uma força não nula leva à uma aceleração diferente de zero. Mas é bem sabido que aceleração e temperatura estão intimamente relacionadas pela radiação de Unruh. Como demonstrado, um observador em um referencial acelerado experimentará uma temperatura tal que

$$k_B T = \frac{1}{2\pi} \frac{\hbar a}{c}, \quad (2.31)$$

onde a representa a aceleração. Verlinde então assume que esta é a temperatura associada à superfície holográfica. Combinando a equação (2.31) com as equações (2.29) e (2.30), obtemos a segunda lei de Newton

$$F = ma. \quad (2.32)$$

Segundo Verlinde, a equação (2.31) pode ser entendida como que temperatura T é necessária para que se cause uma aceleração igual a a . E não da forma usual, como a temperatura causada pela aceleração.

2.5.2.2 Lei de Newton para a Gravidade

Para se derivar a lei de Newton de gravitação, Verlinde considera uma superfície holográfica esférica, onde no centro desta esfera encontra-se o objeto de massa M . Logo, o número total de *bits* é proporcional à área A da esfera holográfica. Denotando-se o número total de *bits* por N , Verlinde então escreve que

$$N = \frac{Ac^3}{G\hbar}, \quad (2.33)$$

onde é introduzida uma nova constante: G . Como veremos mais a frente, esta constante será identificada com a constante gravitacional de Newton, mas como ressaltado por Verlinde, até este momento não foi assumida a existência de uma força gravitacional. Então, a única hipótese feita até aqui é a que diz que o número de *bits* é proporcional à área A . Verlinde então assume que a energia, seja ela de qual natureza for, é igualmente dividida entre todos os *bits*. Logo a temperatura deste sistema é determinada pela lei de equipartição

$$E = \frac{1}{2}Nk_B T, \quad (2.34)$$

como a energia média por *bit*. Verlinde então associa esta energia a

$$E = Mc^2, \quad (2.35)$$

onde M representa a massa que deve emergir na parte do espaço circundada pela superfície holográfica. (veja a figura 3). Ainda que consideremos que a massa não seja diretamente visível no espaço emergido, sua presença é notada através de sua energia.

De (2.34) temos que

$$T = \frac{2E}{Nk_B}. \quad (2.36)$$

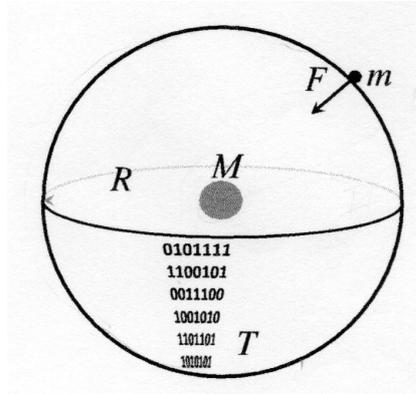
Substituindo o resultado de (2.35) na equação acima, teremos

$$T = \frac{2Mc^2}{Nk_B}. \quad (2.37)$$

Da expressão de N em (2.33) podemos reescrever que

$$T = \frac{2Mc^2}{4\pi R^2} \frac{G\hbar}{c^3 k_B}, \quad (2.38)$$

Figura 3 – Uma partícula de massa m próxima a uma superfície holográfica esférica. A energia é igualmente distribuída entre os *bits* ocupados, e é equivalente à massa M que deve emergir dentro da parte do espaço encerrado pela superfície.



Fonte: Verlinde, 2010.

onde usamos $A = 4\pi R^2$. De (2.30) temos que T pode ser substituído por $F(\Delta x/\Delta S)$. Logo, de acordo com (2.27) e (2.28)

$$F \frac{\hbar}{mc} = \frac{2Mc^2}{4\pi R^2} \frac{G\hbar}{c^3 k_B} 2\pi k_B. \quad (2.39)$$

Cancelando-se os termos teremos a conhecida lei de Newton para a gravitação

$$F = G \frac{Mm}{R^2}. \quad (2.40)$$

Como ressaltado por Verlinde, a lei de gravitação de Newton foi recuperada a partir de princípios básicos desta teoria e joga uma nova luz sobre as origens desta força: trata-se de uma força de natureza entrópica! Este talvez seja o principal resultado obtido por Verlinde. Se verdade, tal resultado pode levar a profundas consequências sobre a natureza do espaço-tempo.

2.5.2.3 Inércia e Potencial Gravitacional de Newton

Em um segundo momento, Verlinde [2] mostra que até este ponto, a discussão se deu de forma quase estática, ou seja, nada até então foi afirmado sobre como o espaço se conecta em diferentes instantes. Para isso Verlinde reconsidera o caso em que uma partícula de massa m se aproxima da tela holográfica. Esta massa deve surgir com os graus de liberdade microscópicos sobre a tela, e dessa forma a massa será feita dos mesmos *bits* que estão na tela. Como cada *bit* contém $\frac{1}{2}k_B T$ de energia, o número n de *bits* será determinado por

$$mc^2 = \frac{1}{2}nk_B T. \quad (2.41)$$

Inserindo-se esta relação na equação (2.29) e utilizando-se de (2.31), a variação da entropia pode ser expressa em termos da aceleração como

$$\frac{\Delta S}{n} = k_B \frac{a \Delta x}{2c^2}. \quad (2.42)$$

Dessa forma, Verlinde conclui que a aceleração está relacionada intimamente à um gradiente de entropia. Ou seja *inércia é uma consequência do fato de que uma partícula em repouso continuará em repouso porque, neste caso, o gradiente de entropia é nulo*. Dessa forma, Verlinde introduz o potencial newtoniano ϕ e escreve a aceleração como um gradiente

$$\vec{a} = -\vec{\nabla}\phi. \quad (2.43)$$

Isso permite expressar a variação na entropia de forma concisa

$$\frac{\Delta S}{n} = -k_B \frac{\Delta\phi}{2c^2}. \quad (2.44)$$

Assim o potencial newtoniano passa a ter um importante papel nesta teoria, como argumentado por Verlinde: ele matém o controle do esgotamento da entropia por *bit*. Além disso, o potencial newtoniano estipula uma direção preferencial no espaço, determinada por $\vec{\nabla}\phi$.

2.5.2.4 Equação de Poisson para uma distribuição geral de matéria

Nesta parte de seu trabalho, Verlinde propõe uma superfície holográfica equipotencial fechada, contendo em seu interior uma distribuição de matéria dada por $\rho(x)$, com potencial newtoniano igual a ϕ_0 . As partículas testes encontram-se todas do lado de fora da superfície holográfica fechada. Para explicar a força que atua sobre as partículas testes, novamente determinamos o trabalho realizado pela força e mostramos que este trabalho pode ser naturalmente escrito em termos da variação da entropia multiplicado pela temperatura. No caso de simetria esférica, a temperatura sobre a superfície holográfica equipotencial é constante. Já para este caso, nada neste sentido pode ser afirmado. Entretanto, Verlinde argumenta que localmente podemos definir uma temperatura e entropia por unidade de área. Verlinde então define a temperatura localmente da seguinte forma: posicionando-se uma partícula teste para próximo da superfície holográfica equipotencial e medindo-se sua aceleração. Com este raciocínio, Verlinde define a temperatura como:

$$k_B T = \frac{1}{2\pi} \frac{\hbar |\vec{\nabla}\phi|}{c}. \quad (2.45)$$

Aqui a derivada é feita no sentido da direção normal que aponta para fora da superfície holográfica. Verlinde ressalta que ϕ é introduzido como uma espécie de recurso para se descrever a aceleração local, mas nada foi dito sobre se ϕ satisfaz alguma equação que o relaciona com a distribuição de massa $\rho(x)$. O próximo passo é a determinação da densidade de *bits* sobre a superfície holográfica. Novamente Verlinde assume que esses *bits* se distribuem de maneira uniforme. Logo a equação (2.33) é generalizada da seguinte forma

$$dN = \frac{c^3}{G\hbar} dA. \quad (2.46)$$

Neste ponto, vamos impor o análogo da relação de equipartição proposta em (2.34). Esta relação assumirá a forma de uma expressão de integral para a energia tal que

$$E = \frac{1}{2} k_B \int_S T dN. \quad (2.47)$$

Substituindo-se o valor de E por $Mc^2 = \int_V \rho(\vec{r}) c^2 d^3x$ e o valor de $k_B T$ pela expressão (2.45), teremos que

$$\int_V \rho(\vec{r}) c^2 d^3x = \frac{1}{4\pi G} \int_S \vec{\nabla} \phi \cdot dA, \quad (2.48)$$

onde V é o volume encerrado pela superfície holográfica. Esta última expressão nada mais é que a lei de Gauss para o campo gravitacional newtoniano. Segundo Verlinde, esta relação deve ser válida para qualquer superfície holográfica fechada equipotencial. Quando um *bit* de massa é adicionado à região encerrada pela superfície S , por exemplo, colocando-se uma partícula com massa próxima à superfície holográfica e em seguida “empurrando-a” para dentro, a massa total M deve variar de acordo com esta adição. Essa condição só pode ser satisfeita de forma geral se o potencial ϕ satisfizer a equação de Poisson

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = 4\pi G \rho(\vec{r}). \quad (2.49)$$

Ou seja, através de uma identificação natural para temperatura e densidade de informação sobre a superfície holográfica, Verlinde destaca que as leis de gravitação newtoniana surgem de uma maneira direta e natural.

2.5.2.5 Princípio Holográfico e Relatividade Geral

Neste mesmo trabalho [2], Verlinde continua a desenvolver suas ideias que relacionam entropia e gravitação. Através de um estudo bastante interessante, Verlinde também demonstra que o princípio de equivalência e a equação de Einstein podem ser obtidas e

entendidas a partir desta abordagem entrópica. Este estudo, infelizmente, se encontra além das possibilidades deste trabalho, mas vale a pena ressaltar que tal investimento teórico já foi realizado. Outra excelente referência é o trabalho de Ted Jacobson [5] onde este obtém as equações de Einstein não a partir do conceito de métrica, mas como um fenômeno entrópico. Dessa forma, conclui Jacobson, a equação de Einstein para a Relatividade Geral passa a ser entendida como uma equação de estado.

3 Teoria Estatística de Tsallis

3.1 Introdução

Ao longo da história, uma série de debates aconteceram entre os físicos referente às interpretações e controvérsias sobre os fundamentos da mecânica estatística. Tal situação acabou por gerar posições contraditórias sobre o tema na comunidade científica [22]. Em 1902, três décadas após Ludwig Boltzmann ter publicado seu primeiro trabalho completo sobre mecânica estatística, Josiah Willard Gibbs, no prefácio de seu *Princípios Elementares em Mecânica Estatística* [23], escreve: “*Certainly, one is building on an insecure foundation...*” ¹. Ainda nos dias de hoje, não é simples se sentir realmente confortável em relação aos fundamentos da mecânica estatística obtidos a partir de seus primeiros princípios, segundo Tsallis [24]. Motivado por este pensamento, Tsallis então propõe uma generalização desta teoria física, generalização tal que veio a ser chamada de *Mecânica Estatística Não-Extensiva*. A principal característica que diferencia esta teoria em relação à teoria de Boltzmann-Gibbs é a inserção do parâmetro de não extensividade q . Quando $q = 1$, a estatística de Boltzmann-Gibbs é recuperada, reestabelecendo-se as características de aditividade e extensividade peculiares à esta teoria.

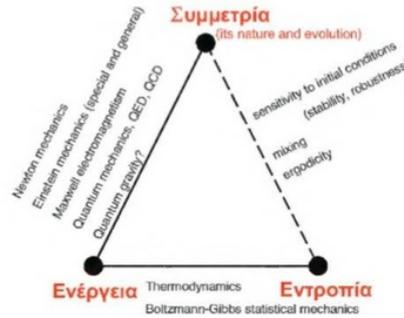
Segundo Tsallis, juntamente com o conceito geométrico de *simetria*, nada mais básico que *energia* e *entropia* merecem o título de *pilares* da física moderna. Ambas as definições são extremamente sutis. De qualquer maneira, *energia* se refere às *possibilidades* enquanto *entropia* se refere às *probabilidades* destas possibilidades. Talvez um dos conceitos físicos mais intrigantes e motivadores para a comunidade científica seja o conceito de *entropia* e sua conexão com calor, informação e o próprio tempo. Esta última conexão talvez seja a mais óbvia e, por isso mesmo, a mais difícil de se apropriar de forma plena. Antes que o leitor desqualifique esta afirmação, pense como seria o Universo se a entropia não fosse como ela se apresenta para nós? Somos capazes de imaginar um Universo não entrópico? Acredito que não. Motivado por esta questão, passaremos ao próximo tópico, onde Tsallis [24] discute as relações que existem entre *simetria*, *energia* e *entropia* e em que estágio de entendimento destas relações nos encontramos.

3.2 Simetria, Energia e Entropia

Neste ponto, vamos focar sobre algumas conexões entre três conceitos chave da física: *simetria*, *energia* e *entropia* (Figura 4). De acordo com Platão, *simetria* se encontra em *Topos Ouranos* (céu), aonde se encontram todos os ramos da matemática - a ciência das estruturas. Em contraste, *energia* e *entropia* se encontram em *Physis* (natureza). *Energia* se refere às possibilidades do sistema enquanto *entropia* se refere às

¹ “*Certamente, está se construindo (a teoria mecânica estatística) sobre fundamentos incertos...*”

Figura 4 – Simetria, energia e entropia



Fonte: Tsallis, 2009.

probabilidades destas possibilidades. É correto dizer que energia trata de um conceito físico bastante sutil. Entropia é baseada sobre os “ingredientes” da energia, e dessa forma está, epistemologicamente falando, um passo além. Provavelmente, por conta desta característica, é que o conceito de entropia tenha surgido, na história da física, bem depois do surgimento do conceito de energia.

As conexões entre simetria e energia são bem conhecidas. A invariância de Galileu para as equações de Newton na mecânica clássica desempenha um papel fundamental. A energia se expressa de forma cinética para uma partícula pontual, dada por $p^2/2m$, onde p representa o momento linear da partícula e m a massa. Esta energia, embora apresente uma única forma, não é universal, pois depende do valor de m . Se substituirmos a invariância de Galileu pela invariância de Lorentz, a forma da energia muda drasticamente para $(p^2c^2 + m_0^2c^4)^{1/2}$, onde c representa a velocidade da luz no vácuo e m_0 a massa de repouso. Em outras palavras, a mudança na simetria está longe de ser inócua: simplesmente faz com que a física do sistema mude da mecânica newtoniana clássica para relatividade especial! O eletromagnetismo de Maxwell também está profundamente relacionado à esta mesma invariância de Lorentz, tanto quanto à invariância de gauge. Esta última desempenha um papel fundamental também em eletrodinâmica quântica e teoria quântica de campos. Ou seja, as profundas conexões entre simetria e energia são bastante conhecidas na física contemporânea. Mudanças em uma são seguidas por mudanças na outra.

E o que dizer sobre as conexões entre energia e entropia? Bem, estas também são bastante conhecidas. Elas naturalmente surgem em termodinâmica na forma de possibilidades e caminhos de transformação de trabalho em calor e vice-versa. Tais fenômenos são bem conhecidos da mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs.

Mas o que dizer das possíveis conexões entre simetria e entropia? Este assunto vem se mantendo imutável ao longo da história, provavelmente por conta da aparente característica universal que a fórmula de entropia de Boltzmann-Gibbs apresenta, dependendo de apenas uma constante universal, k_B , a constante de Boltzmann. Esta característica

faz parecer que a entropia física deva ser *universal* e, obviamente, corretamente representada pela fórmula da entropia de Boltzmann-Gibbs (e suas formas análogas: contínuas ou quânticas). Tsallis argumenta que talvez esta afirmação possa não ser verdadeira e procura mostrar em seu livro [24] que muitos tipos de entropia podem ser fisicamente e matematicamente significativos. Mais ainda, Tsallis diz que conceitos dinâmicos como a dependência temporal da sensibilidade às condições iniciais, mistura, níveis de ocupação podem causar fortes efeitos de tal maneira que, em alguns casos, a forma da entropia deva ser modificada. A entropia de Boltzmann-Gibbs ainda terá uma posição privilegiada. Será ainda a forma funcional correta para a entropia nos casos em que a dinâmica não-linear microscópica é controlada por expoentes de Lyapunov *positivos*, que evidenciam uma forte característica caótica do sistema. Se o sistema é tal que tal propriedade não se apresenta (por exemplo, quando o expoente máximo de Lyapunov se anula), então a forma funcional da entropia física do sistema, aparentemente, se apresenta de forma diferente da tradicional forma de Boltzmann-Gibbs.

3.3 Teoria Estatística de Tsallis

A primeira forma funcional para entropia foi proposta por Boltzmann [25, 26] nos anos de 1870 e refinada alguns anos mais tarde por Gibbs [23] para sistemas mais gerais. Para um conjunto com W estados, cada qual com sua probabilidade p_i , a entropia de Boltzmann-Gibbs, S_{BG} , é escrita como

$$S_{BG} = -k_B \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i, \quad (3.1)$$

com a condição

$$\sum_{i=1}^W p_i = 1, \quad (3.2)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann. Para o caso em que as probabilidades de cada estado são iguais, ($p_i = 1/W$) a equação (3.1) se torna

$$S_{BG} = k_B \ln W, \quad (3.3)$$

expressão esta esculpida no túmulo de Boltzmann em Viena por sugestão de Planck. Uma propriedade importante de (3.1) é a *aditividade*. Se um sistema for composto de dois subsistemas A e B , com o número de estados denotados respectivamente por W_A e W_B , tal que as probabilidades de cada estado sejam independentes, ou seja, $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B (\forall (i, j))$, então a entropia S_{BG} é *aditiva*, ou seja:

$$S_{BG}(A + B) = S_{BG}(A) + S_{BG}(B). \quad (3.4)$$

Segundo Tsallis, não existe nenhum procedimento lógico-dedutivo, nenhuma regra, para a generalização de qualquer teoria física. Tais generalizações ocorrem através de *metáforas*.² Tsallis então apresenta sua *metáfora* para uma possível generalização da teoria estatística de Boltzmann-Gibbs.

A equação diferencial ordinária mais simples que pode ser considerada é

$$\frac{dy}{dx} = 0, (y(0) = 1). \quad (3.5)$$

Sua solução é

$$y = 1, \quad (3.6)$$

com a seguinte curva simétrica em relação ao eixo da bissetriz dos eixos x e y

$$x = 1. \quad (3.7)$$

A segunda equação diferencial mais simples que podemos imaginar é

$$\frac{dy}{dx} = 1, (y(0) = 1). \quad (3.8)$$

Sua solução é

$$y = 1 + x, \quad (3.9)$$

com a função inversa dada por

$$y = x - 1. \quad (3.10)$$

Agora consideremos a seguinte equação

$$\frac{dy}{dx} = y, (y(0) = 1), \quad (3.11)$$

cuja solução é

$$y = e^x. \quad (3.12)$$

Sua função inversa será

² Na opinião do autor desta dissertação, tal afirmação parece ser um tanto quanto pobre. *Intuição* talvez seja a palavra-chave. Segundo Einstein, “*A imaginação é mais importante que o conhecimento*”. Esta frase talvez tenha muito mais significado quando o assunto for generalização de teorias.

$$y = \ln x, \quad (3.13)$$

e, obviamente, satisfaz a seguinte propriedade

$$\ln(x_A x_B) = \ln x_A + \ln x_B. \quad (3.14)$$

É possível unificar estas três equações diferenciais (3.5), (3.8) e (3.11)? De fato, sim. Basta considerar

$$\frac{dy}{dx} = a + by, (y(0) = 1), \quad (3.15)$$

e manipular os parâmetros a e b . E ainda, é possível unificar estas três equações com um parâmetro somente? Sim, mas a equação torna-se *não-linear*. Considere a seguinte equação

$$\frac{dy}{dx} = y^q, (y(0) = 1; q \in \mathbb{R}). \quad (3.16)$$

Sua solução é

$$y = [1 + (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}} \equiv e_q^x, (e_1^x = e^x). \quad (3.17)$$

Sua função inversa será

$$y = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \equiv \ln_q x, (x > 0; \ln_1 = \ln x), \quad (3.18)$$

e satisfaz a seguinte propriedade

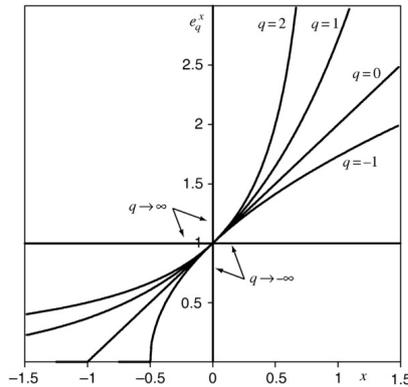
$$\ln_q(x_A x_B) = \ln_q x_A + \ln_q x_B + (1 - q)(\ln_q x_A)(\ln_q x_B). \quad (3.19)$$

É possível verificar imediatamente que para $q \rightarrow -\infty$, $q = 0$ e $q = 1$, recuperamos precisamente as equações (3.5), (3.8) e (3.11), respectivamente. A partir deste ponto, Tsallis então passa a se referir às equações (3.17) e (3.18) como *q-exponencial* e *q-logaritmo*, respectivamente. Tsallis então postula sua generalização para a teoria estatística de Boltzmann e Gibbs, substituindo $\ln W$ de (3.3) por:

$$S_q = k_B \ln_q W, \quad (3.20)$$

para o caso de probabilidades iguais p_i para cada estado do conjunto $\{p_i\}$ de W .

De forma mais geral, Tsallis escreve a forma funcional generalizada da entropia da seguinte forma

Figura 5 – A função q -exponencial.

Fonte: Tsallis, 2009.

$$S_q = k_B \langle \ln_q(1/p_i) \rangle, \quad (3.21)$$

utilizando-se da seguinte relação

$$\langle \ln_q(1/p_i) \rangle = - \sum_{i=1}^W p_i \ln_q(p_i). \quad (3.22)$$

Substituindo a equação (3.18) nesta expressão, obtemos

$$S_q = k_B \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q - 1}. \quad (3.23)$$

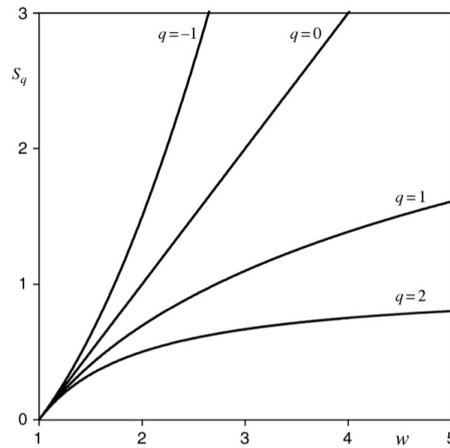
Esta é precisamente a forma postulada em [27] como uma possível generalização para a mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs. Esta forma generalizada já havia aparecido na literatura em aplicações para cibernética e teoria de controle. Tal formulação foi redescoberta de forma independente em [27], quando proposta pela primeira vez como ponto de partida para a generalização da mecânica estatística.

3.3.1 Propriedades

3.3.1.1 Não-negatividade

Se existe certeza sobre o estado de um sistema, então uma das probabilidades será igual a 1 e todas as outras se anulam. Consequentemente, a entropia S_q se anula para todo q . Se não existe certeza, então pelo menos duas probabilidades são menores que 1 (e maiores que zero). Dessa forma, $1/p_i > 1$, assim $\ln_q(1/p_i) > 0, \forall i$ (figura 6). Consequentemente, analisando-se a equação (3.21), imediatamente se segue que $S_q > 0$ para todo q .

Figura 6 – A entropia S_q com probabilidades iguais como função do número de estados W (com $k = 1$), para valores típicos de q .



Fonte: Tsallis, 2009.

3.3.1.2 Extremos em Probabilidades Iguais

Pela mesma razão que para o caso da entropia de Boltzmann-Gibbs, para os casos em que as probabilidades p_i são iguais, S_q deve ser um extremo. Quando $q > 0$, S_q é *máximo* e quando $q < 0$, S_q é *mínimo* [24]. Para o caso $q = 0$, temos que a entropia S_q se torna constante. Neste caso, S_0 é

$$S_0 = k(W - 1) \quad (\forall \{p_i\}).$$

3.3.1.3 Expansibilidade

Podemos concluir diretamente que S_q é *expansível*, ou seja

$$S_q(p_1, p_2, \dots, p_W, 0) = S_q(p_1, p_2, \dots, p_W). \quad (3.25)$$

Esta propriedade é facilmente verificável a partir da definição (3.23) se $q > 0$. Para os casos em que $q < 0$, a soma em (3.23) se dá somente para os termos em que a probabilidade do estado é positiva, definição estabelecida por Tsallis em [24].

3.3.1.4 Não-Aditividade

Se A e B são dois subsistemas *independentes*, ou seja, se a probabilidade conjunta satisfaz $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B (\forall (ij))$, então

$$\frac{S_q(A+B)}{k_B} = \frac{S_q(A)}{k_B} + \frac{S_q(B)}{k_B} + (1-q) \frac{S_q(A)}{k_B} \frac{S_q(B)}{k_B}. \quad (3.26)$$

É devido a esta propriedade que, para $q \neq 1$, S_q é designada como *não-aditiva*. Entretanto, modificações drásticas acontecem quando dois subsistemas A e B são correlacionados de maneira especial. Como mostrado por Tsallis em [24], um valor de q deve existir tal que, estritamente ou assintoticamente ($N \rightarrow \infty$), $S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B)$. Em outras palavras, a entropia não-aditiva S_q pode ser extensiva para $q \neq 1$.

Dada a não-negatividade de S_q , segue-se que, para sistemas *independentes*, $S_q(A+B) \geq S_q(A) + S_q(B)$, se $q < 1$, e $S_q(A+B) \leq S_q(A) + S_q(B)$ para $q > 1$. Consistentemente, os casos $q < 1$ e $q > 1$ são chamados na literatura de *super-aditivo* e *sub-aditivo*, respectivamente.

3.3.1.5 Concavidade e Convexidade

A derivada à segunda da função contínua $x(1-x^{q-1})/(q-1)$ é *negativa* (*positiva*) para $q > 0$ ($q < 0$). Consequentemente, para $q > 0$, temos que

$$\frac{p_i''[1-(p_i'')^{q-1}]}{q-1} > \lambda \frac{p_i[1-(p_i)^{q-1}]}{q-1} + (1-\lambda) \frac{p_i'[1-(p_i')^{q-1}]}{q-1} \quad (\forall i, 0 < \lambda < 1). \quad (3.27)$$

Aplicando-se $\sum_{i=1}^W$ em ambos os lados desta desigualdade, obtém-se imediatamente que

$$S_q(p_i'') > \lambda S_q(p_i) + (1-\lambda) S_q(p_i') \quad (q > 0). \quad (3.28)$$

Estas desigualdades são invertidas para $q < 0$. Dessa forma, fica provado que S_q é *côncava* (*convexa*) para $q > 0$ ($q < 0$). Um corolário imediato é que para o caso de probabilidades iguais para todos os estados, corresponderá a um *máximo* para $q > 0$, enquanto que para $q < 0$ corresponderá a um *mínimo*. (figura 7)

3.3.1.6 Conexão com a Derivada de Jackson

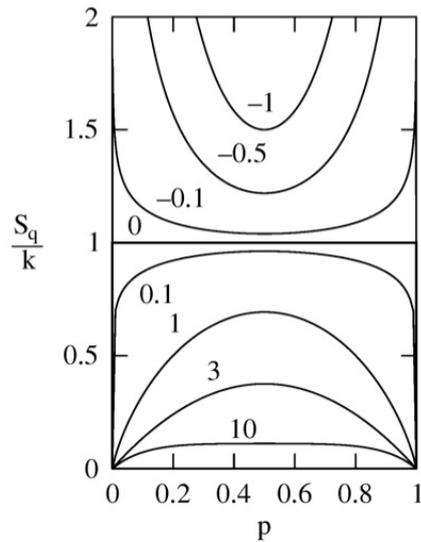
Há cerca de um século atrás, o matemático Jackson generalizou o conceito de derivada de uma função genérica $f(x)$. Ele introduziu um operador diferencial D_q tal que

$$D_q f(x) \equiv \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}. \quad (3.29)$$

Verifica-se imediatamente que $D_1 f(x) = df(x)/dx$. Para $q \neq 1$, este operador substitui a usual (infinitesimal) operação *translação* sobre a abscissa x da função $f(x)$ por uma operação *dilatação*.

Abe destacou uma importante propriedade deste operador [28]. Da mesma forma que podemos verificar facilmente que

Figura 7 – A dependência de p da entropia quando $W = 2$, $S_q = [1 - p^q - (1 - p)^q]/(q - 1)$ para valores típicos de q (com $S_1 = -p \ln p - (1 - p) \ln(1 - p)$).



Fonte: Tsallis, 2009.

$$S_{BG} = -\frac{d}{dx} \sum_{i=1}^W p_i^x \Big|_{x=1}, \quad (3.30)$$

podemos verificar que

$$S_q = -D_q \sum_{i=1}^W p_i^x \Big|_{x=1}. \quad (3.31)$$

Tsallis considera então esta uma propriedade inspiradora [24], onde a usual operação translação infinitesimal é substituída por uma operação finita que, neste caso, é básica para uma invariância de escala. Desde que o postulado da entropia S_q foi inspirado em geometria multifractal, pode-se dizer que esta propriedade é bastante bem-vinda.

4 Outros Resultados da Teoria Estatística de Tsallis

Plastino e Lima [29], utilizando-se de uma distribuição de velocidades generalizada para partículas livres, derivaram uma lei de equipartição de energia não-extensiva tal que

$$E = \frac{1}{5 - 3q} N k_B T, \quad (4.1)$$

com o intervalo de q sendo $0 \leq q < 5/3$, por razões óbvias. Para $q = 5/3$ (valor crítico), a expressão da equipartição de energia (4.1) diverge. Para $q = 1$, o teorema clássico de equipartição de energia para cada grau de liberdade é recuperado.

Outro resultado bastante interessante foi obtido em [30]. Neste trabalho, os autores obtiveram que a entropia de Tsallis pode ser escrita como

$$S_q = k_B \frac{\Gamma^{q-1} - 1}{q - 1}, \quad (4.2)$$

onde Γ é proporcional ao volume, ou seja, podemos definir $\Gamma \equiv V$. Considere que uma certa medida linear seja dada por L , tal que $\Gamma \equiv V = L^3$. Substituindo este valor de Γ em (4.2), teremos que

$$\Gamma^{q-1} = L^{3(q-1)}. \quad (4.3)$$

Assim, é fácil perceber que para $q = 5/3$ obtemos $\Gamma = L^2 \rightarrow S_q \propto L^2 = A$, e podemos dizer então que, neste caso, a entropia na equação (4.2) é função da área, sendo esta expressão nada mais que a lei de entropia para a área do horizonte de eventos de um buraco negro. A principal consequência deste resultado é a de que, devido à não-extensividade da entropia em (4.2), uma superfície holográfica, que desempenha um papel fundamental no formalismo de Verlinde [2], é originada.

Em [1] é desenvolvida uma aplicação do teorema de equipartição não-extensivo no formalismo de Verlinde, onde a lei de equipartição em (2.41) é substituída pela lei de equipartição não-extensiva (4.1). Desenvolvendo-se os cálculos através dos mesmos procedimentos utilizados por Verlinde (mostrados no capítulo anterior desta dissertação), em [1] é obtido uma forma modificada da aceleração dada por

$$a = G_{NE} \frac{m}{r^2}, \quad (4.4)$$

onde G_{NE} representa a constante gravitacional efetiva dada por

$$G_{NE} = \frac{5 - 3q}{2} G. \quad (4.5)$$

Do resultado acima, podemos observar que a constante gravitacional efetiva depende do parâmetro de não-extensividade q . Por exemplo, para $q = 1$ teremos que $G_{NE} = G$ e para $q = 5/3$ teremos o curioso e hipotético resultado no qual $G_{NE} = 0$. Este resultado mostra que o valor $q = 5/3$ é um limite superior quando trabalhamos com superfícies holográficas.

Tais resultados motivaram os autores de [1] a apresentar um cálculo preliminar do limite do parâmetro de não-extensividade q . Da equação (4.5) é possível obter um limite para o parâmetro de Tsallis a partir de dados experimentais da constante gravitacional. Por exemplo, resultados recentes de CODATA [31] mostram que

$$G = 6.67384(80) \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}, \quad (4.6)$$

com uma incerteza relativa de 1.2×10^{-4} . Da equação (4.5) podemos escrever que

$$1 - q = \frac{2}{3} \frac{G_{NE} - G}{G}. \quad (4.7)$$

Assumindo-se que o lado direito da equação (4.9) é a incerteza, então

$$|q - 1| \leq O \cdot 10^{-4}. \quad (4.8)$$

No limite em que $|q - 1| \approx 0$, a entropia de Boltzmann-Gibbs é recuperada. Em [1], é realizado uma análise onde o teorema de equipartição generalizado, representado pela equação (4.1), é inserido no formalismo de Verlinde. Dessa forma, os *bits* agora obedecem à uma mecânica estatística não-extensiva. É assumido então que o número total de *bits* é dado por

$$N = \frac{A}{l^2}, \quad (4.9)$$

onde A vale $4\pi r^2$ e l é um comprimento fundamental diferente de l_p , o comprimento de Planck. Então, considerando-se $E = mc^2$, com a massa m localizada no centro de uma superfície holográfica esférica fechada, e combinando-se as equações (2.31), (4.1) e (4.9), podemos escrever que

$$a = \frac{5 - 3q}{2} \frac{l^2 c^3 m}{\hbar r^2}. \quad (4.10)$$

Podemos reescrever esta equação da seguinte forma:

$$a = G \frac{m}{r^2}, \quad (4.11)$$

onde a constante de Newton G é dada por

$$G = \frac{5 - 3q}{2} \frac{l^2 c^3}{\hbar}. \quad (4.12)$$

Como $l_p = \sqrt{G\hbar/c^3}$, teremos que

$$l_p^2 = \frac{5 - 3q}{2} l^2. \quad (4.13)$$

Para $q = 1$ temos que $l_p^2 = l^2$. Da equação podemos ver que o comprimento fundamental de Planck também pode depender do parâmetro de não-extensividade q .

5 Gravitação Entrópica e Não-Comutatividade

5.1 Introdução

Em um recente trabalho de 2011, C. Bastos, O. Bertolami e outros [6], inspirados por uma característica intrínseca à teoria de cordas, argumentam que uma propriedade esperada na estrutura do espaço-tempo é a de não-comutatividade. O papel que a não-comutatividade no espaço de configurações deve exercer na derivação da gravidade entrópica foi considerado e aplicado em [32]. Entretanto, tem-se mostrado que a não-comutatividade no espaço de fases é crucial no entendimento de problemas em cosmologia quântica [7, 8], na termodinâmica de buracos negros de Schwarzschild [9] e no problema da singularidade de buracos negros [10, 11]. Dessa forma, em [6] é proposta uma formulação mais geral de não-comutatividade no contexto de uma derivação entrópica da lei de Newton para gravitação. É assumido que o espaço-tempo é governado por uma geometria baseada em uma álgebra não-comutativa canônica no espaço de fases. Em duas dimensões, tal teoria foi estudada no contexto do poço quântico gravitacional [33, 34]. Mas pode-se facilmente considerar a seguinte generalização para um espaço com d dimensões

$$[\hat{q}'_i, \hat{q}'_j] = i\theta_{ij}, \quad [\hat{q}'_i, \hat{p}'_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [\hat{p}'_i, \hat{p}'_j] = i\eta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, d, \quad (5.1)$$

onde η_{ij} e θ_{ij} são constantes reais antissimétricas de uma matriz $(d \times d)$ e δ_{ij} é a matriz identidade.

Esta álgebra estendida é relacionada à tradicional álgebra de Heisenberg-Weyl, a saber

$$[\hat{q}'_i, \hat{q}'_j] = 0, \quad [\hat{q}'_i, \hat{p}'_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [\hat{p}'_i, \hat{p}'_j] = 0, \quad i, j = 1, \dots, d, \quad (5.2)$$

através de uma classe de transformações lineares não-canônicas. Na literatura matemática, este mapeamento entre variáveis é chamado de mapa de Darboux, enquanto em física, a designação mapa de Seiberg-Witten é mais usada. Estas transformações não são únicas. De fato, a composição de um mapa de Darboux com uma transformação simplética (canônica) fornece um mapa de Darboux igualmente válido. Mas é importante ressaltar que todas as previsões físicas (valores esperados, auto-valores, probabilidades) são independentes da escolha particular do mapa de Darboux [35, 36].

5.2 Gravitação Entrópica e Não-Comutatividade no Espaço de Fases

Nesta seção, vamos mostrar o trabalho desenvolvido em [6] que propõe uma descrição das superfícies holográficas levando-se em conta propriedades de uma geometria não-comutativa. O ponto de partida é assumir que a área da célula unitária de uma superfície holográfica seja escrita da seguinte forma

$$l_p^2 = a_0 \rightarrow a_{NC} = \frac{G\hbar_{eff}}{c^3}, \quad (5.3)$$

lembrando que o número de *bits* da superfície holográfica dado por (2.33) pode ser expresso como

$$N = \frac{Ac^3}{G\hbar} = \frac{A}{a_0}. \quad (5.4)$$

Aqui \hbar_{eff} define uma constante de Planck efetiva que leva em conta efeitos de não-comutatividade. Conseqüentemente, a temperatura em (2.38) se altera para

$$T = \frac{G\hbar_{eff}}{ck_B} \frac{M}{2\pi r^2}. \quad (5.5)$$

Como o comprimento de onda de Compton não corresponde à uma área, é assumido que este comprimento se mantém inalterado pelas propriedades não-comutativas e ainda que a equação (2.29)

$$\Delta S_{NC} = \Delta S = 2\pi k_B \frac{mc}{\hbar} \Delta x. \quad (5.6)$$

se mantém inalterada. Dessa forma, um simples cálculo mostra que a correção não-comutativa para a força (F_{NC}) é tal que

$$\frac{F_{NC}}{F} = \frac{\hbar_{eff}}{\hbar}. \quad (5.7)$$

O próximo passo é o de estimar o valor da constante de Planck efetiva. Esta constante está relacionada (a menos de uma constante multiplicativa) à célula unitária no espaço de fases. Para um sistema bidimensional, a mínima célula de um espaço de fases tem volume igual a \hbar^2 . Na presente situação, o que se busca é minimizar o seguinte volume funcional

$$V(\Delta x_1, \Delta p_1, \Delta x_2, \Delta p_2) = \Delta x_1 \Delta p_1 \Delta x_2 \Delta p_2, \quad (5.8)$$

sujeito às seguintes restrições

$$\Delta x_1 \Delta p_1 \geq \hbar/2, \quad \Delta x_1 \Delta x_2 \geq \theta_{12}/2, \quad (5.9)$$

$$\Delta x_2 \Delta p_2 \geq \hbar/2, \quad \Delta p_1 \Delta p_2 \geq \eta_{12}/2. \quad (5.10)$$

Devido à natureza destas restrições, este problema de otimização deveria, a princípio, ser solucionado através da aplicação do Teorema de Karush-Kuhn-Tucker [37]. Entretanto, este é de fato um problema mal posto, desde que não existe um minimizador do funcional de volume que satisfaça as restrições impostas por (5.9) e (5.10). De fato, tal situação é

esperada. É bem sabido que as relações quânticas de incerteza (5.9) e (5.10) não podem ser todas saturadas simultaneamente. Mais precisamente, um estado quântico pode saturar no máximo uma dessas condições [38, 39].

Assim, não existe um volume mínimo da célula do espaço de fases. Se escolhermos minimizar o produto $\Delta x_1 \Delta x_2$, que corresponde a $\theta_{12}/2$, então o funcional de volume será mínimo para $\Delta p_1 \Delta p_2 = \eta_{12}/2$. Juntando-se tudo, temos que

$$V(\Delta x_1, \Delta p_1, \Delta x_2, \Delta p_2) \geq \frac{\theta_{12} \eta_{12}}{4}. \quad (5.11)$$

Da mesma forma, se escolhermos minimizar o produto $\Delta x_1 \Delta p_1$, correspondente a $\hbar/2$, então o funcional de volume será mínimo para $\Delta x_2 \Delta p_2 = \hbar/2$, e assim

$$V(\Delta x_1, \Delta p_1, \Delta x_2, \Delta p_2) \geq \frac{\hbar^2}{4}. \quad (5.12)$$

Uma hipótese razoável para que (5.11) e (5.12) sejam satisfeitas é assumir que

$$V(\Delta x_1, \Delta p_1, \Delta x_2, \Delta p_2) \geq \frac{\hbar^2}{4} + \frac{\theta_{12} \eta_{12}}{4} \equiv \frac{\hbar_{eff}^2}{4}, \quad (5.13)$$

com

$$\hbar_{eff} = \hbar \left(1 + \frac{\theta_{12} \eta_{12}}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.14)$$

Assumindo que $\theta\eta \ll 1$, finalmente obtemos

$$F_{NC} = \frac{GMm}{r^2} \left(1 + \frac{\theta_{12} \eta_{12}}{2\hbar^2} \right). \quad (5.15)$$

Obviamente, o mesmo raciocínio pode ser aplicado para as outras componentes de posição e momento.

Resultados semelhantes são obtidos em [2] e [32] e diferenças de resultados e interpretações são discutidas em [6].

5.3 Princípio de Equivalência e Limites dos Parâmetros Não-Comutativos

Como mostrado na seção anterior, a força entrópica F pode sofrer uma correção devido à não comutatividade que a torna não isotrópica. Esta suposta anisotropia implica que a não-comutatividade irá afetar a queda gravitacional de objetos massivos em diferentes direções. A diferença relativa esperada entre as acelerações, por exemplo, ao longo do plano (1,2) com aceleração a_1 e ao longo do plano (2,3) com aceleração a_2 será

$$\frac{\Delta a}{a} \equiv 2 \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right) \approx \frac{1}{4\hbar^2} (\theta_{12} \eta_{12} - \theta_{23} \eta_{23}). \quad (5.16)$$

Dessa forma, como podemos perceber, este resultado define um limite sobre a anisotropia devido à não-comutatividade. Se, no entanto, é assumido que $\theta_{12}\eta_{12} \approx O(1)\theta_{23}\eta_{23} \equiv \theta\eta$, então o Princípio de Equivalência, cujo limite experimental mais rigoroso é dado por $\Delta a/a \leq 10^{-13}$ [28] pode ser utilizado como um limite sobre a quantidade adimensional $\theta\eta/\hbar^2$. Assim obtém-se

$$\frac{\theta\eta}{\hbar^2} \leq O(1) \times 10^{-13}. \quad (5.17)$$

Este limite estabelece que os efeitos de não-comutatividade podem ser 10 ordens de magnitude maior do que o discutido no contexto da não-comutatividade gravitacional do poço quântico [16]. Além do mais, não é pressuposto qualquer valor do parâmetro θ . Este limite implica que se, por exemplo, $\sqrt{\theta} \leq (10TeV)^{-1}$ como verificado a partir da invariância de Lorentz no setor eletromagnético da extensão do Modelo Padrão devido à não-comutatividade no espaço de configurações [29], então $\sqrt{\eta} \geq 10^{-4}GeV$. O limite inferior é insatisfatório já que implica que os efeitos não-comutativos já deveriam ter sido observados. Se no entanto assumimos que $\sqrt{\theta} \geq M_P^{-1}$, ou seja, que a escala característica de θ é essencialmente a escala de efeitos quânticos gravitacionais (massa de Planck, $M_P = L_P^{-1}$), então $\sqrt{\eta} \geq 10^{-6}M_P$. Esta é uma escala intermediária interessante. Neste ponto, avanços neste tema só serão possíveis através de novos resultados experimentais, via indentificação direta de efeitos não comutativos, ou através de limites mais rigorosos sobre a validade do Princípio de Equivalência.

5.4 Limite para o Parâmetro q através da Não-Comutatividade

De acordo com a equação (5.15), podemos escrever que a constante gravitacional de Newton não-comutativa é dada por

$$G_{NC} = G \left(1 + \frac{\theta\eta}{2\hbar^2} \right). \quad (5.18)$$

Da equação (4.5), podemos escrever que

$$G_{NE} = G \frac{5-3q}{2} = G \left[1 + \frac{3}{2}(1-q) \right]. \quad (5.19)$$

De acordo com esta última equação, é fácil verificar que quando $q = 1$ temos $G_{NE} = G$. Em [1] é realizado uma análise inversa. Segundo os autores, a motivação para se utilizar não-comutatividade foi a de estabelecer um novo limite para o parâmetro de Tsallis q . Ou seja, qual o valor de q tal que $G_{NE} = G_{NC}$? Para que tal situação ocorra, basta que as equações (5.18) e (5.19) sejam iguais. Assim

$$G\left(1 + \frac{\theta\eta}{2\hbar^2}\right) = G\left[1 + \frac{3}{2}(1 - q)\right]. \quad (5.20)$$

Dessa forma teremos que

$$\frac{\theta\eta}{2\hbar^2} = \frac{3}{2}(1 - q), \quad (5.21)$$

que representa a introdução do parâmetro não-comutativo no formalismo de Tsallis via q . Assim, o parâmetro q realiza a conexão entre as duas teorias, desde que o limite $|q - 1|$ possa ser calculado. Da equação (5.21) podemos concluir que é esperado que os valores para $|q - 1|$ sejam muito pequenos devido às propriedades na escala de Planck dos objetos não-comutativos envolvidos em (5.21).

A introdução de G_{NE} significa a introdução de uma geometria fractal no sistema original. Como a geometria fractal é conectada à geometria não-comutativa, no que se refere à objetos fractais, o princípio de auto-similaridade nega a noção para um simples ponto geométrico a ideia de diferenciabilidade.

Conseqüentemente, de (5.21) podemos escrever que

$$1 - q = \frac{\theta\eta}{3\hbar^2}. \quad (5.22)$$

Assim, devido a resultados experimentais obtidos em [37] obtemos que [40]

$$\frac{\theta\eta}{\hbar^2} \leq O(1) \cdot 10^{-13}, \quad (5.23)$$

e dessa forma teremos que

$$|q - 1| \leq O(1) \cdot 10^{-13}, \quad (5.24)$$

que estabelece um novo limite para o parâmetro de não-extensividade q . Este valor é 10^9 vezes abaixo dos limites obtidos em [24] e [25]. Este é considerado pelos autores de [1] o principal resultado obtido neste artigo.

Entretanto, como destacado em [1], é importante ressaltar que a equivalência $G_{NE} = G_{NC}$ não pode necessariamente ser aplicada para qualquer outro sistema físico. Faz-se necessário a continuidade destes estudos.

Da equação (4.5) vemos claramente que quando $q \rightarrow 1$ a teoria de Boltzmann é recuperada. Da equação (5.22) vemos que neste limite o termo $\theta\eta/3\hbar^2$ tende a zero, conseqüentemente também a contribuição não-comutativa. Assim, diferentemente de outros trabalhos, a recuperação da teoria de Boltzmann e a consideração do espaço não-comutativo não se dão mais em cenários diferentes, desde que o limite estabelecido em (5.24) seja obedecido.

6 Universo de Friedmann, Força Entrópica e Estatística Não-Extensiva de Tsallis

6.1 Equações de Friedmann a partir da Força Entrópica

Em um artigo do ano de 2010 [41], as equações de Friedmann de um universo com métrica FRW são derivadas a partir do uso dos conceitos de princípio holográfico em conjunto com a lei de equipartição e a temperatura Unruh, através da generalização de alguns argumentos de Verlinde [2] para a dinâmica espaço-temporal.

Considere o universo FRW com a métrica

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dr^2 + r^2d\Omega^2), \quad (6.1)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala do universo. Seguindo [2], considere uma região espacial compacta ν encerrada pela superfície compacta $\partial\nu$, idêntica à uma esfera de raio $\tilde{r}=ar$. A superfície compacta $\partial\nu$ age como a superfície holográfica. É assumido que o número de *bits* sobre a superfície é dado por

$$N = \frac{Ac^3}{G\hbar}, \quad (6.2)$$

onde A representa a área da superfície $\partial\nu$. Assumindo que a temperatura sobre esta superfície é T e de acordo com a lei de equipartição de energia, a energia total sobre a superfície é

$$E = \frac{1}{2}Nk_B T. \quad (6.3)$$

Além do mais, como em [2], é assumido que

$$E = Mc^2, \quad (6.4)$$

onde M representa a massa que deve emergir na região compacta espacial ν encerrada pela superfície $\partial\nu$.

Suponha que a fonte de matéria no universo FRW seja um fluido perfeito com o tensor momento energia dado por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}. \quad (6.5)$$

Devido à pressão, a massa total $M = \rho V$ na região encerrada pela superfície $\partial\nu$ não é mais conservada. A variação da massa total é igual ao trabalho feito pela pressão $dM = -pdV$, que leva à bem conhecida equação de continuidade

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (6.6)$$

onde $H = \dot{a}/a$ representa o parâmetro de Hubble.

A massa total na região espacial ν pode ser expressa como

$$M = \int_{\nu} dV (T_{\mu\nu} u^{\mu} u^{\nu}), \quad (6.7)$$

onde $T_{\mu\nu} u^{\mu} u^{\nu}$ é a densidade de energia medida por um observador comovente. Por outro lado, a aceleração para um observador comovente radial em r , ou seja, na superfície $\partial\nu$, é

$$a_r = -d^2\tilde{r}/dt^2 = -\ddot{a}r, \quad (6.8)$$

onde o sinal negativo surge por considerarmos que a aceleração é causada pela matéria contida na região espacial encerrada por $\partial\nu$. Note que a aceleração própria se anula para um observador comovente. Entretanto, a aceleração (6.8) é crucial nas discussões a seguir. De acordo com a fórmula de Unruh, é assumido que a aceleração corresponde à temperatura

$$T = \frac{1}{2\pi k_B c} \hbar a_r. \quad (6.9)$$

Agora basta derivar a seguinte equação a partir das equações (6.2), (6.3), (6.4), (6.7) e (6.9):

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} \rho a. \quad (6.10)$$

Isto é nada mais que a equação dinâmica para a cosmologia Newtoniana (página 10 em [42]). Note que a referência [42] deriva a equação (6.10) a partir da lei de Newton para a gravidade, enquanto em [41] esta mesma equação foi obtida levando-se em conta o princípio holográfico e a lei de equipartição de energia em física estatística.

Para se obter as equações de Friedmann em um universo FRW em relatividade geral, é importante ressaltar que a aceleração será resultado da chamada massa gravitacional ativa M_{ga} [43], em vez da massa total M contida na região espacial ν . A massa gravitacional ativa, conhecida também como massa de Tolman-Komar, é definida como

$$M_{ga} = 2 \int_{\nu} dV (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu}) u^{\mu} u^{\nu}. \quad (6.11)$$

Substituindo M por M_{ga} , temos neste caso

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p). \quad (6.12)$$

Esta é a equação da aceleração para a evolução dinâmica do universo FRW. Multiplicando-se $\dot{a}a$ em ambos os lados da equação (6.12), e utilizando-se da equação de continuidade (6.6), integra-se a equação resultante e então obtém-se

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho. \quad (6.13)$$

Note que k aparece em (6.13) como uma constante de integração, mas fica claro que a constante k tem a interpretação de representar a curvatura espacial da região ν na teoria gravitacional de Einstein. $k = 1, 0$ e -1 correspondem a um universo FRW fechado, plano e aberto, respectivamente.

O raciocínio acima pode ser estendido para qualquer espaço-tempo com dimensão $d \geq 4$. Neste caso, o número de *bits* sobre a superfície $\partial\nu$ é alterado para [2]

$$N = \frac{1}{2} \frac{d-2}{d-3} \frac{Ac^3}{G\hbar}. \quad (6.14)$$

A equação de continuidade torna-se $\dot{\rho} + (d-1)H(\rho + p) = 0$, e a massa gravitacional ativa M_{ga} é definida como

$$M_{ga} = \frac{d-2}{d-3} \int_{\nu} dV (T_{\mu\nu} - \frac{1}{d-2} T g_{\mu\nu}) u^{\mu} u^{\nu}. \quad (6.15)$$

A equação da aceleração (6.12) é modificada para

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{(d-1)(d-2)} ((d-3)\rho + (d-1)p). \quad (6.16)$$

Integrando-se (6.16), obtemos

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{16\pi G}{(d-1)(d-2)} \rho. \quad (6.17)$$

Esta equação nada mais é que a equação de Friedmann para o universo FRW em d dimensões.

Ou seja, as equações de Friedmann de um universo FRW foram derivadas a partir do princípio holográfico e da lei de equipartição de energia utilizando-se do argumento de Verlinde [2] que diz que a gravidade surge como uma força entrópica.

6.2 Equações de Friedmann Modificadas pela Teoria de Tsallis

Utilizando-se a equação (4.1), que representa a lei de equipartição de energia no conceito de estatística não-extensiva, e seguindo-se os mesmos passos da seção anterior, obtém-se a equação não-extensiva da aceleração para a evolução dinâmica do universo FRW

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -(5 - 3q) \frac{2\pi G}{3} (\rho + 3p), \quad (6.18)$$

e através de um cálculo direto pode-se escrever a equação de Friedmann não-extensiva

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{4(5 - 3q)\pi G}{3} \rho a^2. \quad (6.19)$$

Comparando-se esta equação com (6.13), conseqüentemente obtemos a equação (4.5), onde $G_{NE} = (5 - 3q)G/2$, que é o mesmo resultado mostrado anteriormente nesta dissertação. Dessa forma, este resultado é considerado em [1] como uma confirmação de que a lei de equipartição de energia não-extensiva introduz o parâmetro q de não-extensividade na constante gravitacional. Pode-se entender a equação (4.5) como o mapeamento numérico entre ambas as constantes de forma a produzir uma transformação direta de um conceito para o outro. Em outras palavras, pode-se dizer que uma simples substituição de G por G_{NE} determinada pela equação (4.5) produz a introdução do conceito de Tsallis em qualquer teoria. Por exemplo, é simples obter a generalização dimensional da equação de Friedmann em d dimensões. Esta equação torna-se

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G_{NE}}{(d-1)(d-2)} \rho, \quad (6.20)$$

onde G_{NE} é dado pela equação (4.5). Em [1] este resultado é considerado como uma confirmação de que é possível introduzir o princípio de não-extensividade em objetos cosmológicos como as equações de Friedmann. Como discutido anteriormente, teorias não-comutativas e teoria de Tsallis estão ambas conectadas pela natureza fractal de suas geometrias. E ainda que, como a natureza fractal não-comutativa é transportada pelo parâmetro não-comutativo, pode-se notar da equação (5.21) que sua conexão com o parâmetro não-extensivo q seria esperado. A seguir, será mostrado uma aplicação destas ideias em um nível cosmológico.

6.3 Análise de Parâmetros Cosmológicos

Em [1], são analisados alguns parâmetros cosmológicos à luz da estatística não-extensiva de Tsallis. O primeiro parâmetro analisado é o de densidade dado por

$$\Omega_M = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (6.21)$$

onde ρ_c é a densidade crítica que, para um universo plano com $k = 0$, é escrita como

$$H^2 - \frac{8}{3}\pi G \rho_c = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (6.22)$$

Da equação (4.5), temos que

$$\rho_c = \frac{3H^2(5-3q)}{16\pi G_{NE}}, \quad (6.23)$$

e se $q = 5/3$ teremos que $\rho_c = 0$. Para $\rho_c = 0$ temos que o Universo é fechado. Como já mencionado anteriormente, se $q = 1$ ($\Rightarrow G_{NE} = G$) a estatística de Boltzmann-Gibbs é recuperada e da equação (6.23) teremos que

$$\rho_c = \rho_c^{BG} = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (6.24)$$

que coincide com a equação (6.22).

De volta ao parâmetro de densidade, vamos substituir (6.23) em (6.21). Assim teremos que

$$\Omega_M = \frac{16\pi\rho G_{NE}}{3H(5-3q)}, \quad (6.25)$$

o qual, para um Universo plano, é igual a um, ou seja, $\Omega_M = 1$. Logo

$$\frac{16\pi\rho G_{NE}}{3H(5-3q)} = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{3}\left[5 - \frac{16\pi G_{NE}}{3H}\rho\right], \quad (6.26)$$

e assim obtemos uma relação direta entre q , a densidade de matéria e o parâmetro de Hubble para um Universo plano. Em (6.25), se $q = 5/3$ teremos que $\Omega_M \rightarrow \infty$, o que caracteriza um Universo fechado. Para $q < 5/3$ temos que Ω_M cresce em uma relação inversa com q . Podemos então concluir que q pode estar intrinsecamente relacionado à geometria do Universo.

Entretanto, com uma constante cosmológica, a densidade crítica torna-se uma quantidade não bem definida. Portanto, vamos descrever três quantidades bem conhecidas: a densidade de matéria, a densidade de energia e a densidade de curvatura do Universo. Estas três quantidades são dadas, respectivamente, por

$$\Omega_M = \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{16\pi G_{NE}\rho_0}{3H_0(5-3q)}, \quad (6.27)$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2}, \quad (6.28)$$

e ainda

$$\Omega_k = -\frac{k}{a_0^2 H_0^2}, \quad (6.29)$$

onde o índice zero denota “valor atual”.

Temos também a seguinte restrição

$$\Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1. \quad (6.30)$$

Para se avaliar, por exemplo, a relação entre esta restrição e considerações com o parâmetro q não-extensivo, vamos considerar um Universo plano, ou seja, $k = 0 \Rightarrow \Omega_k = 0$. Da equação (6.30) teremos que

$$\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_M \Rightarrow \Omega_\Lambda = 1 - \frac{16\pi G_{NE}\rho_0}{3(5 - 3q)H_0}, \quad (6.31)$$

e, como temos a condição $q < 5/3$, temos das equações (6.28) e (6.31) que, para um universo plano, a constante cosmológica será dada por

$$\Lambda = 3H_0 - \frac{16\pi G_{NE}\rho_0}{5 - 3q}, \quad (6.32)$$

que mostra uma relação não-linear entre a constante cosmológica e o parâmetro q .

Para finalizar esta seção, podemos ver que a consideração do princípio do parâmetro de não-extensividade pode levar à um tipo de perturbação dos parâmetros cosmológicos e da geometria do Universo. Esta perturbação se revela de tal forma que faz com que o parâmetro q possa ser um importante objeto em cosmologia. Pode-se ainda perguntar de que maneira os limites apresentados para o parâmetro q neste trabalho podem estar presentes ou causar perturbações nos atuais dados cosmológicos experimentais.

7 Conclusão

A principal motivação deste trabalho foi a de mostrar novas ideias sobre o problema teórico existente entre Relatividade Geral e Mecânica Quântica, apresentando propostas onde a similaridade entre R.G. e termodinâmica é explorada. Na primeira parte, o trabalho de 1973 de Bekenstein foi apresentado, mostrando de que forma a analogia entre a física de buracos negros e termodinâmica foi levada a um passo adiante. O principal resultado foi a obtenção de uma expressão matemática para a entropia do buraco negro do ponto de vista da teoria da informação. Aqui cabe ressaltar um possível problema desta derivação: a entropia de Boltzmann-Gibbs é função de uma certa quantidade de estados possíveis do sistema e suas probabilidades. A interpretação do ponto de vista de “quantidade de informação do sistema” é uma derivação conceitual, mas será esta interpretação suficiente para definir processos dinâmicos físicos? Na opinião deste autor, recuperar a noção de entropia no sentido original poderia ser um excelente avanço para esta teoria.

Em seguida, foi apresentado a teoria para gravitação de Verlinde, onde novos conceitos surgem, como Princípio Holográfico e Espaço Emergente. Segundo Verlinde, gravidade apresenta muitas evidências que a caracterizam como um fenômeno emergente. As similaridades com outros conhecidos fenômenos emergentes, como termodinâmica e hidrodinâmica, têm sido relacionadas na maioria das vezes somente como uma analogia sugestiva. Mas é tempo de refletir seriamente sobre esta similaridade e, quem sabe, não considerar mais a gravidade como uma força fundamental.

Continuando a análise de Verlinde, a descrição geométrica de Einstein do fenômeno gravitacional é bela, e com certeza muito atraente. O conceito de geometria espaço-temporal apresenta um forte apelo para a parte visual de nossas mentes e é surpreendentemente poderoso em resumir muitos aspectos do problema físico. Isto explica talvez, segundo Verlinde, a relutância da comunidade científica em abandonar a formulação geométrica da gravidade como sendo fundamental. Na opinião deste autor, conciliar a gravidade como força entrópica e sua formulação geométrica talvez seja o melhor caminho e, quem sabe, mostrar que são duas possibilidades de entendimento do mesmo fenômeno, assim como na mecânica clássica a abordagem newtoniana está para a abordagem hamiltoniana. De qualquer maneira, o entendimento do fenômeno gravitacional como uma força entrópica pode levar a importantes implicações para muitas áreas nas quais a gravitação tem um papel fundamental, como cosmologia por exemplo.

Em [2] são derivadas as equações de Einstein de forma análoga a trabalhos anteriores [5], propondo que a gravitação relativística possui uma origem entrópica ou termodinâmica. Além de derivá-las, Verlinde adiciona em seu trabalho um novo elemento, revelando quais são as origens de força e inércia em um contexto no qual o espaço é emergente. É identificada a causa, um mecanismo, para a gravidade. Ela é impulsionada pelas diferenças

na entropia, qualquer que seja a forma que esta é definida, resultado da dinâmica estatística aleatória média no nível microscópico. A razão pela qual gravidade tem que acompanhar a evolução das energias tanto quanto as diferenças de entropia agora é clara. Tem que ser assim pois é isto que causa o movimento.

Obviamente, esta abordagem pisa em um novo terreno desconhecido, como argumentado pelo próprio Verlinde. A natureza profunda destas questões justifica a abordagem heurística do problema e se encaixa com ideias existentes e com várias evidências.

No capítulo 4 é mostrada uma generalização para a derivação da lei de gravitação de Newton que acomoda efeitos não-comutativos no espaço de fases. As modificações foram feitas de tal forma que se obtivesse uma nova constante de Planck efetiva. Isto permitiu a derivação de uma lei de Newton para a gravidade corrigida para uma contribuição não-comutativa. A natureza anisotrópica da correção NC obtida implica em uma violação do Princípio de Equivalência, cujo limite experimental de sua validade sugere um limite bastante interessante sobre a anisotropia não-comutativa. Como resultado temos que o produto dos parâmetros do espaço de configurações e do espaço dos momentos não-comutativos em diferentes direções diferem de tal forma que $(\theta\eta)/\hbar^2 \leq O(1) \times 10^{-13}$.

Outro resultado obtido a partir das ideias de Verlinde é a derivação das equações de Friedmann a partir do princípio holográfico e da lei de equipartição de energia considerando a gravidade como força entrópica. No trabalho original de Verlinde, toda a discussão é feita para espaço-tempo estático ou estacionário. Ali os argumentos de Verlinde foram aplicados para um universo FRW, um espaço especial dinâmico, e foram obtidas as equações dinâmicas que governam a evolução do universo FRW. Além disso, ao derivar a lei de Newton para a gravidade, Verlinde considera uma superfície com raio fixo como sendo a superfície holográfica, e não leva em conta a evolução dinâmica do espaço de fundo. Na gravitação de Newton, isto está correto, já que este espaço de fundo é fixo. Já no caso do universo FRW, a superfície holográfica tem natureza dinâmica e pode ser entendida como a superfície esférica simétrica que envolve o universo de poeira de matéria.

Também foi apresentada a Teoria Estatística de Tsallis e suas propriedades, onde a principal característica é a inserção do parâmetro de não-extensividade q . Uma conexão foi estabelecida entre a teoria desenvolvida por Tsallis e geometria não-comutativa. A principal motivação para esta conexão é o fato de que ambas podem ser relacionadas a uma natureza fractal do espaço de fundo. Após este fato ser bem entendido, pode-se perguntar para quais valores do parâmetro q pode-se introduzir o parâmetro de não-comutatividade na Teoria de Tsallis. Foi demonstrado em [1] e apresentado aqui que este cálculo estabelece um novo limite para o parâmetro q na literatura. Além disso, é demonstrado que a relação entre G_{NE} e G pode também ser obtida através das equações de Friedmann. E, por fim, é analisada a influência que o princípio de não-extensividade pode exercer em outros parâmetros cosmológicos como densidade de energia, constante cosmológica, etc.

Com a aplicação da lei de equipartição não-extensiva no formalismo de Verlinde para a gravidade, foi obtida uma constante gravitacional efetiva que incorpora efeitos da estatística de Tsallis. E, por outro lado, foi utilizada a teoria não-comutativa para prever uma constante gravitacional efetiva.

Se considerarmos ambas as constantes gravitacionais (NC e NE) como sendo iguais, um novo limite para o parâmetro q de Tsallis é encontrado. O resultado do procedimento utilizado para se obter equações de Friedmann não-extensivas é simplesmente escrever a constante gravitacional usual como função da constante gravitacional não-extensiva efetiva.

REFERÊNCIAS

- [1] ABREU, E. M. C.; NETO, J. A.; MENDES, A. C. R.; OLIVEIRA, W.; *New bounds for Tsallis parameter in a noncommutative phase-space entropic gravity and nonextensive Friedmann equations*, arXiv:1204, v2, 2005.
- [2] VERLINDE, E.; *On the Origin of Gravity and the Laws of Newton*, arXiv:1001.0785v1, 2010.
- [3] BEKENSTEIN, J.D.; *Phy. Rev. D*, **7**, 2333, 1973.
- [4] HAWKING, S.W.; *Phys. Rev. Letters*, **26**, 1344, 1971.
- [5] JACOBSON, T.; *Thermodynamics of Spacetime: The Einstein Equation of State*, arXiv:gr-qc/9504004v2, 1995.
- [6] BASTOS, C.; BERTOLAMI, O.; DIAS, N. C.; PRATA, J. N.; *Entropic Gravity, Phase-Space Noncommutativity and the Equivalence Principle*, *Class. Quant. Grav.*, **28**, 125007, 2011.
- [7] BASTOS, C.; BERTOLAMI, O.; DIAS, N. C.; PRATA, J. N.; *Phys. Rev. D*, **78**, 023516, 2008.
- [8] BASTOS, C.; BERTOLAMI, O.; DIAS, N. C.; PRATA, J. N.; *Int. J. Mod. Phys. A*, **24**, 2741, 2009.
- [9] BASTOS, C.; BERTOLAMI, O.; DIAS, N. C.; PRATA, J. N.; *Phys. Rev. D*, **80**, 124038, 2009.
- [10] BASTOS, C.; BERTOLAMI, O.; DIAS, N. C.; PRATA, J. N.; *Rap. Comm. Phys. Rev. D*, **82**, 041502, 2010.
- [11] BASTOS, C.; BERTOLAMI, O.; DIAS, N. C.; PRATA, J. N.; *Non-Canonical Phase-Space Noncommutativity and the Kantowski-Sachs singularity for Black-Holes*, arXiv:1012.5523 [hep-th].
- [12] PENROSE, R.; FLOYD, R.M.; *Nature*, **229**, 177, 1971.
- [13] PENROSE, R.; *Riv. Nuovo Cimento*, **1**, 252, 1969.
- [14] CHRISTODOULOU, D.; *Phys. Rev. Letters*, **25**, 1596, 1970.
- [15] CHRISTODOULOU, D.; *Ph.D. thesis*, Princeton University, 1971 (não publicado).
- [16] LANDAU, L.D.; LIFSHITZ, E.M.; *Statistical Physics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.
- [17] LANDAU, L.D.; LIFSHITZ, E.M.; *Electrodynamics of Continuous Media*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.
- [18] CARTER, B.; *Nature*, 238, 1972.
- [19] SHANNON, C.E.; WEAVER, W.; *The Mathematical Theory of Communications*, University of Illinois Press., Urbana, 1949.

- [20] BRILLOUIN, L.; *Science and Information Theory*, Academic, New York, 1956.
- [21] HAWKING, S.W.; *Particle Creation By Black-Holes*, Commun Math. Phys., **43**, 199-220, 1975.
- [22] NICOLIS, G.; DAEMS, D.; *Probabilistic and thermodynamics aspects of dynamical systems*, Chaos **8**, 311, 1998.
- [23] GIBBS, J. W.; *Elementary Principles in Statistical Mechanics - Developed with Especial Reference to the Rational Foundation of Thermodynamics*, C. Scribner's Sons, New York, 1902; Yale University Press, New Haven, 1948; OX Bow Press, Woodbridge, Connecticut, 1981.
- [24] TSALLIS, C.; *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics - Approaching a Complex World*, Springer Science+Business Media, LLC, 233 Spring Street, New York, NY 10013, USA.
- [25] BOLTZMANN, L.; *Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gas molekülen [Further Studies on Thermal Equilibrium Between Gas Molecules]*, Wien, Ber., **66**, 275, 1872.
- [26] BOLTZMANN, L.; *Über die Beziehung eines allgemeine mechanischen Satzes zum zweiten Hauptsatze der Warmetheorie*, Sitzungsberichte, K. Akademie der Wissenschaften in Wien, Math. - Naturwissenschaften **75**, 67 (1877); English Translation (*On the Relation of General Mechanical Theorem to the Second law of Thermodynamics*) in S. Brush, *Kinetic Theory*, Vol. **2**; *Irreversible Processes*, 188, Pergamon Press, Oxford, 1966.
- [27] TSALLIS, C.; *Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics*, J. Stat. Phys. **52**, 479, 1998.
- [28] ABE S.; *Stability of Tsallis entropy and instabilities of Renyi and normalized Tsallis entropies*, Phys. Rev. E, **66**, 046134, 2002.
- [29] PLASTINO, A. R.; LIMA, J. A. S.; Phys. Lett. A, **260**, 46, 1999.
- [30] CANTCHEFF, M. B.; NOGALES, J. A. C.; Int. J. Mod. Phys. A, **21**, 3127, 2006.
- [31] Committe on Data for Science and Technology (CODATA), Rev. Mod. Phys., **84**, 1527, 2012.
- [32] NICOLINI, P.; Phys. Rev. D **82**, 044030, 2010.
- [33] BERTOLAMI, O.; ROSA, J. G.; ARAGÃO, C.; CASTORINA, P.; ZAPPALÀ, D.; Phys. Rev. D **72**, 025010, 2005.
- [34] BERTOLAMI, O.; ROSA, J. G.; ARAGÃO, C.; CASTORINA, P.; ZAPPALÀ, D.; Mod. Phys. Lett. A **21**, 795, 2006.
- [35] BASTOS, C.; BERTOLAMI, O.; DIAS, N. C.; PRATA, J. N.; J. Math. Phys. **49**, 072101, 2008.
- [36] BASTOS, C.; DIAS, N. C.; PRATA, J. N.; Comm. Math. Phys. **299**, 707, 2010.
- [37] JAHN, J.; *Introduction to the Theory of Nonlinear Optimization*, Springer, 1996.

- [38] BOLONEK, K.; KOSINSKI, P.; Phys. Lett. B **547**, 51, 2002.
- [39] KOSINSKI, P.; BOLONEK, K.; Acta Phys. Polon. B **34**, 2579, 2003.
- [40] SEIBERG, N.; WITTEN, E.; JHEP **9909**, 032, 1999.
- [41] CAI, R.G.; CAO, L.M.; OHTA, N.; Phys. Rev. D **81**, 061501(R), 2010.
- [42] MUKHANOV, V.; *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge, UK: Univ. Pr., 421p., 2005.
- [43] PADMANABHAN, T.; *Equipartition of energy in the horizon degrees of freedom and the emergence of gravity*, Class. Quant. Grav. **21**, 4485, [arXiv:gr-qc/0308070], 2004.