Universidade Federal de Juiz de Fora
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Angelo Pereira do Carmo

Uma abordagem numérica para problemas de otimização no Ensino Médio

Juiz de Fora

2013

Angelo Pereira do Carmo

Uma abordagem numérica para problemas de otimização no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, na área de Matemática.

Orientador: Prof.Dr. Sandro Rodrigues Mazorche

Juiz de Fora

2013

Carmo, Angelo Pereira do.

Uma abordagem numérica para problemas de otimização no Ensino Médio / Angelo Pereira do Carmo. - 2013.

72f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

1. Matemática. 2. Matemática Aplicada. 3. Otimização. 4. Métodos Numéricos. I. Título.

Angelo Pereira do Carmo

Uma abordagem numérica para problemas de otimização no Ensino Médio

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal de Juiz de Fora.

Prof. Dr. Sandro Rodrigues Mazorche
(Orientador)
PROFMAT
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

Prof. Dr. Rogério Casagrande
PROFMAT
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

Prof. Dr. Marcelo Oliveira Veloso
PROFMAT
Universidade Federal de São João Del Rei - UFSJ

Juiz de Fora, 16 de março de 2013.

À Carmem Lúcia Pereira

AGRADECIMENTOS

À Deus, por me proporcionar mais esta conquista.

À minha mãe, Carmem, por estar comigo em absolutamente todos os momentos, multiplicando as alegrias e compartilhando as tristezas.

À minha família, por ter compreendido minha falta ao longo destes dois anos. Em especial a minha avó, Helena, pelas orações silenciosas e pelo incentivo nos momentos de desânimo.

À minha noiva, Karina, pelo companheirismo nestes dois anos de muita dedicação.

Aos membros da banca de avaliação, cujas sugestões engrandeceram o trabalho. Em especial ao professor Sandro, pelas discussões e pelo direcionamento do trabalho.

Aos colegas e aos professores do PROFMAT, pelos ensinamentos e pelas discussões que muito me enriqueceram.

À CAPES pelo apoio financeiro e à Sociedade Brasileira de Matemática pela criação e implantação do PROFMAT no Brasil.

À todos vocês meus mais sinceros agradecimentos.

RESUMO

Este trabalho visa discutir métodos para se determinar pontos extremos de funções de uma variável real. Ele procura estender o número de problemas de otimização que conseguimos solucionar no ensino básico para além daqueles modelados por funções quadráticas. Para isso fazemos uso de "Métodos Numéricos".

No capítulo 1 falamos sobre o cálculo de extremos de funções quadráticas. Tecemos alguns comentários sobre a forma com que se ensina essa parte da matemática no ensino médio e mostramos um procedimento interessante para encontrar extremos da função quadrática. Este procedimento baseia-se na observação de que a abscissa do ponto extremo não se altera ao se fazer um tipo de translação da parábola.

No capítulo 2 enfatizamos resultados clássicos da teoria de otimização de funções reais. Estes resultados são normalmente abordados em cursos de cálculo e servem, tanto para garantir a existência de extremos de funções contínuas em intervalos fechados quanto para se determinar este valor. Os resultados são demonstrados do ponto de vista do Cálculo Diferencial e Integral de uma variável real.

No capítulo 3 abordamos dois métodos numéricos simples que podem ser usados no ensino médio sem maiores problemas. A utilização destes métodos neste trabalho está fortemente relacionada com o fato das funções abordadas em problemas de otimização serem (em geral) contínuas e unimodais no intervalo onde o problema faz sentido.

No capítulo 4 propomos três problemas sobre otimização onde as funções envolvidas não são quadráticas. Neste momento queremos mostrar a força dos métodos numéricos introduzidos no capítulo 3 na solução destes problemas. Em particular, optamos pelo "Método da Seção Áurea"para ser aplicado nestes problemas por acreditar que a assimilação deste método seja mais rápida por parte dos alunos do que o método da "Bisseção". Por fim, acreditamos que a implementação do "Método da Seção Áurea"numa planilha eletrônica trás agilidade ao processo e motiva os alunos a aprenderem sobre este tipo de recurso computacional tão importante nos dias de hoje.

Palavras-Chave: Matemática. Matemática Aplicada. Otimização. Métodos Numéricos.

ABSTRACT

This paper aims to discuss methods for determining extreme points of functions of a real variable. It seeks to extend the number of optimization problems we can solve in basic education beyond those modeled by quadratic functions. For this we make use of "Numerical Methods".

In Chapter 1 we talked about the calculation of extreme quadratic functions. We comment about the way we teach this part of mathematics in high school and show an interesting procedure for calculating extremes of the quadratic function. This procedure is based on the observation that the abscissa of the extreme point is not changed by making a kind of translation of the parabola.

In Chapter 2 we emphasize classical results of optimization theory of real functions. These results are normally covered in calculus courses and serve both to ensure that there are extremes of continuous functions in closed intervals and determine this value. The results are presented from the viewpoint of Differential and Integral Calculus of a real variable.

In chapter 3 we discuss two simple numerical methods that can be used in high school without major problems. The use of these methods in this work is strongly related to the fact that the functions discussed in optimization problems are (in general) continuous and unimodal in the range where the problem makes sense.

In Chapter 4 we propose three optimization problems, in this case the functions involved are not quadratic. In this moment we want to show the strength of the numerical methods introduced in Chapter 3 in solving these problems. In particular, we chose the "Golden Section Method"to be applied in these problems believing that assimilation of this method is easier by students of high school than the "Method of Bisection". Finally, we believe that the implementation of the "Method of Golden Section"in a spreadsheet brings agility to the process and motivates students to learn about this kind of computational resource so important nowadays.

Key-words: Mathematics. Applied Mathematics. Optimization. Numerical Methods.

Lista de Figuras

1 Gráfico de $f(x) = x^2 - 6x + 5$ 15

2 Gráfico de $f(x) = -x^2 + 10x + 16$ 15

3 Terreno a ser cercado 16

4 Gráfico de $A(x) = -x^2 + 100x$ com escala entre os eixos de 1:20 16

5 Funções transladadas com o mesmo x_v 17

6 Máximo e Mínimo absoluto de $f(x) = (x-1)^2$ em $[-1, 2]$. 21

7 Máximo e Mínimo relativo (ou local) de uma função. 21

8 Gráfico de $f(x) = \sqrt{2-x} + 1$ 23

9 Gráfico da função $g(x) = x^2 + 4x$ (se $x \leq 2$) e $g(x) = 8 - x$ se $(x > 2)$. 24

10 O gráfico da função f e as retas obtidas ao fazer x_1 se aproximar de x_0 25

11 Funções Contínuas em [a,b] e deriváveis em (a,b) sendo $f(a) = f(b)$ ocorrendo $f'(c) = 0$ 32

12 Ilustração do Teorema do Valor Médio 34

13 Função Crescente e Função Decrescente 36

14 Ilustração: Teste da Derivada Primeira 37

15 Uma iteração pelo Método da Bisseção 42

16 Uma iteração pelo Método da Bisseção 42

17 Tabela com valores de $f(x)$ para $x \in [-2, 3]$ 46

18 Quadrados cortados da folha 46

19 Tabela com as saídas após cada iteração K 47

20 Gráfico de $G(x) = -V(x) = -4x^3 + 90x^2 - 450x$ com escala de 1:50 . . 48

21 Ponto x dividindo AB na razão áurea 48

22 Uma iteração pelo Método da Seção Áurea 51

23 Tabela com as saídas após cada iteração K 53

24 Quadradinhos recortados da folha 55

25 Avaliações de $G(x)$ 59

26 Tabela com as saídas após cada iteração K 59

27 O problema do Abastecimento de Água 60

28 Tabela com alguns valores de x e suas respectivas imagens por $C(x)$ . . 61

29 Gráfico de Pontos da Função $C(x)$ usando a Tabela da figura 28 62

30 Tabela do Problema do Abastecimento de Água 64

31 Gráfico da função $C(x)$ no GeoGebra 65

32 Esquema de forças 66

33 Gráfico de $f(\theta) = sen(\theta)$ e $g(\theta) = cos(\theta)$ 67

34 Tabela do Problema da Força Mínima 68

35 Gráfico de $F(\theta) = \dfrac{168}{0,4.sen(\theta) + cos(\theta)}$ 69

Sumário

INTRODUÇÃO 11

1 MÁXIMOS E MÍNIMOS DA FUNÇÃO QUADRÁTICA 13

1.1 O ENSINO DE MÁXIMOS E MÍNIMOS NO ENSINO MÉDIO ATUAL 13

1.2 UM PROCEDIMENTO INTERESSANTE 15

1.3 COMENTÁRIOS 19

2 TEOREMAS SOBRE MÁXIMOS E MÍNIMOS 20

2.1 INTRODUÇÃO 20

2.2 MÁXIMOS E MÍNIMOS 20

2.3 FUNÇÃO CONTÍNUA 22

2.4 DERIVADA DE UMA FUNÇÃO 23

2.5 O TEOREMA DE WEIERSTRASS PARA VALORES EXTREMOS 27

2.6 OS TEOREMAS DE ROLLE E DO VALOR MÉDIO 31

2.7 DETERMINAÇÃO DOS EXTREMOS DE UMA FUNÇÃO 35

2.8 MÁXIMOS E MÍNIMOS EM INTERVALOS FECHADOS 38

3 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ENCONTRAR MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES REAIS 40

3.1 INTRODUÇÃO 40

3.2 O MÉTODO DA BISSEÇÃO 41

3.3 ALGORITMO DO MÉTODO DA BISSEÇÃO 41

3.4 O MÉTODO DA SEÇÃO ÁUREA 48

3.5 ALGORITMO DO MÉTODO DA SEÇÃO ÁUREA 51

4 ATIVIDADES PROPOSTAS: PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO COM RESOLUÇÃO NUMÉRICA 54

4.1 INTRODUÇÃO 54

4.2 O PROBLEMA DAS CAIXAS 55

4.3 O PROBLEMA DO ABASTECIMENTO DE ÁGUA 59

4.4 O PROBLEMA DA FORÇA MÍNIMA 65

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 70

REFERÊNCIAS 72

INTRODUÇÃO

Em muitas situações da vida moderna somos levados a questões do tipo: "Qual é o custo mínimo de produção?"ou "Qual é a forma que um recipiente deve ter para comportar o maior volume possível?"ou ainda, "Qual é a maior área que conseguimos cercar com uma quantidade conhecida de tela?"entre muitas outras. A matemática tem um ramo destinado a tentar responder questões como essas: a Otimização.

A Otimização utiliza métodos analíticos ou numéricos para responder questões como as acima mencionadas. Muitos problemas são (bem!) resolvidos analiticamente, já em outros a resolução analítica ou não é possível ou é tão complexa que a abordagem numérica torna-se mais prática e objetiva. A decisão de qual método usar varia de acordo com os objetivos a serem alcançados, com o tipo de solução que se quer chegar e até mesmo com o nível de matemática que se deseja usar.

No ensino básico muitos questionamentos dos alunos são colocados em segundo plano exatamente por não termos resultados fortes que nos garantam a solução analítica do problema neste nível de ensino. Porém, num mundo cada vez mais competitivo cabe-nos refletir sobre a real necessidade de postergar certos questionamentos simplesmente por satisfazer a uma matemática linear e demasiadamente comprometida com uma estrutura formalista e tradicional. Não que esta estrutura não seja importante, muito pelo contrário, ela é responsável por grande parte do Status que a matemática goza hoje na vida moderna. O que estamos questionando não é o mérito desta estrutura formal da matemática e sim a maneira linear com que ela influencia o trabalho do professor dentro da sala de aula no ensino básico.

Muitas questões ligadas a encontrar extremos de uma função são deixadas de lado no ensino básico por esta estrutura formal e tradicionalista de ensinar matemática estar impregnada nas mentes dos professores da escola básica. Não vamos ser covardes em nos restringirmos a trabalhar apenas com o que os exames de vestibulares trazem, temos que ir para além deste ponto comum. Educação é refletir sobre o cotidiano, o atual; é procurar alternativas para resolver problemas da vida prática. E convenhamos, muitas vezes estes problemas não cabem na metodologia linear a qual o ensino básico muitas vezes está presa.

Neste texto, são abordados problemas de otimização que podem ser discutidos no ensino básico, mesmo que as justificativas analíticas não estejam ao nível dos alunos ou sejam demasiadamente complexas para serem abordadas. Queremos com isso agregar valores ao estudo de extremos de funções de uma variável real para além das questões apenas relacionadas com a função quadrática. É importante observar que estas justificativas analíticas, embora distantes da maioria dos alunos do ensino básico, devem ser (bem!) compreendidas e observadas pelos professores do ensino básico.

Um capítulo foi separado para resultados que acreditamos ser de suma importância para o professor que pretenda ensinar otimização no ensino básico. Ele resume os principais resultados sobre a existência e sobre a procura de extremos para funções reais em intervalos fechados. Entendemos que muitos destes resultados sejam intuitivos para os alunos da escola básica, embora suas demonstrações nem sempre sejam aconselhadas neste nível de ensino. Cabe ao professor refletir sobre estes resultados, principalmente no que diz respeito à necessidade de suas hipóteses.

Como dissemos acima, em muitos problemas de otimização aparecem funções que não são quadráticas. Neste momento entendemos que lançar mão de algum método numérico simples e de forte apelo geométrico possa ser uma saída interessante em comparação com a forma tradicional de resolver estes problemas com o uso de derivadas. Aqui, cabe ressaltar a importância da utilização dos recursos computacionais como calculadoras e/ou planilhas eletrônicas no intuito de otimizar o tempo de cálculos repetidos.

Acreditamos que este texto pode ser útil ao professor interessado em apresentar a teoria de otimização no ensino médio de uma maneira mais abrangente. Abrindo possibilidades para muitos aspectos importantes no ensino atualmente, os quais destacamos: a utilização de tecnologias computacionais no ensino de matemática e a implantação de métodos numéricos no ensino básico. Entendemos que as reflexões contidas neste trabalho podem enriquecer substancialmente o trabalho docente.

1 MÁXIMOS E MÍNIMOS DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

1.1 O ENSINO DE MÁXIMOS E MÍNIMOS NO ENSINO MÉDIO ATUAL

De uma forma geral, o problema de achar máximos e mínimos de funções no ensino médio atualmente se restringe a calcular estes valores de funções quadráticas e (o pior) fazendo-o através de fórmulas prontas e acabadas sem nem demonstrar e/ou justificar a utilização destas fórmulas. Isto, como sabemos, reforça ainda mais esta idéia que hoje habita as mentes dos alunos de que a matemática é um conjunto de fórmulas que devem ser decoradas e utilizadas em situações bem específicas. Isto vai na contramão do que queremos do professor de matemática moderno. Este deve incentivar e motivar os alunos a pesquisar questões de forma mais solta, livres para pensar os problemas de forma diversa. Como disse um professor certa vez: "O método mais fácil de resolver um problema é aquele que conseguimos justificar cada passo da resolução". Isto significa que o método mais fácil é aquele pelo qual conseguimos resolvê-lo. Não necessariamente é o mais elegante.

Abordaremos nesta seção apenas a questão dos pontos de máximos e/ou mínimos de funções quadráticas. O enfoque será o que consideramos adequados para este assunto no ensino médio. Isto é, nem exageradamente formal nem tão desprovido de significados matemáticos como alguns livros o fazem.

Assumiremos nesta seção que,

(1). Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais a, b e c com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

e também que,

(2). O Gráfico da função quadrática é uma cônica chamada PARÁBOLA que tem concavidade para baixo se $a < 0$ e para cima se $a > 0$.

Fatos bem conhecidos e aceitos para alunos do ensino médio.

Considere agora a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a > 0$. Podemos reescrever esta expressão da seguinte forma:

$$f(x) = ax^2+bx+c \Longrightarrow f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] \Longrightarrow f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \Longrightarrow$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{(4ac - b^2)}{4a^2}\right] (1)$$

Vemos então que a expressão dentro dos colchetes é uma soma de duas parcelas. A primeira parcela $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ depende de x e é sempre ≥ 0. Já a segunda $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ é constante. Logo o menor valor desta soma é atingido quando $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$. O que ocorre se e somente se $x = -\frac{b}{2a}$.

Neste ponto (indicado nos livros por x_v) a função $f(x)$ também assume seu menor valor. O menor valor de $f(x)$ é:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = -\frac{\triangle}{4a}, \quad \textit{sendo } \triangle = b^2 - 4ac$$

O valor que $f(x)$ assume em x_v é comumente indicado por y_v.

Analogamente se em (1) ocorre $a < 0$ então vemos que $f(x)$ assume um valor máximo se a parcela que está dentro dos colchetes for mínima e isso ocorre, se e somente se, $x = x_v = -\dfrac{b}{2a}$. Neste caso $f(x_v) = \dfrac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = -\dfrac{\triangle}{4a}$.

Resumindo a discussão acima podemos escrever que:

1) se $a > 0$ então a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ possui um valor mínimo (pois a concavidade está para cima). (figura 1)

2) se $a < 0$ então a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ possui um valor máximo (pois a concavidade está para baixo). (figura 2)

Podemos dizer então que os alunos egressos do ensino médio resolvem problemas de máximos e mínimos usando a seguinte relação:

1) $a > 0 \Longrightarrow f$ tem valor mínimo $y_v = \dfrac{-\triangle}{4a}$ no ponto de abscissa $x_v = \dfrac{-b}{2a}$;

2) $a < 0 \Longrightarrow f$ tem valor máximo $y_v = \dfrac{-\triangle}{4a}$ no ponto de abscissa $x_v = \dfrac{-b}{2a}$,

onde $\triangle = b^2 - 4ac$.

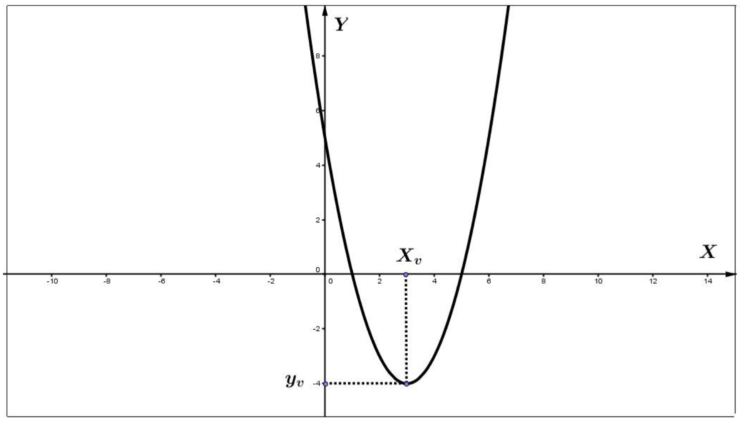

Figura 1: Gráfico de $f(x) = x^2 - 6x + 5$

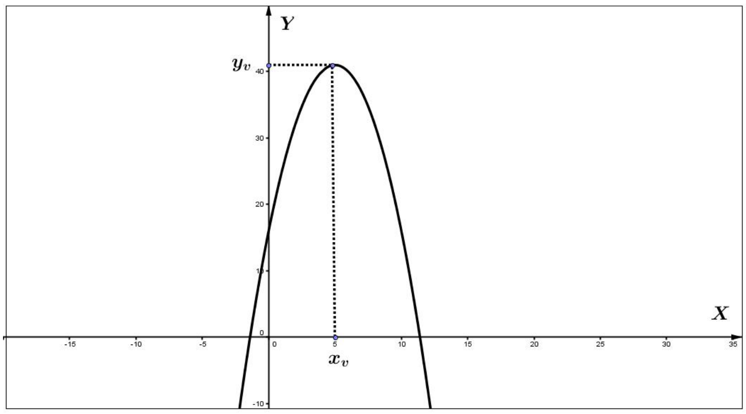

Figura 2: Gráfico de $f(x) = -x^2 + 10x + 16$

1.2 UM PROCEDIMENTO INTERESSANTE

Embora a utilização da fórmula acima para resolver problemas de máximos e mínimos seja muito usada no ensino médio normalmente sua dedução quase nunca foge do que vimos acima. Mostraremos abaixo outra maneira de achar extremos de funções quadráticas sem contudo usar diretamente estas fórmulas.

Consideremos então a seguinte situação problema:

"Os diretores de um centro esportivo desejam cercar uma quadra de basquete e outros aparatos esportivos que estão a sua volta com tela de alambrado. O cercado deve ter a forma de um retângulo. Tendo recebido 200 metros de tela, os diretores desejam saber quais devem ser as dimensões do cercado para que a área seja a maior possível e qual é essa área máxima"

Sendo x um dos lados do retângulo vemos que o outro lado deve medir $100 - x$

(figura 3). Logo a área do terreno pode ser escrita como $A = (100 - x)x$, ou seja, $A(x) = -x^2 + 100x$.

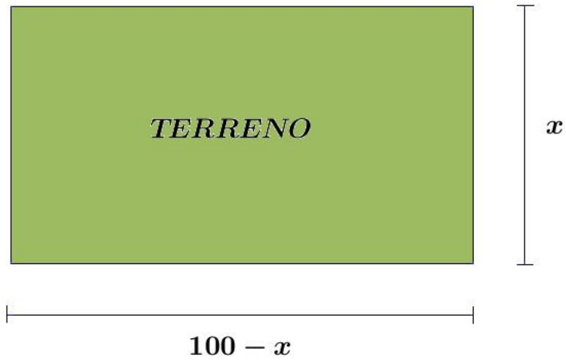

Figura 3: Terreno a ser cercado

Para encontrar o máximo de A podemos procurar o x_v e depois calcular $A(x_v)$. Sendo x_1 e x_2 as raízes de $A(x)$, isto é, os valores de x que satisfazem $A(x) = 0$ e notando que o gráfico de A é simétricos em relação à reta $x = x_v$ temos que $x_v = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ (veja figura 4). Daí Segue que:

$$x_v = \frac{100 + 0}{2} = 50 \Longrightarrow f(50) = -(50)^2 + 100.50 \Longrightarrow y_v = f(50) = 2500$$

Concluímos então que as dimensões do retângulo devem ser de 50 metros de largura e 50 metros de comprimento. Ou seja, a área deve ser um quadrado de lado 50 metros. A área máxima é a área desse quadrado, ou seja, $A_m = y_v = 2500\ m^2$.

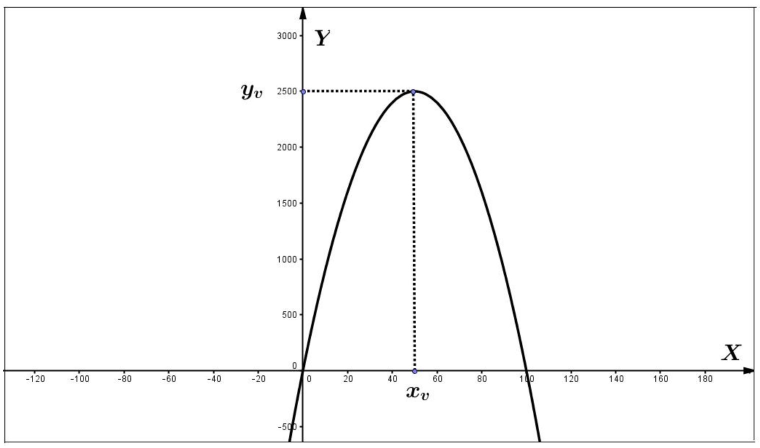

Figura 4: Gráfico de $A(x) = -x^2 + 100x$ com escala entre os eixos de 1:20

Observemos que o processo acima pode ser feito ainda se as raízes são tais que $x_1 = x_2$. Basta tomar $x_v = x_1$.

Mas uma pergunta que você deve estar fazendo neste momento é : E se não existirem raízes reais?

O processo acima embora feito para um exemplo específico de função quadrática (a que apresenta o coeficiente c=0) pode ser usado para achar extremos de funções mais gerais, isto é, com $c \neq 0$.

Para podermos ver isso considere a função $f(x) = ax^2+bx+c$ com $ac \neq 0$. Seu gráfico (como sabemos) é uma parábola com concavidade para cima ou para baixo dependendo do valor de a, a ordenada de seu ponto de intersecção com o eixo oY é $y = c$. Agora note que ao somar um valor ao lado direito da função f estamos simplesmente fazendo uma translação com seu gráfico, para cima se somamos ao lado direito uma quantia positiva ou para baixo se somamos uma quantia negativa.

Então o x_v continua o mesmo sempre que somamos algum valor no lado direito de $f(x) = ax^2 + bx + c$. Isto significa que se somarmos $-c$ ao gráfico de f obtendo assim uma função $f_1(x) = ax^2 + bx$ ela terá o mesmo x_v que a função f. Ora, como o x_v desta última pode ser calculado como vimos acima, segue que o valor extremo de f é exatamente $y_v = f(x_v)$ onde x_v é exatamente a média aritmética das raízes de f_1. A saber: $x_v = \dfrac{0 + -b/a}{2}$.

Desta forma podemos ver que as funções $f(x) = x^2 - 4x - 2$, $g(x) = x^2 - 4x$ e $h(x) = x^2 - 4x + 3$ possuem o mesmo $x_v = \dfrac{0 + -b/a}{2} = 2$.(Veja a figura 5).

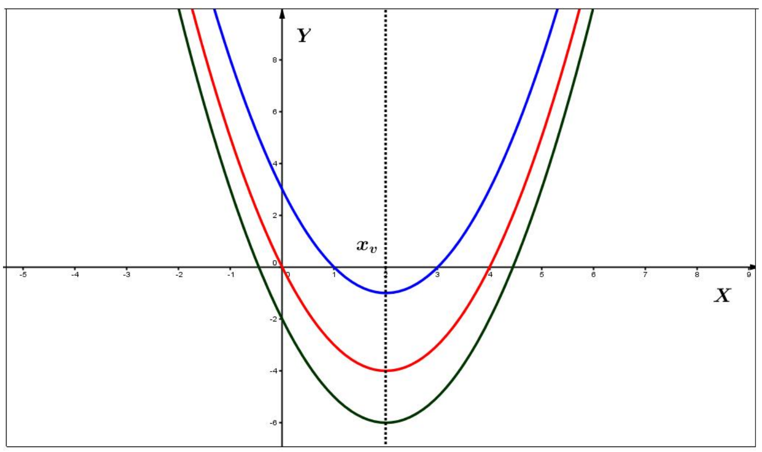

Figura 5: Funções transladadas com o mesmo x_v

Vamos ilustrar o processo acima através de dois exemplos.

Exemplo 1.1. Uma bola é lançada ao ar. Suponha que sua altura h, em metros, t segundos após o lançamento, seja $h(t) = -t^2 + 4t + 12$. Determine:

(a) O instante em que a bola atinge a sua altura máxima;

(b) a altura máxima atingida pela bola.

Solução

Neste exemplo vamos desconsiderar as ações da resistência do ar por exemplo e outros fenômenos físicos que podem interferir na trajetória da bola. Como a trajetória da bola é dada pela função quadrática $h(t)$ vemos que se associarmos à h a função
$h_1(t) = -t^2 + 4t$ temos que as raízes de $h_1(t)$ são $t_1 = 0$ e $t_2 = 4$, logo para h_1,

$$x_v = \frac{4+0}{2} = 2$$

Portanto, pelo que foi visto acima segue que o valor máximo de h é,

$$h_m = h(2) = -(2)^2 + 4.(2) + 12 = -4 + 8 + 12 = 16$$

Afinal na definição de h tem-se que $a = -1 < 0$.

Assim como conclusão podemos escrever que o instante em que a bola atinge sua altura máxima é $x_v = 2$ segundos e que esta altura máxima vale $h_m = 16$ metros.

Exemplo 1.2. Sabe-se que o custo C para produzir x unidades de um certo produto é dado por $C(x) = x^2 - 80x + 3000$. Nessas condições, calcule:

(a) a quantidade de unidades produzidas para que o custo seja mínimo.

(b) o valor mínimo do custo.

Solução

Associamos à função $C(x)$ dada acima à função $C_1(x) = C(x) - 3000 = x^2 - 80x$. Claramente as raízes de $C_1(x)$ são 0 e 80. Logo para $C_1(x)$ temos $x_v = (0 + 80)/2 = 40$. Portanto o valor mínimo (afinal $a = 1 > 0$) do custo é

$C(40) = 40^2 - 80.40 + 3000 = 1600 - 3200 + 3000 = 1400.$

Concluimos que a resposta de (a) é 40 unidades e a resposta de (b) é 1400.

1.3 COMENTÁRIOS

Neste capítulo introduzimos a idéia de máximos e mínimos como uma necessidade diária da vida moderna, mostrando que muitas das perguntas que nos fazemos está intimamente relacionada com a questão de achar máximos e/ou mínimos de funções.

Vimos também como usualmente os alunos do ensino médio resolvem problemas de máximos e mínimos, argumentamos pela nossa própria experiência em sala de aula tanto de ensino médio quanto no ensino de Cálculo para o primeiro semestre de cursos superiores que os alunos, invariavelmente, usam fórmulas para estes cálculos.

Por fim, na seção 1.3 desenvolvemos um procedimento pelo qual o uso das fórmulas $\frac{-b}{2a}$ e $\frac{-\triangle}{4a}$ pode ser substituído por um processo bem interessante que se pode facilmente usar em sala de aula pois o processo usa simplesmente as raízes de uma função, e diga-se de passagem, raízes que são fáceis de serem encontradas sem mesmo usar a famosa fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(classificada em muitos livros como fórmula de Bháskara).

No processo descrito precisa-se apenas de se fatorar uma expressão simples e encontraremos as raízes de uma função cuja média aritmética nos interessa muito por se tratar da abscissa do vértice da função inicial. Desta maneira, podemos dizer que, para máximos e mínimos de funções quadráticas, não necessitamos de fórmulas e isso contribui para desmistificar a matemática como ciência de decorar fórmulas. Neste processo podemos escrever que não há fórmulas a decorar e sim procedimentos a entender.

Afim de avançar em problemas que requerem um pouco mais de conhecimento matemático nosso próximo capítulo tratará da matemática por trás do Cálculo de máximos e mínimos de funções de uma variável real. Para tanto traremos uma matemática um pouco mais rigorosa.

2 TEOREMAS SOBRE MÁXIMOS E MÍNIMOS

2.1 INTRODUÇÃO

Afim de obtermos sólidos conhecimentos sobre a existência e a determinação de pontos extremos de funções, traremos neste capítulo um tratamento rigoroso da questão. Para isso vamos demonstrar dois teoremas importantes, a saber: **O Teste da Derivada Primeira** e **O Teste da Derivada Segunda**. Porém antes disso, precisamos entender bem o que significa dizer que uma função é contínua e o que é uma derivada de uma função. Além disso, será importante saber as relações entre derivadas e funções contínuas.

Os resultados contidos neste capítulo bem como seus devidos desdobramentos podem ser encontrados nas referências [1], [3] *e* [5]. Salientamos também que o material disponibilizado da disciplina "Fundamentos de Cálculo" durante o PROFMAT contribuiu de forma significativa para a elaboração do que vem a seguir.

2.2 MÁXIMOS E MÍNIMOS

Vamos formalizar a idéia de máximos e mínimos nesta seção. Primeiro definiremos **máximos e mínimos absolutos** depois **máximos e mínimos relativos (ou locais)**.

Definição 1. Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ tem máximo absoluto em c se $f(x) \leq f(c)$ para todo x no domínio D de f. Neste caso, o valor $f(c)$ é chamado valor máximo de f em D.

Definição 2. Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ tem mínimo absoluto em c se $f(x) \geq f(c)$ para todo x no domínio D de f. Neste caso, o valor $f(c)$ é chamado valor mínimo de f em D.

Exemplo 2.1. A função $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x - 1)^2$ possui máximo absoluto em $x = -1$ e mínimo absoluto em $x = 1$. Veja figura 6.

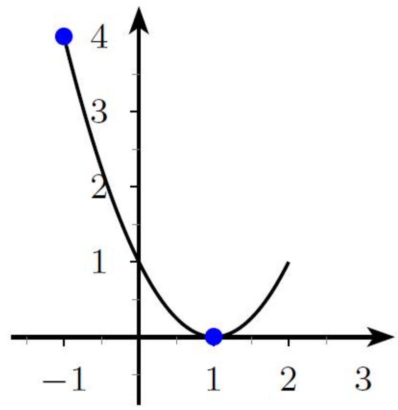

Figura 6: Máximo e Mínimo absoluto de $f(x) = (x-1)^2$ em $[-1, 2]$.

Definição 3. Uma função tem **máximo local (ou máximo relativo)** em um ponto c de seu domínio, se existe intervalo aberto I, tal que $c \in I$ e $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in I$. Neste caso, dizemos que $f(c)$ é valor máximo local de f.

Definição 4. Uma função tem **mínimo local (ou mínimo relativo)** em um ponto c de seu domínio, se existe intervalo aberto I, tal que $c \in I$ e $f(x) \geq f(c)$ para todo $x \in I$. Neste caso, dizemos que $f(c)$ é valor mínimo local de f.

Exemplo 2.2. A função cujo gráfico está na figura 7 possui um **máximo relativo (ou local)** em $x = a$ e um **mínimo relativo (ou local)** em $x = b$.

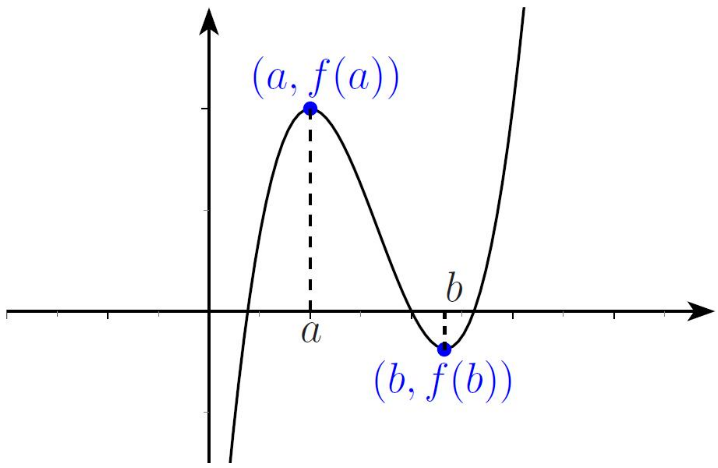

Figura 7: Máximo e Mínimo relativo (ou local) de uma função.

2.3 FUNÇÃO CONTÍNUA

Intuitivamente uma função é contínua se o seu gráfico pode ser desenhado no papel sem retirar o lápis dele. Apesar dessa frase não ser totalmente incorreta ela nos trás a questão da continuidade apenas de forma intuitiva. Vamos trabalhar com definições.

Definição 5. Sejam $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no domínio $D \subset \mathbb{R}$ e $a \in D$, um ponto tal que todo intervalo aberto contendo a intersecta $D - \{a\}$. Dizemos que a função ***f* é contínua em *a*** se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad (*)$$

Definição 6. Seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f é contínua se f for contínua em todos os elementos de D.

Exemplo 2.3. Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função polinomial do tipo

$$p(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

então f é uma função contínua.

De fato, dado $a \in \mathbb{R}$ temos,

$$\lim_{x \to a} p(x) = b_n a^n + b_{n-1} a^{n-1} + ... + b_2 a^2 + b_1 a + b_0 = p(a)$$

Segue da definição 6 que f é uma função contínua.

Observe que só podemos falar em continuidade de uma função num ponto se o ponto pertencer ao domínio da função. Então temos duas condições a verificar: (1) se o ponto está no Domínio da função e (2) se o limite (*) for verificado.

Exemplo 2.4. Verifique se a função $f(x) = \sqrt{2 - x} + 1$ é contínua.

Como o domínio de f é o conjunto $(-\infty, 2]$ devemos verificar o limite (*) para o intervalo aberto $(-\infty, 2)$ e também para $a = 2$. Temos:

Seja a $\in (-\infty, 2)$ então,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \sqrt{2 - x} + 1 = \sqrt{2 - a} + 1 = f(a)$$

Além disso se $a = 2$ temos que,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \sqrt{2-x}+1 = \sqrt{2-2}+1 = 0+1 = 1 = f(2)$$

Logo f é contínua.

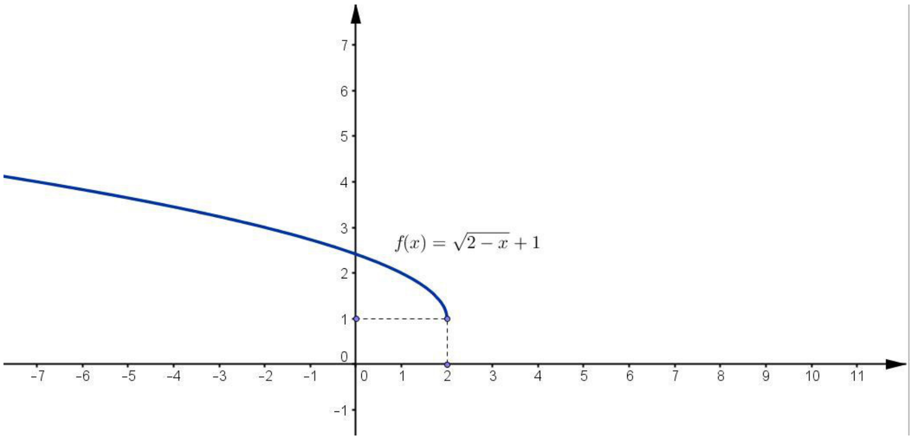

Figura 8: Gráfico de $f(x) = \sqrt{2-x}+1$

Exemplo 2.5. A função g abaixo não é contínua em 2.

$$g(x) = \begin{cases} x^2+4x & \text{se} \quad x \leq 2 \\ 8-x & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

De fato,

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2} x^2+4x = 2^2+4.2 = 12$$

e

$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2} 8-x = 8-2 = 6.$$

Assim como os limites laterais são distintos vemos que $\lim_{x\to 2} g(x)$ **não existe**.

Portanto g não é contínua em 2.(Veja a figura 9 na pag.24)

Observação

Veja que se quisermos transformar a função g em uma função h contínua em $x = 2$ bastaria escolher adequadamente a expressão que ocuparia o lugar de $8-x$. De fato, g não é contínua em $x = 2$ pelo fato de seus limites laterais serem distintos, tomando-se no lugar de $8-x$ a expressão $14-x$ obteríamos a função h.

2.4 DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

Definição 7 (Derivada)**.** Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio. O limite,

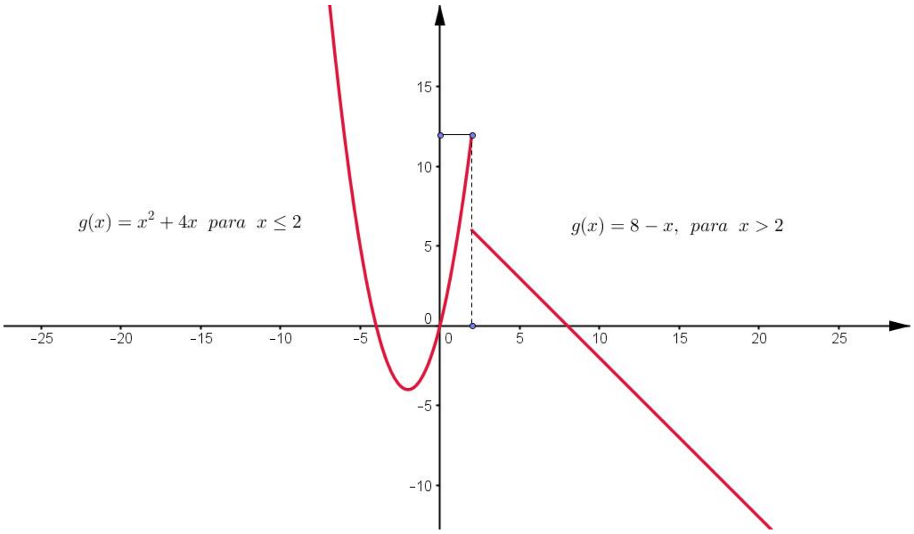

Figura 9: Gráfico da função $g(x) = x^2 + 4x$ (se $x \leq 2$) e $g(x) = 8 - x$ se $(x > 2)$

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

quando existe e é finito, chamaremos de **derivada de f em p** e indicaremos por $f'(p)$. Dessa forma,

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

Quando f admite derivada em p, então diremos que **f é derivável ou diferenciável em p**.

Definição 8 (Função Derivada)**.** Seja f uma função definida em um intervalo aberto I. Se f é derivável para todo ponto de seu domínio, dizemos que a função é derivável e que a função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada $x \in$ I o valor $f(x)$ é a **Função Derivada de f**.

Geometricamente a derivada de um função num ponto p pode ser vista como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa p. De fato, dado f e dois de seus pontos $P(x_0, y_0)$ e $Q(x_1, y_1)$ temos que o coeficiente angular da reta **Secante** que passa por P e Q é,

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Ao fazer x_1 se aproximar de x_0 obtemos retas secantes ao gráfico de f com coeficientes angulares cada vez mais próximos do coeficiente angular da reta tangente à f no ponto de abscissa x_0 (veja a figura 10).

Se fazemos x_1 se aproximar indefinidamente de x_0 obtemos o coeficiente angular da

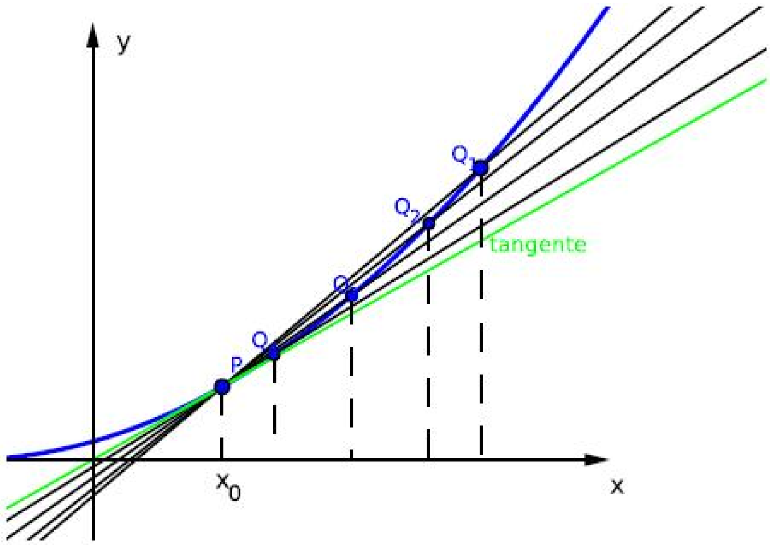

Figura 10: O gráfico da função f e as retas obtidas ao fazer x_1 se aproximar de x_0

reta tangente. Assim podemos definir que,

Definição 9 (Reta Tangente)**.** A reta tangente a uma curva $y = f(x)$ em um ponto $P = (x_0, f(x_0))$ é a reta que passa por P e cujo coeficiente angular é dado por,

$$f'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (**)$$

Observação

Se no limite (**) fazemos $x_1 - x_0 = h$ então como $x_1 \longrightarrow x_0$ temos que $h \longrightarrow 0$.Dessa forma a expressão (**) pode ser reescrita como

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Exemplo 2.6. Mostre por definição que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ em um ponto x_0 é $f'(x_0) = 2x_0$.

Solução

Temos que,

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h.(2x_0+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x_0+h) = 2x_0.
\end{aligned}
$$

Observe que nem toda função contínua é derivável. Veja o exemplo da função $f(x) = |x|$, vamos mostrar que essa função apesar de contínua, não é derivável. Tomemos $x_0 = 0 \in \mathbb{R}$. Temos,

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}
\end{aligned}
$$

Se $h > 0$ então,

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

Se no entanto $h < 0$ então,

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = -1$$

Logo $f'(0)$ **não existe** apesar de f ser contínua em $x_0 = 0$.

Observação: Neste momento, ressaltamos que algumas *Regras de Derivação* devem ser revistas. Como este texto não visa o aprofundamento neste assunto não vamos nos ater a demonstrar tais regras bem conhecidas do Cálculo. Para ver estas regras e suas demonstrações consulte [1] na página 154.

Podemos então agora nos questionar se uma função derivável em um ponto é também contínua naquele ponto. A resposta é afirmativa e está demonstrada no resultado abaixo.

Teorema 2.7. Seja f uma função definida em um intervalo aberto I. Se f é derivável em x_0 então f é contínua em x_0.

Demonstração. Escrevamos

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.\ h$$

Passando ao limite quando $h \longrightarrow 0$ fica:

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h)-f(x_0)=\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right].\left[\lim_{h\to 0} h\right]$$

Como

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0) \qquad e \qquad \lim_{h\to 0} h=0$$

Segue que

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0).0=0$$

O que nos mostra que f é uma função contínua em x_0.

□

2.5 O TEOREMA DE WEIERSTRASS PARA VALORES EXTREMOS

O resultado central desta seção nos informa sob quais condições uma função assume seus valores máximos e mínimos num intervalo fechado. A utilidade deste resultado reside no fato de nos mostrar a existência de solução para vários problemas de otimização.

Vamos primeiramente definir o que é o supremo e o ínfimo de um subconjunto de $\mathbb{R}$.

Seja A um conjunto de números reais. O maior elemento de A, quando existe, denomina-se máximo de A e indica-se por **máx A**. O menor elemento de A, quando existe, denomina-se mínimo de A e indica-se por **mín A**.

Dizemos ainda, que um número m é uma cota superior de A se m for máximo de A ou se m for estritamente maior que todo número e A. Diremos que m é uma cota inferior de A se m for mínimo de A ou se m for estritamente menor que todo número de A.

Exemplo 2.8. Seja $A = \{0, 1, 2\}$. Temos que,

(a) 0 é mínimo de A; **0=mín A**; 2 é máximo de A; **2=máx A**.

(b) 2, 5/2, 50 são cotas superiores de A.

(c) 0, $-1/2$ são cotas inferiores de A.

Exemplo 2.9. Seja $A = \{x \in \mathbb{R}; 1 \leq x < 2\}$. Temos que,

(a) 1 = mín A.

(b) Para todo $t \in A$, $\dfrac{t+2}{2}$ também pertence a A e $t < \dfrac{t+2}{2}$ (verificar!!!)

Assim , para todo t em A, existe um outro número em A que é estritamente maior que t; logo, A **Não** admite máximo.

(c) Todo número $m \leq 1$ é uma cota inferior de A.

(d) Todo número $m \geq 2$ é uma cota superior de A.

Observe que um conjunto A pode não admitir máximo; entretanto, poderá admitir a *a menor das cotas superiores*.

Exemplo 2.10. Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}; 1 \leq x < 2\}$.

O conjunto A não admite Máximo, mas admite uma menor das suas cotas superiores que é 2.

Definição 10. A menor cota superior de um conjunto A, quando existe, denomina-se **supremo de A** e indica-se por **sup A**.

Observe que se A admitir máximo m, então m será também o supremo de A. No entanto, A poderá não admitir máximo, mas admitir supremo. Por exemplo, o conjunto A acima não admite máximo, mas admite supremo, 2 = **sup A**.

Definição 11. A maior cota inferior de um conjunto A, quando existe, denomina-se **ínfimo de A** e indica-se por **inf A**.

Se A admitir uma cota superior, então diremos que A é **limitado superiormente**.

Se A admitir uma cota inferior, diremos que A é **limitado inferiormente**

Admitiremos neste Texto a importante propriedade do supremo:

$\boxed{\text{Todo conjunto de números reais, não-vazio e limitado superiormente, admite supremo}}$

Esta propriedade caracteriza $\mathbb{R}$ como um **corpo ordenado completo**. Para um estudo mais aprofundado do assunto consulte [5].

Proposição 2.11 (Intervalos Encaixantes)**.** Seja $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$, ..., $[a_n, b_n]$, ... uma sequência de intervalos satisfazendo as condições:

(i) $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$

(ii) para todo $r > 0$, existe um natural n tal que $b_n - a_n < r$.

Nestas condições, **existe um único** real α que pertence a todos os intervalos da sequência, isto é, existe um único real α tal que, para todo natural n, $a_n \leq \alpha \leq b_n$.

Demonstração. $A = \{a_0,\ a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n,\ ...\}$ é não-vazio e limitado superiormente, pois todo b_n é cota superior de A. Assim, A admite supremo; seja α tal supremo. Como α é a menor cota superior de A, para todo natural n temos $a_n \leq \alpha \leq b_n$. Se $\beta$for outro real tal que, para todo n ocorre $a_n \leq \beta \leq b_n$ teremos que $|\alpha - \beta| \leq b_n - a_n$. Tendo em vista a propriedade (ii), para todo $r > 0$ ocorre que $|\alpha - \beta| < r$. Passando ao limite quando r tende a zero, segue que $\alpha = \beta$.

□

Definição 12. Dizemos que f é uma função limitada em $I \subset \mathbb{R}$ se existir $M > 0$ tal que, para todo $x \in I$ tivermos $|f(x)| \leq M$.

Note que da definição acima, segue que se f não for limitada em $I \subset \mathbb{R}$, para todo natural n, existe $x_n \in I$, com $|f(x_n)| > n$.

Teorema 2.12 (Teorema da Limitação)**.** Se f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então f será limitada em $[a, b]$.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que f não seja limitada em $[a, b]$. Façamos $a = a_1$ e $b = b_1$; existe, então, x_1 em $[a_1, b_1]$ tal que $|f(x_1)| > 1$. Seja c_1 o ponto médio de $[a_1, b_1]$; f não será limitada em um dos intervalos $[a_1, c_1]$ ou $[c_1, b_1]$; suponhamos que não seja limitada em $[c_1, b_1]$ e façamos $a_2 = c_1$ e $b_2 = b_1$. Não sendo f limitada em $[a_2, b_2]$, existirá $x_2 \in [a_2, b_2]$ tal que $|f(x_2)| > 2$. Prosseguindo com este raciocinio, construiremos uma sequência de intervalos

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_3, b_3] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$$

Satisfazendo as condições da propriedades dos intervalos encaixantes e tal que, para todo natural $n > 0$, existe $x_n \in [a_n, b_n]$ com

$$|f(x_n)| > n \quad (1)$$

Segue então de (1) que $\lim\limits_{n \to +\infty} |f(x_n)| = +\infty$. Seja, agora, c o único real tal que, para todo $n > 0$,

$$c \in [a_n, b_n].$$

Como a sequência x_n converge para c e f é contínua em c, resulta que $\lim\limits_{n \to +\infty} |f(x_n)| = |f(c)|$ que está em contradição com $\lim\limits_{n \to +\infty} |f(x_n)| = +\infty$. Portanto f é limitada em $[a, b]$.

□

Na demonstração da proposição acima usamos resultados sobre sequências convergentes que podem ser encontrados em [5].

Finalmente estamos em condição de enunciar e provar o **Teorema de Weierstrass**.

Teorema 2.13 (de Weierstrass)**.** Se f for contínua em $[a, b]$, então existirão x_1 e x_2 em $[a, b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo x em $[a, b]$.

Demonstração. Sendo f contínua em $[a, b]$, f será limitada em $[a, b]$, daí o conjunto,

$$A = \{f(x); x \in [a, b]\}$$

admitirá supremo e ínfimo. Sejam,

$$M = sup \;\; A \qquad e \qquad N = inf \;\; A$$

Assim, para todo x em $[a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$.

Provaremos que $M = f(x_2)$ para algum x_2 em $[a, b]$. Se tivéssemos $f(x) < M$ para todo x em $[a, b]$, a função,

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}, x \in [a, b]$$

seria contínua em $[a, b]$, mas não limitada em $[a, b]$, que é uma contradição(se g fosse limitada em $[a, b]$, então existiria um $\beta > 0$ tal que para todo x em $[a, b]$.

$$0 < \frac{1}{M - f(x)} < \beta$$

e portanto, para todo x em $[a, b]$,

$$f(x) < M - \frac{1}{\beta}$$

e assim M não seria supremo de A).

Segue então que $f(x) < M$ para todo x em $[a, b]$ não pode ocorrer, logo devemos ter $M = f(x_2)$ para algum x_2 em $[a, b]$. Com raciocínio análogo, prova-se que $f(x_1) = m$ para algum x_1 em $[a, b]$.

□

Observação 2.14. A idéia da construção da função g foi a seguinte: sendo M o supremo de $f(x)$, por menor que seja $r > 0$, existirá x tal que $M - r < f(x) < M$; assim, a diferença $M - f(x)$ poderá se tornar tão pequena quanto se queira e, portanto, $g(x)$ poderá se tornar tão grande quanto se queira.

2.6 OS TEOREMAS DE ROLLE E DO VALOR MÉDIO

Observando a figura 11 abaixo, podemos ver que as funções definidas em $[a, b]$ são tais que $f(a) = f(b)$. Como vemos nos gráficos existe um $c \in [a, b]$ tal que $f'(c) = 0$. O Teorema de Rolle estabelece sob quais condições isso sempre ocorre.

Para demonstrar o Teorema de Rolle necessitamos de um resultado que, apesar de intuitivo, necessita de demonstração.

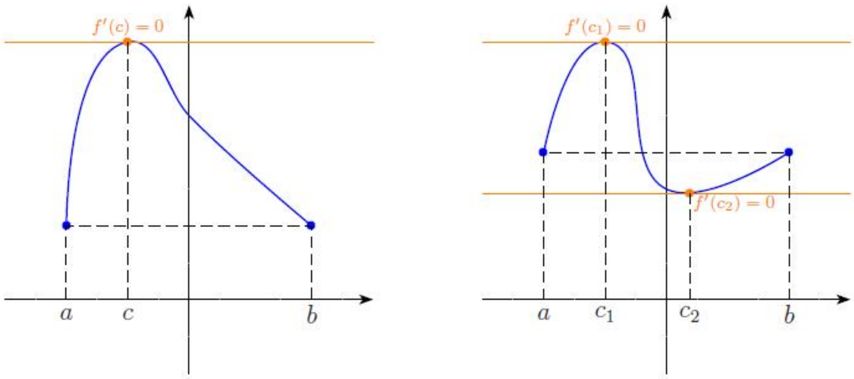

Figura 11: Funções Contínuas em [a,b] e deriváveis em (a,b) sendo $f(a) = f(b)$ ocorrendo $f'(c) = 0$

Teorema 2.15. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida em um intervalo aberto I. Se f tem máximo ou mínimo local em $x = c$, $c \in I$ e f é derivável em c então $f'(c) = 0$.

Demonstração. Suponhamos que f tenha um máximo local em $x = c$. A prova do caso em que f tem mínimo local em c é análoga.

Como f é derivável em c, então

$$\lim_{x\to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c)$$

Como $f(c)$ é máximo local, há um intervalo (a,b) no domínio de f tal que $c \in (a, b)$ e $f(x) \leq f(c)$. Portanto, $f(x) - f(c) \leq 0$, para todo $x \in (a, b)$.

Se $x < c$ então $x - c < 0$ e, portanto $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$ para $x \in (a, b)$. Logo,

$$\lim_{x\to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \quad (*)$$

Por outro lado, $x > c$ então $x - c > 0$ e, portanto, $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$ para $x \in (a, b)$. Logo

$$\lim_{x\to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0. \quad (**)$$

Comparando as desigualdades (*) e (**) e levando em conta que são o mesmo número, resulta

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(c)=0.$$

□

Teorema 2.16 (Teorema de Rolle)**.** Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$ e derivável no intervalo aberto (a,b) e $f(a)=f(b)$ então existe pelo menos um número $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

Demonstração. Seque do teorema de Weirstrass que a função f possui extremos no intervalo. Sejam m e M os valores de mínimo e máximo absolutos de f em $[a,b]$, respectivamente. Se estes valores são assumidos nos extremos do intervalo $[a,b]$, por exemplo, $f(a)=m$ e $f(b)=M$, então, como $f(a)=f(b)$ por hipótese, o mínimo e o máximo da função são o mesmo valor e, portanto, a função é constante em todo o intervalo. Como a derivada da função constante é nula, temos $f'(c)=0$ para todo $c\in(a,b)$, o que prova o Teorema para este caso.

Caso o mínimo ou máximo absoluto da função não estejam nos extremos do intervalo, então há um ponto c no intervalo aberto (a,b) tal que $f(c)$ é máximo ou mínimo de f. Então c é extremo local de f e como f é derivável em (a,b) temos $f'(c)=0$, o que conclui a demonstração.

□

Agora eis um dos principais teoremas desta seção.

Teorema 2.17 (O Teorema do Valor Médio)**.** Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e derivável no intervalo aberto (a,b). Então existe pelo menos um número $c\in(a,b)$ tal que

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Demonstração. Considere a função g definida da seguinte forma:

$$g(x)=f(x)-\frac{f(x)-f(a)}{b-a}x.$$

Então g é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b). Podemos ver ainda que,

$$g(a)=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}=g(b)$$

Podemos então aplicar o teorema de Rolle em g e chegar à conclusão que existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Ora como,

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Temos que $g'(c) = 0$ o que implica que $f'(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Fica demonstrado então o Teorema do Valor Médio.

$\square$

Observação 2.18. Geometricamente, podemos dizer que o Teorema do Valor Médio nos diz que dado uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) então existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ é a mesma da reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.Veja a figura 12.

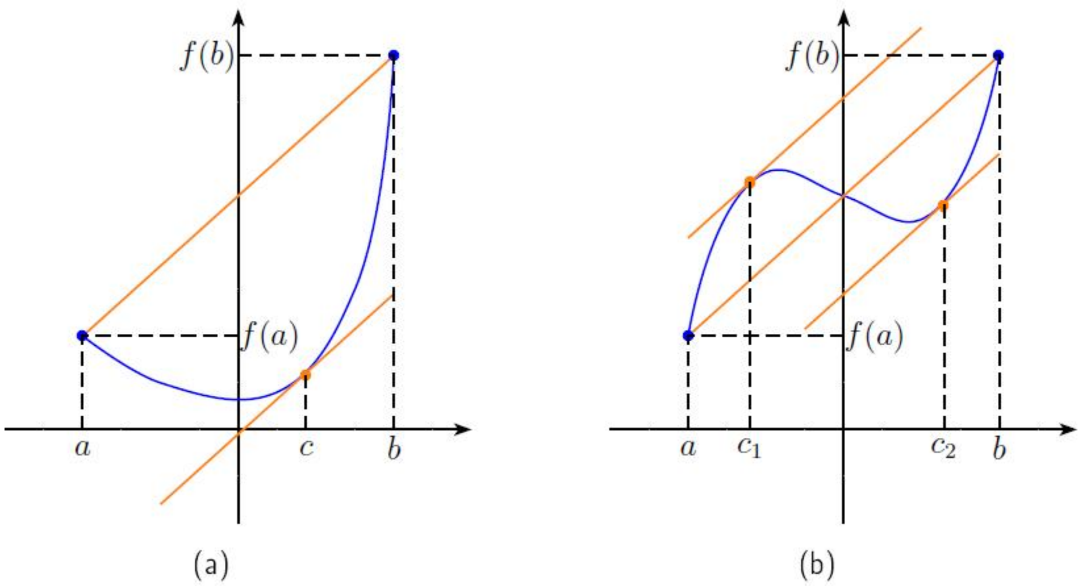

Figura 12: Ilustração do Teorema do Valor Médio

Um comentário deve ser tecido sobre o Teorema do Valor Médio.

Enfatizamos a necessidade das hipóteses do teorema. Abaixo temos dois exemplos nos quais no primeiro temos uma função **Não Derivável** e no segundo uma função que **Não é Contínua**. Em ambos vemos que o resultado do teorema não é válido.

Exemplo 2.19. Considere a função modular $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. O Teorema do Valor Médio não é válido.

De fato, na página 26 mostramos que $f'(0)$ não existe. Logo f não é derivável em $(-1, 1)$, contrariando uma hipótese do Teorema do Valor Médio. Além disso

Se $x > 0$ temos $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$.

Se $x < 0$ temos que $f(x) = -x \Rightarrow f'(x) = -1$.

Assim para $x \in (-1, 1)$ e $x \neq 0$ temos que $f'(x) = \pm 1$. Já a reta que passa pelos pontos $P = (-1, 1)$ e $Q = (1, 1)$ tem coeficiente angular $m = \frac{1-1}{1-(-1)} = 0$. Portanto **não existe** $c \in (-1, 1)$ tal que a inclinação da reta tangente no ponto $(c, f(c))$ seja igual a inclinação da reta que passa pelos pontos P e Q acima. Logo concluímos que realmente o Teorema do Valor Médio não é válido.

Exemplo 2.20. Considere agora $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ se $x \in (0, 1)$ e $f(0) = 1/2$. O Teorema do Valor Médio também não é válido.

De fato, observe que $f(x)$ é derivável em $(0, 1)$ mas não é contínua em $x = 0$.

A reta que passa pelos pontos $A = (0, 1/2)$ e $B = (1, 1)$ tem coeficiente angular positivo pois é ascendente. No entanto as retas tangentes aos pontos $(c, f(c))$ com $c \in (0, 1)$ são retas descendentes e portanto, possuem coeficiente angular negativo.

2.7 DETERMINAÇÃO DOS EXTREMOS DE UMA FUNÇÃO

Agora que estamos munidos de instrumental adequado, vamos demonstrar resultados que nos dão critérios para determinar extremos de uma função real. Antes uma definição.

Definição 13. Sejam f uma função e A um subconjunto do domínio de f. Dizemos que f é **crescente** em A se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 em A,

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Por outro lado, dizemos que f é **decrescente** em A se quaisquer que sejam x_1 e x_2 em A,

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

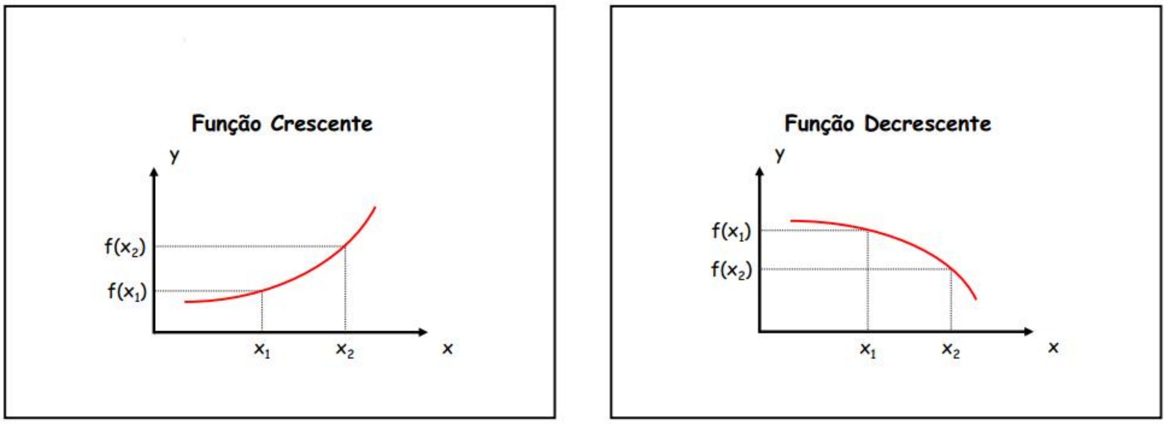

Figura 13: Função Crescente e Função Decrescente

Proposição 2.21. Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável no intervalo (a, b).

(i) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é crescente em $[a, b]$.

(ii) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é decrescente em $[a, b]$.

Demonstração. Sejam x_1 e x_2 dois números quaisquer em $[a, b]$ tais que $x_1 < x_2$. Então f é contínua em $[x_1, x_2]$ e derivável em (x_1, x_2). Pelo **Teorema do Valor Médio**, segue que $\exists\ c \in (x_1, x_2)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad (*)$.

(i) Por hipótese, $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$. Então $f'(c) > 0$. Como $x_1 < x_2$, $x_2 - x_1 > 0$. Analisando a igualdade (*) ,concluimos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, ou seja, $f(x_2) > f(x_1)$. Logo f é crescente em $[a, b]$.

(ii) Neste caso temos que $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$. Temos então $f'(c) < 0$ e $x_2 - x_1 > 0$. Agora ainda de (*) vemos que $f(x_2) < f(x_1)$. Assim concluímos que f é decrescente em $[a, b]$.

$\square$

Teorema 2.22 (Teste da Derivada Primeira)**.** Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ que possui derivada em todo o ponto do intervalo (a, b), exceto possivelmente num ponto c.

(i) Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então f tem um máximo relativo em c.

(ii) Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então f tem um mínimo relativo em c.

Demonstração. Temos que:

(i) Pela proposição 1, podemos concluir que f é crescente em $[a, c]$ e decrescente em $[c, b]$. Portanto $f(x) < f(c)$ para todo $x \neq c$ em (a, b) e assim f tem um máximo relativo em c.

(ii) Novamente pela proposição 1, concluímos que f é decrescente em $[a, b]$ e crescente em $[c, b]$. Logo $f(x) > f(c)$ para todo $x \neq c$ em (a, b). Portanto, f tem um mínimo relativo em c.

□

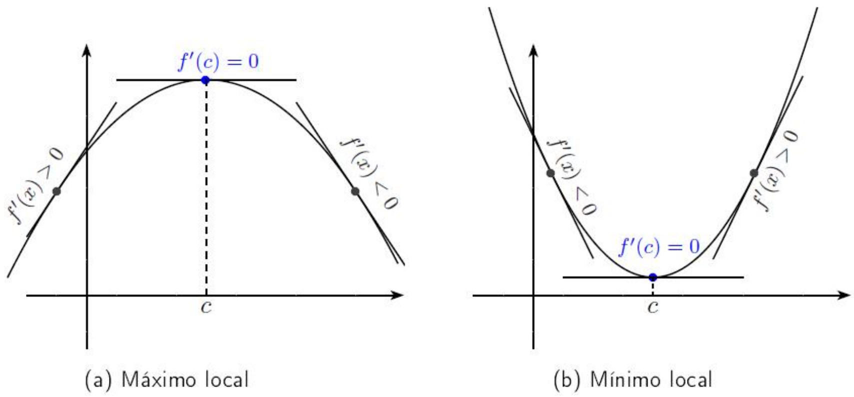

Figura 14: Ilustração: Teste da Derivada Primeira

Teorema 2.23 (Teste da Derivada Segunda)**.** Sejam f uma função derivável num intervalo (a, b) e c um ponto crítico de f neste intervalo, isto é, $f'(c) = 0$, com $a < c < b$. Se f admite a derivada f'' em (a, b), temos;

(i) Se $f''(c) < 0$, f tem um valor máximo relativo em c.

(ii) Se $f''(c) > 0$, f tem um valor mínimo relativo em c.

Demonstração. Para provar este teorema utilizaremos o seguinte resultado que entendemos ser intuitivo: "Se $\lim_{x \to a} f(x)$ existe e é negativo, existe um intervalo aberto contendo a tal que $f(x) < 0$ para todo $x \neq a$ no intervalo".

(i) Por hipótese $f''(c)$ existe e $f''(c) < 0$. Então,

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0$$

.

Portanto, existe um intervalo aberto I, contendo c, tal que

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0, \forall x \in I \quad (**)$$

Seja então A o intervalo aberto que contém todos os pontos $x \in I$ tais que $x < c$. Então, c é o extremo direito do intervalo aberto A.

Seja ainda B o intervalo aberto que contém todos os pontos $x \in I$ tais que $x > c$. Assim c é o extremo esquerdo do intervalo aberto B.

Se $x \in A$, temos $x - c < 0$. De (**), vemos que $f'(x) > f'(c)$.

Se $x \in B$, $x - c > 0$. De (**) vem que $f'(x) < f'(c)$.

Como $f'(c) = 0$, concluímos que , se $x \in A$, $f'(x) > 0$ e, se $x \in B$, $f'(x) < 0$. Pelo **Teste da Primeira Derivada**, concluímos que f tem um valor máximo relativo em c.

A prova de (ii) é totalmente análoga.

□

2.8 MÁXIMOS E MÍNIMOS EM INTERVALOS FECHADOS

Seja f um função contínua no intervalo $[a, b]$. Sabemos pelo Teorema de Weierstrass que f assume valor máximo e valor mínimo em $[a, b]$. Suponhamos que f seja derivável em (a, b). Seja $f(c)$ o valor máximo (ou mínimo) de f em $[a, b]$, neste caso ou c é uma extremidade de $[a, b]$ ou $c \in (a, b)$. Se o segundo caso ocorre, então $f'(c) = 0$ pelo Teorema 2.15. Assim, podemos escrever que

"Para se obter o valor máximo de f em $[a, b]$, é suficiente comparar os valores que f assume nas extremidades de $[a, b]$ com os assumidos nos pontos críticos que pertencem a (a, b). O valor máximo de f em $[a, b]$ será então o maior desses valores. Evidentemente, o valor mínimo de f em $[a, b]$ será o menor daqueles valores".

Exemplo 2.24. Encontrar os extremos da função $f(x) = x^3 - 9x + 3$ no intervalo $[0, 4]$.

Solução

Primeiro vamos procurar pontos críticos no intervalo $(0, 4)$. Temos que $f'(x) = 3x^2 - 9$ é a derivada primeira de f. Os pontos críticos são $x = -\sqrt{3}$ e $x = \sqrt{3}$. Observe que $x = -\sqrt{3} \notin (0, 4)$ então podemos descartá-lo. Temos que

$$f(0) = 3, \quad f(\sqrt{3}) = 3 - 6\sqrt{3} \approx -7,39 \quad e \quad f(4) = 31.$$

Podemos concluir então que, no intervalo $(0, 4)$, o valor máximo de f é 31 e ocorre no ponto $x = 4$ e o valor mínimo de f é $3 - 6\sqrt{3}$ e ocorre no ponto $x = \sqrt{3}$.

Note que f possui dois pontos críticos que poderiam ser classificados usando tanto o teste da Primeira quanto o teste da Segunda Derivada.

3 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ENCONTRAR MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES REAIS

3.1 INTRODUÇÃO

Ao resolver problemas de máximos e mínimos no ensino básico, muitas vezes nos deparamos com questionamentos dos alunos sobre o tipo de função que queremos minimizar. Muitos desses questionamentos dizem respeito a achar máximos e/ou mínimos de funções que não são quadráticas. Neste momento então, o professor normalmente diz que para estes problemas os alunos aprenderão outra ferramenta no ensino superior (A Derivada !) que os darão suporte necessário para a resolução de tais problemas.

Tendo em vista que a teoria de Derivadas é grande, e que, muitas vezes, não é apropriada para alunos do ensino básico, surge a idéia de implantar métodos numéricos para a resolução desses problemas. Acreditamos que o saldo entre apresentar um método numérico de fácil entendimento e apelo geométrico em detrimento a uma vasta teoria como é o caso da derivada seja positivo.

Neste Capítulo enfatizaremos os métodos numéricos da "Bisseção" e da "Seção Áurea" para encontrar pontos extremos de funções de uma variável real. Para tanto estaremos supondo em todo ele que a função em questão é contínua num intervalo fechado $[a, b]$. Assim pelo Teorema de Weierstrass (Teorema 2.13) temos a garantia de que existem x_1 e x_2 em $[a, b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo x em $[a, b]$.

Além disso convém observar que se uma função $f : D \to \mathbb{R}$ possui máximo em x^* então a função $g = -f$ possui mínimo em x^*.

De fato, como f tem máximo em x^* então, para todo $x \in [a, b]$ temos que $f(x) \leq f(x^*)$. Logo $g(x) = -f(x) \geq -f(x^*) = g(x^*)$, para todo $x \in [a, b]$. Portanto $g(x)$ tem um mínimo no ponto x^*. Dessa forma podemos nos ater apenas ao problema de encontrar o mínimo de uma função de uma variável real.

3.2 O MÉTODO DA BISSEÇÃO

Antes de apresentar o método vamos a uma definição e a uma proposição.

Definição 14. Dizemos que uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é **unimodal** (em $[a, b]$), quando ela possui um único ponto de mínimo x^* em $[a, b]$, e é estritamente decrescente em $[a, x^*]$ e estritamente crescente em $[x^*, b]$, ou seja,

$$f(y) > f(z) \quad \forall\, y, z \in [a, x^*],\ y < z$$

$$f(y) < f(z) \quad \forall\, y, z \in [x^*, b],\ y < z$$

Proposição 3.1. Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ uma função unimodal e x^* o mínimo de f em $[a, b]$. Então para quaisquer pontos $y,\ z \in [a, b]$ tais que $y < z$, vale o seguinte:

(a) Se $f(y) \leq f(z)$, então $x^* \in [a, z]$

(b) Se $f(y) \geq f(z)$, então $x^* \in [y, b]$

Demonstração. Prova do Item (a). Suponhamos por contradição que $f(y) \leq f(z)$, mas $x^* > z$. Neste caso ocorre que $y < z < x^*$. Logo, obrigatoriante, $f(y) > f(z)$ afinal f é unimodal. Ora mas isso é uma contradição. Portanto (a) fica provado.

A Prova do item (b) é totalmente análoga.

□

3.3 ALGORITMO DO MÉTODO DA BISSEÇÃO

Considere a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ unimodal. Abaixo segue o **Método da Bisseção**.

Escolha $a_1 = a$, $b_1 = b$ e $c_1 = (a_1 + b_1)/2$ e Calcule $f(c_1)$. Tome $k := 1$.

1. Definir $y_k = (a_k + c_k)/2$ e calcular $f(y_k)$.

   Se $f(y_k) \leq f(c_k)$, definir $a_{k+1} = a_k,\ b_{k+1} = c_k,\ c_{k+1} = y_k$ e passar ao item 3.

   Se $f(y_k) > f(c_k)$, definir $z_k = (c_k + b_k)/2$ e calcular $f(z_k)$.

2. Se $f(c_k) \leq f(z_k)$, definir $a_{k+1} = y_k,\ b_{k+1} = z_k,\ c_{k+1} = c_k$.

   Se $f(c_k) > f(z_k)$, definir $a_{k+1} = c_k,\ b_{k+1} = b_k,\ c_{k+1} = z_k$.

3. Tomar $k := k + 1$ e retornar ao Passo 1.

Abaixo seguem duas figuras que ilustram uma iteração pelo método da bisseção.

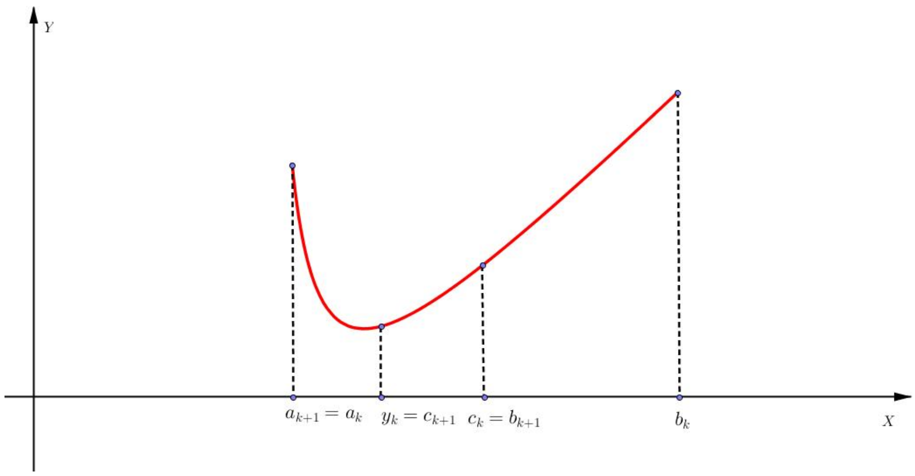

Figura 15: Uma iteração pelo Método da Bisseção

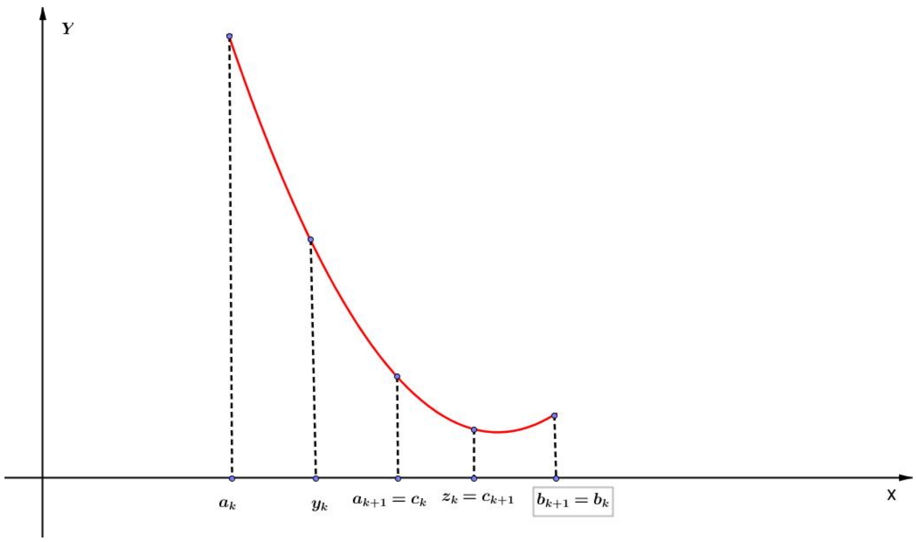

Figura 16: Uma iteração pelo Método da Bisseção

Comentários

1. Usando a proposição anterior vemos que após uma iteração temos que $x^* \in [a_2, b_2]$, após a segunda iteração vemos que $x^* \in [a_3, b_3]$ e, após a k-ésima iteração temos $x^* \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$.

2. Vemos também que $c_k = (a_k + b_k)/2$ e ainda,

$$b_{k+1} - a_{k+1} = (b_k - a_k)/2 = ... = \frac{1}{2^k}(b - a).$$

3. A cada iteração no método usamos, no máximo, o cálculo de f em dois pontos. Isto nos permite obter o erro aproximado após K iterações. Suponha que podemos fazer N avaliações (seja por conveniência $N \geq 3$ ímpar) então como cada iteração "gasta"no máximo 2 avaliações, vemos que podemos usar pelo menos $K = (N-1)/2$ iterações que não ultrapassaremos N avaliações. Daí resulta que, se tomarmos $x_{k+1} \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$, o erro pode ser aproximado por

$$|x_{k+1} - x^*| \leq b_{k+1} - a_{k+1} \leq \frac{1}{2^{(N-1)/2}}(b - a) \approx 0.707^{N-1}(b - a)$$

Observe que o aumento de N implica diminuição do erro à taxa geométrica de $0,707$ aproximadamente.

Exemplo 3.2. Seja $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Vamos encontrar o mínimo de $f(x)$ em $[-2, 3]$ pelo método da Bisseção com erro $\delta < 0,06$.

Solução

Bem, como queremos que o erro seja menor que 0.06 vamos usar a o comentário 2 e impor

$$\frac{1}{2^K}.(b - a) < 0.06 \ \text{ com } \ b = 3 \ \ e \ \ a = 2$$

segue que,

$$\frac{1}{2^K}(5) < 0.06 \Rightarrow \frac{1}{2^k} < 0.012 \Rightarrow K > \frac{log(0.012)}{log(2)} \Rightarrow K > 6,3$$

Assim tomaremos $K = 7$ Iterações para chegarmos à aproximação desejada.

Temos inicialmente que: $a_1 = -2$,$b_1 = 3$, $c_1 = 0,5$ e $f(c_1) = f(0,5) = 2,25$

1ª Iteração

$y_1 = (-2 + 0,5)/2 = -0,75$ e $f(-0,75) = 5,06$

Como $f(-0,75) > f(0,5)$ definimos $z_1 = (0,5 + 3)/2 = 1,75$ e $f(1,75) = 2,56$.

Como $f(0,5) \leq f(1,75)$ definimos

$$a_2 = -0,75, \;\; b_2 = 1,75 \;\; e \;\; c_2 = 0,5$$

2ª Iteração

$y_2 = (0,5 - 0,75)/2 = -0,125$ e $f(-0,125) = 3,27$.

Como $f(-0,125) > f(0,5)$ definimos $z_2 = (0,5 + 1,75)/2 = 1,125$ e $f(1,125) = 2,02$.

Como $f(0,5) > f(1,125)$ definimos

$$a_3 = 0,5, \; b_3 = 1,75 \;\; e \;\; c_3 = 1,125$$

3ª Iteração

$y_3 = (0,5 + 0,125)/2 = 0,8125$ e $f(0,8125) = 2,04$.

Como $f(0,8125) > f(1,125)$ definimos $z_3 = (1,125 + 1,75)/2 = 1,4375$ e $f(1,4375) = 2,19$.

Como $f(1,125) \leq f(1,4375)$ definimos

$$a_4 = 0,8125, \; b = 41,4375 \;\; e \;\; c_4 = 1,1250$$

4ª Iteração

$y_4 = (0,8125 + 1,125)/2 = 0,9687$ e $f(0,9687) = 2,0009$.

Como $f(0,9687) \leq f(1,125)$ definimos

$$a_5 = 0,8125, \;\; b_5 = 1,125 \;\; e \;\; c_5 = 0.9687$$

5ª Iteração

$y_5 = (0.8125 + 0,9687)/2 = 0,8906$ e $f(0,8906) = 2,0119$.

Como $f(0,8906) > f(0,9687)$ definimos $z_5 = (1,125 + 0,9687)/2 = 1,0468$ e $f(1,0468) = 2,0021$.

Como $f(1,0468) \leq f(0,9687)$ definimos

$$a_6 = 0,8906, \;\; b_6 = 1,0468 \;\; e \;\; c_6 = 0,9687$$

6º Iteração

$y_6 = (0,8906 + 0,9687)/2 = 0,9296$ e $f(0,9296) = 2,0049$.

Como $f(0,9296) > f(0.9687)$ definimos $z_6 = (0,9687 + 1,0468)/2 = 1,0077$ e $f(1,0077) = 2,0001$.

Como $f(0,9687) > f(1,0077)$ definimos

$$a_7 = 0,9687, \; b_7 = 1,0468 \;\; e \;\; c_7 = 1,0077$$

7º Iteração

$y_7 = (0,96875 + 1,0077)/2 = 0,988225$ e $f(0,988225) = 2,00014$

Como $f(0,988225) > f(1,0077)$ definimos $z_7 = (1,0077 + 1,0468)/2 = 1,02725$ e $f(1,02725) = 2,00074$.

Como $f(1,0077) \leq f(1,02725)$ definimos

$$a_8 = 0,988225, \; b_8 = 1,02725 \;\; e \;\; c_8 = 1,0077$$

Note que, para todo $x_8 \in [a_8, b_8]$ teremos que $|x_8 - x^*| < 0,06$. De fato, isto pode ser verificado já que pelo teste da 2ª derivada $x^* = 1$.

Note ainda que para obter a precisão desejada precisamos fazer (no mínimo) $K = 7$ iterações, o que demandou $N = 14$ avaliações de f.

Veja na figura 17 as avaliações de f que foram usadas neste exemplo.

x	f(x)
0,50000	2,25000
-0,75000	5,06250
1,75000	2,56250
-0,12500	3,26563
1,12500	2,01563
0,81250	2,03516
1,43750	2,19141
0,96875	2,00098
0,89060	2,01197
1,04680	2,00219
0,92968	2,00495
1,00770	2,00006
0,98823	2,00014
1,02725	2,00074

Figura 17: Tabela com valores de $f(x)$ para $x \in [-2, 3]$

Vamos resolver agora um problema que traria alguma dificuldade para ser resolvido com as ferramentas que disponibilizamos no ensino médio.

Exemplo 3.3. Uma caixa retangular aberta deve ser fabricada com uma folha de papelão de 15 x 30 cm, recortando quadrados nos quatro cantos e depois dobrando a folha nas linhas determinadas pelos cortes. Existe alguma medida do corte que produza uma caixa com volume máximo? Em caso afirmativo, aproxime esta medida com erro menor que $0,06$.

Solução

Vamos chamar de x o comprimento do lado do quadrado que será cortado dos cantos da folha. Veja a figura abaixo.

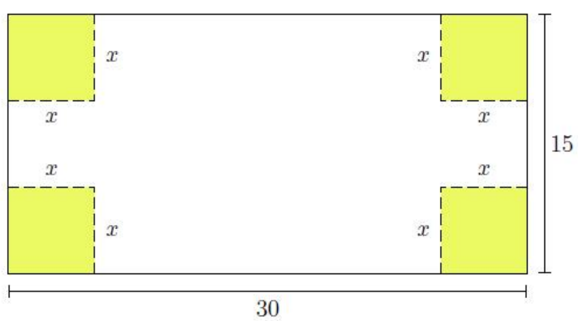

Figura 18: Quadrados cortados da folha

O volume da caixa será $V(x) = (30 - 2x).(15 - 2x).x$ afinal a área da base é um retângulo de dimensões $30 - 2x$ e $15 - 2x$ e a altura é x.

Logo o volume do recipiente em função de x pode ser dado por

$$V(x) = 4x^3 - 90x^2 + 450x$$

Observe ainda que o problema só faz sentido para $0 \leq x \leq \frac{15}{2}$ de maneira que estamos interessados em achar o valor de $x^* \in [0, \frac{15}{2}]$ que maximize o volume V da caixa.

Podemos ver que V é uma função polinomial, logo contínua. Assim, usando o Teorema de Weierstrass, temos que existe $x^* \in [0, \frac{15}{2}]$ tal que a função V assume seu valor máximo. Veja que $x^* = 0$ ou $x^* = \frac{15}{2}$ são situações que não podem ocorrer. Assim $x^* \in (0, \dfrac{15}{2})$.

Para conseguirmos um erro menor que $0,06$ devemos impor que, $\frac{1}{2^k}.(7,5 - 0) < 0,06$. Segue que,

$$\frac{1}{2^K}.(7,5) < 0,06 \Longrightarrow 2^K > \frac{7,5}{0,06} \Longrightarrow K > \frac{log(125)}{log(2)} \Longrightarrow K > 6,99$$

Então para que o erro seja menor que 0,06 devemos fazer no mínimo $K = 7$ iterações.

Agora aplicando o método da Bisseção à função $G(x) = -V(x)$ restrita ao intervalo $[0, \frac{15}{2}]$ obtemos o quadro abaixo onde K significa a iteração, em cada linha estão os valores assumidos por a_k, b_k e c_k no fim da iteração k. Observe que a ao fazer a sétima iteração o método nos forneceu $a_8 = 3,1347$ e $b_8 = 3,1933$. Sendo $b_8 - a_8 = 0,0586 < 0,06$. As contas o leitor poderá verificar sem maiores dificuldades, apenas com um pouco de paciência.

Neste exemplo para a aproximação desejada fizemos $K = 7$ iterações e o total de avaliações de f foi $N = 13$.

Iteração (k)	a_{k+1}	b_{k+1}	c_{k+1}	$b_{k+1} - a_{k+1}$
0	0,0000	7,5000	3,7500	7,5000
1	1,8750	5,6250	3,7500	3,7500
2	2,8125	4,6875	3,7500	1,8750
3	2,8125	3,7500	3,2812	0,9375
4	3,0468	3,5156	3,2812	0,4688
5	3,0468	3,2812	3,1614	0,2344
6	3,1054	3,2226	3,1640	0,1172
7	3,1347	3,1933	3,1640	0,0586

Figura 19: Tabela com as saídas após cada iteração K

Observação

Note que a função G restrita ao intervalo $[0, \frac{15}{2}]$ é unimodal (veja a figura 20). Isto é o que normalmente ocorre nos problemas de otimização no ensino médio, ou seja, no intervalo onde se deseja uma solução ou a função objeto é unimodal ou sua oposta é unimodal. No entanto, podemos verificar que aplicando o Método da Bisseção a uma função contínua não unimodal nos aproximaremos dos extremos locais da função.

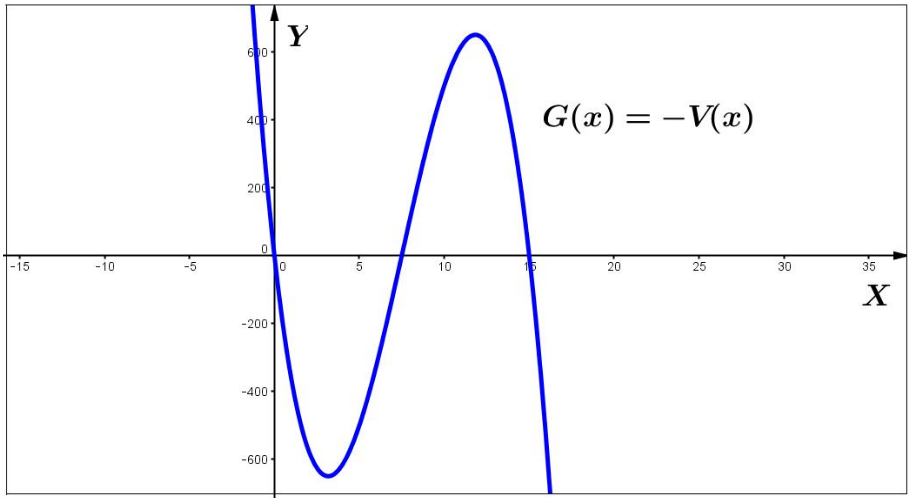

Figura 20: Gráfico de $G(x) = -V(x) = -4x^3 + 90x^2 - 450x$ com escala de 1:50

3.4 O MÉTODO DA SEÇÃO ÁUREA

Um número muito místico na matemática é o **número de ouro** (indicado por ϕ). Dizemos que um ponto x divide o segmento AB na razão áurea (também chamada razão de ouro) se x pertence a AB e $\frac{AX}{XB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$.

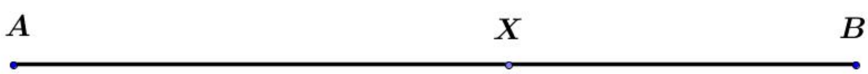

Figura 21: Ponto x dividindo AB na razão áurea

Este número aparece em muitas áreas da matemática e possui algumas propriedades interessantes, entre as quais estão:

1. $\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + ...}}}$;

2. ϕ é o único número real positivo tal que $\phi^2 - \phi - 1 = 0$

3. Na sequência de Fibonacci, a razão $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ converge para ϕ.

Muitos textos sugerem que ϕ aparece nas artes, na natureza, na arquitetura e em outros ramos das ciências aplicadas. Porém nem todas as afirmações sobre ϕ são verdadeiras. Para mais informações sobre o número de ouro ϕ consulte [6].

Neste texto o Termo "Seção Áurea" está relacionado com o número de ouro pela forma com que faremos a partição do intervalo $[a, b]$. No "Método da Bisseção" o intervalo foi particionado em dois outros de mesma amplitude, já aqui a partição é feita usando a proporção áurea. Desta forma podemos escrever que,

O termo "Seção Áurea" diz respeito à partição de um intervalo em duas partes de maneira que a razão do comprimento do intervalo original com o comprimento da parte maior é igual à razão do comprimento da parte maior com o comprimento da parte menor.

Tomemos um intervalo real $[a, b]$ e suponha que y é um ponto deste intervalo que satisfaça a propriedade acima e esteja mais próximo de a do que de b. Temos que,

$$\frac{b-a}{b-y} = \frac{b-y}{y-a}$$

Daí segue que,

$$(b-a)(y-a) = (b-y)^2 \Longrightarrow y^2 + (a-3b)y + (b^2 + ab - a^2) = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow y = \frac{3b - a \pm \sqrt{5.(a-b)^2}}{2} \Longrightarrow y = \frac{3b - a \pm \sqrt{5}.(b-a)}{2} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow y = a + \frac{3+\sqrt{5}}{2}.(b-a) \quad ou \qquad y = a + \frac{3-\sqrt{5}}{2}.(b-a)$$

Claramente $y = a + \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}.(b-a)$ não convém pois neste caso tem-se $y > b$.

Portanto temos que $y = a + \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}.(b-a)$.

Como $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0.382$ podemos escrever que,

$$y = (a, b) \approx a + 0.382(b-a)$$

O segundo ponto (z) que realiza a seção áurea é tal que,

$$\frac{b-a}{z-a} = \frac{z-a}{b-z}$$

Contas análogas às feitas acima nos leva a,

$$z = a + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a) \Longrightarrow z \approx a + 0.618(b-a)$$

Os números y e z acima são chamados de **menor e maior ponto da seção áurea**, respectivamente.

Proposição 3.4. Sejam y e z o menor e o maior ponto da partição de $[a, b]$, respectivamente. Então,

(a) $z - a = b - y = (\sqrt{5} - 1)(b - a)/2$;

(b) y é o maior ponto da partição de $[a, z]$, e z é o menor ponto da partição de $[y, b]$.

Demonstração. (a) Temos que,

$$z - a = a + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a) - a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a).$$

Além disso,

$$b - y = b - \left[a + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b-a)\right] = \frac{(b-a).(2-3+\sqrt{5})}{2} = (b-a)\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Portanto $z - a = b - y = (b-a)\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

(b) Seja M o maior ponto da partição de $[a, z]$. Isto é,

$$M = a + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(z-a)$$

Usando a expressão para z vem que,

$$M = a + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(z-a) = a + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\left[a + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a) - a\right] = a + (b-a)\frac{(5-2\sqrt{5}+1)}{4} =$$

$$= a + (b-a)\frac{3-\sqrt{5}}{2} = y.$$

Além disso, se m é o menor ponto da partição de $[y, b]$, então,

$$m = y + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b-y)$$

Usando a expressão para y vem que,

$$m = y + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b-y) = \left[a + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b-a)\right] + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\left[(b-a) - \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b-a)\right] =$$

$$= a + \frac{b-a}{2}[(3-\sqrt{5}) + (2\sqrt{5}-4)] = a + \frac{b-a}{2}(\sqrt{5}-1) = z.$$

$\square$

3.5 ALGORITMO DO MÉTODO DA SEÇÃO ÁUREA

Considere a função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ unimodal. Segue abaixo o **algoritmo do Método da Seção Áurea**.

Definir $a_1 = a,\ b_1 = b,\ y_1 = y(a, b),\ z_1 = z(a, b)$. Calcular $f(y_1)$. Tomar $K := 1$.

1. Calcular aquele valor entre $f(y_k)$ e $f(z_k)$, que ainda não foi calculado

Se $f(y_k) \leq f(z_k)$, definir $a_{k+1} = a_k,\ b_{k+1} = z_k,\ y_{k+1} = y(a_{k+1}, b_{k+1}),\ z_{k+1} = y_k$.

Se $f(y_k) > f(z_k)$, definir $a_{k+1} = y_k,\ b_{k+1} = b_k,\ y_{k+1} = z_k,\ z_{k+1} = z(a_{k+1}, b_{k+1})$.

2. Tomar $k := k + 1$ e retornar ao Passo 1.

Abaixo segue figura que ilustra uma iteração pelo método da seção áurea.

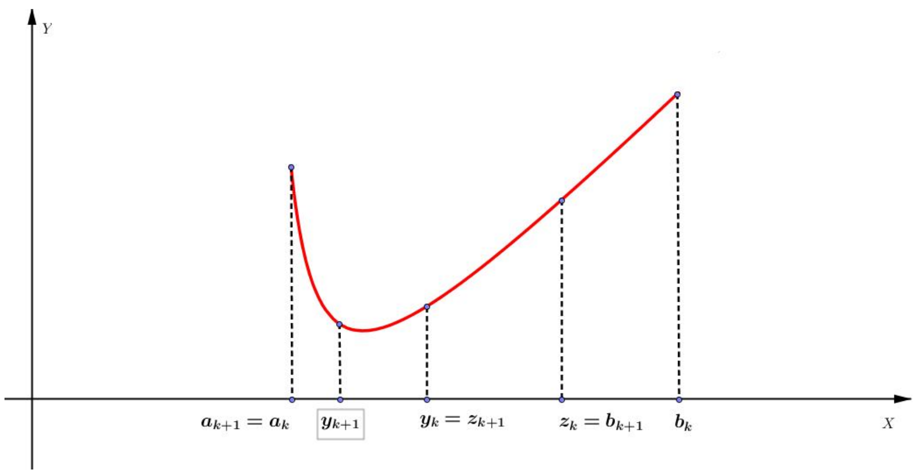

Figura 22: Uma iteração pelo Método da Seção Áurea

Comentários

1. Observe que pela proposição 3.4 (letra b) temos a garantia de que $y_{k+1} = y(a_{k+1}, b_{k+1})$, $z_{k+1} = (a_{k+1}, b_{k+1})$. Além disso pela proposição 3.1 garantimos também que $x^* \in$

$[a_{k+1}, b_{k+1}]$. Usando agora a proposição 3.4 em sua letra (a) podemos escrever que,

$$b_{k+1} - a_{k+1} = (\sqrt{5}-1)(b_k - a_k)/2 = ... = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^k (b-a).$$

Assim, como aproximação seguinte à solução x^*, podemos tomar qualquer ponto $x_{k+1} \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$.

2. Note ainda que cada iteração do método requer a avaliação de f num único ponto (graças à propriedade descrita na letra b da proposição 3.4). Assim N avaliações da função f permitem fazer $k = N-1$ iterações do método, o que resulta que uma estimativa para o erro é:

$$|x_{k+1} - x^*| \leq b_{k+1} - a_{k+1} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{N-1} (b-a) \approx 0.618^{N-1}(b-a).$$

Logo com o aumento de N (ou de k), o erro diminui com taxa, pelo menos, geométrica com $q \approx 0.618$.

3. Embora o número de iterações no método da Seção Áurea em geral seja maior quando comparado com o da Bisseção, entendemos que o primeiro é mais eficiente. Comparando o comportamento do erro no método da bisseção com o erro no método da seção áurea, verificamos que fixado o número N de avaliações permitidas, este último método apresenta um erro menor. A simplicidade do algoritmo aliado ao fato de que nele necessitamos apenas de uma avaliação em cada iteração reforça a eficiência do método da Seção Áurea.

Exemplo 3.5. Resolva o exemplo 3.2 usando o Método da Seção Áurea.

Solução

Primeiramente vamos calcular o número mínimo de iterações K para se conseguir a aproximação desejada. Para que o erro seja menor que $0,06$ devemos impor que,

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^k .(3+2) < 0.06$$

Daí segue que,

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^k.(3+2) < 0.06 \Longrightarrow \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^k < 0.012 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow k.log\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) < log(0.012) \Longrightarrow k > \frac{log(0.012)}{log(0.618)} \Longrightarrow k > 9,19.$$

Assim necessitamos de no mínimo $k = 10$ iterações para conseguir a aproximação menor que $0,06$.

Temos inicialmente que $a_1 = -2$, $b_1 = 3$, $y_1 = -2 + 0,382.5 = -0,09$ e $z_1 = -2 + 0,618.5 = 1,09$.

e ainda, $f(y_1) = f(-0,09) = 3,1881$.

Para não ser demasiadamente longo, sintetizamos os resultados das iterações na tabela abaixo.

Iteração (k)	a_{k+1}	b_{k+1}	Y_{k+1}	z_{k+1}	$b_{k+1} - a_{k+1}$
0	-2,0000	3,0000	-0,0900	1,0900	5,0000
1	-0,0900	3,0000	1,0900	1,8196	3,0900
2	-0,0900	1,8196	0,6395	1,0900	1,9096
3	0,6395	1,8196	1,0900	1,3688	1,1801
4	0,6395	1,3688	0,9181	1,0900	0,7293
5	0,6395	1,0900	0,8116	0,9181	0,4505
6	0,8116	1,0900	0,9181	0,9836	0,2784
7	0,9181	1,0900	0,9836	1,0243	0,1719
8	0,9181	1,0243	0,9586	0,9836	0,1062
9	0,9586	1,0243	0,9836	0,9992	0,0657
10	0,9836	1,0243	0,9992	1,0087	0,0407

Figura 23: Tabela com as saídas após cada iteração K

Note que, apesar de necessitarmos de $K = 10$ iterações (3 a mais que no método da bisseção) foram necessárias apenas $N = 11$ avaliações de f (em detrimento a $N = 14$ no outro método).

4 ATIVIDADES PROPOSTAS: PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO COM RESOLUÇÃO NUMÉRICA

4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentamos algumas atividades sobre máximos e mínimos que envolvem situações onde a modelagem matemática do problema nos leva a funções que normalmente o aluno do ensino básico não está acostumado a trabalhar. Neste momento, acreditamos que uma abordagem numérica pode agregar valores na resolução do problema. Para isso vamos observar que em geral os problemas de máximos e mínimos são modelados por funções contínuas que são unimodais (ou que suas opostas são unimodais) no intervalo onde o problema faz sentido.

As atividades foram elaboradas para serem aplicadas na primeira série do ensino médio, momento em que normalmente estão sendo introduzidos os conceitos de funções. Acreditamos que, para cada atividade, o professor deve separar cerca de três aulas de 50 minutos cada. A Primeira para introduzir o problema e explorá-lo ao máximo, colocando sua aplicabilidade e relevância na vida prática. A segunda para explicar e ilustrar o método da seção áurea com o objetivo de fazer com que o aluno entenda o algoritmo do método. Na última aula é o momento de aplicar o método ao problema com o uso de calculadora e/ou planilha eletrônica.

A escolha do "Método da Seção Áurea" se deve apenas por entendermos que seu algoritmo pode ser mais facilmente entendido e assimilado pelo aluno e também pela maior facilidade em programar numa planilha eletrônica este método. Mas o professor pode escolher o "Método da Bisseção"caso julgue mais adequado.

4.2 O PROBLEMA DAS CAIXAS

Descrição do Problema

O problema das Caixas é um problema tradicional num primeiro curso de Cálculo. Trata-se de recortar um quadrado em cada canto de uma folha de papel retangular (de dimensões fixadas). Dobrando-se a folha pelos vincos formados assim, obtemos uma caixa retangular (um paralelepípedo) sem tampa. O problema consiste em determinar o comprimento dos lados dos quadradinhos que proporcionam o volume máximo da caixa. Suponhamos que os lados da folha possuam medidas 30 cm e 15 cm. Veja a figura abaixo.

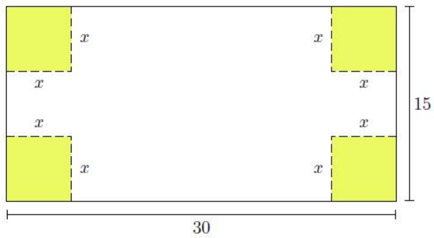

Figura 24: Quadradinhos recortados da folha

É interessante notar que este problema pode ser aplicado a alunos de várias séries do ensino básico. Os pré-requisitos são saber o que é um paralelepípedo e ter noção de volume. Para as séries finais do ensino fundamental acreditamos que a utilização de materiais concretos pode acrescentar a questão da construção propriamente dita, enfatizando o caráter concreto da matemática e fortalecendo os conceitos geométricos envolvidos. Já para os alunos do ensino médio, que possuem conhecimento da teoria de volumes e poliedros, a construção pode ser opcional. Tudo a cargo do professor.

De qualquer forma acreditamos que o problema é igualmente interessante para esses dois públicos.

Materiais usados

- Uma folha de cartolina
- Tesoura
- Fita crepe ou durex
- Areia fina
- Régua

- Calculadora

Primeiro pedimos para que cada aluno faça sua caixa cortando um quadradinho que achar interessante. Para as séries iniciais talvez seja interessante o professor fazer uma caixa primeiro para que os alunos possam ver a construção. Digamos cortando os quadradinhos de lado 1 cm por exemplo. Aqui pode ser um bom momento para reforçar a questão do perpendicularismo tanto no quadrado como no paralelepípedo.

Após cada aluno ter construído sua caixa, pedimos para que calcule o volume do recipiente, anotando numa folha o valor do lado do quadrado cortado e o valor do volume encontrado. Neste momento, para séries finais do ensino fundamental seja interessante o uso da areia para fomentar as discussões sobre volume. Já no ensino médio o volume pode ser calculado sem o uso da areia.

Construindo um plano cartesiano no quadro o professor pode pedir para que cada aluno diga em voz alta o lado do quadrado cortado e o volume calculado de sua caixa. O professor pode pedir auxílio aos demais alunos para conferir se o volume realmente foi calculado corretamente. Momento ideal para reforçar as idéias sobre o plano cartesiano.

Ao marcar os pontos no plano um questionamento pode ser fundamental: Por que não aparece quadradinhos com lados maiores que $7,5$?

Entendemos que os alunos sairão deste questionamento de forma rápida e correta, já que pela experiência verão que se o lado do quadrado for x então $x \leq 7,5$ afinal se cortarmos de forma que o quadradinho tenha lado igual a $7,5$ obteremos uma figura plana que pode ser enchergada como um paralelepípedo de volume 0 (zero). E ainda, não haverá possibilidade de se cortar $x > 7,5$. Também será imediato (acreditamos!) a conclusão dos alunos de que $x \geq 0$. Portanto $0 \leq x \leq 7,5$.

Modelagem do Problema

Bem, entendido que o domínio é $D = \{x \in \mathbb{R}/0 \leq x \leq 7,5\}$ podemos modelar o problema, isto é, achar a função $V(x)$ que nos fornece o valor do volume em função do lado do quadradinho cortado.

O volume da caixa será $V(x) = (30 - 2x).(15 - 2x).x$ afinal a área da base é a de um retângulo de dimensões $30 - 2x$ e $15 - 2x$ e a altura é x. Logo o volume do recipiente em função de x pode ser dado por,

$$V(x) = 4x^3 - 90x^2 + 450x$$

Agora um questionamento natural é: Como calcular com uma certa precisão o valor de x para que o volume seja máximo?

Muito provavelmente os alunos já terão uma boa idéia da resposta pelo que viram no plano cartesiano. Então talvez algum aluno mais atirado responda dando algum valor que julga correto como $x = 3$. Entendemos que é o momento ideal para se falar em erro.

Pertinente agora é: Se queremos uma resposta cuja distorção em relação à real seja menor que um certo valor como devemos proceder? Isto é, se o erro na nossa estimativa deve ser menor que $0,08$ por exemplo, como fazer? Existe algum método para fazermos isso?

Aqui podemos colocar que iremos usar um método numérico para responder a esse questionamento. Enfatizar a diferença entre método numérico e método analítico pode ser feito neste momento.

Será interessante observar que com os próprios pontos que os alunos nos forneceram do gráfico de $V(x)$ para $0 \leq x \leq 7,5$ podemos mostrar a eles a idéia do Método da Seção Áurea. No entanto será necessário convencê-los de que a função,

$$G(x) = -V(x)$$

Possui o mesmo ponto crítico de $V(x)$ no intervalo $0 \leq x \leq 7,5$. Creio que isso não será difícil.

A aplicação do Método da Seção Áurea

A escolha do método da Seção Áurea se deve a sua maior eficiência quando comparado com o da Bisseção e também pela maior simplicidade de seu algoritmo, do ponto de vista didático.

Entendemos que o professor deve separar uma aula para explicar o método da Seção Áurea aos seus alunos. Falar sobre o erro e sobre a quantidade de iterações e de avaliações.

Na próxima aula, vamos às contas!

Para que o erro δ seja menor que 0,08, devemos impor que o número de iterações K

seja tal que,

$$k > \frac{log\ 0,08/7,5}{log\ 0,618} \Longrightarrow k > 9,43.$$

Assim tomaremos $k = 10$ iterações para obter a aproximação desejada. Necessitaremos assim de $N = 11$ avaliações de $G(x)$.

Inicialmente temos que $a_1 = 0$, $b_1 = 7,5$ $y_1 = 0 + 0,382.(7,5) = 2,8650$, $z_1 = 0 + 0,618.(7,5) = 4,6350$ e ainda, $G(y_1) = G(2,8650) = -644,5760$.

1ª Iteração

$f(z_1) = f(4,6350) = -550,5587.$

Como $f(y_1) \leq f(z_1)$ definimos

$a_2 = 0,\ b_2 = 4,6350,\ y_2 = 0 + 0,382.(4,6350) = 1,7706\ \ e\ \ z_2 = 2,8650$

2ª Iteração

Como $f(y_2) > f(z_2)$ definimos

$a_3 = 1,7706,\ b_3 = 4,6350,\ y_3 = 2,8650\ e\ z_3 = 1,7706 + 0,618.(4,6350 - 1,7706) =$
$= 3,5408$

3ª Iteração

...

10ª Iteração

$f(y_{10}) = f(3,1606) = -649,5146$

Como $f(y_{10}) \leq f(z_{10})$ definimos

$a_{11} = 3,1229,\ b_{11} = 3,1840,\ y_{11} = 3,1462\ \ e\ \ z_{11} = 3,1606$

Note que $\forall x \in [a_{11}, b_{11}]$ temos que o erro é menor que $0,08$. De fato, $b_{11} - a_{11} = 0,0611$.

Neste passo a utilização de uma calculadora e/ou planilha eletrônica é fundamental para as avaliações de $G(x)$. Eis mais um desdobramento importante da atividade: reforçar a utilização de tecnologias computacionais no ensino básico.

Abaixo seguem duas figuras: a primeira se refere às avaliações de $G(x)$, e a segunda aos valores de a_{k+1} e b_{k+1} após cada iteração.

x	V(x)	G(x)
2,8650	644,5760	-644,5760
4,6350	550,5587	-550,5587
1,7706	536,8213	-536,8213
3,5408	642,5740	-642,5740
2,4468	620,8396	-620,8396
3,1229	649,4040	-649,4040
3,2826	648,8645	-648,8645
3,0245	648,4086	-648,4086
3,1840	649,5087	-649,5087
3,2216	649,3806	-649,3806
3,1606	649,5146	-649,5146

Figura 25: Avaliações de $G(x)$

Iteração (k)	a_{k+1}	b_{k+1}	Y_{k+1}	Z_{k+1}	$b_{k+1} - a_{k+1}$
0	0,0000	7,5000	2,8650	4,6350	7,5000
1	0,0000	4,6350	1,7706	2,8650	4,6350
2	1,7706	4,6350	2,8650	3,5408	2,8644
3	1,7706	3,5408	2,4468	2,8650	1,7702
4	2,4468	3,5408	2,8650	3,1229	1,0940
5	2,8650	3,5408	3,1229	3,2826	0,6758
6	2,8650	3,2826	3,0245	3,1229	0,4176
7	3,0245	3,2826	3,1229	3,1840	0,2581
8	3,1229	3,2826	3,1840	3,2216	0,1597
9	3,1229	3,2216	3,1606	3,1840	0,0987
10	3,1229	3,1840	3,1462	3,1606	0,0611

Figura 26: Tabela com as saídas após cada iteração K

Assim podemos tomar $x = 3,16$ cm que obteremos a aproximação desejada para o valor do lado do quadradinho. Note que, para este valor de x, o volume é cerca de $649,51$ cm^3.

4.3 O PROBLEMA DO ABASTECIMENTO DE ÁGUA

Descrição do Problema

O problema do abastecimento de água é bem interessante pois provém de uma situação bem rotineira em engenharia civil. Trata-se de determinar a maneira mais econômica de levar água potável de uma central de abastecimento situada numa margem de um rio até um conjunto habitacional situado na outra margem do rio, conhecendo-se, de antemão, os custos da obra tanto através do rio como em terra firme.

Suponhamos que o conjunto habitacional esteja a 2000 metros abaixo da central de abastecimento, que a largura do rio seja de 500 metros e que os custos da obra através do rio e em terra firme por metro sejam de R$ 640, 00 e R$ 312, 00 respectivamente. Qual será a maneira mais econômica de se fazer esta instalação? Veja a figura abaixo.

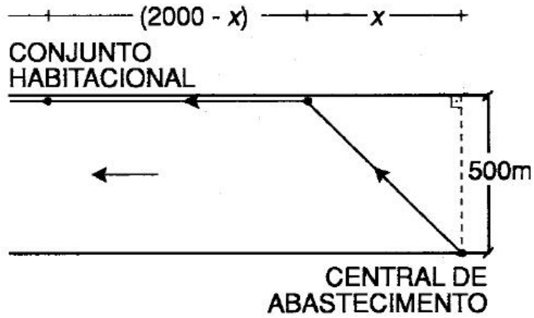

Figura 27: O problema do Abastecimento de Água

Modelagem do Problema

Seja x a distância entre o ponto que é a projeção ortogonal da central de abastecimento sob a outra margem e o ponto que indicará onde a tubulação passará para terra firme. Assim podemos estimar o custo da obra ao longo do rio por $(\sqrt{x^2 + 500}).640$. Já o custo da obra em terra firme é $(2000 - x).312$. Portanto, o custo total da obra pode ser expresso pela função,

$$C(x) = (2000 - x).312 + (\sqrt{x^2 + 500^2}).640$$

Nosso problema então consiste em determinar o valor de x que faça o custo $C(x)$ ser mínimo. Aqui cabe uma pergunta: Qual é o menor e o maior valor que x pode assumir? Entendemos que a resposta dos alunos será rápida e pronta: O menor valor que x pode assumir é $x = 0$ e o maior é $x = 2000$.

Será então natural definir o domínio da função $C(x)$ como $D = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 2000\}$

Neste momento talvez seja interessante que a turma experimente valores para x, afinal é razoável esperar que os alunos entendam que se o custo menor por metro é feito em terra firme então deve-se usar o menor valor possível para x, isto é, $x = 0$. Esta tese cairá por terra ao fazermos uma tabela com alguns valores de x e suas respectivas Imagens. É uma sugestão pedir cada aluno para calcular valores para x em progressão aritmética de razão 100 por exemplo. Veja a tabela abaixo.

Os alunos para isso poderão usar a calculadora.

Caso o professor disponha de laboratório de informática com alguma planilha eletrônica acreditamos ser o momento ideal para introduzir a utilização da planilha eletrônica na turma. Para produzir a tabela acima basta seguir os seguintes passos.

x	C(x)
0	R$ 944.000,00
100	R$ 919.137,25
200	R$ 906.250,55
300	R$ 903.580,92
400	R$ 908.999,95
500	R$ 920.548,34
600	R$ 936.655,98
700	R$ 956.148,82
800	R$ 978.174,79
900	R$ 1.002.120,33
1000	R$ 1.027.541,75
1100	R$ 1.054.114,94
1200	R$ 1.081.600,00
1300	R$ 1.109.816,85
1400	R$ 1.138.628,40
1500	R$ 1.167.928,85
1600	R$ 1.197.635,50
1700	R$ 1.227.682,89
1800	R$ 1.258.018,67
1900	R$ 1.288.600,49
2000	R$ 1.319.393,80

Figura 28: Tabela com alguns valores de x e suas respectivas imagens por $C(x)$

1. abrir uma planilha eletrônica (No Broffice, usamos o Calc).
2. Clicar na célula "A5"e digitar X depois clicar na cédula "B6"e digitar "C(x)".
3. Clicar na célula "A6"e digitar "0".
4. Clicar na célula "A7"e digita a fórmula "$= A6 + 100$".
5. Clicar na célula "A7"e, com o cursor no canto inferior direito, arrastar a cédula até a célula "A26".
6. Clicar na célula "B6"e digitar a fórmula

   "$= (2000 - A6)$*$312 + (raiz(A6$^$2 + 500$^$2))$*640"
7. Novamente usar o recurso arrastar até a celula "B26".

Pronto, a tabela está pronta!

Note que a própria planilha pode ser usada para gerar um gráfico. Por exemplo o gráfico abaixo foi obtido selecionando toda a planilha, clicando no ícone "GRÁFICO"do Calc, escolhendo o tipo de gráfico "Linha"e a opção "Somente pontos".

Aqui será interessante que os alunos percebam tanto na tabela da figura 28 quanto no gráfico da figura 29 que o valor que queremos (se é que existe!!!) está entre $x = 200$ e

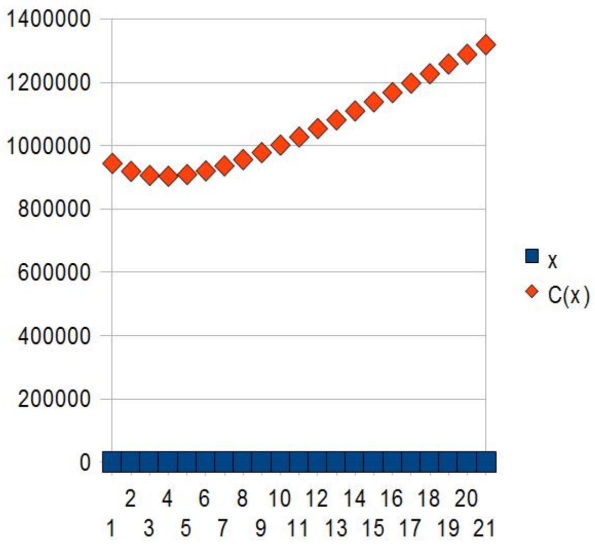

Figura 29: Gráfico de Pontos da Função $C(x)$ usando a Tabela da figura 28

$x = 500$. Na verdade o gráfico não é melhor que a tabela para isso, afinal pela tabela já era possível entender que o valor que queremos está entre $x = 200$ e $x = 400$. De qualquer forma é mais um recurso que abordamos que é útil também para que o aluno entenda o comportamento da função no intervalo $0 \leq x \leq 2000$.

Para o professor, cabe notar que, embora o gráfico acima seja discreto, a função é contínua. Isto pode ser constatado facilmente usando os resultados do capítulo 2. Em particular a existência do ponto de mínimo de $C(x)$ é garantida pelo teorema de Weierstrass.

Aplicação do Método da Seção Áurea

Como enfatizamos no "Problema das Caixas", é muito importante que os alunos desde cedo se familiarize com a utilização de tecnologias computacionais no ensino da matemática.

Para isso, vamos abordar o Método da Seção Áurea aqui usando diretamente uma planilha eletrônica. Ela permite que as contas sejam feitas de forma bem mais rápida ao mesmo tempo que nos permite estabelecer relações entre valores. Suponha então que queremos achar o valor de x que minimize $C(x)$ para $0 \leq x \leq 2000$. Suponha que o erro máximo que queremos admitir seja $0,001$.

Assim para que o erro seja menor que 0,001 devemos ter que,

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^k.(2000-0) < 0,001 \Longrightarrow \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^k < 5.10^{-7} \Longrightarrow k > \frac{log(5.10^{-7})}{log(0,618034)} \Longrightarrow k > 30,15$$

Assim teremos de fazer no mínimo 31 iterações para conseguirmos a precisão desejada. Algo no mínimo trabalhoso de se fazer apenas com lápis, papel e uma calculadora não acha?

Vamos à planilha.

Os passos são:

1. Abra uma planilha eletrônica (use o Calc do BrOffice).
2. Na linha 5 escreva : Iteração(K),a_{k+1}, b_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1}, $f(y_{k+1})$, $f(z_{k+1})$, $b_{k+1} - a_{k+1}$, respectivamente nas colunas A,B,C,D,E,F,G e H.
3. Digite na célula A6 o valor 0 (zero).
4. Na célula "A7"digite "$= A6 + 1$"e arraste a fórmula clicando no extremo inferior direito até a célula "A37".
5. Escreva nas células "B6"e "C6"os valores 0 (zero) e 2000, respectivamente.
6. Na célula "D6"escreva a fórmula "$= B6 + ((3 - RAIZ(5))/2)^*(C6 - B6)$".
7. Na celula "E6"escreva a fórmula "$= B6 + ((RAIZ(5) - 1)/2)^*(C6 - B6)$".
8. Na celula "F6"escreva a fórmula "$= (2000-D6)^*312+(RAIZ(D6\hat{}2+500\hat{}2)^*640)$".
9. Na celula "G6"escreva a fórmula "$= (2000-E6)^*312+(RAIZ(E6\hat{}2+500\hat{}2)^*640)$".
10. Na célula "H6"escreva a fórmula "$= C6 - B6$"
11. Na célula "B7"escreva a fórmula "$= SE(F6 <= G6; B6; D6)$".
12. Na célula "C7"escreva a fórmula "$= SE(F6 <= G6; E6; C6)$".
13. Na célula "D7"escreva a fórmula

    "$= SE(F6 <= G6; B7 + ((3 - RAIZ(5))/2)^*(C7 - B7); E6)$".
14. Na célula "E7"escreva a fórmula

    "$= SE(F6 <= G6; D6; B7 + ((RAIZ(5) - 1)/2)^*(C7 - B7))$".

15. Por fim, use o recurso de arrastar para estender as fórmulas das células "B7","C7","D7","E7","F6","G6"e "H6"até a linha 37.

Pronto! a planilha está pronta. Observe que o erro ao se tomar qualquer $x_{32} \in [a_{32}, b_{32}]$ é menor que $0,001$. Basta notar o valor contido na célula "H37".

Abaixo segue a tabela formada com a planilha feita acima, onde destacamos o valor da célula "H37"na linha da iteração 31.

Iteração (K)	a_{k+1}	b_{k+1}	y_{k+1}	z_{k+1}	$f(y_{k+1})$	$f(z_{k+1})$	$b_{k+1} - a_{k+1}$
0	0,00000	2000,00000	763,93202	1236,06798	969981,31758	1091700,82824	2000,00000
1	0,00000	1236,06798	472,13595	763,93202	916812,77346	969981,31758	1236,06798
2	0,00000	763,93202	291,79607	472,13595	903466,53575	916812,77346	763,93202
3	0,00000	472,13595	180,33989	291,79607	907912,15218	903466,53575	472,13595
4	180,33989	472,13595	291,79607	360,67977	903466,53575	906037,07154	291,79607
5	180,33989	360,67977	249,22359	291,79607	903791,17091	903466,53575	180,33989
6	249,22359	360,67977	291,79607	318,10730	903466,53575	904023,96917	111,45618
7	249,22359	318,10730	275,53483	291,79607	903405,00342	903466,53575	68,88371
8	249,22359	291,79607	265,48483	275,53483	903480,07296	903405,00342	42,57247
9	265,48483	291,79607	275,53483	281,74607	903405,00342	903402,17590	26,31123
10	275,53483	291,79607	281,74607	285,58483	903402,17590	903416,78832	16,26124
11	275,53483	285,58483	279,37359	281,74607	903399,37336	903402,17590	10,05000
12	275,53483	281,74607	277,90731	279,37359	903400,03601	903399,37336	6,21124
13	277,90731	281,74607	279,37359	280,27980	903399,37336	903399,87967	3,83876
14	277,90731	280,27980	278,81352	279,37359	903399,41000	903399,37336	2,37248
15	278,81352	280,27980	279,37359	279,71973	903399,37336	903399,48430	1,46627
16	278,81352	279,71973	279,15966	279,37359	903399,35581	903399,37336	0,90621
17	278,81352	279,37359	279,02745	279,15966	903399,36446	903399,35581	0,56007
18	279,02745	279,37359	279,15966	279,24137	903399,35581	903399,35791	0,34614
19	279,02745	279,24137	279,10916	279,15966	903399,35735	903399,35581	0,21393
20	279,10916	279,24137	279,15966	279,19087	903399,35581	903399,35594	0,13221
21	279,10916	279,19087	279,14037	279,15966	903399,35614	903399,35581	0,08171
22	279,14037	279,19087	279,15966	279,17158	903399,35581	903399,35576	0,05050
23	279,15966	279,19087	279,17158	279,17895	903399,35576	903399,35579	0,03121
24	279,15966	279,17895	279,16703	279,17158	903399,35577	903399,35576	0,01929
25	279,16703	279,17895	279,17158	279,17440	903399,35576	903399,35577	0,01192
26	279,16703	279,17440	279,16984	279,17158	903399,35576	903399,35576	0,00737
27	279,16703	279,17158	279,16877	279,16984	903399,35576	903399,35576	0,00455
28	279,16877	279,17158	279,16984	279,17051	903399,35576	903399,35576	0,00281
29	279,16984	279,17158	279,17051	279,17092	903399,35576	903399,35576	0,00174
30	279,16984	279,17092	279,17025	279,17051	903399,35576	903399,35576	0,00107
31	279,16984	279,17051	279,17010	279,17025	903399,35576	903399,35576	0,00066

Figura 30: Tabela do Problema do Abastecimento de Água

Portanto para que o custo $C(x)$ da obra seja mínimo (e levando em consideração a aproximação desejada) podemos tomar $x = y_{32} = 279,17\ metros$.

O Gráfico de $C(x)$ pode ser visto abaixo onde usamos o GeoGebra.

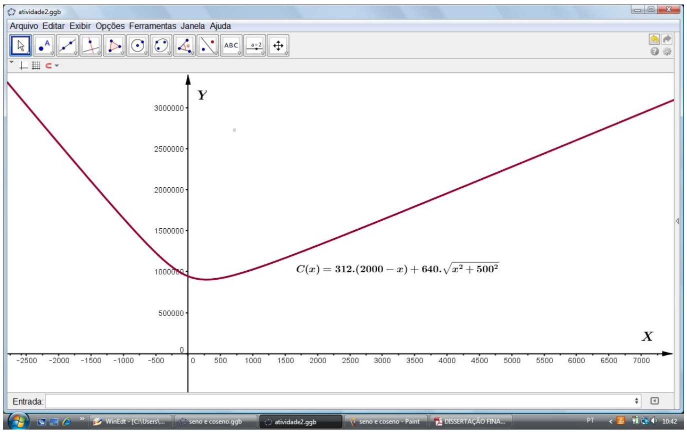

Figura 31: Gráfico da função $C(x)$ no GeoGebra

4.4 O PROBLEMA DA FORÇA MÍNIMA

Descrição do Problema

Descrevo agora um problema que apareceu em sala de aula há um certo tempo atrás. Trata-se de um problema físico com alguns desdobramentos.

Ao entrar em sala de aula observei que os alunos estavam fazendo um exercício de física que estava posto no quadro negro.

O problema era o seguinte:

Um menino deseja deslocar um bloco de madeira sobre o chão horizontal puxando uma corda amarrada ao bloco. Sabendo-se que o coeficiente de atrito estático entre a madeira e o chão vale 0,4, que a massa do bloco é 42 kg e que a aceleração da gravidade é igual a $10m/s^2$, e considerando $\sqrt{3} = 1,7$, qual a intensidade da força que o menino deve puxar a corda para deslocar o bloco, se a direção da corda forma com o chão um ângulo de 60°?

Um estudante me questionou se eu saberia resolver e então nos dispusemos a pensar no problema.

Primeiro concordamos que as forças envolvidas eram: a força que o menino deveria fazer para mover o objeto (F), o Peso do bloco ($P = mg$), a força Normal (N) no sentido oposto ao peso e, por fim, a força de atrito ($F_a = \mu N$). Os alunos entenderam que as componentes horizontal e vertical da força F eram $F_x = F.cos(60^o)$ e $F_y = F.sen(60^o)$. A figura abaixo resume nosso esquema.

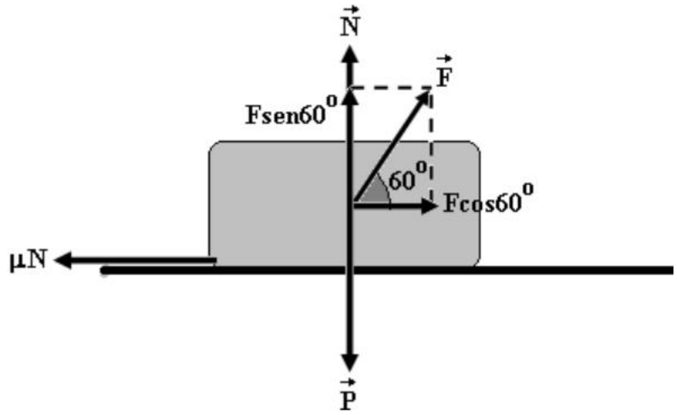

Figura 32: Esquema de forças

Na vertical temos que:

$F_R = 0 \Longrightarrow N + F.sen(60^o) - P = 0 \Longrightarrow N = P - F.sen(60^o).$

Já na horizontal temos que:

$$F_R = m.a \Longrightarrow F.cos(60^o) - \mu.N = 0 \Longrightarrow F.cos(60^o) - \mu.(P - F.sen(60^o)) = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow F.cos(60^o) + F.sen(60^o)\mu - \mu.P = 0 \Longrightarrow F = \frac{\mu.m.g}{cos(60^o) + \mu.sen(60^o)} \quad (*)$$

Substituindo os valores de $\mu,\ m,\ g,\ cos(60^o)\ \ e\ \ sen(60^o)$ temos:

$$F = \frac{0,4.10.42}{1/2 + (\sqrt{3}/2).0,4} \Longrightarrow F = 200N$$

Portanto o menino deve fazer uma força de intensidade $F = 200N$ para mover o bloco.

Assim chegamos à resposta do problema.

Desdobramentos

Hoje, pensando no problema, um questionamento poderia ter sido feito: Existe um ângulo θ que proporciona uma força mínima a ser feita pelo menino afim de mover o objeto?

Como parece ser consenso de que o ângulo θ (em radianos) deve satisfazer $0 \le \theta \le \pi/2$, o que queremos com esta pergunta é descobrir o ângulo θ neste intervalo que minimiza a função:

$$F(\theta) = \frac{168}{0,4.sen(\theta) + cos(\theta)}$$

Observemos para o professor que esta pergunta não é trivial para alunos do ensino médio pois não se trata de uma função quadrática. Além disso, talvez pareça demasiadamente difícil para os alunos encontrar tal valor de θ se é que este existe.

Claro que o professor tomado pelos resultados do capitulo 2 poderá chegar à conclusão de que o valor de θ que minimiza F existe, já que F é uma função contínua no intervalo citado. Entendemos que reside aí a importância dos resultados do capítulo 2 neste texto.

Aqui sugerimos que o professor questione os alunos com relação a maneira de se fazer $F(\theta)$ ser mínima. Entendemos que os alunos devem notar que $F(\theta)$ será mínima se a expressão no denominador $0,4.sen(\theta) + cos(\theta)$ for máxima.

Agora talvez seja o momento ideal para que o professor possa introduzir as funções trigonométricas $f(\theta) = sen(\theta)$ e $g(\theta) = cos(\theta)$. Neste momento, em que os alunos estarão certos de que basta encontrar o valor de θ para que a expressão $0,4.sen(\theta) + cos(\theta)$ seja a maior possível eles se depararam com mais um desafio: no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ a função $sen(\theta)$ é estritamente crescente enquanto que a função $cos(\theta)$ é estritamente decrescente, logo como saber o valor de θ que faz $0,4.sen(\theta) + cos(\theta)$ ser o maior possível se $0,4sen(\theta)$ aumenta enquanto $cos(\theta)$ diminui?

Acreditamos que estes questionamentos podem enriquecer a atividade ao mesmo tempo que fortalece ainda mais a utilidade dos métodos numéricos.

Abaixo segue uma figura feita no GeoGebra que ilustra o questionamento.

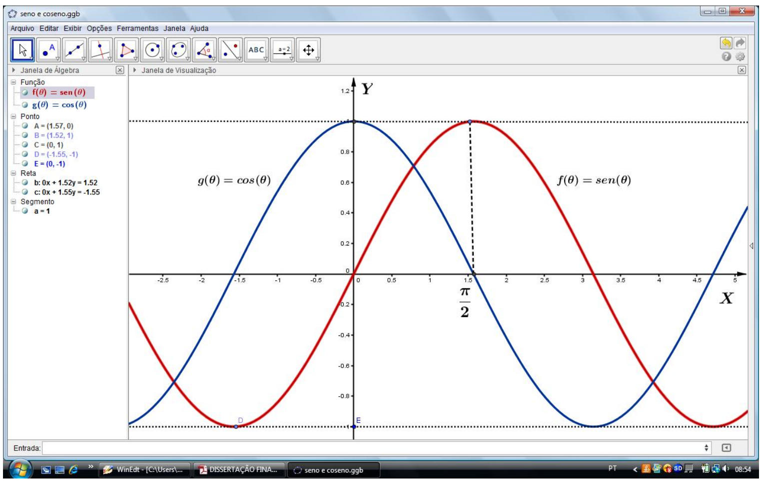

Figura 33: Gráfico de $f(\theta) = sen(\theta)$ e $g(\theta) = cos(\theta)$

Aplicação do Método da Seção Áurea

Vamos achar θ com um erro menor que $\delta = 0,001$ por exemplo.

Para isso, devemos ter que $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^k (\frac{\pi}{2}-0) < 0,001$.

Segue que,

$$\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^k (\tfrac{\pi}{2}-0) < 0,001 \Longrightarrow \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^k < \tfrac{0,002}{\pi} \Longrightarrow k > \dfrac{log(0,002/\pi)}{log\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow k > 15,29.$

Portanto para obter a aproximação desejada, devemos utilizar no mínimo 16 iterações.

Podemos usar uma planilha eletrônica para os cálculos. Em especial, a planilha feita para o "Problema do Abastecimento de Água"pode ser refeita com pequenas alterações. São elas:

- Na célula "B6"e "C6"colocar os valores 0 e 1,575 respectivamente.
- Na célula "F6"colocar "$= (168)/(0,4{*}sen(D6) + cos(D6))$".
- Na célula "G6"colocar "$= (168)/(0,4{*}sen(E6) + cos(E6))$".
- Agora extender as fórmulas até a linha 22.

Abaixo segue a tabela obtida assim,

Iteração (K)	a_{k+1}	b_{k+1}	y_{k+1}	z_{k+1}	$f(y_{k+1})$	$f(z_{k+1})$	$b_{k+1} - a_{k+1}$
0	0,00000	1,57500	0,60160	0,97340	159,87562	188,08552	1,57500
1	0,00000	0,97340	0,37181	0,60160	155,98999	159,87562	0,97340
2	0,00000	0,60160	0,22979	0,37181	157,77265	155,98999	0,60160
3	0,22979	0,60160	0,37181	0,45958	155,98999	156,47300	0,37181
4	0,22979	0,45958	0,31756	0,37181	156,29361	155,98999	0,22979
5	0,31756	0,45958	0,37181	0,40533	155,98999	156,03217	0,14202
6	0,31756	0,40533	0,35109	0,37181	156,05161	155,98999	0,08777
7	0,35109	0,40533	0,37181	0,38461	155,98999	155,98540	0,05425
8	0,37181	0,40533	0,38461	0,39253	155,98540	155,99535	0,03353
9	0,37181	0,39253	0,37972	0,38461	155,98413	155,98540	0,02072
10	0,37181	0,38461	0,37670	0,37972	155,98522	155,98413	0,01281
11	0,37670	0,38461	0,37972	0,38159	155,98413	155,98418	0,00791
12	0,37670	0,38159	0,37857	0,37972	155,98438	155,98413	0,00489
13	0,37857	0,38159	0,37972	0,38044	155,98413	155,98408	0,00302
14	0,37972	0,38159	0,38044	0,38088	155,98408	155,98409	0,00187
15	0,37972	0,38088	0,38016	0,38044	155,98409	155,98408	0,00115
16	0,38016	0,38088	0,38044	0,38060	155,98408	155,98408	0,00071

Figura 34: Tabela do Problema da Força Mínima

Observe que destacamos (em verde!) que após 16 iterações podemos tomar qualquer $\theta \in [a_{17}, b_{17}]$ que teremos um valor para θ com a aproximação estimada. Tome, por exemplo, $\theta = y_{17} = 0,38044$. Observe que o valor da força mínima é cerca de $155,98$ Newtons.

Note ainda que o valor encontrado para θ está em radianos. Transformando-o para graus temos,

$$\theta = \frac{180.(0,38044)}{\pi} = 21,8^{o}$$

Portanto o ângulo que a corda deve fazer com a horizontal afim de que se mova o bloco com o menor esforço possível é de 21,81º.

Para o professor, convém destacar que o valor encontrado é exatamente o $\arctan(\mu) = \arctan(0,4) = 21,8^{o}$. O professor poderá chegar a este resultado analiticamente usando os resultados do capítulo 2, em especial, os Testes da Primeira e Segunda Derivadas.

Apenas como curiosidade apresentamos abaixo o gráfico da função $F(\theta)$ feito no Software GeoGebra.

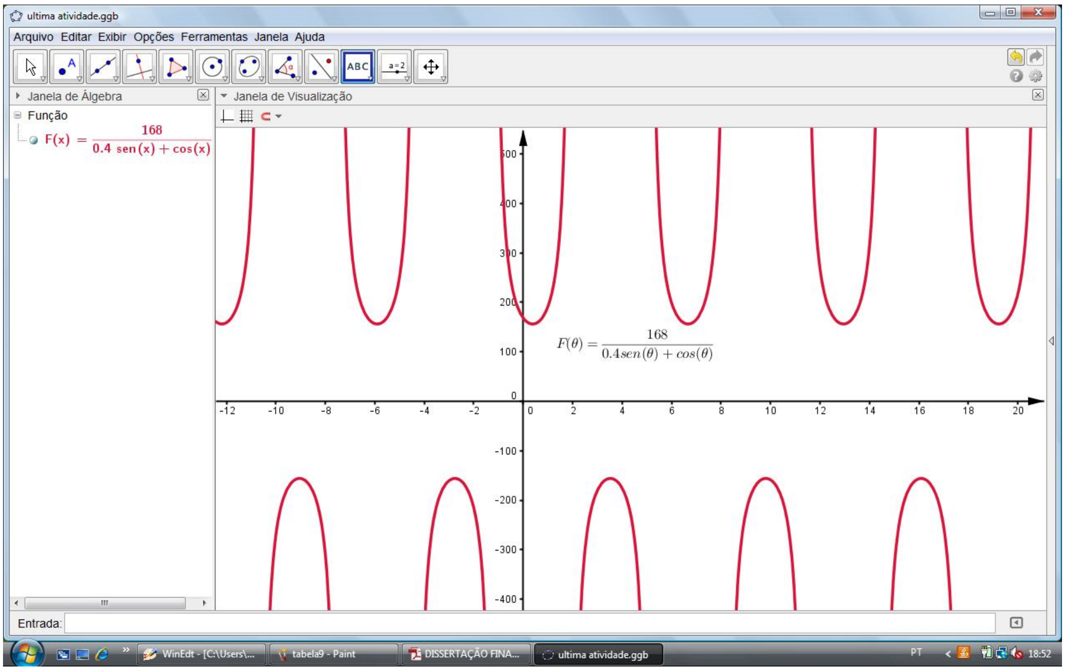

Figura 35: Gráfico de $F(\theta) = \dfrac{168}{0,4.sen(\theta) + cos(\theta)}$

Note que, mesmo ao usar diretamente o GeoGebra para plotar o gráfico da função $F(\theta)$, o aluno observará que no intervalo onde o problema faz sentido a função possui apenas um mínimo, ou seja, é unimodal. Porém, mesmo com o GeoGebra, o questionamento permaneceria sobre o valor de θ.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acreditamos que a abordagem feita neste texto pode influenciar os professores do ensino básico com relação ao estudo de problemas de máximos e/ou mínimos por trazer questionamentos novos e incorporar metodologias diferenciadas aos problemas desta natureza.

Entendemos que a procura por metodologias diferenciadas para o ensino de conteúdos matemáticos em sala de aula deve ser uma busca constante por parte dos professores do ensino básico. Muitas vezes estas metodologias diferenciadas não são encontradas em livros do ensino básico, daí a importância da pesquisa por parte do docente. Deste ponto de vista, este texto tenta servir de fonte de consulta para os professores.

Embora muitos resultados do Cálculo Diferencial e Integral não sejam abordados diretamente em sala de aula do ensino médio, acreditamos que o bom entendimento destes resultados por parte do professor faz parte de uma formação adequada destes docentes. Tais resultados, mesmo que não utilizados diretamente com os alunos, são úteis no sentido de garantir a existência de solução para os problemas bem como fornecem (ao docente) métodos para verificar a validade de sua solução numérica.

Os métodos numéricos foram a alternativa que fomos buscar para conseguir transpor as barreiras que precisávamos na resolução de problemas de otimização que aparecem no dia-a-dia da vida moderna e que não são comumente tratados em livros do ensino básico. A aplicação destes métodos fica mais dinâmica quando lançamos mão de recursos computacionais adequados, neste texto usamos as planilhas eletrônicas como recurso disponível para agilizar o processo. Entendemos que na resolução de um problema de otimização, os desdobramentos podem ser bem maiores que a simples utilização de fórmulas prontas e acabadas. Podem impulsionar, por exemplo, ao estudo de planilhas eletrônicas que são de importância fundamental na vida moderna.

Assim, acreditamos que o texto cumpriu seu objetivo de levar o professor a refletir sobre sua prática profissional em sala de aula, transformando-a em algo mais próximo da realidade do aluno e incorporando novas metodologias (e tecnologias) ao ensino de matemática no ensino básico.

Para estudos futuros penso que a análise da implementação de métodos numéricos desde as primeiras séries do ensino médio é de suma importância para o avanço do ensino no país. Acredito que com a inserção desta nova forma de ver os problemas os alunos tenham um ganho substancial na capacidade de resolver situações problemas diversas. Talvez um estudo feito a longo prazo possa indicar e quantizar os reais ganhos para a educação brasileira neste cenário.

REFERÊNCIAS

[1] GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo, vol.1**. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

[2] IZMAILOV, A.; SOLODOV, M. **Otimização - volume 2: Métodos computacionais**. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

[3] FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

[4] PATERLINI, R. R. **Técnicas de Máximos e Mínimos**. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, N. 35.

[5] LIMA, E. L. **Análise Real**. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária, 2009.

[6] BORTOLOSSI, H. J. **O número de ouro**, 2010. Disponível em www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-br.html (acesso em 23/02/2013).

[7] **Geogebra**. Disponível em <http://www.geogebra.org/cms/pt.BR>. Acesso em 13 mar. 2013.

[8] **BrOffice**. Disponível em <http://ultradownloads.com.br/download/BrOfficeorg/>. Acesso em 13 mar. 2013.