

Universidade Federal de Juiz de Fora

Pós -Graduação em Matemática

Mestrado em Matemática

*Daniel Alexis Gutierrez Pachas*

*Inequações variacionais e aplicações em  
problemas tipo obstáculo com resolução  
numérica via complementaridade*

Juiz de Fora

2013

*Daniel Alexis Gutierrez Pachas*

*Inequações variacionais e aplicações em  
problemas tipo obstáculo com resolução  
numérica via complementaridade*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito para obtenção do grau de Mestre, na área de matemática aplicada. .

Orientador : Prof. Dr. Sandro Rodrigues Mazorche.

Co-orientador : Prof. Dr. Grigori Chapiro.

Juiz de Fora

2013

Gutierrez, Daniel.

Inequações variacionais e aplicações em problemas tipo obstáculo com resolução numérica via complementaridade / Daniel Gutierrez. 2013. 107f. : il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

1. Inequações variacionais. 2. Problema do obstáculo. 3. Problema do dique retangular. 4. Problema de complementaridade. I. Título.

CDU 51

*Daniel Alexis Gutierrez Pachas*

*Inequações variacionais e aplicações em  
problemas tipo obstáculo com resolução  
numérica via complementaridade*

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo elencada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Acadêmico em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora.

---

Prof. Dr. Sandro Rodrigues Mazorche  
(Orientador)  
Mestrado Acadêmico em Matemática  
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

---

Prof. Dr. Grigori Chapiro  
(Co-orientador)  
Mestrado Acadêmico em Matemática  
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

---

Prof. Dr. Wilhelm Passarella Freire  
Mestrado Acadêmico em Matemática  
Instituto de Ciências Exatas-UFJF

---

Prof. Dr. José Herskovits Norman  
COPPE-UFRJ

Juiz de Fora, 29 de janeiro de 2013.

*A mis padres Hector y Blanca.*

# *AGRADECIMENTOS*

- Ao meu orientador professor Sandro Rodrigues pela sua paciência e dedicação para me orientar.
- Ao meu co-orientador professor Grigori Chapiro pelo apoio na simulação numérica.
- À CAPES, pelo apoio financeiro.
- A minha família em Peru por seu apoio constante na realização deste sonho.
- Aos funcionários e professores do Departamento de Matemática na UFJF que muito contribuíram para meu crescimento profissional e pessoal.
- Aos meus amigos no Brasil, eles foram a minha família emprestada enquanto estive fora do meu país.
- Aos meus amigos no Peru que motivaram e animaram a fazer os estudos de mestrado.

# *RESUMO*

Neste trabalho realizamos um estudo teórico das Inequações Variacionais e sua aplicação no Problema do Obstáculo. Fazemos o estudo de regularidade para este problema, e observamos que quando as condições de regularidade são satisfeitas, o Problema do Obstáculo torna-se um Problema de Complementaridade. Apresentamos os resultados de equivalência entre o Problema do Obstáculo e o Problema do Dique Retangular. Descrevemos o funcionamento do Algoritmo FDA-NCP, e resolvemos numericamente o Problema do Obstáculo usando complementaridade.

Palavras-Chave: Inequações variacionais. Problema do obstáculo. Problema do dique retangular. Problema de Complementaridade.

# *ABSTRACT*

In this work, we perform a theoretical study on Variational Inequalities and their application to the Obstacle Problem. We study the regularity for this problem, and observe that when the regularity conditions are satisfied the Obstacle Problem becomes a Complementarity Problem. We present the equivalence results between the Obstacle Problem and the Square Dam Problem. We describe how the algorithm FDA-NCP works and numerically to solve the Obstacle Problem employing complementarity.

Key-words: Inequality variational. Obstacle problem. Square dam problem. Complementarity Problem.



# *LISTA DE FIGURAS*

1	Representação de uma função vizinha de $y(x)$ . . . . .	p. 16
2	Representação dos valores mínimos do Exemplo 2.1. . . . .	p. 18
3	Projeção ortogonal. . . . .	p. 21
4	Problema da membrana elástica. . . . .	p. 35
5	Problema do Obstáculo Unidimensional. . . . .	p. 36
6	Gráfico das funções do Exemplo 2.1 . . . . .	p. 38
7	Representação do dique entre dois reservatórios. . . . .	p. 50
8	Representação das regiões molhada e seca do dique. . . . .	p. 53
9	Reflexão sucessivas para $R$ . . . . .	p. 65
10	Posição de equilíbrio da membrana para $f = -1$ e $\varphi = 0$ . . . . .	p. 66
11	Representação dos conjuntos $Q_{P_0}^+$ e $Q_{P_0}^-$ . . . . .	p. 69
12	Possíveis representações de $\Omega$ quando $\partial\Omega$ intersecta a $\Gamma_4$ em um e dois pontos. . . . .	p. 71
13	Possível representação de $\Omega$ quando $\partial\Omega \cap \Gamma_4 = \sigma$ . . . . .	p. 72
14	Representação da direção viável. . . . .	p. 81
15	Stencil do esquema de 5 pontos. . . . .	p. 85
16	Solução numérica do Exemplo A1 para $N = 200$ . . . . .	p. 92
17	Solução numérica do Exemplo A2 para $N = 200$ . . . . .	p. 93
18	Solução numérica do Exemplo A3 para $N = 200$ . . . . .	p. 94
19	Solução numérica do Exemplo A4 para $N = 200$ . . . . .	p. 95
20	Solução numérica do Exemplo B1 para $N^2 = 900$ . . . . .	p. 96
21	Solução numérica do Exemplo B2 para $N^2 = 900$ . . . . .	p. 97

22	Solução numérica do Exemplo B3 para $N^2 = 900$ . . . . .	p. 98
23	Solução numérica do Exemplo B4 para $N^2 = 900$ . . . . .	p. 99
24	Solução numérica do Exemplo B5 para $N^2 = 1600$ . . . . .	p. 100
25	Curva de interface obtida numericamente. . . . .	p. 101

# *LISTA DE TABELAS*

1	Resultados numéricos para o Exemplo A1. . . . .	p. 92
2	Resultados numéricos para o Exemplo A2. . . . .	p. 93
3	Resultados numéricos para o Exemplo A3. . . . .	p. 94
4	Resultados numéricos para o Exemplo A4. . . . .	p. 95
5	Resultados numéricos para o Exemplo B1. . . . .	p. 96
6	Resultados numéricos para o Exemplo B2. . . . .	p. 97
7	Resultados numéricos para o Exemplo B3. . . . .	p. 98
8	Resultados numéricos para o Exemplo B4. . . . .	p. 99
9	Resultados numéricos para o Exemplo B5. . . . .	p. 100
10	Erros relativos do caso unidimensional para $h = 0.1$ . . . . .	p. 102
11	Quocientes relativos para $h = 0.1$ . . . . .	p. 102
12	Erros relativos do caso unidimensional para $h = 0.08$ . . . . .	p. 103
13	Quocientes relativos para $h = 0.08$ . . . . .	p. 103
14	Erros relativos para os Exemplos B1,B2, B3 e B4. . . . .	p. 104
15	Quocientes relativos para os Exemplos B1,B2, B3 e B4. . . . .	p. 104
16	Erros relativos para o Exemplos B5. . . . .	p. 104
17	Quocientes relativos para o Exemplos B5. . . . .	p. 104

# *SUMÁRIO*

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	p. 13
<b>2</b>	<b>INEQUAÇÕES VARIACIONAIS</b>	p. 15
2.1	INEQUAÇÕES VARIACIONAIS EM $\mathbb{R}^n$ . . . . .	p. 17
2.2	INEQUAÇÕES VARIACIONAIS EM ESPAÇOS DE HILBERT . . . . .	p. 20
2.3	O MÉTODO DE PENALIZAÇÃO . . . . .	p. 30
<b>3</b>	<b>PROBLEMA DO OBSTÁCULO</b>	p. 34
3.1	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA . . . . .	p. 35
3.2	FORMULAÇÃO VARIACIONAL . . . . .	p. 38
3.3	EQUIVALÊNCIA ENTRE AS FORMULAÇÕES FRACA E FORTE . . . . .	p. 43
<b>4</b>	<b>PROBLEMA DO DIQUE RETANGULAR</b>	p. 50
4.1	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA . . . . .	p. 51
4.2	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DO DIQUE RETANGULAR EM UM DOMÍNIO FIXO . . . . .	p. 54
4.3	EQUIVALÊNCIA ENTRE O PROBLEMA DO OBSTÁCULO E O PROBLEMA DO DIQUE RETANGULAR. . . . .	p. 62
<b>5</b>	<b>PROBLEMA DE COMPLEMENTARIDADE</b>	p. 77
5.1	O ALGORITMO FDA-NCP . . . . .	p. 79
5.2	DISCRETIZAÇÃO VIA DIFERENÇAS FINITAS . . . . .	p. 84

5.3	ESTUDO NUMÉRICO . . . . .	p.89
5.3.1	Exemplos de problemas tipo obstáculo . . . . .	p.89
5.3.2	Resultados Numéricos . . . . .	p.91
5.3.3	Análise de Erros . . . . .	p.101
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	p.105
	<b>REFERÊNCIAS</b>	p.106

# 1 INTRODUÇÃO

A intuição física sempre foi uma fonte para criar problemas que logo são desenvolvidas e estudadas pelas diversas teorias matemáticas, como por exemplo as Inequações Variacionais, [14]. Esta teoria que apareceu em 1959 é uma importante fonte de estudo em Análise Funcional, Otimização e Equações Diferenciais Parciais. Além disso, as Inequações Variacionais tem uma variedade de aplicações em física, engenharia, química e economia que são estudadas e desenvolvidas em Matemática Aplicada.

Uma simples e importante aplicação das Inequações Variacionais é denominada Problema do Obstáculo. Este problema é importante, pois tem uma variedade de exemplos associados a diversos fenômenos físicos vistos em [28], como por exemplo o Problema do Dique Retangular.

O objetivo deste trabalho é fazer um estudo teórico das Inequações Variacionais e sua aplicação em problemas tipo obstáculo. Também realizamos o estudo numérico destes problemas usando o Algoritmo FDA-NCP. O trabalho esta dividido, como segue.

No Capítulo 2, apresentamos os resultados que garantem a existência e unicidade das soluções das inequações variacionais elípticas do primeiro e segundo tipo e suas equivalências com um problema de minimização, [14]. Também estudamos o método de penalização para a solução de inequação variacional do primeiro tipo via uma sequência de soluções de inequações variacionais do segundo tipo.

No Capítulo 3, estudamos o Problema do Obstáculo [28], e mostramos a existência e unicidade da sua solução fraca. Também realizamos o estudo de regularidade para mostrar a equivalência entre a formulação fraca e forte do Problema do Obstáculo, dado em [20] e [23]. Assim como para Problema de Complementaridade associado, [8].

No Capítulo 4, apresentamos o Problema do Dique Retangular, [6] e mostramos os resultados que permitam formular este problema como uma inequação variacional de um Problema do Obstáculo, [20]. Da mesma forma mostramos que a região de coincidência obtida neste problema do obstáculo é a região molhada do dique retangular. Logo mostramos o resultado que garantem que a solução fraca deste Problema do Obstáculo é

a solução do Problema do Dique Retangular, vistos em [20] e [11].

No Capítulo 5, apresentamos e mostramos os resultados que descrevem o funcionamento do Algoritmo FDA-NCP [17], [26]. Descrevemos o procedimento de discretização usando a técnica de diferenças finitas, [21] para o Problema de Complementaridade associado a um Problema do Obstáculo Bidimensional. Logo apresentamos os resultados numéricos, [15] e a análise de erros, [2] realizado nos exemplos para Problema do Obstáculo para o caso unidimensional e bidimensional.

## 2 INEQUAÇÕES VARIACIONAIS

As Equações Diferenciais Parciais (EDP's) aparecem em diversas aplicações. Uma classe de ferramentas para resolver EDP's são os métodos variacionais. Um Problema Variacional consiste em encontrar uma *função que faz com que uma certa integral tenha valor mínimo possível*. Esses problemas têm despertado o interesse da humanidade há muito tempo. Um dos primeiros indícios é descrito no livro *A Eneida* de Publio Virgílio (70 AC-19AC), chamado o Problema de Dido. Dido foi uma fenícia que persuadiu um chefe africano a dar-lhe tanta terra quanto ela pudesse cercar com a tripa de um touro. Diz a história que ela preparou uma longa e fina correia que cercou um terreno semi-circular beirando o mar mediterrâneo, fundando assim a famosa cidade de Cartago.

O desenvolvimento destes problemas começou em 1696, quando Johann Bernoulli (1667-1748) propôs na revista *Acta Eruditorum* o denominado *Problema da Braquistócrona*. A palavra Braquistócrona deriva das palavras gregas Brachistos (que quer dizer *menor*) e Chronos (que quer dizer *tempo*) e se refere à *curva, que une dois pontos A e B pertencentes a um plano vertical, que toma o mínimo tempo, quando esta partícula está submetida apenas a influência da gravidade*. Em maio de 1697, a revista *Acta Eruditorum* publicou quatro soluções cujos autores eram Leibnitz, o mesmo Bernoulli, seu irmão mais velho James Bernoulli e a anônima de Newton. Johann Bernoulli é considerado o primeiro em resolver tão celebre problema. Ele, bem como os outros, mostraram que a solução era uma cicloide. O método aplicado por James Bernoulli consiste em resolver um *Problema Isoperimétrico*. Este problema consiste em determinar a figura geométrica de área máxima com perímetro dado. Assim sua formulação é: *Encontrar uma função  $y$  que va desde  $(x_1, y_1)$  até  $(x_2, y_2)$  e que minimiza o funcional  $J$ , dado por:*

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx. \quad (2.1)$$

Isto indica que no caso que a função  $y$  fornece o valor mínimo para  $J$ , então qualquer função vizinha de  $y$ , por mais perto que possa ser, fornecerá um valor maior para  $J$ .



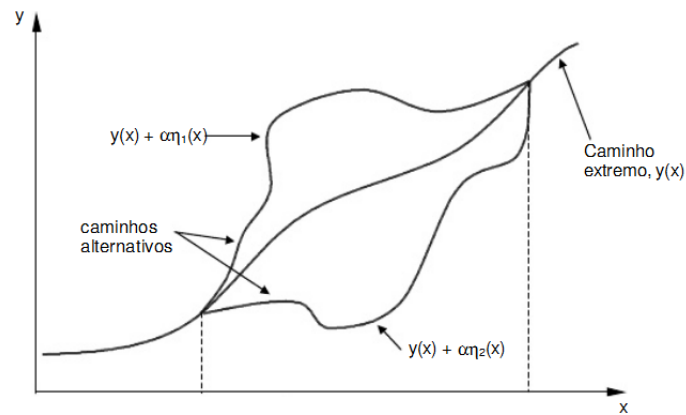


Figura 1: Representação de uma função vizinha de  $y(x)$ .

Observe na Figura 1 que uma função vizinha para  $y$  pode ser expressa da forma:

$$y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha\eta(x),$$

onde  $y(0, x) = y(x)$  e  $n(x_1) = n(x_2) = 0$  de modo que  $y(\alpha, x_1) = y(x_1)$  e  $y(\alpha, x_2) = y(x_2)$ . Usando  $y(\alpha, x)$  em  $J$ , então o valor extremo de  $J$  satisfaz  $\frac{\partial J}{\partial \alpha}|_{\alpha=0} = 0$  para qualquer função  $\eta(x)$ . Isto deriva a um resultado conhecido como *Equação de Euler*, dada por:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

O funcional  $J$  é definido sobre um espaço de funções. No caso em que temos que resolver o problema (2.1) restrito a um subconjunto deste espaço de funções, a equação de Euler é substituída por uma *Inequação Variacional*.

As inequações variacionais ou também chamadas desigualdades variacionais constituem uma teoria matemática desenvolvida no início dos anos sessenta na Itália, pelos professores Guido Stampacchia (1922-1978) e Gaetano Fichera (1922-1996). Stampacchia motivado pela Teoria do Potencial, e Fichera motivado por problemas em mecânica, especificamente em problemas de elasticidade.

O problema que motivou o estudo das inequações variacionais é o *Problema de Signorini* [10]. Este problema, proposto por Antonio Signorini em 1959 e resolvido por Fichera em 1963 constitui um modelo que descreve o contato sem atrito entre sólidos deformáveis e rígidos. Em 1964, Stampacchia provou sua generalização para o Lema de Lax-Milgram a fim de estudar a regularidade para equações diferenciáveis. Stampacchia foi quem deu o nome de inequações variacionais e em 1967 junto com Jacques-Louis Lions (1928-2001) associaram formas bilineares, contínuas e coercivas definidas em espaços de Hilbert para garantir a existência e unicidade da solução de uma inequação variacional [22].

## 2.1 INEQUAÇÕES VARIACIONAIS EM $\mathbb{R}^n$

A teoria das inequações variacionais foi desenvolvida muito rápido, pois representam uma generalização natural em problemas de valor de contorno para equações diferenciais parciais. Além disso permite considerar novos problemas decorrentes de muitos campos da Matemática Aplicada, na Engenharia, Física, Economia, Química, Programação Matemática, etc.

Considere  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função quadrática definida como:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a > 0.$$

O ponto  $x_0 \in \mathbb{R}$  que minimiza  $f$  em  $\mathbb{R}$ , satisfaz a condição de ser ponto crítico, portanto:

$$f'(x_0) = 2ax_0 + b = 0,$$

isto mostra que  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ . No entanto se este problema de minimização é restrito ao intervalo fechado  $I = [x_1, x_2]$ , nada indica que o ponto  $x_0 = -\frac{b}{2a}$  pertença a  $I$ .

Observe que, neste caso, o critério dos pontos críticos deixa de caracterizar a solução do problema de minimização. Isto implica que devemos criar uma nova condição que caracterize a solução do problema de minimização quando restrito ao intervalo  $I$ . Esta nova relação é chamada inequação variacional. Para introduzir este conceito é apresentado um exemplo de uma função  $f$  definida em um intervalo fechado.

**Exemplo 2.1.** Seja  $I = [a, b]$  e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função duas vezes diferenciável com concavidade voltada para cima. Considere o problema de minimização

$$\min_{x \in I} f(x).$$

Então o ponto  $x_0$  que minimiza a função  $f$ , satisfaz :

$$f'(x_0)(x - x_0) \geq 0, \quad \forall x \in I. \quad (2.2)$$

Observe da Figura 2, que o ponto  $x_0$ , pode-se encontrar no interior ou em algum dos extremos do intervalo  $I$ . Assim para qualquer destes casos, temos :

- Caso 1 : Se  $x_0 = a$ , então  $f'(x_0) \geq 0$  e  $x - x_0 \geq 0$ .
- Caso 2 : Se  $a < x_0 < b$ , então  $f'(x_0) = 0$ .
- Caso 3 : Se  $x_0 = b$ , então  $f'(x_0) \leq 0$  e  $x - x_0 \leq 0$ .

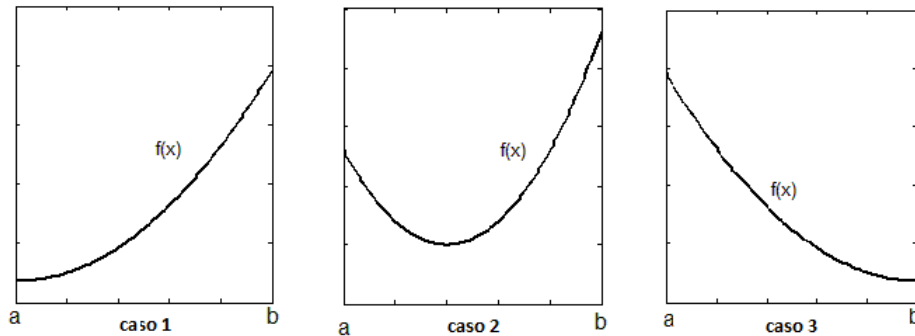


Figura 2: Representação dos valores mínimos do Exemplo 2.1.  
 Fonte: Elliot, C. M. e Ockendon, J.R. ; 1982.

Observe que seja qual for o caso,  $x_0$  satisfaz (2.2). A expressão dada em (2.2) é chamada de Inequação Variacional. Esta mesma inequação também pode ser obtida se substituirmos a condição que  $f$  seja uma função duas vezes diferenciável com concavidade voltada para cima pela condição que  $f$  seja uma função convexa e diferenciável.

Seja  $K \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto convexo. Dizemos que  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função convexa no conjunto  $K$  se satisfaz a seguinte condição:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \quad \forall t \in [0, 1] \quad \text{e} \quad x, y \in K.$$

Quando a função  $f$  é diferenciável temos que

$$f(y) \geq f(x) + (\nabla f(x), y - x), \quad \forall x, y \in K.$$

A seguir veremos o caso de um problema de minimização convexa.

**Exemplo 2.2.** Seja  $K \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto convexo e fechado e  $F : K \rightarrow \mathbb{R}$  uma função duas vezes diferenciável definida positiva. Considere o problema de minimização

$$\min_{x \in K} F(x). \tag{2.3}$$

Então o ponto  $x_0$  que minimiza a função  $F$ , satisfaz:

$$(\nabla F(x_0), x - x_0) \geq 0, \quad \forall x \in K. \tag{2.4}$$

No caso que  $F$  seja uma função convexa temos que a recíproca é válida.

- Considerando  $x_0$  como a solução de (2.3), tomemos  $x \in K$  fixo e pela convexidade do conjunto  $K$  temos que o seguimento de reta  $x_0 + t(x - x_0)$  está contido em  $K$ .

Definindo a função  $\varphi$  da seguinte forma

$$\begin{aligned}\varphi : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto F(x_0 + t(x - x_0)),\end{aligned}$$

temos que  $\varphi$  é uma função duas vezes diferenciável com concavidade voltada para cima. Lembrando que  $x_0$  minimiza  $F$ , é claro que em  $t = 0$  a função  $\varphi$  atinge seu valor mínimo. Do Exemplo 1.1 temos que  $\varphi'(0) \cdot (t - 0) \geq 0$  para cada  $t \in [0, 1]$ . Já que  $\varphi'(t) = (\nabla F(x_0 + t(x - x_0)), x - x_0)$  e  $t \geq 0$ , ao avaliar em  $t = 0$  o valor de  $\varphi'(t)$ , temos que o ponto  $x_0$  satisfaz (2.4).

- Considerando  $x_0$  que satisfaz (2.4), tomemos  $x \in K$  fixo e pela convexidade da função  $F$  temos que  $F(x) \geq F(x_0) + (\nabla F(x_0), x - x_0)$ . Como  $(\nabla F(x_0), x - x_0) \geq 0$  então  $F(x_0) \leq F(x), \forall x \in K$ , o qual mostra que  $x_0$  é solução de (2.3).

A seguir veremos uma generalização natural de (2.4). Consideremos  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua e  $K$  convexo e fechado em  $\mathbb{R}^n$  e definamos o seguinte problema

$$\text{Achar } x_0 \in K : (Ax_0, x - x_0) \geq 0, \quad \forall x \in K. \quad (2.5)$$

A inequação dada em (2.5) caracterizará a uma inequação variacional em  $\mathbb{R}^n$ .

Em 1966, os matemáticos G.J. Hartman e G. Stampacchia [16], mostraram um resultado que garante a existência e unicidade da solução de uma inequação variacional definida em um espaço de Banach de dimensão finita. Já que  $\mathbb{R}^n$  é um espaço de Banach de dimensão finita, temos em particular que (2.5) tem solução única.

**Teorema 2.1.** (Hartman-Stampacchia) Seja  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua e  $K \subset \mathbb{R}^n$  convexo e compacto em  $\mathbb{R}^n$ . Então o problema

$$\text{Achar } x_0 \in K : (Ax_0, x - x_0) \geq 0, \quad \forall x \in K,$$

tem solução única.

**Demonstração:** Para mostrar este resultado usamos o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, veja [20]. ■

**Exemplo 2.3.** Se  $K$  é um cone convexo e fechado, então (2.5) é equivalente ao problema

$$\text{Achar } x_0 \in K : \begin{cases} (Ax_0, x) \geq 0, & \forall x \in K \\ (Ax_0, x_0) = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

- Considere  $x_0$  como solução de (2.5). Tomando  $x = 0$  e  $x = 2x_0$ , ao substituir em (2.5), temos  $(Ax_0, x_0) \leq 0$  e  $(Ax_0, x_0) \geq 0$  respectivamente, isto mostra que  $(Ax_0, x_0) = 0$ . Da linearidade do produto interno temos que  $(Ax_0, x) \geq 0, \forall x \in K$  e portanto  $x_0$  satisfaz (2.6).
- Considere  $x_0$  como solução de (2.6). Ao restar as condições dadas em (2.6) é claro que  $(Ax_0, x - x_0) \geq 0$  para cada  $x \in K$ . Isto indica que  $x_0$  satisfaz (2.5).

Considerando o cone convexo positivo  $\mathbb{R}_+^n$ , definido por :

$$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x \geq \mathbf{0}\},$$

onde  $x \geq \mathbf{0}$  significa  $x_i \geq 0$  para cada  $i = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Ao tomar  $K = \mathbb{R}_+^n$  em (2.6) temos um Problema de Complementaridade Linear, da forma

$$\text{Achar } x_0 \in \mathbb{R}_+^n : \begin{cases} x_0 \geq \mathbf{0} \\ Ax_0 \geq \mathbf{0} \\ (Ax_0, x_0) = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

A resolução numérica de (2.7) é base fundamental deste trabalho, mas este procedimento será estudado no Capítulo 5.

O Teorema 2.1 mostra a existência e unicidade da solução de uma inequação variacional definida em  $\mathbb{R}^n$ . O próximo passo é mostrar a existência e unicidade da solução de uma inequação variacional definida em um espaço de Hilbert real de dimensão infinita.

## 2.2 INEQUAÇÕES VARIACIONAIS EM ESPAÇOS DE HILBERT

Considere  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert real de dimensão infinita com produto interno  $(u, v)_{\mathcal{H}}$  e norma  $\|v\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{(v, v)_{\mathcal{H}}}$ . Denotemos por  $\mathcal{H}'$  ao Espaço Dual de  $\mathcal{H}$  e a relação entre  $\mathcal{H}'$  e  $\mathcal{H}$ , dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}' \times \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f, v &\mapsto \langle f, v \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}}. \end{aligned}$$

A seguir mostraremos os resultado que garante a existência e unicidade da solução de uma inequação variacional definida em um espaço de Hilbert. Mas antes de mostrar isso precisa-se de alguns resultados obtidos da Análise Funcional [3].

Um destes resultados é o Teorema da Projecção Ortogonal, apresentado a seguir.

**Teorema 2.2.** (Projeção Ortogonal) Seja  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert real e  $K$  um conjunto convexo e fechado em  $\mathcal{H}$ . Para qualquer  $w \in \mathcal{H}$  existe um único  $u = P_K w \in K$  que satisfaz :

$$\|u - w\|_{\mathcal{H}} \leq \|v - w\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall v \in K.$$

Além disso o operador  $P_K : \mathcal{H} \rightarrow K$  é uma contração, isto é,

$$\|P_K w_1 - P_K w_2\|_{\mathcal{H}} \leq \|w_1 - w_2\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall w_1, w_2 \in \mathcal{H}.$$

**Demonstração:** A prova deste teorema pode ser vista em [3]. ■

O ponto  $P_K w$  é o ponto em  $K$  que minimiza  $d(w, K)$  e como pode ser visto na Figura 3, o ângulo  $\theta$  é obtuso. Isto mostra que  $(w - u, v - u) \leq 0$ , para cada  $v \in K$ .

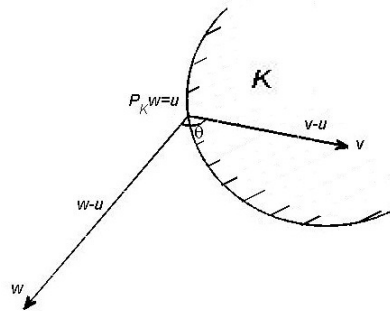


Figura 3: Projeção ortogonal.  
Fonte: Elliot, C. M. e Ockendon, J.R. ; 1982.

Outro importante resultado da Análise Funcional é o Teorema de Representação de Riesz-Fréchet, apresentado a seguir.

**Teorema 2.3.** (Riesz-Fréchet) Seja  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert real e  $\mathcal{H}'$  seu dual. Dado  $f \in \mathcal{H}'$  existe um único  $w_f \in \mathcal{H}$  tal que

$$\langle f, v \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}} = (w_f, v)_{\mathcal{H}}, \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

**Demonstração:** A prova deste teorema pode ser visto em [3]. ■

O Teorema 2.3, mostra que qualquer  $f \in \mathcal{H}'$  pode ser representado por um único elemento  $w_f$  em  $\mathcal{H}$  via o produto interno definido em  $\mathcal{H}$ . Em 1907, Fréchet e Riesz mostraram independentemente este resultado de representação sobre o espaço de funções  $L^2$ . Logo em 1934, Riesz consegue estender este resultado para qualquer espaço de Hilbert.

Lembremos que na demonstração do Teorema 2.1 foi usado um argumento do ponto fixo

em  $\mathbb{R}^n$ , precisa-se de um resultado similar para espaços de Hilbert. Este resultado é conhecido como o Teorema do Ponto Fixo de Banach ou Princípio de Contração.

**Teorema 2.4.** (Banach) Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico completo e  $S : X \rightarrow X$  é uma contração estrita, isto é,

$$d(Sx, Sy) \leq \tau d(x, y), \quad \forall \tau \in [0, 1[ \text{ e } x, y \in X.$$

Então existe um único ponto  $p \in X$  tal que  $S(p) = p$ .

**Demonstração:** A prova deste teorema pode ser vista em [3]. ■

O primeiro resultado do ponto fixo é o Teorema de Ponto Fixo de Brouwer. Este teorema proposto inicialmente pelo matemático holandês Luitzen E. Jan Brouwer, mostra a existência e unicidade do ponto fixo definido em um conjunto compacto em  $\mathbb{R}^n$ . Em 1922 o matemático polonês Stefan Banach estendeu este resultado para qualquer espaço métrico completo. O argumento de ponto fixo é muito importante pois permite resolver numericamente um sistema de equações.

Para definir uma inequação variacional elíptica em um espaço de Hilbert, precisamos de alguns conceitos. Considerando

$$\begin{aligned} a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{R} \\ u, v &\mapsto a(u, v). \end{aligned}$$

Dizemos que :

- $a(u, v)$  é uma forma bilinear real, quando é linear em cada variável.
- $a(u, v)$  é contínua, se existe  $\alpha > 0$  tal que  $|a(u, v)| \leq \alpha \|u\|_{\mathcal{H}} \|v\|_{\mathcal{H}}$ ,  $\forall u, v \in \mathcal{H}$ .
- $a(u, v)$  é coerciva, se existe  $\beta > 0$  tal que  $a(v, v) \geq \beta \|v\|_{\mathcal{H}}^2$ ,  $\forall v \in \mathcal{H}$ .
- $a(u, v)$  é simétrica, quando  $a(u, v) = a(v, u)$ ,  $\forall u, v \in \mathcal{H}$ .

Observemos que se  $a(u, v)$  é uma forma bilinear contínua, coerciva e simétrica então  $a(u, v)$  induz um produto interno. Além disso

$$\beta \|v\|_{\mathcal{H}}^2 \leq a(v, v) \leq \alpha \|v\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall v \in \mathcal{H},$$

isto mostra que  $[a(v, v)]^{1/2}$  é uma norma em  $\mathcal{H}$ .

Seja  $a(u, v)$  uma forma bilinear contínua e coerciva,  $K$  um conjunto convexo e fechado

em  $\mathcal{H}$  e  $f \in \mathcal{H}'$ , definimos o seguinte problema :

$$\text{Achar } u \in K \quad : \quad a(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}}, \quad \forall v \in K. \quad (2.8)$$

A inequação dada acima é uma Inequação Variacional Elíptica do Primeiro Tipo.

Observemos que uma aplicação  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  linear e contínua define uma forma bilinear, se consideramos

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}}.$$

Assim como uma forma bilinear  $a(u, v)$  define uma aplicação linear, se consideramos

$$v \rightarrow a(u, v), \quad \text{para cada } v \in \mathcal{H}.$$

Portanto é possível reescrever (2.8), da seguinte forma :

$$\text{Achar } u \in K \quad : \quad \langle Au - f, v - u \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}} \geq 0 \quad , \forall v \in K.$$

Em 1967 J. L. Lions e G. Stampacchia publicaram o artigo *Variational Inequality* no qual mostram o resultado que garante a existência e unicidade da solução de (2.8). Este resultado é conhecido como o Teorema de Lions-Stampacchia [8], dado a seguir.

**Teorema 2.5.** (Lions-Stampacchia) Sejam  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert real,  $K$  um subconjunto não vazio, convexo e fechado em  $\mathcal{H}$ ,  $f \in \mathcal{H}'$  e  $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma bilinear contínua e coerciva. Então existe uma única solução para (2.8).

Se  $a(u, v)$  é simétrica então (2.8) é equivalente ao seguinte problema de minimização :

$$\min_{v \in K} J(v), \quad (2.9)$$

onde  $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle f, v \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}}$ .

**Demonstração:** A prova deste teorema será feita para cada caso.

**a) Se  $a(u, v)$  é simétrica :** Lembrando que  $a(u, v)$  induz um produto interno em  $\mathcal{H}$  então pelo Teorema 2.3, existe um único  $w_f \in \mathcal{H}$  tal que  $a(w_f, v) = \langle f, v \rangle$ ,  $\forall v \in \mathcal{H}$ . Ao reescrever o funcional  $J$ , da seguinte forma

$$J(v) = \frac{1}{2}a(w_f - v, w_f - v) - \frac{1}{2}a(w_f, w_f) = \frac{1}{2}\|w_f - v\|_{\mathcal{H}}^2 - \frac{1}{2}\|w_f\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Observe que resolver (2.9) é equivalente a minimizar  $d(w_f, K)$ . Pelo Teorema 2.2, existe um único  $u \in K$  tal que minimiza  $d(w_f, K)$ , portanto  $u$  é solução de (2.9). Além disso do Teorema 2.2 temos que o ângulo interno entre  $w_f - u$  e  $v - u$  é obtuso, o qual mostra que  $a(w_f - u, v - u) \leq 0$ ,  $\forall v \in \mathcal{H}$ , portanto  $u$  satisfaz (2.8).



Agora mostraremos a equivalência entre os problemas (2.8) e (2.9).

- Seja  $u$  solução de (2.8) e  $v \in K$  fixo, então

$$\begin{aligned} J(u) - J(v) &= \frac{1}{2}a(u, u) - \langle f, u \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}} - \frac{1}{2}a(v, v) + \langle f, v \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}} \\ &= \langle f, v - u \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}} - a(u, v - u) - \frac{1}{2}a(u - v, u - v). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Posto que  $a(u - v, u - v) \geq \beta \|u - v\|_{\mathcal{H}}^2$  e  $\langle f, v - u \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}} - a(u, v - u) \leq 0$ . Ao substituir estas desigualdades em (2.10) obtemos que  $J(u) \leq J(v)$ ,  $\forall v \in K$ . Isto mostra que  $u$  é solução de (2.9).

- Reciprocamente, se  $u$  é solução de (2.9) e  $v \in K$ , pela convexidade do conjunto  $K$  temos que  $u + t(v - u) \in K$ , para cada  $t \in ]0, 1]$ . Portanto

$$\begin{aligned} J(u) &\leq J(u + t(v - u)) \\ &= J(u) + ta(u, v - u) - t\langle f, v - u \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}} + \frac{1}{2}\lambda^2 a(u - v, u - v). \end{aligned}$$

Da desigualdade dada acima é fácil ver

$$ta(u, v - u) - t\langle f, v - u \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}} + \frac{1}{2}t^2 a(u - v, u - v) \geq 0.$$

Ao dividir por  $t$  e fazer  $t \rightarrow 0^+$ , obtemos  $a(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}}$ ,  $\forall v \in K$ . Isto mostra que  $u$  é solução de (2.8).

**b) Se  $a(u, v)$  não é simétrica :** Considerando  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  uma aplicação linear e contínua tal que  $a(u, v) = (Au, v)_{\mathcal{H}}$ , pelo Teorema 2.3, existe  $l \in \mathcal{H}$  tal que  $\langle f, v \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}} = (l, v)_{\mathcal{H}}$ . Portanto (2.8) é equivalente ao seguinte problema :

$$\text{Achar } u \in K \quad : \quad (u - \rho(Au - l) - u, v - u)_{\mathcal{H}} \leq 0, \quad \forall v \in K \text{ e } \rho > 0. \quad (2.11)$$

Observe que (2.11), via o Teorema 2.2, é equivalente ao seguinte problema :

$$\text{Achar } u \in K \quad : \quad u = P_K[u - \rho(Au - l)], \quad \rho > 0. \quad (2.12)$$

Definindo uma aplicação  $W$ , como:

$$\begin{aligned} W : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ v &\longmapsto W(v) = P_K[v - \rho(Av - l)]. \end{aligned}$$

e dos resultados de equivalência entre (2.11) e (2.12), obtemos que (2.8) é equivalente a um problema do ponto fixo, dado por:

$$\text{Achar } u \in K \quad : \quad u = W(u). \quad (2.13)$$

Para mostrar a existência e unicidade da solução de (2.13), temos que mostrar que  $W$  é uma contração estrita. Dado que  $P_K$  é uma contração, então

$$\begin{aligned} \|W(v_1) - W(v_2)\|_{\mathcal{H}} &= \|P_K[v_1 - \rho(Av_1 - l)] - P_K[v_2 - \rho(Av_2 - l)]\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \|v_1 - v_2 - \rho A(v_1 - v_2)\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Observe que

$$\|v_1 - v_2 - \rho A(v_1 - v_2)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|v_1 - v_2\|_{\mathcal{H}}^2 - 2\rho(A(v_1 - v_2), v_1 - v_2)_{\mathcal{H}} + \rho^2 \|A(v_1 - v_2)\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Como  $A$  é limitada, então  $\|A(v_1 - v_2)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|A\|^2 \|v_1 - v_2\|_{\mathcal{H}}^2$  e da coercividade da forma bilinear, temos

$$(A(v_1 - v_2), v_1 - v_2)_{\mathcal{H}} = a(v_1 - v_2, v_1 - v_2)_{\mathcal{H}} \geq \beta \|v_1 - v_2\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Assim obtemos  $\|v_1 - v_2 - \rho A(v_1 - v_2)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq (1 - 2\rho\beta + \rho\|A\|^2) \|v_1 - v_2\|_{\mathcal{H}}^2$ .

Ao substituir a desigualdade acima em (2.14), obtemos :

$$\|W(v_1) - W(v_2)\|_{\mathcal{H}} \leq (1 - 2\rho\beta + \rho\|A\|^2)^{1/2} \|v_1 - v_2\|_{\mathcal{H}}.$$

Portanto para que  $W$  seja uma contração estrita, basta escolher  $\rho > 0$  tal que

$$1 - 2\rho\beta + \rho\|A\|^2 < 1.$$

O qual é satisfeito, se tomamos  $0 < \rho < \frac{2\beta}{\|A\|^2}$  ■

Segundo [14] temos um argumento numérico para resolver (2.8) é baseado na demonstração do Teorema 2.5. Dado que a solução de (2.8) é obtida ao resolver (2.13), definimos o seguinte algoritmo :

Considerando  $x^0 \in K$ , defina a sequência de aproximações,  $\{u^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , dado por :

$$u^{n+1} = P_K[u^n - \rho(Au^n - l)], \quad \text{para cada } n \geq 0.$$

Isto indica que  $u^n \rightarrow u$  sempre que  $\rho \in ]0, \frac{2\beta}{\|A\|^2}[$ .

Dado que  $a(u, v) = \langle Au, v \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}}$  e  $\langle f, v \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}} = (l, v)_{\mathcal{H}}$ , consideremos  $a(u, v)$  simétrica, desta forma  $A$  é simétrica e (2.8) pode-se escrever como

$$\text{Achar } u \in K : \quad \langle J'u, v - u \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}} \geq 0, \quad \forall v \in K,$$

onde  $J'u$  denota a derivada de Gateux de  $J$  em  $u$ . Assim  $\langle J'u, v \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}} = (Au - l, v)_{\mathcal{H}}$  e  $J'u = Au - l$ . De forma mais geral é o Método da Projeção Gradiente, [30].

Neste método, dado  $x^0 \in K$  definimos uma sequência de aproximações,  $\{u^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , por :

$$u^{n+1} = P_K[u^n - \rho J'u^n], \quad \text{para cada } n \geq 0.$$

A aplicação que será estudada neste trabalho é o Problema do Obstáculo. Para este problema a forma bilinear associada é simétrica. Em [1] e [5] podem ser vistos outras aplicações às inequações variacionais em que a forma bilinear associada não é simétrica. De (2.8), observe que este problema é definido sobre um determinado conjunto  $K \subset \mathcal{H}$ . A seguir estudaremos outro tipo de inequações variacionais que são definidas sobre todo o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ .

Segundo [14], definamos o funcional  $j : \mathcal{H} \rightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  semi-contínuo inferiormente, convexo e próprio ( $j$  é próprio se  $j(v) > -\infty$ ,  $\forall v \in \mathcal{H}$  e  $j \neq \infty$ ) e consideremos o seguinte problema:

$$\text{Achar } u \in \mathcal{H} \quad : \quad a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq \langle f, v - u \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}}, \quad \forall v \in \mathcal{H}. \quad (2.15)$$

A inequação dada acima é uma Inequação Variacional Elíptica do Segundo Tipo.

**Exemplo 2.4.** Seja  $I_K$ , a função indicatriz do conjunto  $K$ , definida por:

$$I_K(v) = \begin{cases} 0, & \text{se } v \in K. \\ \infty, & \text{se } v \notin K. \end{cases}$$

Então

$$\text{Achar } u \in \mathcal{H} \quad : \quad a(u, v - u) + I_K(v) - I_K(u) \geq \langle f, v - u \rangle, \quad \forall v \in \mathcal{H} \quad (2.16)$$

é uma inequação variacional elíptica do segundo tipo

Para provar que a inequação dada acima é uma inequação variacional elíptica do segundo tipo, basta mostrar que  $I_K$  é semi-contínuo inferiormente, convexo e próprio. Este resultado pode ser visto em [7]. Além disso (2.16) é equivalente a (2.8).

Observe também que quando  $K = \mathcal{H}$  e  $j \equiv 0$  temos que (2.15) é equivalente ao resolver :

$$\text{Achar } u \in \mathcal{H} \quad : \quad a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in \mathcal{H}. \quad (2.17)$$

O resultado de existência e unicidade da solução de (2.17) é o Lema de Lax-Milgram, o qual é apresentado a seguir.

**Lema 2.6.** (Lax-Milgram) Seja  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert, munido com a norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ ,  $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H}$  uma forma bilinear contínua e coerciva e  $f \in \mathcal{H}'$ . Então, existe uma única

solução para (2.17). Além disso, quando  $a(u, v)$  é simétrica, temos que (2.17) é equivalente ao seguinte problema de minimização

$$\min_{v \in \mathcal{H}} J(v), \quad (2.18)$$

onde  $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle f, v \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}}$ .

**Demonstração:** A prova deste Lema pode ser vista em [3]. ■

O Lema de Lax-Milgram é uma importante ferramenta usada na resolução de equações diferenciais parciais, pois obtemos uma relação de equivalência entre (2.17) e (2.18). Esta equivalência tem uma interpretação na física, denominado Princípio de Energia Mínima. O seguinte teorema mostra a existência e unicidade da solução de (2.15).

**Teorema 2.7.** Seja  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert,  $f \in \mathcal{H}'$ ,  $j : \mathcal{H} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  um funcional semi-contínuo inferiormente, convexo e próprio e  $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma bilinear contínua e coerciva. Então existe uma única solução para (2.15).

**Demonstração:** Vamos a mostrar primeiro a unicidade e depois a existência.

**a) Unicidade:** Suponhamos que  $u_1 \neq u_2$  são soluções de (2.15), então

$$a(u_1, v - u_1) + j(v) - j(u_1) \geq \langle f, v - u_1 \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}}, \quad \forall v \in \mathcal{H};$$

$$a(u_2, v - u_2) + j(v) - j(u_2) \geq \langle f, v - u_2 \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}}, \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

Ao substituir  $v = u_2$  e  $v = u_1$  respectivamente, obtemos

$$a(u_1, u_2 - u_1) + j(u_2) - j(u_1) \geq \langle f, u_2 - u_1 \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}};$$

$$a(u_2, u_1 - u_2) + j(u_1) - j(u_2) \geq \langle f, u_1 - u_2 \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}}.$$

Se somarmos as inequações dadas acima teremos que  $a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0$ , mas para fazer isso, temos que mostrar primeiro que  $j(u_i) < \infty$ ,  $i = 1, 2$ . Dado que  $j$  é próprio, então existe  $v_0 \in \mathcal{H}$  tal que  $-\infty < j(v_0) < \infty$ .

Ao substituir  $v_0$  em (2.15), temos

$$-\infty < j(u_i) \leq j(v_0) - \langle f, v_0 - u_i \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}} + a(u_i, v_0 - u_i), \quad i = 1, 2.$$

Isto mostra que  $j(u_i) < \infty$ ,  $i = 1, 2$  e da coercividade da forma bilinear obtemos:

$$0 \leq \beta \|u_1 - u_2\|_{\mathcal{H}}^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0.$$

Portanto  $u_1 = u_2$ .

**b) Existência:** Dado  $u \in K$  e  $\rho > 0$  consideremos o problema  $(Q_\rho)$

Achar  $w \in \mathcal{H}$  :

$$(Q_\rho) \quad (w, v - w)_\mathcal{H} + \rho[j(v) - j(w)] \geq (u, v - w)_\mathcal{H} + \rho[\langle f, v - w \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}} - a(u, v - w)], \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

Note que  $(Q_\rho)$  é um problema do tipo (2.15) e a forma bilinear associada é o produto interno definido em  $\mathcal{H}$ , que é simétrica. Para mostrar a existência consideramos o seguinte.

**Afirmção:** O problema  $(Q_\rho)$  tem solução única.

Definindo a aplicação  $F_\rho(u) = w$ , onde  $w$  é a solução de  $(Q_\rho)$ . De forma análoga ao Teorema 2.5, mostraremos que  $F_\rho$  é uma contração estrita.

Considerando  $u_1, u_2 \in \mathcal{H}$  talque  $w_i = F_\rho(u_i)$  para  $i = 1, 2$ . Assim temos :

$$(w_1, w_2 - w_1)_\mathcal{H} + \rho[j(w_2) - j(w_1)] \geq (u_1, w_2 - w_1)_\mathcal{H} + \rho[\langle f, w_2 - w_1 \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}} - a(u_1, w_2 - w_1)];$$

$$(w_2, w_1 - w_2)_\mathcal{H} + \rho[j(w_1) - j(w_2)] \geq (u_2, w_1 - w_2)_\mathcal{H} + \rho[\langle f, w_1 - w_2 \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}} - a(u_2, w_1 - w_2)].$$

Como  $j(w_1)$  e  $j(w_2)$  são finitos, logo de somar as desigualdades, obtemos:

$$(w_1 - w_2, w_2 - w_1)_\mathcal{H} \geq (u_1 - u_2, w_2 - w_1)_\mathcal{H} - \rho a(u_1 - u_2, w_2 - w_1)$$

e daqui

$$\|F_\rho(u_1) - F_\rho(u_2)\|_\mathcal{H} = \|w_2 - w_1\|_\mathcal{H}^2 \leq ((I - \rho A)(u_1 - u_2), w_2 - w_1)_\mathcal{H}.$$

Daí é fácil ver que  $\|I - \rho A\| < 1$ , sempre que  $\rho \in ]0, \frac{2\beta}{\|A\|^2}[$ .

Do Teorema 2.4, existe um único ponto fixo  $F_\rho(u) = u$  e substituindo em  $(Q_\rho)$ , temos:

$$(u, v - u)_\mathcal{H} + \rho[j(v) - j(u)] \geq (u, v - u)_\mathcal{H} + \rho[\langle f, v - u \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}} - a(u, v - u)], \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

Simplificando  $(v, v - u)_\mathcal{H}$  na desigualdade anterior e dividir por  $\rho$ , temos

$$a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq \langle f, v - u \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}}, \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

Portanto  $u$  é solução de (2.15). ■

Na prova do Teorema 2.7, foi assumido o fato que  $(Q_\rho)$  tem solução única. A seguir mostraremos este resultado.

**Lema 2.8.** Seja  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert,  $b : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma bilinear, contínua e simétrica com constante de coercividade  $\beta$ ,  $f \in \mathcal{H}'$  e  $j : \mathcal{H} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  um funcional semi-

contínuo inferiormente, convexo e próprio. Seja  $H : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ , definido como

$$H(v) = \frac{1}{2}b(v, v) + j(v) - \langle f, v \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}}.$$

Então existe uma única solução para o seguinte problema de minimização.

$$\min_{v \in \mathcal{H}} H(v). \quad (2.19)$$

Além disso (2.19) é equivalente ao seguinte problema :

$$\text{Achar } u \in \mathcal{H} : \quad b(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq \langle f, v - u \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}}, \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

**Demonstração:** A teoria de Otimização Convexa dada em [7], indica que (2.19) tem solução única, sempre que  $H$  seja um funcional estritamente convexo e coercivo (isto significa que  $H(v) \rightarrow \infty$ , quando  $\|v\| \rightarrow \infty$ ).

a) Dado que  $b(v, v)$  é estritamente convexo,  $j$  é convexo e  $f$  é linear, então  $H$  é um funcional estritamente convexo.

b) Dado que  $j$  é semi-contínua inferiormente e própria, existe  $\lambda \in \mathcal{H}'$  e  $\mu \in \mathbb{R}$  tal que  $j(v) \geq \langle \lambda, v \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}} + \mu$ . Já que  $\lambda$  e  $f$  são contínuos, então

$$|\langle \lambda, v \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}}| \leq L\|v\|_{\mathcal{H}} \quad \text{e} \quad |\langle f, v \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}}| \leq M\|v\|_{\mathcal{H}}, \quad \text{para cada } v \in \mathcal{H}.$$

Usando estas desigualdades e a coercividade de  $b(u, v)$ , temos

$$\begin{aligned} H(v) &= \frac{1}{2}b(v, v) + j(v) - \langle f, v \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}} \\ &\geq \frac{\beta}{2}\|v\|_{\mathcal{H}}^2 - L\|v\|_{\mathcal{H}} - M\|v\|_{\mathcal{H}} + \mu \\ &= \left( \sqrt{\frac{\beta}{2}}\|v\|_{\mathcal{H}} - \frac{L+M}{2}\sqrt{\frac{2}{\beta}} \right)^2 + \mu - \frac{(M+L)^2}{2\beta}. \end{aligned}$$

Observe que  $H(v) \rightarrow \infty$  quando  $\|v\| \rightarrow \infty$ . Isto mostra que  $H$  é coercivo e portanto existe uma única solução para (2.19).

c) Agora sera mostrado a equivalência entre (2.15) e (2.19).

- Considere  $u$  como solução de (2.19) e tome  $v \in \mathcal{H}$  fixo e  $t \in [0, 1]$ . Lembrando que

$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle f, v \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}}$  temos que  $H(v) = J(v) + j(v)$  e portanto :

$$\begin{aligned} 0 &\leq H(u + t(v - u)) - H(u) \\ &= J(u + t(v - u)) - J(u) + j(u + t(v - u)) - j(u) \\ &\leq J(u + t(v - u)) - J(u) + t[j(v) - j(u)], \quad \forall v \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Ao dividir por  $t$  na desigualdade acima e tomando o limite quando  $t \rightarrow 0^+$ , temos :

$$0 \leq (J'u, v - u)_{\mathcal{H}} + j(v) - j(u), \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

Dado que  $b(u, v)$  é simétrica, então

$$(J'v, w)_{\mathcal{H}} = b(v, w) - \langle f, w \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}}, \quad \forall v, w \in \mathcal{H}.$$

Substituindo na desigualdade anterior, temos

$$0 \leq b(v, v - u) - \langle f, v - u \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}} + j(v) - j(u), \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

O qual indica que  $u$  satisfaz (2.15).

- Considere  $u$  como solução de (2.15) e tome  $v \in \mathcal{H}$  fixo, reescrevendo  $H$  temos :

$$H(v) - H(u) = \frac{1}{2}[b(v, v) - b(u, u)] + j(v) - j(u) - \langle f, v - u \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}}.$$

Já que  $b(v, v) = b(u, u) + 2b(u, v - u) + b(u - v, u - v)$ , ao substituir esta relação na equação anterior, obtemos

$$H(v) - H(u) = b(u, v - u) + j(v) - j(u) - \langle f, v - u \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}} + \frac{1}{2}b(u - v, u - v).$$

Como  $b(u - v, u - v) \geq 0$ , então  $H(v) \geq H(u)$  e portanto  $u$  satisfaz (2.19). ■

Resumindo o visto nesta seção, apresentamos os teoremas que garantem a existência e unicidade das soluções para inequações variacionais elípticas do primeiro e segundo tipo. Também a existência e unicidade de um problema variacional via o Lema de Lax-Milgram. Estes resultados serão de muita utilidade no estudo de um método de penalização que é apresentado a seguir.

## 2.3 O MÉTODO DE PENALIZAÇÃO

Os métodos de penalização são usados em otimização para obter a solução de um problema de minimização com restrições via uma sequência de soluções de problemas de

minimização sem restrições. É aqui que aparece a importância dos resultados de existência e unicidade visto na seção anterior. Para aplicar este método de penalização, considere o funcional  $j : \mathcal{H} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  semi-contínuo inferiormente, convexo e próprio, de forma que :

$$j(v) = 0, \quad \forall v \in K. \quad (2.20)$$

$$j(v) \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{H}. \quad (2.21)$$

Assim, para cada  $\epsilon > 0$  definamos  $j_\epsilon : \mathcal{H} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , como

$$j_\epsilon := \frac{1}{\epsilon} j.$$

E defina uma sequência de problemas  $\{P_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ , da forma:

$$(P_\epsilon) \quad \text{Achar } u_\epsilon \in \mathcal{H} : a(u_\epsilon, v - u_\epsilon) + j_\epsilon(v) - j_\epsilon(u_\epsilon) \geq \langle f, v - u_\epsilon \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}}, \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

Do Teorema 2.7 temos que cada problema  $(P_\epsilon)$  tem uma única solução  $u_\epsilon$ . O proximo passo é mostrar que a sequência  $\{u_\epsilon\}$  converge para  $u$ , onde  $u$  é solução de (2.8).

**Teorema 2.9.** Sejam  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert real com norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ ,  $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma bilinear contínua, coerciva e simétrica,  $f \in \mathcal{H}'$  e  $j : \mathcal{H} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  um funcional semi-contínuo inferiormente, convexo e próprio que satisfaz (2.20) e (2.21), temos:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|u_\epsilon - u\|_{\mathcal{H}} = 0. \quad (2.22)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} j_\epsilon(u_\epsilon) = 0. \quad (2.23)$$

**Demonstração:** Segundo [14], a prova deste teorema será feita em três partes.

a) Existem  $C$  e  $D$  positivos, tais que :

$$\|u_\epsilon\|_{\mathcal{H}} \leq C. \quad (2.24)$$

$$j(u_\epsilon) \leq \epsilon D. \quad (2.25)$$

Como  $K \neq \emptyset$  então existe  $v_0 \in K$  tal que  $j_\epsilon(v_0) = 0$ , ao substituir em  $(P_\epsilon)$  tem-se

$$a(u_\epsilon, u_\epsilon) + j_\epsilon(u_\epsilon) \leq a(u_\epsilon, v_0) - \langle f, v_0 - u_\epsilon \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}}.$$

Dado que  $a(u_\epsilon, u_\epsilon)$  e  $j_\epsilon(u_\epsilon)$  são não negativos, da inequação anterior temos

$$a(u_\epsilon, u_\epsilon) \leq a(u_\epsilon, v_0) - \langle f, v_0 - u_\epsilon \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}} = |a(u_\epsilon, v_0) - \langle f, v_0 - u_\epsilon \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}}|.$$

Já que  $f$  é limitado, existe  $M > 0$  tal que  $\langle f, v \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}} \leq M\|v\|_{\mathcal{H}}$  e ao aplicar a desigualdade



triangular em  $|a(u_\epsilon, v_0) - \langle f, v_0 - u_\epsilon \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}}|$ , tem-se

$$a(u_\epsilon, u_\epsilon) \leq \alpha \|u_\epsilon\|_{\mathcal{H}} \|v_0\|_{\mathcal{H}} + M(\|v_0\|_{\mathcal{H}} + \|u_\epsilon\|_{\mathcal{H}}).$$

Pela coercividade da forma bilinear, obtemos

$$\beta \|u_\epsilon\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \alpha \|u_\epsilon\|_{\mathcal{H}} \|v_0\|_{\mathcal{H}} + M(\|v_0\|_{\mathcal{H}} + \|u_\epsilon\|_{\mathcal{H}}).$$

Esta última desigualdade, pode ser reescrita como

$$\|u_\epsilon\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_1 \|u_\epsilon\|_{\mathcal{H}} + C_2, \quad (2.26)$$

onde  $C_1 = \frac{\alpha \|v_0\|_{\mathcal{H}} + M}{\beta}$  e  $C_2 = \frac{M \|v_0\|_{\mathcal{H}}}{\beta}$ . Usando a propriedade do binômio quadrado adequadamente em (2.26), garantimos a existência de  $C > 0$ , de forma que  $\|u_\epsilon\|_{\mathcal{H}} \leq C$ .

A expressão (2.25) é obtida de forma análoga

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} j(u_\epsilon) = j_\epsilon(u_\epsilon) &\leq |a(u_\epsilon, v) - \langle f, v_0 - u_\epsilon \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}}| \\ &\leq \alpha \|u_\epsilon\|_{\mathcal{H}} \|v_0\|_{\mathcal{H}} + M(\|v_0\|_{\mathcal{H}} + \|u_\epsilon\|_{\mathcal{H}}) \\ &\leq \alpha C \|v_0\|_{\mathcal{H}} + M(\|v_0\|_{\mathcal{H}} + C) = D. \end{aligned}$$

**b) Convergência fraca:** De (2.24), temos que a sequência  $\{u_\epsilon\}$  é limitada, portanto existe uma subsequência que converge fracamente a  $u^*$ , sem abuso de notação assumiremos por  $\{u_\epsilon\}$ , daí  $j(u_\epsilon) \rightarrow j(u^*)$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Logo de (2.25) temos que  $j(u_\epsilon) \rightarrow 0$  e portanto  $j(u^*) = 0$ . Finalmente de (2.20), temos  $u^* \in \mathcal{K}$ .

Lembrando que

$$a(u_\epsilon, u_\epsilon) \leq a(u_\epsilon, v) - \langle f, v - u_\epsilon \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}} \quad \forall v \in K.$$

Ao tomar limite na desigualdade acima, tem-se:

$$a(u^*, u^*) \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} a(u_\epsilon, u_\epsilon) \leq a(u^*, v) - \langle f, v - u^* \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}}, \quad \forall v \in K.$$

Portanto

$$a(u^*, v - u^*) \geq \langle f, v - u^* \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}}, \quad v \in K.$$

Daqui  $u^*$  satisfaz (2.8) e da unicidade da solução deste problema, tem-se  $u^* = u$ .

**c) Convergência Forte:** Da coersividade da forma bilinear, temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \beta \|u_\epsilon - u\|_{\mathcal{H}}^2 + j_\epsilon(u_\epsilon) \leq a(u_\epsilon - u, u_\epsilon - u) + j_\epsilon(u_\epsilon) \\ &\leq a(u_\epsilon, u_\epsilon) + j_\epsilon(u_\epsilon) - a(u_\epsilon, u) - a(u, u_\epsilon) + a(u, u). \end{aligned}$$

Dado que  $u_\epsilon$  é solução de  $(P_\epsilon)$ , então

$$0 \leq a(u_\epsilon, v) - \langle f, v - u_\epsilon \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}} - a(u_\epsilon, u) - a(u, u_\epsilon) + a(u, u), \quad \forall v \in K.$$

Usando a convergência fraca tem-se

$$\begin{aligned} 0 &\leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} [\beta \|u_\epsilon - u\|^2 + j_\epsilon(u_\epsilon)] \\ &\leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} [\beta \|u_\epsilon - u\|^2 + j_\epsilon(u_\epsilon)] \\ &\leq a(u, v - u) - \langle f, v - u \rangle_{\mathcal{H}' \times \mathcal{H}}, \quad \forall v \in K. \end{aligned}$$

Tomando  $v = u$  na expressão anterior, temos  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\beta \|u_\epsilon - u\|^2 + j_\epsilon(u_\epsilon)] = 0$  e portanto

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|u_\epsilon - u\|^2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} j_\epsilon(u_\epsilon) = 0.$$

Isto finalmente completa a prova do Teorema. ■

Lembremos que no caso que  $a(u, v)$  seja simétrica, pelo Teorema 2.5 temos uma relação de equivalência entre (2.8) e (2.9) e pelo Lema 2.8 temos uma relação de equivalência entre um problema  $(P_\epsilon)$  e um problema de minimização, da forma :

$$\min_{v \in H} H_\epsilon(v),$$

onde  $H_\epsilon(v) = J(v) + j_\epsilon(v)$ .

Já que o Teorema 2.9 mostra que uma sequência de soluções de inequações variacionais do segundo tipo converge para a única solução da inequação variacional do primeiro tipo. Portanto no caso que a forma bilinear seja simétrica temos o mesmo resultado para os problemas de minimização, como pode ser visto no seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Inequação Variacional do primeiro Tipo} & \iff & \min_{v \in K} J(v) \\ \downarrow \text{Penalização} & & \downarrow \text{Penalização} \\ \text{Inequação Variacional do segundo Tipo} & \iff & \min_{v \in \mathcal{H}} H_\epsilon(v) \end{array}$$

Este resultado de equivalência e penalização são importantes, pois permite mostrar a regularidade da solução fraca no Problema do Obstáculo. Este problema será estudado no seguinte capítulo.

### 3 PROBLEMA DO OBSTÁCULO

Uma aplicação simples e importante das inequações variacionais elípticas é o Problema do Obstáculo. Este problema é importante pois é base de muitos problemas encontrados na Física, Química, Economia e Engenharia. Dizemos que um determinado problema é um problema tipo obstáculo quando ele pode ser transformado em um Problema do Obstáculo. Existem muitos problemas tipo obstáculo como por exemplo os relacionados a fenômenos de elasticidade, fenômenos de lubrificação, filtragem de líquidos em meios porosos e torção elastoplástica, veja [28] e [20].

O exemplo clássico no estudo das EDP's é o Problema da Membrana, [12]. Para este problema consideremos uma membrana homogênea e elástica que ocupa uma região  $\Omega$  no plano  $XY$  fixa na sua fronteira a uma função  $g$ . Quando a membrana é submetida a uma força externa  $f$ , sua geometria é alterada, o que indica que cada ponto  $(x, y)$  em  $\Omega$  assume um valor  $u(x, y)$  perpendicular ao plano  $XY$ .

A posição de equilíbrio da membrana é obtida ao resolver o seguinte Problema de Poisson:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, & \text{em } \Omega. \\ u &= g, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

A estratégia usada para obter a solução (forte) do Problema de Poisson é levar para sua formulação fraca, que é uma equação variacional, mostrar a existência e unicidade via o Lema de Lax Milgram e logo mostrar a regularidade, isto significa, mostrar que a solução fraca é solução forte.

No Problema do Obstáculo o tratamento é similar, o que significa levar para sua formulação fraca, que é uma inequação variacional, mostrar a existência e unicidade da solução fraca e logo mostrar a regularidade dela usando por exemplo um método de penalização.

### 3.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Segundo [28], consideremos uma membrana homogênea e elástica que ocupa uma região  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  (aberto e limitado) no plano  $XY$  fixada na fronteira  $\partial\Omega$ . Este problema consiste em determinar a posição de equilíbrio que a membrana atinge com a presença de um corpo rígido definido por  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq \varphi(x, y)\}$ , onde  $\varphi$  é a função obstáculo que satisfaz  $\varphi \leq g$  sobre  $\partial\Omega$ .

Como pode ser visto na Figura 4, quando a membrana está restrita a um obstáculo é definida uma região de coincidência entre a membrana e o obstáculo. Esta região de coincidência, denotada por  $\Omega^0$  (aberta) é dada pelo seguinte conjunto.

$$\Omega^0 = \{(x, y) \in \Omega : u(x, y) = \varphi(x, y)\}.$$

Já que o obstáculo está debaixo da membrana então na região  $\Omega^+ = \Omega \setminus \bar{\Omega}^0$ , não existe coincidência entre a membrana e o obstáculo. Assim  $\Omega^+$  é definida como

$$\Omega^+ = \{(x, y) \in \Omega : u(x, y) > \varphi(x, y)\}.$$

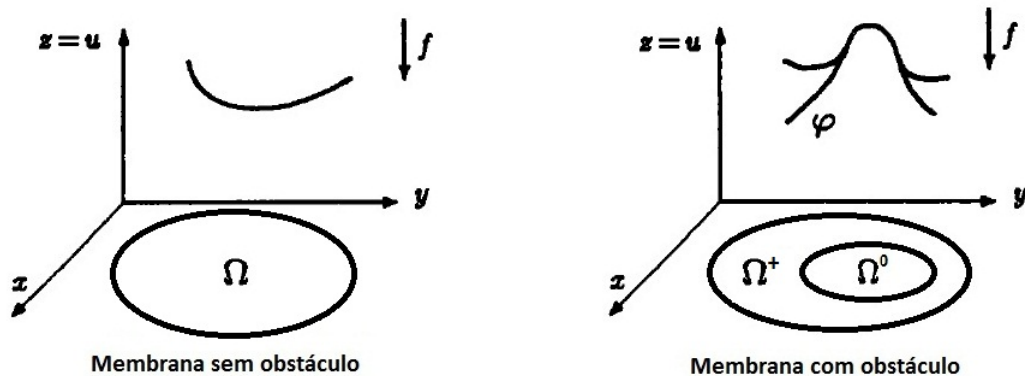


Figura 4: Problema da membrana elástica.

Fonte : Rodrigues, J.F; 1987.

Observemos na Figura 4, que a região de coincidência está estritamente contida no interior de  $\Omega$ , isto indica que  $u < g$  sobre  $\partial\Omega$ , mas é possível que  $\partial\Omega^0 \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ .

A pesar de não ter coincidência com o obstáculo em  $\Omega^+$ , existe um equilíbrio de forças. Isto indica que

$$-\Delta u = f, \quad \text{em } \Omega^+.$$

Dado que em  $\Omega^0$  não existe equilíbrio de forças, então  $-\Delta u \neq f$  em  $\Omega^0$ . Como o obstáculo foi suposto rígido, então

$$-\Delta u > f, \quad \text{em } \Omega^0.$$

Finalmente na região  $\Gamma = \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^0$ , a coincidência é dada suavemente, ou seja:

$$u = \varphi \quad \text{e} \quad \nabla u = \nabla \varphi \quad \text{sobre } \Gamma.$$

Esta região  $\Gamma$  define a curva que separa a região  $\Omega^+$  de  $\Omega^0$ . Esta região  $\Gamma$  é chamada

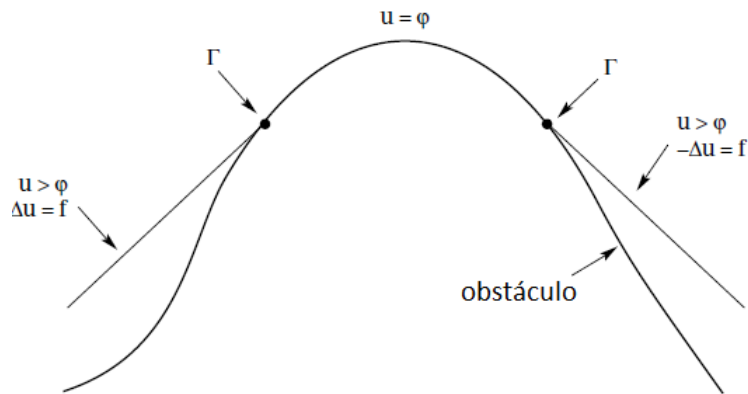


Figura 5: Problema do Obstáculo Unidimensional.  
Fonte : Friedman, A. ; 2000.

Fronteira Livre. O Problema do Obstáculo é um caso de Problema de Fronteira Livre. Denotamos a solução deste tipo de problema como o par  $\{u, \Gamma\}$ . Baseado nos supostos físicos dados anteriormente definimos este problema da seguinte forma :

**Problema do Obstáculo:** Determinar o par  $\{u, \Gamma\}$  que verifique as seguintes condições:

$$-\Delta u = f, \quad \text{em } \Omega^+. \quad (3.1)$$

$$u = \varphi, \quad \text{em } \Omega^0. \quad (3.2)$$

$$u = g, \quad \text{sobre } \partial\Omega. \quad (3.3)$$

$$u = \varphi, \quad \text{sobre } \Gamma. \quad (3.4)$$

$$\nabla u = \nabla \varphi, \quad \text{sobre } \Gamma. \quad (3.5)$$

$$u \geq \varphi, \quad \text{em } \Omega. \quad (3.6)$$

$$-\Delta u \geq f, \quad \text{em } \Omega. \quad (3.7)$$

De (3.1), (3.2), (3.6) e (3.7) temos que o Problema do Obstáculo pode ser formulado via um Problema de Complementaridade, da seguinte forma :

$$\begin{cases} u \geq \varphi, & \text{em } \Omega \\ -\Delta u \geq f, & \text{em } \Omega \\ (-\Delta u - f)(u - \varphi) = 0, & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (3.8)$$

Assim, se  $u$  é solução do Problema do Obstáculo, em particular também satisfaz (3.8). Esta formulação via complementaridade será de muita importância neste trabalho, já que permitirá resolver numericamente (3.8).

A Figura 5 representa o Problema do Obstáculo para o caso unidimensional e a seguir é apresentado um exemplo deste caso.

**Exemplo 2.1.** Dado  $\Omega = ]-1, 1[$ ,  $g = 0$ ,  $\varphi = -\frac{1}{18}$  e  $f(x) = \begin{cases} -1; & |x| > \frac{1}{4} \\ 1 - 32x^2; & |x| \leq \frac{1}{4} \end{cases}$ .

Encontre  $u$  que satisfaz as condições (3.1)-(3.7).

Considere os seguintes casos:

**Caso 1:** Seja  $\Gamma = \pm\frac{2}{3}$  e o conjunto de coincidência dado por  $\Omega^0 = ]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}[$ , e a função  $u$ , definida como :

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{18} + \frac{1}{2}(x + \frac{2}{3})^2 & ; -1 \leq x < -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{18} & ; -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{18} + \frac{1}{2}(x - \frac{2}{3})^2 & ; \frac{2}{3} < x \leq 1. \end{cases}$$

satisfaz as condições (3.1)-(3.6). Mas não satisfaz a condição (3.7), já que  $u''(0) = 0$  e  $f(0) = 1$ .

**Caso 2:** Seja  $\Gamma = \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}$  e o conjunto de coincidência dado por  $\Omega^0 = ]-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}[ \cup ]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ , e a função  $u$ , definida como :

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{18} + \frac{1}{2}(x + \frac{2}{3})^2 & ; -1 \leq x < -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{18} & ; -\frac{2}{3} \leq x \leq -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{18} + \frac{1}{2}(x + \frac{1}{3})^2 & ; -\frac{1}{3} < x \leq -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{32} + \frac{8x^2}{3}(x^2 - \frac{3}{16}) & ; -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{18} + \frac{1}{2}(x - \frac{1}{3})^2 & ; \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{18} & ; \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{18} + \frac{1}{2}(x - \frac{2}{3})^2 & ; \frac{2}{3} < x \leq 1 \end{cases}$$

satisfaz as condições (3.1)-(3.7). Como pode ser visto na Figura 6, note que (3.7) é uma condição importante pois permite garantir a unicidade da solução no Problema do Obstáculo.

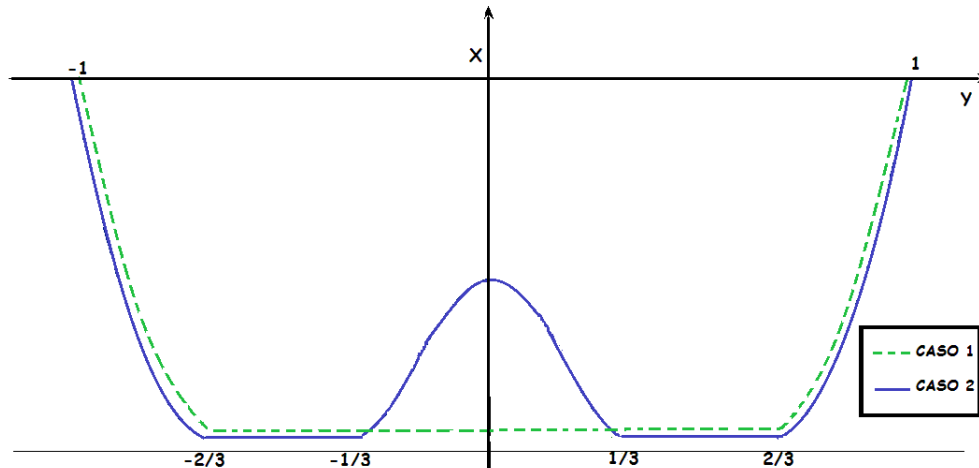


Figura 6: Gráfico das funções do Exemplo 2.1  
 Fonte: Elliot, C. M. e Ockendon, J.R. ; 1982.

## 3.2 FORMULAÇÃO VARIACIONAL

A proposta do Cálculo Variacional é formular o Problema do Obstáculo como um problema de minimização. O funcional que se deseja minimizar é dado pela energia potencial elástica,  $E : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ , que é definida como

$$\begin{aligned} E(v) &= D(v) - F(v) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx - \int_{\Omega} f(x)v(x)dx, \end{aligned}$$

onde  $D$  representa a energia potencial da deformação da membrana e  $F$  representa o trabalho feito pela força externa. O espaço  $\mathcal{V}$  é representado pelo espaço de funções com energia potencial da deformação finita. Esta propriedade de  $\mathcal{V}$  permite introduzir os Espaços de Sobolev. Segundo [3], consideremos  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e  $1 \leq p \leq \infty$ , logo o Espaço de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  é definido como :

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \nabla u \in [L^p(\Omega)]^n\}.$$

Estes espaços são de Banach e sua norma é dada por

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_p + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p,$$

onde  $\|\cdot\|_p$  é a norma em  $L^p(\Omega)$ .

Para o caso que  $p = 2$ , temos que  $W^{1,2}(\Omega)$  é denotado por  $H^1(\Omega)$ . Além disso,  $H^1(\Omega)$  é

um espaço de Hilbert com produto interno dado por :

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

De forma geral, para qualquer  $m \in \mathbb{N}$ , definimos o Espaço de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$  por

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in W^{m-1,p}(\Omega) : \nabla u \in [W^{m-1,p}(\Omega)]^n\}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

E, para o caso em que  $0 \leq m < s < m + 1$ , temos que  $W^{s,p}(\Omega)$  é um espaço intermédio entre  $W^{m,p}(\Omega)$  e  $W^{m+1,p}(\Omega)$ . No caso em que  $p = 2$ , denotamos por  $H^s(\Omega)$  ao espaço  $W^{s,2}(\Omega)$ .

Tomando  $\mathcal{V} = H^1(\Omega)$  definimos o conjunto de deslocamentos admissíveis,  $\mathcal{K}_{\varphi}^g$ , como

$$\mathcal{K}_{\varphi}^g = \{v \in H^1(\Omega) : v \geq \varphi \text{ em } \Omega \text{ e } v = g \text{ sobre } \partial\Omega\}. \quad (3.9)$$

Quando  $g = 0$ , denotamos este conjunto da seguinte forma :

$$\mathcal{K}_{\varphi}^0 = \{v \in H_0^1(\Omega) : v \geq \varphi \text{ em } \Omega\}. \quad (3.10)$$

Denotamos por  $H_0^1(\Omega)$  o espaço de funções  $v \in H^1(\Omega)$  tais que  $v = 0$  sobre  $\partial\Omega$ .

Também temos que considerar algumas propriedades para o domínio da membrana como, por exemplo, considerar  $\Omega$  como um conjunto aberto e limitado de classe  $C^1$ . Dizemos que  $\Omega$  é de classe  $C^1$  quando  $\partial\Omega$  é uma função de Lipschitz. Mais adiante veremos que esta propriedade para  $\Omega$  é importante pois permite aplicar os resultados de imersão dados no Teorema de Rellich-Kondrachov, [3].

A seguir mostraremos que o conjunto  $\mathcal{K}_{\varphi}^g$  é não vazio, convexo e fechado em  $H^1(\Omega)$ .

**Teorema 3.1.** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto e limitado de classe  $C^1$ . Dado  $\varphi \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  com  $\varphi \leq 0$  sobre  $\partial\Omega$ . Então  $\mathcal{K}_{\varphi}^0$  é um conjunto não vazio, convexo e fechado.

**Demonstração:** Como  $\varphi \in H^1(\Omega)$ , então  $\max\{\varphi, 0\} = \varphi^+ \in H^1(\Omega)$ . Dado que  $\varphi \leq 0$  sobre  $\partial\Omega$ , então  $\varphi^+|_{\partial\Omega} = 0$  e  $\varphi^+ \geq \varphi$  portanto  $\varphi^+ \in \mathcal{K}_{\varphi}^0$ , isto indica que  $\mathcal{K}_{\varphi}^0$  é não vazio. Para mostrar a convexidade, tome  $v, w \in \mathcal{K}_{\varphi}^0$  e  $\lambda \in [0, 1]$ . Assim

$$\lambda v + (1 - \lambda)w \in H_0^1(\Omega) \quad \text{e} \quad \lambda v + (1 - \lambda)w \geq \lambda\varphi + (1 - \lambda)\varphi = \varphi.$$

Isto mostra que  $\mathcal{K}_{\varphi}^0$  é convexo.

Para mostrar que  $\mathcal{K}_{\varphi}^0$  é fechado, procedemos por contradição, ou seja, suponhamos que  $v_n \rightarrow v$  em  $H_0^1(\Omega)$  para cada  $v_n \in \mathcal{K}_{\varphi}^0$ , com  $v \notin \mathcal{K}_{\varphi}^0$ , o que indica que existe um subconjunto  $A \subset \Omega$  com  $m(A) > 0$  e  $v < \varphi$  em  $A$ . Do Teorema de medida de Lebesgue, existe um



$\epsilon > 0$  tal que  $v \leq \varphi - \epsilon$  em  $A$ . Assim

$$\int_{\Omega} |v_n - v|^2 dx \geq \int_A |v_n - v|^2 dx \geq \int_A |\varphi - v|^2 dx \geq \epsilon^2 m(A) > 0.$$

Isto mostra que  $v_n \not\rightarrow v$  em  $L^2(\Omega)$ , o que é uma contradição, pois  $v_n \rightarrow v$  em  $H_0^1(\Omega)$ . ■

O Teorema 3.1 mostra que  $\mathcal{K}_{\varphi}^0$  é não vazio, convexo e fechado. O próximo teorema mostra o mesmo resultado para  $\mathcal{K}_{\varphi}^g$ . Para mostrar isso assumimos que  $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ .

**Teorema 3.2.** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto e limitado de classe  $C^1$ . Dado  $\varphi \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  e  $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  tal que  $\varphi \leq g$  sobre  $\partial\Omega$ , então  $\mathcal{K}_{\varphi}^g$  é um conjunto não vazio, convexo e fechado.

**Demonstração:** Usando o Teorema do Traço veja [28], considere uma função  $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$  tal que  $\tilde{g} = g$  sobre  $\partial\Omega$ , ao fazer a translação  $\tilde{u} = u - \tilde{g}$  e  $\tilde{\varphi} = \varphi - \tilde{g}$ , notamos que  $\mathcal{K}_{\varphi}^g = g + \mathcal{K}_{\tilde{\varphi}}^0$ . Usando o teorema anterior, temos que  $\mathcal{K}_{\tilde{\varphi}}^0$  é um conjunto não vazio convexo e fechado. ■

Seja o problema

$$\text{Achar } u \in \mathcal{K}_{\varphi}^g : E(u) \leq E(v), \quad \forall v \in \mathcal{K}_{\varphi}^g.$$

se tomamos  $v \in \mathcal{K}_{\varphi}^g$  e pela convexidade de  $\mathcal{K}_{\varphi}^g$ , definimos a função  $\Phi$ , como

$$\begin{aligned} \Phi : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto E(u + t(v - u)). \end{aligned}$$

Já que  $\Phi$  satisfaz as hipóteses do Exemplo 2.1, temos que  $\Phi$  é uma função diferenciável e  $\Phi'(t)$  é da forma :

$$\Phi'(t) = \int_{\Omega} \nabla(u + t(v - u)) \cdot \nabla(v - u) dx - \int_{\Omega} f(v - u) dx.$$

Como o valor mínimo de  $E(v)$  é atingido em  $v = u$ , isto indica que o valor mínimo de  $\Phi$  é atingido em  $t = 0$ . Assim do Exemplo 2.1, temos que  $\Phi'(0) \geq 0$ . Portanto

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(v - u) dx - \int_{\Omega} f(v - u) dx \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{K}_{\varphi}^g.$$

Logo a inequação variacional associada ao Problema do Obstáculo é da forma

$$\text{Achar } u \in \mathcal{K}_{\varphi}^g : \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(v - u) dx \geq \int_{\Omega} f(v - u) dx, \quad \forall v \in \mathcal{K}_{\varphi}^g. \quad (3.11)$$

Agora o objetivo é mostrar a existência e unicidade da solução de (3.11). Segundo [8], mostraremos este resultado de existência e unicidade para o caso que  $g = 0$ .

**Teorema 3.3.** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto e limitado de classe  $C^1$ . Dado  $\varphi \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  tal que  $\varphi \leq 0$  sobre  $\partial\Omega$  e  $f \in L^2(\Omega)$ . Então o problema

$$\text{Achar } u \in \mathcal{K}_\varphi^0 : \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(v - u) dx \geq \int_{\Omega} f(v - u) dx, \quad \forall v \in \mathcal{K}_\varphi^0, \quad (3.12)$$

tem uma única solução. Além disso (3.12) é equivalente ao seguinte problema

$$\text{Achar } u \in \mathcal{K}_\varphi^0 : E(u) \leq E(v), \quad \forall v \in \mathcal{K}_\varphi^0. \quad (3.13)$$

**Demonstração:** Definindo por

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \quad \text{e} \quad \langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f v dx.$$

Mostraremos que  $a(u, v)$  e  $\langle f, v \rangle$  verificam as hipóteses do Teorema 2.5.

**a)** É fácil ver que  $a(u, v)$  é bilinear e simétrica e  $\langle f, v \rangle$  é linear.

**b)** A continuidade é mostrada pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, fazendo

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \right| \\ &\leq \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |\langle f, v \rangle| &= \left| \int_{\Omega} f v dx \right| \\ &\leq \left( \int_{\Omega} |f|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |v|^2 dx \right)^{1/2} \leq \|f\|_2 \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

**c)** A coercividade da forma bilinear é mostrada pelo Lema de Poincaré-Friedrichs [3]. Este Lema diz que a semi-norma

$$|v|_{H^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \right)^{1/2} \quad \text{é uma norma em } H_0^1(\Omega).$$

Desta forma  $a(v, v) = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx = |v|_{H^1(\Omega)}^2 \geq C \|v\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$

Já que as hipóteses do Teorema 2.5 para  $a(u, v)$  e  $\langle f, v \rangle$  são satisfeitas e  $\mathcal{K}_\varphi^0$  é um conjunto

não vazio, convexo e fechado, temos que (3.12) tem solução única. Observe que  $a(u, v)$  é simétrica, portanto do resultado de equivalência dado no Teorema 2.5, temos que (3.12) e (3.13) são equivalentes. ■

Para mostrar a existência e unicidade da solução de (3.11), o procedimento é análogo. Mas nesta demonstração usaremos os resultados de imersão em espaços de Sobolev, dados no Teorema de Rellich-Kondrachov.

**Teorema 3.4.** (Rellich-Kondrachov) Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto e limitado de classe  $C^1$ . Então se satisfaz :

- a. Se  $p < n$  então  $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ ,  $\forall q \in [1, p^*[$  onde  $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ .
- b. Se  $p = n$  então  $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ ,  $\forall q \in [1, \infty[$ .
- c. Se  $p > n$  então  $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ .

Tem imersões compactas.

**Demonstração:** A prova deste teorema pode ser vista em [3]. ■

De [28] temos o resultado que mostra a existência e unicidade da solução de (3.11).

**Teorema 3.5.** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto e limitado de classe  $C^1$ . Dado  $\varphi \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  com  $\varphi \leq g$  sobre  $\partial\Omega$ ,  $f \in L^p(\Omega)$  ( $p \geq \frac{2n}{n+2}$  se  $n \geq 3$ ,  $p > 1$  se  $n = 2$  ou  $p = 1$  se  $n = 1$ ) e  $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ . Então o problema :

$$\text{Achar } u \in \mathcal{K}_\varphi^g : \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(v - u) dx \geq \int_{\Omega} f(v - u) dx, \quad \forall v \in \mathcal{K}_\varphi^g,$$

tem uma única solução. Além disso este problema é equivalente a

$$\text{Achar } u \in \mathcal{K}_\varphi^g : E(u) \leq E(v), \quad \forall v \in \mathcal{K}_\varphi^g.$$

**Demonstração:** Do Teorema do traço, considere  $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$  tal que  $\tilde{g} = g$  sobre  $\partial\Omega$ , ao fazer a translação  $\tilde{u} = u - \tilde{g}$  e  $\tilde{\varphi} = \varphi - \tilde{g}$ , podemos escrever (3.11), da forma

$$\text{Achar } \tilde{u} \in \mathcal{K}_{\tilde{\varphi}}^0 : \int_{\Omega} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla(\tilde{v} - \tilde{u}) dx \geq \int_{\Omega} f(\tilde{u} - \tilde{v}) dx - \int_{\Omega} \nabla \tilde{g} \cdot \nabla(\tilde{v} - \tilde{u}) dx, \quad \forall \tilde{v} \in \mathcal{K}_{\tilde{\varphi}}^0.$$

Definindo por

$$a(\tilde{u}, \tilde{v}) = \int_{\Omega} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{v} dx \quad \text{e} \quad \langle F, \tilde{v} \rangle = \int_{\Omega} f(\tilde{u} - \tilde{v}) dx - \int_{\Omega} \nabla \tilde{g} \cdot \nabla(\tilde{v} - \tilde{u}) dx.$$

Note que já foi mostrado no teorema anterior que  $a(\tilde{u}, \tilde{v})$  é uma forma bilinear contínua, coerciva e simétrica. Portanto o objetivo agora é mostrar que  $F : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  é um funcional linear, ou seja,  $F \in H^{-1}(\Omega) = [H_0^1(\Omega)]'$ . Isto é mostrado via o Teorema 3.4.

- Se  $n \geq 3$  temos  $H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$  para  $q \leq \frac{2n}{n-2}$ , portanto

$$L^p(\Omega) = [L^q(\Omega)]' \subset [H_0^1(\Omega)]' = H^{-1}(\Omega), \text{ para } p \geq \frac{2n}{n+2}.$$

- Se  $n = 2$  temos  $H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$  para  $q \in [1, \infty)$ , portanto

$$L^p(\Omega) = [L^q(\Omega)]' \subset [H_0^1(\Omega)]' = H^{-1}(\Omega), \text{ para } p > 1.$$

- Se  $n = 1$  temos  $H_0^1(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega}) \subset L^\infty(\Omega)$ , portanto

$$L^1(\Omega) \subsetneq [L^\infty(\Omega)]' \subset [H_0^1(\Omega)]' = H^{-1}(\Omega).$$

Como as hipóteses do Teorema 2.5 são satisfeitas, garantimos a existência e unicidade da solução de (3.11) e o resultado de equivalência com (3.12).  $\blacksquare$

O Teorema 3.5 mostra a existência e unicidade da solução fraca para o Problema do Obstáculo. O seguinte passo é mostrar que a solução fraca é solução forte e viceversa. Esta equivalência será mostrada na seguinte seção.

### 3.3 EQUIVALÊNCIA ENTRE AS FORMULAÇÕES FRACA E FORTE

Do Teorema 3.5 visto na seção anterior, garantimos a existência e unicidade da solução fraca para o Problema do Obstáculo, mas nada indica que a solução fraca seja também solução forte. Nesta seção mostraremos os resultados que garantem a equivalência entre a formulação fraca e a formulação forte para o Problema do Obstáculo. Ou seja temos que mostrar que a solução fraca é solução forte e viceversa.

Segundo [8], consideremos o funcional  $E : \mathcal{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , definido por :

$$E(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \int_{\Omega} f v dx,$$

e definamos o seguinte problema de minimização :

$$\text{Achar } u \in \mathcal{K}_\varphi^0 : \quad E(u) \leq E(v), \quad \forall v \in \mathcal{K}_\varphi^0. \quad (3.14)$$

Para cada  $\epsilon > 0$  é definido uma sequência de problemas de minimização, da forma:

$$\text{Achar } u_\epsilon : E_\epsilon(u_\epsilon) \leq E_\epsilon(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.15)$$

Denotando por  $f^- = \min\{f, 0\}$  definimos  $E_\epsilon(v)$  da seguinte forma :

$$E_\epsilon(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \int_{\Omega} f v dx + \frac{1}{2\epsilon} \int_{\Omega} (v - \varphi)^- (v - \varphi) dx.$$

Para mostrar que a solução fraca é solução forte será usada um método de penalização. Tomando por  $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$ , pelo Lema de Lax Milgram temos que (3.15) é equivalente à seguinte equação diferencial

$$\text{Achar } u_\epsilon \in H_0^1(\Omega) : -\Delta u_\epsilon + \frac{1}{\epsilon} (u_\epsilon - \varphi)^- = f, \quad \text{em } \Omega. \quad (3.16)$$

Isto indica que  $u_\epsilon \rightarrow u$ , onde  $u$  é a solução fraca para o Problema do Obstáculo. A seguir é apresentado um teorema, [23] que mostra que a solução de (3.12) está em  $H^2(\Omega)$ .

**Teorema 3.6.** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  aberto e limitado de classe  $C^1$ . Dado  $\varphi \in H^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  com  $\varphi \leq 0$  sobre  $\partial\Omega$  e  $f \in L^2(\Omega)$ . Então a solução do problema

$$\text{Achar } u \in \mathcal{K}_\varphi^0 : \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - u) dx \geq \int_{\Omega} f (v - u) dx, \quad \forall v \in \mathcal{K}_\varphi^0,$$

está em  $H^2(\Omega)$ .

**Demonstração:** Dado que  $u_\epsilon \in H_0^1(\Omega)$  para mostrar que  $u_\epsilon$  está em  $H^2(\Omega)$ , só falta mostrar que  $\Delta u_\epsilon$  está em  $L^2(\Omega)$ . Como  $u_\epsilon - \varphi = -\varphi$  sobre  $\partial\Omega$  e  $\varphi \leq 0$  sobre  $\partial\Omega$ , então  $(u_\epsilon - \varphi)^- = 0$  sobre  $\partial\Omega$ , o que indica que  $(u_\epsilon - \varphi)^- \in H_0^1(\Omega)$ . Ao multiplicar por  $(u_\epsilon - \varphi)^-$  em (3.16), integrar e aplicar a primeira identidade de Green, temos

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \Delta u_\epsilon (u_\epsilon - \varphi)^- dx + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} |(u_\epsilon - \varphi)^-|^2 dx &= \int_{\Omega} f (u_\epsilon - \varphi)^- dx; \\ \int_{\Omega} \nabla u_\epsilon \cdot \nabla (u_\epsilon - \varphi)^- dx + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} |(u_\epsilon - \varphi)^-|^2 dx &= \int_{\Omega} f (u_\epsilon - \varphi)^- dx. \end{aligned}$$

Como  $\int_{\Omega} \nabla (u_\epsilon - \varphi) \cdot \nabla (u_\epsilon - \varphi)^- dx = \int_{\Omega} |\nabla (u_\epsilon - \varphi)^-|^2 dx$ , ao substituir na equação dada acima e aplicar a primeira identidade de Green, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla (u_\epsilon - \varphi)^-|^2 dx + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} |(u_\epsilon - \varphi)^-|^2 dx &= \int_{\Omega} f (u_\epsilon - \varphi)^- dx - \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla (u_\epsilon - \varphi)^- dx \\ &= \int_{\Omega} f (u_\epsilon - \varphi)^- dx + \int_{\Omega} \Delta \varphi (u_\epsilon - \varphi)^- dx \\ &= \int_{\Omega} (f + \Delta \varphi) (u_\epsilon - \varphi)^- dx. \end{aligned}$$

Posto que cada expressão da esquerda é não negativa, temos da equação dada acima

$$\frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} |(u_{\epsilon} - \varphi)^{-}|^2 dx \leq \int_{\Omega} (f + \Delta\varphi)(u_{\epsilon} - \varphi)^{-} dx,$$

ao aplicar a desigualdade de Cauchy-Schwarz na relação anterior, temos

$$\frac{1}{\epsilon} \|(u_{\epsilon} - \varphi)^{-}\|_2 \leq \|f + \Delta\varphi\|_2.$$

Usando esta desigualdade em (3.16), obtemos

$$\begin{aligned} \|\Delta u_{\epsilon}\|_2 &= \|f - \frac{1}{\epsilon}(u_{\epsilon} - \varphi)^{-}\|_2 \\ &\leq \|f\|_2 + \frac{1}{\epsilon} \|(u_{\epsilon} - \varphi)^{-}\|_2 \\ &\leq \|f\|_2 + \|f + \Delta\varphi\|_2. \end{aligned}$$

Isto mostra que  $\Delta u_{\epsilon} \in L^2(\Omega)$ , já que  $u_{\epsilon} \rightarrow u$  então  $u \in H^2(\Omega)$ . ■

No caso em que  $1 < p < 2$  é claro que  $L^2(\Omega) \subset L^p(\Omega)$  e consequência do Teorema 3.6 temos que  $u \in H^2(\Omega)$ , o que indica que  $u \in W^{2,p}(\Omega)$ .

A seguir será mostrado um resultado similar para o caso em que  $p > 2$ , que pode ser visto em [23].

**Teorema 3.7.** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  aberto e limitado de classe  $C^1$  e  $p > 2$ . Dado  $f \in L^p(\Omega)$  e  $\varphi \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  com  $\varphi \leq 0$  sobre  $\partial\Omega$ , Então a solução do seguinte problema

$$\text{Achar } u \in \mathcal{K}_{\varphi}^0 : \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(v - u) dx \geq \int_{\Omega} f(v - u) dx, \quad \forall v \in \mathcal{K}_{\varphi}^0,$$

está em  $W^{2,p}(\Omega)$ .

**Demonstração:** Do Teorema 3.4, temos que  $H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$  com  $p > 1$  e portanto  $u_{\epsilon} \in L^p(\Omega)$ .

Em particular para  $p > 2$ , ao multiplicar por  $((u_{\epsilon} - \varphi)^{-})^{p-1}$  em (3.16), integrar e aplicar a primeira identidade de Green, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\Delta u_{\epsilon} ((u_{\epsilon} - \varphi)^{-})^{p-1} dx + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} |(u_{\epsilon} - \varphi)^{-}|^p dx &= \int_{\Omega} f ((u_{\epsilon} - \varphi)^{-})^{p-1} dx; \\ (p-1) \int_{\Omega} \nabla u_{\epsilon} \cdot \nabla ((u_{\epsilon} - \varphi)^{-})^{p-2} dx + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} |(u_{\epsilon} - \varphi)^{-}|^p dx &= \int_{\Omega} f ((u_{\epsilon} - \varphi)^{-})^{p-1} dx. \end{aligned}$$

Note que

$$(p-1) \int_{\Omega} \nabla(u_{\epsilon} - \varphi) \cdot \nabla((u_{\epsilon} - \varphi)^{-})^{p-2} = \int_{\Omega} |\nabla(u_{\epsilon} - \varphi)^{-}|^{p-1},$$

ao substituir na equação anterior, temos

$$(p-1) \int_{\Omega} |\nabla(u_{\epsilon} - \varphi)^{-}|^{p-1} dx + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} |(u_{\epsilon} - \varphi)^{-}|^p dx = \int_{\Omega} f((u_{\epsilon} - \varphi)^{-})^{p-1} dx + \int_{\Omega} \Delta\varphi((u_{\epsilon} - \varphi)^{-})^{p-1} dx.$$

Já que as expressões da esquerda são não negativas e pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} |(u_{\epsilon} - \varphi)^{-}|^p dx &\leq \int_{\Omega} (f + \Delta\varphi)(u_{\epsilon} - \varphi)^{-})^{p-1} dx; \\ \frac{1}{\epsilon} (\|(u_{\epsilon} - \varphi)^{-}\|_p)^p &\leq \|f + \Delta\varphi\|_p (\|(u_{\epsilon} - \varphi)^{-}\|_p)^{p/q}; \\ \frac{1}{\epsilon} \|(u_{\epsilon} - \varphi)^{-}\|_p &\leq \|f + \Delta\varphi\|_p. \end{aligned}$$

Usando esta desigualdade em (3.16), temos

$$\begin{aligned} \|\Delta u_{\epsilon}\|_p &= \|f - \frac{1}{\epsilon}(u_{\epsilon} - \varphi)^{-}\|_p \\ &\leq \|f\|_p + \frac{1}{\epsilon} \|(u_{\epsilon} - \varphi)^{-}\|_p \\ &\leq \|f\|_p + \|f + \Delta\varphi\|_p. \end{aligned}$$

Isto mostra que  $\Delta u_{\epsilon} \in L^p(\Omega)$  e conseqüentemente  $u_{\epsilon} \in W^{2,p}(\Omega)$  e posto que  $u_{\epsilon} \rightarrow u$  é claro que  $u \in W^{2,p}(\Omega)$ .  $\blacksquare$

Segundo [8], a seguir é apresentado o resultado que garante que uma solução fraca é solução forte.

**Teorema 3.8.** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  aberto e limitado com fronteira  $\partial\Omega \in C^{1,1}$ . Dado  $f \in L^p(\Omega)$  para algum  $p \geq 2$  e  $\varphi \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  com  $\varphi \leq 0$  sobre  $\partial\Omega$ . Então a solução do seguinte problema :

$$\text{Achar } u \in \mathcal{K}_{\varphi}^0 : \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(v - u) dx \geq \int_{\Omega} f(v - u) dx, \quad \forall v \in \mathcal{K}_{\varphi}^0,$$

satisfaz (3.1)-(3.7) e o problema de complementaridade (3.8).

**Demonstração:** Do Teorema 3.7 temos que  $u \in W^{2,p}(\Omega)$  para  $p > 2$ , logo ao aplicar o Teorema 3.4 (c), temos que  $u \in C^1(\bar{\Omega})$ . Definindo os conjuntos:

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega : u(x) > \varphi(x)\} \quad \text{e} \quad \Omega^0 = \{x \in \Omega : u(x) = \varphi(x)\}$$

tais que  $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^0$  e  $\Gamma = \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^0$  garantimos (3.2) e (3.6). O fato que  $u \in C^1(\bar{\Omega})$  permite garantir que os pontos de coincidência sejam suficientemente suave sobre  $\Gamma$ , o

que significa que (3.4) e (3.5) são satisfeitas. Da definição do conjunto  $K_\varphi^0$  é claro (3.3), portanto para garantir que  $u$  seja solução do Problema do Obstáculo, falta mostrar que  $u$  satisfaça as condições (3.1) e (3.7).

Para mostrar (3.1), tomemos  $\phi \in C_0^\infty(\Omega^+)$  e  $\xi > 0$  suficientemente pequeno, tal que  $u \pm \xi\phi \in \Omega^+$ , logo ao multiplicar por  $\phi$  em (3.12), temos

$$\int_{\Omega^+} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx \geq \int_{\Omega^+} f \phi \, dx \quad \text{e} \quad \int_{\Omega^+} \nabla u \cdot \nabla(-\phi) \, dx \geq \int_{\Omega^+} f(-\phi) \, dx.$$

Isto indica que

$$\int_{\Omega^+} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \int_{\Omega^+} f \phi \, dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega^+).$$

Aplicando a primeira identidade de Green na equação anterior

$$\int_{\Omega^+} (-\Delta u - f) \phi \, dx = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega^+).$$

Portanto pelo Teorema de Du Bois Raymond garantimos que  $-\Delta u = f$  em  $\Omega^+$ .

Para mostrar (3.7), tomemos  $\phi \in C_0^\infty(\Omega^0)$  não negativa tal que  $u + \phi \in \mathcal{K}_\varphi^0$ , multiplicando por  $\phi$  em (3.12), obtemos

$$\int_{\Omega^0} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx \geq \int_{\Omega^0} f \phi \, dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega^0).$$

Aplicando a primeira identidade de Green, na inequação dada acima temos

$$\int_{\Omega^0} (-\Delta u - f) \phi \, dx \geq 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega^0).$$

Dado que  $\phi$  é não negativa, então  $-\Delta u \geq f$  em  $\Omega$ . ■

O Teorema 3.8 mostra que uma solução fraca é uma solução forte no caso em que  $u = 0$  sobre  $\partial\Omega$ . Da mesma forma, mostraremos que uma solução fraca é uma solução forte quando  $u = g$  sobre  $\partial\Omega$  com  $g \in H^{3/2}(\partial\Omega)$  e  $\partial\Omega \in C^{1,1}$ , veja [28].

**Teorema 3.9.** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  aberto e limitado com fronteira  $\partial\Omega \in C^{1,1}$ . Dado  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\varphi \in H^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  com  $\varphi \leq g$  sobre  $\partial\Omega$  e  $g \in H^{3/2}(\partial\Omega)$ . Então a solução do seguinte problema

$$\text{Achar } u \in \mathcal{K}_\varphi^g : \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(v - u) \, dx \geq \int_{\Omega} f(v - u) \, dx, \quad \forall v \in \mathcal{K}_\varphi^g$$

satisfaz (3.1)-(3.7) e o problema de complementaridade (3.8).

**Demonstração:** Do Teorema 3.6 garantimos que  $u \in H^2(\Omega)$ , logo usamos o argumento do traço feito no Teorema 3.5, e finalmente aplicamos o Teorema 3.9. ■



O Teorema 3.9 indica que quando solução fraca do problema do obstáculo verifica algumas condições de regularidade tanto para as funções  $f, \varphi$  e  $g$  como para o domínio  $\Omega$ , consegue-se mostrar que a solução fraca também é solução forte. Além disso a solução fraca satisfaz (3.8). A recíproca do Teorema 3.9 no caso em que  $g = 0$  e  $\varphi < 0$  sobre  $\partial\Omega$  temos o seguinte resultado [8].

**Teorema 3.10.** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  aberto e limitado com fronteira  $\partial\Omega \in C^{1,1}$ . Consideremos  $f \in L^2(\Omega)$  e  $\varphi \in H^2(\Omega)$  com  $\varphi < 0$  sobre  $\partial\Omega$ . Suponha que  $\{u, \Gamma\}$  satisfaz (3.1)-(3.7) e que  $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  e que as curvas fechadas que compreendem  $\Gamma$  são contínuas. Então  $u$  satisfaz (3.12).

**Demonstração:** Para qualquer  $v \in K_\varphi^0$ , da regularidade de  $\Gamma$  e a primeira identidade de Green, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(v - u) \, dx dy &= \int_{\Omega^+ \cup \Omega^0} \nabla u \cdot \nabla(v - u) \, dx dy \\ &= \int_{\Omega^+} (-\Delta u)(v - u) \, dx dy + \int_{\partial\Omega^+} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}(v - u) \, dS; \\ &+ \int_{\Omega^0} (-\Delta \varphi)(v - \varphi) \, dx dy + \int_{\partial\Omega^0} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}}(v - \varphi) \, dS \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Como  $u$  satisfaz as condições (3.1) e (3.7), então em  $I_1$  e  $I_3$ , temos

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Omega^+} (-\Delta u)(v - u) \, dx dy = \int_{\Omega^+} f(v - u) \, dx dy; \\ I_3 &= \int_{\Omega^0} (-\Delta u)(v - u) \, dx dy \geq \int_{\Omega^0} f(v - u) \, dx dy. \end{aligned}$$

Dado que  $\varphi < 0$  sobre  $\partial\Omega$ , isto indica que a  $\partial\Omega^0$  não intersecta com a  $\partial\Omega$ . Isto indica que

$$\partial\Omega^+ = (\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^0) \cup \partial\Omega \quad \text{e} \quad \partial\Omega^0 = (\partial\Omega^0 \cap \partial\Omega^+)$$

Dado que  $v = u = 0$  sobre  $\partial\Omega$  e os vetores normais sobre  $(\partial\Omega^0 \cap \partial\Omega^+)$  e  $(\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^0)$  tem direções opostas, temos que  $I_2 + I_4 = 0$ .

Assim  $I_1 + I_3 = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(v - u) \, dx dy \geq \int_{\Omega} f(v - u) \, dx dy. \quad \blacksquare$

Quando  $\varphi \leq 0$  sobre  $\partial\Omega$  a prova é similar. Para isso consideremos  $\partial\Omega^0$  e  $\partial\Omega^+$ , como

$$\begin{aligned} \partial\Omega^0 &= (\partial\Omega^0 \cap \partial\Omega^+) \cup (\partial\Omega^0 \cap \partial\Omega) \\ \partial\Omega^+ &= (\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^0) \cup (\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^0) \cup (\partial\Omega - (\partial\Omega \cap \partial\Omega^0)) \end{aligned}$$

e da mesma forma  $I_1 + I_3 = 0$ . No caso em que  $\varphi \leq g$  sobre  $\partial\Omega$  o tratamento é similar. Resumindo o visto até agora garantimos pelo Teorema 3.5 a existência e unicidade da solução fraca. Assumindo condições de regularidade para as funções  $f$ ,  $\varphi$  e  $g$  e  $\Omega$  garantimos pelo Teorema 3.9 que a solução fraca é solução forte, em particular satisfaz o problema de complementaridade associado. A recíproca deste resultado é dada pelo Teorema 3.10. Portanto, tem-se diversos caminhos a seguir para se resolver o Problema do Obstáculo quando existe suficiente regularidade. Pode-se resolver uma inequação variacional, resolver um problema de minimização ou resolver um problema de complementaridade. Neste trabalho aproveitaremos estas equivalências para resolver o Problema do Obstáculo via um problema de complementaridade.

## 4 *PROBLEMA DO DIQUE RETANGULAR*

O estudo das inequações variacionais e conseqüentemente sua aplicação no Problema do Obstáculo são usados para resolver diversos Problemas de Fronteira Livre, [6]. Uma aplicação delas é associada a Fenômenos de Percolação. Em Física, Química e Ciência dos Materiais. A palavra percolação se refere ao movimento e filtragem de fluidos por meios porosos. Um problema simples e importante no estudo destes fenômenos é o Problema do Dique Retangular. Neste problema o fluido considerado é água e o meio poroso é homogêneo e isotrópico.

A porosidade é a razão do volume disponível para o fluido numa determinada porção do meio e o volume total da mesma porção. Dizemos que um meio poroso é homogêneo quando para cada porção pequena do meio tem a mesma porosidade.

Dizemos que um meio poroso é isotrópico quando o fluido tem a capacidade de deslocar-se da mesma forma em qualquer direção.

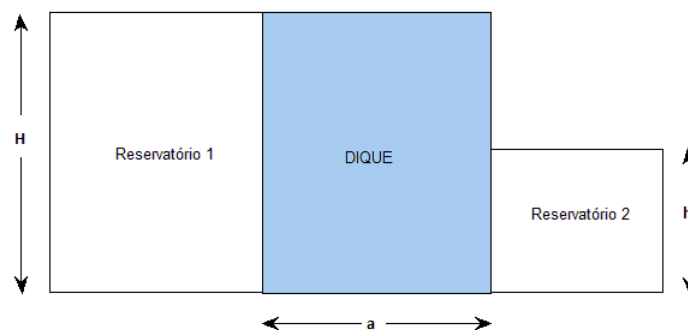


Figura 7: Representação do dique entre dois reservatórios.

Considerando dois reservatórios de água de diferentes altura de nível separados por um meio poroso retangular como pode ser visto na Figura 7. O Problema do Dique Retangular consiste em determinar a região do dique que encontra-se molhada.

O estudo de problemas associados a fenômenos de percolação, pode ser vistos de forma mais detalhada em [6] e [11]. Estes problemas tem muita aplicação na Engenharia Civil, especificamente em Geotecnia, Hidráulica e Hidrologia.

## 4.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Em 1738 o matemático holandês Daniel Bernoulli propôs um princípio conhecido como o Princípio de Bernoulli. Este princípio diz que um fluido ideal em regime de circulação por um conduto fechado possui energia constante. A energia do fluido, consta das seguintes componentes :

- a) Energia Cinética : É a energia devida à velocidade que o fluido possui.
- b) Energia Potencial Gravitacional : É a energia devida à altitude que um fluido possui.
- c) Energia de Fluxo : É a energia que um fluido contém devido à pressão que possui.

A seguinte equação é conhecida como Equação de Bernoulli

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{P}{\gamma} + z = \text{constante},$$

onde :

- $V$  é a velocidade do fluido ( $m/s$ ).
- $g$  é a aceleração gravitacional ( $m/s^2$ ).
- $z$  é a altura em relação a um plano horizontal de referencia ( $m$ ).
- $P$  é a pressão do fluido ( $N/m^2$ ).
- $\gamma$  é o peso específico do fluido ( $N/m^3$ ).

Em Hidráulica é comum expressar estes termos de comprimento como *altura* ou *cabeçal*, sendo esta última tradução do inglês *head*. Assim na Equação de Bernoulli o termo  $\frac{V^2}{2g}$  é chamada *Cabeçal de Velocidade* e o termo  $z$  agrupado com  $\frac{P}{\gamma}$  é chamado *Altura ou Carga Piezométrica*.

Segundo [28], denota-se por  $R$  à seção transversal de um dique de geometria retangular

com comprimento  $a$  e altura  $H$ , que encontra-se entre dois reservatórios de água de alturas  $H$  e  $h$  com  $H > h$ , definida da seguinte forma :

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a \text{ e } 0 < y < H\}.$$

E a altura piezométrica  $u$  no ponto  $(x, y)$  é expressada como :

$$u(x, y) = y + \frac{1}{\gamma}P(x, y).$$

Já que o fluido considerado é água então  $\gamma = 1 N/m^3$  e portanto, da equação anterior temos que a altura piezométrica  $u$  é expressa como :

$$u(x, y) = y + P(x, y).$$

Observe da Figura 7 que nos pontos  $(0, H)$  e  $(a, h)$ , temos que  $P(0, H) = P(a, h) = 0$ , substituindo esses pontos em  $u(x, y) = y + P(x, y)$  obtemos que  $u(0, H) = H$  e  $u(a, h) = h$ . Já que  $H > h$ , esta diferença da altura piezométrica nos pontos  $(0, H)$  e  $(a, h)$  provocará o escoamento da água, formando assim uma região saturada  $\Omega$  como pode ser visto na Figura 8, que representa a região molhada do dique, definida por :

$$\Omega = \{(x, y) \in R : 0 < x < a \text{ e } 0 < y < \phi(x)\},$$

onde  $\phi$  é uma curva que separa a região molhada da região seca. Denotamos a região seca por  $R \setminus \bar{\Omega}$  e o conjunto de pontos da curva  $\phi$  dada por

$$\Gamma = \{(x, y) \in R : y = \phi(x) \text{ e } 0 < x < a\}.$$

Observe também da Figura 8, os seguintes segmentos de reta definidos sobre  $\partial R$  :

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \{(0, y) : 0 < y < H\} & \Gamma_1 &= \{(x, 0) : 0 < x < a\} \\ \Gamma_2 &= \{(a, y) : 0 < y < h\} & \Gamma_\sigma &= \{(a, y) : h < y < \phi(a)\} \\ \Gamma_3 &= \{(a, y) : \phi(a) < y < H\} & \Gamma_4 &= \{(x, H) : 0 < x < a\}. \end{aligned}$$

Uma forma macroscópica de estudar o escoamento de fluidos em meios porosos foi estabelecida por Henry Darcy em 1856 e é conhecida como a Lei de Darcy. Esta lei estabelece uma relação de proporcionalidade entre a velocidade do fluido  $\vec{V}$  e o gradiente hidráulico  $J = -\nabla(y + \frac{1}{\gamma}P) = -\nabla u$ , dado por :

$$\vec{V} = \kappa J = -\kappa \nabla u,$$

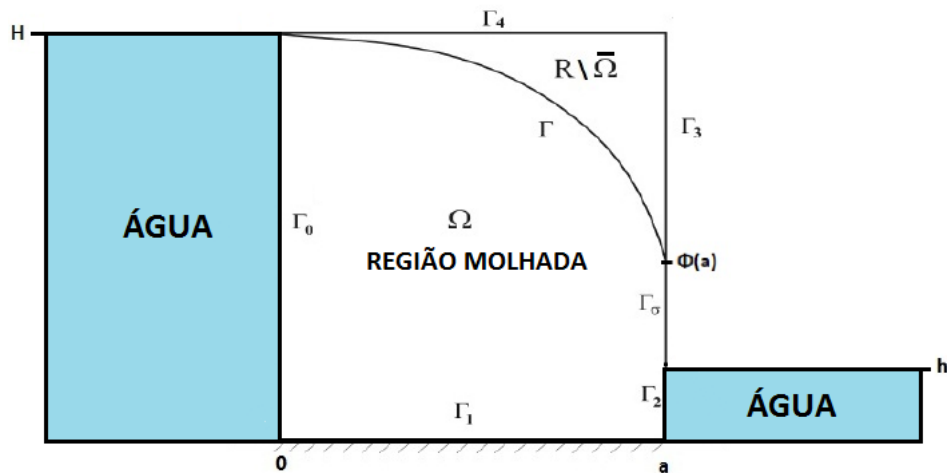


Figura 8: Representação das regiões molhada e seca do dique.  
Fonte: Filho, O.P. ; 2006.

onde  $\kappa$  é o coeficiente de permeabilidade do meio poroso em relação ao fluido.  
Para formular o Problema do Dique Retangular notemos que

- Considera-se um fluido incompressível (apresenta resistência à redução de volume), então  $\text{div } \vec{V} = 0$  em  $\Omega$ . Portanto da Lei de Darcy, tem-se :

$$\text{div } \vec{V} = \text{div} (-\kappa \nabla u) = -\kappa \text{div} (\nabla u) = -\kappa \Delta u = 0$$

Portanto  $\Delta u = 0$  em  $\Omega$ .

- Como a base do dique  $\Gamma_1$  é impermeável, então não existe filtração nesta região. Portanto a componente normal da velocidade do fluido  $\vec{q}$  é igual a zero, ou seja:

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = (-\kappa u_x, -\kappa u_y) \cdot (0, -1) = \kappa u_y = 0 \quad \Rightarrow \quad u_y = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_1.$$

- Assumindo velocidade constante nos reservatórios, pelo Princípio de Bernoulli temos que  $u = H$  no reservatório 1. Desta forma  $\Gamma_0$  é uma linha equipotencial, o que indica que

$$u = H \quad \text{sobre } \Gamma_0.$$

De forma análoga temos que  $u = h$  no reservatório 2 e conseqüentemente

$$u = h \quad \text{sobre } \Gamma_2.$$

- Como  $P = 0$  sobre  $\Gamma_\sigma$ , então

$$u = y \quad \text{sobre } \Gamma_\sigma.$$

- Dado que na região  $\Gamma$  não tem filtração de água, isto indica que :

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma.$$

Segundo [20] definimos o Problema do Dique Retangular, da seguinte forma.

**Problema do Dique Retangular:** Considerando  $a, h, H \in \mathbb{R}$  tais que  $a > 0$  com  $0 < h < H$ , encontrar funções  $\phi : ]0, a[ \rightarrow \mathbb{R}$  estritamente decrescente satisfazendo  $\phi(0) = H$  e  $\phi(a) > h$  e  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, tais que verifiquem as seguintes condições:

$$\Delta u = 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (4.1)$$

$$u = H \quad \text{sobre } \Gamma_1. \quad (4.2)$$

$$u = \begin{cases} h & \text{sobre } \Gamma_2 \\ y & \text{sobre } \Gamma_\sigma. \end{cases} \quad (4.3)$$

$$u_y = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_0. \quad (4.4)$$

$$u = y \quad \text{sobre } \Gamma. \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma. \quad (4.6)$$

Note que o par  $\{u, \phi\}$  caracteriza a solução do Problema do Dique Retangular. Diferentemente do Problema do Obstáculo, neste problema a região  $\Omega$  não é conhecida a priori. O que isto dificulta resolver a equação diferencial. A proposta é levar o Problema do Dique Retangular a um problema com domínio fixo, o qual será visto na próxima seção.

## 4.2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DO DIQUE RETANGULAR EM UM DOMÍNIO FIXO

Lembremos da seção anterior que para obter a região molhada do dique retangular dada por

$$\Omega = \{(x, y) \in R : 0 < y < \phi(x) \text{ e } 0 < x < a\},$$

primeiro temos que obter a função  $\phi$ . Esta dificuldade motiva transformar este problema em um problema com domínio conhecido. A proposta para resolver o Problema do Dique Retangular é reescrevendo ele como uma inequação variacional de um Problema do Obstáculo definido na região transversal do dique, dado por  $R$ .

Para obter esta inequação variacional, precisa-se de alguns resultados prévios, como o dado no seguinte lema [20].

**Lema 4.1.** Dados  $\phi \in C^0(]0, a[)$  e  $u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ , seja  $\{u, \phi\}$  a solução do Problema do Dique Retangular. Então, para qualquer  $\xi \in C^1(\bar{\Omega})$  tal que  $\xi = 0$  numa vizinhança dos segmentos  $\partial\Omega \cap \{x = 0\}$  e  $\partial\Omega \cap \{x = a\}$ , tem-se

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \xi \, dx dy = 0. \quad (4.7)$$

**Demonstração:** Aplicando em (4.1), a primeira identidade de Green, temos

$$0 = - \int_{\Omega} \Delta u \, \xi \, dx dy = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \xi \, dx dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \, \xi \, ds.$$

Para concluir a prova deste Lema, temos que mostrar que

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \, \xi \, ds = 0. \quad (4.8)$$

Posto que  $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_0 \cup \Gamma_1 \cup (\bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_\sigma) \cup \Gamma$ , substituindo em (4.8), temos que

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \, \xi \, ds = \int_{\bar{\Gamma}_0} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \, \xi \, ds + \int_{\bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_\sigma} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \, \xi \, ds + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \, \xi \, ds + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \, \xi \, ds.$$

Das hipóteses do Lema temos que  $\xi = 0$  sobre  $\Gamma_0$  e  $(\bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_\sigma)$ . Isto indica que as duas primeiras expressões são nulas. De (4.6) temos que  $\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = 0$  sobre  $\Gamma$ . Portanto a terceira expressão é nula. Finalmente  $\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = (u_x, u_y) \cdot (0, -1) = -u_y$  sobre  $\Gamma_1$  e, portanto, de (4.4) obtemos que a última expressão é nula e, portanto, (4.7) é satisfeita. ■

Lembremos que a pressão do fluido  $P$  é não negativa ( $P \geq 0$ ) e já que  $u(x, y) = y + P(x, y)$ , isto indica que  $u(x, y) \geq y$ . O seguinte lema [20], mostra este resultado.

**Lema 4.2.** Dados  $\phi \in C^0(]0, a[)$  e  $u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ . Seja  $\{u, \phi\}$  a solução do Problema do Dique Retangular, então

$$u(x, y) \geq y.$$

**Demonstração:** De (4.2) e (4.3), é claro que  $u \geq y$  sobre  $\partial\Omega \cap \{x = 0\}$  e  $\partial\Omega \cap \{x = a\}$ . Além disso de (4.5) temos que  $u = y$  sobre  $\Gamma$  e definindo  $\xi$ , como

$$\xi(x, y) = (u - y)^- = \begin{cases} 0 & , \text{ se } u \geq y \\ u - y & , \text{ se } u \leq y. \end{cases}$$

Observemos que  $\xi$  é contínua e não positiva em  $\bar{\Omega}$  que se anula sobre  $\partial\Omega \cap \{x = 0\}$  e  $\partial\Omega \cap \{x = a\}$ . Dado que  $\xi = 0$  sobre  $\Gamma$ , então  $\xi_x$  e  $\xi_y$ , também são contínuas em  $\bar{\Omega}$ .

$$\xi_x = \begin{cases} 0, & \text{ se } u \geq y. \\ u_x, & \text{ se } u \leq y. \end{cases} \quad e \quad \xi_y = \begin{cases} 0, & \text{ se } u \geq y. \\ u_y - 1, & \text{ se } u \leq y. \end{cases}$$



Já que a função  $\xi$  satisfaz as hipóteses do Lema 4.1, então ao substituir em (4.7), temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \xi \, dx dy \\ &= \int_{u \leq y} [\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_y] \, dx dy \\ &= \int_{\Omega} [\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_y] \, dx dy \end{aligned}$$

Já que

$$\int_{\Omega} \xi_y \, dx dy = \int_0^a \int_0^{\phi(x)} \xi_y \, dy dx = \int_0^a [\xi(x, \phi(x)) - \xi(x, 0)] \, dx,$$

e  $\xi = 0$  sobre  $\Gamma$ , isto significa que  $\xi(x, \phi(x)) = 0$ , temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} [\xi_x^2 + \xi_y^2] \, dx dy - \int_0^a \xi(x, 0) \, dx \\ &\geq \int_{\Omega} [\xi_x^2 + \xi_y^2] \, dx dy \\ &= \|\xi\|_{H^1(\Omega)}^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Isto mostra que  $\xi_x = \xi_y = 0$  em  $\Omega$ . Dado que  $\xi$  se anula sobre os segmentos  $\partial\Omega \cap \{x = 0\}$  e  $\partial\Omega \cap \{x = a\}$  e do resultado anterior consegue-se mostrar que  $\xi = 0$  sobre  $\partial\Omega \cap \{y = 0\}$ . Finalmente  $\xi \in H_0^1(\Omega)$  e dado que a semi-norma  $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$  é uma norma em  $H_0^1(\Omega)$ , então  $\xi = 0$  em  $\Omega$ , isto significa que  $u \geq y$  em  $\Omega$ . ■

Segundo [11], definamos a descarga do fluido através de qualquer linha  $l$ , unindo um ponto da base do dique  $\Gamma_1$  a outro ponto de  $\Gamma$ , da forma

$$Q_l = \int_l \vec{V} \cdot \vec{n} \, dl,$$

onde  $\vec{n}$  é o vetor normal à linha  $l$ . Em particular no caso que  $l$  seja uma linha vertical para qualquer  $x \in ]0, a[$ , a descarga do fluido nesta linha vertical é

$$Q(x) = - \int_0^{\phi(x)} u_x(x, t) \, dt.$$

A seguir é apresentado um resultado [20], que garante que a descarga do fluido numa linha vertical é constante.

**Lema 4.3.** Dados  $\phi \in C^0(]0, a[)$  e  $u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ . Seja  $\{u, \phi\}$  a solução do Problema do Dique Retangular, então a Descarga de Fluido é constante e igual a :

$$Q(x) = - \int_0^{\phi(x)} u_x(x, t) \, dt = \frac{1}{2a}(H^2 - h^2). \quad (4.9)$$

**Demonstração:** Aplicando a regra de Leibnitz ao derivar  $Q(x)$ , temos

$$\begin{aligned} Q'(x) &= u_x(x, \phi(x))\phi'(x) + \int_0^{\phi(x)} u_{xx}(x, t)dt \\ &= u_x(x, \phi(x))\phi'(x) - \int_0^{\phi(x)} u_{yy}(x, t)dt \\ &= u_x(x, \phi(x))\phi'(x) - [u_y(x, \phi(x)) - u_y(x, 0)]. \end{aligned}$$

Dado que o vetor tangente à curva  $\phi$  é da forma  $(1, \phi'(x))$ , portanto o vetor normal é da forma  $(\phi'(x), -1)$ . Já que sobre  $\Gamma$  temos  $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = (u_x, u_y) \cdot (\phi'(x), -1)$ , substituindo na equação dada acima, temos :

$$Q'(x) = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, \phi(x)) + u_y(x, 0).$$

Portanto de (4.6) e (4.4) tem-se  $Q'(x) = 0$ , isto mostra que  $Q(x) = cte$ . Para obter o valor da constante é usado o Teorema de Green.

$$\int_0^{\phi(x)} u_x(x, t) dt = \frac{1}{a} \int_0^a \int_0^{\phi(x)} u_x(x, t) dt = \frac{1}{a} \int_{\Omega} u_x(x, t) dx dt = \frac{1}{a} \int_{\partial\Omega} u(x, t) dt.$$

Ao integrar sobre  $\partial\Omega$  tem-se  $\int_{\partial\Omega} u(x, t) dt = \frac{h^2 - H^2}{2}$  e substituindo na equação anterior, tem-se (4.9). ■

Considerando a função  $v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $v(x, y) = u(x, y) - y$  e tomando  $v = 0$  em  $R \setminus \bar{\Omega}$  estendemos esta função sobre  $R$ , isto indica que  $v \in H^1(R)$ . Tomando  $\xi \in C_0^\infty(R)$  e aplicando a primeira identidade de Green e o Lema 4.1, temos :

$$\begin{aligned} - \int_R \Delta v \xi dx dy &= \int_R \nabla v \cdot \nabla \xi dx dy - \int_{\partial R} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \xi ds \\ &= \int_{\Omega} [v_x \xi_x + v_y \xi_y] dx dy \\ &= \int_{\Omega} [u_x \xi_x + u_y \xi_y] dx dy - \int_{\Omega} \xi_y dx dy \\ &= - \int_{\Omega} \xi_y dx dy = - \int_R I_{\Omega} \xi_y dx dy, \end{aligned}$$

onde  $I_{\Omega}$  é a função característica de  $\Omega$ . Assim da relação anterior temos  $-\Delta(u - y) = \frac{\partial}{\partial y} I_{\Omega}$ . Esta equação sugere introduzir um Problema de Cauchy, da seguinte forma

$$\begin{aligned} w_y &= y - u \quad \text{em } \Omega, \\ w &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma. \end{aligned}$$

Ao integrar explicitamente respeito à variável  $y$ , obtemos :

$$w(x, y) = \int_y^{\phi(x)} [u(x, t) - t] dt, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (4.10)$$

Esta relação é conhecida como a transformada de Baiocchi.

Derivando (4.10) respeito a variável  $x$  temos  $w_x = \int_y^{\phi(x)} u_x(x, t) dt$ . Desta forma, obtemos

$$w_x = w_y = 0, \quad \text{sobre } \Gamma.$$

Estendo  $w$  sobre  $R$  da seguinte forma

$$\tilde{w}(x, y) = \begin{cases} w(x, y), & \text{se } (x, y) \in \Omega \\ 0, & \text{se } (x, y) \in R \setminus \Omega \end{cases} \quad (4.11)$$

temos que  $\tilde{w} \in C^1(R)$ . Desta forma, obtemos

$$\tilde{w}_x = \tilde{w}_y = 0, \quad \text{em } R - \Omega.$$

A seguir temos que obter uma função  $g$  tal que  $\tilde{w} = g$  sobre  $\partial R$ . Para obter esta função  $g$ , procederemos por partes, ou seja, obter uma função para cada um dos seguintes segmentos  $\partial R \cap \{x = 0\}$ ,  $\partial R \cap \{y = 0\}$ ,  $\partial R \cap \{x = a\}$  e  $\partial R \cap \{y = H\}$ .

Dado que  $\bar{\Gamma}_0 = \partial R \cap \{x = 0\}$  e de (4.2) temos:

$$\tilde{w}(0, y) = \int_y^{\phi(0)} [u(0, t) - t] dt = \int_y^H [H - t] dt = \frac{1}{2}(H - y)^2. \quad (4.12)$$

Aplicando a regra de Leibnitz é fácil ver  $\tilde{w}_x(x, y) = \int_y^{\phi(x)} u_x(x, t) dt$  e do Lema 4.3, temos

$$\tilde{w}_x(x, 0) = \int_0^{\phi(x)} u_x(x, t) dt = -Q(x) = \frac{h^2 - H^2}{2a}. \text{ Integrando respeito a } x, \text{ obtemos}$$

$$\tilde{w}(x, 0) = \frac{H^2}{2} - \frac{h^2 - H^2}{2a}x. \quad (4.13)$$

Dado que  $\Gamma_2$  e  $\Gamma_\sigma$  são porções de  $\partial R \cap \{x = a\}$  e de (4.14), tem-se

$$\tilde{w}(a, y) = \int_y^{\phi(a)} [u(a, t) - t] dt = \begin{cases} \int_y^h [h - t] dt = \frac{(h - y)^2}{2}, & y \leq h. \\ \int_y^{\phi(a)} [t - t] dt = 0, & y > h. \end{cases} \quad (4.14)$$

Resumindo os resultados obtidos em (4.12) , (4.13) e (4.14) e o fato que  $\tilde{w} = 0$  sobre  $\bar{\Gamma}_4$ , obtemos a função  $g$ , definida como :

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(H - y)^2 + \frac{x}{2a}[(h - y)^2 - (H - y)^2], & 0 \leq y \leq h \\ \frac{1}{2}(H - y)^2 - \frac{x}{2a}(H - y)^2 & , \quad h \leq y \leq H. \end{cases} \quad (4.15)$$

Observe que  $g$  é uma função não negativa, portanto pelo Princípio do Mínimo Fraco, que pode ser visto em [3], temos que

$$\tilde{w} \geq 0 \quad \text{em } R.$$

Portanto de (4.15), definimos o conjunto

$$\mathcal{K} = \{v \in H^2(R) : v \geq 0 \text{ em } R \text{ e } v = g \text{ sobre } \partial R\}. \quad (4.16)$$

Observe que conjunto dado em (4.16) é um conjunto de soluções admissíveis para um problema tipo obstáculo. A seguir levaremos à inequação variacional associada neste conjunto  $\mathcal{K}$ .

**Lema 4.4.** Seja  $\tilde{w}$  definido por (4.11). Então

$$\int_R \nabla \tilde{w} \cdot \nabla \xi \, dx dy + \int_R I_\Omega \xi \, dx dy = 0, \quad (4.17)$$

para todo  $\xi \in C^\infty(R)$  que se anula sobre os segmentos  $\partial\Omega \cap \{x = 0\}$  ,  $\partial\Omega \cap \{x = a\}$  e  $\partial\Omega \cap \{y = 0\}$ .

**Demonstração:** Seja  $\xi = \chi_y$ , onde  $\chi$  e  $\chi_y$  se anulam sobre os segmentos  $\partial\Omega \cap \{x = 0\}$ ,  $\partial\Omega \cap \{x = a\}$  e  $\partial\Omega \cap \{y = 0\}$  e defina a função  $\chi$  da forma

$$\chi(x, y) = \int_0^y \xi(x, t) \, dt.$$

Usando a primeira identidade de Green, temos

$$\begin{aligned} \int_R \nabla \tilde{w} \cdot \nabla \xi \, dx dy &= \int_\Omega [w_x \xi_x + w_y \xi_y] \, dx dy \\ &= \int_\Omega [w_x \chi_{yx} + w_y \chi_{yy}] \, dx dy \\ &= \int_\Omega [-w_{xy} \chi_x + w_y \chi_{yy}] \, dx dy + \int_{\partial\Omega} w_x \chi_x \cdot n_y \, ds \\ &= \int_\Omega [w_y (\chi_{xx} + \chi_{yy})] \, dx dy - \int_{\partial\Omega} w_y \chi_x \cdot n \, ds \\ &= \int_\Omega w_y \Delta \chi \, dx dy. \end{aligned}$$

Dado que  $w_y = y - u$ , ao substituir nesta equação e aplicar de novo a primeira identidade de Green, temos :

$$\begin{aligned} \int_R \nabla \tilde{w} \cdot \nabla \xi \, dx dy &= \int_{\Omega} (y - u) \Delta \chi \, dx dy \\ &= - \int_{\Omega} \nabla (y - u) \cdot \nabla \chi \, dx dy + \int_{\partial \Omega} \chi \frac{\partial}{\partial \vec{n}} (y - u) \, ds. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Observe que

$$\int_{\partial \Omega} \chi \frac{\partial}{\partial \vec{n}} (y - u) \, ds = 0,$$

pois  $\chi$  se anula sobre os segmentos  $\partial \Omega \cap \{x = 0\}$ ,  $\partial \Omega \cap \{x = a\}$  e  $\partial \Omega \cap \{y = 0\}$  e já que  $u = y$  sobre  $\Gamma$  tem-se  $\frac{\partial}{\partial n} (y - u) = 0$ . Ao substituir em (4.18), temos :

$$\int_R \nabla \tilde{w} \cdot \nabla \xi \, dx dy = - \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla \chi \, dx dy + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \chi \, dx dy.$$

Dado que  $\chi$  satisfaz as hipóteses do Lema 4.1 temos que  $\int_{\Omega} \nabla u \nabla \chi \, dx dy = 0$ , portanto

$$\begin{aligned} \int_R \nabla \tilde{w} \cdot \nabla \xi \, dx dy &= - \int_{\Omega} \nabla \chi \cdot \nabla y \, dx dy \\ &= - \int_{\Omega} (\chi_x, \chi_y) \cdot (0, 1) \, dx dy \\ &= - \int_{\Omega} \chi_y \, dx dy \\ &= - \int_{\Omega} \xi \, dx dy \\ &= - \int_R I_{\Omega} \xi \, dx dy. \end{aligned}$$

com o qual concluímos a prova deste Lema. ■

Aplicando a primeira identidade de Green em (4.17), temos :

$$- \int_R \Delta \tilde{w} \xi \, dx dy = \int_R \nabla \tilde{w} \cdot \nabla \xi \, dx dy + \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \vec{n}} \xi \, ds.$$

Como  $\tilde{w}_x$  e  $\tilde{w}_y$  são nulos e da definição de  $\xi$ , temos que  $\int_{\partial \Omega} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \vec{n}} \xi \, ds = 0$ , portanto

$$- \int_R \Delta \tilde{w} \xi \, dx dy = - \int_R I_{\Omega} \xi \, dx dy.$$

Daqui temos  $-\Delta \tilde{w} = -I_{\Omega}$  e portanto :

$$-\Delta \tilde{w} \geq -1 \quad \text{em } R. \quad (4.19)$$

Levando a (4.19) para sua formulação variacional, temos :

$$\int_R \nabla \tilde{w} \cdot \nabla (v - \tilde{w}) \, dx dy \geq - \int_R (v - \tilde{w}) \, dx dy \quad \forall v \in \mathcal{K}. \quad (4.20)$$

Observe que (4.20) é uma inequação variacional elíptica associada a um Problema do Obstáculo. Isto indica que a solução do Problema do Dique Retangular é solução fraca de um Problema Tipo Obstáculo.

Como consequência dos resultados vistos nesta seção temos o seguinte teorema, [20].

**Teorema 4.5.** Considere  $\{u, \phi\}$  a solução do Problema do Dique Retangular tal que  $u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  e  $\phi : ]0, a[ \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Seja  $\tilde{w}$  definido por

$$\tilde{w}(x, y) = \begin{cases} w(x, y), & \text{se } (x, y) \in \Omega. \\ 0, & \text{se } (x, y) \in R \setminus \Omega. \end{cases}$$

onde  $w$  é a solução do seguinte problema de Cauchy

$$\begin{aligned} w_y &= y - u, & \text{em } \Omega. \\ w &= 0, & \text{sobre } \Gamma. \end{aligned}$$

Então  $\tilde{w}$  satisfaz a seguinte inequação variacional

$$\int_R \nabla \tilde{w} \cdot \nabla (v - \tilde{w}) \, dx dy \geq - \int_R (v - \tilde{w}) \, dx dy, \quad \forall v \in \mathcal{K},$$

onde  $\mathcal{K} = \{v \in H^2(R) : v \geq 0 \text{ em } R \text{ e } v = g \text{ sobre } \partial R\}$ .

Note do Teorema 4.5 que ao considerar  $f = -1$  e  $\varphi = 0$  temos que a solução do Problema do Dique Retangular é solução fraca para um problema tipo obstáculo. Observe também que as funções envolvidas satisfazem as condições de regularidade dadas no Teorema 3.6. Assim que para mostrar que a solução fraca deste problema tipo obstáculo seja uma solução forte, só falta mostrar a regularidade suficiente sobre  $\partial R$ . O inconveniente dado em  $R$  é a regularidade nos vértices. Para mostrar regularidade nestes pontos usaremos um argumento de prolongamento, que será descrito na seguinte seção. Portanto assumindo regularidade suficiente sobre a  $\partial R$  garantimos que  $\tilde{w}$  é solução forte para um problema tipo obstáculo. Além disso satisfaz o seguinte Problema de Complementaridade.

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{w} \geq -1, & \text{em } R \\ \tilde{w} \geq 0, & \text{em } R \\ (-\Delta \tilde{w} + 1)\tilde{w} = 0, & \text{em } R. \end{cases} \quad (4.21)$$

### 4.3 EQUIVALÊNCIA ENTRE O PROBLEMA DO OBSTÁCULO E O PROBLEMA DO DIQUE RETANGULAR.

No Teorema 4.5 foi mostrado que a solução do Problema do Dique Retangular (na variável  $u$ ) é solução fraca de um problema tipo obstáculo (na variável  $\tilde{w}$ ). A intenção agora é mostrar a recíproca deste resultado. Isto significa mostrar que a solução fraca de um problema tipo obstáculo (na variável  $\tilde{w}$ ) é solução do Problema do Dique Retangular (na variável  $u$ ).

Considerando a seção transversal do dique retangular, dada por

$$R = ]0, a[ \times ]0, H[,$$

que não é um domínio de classe  $C^1$ , pois perde regularidade em seus vértices. Este inconveniente não permite usar directamente os resultados de regularidade para um Problema de Dirichlet.

Considerando o seguinte Problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} -\Delta v &= f, & \text{em } R \\ v &= h, & \text{sobre } \partial R. \end{aligned} \tag{4.22}$$

A teoria de regularidade vista em [20], diz que a solução  $v$  de (4.22) está em  $W^{2,p}(R)$  quando  $f \in L^p(R)$  e  $h \in W^{2,p}(R)$ , para  $2 \leq p < \infty$ .

Observe que ao substituir  $v$  por  $v - h$  em (4.22) tem-se  $v = 0$  sobre  $\partial\Omega$  e portanto do Lema de Lax-Milgram é possível garantir a existência e unicidade da solução de (4.22) e que  $v \in H^1(R)$ .

Para atingir regularidade nos vértices de  $R$  será usado uma técnica de prolongamento por reflexão. Para descrever esta técnica defina  $R^*$ , da seguinte forma

$$R^* = \{(x, y) : 0 < x < a, -H < x < 0\}.$$

Com a notação dada acima definamos a função  $\tilde{v}$ , da forma :

$$\tilde{v}(x, y) = \begin{cases} v(x, y), & \text{se } (x, y) \in R \\ -v(x, -y), & \text{se } (x, y) \in R^* \end{cases}$$

Isto indica que tenhamos que mostrar  $\tilde{v} \in H^1(R \cup \Gamma_1 \cup R^*)$ . Este resultado é consequência do seguinte Lema, [20].

**Lema 4.6.** Seja  $B \subset \mathbb{R}^n$  a bola unitária centrada no origem e denote cada ponto  $x \in \mathbb{R}^n$  da forma  $x = (x', x_n)$  com  $x_n$  sendo a  $n$ -ésima componente. Considerando os conjuntos  $B^+ = \{x \in B : x_n > 0\}$ ,  $B^- = \{x \in B : x_n < 0\}$  e  $\Sigma = \{x \in B : x_n = 0\}$ . Sejam  $v^+ \in W^{1,p}(B^+)$  e  $v^- \in W^{1,p}(B^-)$ , com  $1 \leq p < \infty$  e que verificam que

$$Tv^+ = Tv^-, \quad \text{sobre } \Sigma,$$

onde  $T : W^{1,p} \rightarrow L^p(\Sigma)$  é o Operador Traço, que é uma aplicação contínua com a seguinte propriedade

$$Tv(x) = v(x', 0), \quad \text{para } v \in W^{1,\infty}(B) \subset W^{1,p}(B).$$

Então

$$v(x) = \begin{cases} v^+(x), & \text{se } x \in B^+ \\ v^-(x), & \text{se } x \in B^- \end{cases},$$

está em  $W^{1,p}(B)$ .

**Demonstração:** A prova deste Lema pode ser vista em [20]. ■

O Lema anterior é conhecida como Lema de Imersão em  $H^1$ , este resultado é importante já que permite mostrar que

$$\tilde{v} \in H^1(R \cup \Gamma_1 \cup R^*).$$

Tomando  $x_0 \in ]0, a[$  tal que  $(x_0, 0) \in \Gamma_1$  e  $\epsilon$  suficientemente pequeno. Da teoria de regularidade [20], para EDP's elípticas temos que :

$$\tilde{v} \in H^2(R \cap B_\epsilon((x_0, 0))) \cap H^2(R^* \cap B_\epsilon((x_0, 0))).$$

Isto indica que

$$-\Delta \tilde{v} = \tilde{f}, \quad \text{em } R \cup R^*, \tag{4.23}$$

onde

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{se } (x, y) \in R. \\ -f(x, -y), & \text{se } (x, y) \in R^*. \end{cases}$$

Denotemos por

$$B_\epsilon^+ = R \cap (B_\epsilon((x_0, 0))) \quad \text{e} \quad B_\epsilon^- = R^* \cap (B_\epsilon((x_0, 0))).$$

Considerando  $\xi \in C_0^\infty(B_\epsilon((x_0, 0)))$  e  $B_\epsilon = B_\epsilon^+ \cup B_\epsilon^-$ , temos

$$\int_{B_\epsilon} \nabla \tilde{v} \cdot \nabla \xi \, dx dy = \int_{B_\epsilon^+} \nabla \tilde{v} \cdot \nabla \xi \, dx dy + \int_{B_\epsilon^-} \nabla \tilde{v} \cdot \nabla \xi \, dx dy$$



Da primeira identidade de Green, obtemos :

$$\begin{aligned}
\int_{B_\epsilon} \nabla \tilde{v} \cdot \nabla \xi \, dx dy &= \left( \int_{\partial B_\epsilon^+} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \vec{n}} \xi \, ds - \int_{B_\epsilon^+} \Delta \tilde{v} \xi \, dx dy \right) \\
&+ \left( \int_{\partial B_\epsilon^-} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \vec{n}} \xi \, ds - \int_{B_\epsilon^-} \Delta \tilde{v} \xi \, dx dy \right) \\
&= \left( \int_{\partial B_\epsilon^+} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(x, y) \xi(x, y) \, ds - \int_{\partial B_\epsilon^-} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(x, -y) \xi(x, y) \, ds \right) \\
&+ \int_{B_\epsilon^+} f(x, y) \xi(x, y) \, dx dy + \int_{B_\epsilon^-} -f(x, -y) \xi(x, y) \, dx dy. \quad (4.24)
\end{aligned}$$

Para mostrar (4.23) temos que provar

$$A = \int_{\partial B_\epsilon^+} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(x, y) \xi(x, y) \, ds - \int_{\partial B_\epsilon^-} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(x, -y) \xi(x, y) \, ds = 0.$$

Denotemos por

$$\partial B_\epsilon^{++} = \partial B_\epsilon^+ \setminus \{|x - x_0| < \epsilon\} \quad \text{e} \quad \partial B_\epsilon^{--} = \partial B_\epsilon^- \setminus \{|x - x_0| < \epsilon\},$$

já que  $B_\epsilon^{++}$  e  $B_\epsilon^{--}$  são porções de  $\partial B_\epsilon$ , temos que  $\xi = 0$  sobre  $B_\epsilon^{++}$  e  $B_\epsilon^{--}$  e portanto

$$\int_{\partial B_\epsilon^{++}} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(x, 0) \xi(x, 0) \, ds = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\partial B_\epsilon^{--}} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(x, 0) \xi(x, 0) \, ds = 0.$$

Ao substituir em  $A$ , temos :

$$\begin{aligned}
A &= - \int_{|x-x_0|<\epsilon} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(x, 0) \xi(x, 0) \, ds + \int_{|x-x_0|<\epsilon} \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(x, 0) \xi(x, 0) \, ds \\
&= - \int_{|x-x_0|<\epsilon} \nabla v(x, 0) \cdot (0, -1) \xi(x, 0) \, dx dy + \int_{|x-x_0|<\epsilon} \nabla v(x, 0) \cdot (0, 1) \xi(x, 0) \, dx dy \\
&= 2 \int_{|x-x_0|<\epsilon} v_y(x, 0) \xi(x, 0) \, dx dy.
\end{aligned}$$

Usando o fato de que os traços de  $v_y$  sobre  $\{x = 0\} \cap B_\epsilon(x_0, 0)$  estão bem definidos, ou seja  $v_y = 0$ , desde que  $v \in H^2(R \cap B_\epsilon((x_0, 0))) \cap H^2(R^* \cap B_\epsilon((x_0, 0)))$ , ao substituir em (4.24) temos :

$$\int_{B_\epsilon} \nabla \tilde{v} \cdot \nabla \xi \, dx dy = \int_{B_\epsilon} \tilde{f} \xi \, dx dy.$$

Isto mostra que  $\tilde{v}$  é solução do seguinte Problema de Dirichlet

$$\begin{aligned}
-\Delta \tilde{v} &= \tilde{f}, \quad \text{em } R \cup R^* \\
\tilde{v} &= 0, \quad \text{sobre } x = 0.
\end{aligned}$$

Já que  $x = 0$  é uma superfície suave então ao tomar  $x_0$  suficientemente próximo a 0 e da teoria de regularidade para equações diferenciais elípticas temos:

$$\tilde{v} \in W^{2,p}(B_\epsilon(0,0) \cap (R \cup R^*)), \quad 2 \leq p < \infty.$$

Assim conseguimos atingir regularidade no vértice  $(0,0)$ .

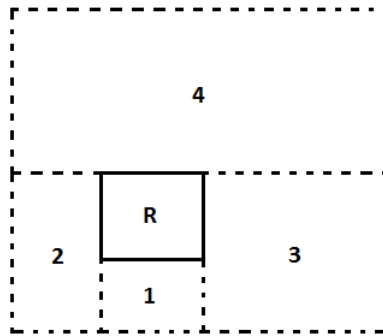


Figura 9: Reflexão sucessivas para  $R$ .

Para atingir regularidade nos outros vértices o procedimento é similar. Para isso usaremos reflexões sucessivas no retângulo  $R$ . Este procedimento é descrito na Figura 9 e pode ser visto de forma mais detalhada em [3].

Ao atingir a regularidade suficiente nos vértices de  $R$  temos que a solução  $\tilde{w}$  da inequação variacional dada em (4.20), satisfaz :

$$\tilde{w} \in W^{2,p}(R) \cap C^{1,\lambda}(\bar{R}), \quad \text{para } 2 \leq p < \infty \quad \text{e} \quad 0 < \lambda < 1.$$

Esta técnica permite mostrar regularidade nos vértices do retângulo portanto consegue-se mostrar que o domínio seja suficientemente suave e portanto a solução de (4.20) é solução forte para um problema tipo obstáculo.

Considerando  $\tilde{w}(x, y)$  ao deslocamento de uma membrana homogênea e elástica dada por uma força externa  $f = -1$  com obstáculo dado por  $\varphi = 0$ , temos que a posição de equilíbrio é descrita na Figura 10.

Observe da Figura 10 que a região onde não tem coincidência com o obstáculo é a região dada pelo seguinte conjunto :

$$\Omega = \{(x, y) \in R : \tilde{w}(x, y) > 0\}. \quad (4.25)$$

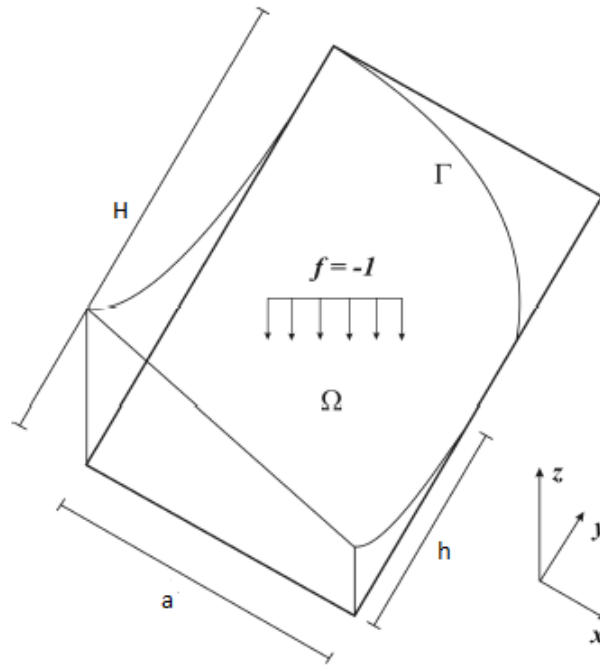


Figura 10: Posição de equilíbrio da membrana para  $f = -1$  e  $\varphi = 0$ .  
Fonte : Filho, O.P. ; 2006.

Além disso  $-\Delta\tilde{w} = -I_\Omega$ , ou seja

$$\Delta\tilde{w} = \begin{cases} 1, & \text{em } \Omega. \\ 0, & \text{em } R \setminus \Omega. \end{cases}$$

O próximo passo é mostrar que  $\Omega$  representa a região molhada descrita no Problema do Dique Retangular. Para facilitar a descrição de  $\Omega$ , considere os seguintes porções da fronteira do conjunto  $R$ .

$$\Gamma_0 = \{(0, y) : 0 < y < H\} \quad ; \quad \Gamma_1 = \{(x, 0) : 0 < x < a\} \quad ; \quad \Gamma_2 = \{(a, y) : 0 < y < h\}$$

$$\Gamma_3 = \{(a, y) : h < y < H\} \quad ; \quad \Gamma_4 = \{(x, H) : 0 < x < a\}.$$

Observe das notações dadas acima que não foi considerada  $\Gamma_\sigma$ , pois ainda não temos certeza alguma sobre onde a curva  $\phi$  bate na parede  $x = a$  do dique. Segundo [20], temos o seguinte lema.

**Lema 4.7.** Com a notação dada acima

$$\tilde{w}_x \leq 0 \text{ sobre } \Gamma_3, \quad \tilde{w}_y \leq 0 \text{ sobre } \Gamma_4$$

$$\tilde{w}_x = 0 \text{ sobre } \Gamma_4, \quad \tilde{w}_x \leq 0 \text{ sobre } \Gamma_1$$

$$\tilde{w}_y = 0 \text{ sobre } \Gamma_3, \quad \tilde{w}_y \leq 0 \text{ sobre } \Gamma_2$$

e  $\tilde{w}_y \leq 0$  sobre  $\Gamma_0$ , onde  $\tilde{w}$  é solução de (4.20).

**Demonstração:** Dado que  $\tilde{w} = g$  sobre  $\partial\Omega$ , então:

- Sobre  $\Gamma_0$ , temos:  $\tilde{w}_y = -(H - y) \leq 0$ .
- Sobre  $\Gamma_1$ , temos:  $\tilde{w}_x(x, 0) = \frac{1}{2a}(h^2 - H^2) \leq 0$ .
- Sobre  $\Gamma_2$ , temos:  $\tilde{w}_y = -(h - y) \leq 0$ .
- Sobre  $\Gamma_3$ , temos para  $y > h$ :  $\tilde{w}(x, y) = \frac{1}{2}(H - y)^2 - \frac{x}{2a}(H - y)^2$  e daí  $\tilde{w}_y(a, y) = 0$ .
- Sobre  $\Gamma_4$ , temos para  $y > h$ :  $\tilde{w}(x, y) = \frac{1}{2}(H - y)^2 - \frac{x}{2a}(H - y)^2$  e daí  $\tilde{w}_x(x, H) = 0$ .

Agora só falta mostrar que  $\tilde{w}_x \leq 0$  sobre  $\Gamma_3$  e  $\tilde{w}_y \leq 0$  sobre  $\Gamma_4$ . Dado que

$$\Delta\tilde{w} = 0, \text{ em } R \setminus \Omega, \quad \tilde{w} \geq 0, \text{ em } \bar{R} \quad \text{e} \quad \tilde{w} = 0, \text{ sobre } \partial(R \setminus \Omega)$$

pelo mostrado anteriormente, temos que  $\tilde{w} = 0$  sobre  $\Gamma_3 \cup \Gamma_4$ .

Pelo Princípio do Máximo (Mínimo) Fraco, como  $\tilde{w} \geq 0$  em  $\bar{R}$  e  $\tilde{w} = 0$  sobre  $\Gamma_3 \cup \Gamma_4$  temos que o mínimo é atingido também sobre  $\Gamma_3 \cup \Gamma_4$  e portanto  $\tilde{w}_x$  sobre  $\Gamma_3$  e  $\tilde{w}_y$  sobre  $\Gamma_4$  não aumentam. ■

Baseado no Lema 4.7 apresentamos o seguinte resultado.

**Lema 4.8.** A solução  $\tilde{w}$  de (4.20) é contínua juntamente com suas derivadas segundas numa vizinhança de  $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  em  $R$  e

$$\tilde{w}_{xx} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_0 \cup \Gamma_2 \quad \text{e} \quad \tilde{w}_{yy} = 1, \quad \text{sobre } \Gamma_1. \quad (4.26)$$

**Demonstração:** Pela continuidade de  $\tilde{w}$  e dado que  $g > 0$  sobre  $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , então existe uma vizinhança em  $\Omega$  de  $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ .

Como  $\Delta\tilde{w} = 1$  em  $\Omega$  e  $g \in C^{2,\lambda}(\bar{R})$  com  $0 < \lambda < 1$ , a teoria de regularidade permite concluir que existe uma bola  $B_\epsilon(x_0, y_0)$ , com  $\epsilon$  suficientemente pequeno, tal que para cada  $(x_0, y_0) \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  tem-se

$$\tilde{w} \in C^{2,\lambda}(B_\epsilon(x_0, y_0) \cap \Omega), \quad 0 < \lambda < 1.$$

Isto permite garantir a existência e continuidade das derivadas segundas de  $\tilde{w}$  numa

vizinhança de  $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  e daí :

$$\begin{aligned}\tilde{w}_{xx} &= 1 - \tilde{w}_{yy} = 1 - g_{yy} = 1 - 1 = 0, & \text{sobre } \Gamma_0 \cup \Gamma_2. \\ \tilde{w}_{yy} &= 1 - \tilde{w}_{xx} = 1 - g_{xx} = 1 - 0 = 1, & \text{sobre } \Gamma_1.\end{aligned}$$

■

Dos Lema 4.7 e 4.8 temos o seguinte Lema [20], que mostra que as derivadas parciais de primeira ordem são não positivas em  $R$ .

**Lema 4.9.** A solução  $\tilde{w}$  de (4.20), satisfaz

$$\tilde{w}_x \leq 0 \quad \text{e} \quad \tilde{w}_y \leq 0 \quad \text{em } R. \quad (4.27)$$

**Demonstração:** Dado que  $\tilde{w}_x, \tilde{w}_y \in C^{0,\lambda}(\bar{R})$  com  $0 < \lambda < 1$  e  $\tilde{w}_x = \tilde{w}_y = 0$  em  $R \setminus \Omega$ . Desde que  $\Delta \tilde{w}_x = \Delta \tilde{w}_y = 0$  em  $\Omega$ , aplicando o Princípio do Máximo fraco, temos

$$\tilde{w}_x \leq \sup_{\partial\Omega} w_x \quad \text{e} \quad \tilde{w}_y \leq \sup_{\partial\Omega} w_y.$$

Do Lema 4.7 mostra-se  $\tilde{w}_{xx} = 0$  sobre  $\Gamma_0 \cup \Gamma_2$ . Para mostrar que  $\tilde{w}_x \leq \sup_{\partial\Omega} w_x$  usaremos o Princípio do Máximo de Hopf, veja[28]. Suponhamos que o máximo encontra-se sobre  $\Gamma_0 \cup \Gamma_2$ , temos :

- Sobre  $\Gamma_0$  :  $\frac{\partial \tilde{w}_x}{\partial \bar{n}} = (\tilde{w}_{xx}, \tilde{w}_{xy}) \cdot (-1, 0) = -\tilde{w}_{xx} = 0$ .
- Sobre  $\Gamma_2$  :  $\frac{\partial \tilde{w}_x}{\partial \bar{n}} = (\tilde{w}_{xx}, \tilde{w}_{xy}) \cdot (1, 0) = \tilde{w}_{xx} = 0$ .

Deste modo  $\tilde{w}_x$  não atinge seu máximo sobre  $\Gamma_0 \cup \Gamma_2$ , pois contradiz o Princípio do Máximo de Hopf. Isto significa que

$$\tilde{w}_x \leq \sup_{\Gamma \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_3} \tilde{w}_x, \quad \text{onde } \Gamma = \partial\Omega - (\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4).$$

Já que  $\tilde{w}_x = 0$  sobre  $R \setminus \Omega$  por continuidade  $\tilde{w}_x = 0$  sobre  $\Gamma$  e do Lema 4.7 temos que  $w_x \leq 0$  sobre  $\bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_3$ , isto é suficiente para dizer que  $w_x \leq 0$  em  $\Omega$  e logo  $w_x \leq 0$  em  $R$ .

Usando um argumento similar estudamos o caso de  $w_y$ , temos

- Sobre  $\Gamma_1$  :  $\frac{\partial \tilde{w}_y}{\partial \bar{n}} = (\tilde{w}_{yx}, \tilde{w}_{yy}) \cdot (0, -1) = -\tilde{w}_{yy} = -1$ .

Isto contradiz o Princípio do Máximo de Hopf, o qual indica que  $\tilde{w}_y$  não atinge seu máximo

sobre  $\Gamma_1$ , portanto :

$$\tilde{w}_y \leq \sup_{\Gamma \cup \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3}, \quad \text{onde } \Gamma = \partial\Omega - (\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4).$$

Já que  $\tilde{w}_y$  também é nulo em  $R \setminus \Omega$ , por continuidade tem-se  $\tilde{w}_y = 0$  sobre  $\Gamma$ , logo pelos resultados do Lema 3.6, tem-se  $\tilde{w}_y \leq 0$  sobre  $\Omega$  e claramente  $w_y \leq 0$  em  $R$ . ■

A seguir mostraremos que a região dada por  $\Omega = \{(x, y) \in R : \tilde{w}(x, y) > 0\}$  representa a região molhada do dique. Para obter esta região precisamos definir os seguintes conjuntos. Dado  $P_0 = (x_0, y_0) \in R$ , consideremos

$$Q_{P_0}^+ = \{(x, y) \in \bar{R} : x > x_0, y > y_0\} \quad \text{e} \quad Q_{P_0}^- = \{(x, y) \in \bar{R} : x < x_0, y < y_0\}$$

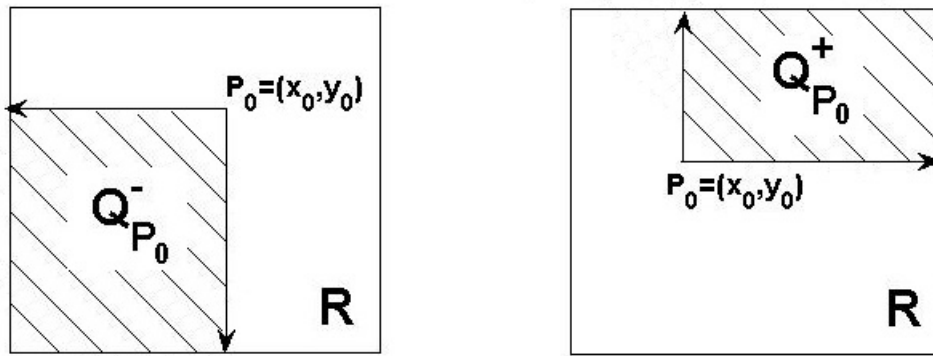


Figura 11: Representação dos conjuntos  $Q_{P_0}^+$  e  $Q_{P_0}^-$ .

**Lema 4.10.** Se  $P_0 \in R \setminus \Omega$ , então  $Q_{P_0}^+ \subset \bar{R} \setminus \bar{\Omega}$  e se  $P_0 \in R \cap \partial\Omega$ , então  $Q_{P_0}^- \subset \Omega$ .

**Demonstração:** Considerando  $P_0 = (x_0, y_0) \in R \setminus \Omega$  isto indica que  $\tilde{w}(x_0, y_0) = 0$ . Do Lema 4.9 temos que a função  $\tilde{w}$  não tem acréscimo quando  $x \geq x_0$  e  $y \geq y_0$ , portanto :

$$\tilde{w}(x, y) \leq 0, \quad \text{para } x \geq x_0 \text{ e } y \geq y_0.$$

Posto que  $\tilde{w} \geq 0$  em  $R$ , isto mostra que  $\tilde{w}(x, y) = 0$  quando  $x \geq x_0$  e  $y \geq y_0$ , portanto

$$Q_{P_0}^+ \subset \bar{Q}_{P_0}^+ \subset \bar{R} - \bar{\Omega}.$$

Considere agora que o ponto  $P_0 \in R \cap \partial\Omega$  e proceda por contradição, ou seja, suponha que o conjunto  $Q_{P_0}^-$  não esteja incluído em  $\Omega$ . Isto indica que  $Q_{P_0}^- \cap (R \setminus \Omega) \neq \emptyset$ , tomando

o ponto  $P_1 = (x_1, y_1) \in Q_{P_0}^-$  tal que  $P_1 \in R \setminus \Omega$ , é fácil ver que  $P_0 \in Q_{P_1}^+$  e pelo caso anterior temos que  $Q_{P_1}^+ \subset \bar{R} - \bar{\Omega}$ , portanto  $P_0 \notin \bar{\Omega}$ . Isto indica que  $P_0 \notin \partial\Omega$  o qual é uma contradição, já que  $P_0 \in \partial\Omega$ . Portanto  $Q_{P_0}^-$  está incluído em  $\Omega$ . ■

Do Lema 4.10 temos o seguinte resultado [20], que permite obter informação importante sobre a região  $\Omega$ .

**Lema 4.11.** A solução  $\tilde{w}$  de (4.20), satisfaz

$$\tilde{w}_y = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_4.$$

Além disso,  $\partial\Omega \cap \Gamma_4 = \emptyset$  e  $\partial\Omega \cap R \neq \emptyset$ .

**Demonstração:** Considere  $0 < x_0 < a$  e tome  $\lambda$  suficientemente pequeno de modo que:  $0 < x_0 + \lambda < a$ . Dado que  $\tilde{w}(x, H) = 0$  quando  $0 < x < a$  tem-se:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_y(x_0 + \lambda, H) - \tilde{w}_y(x_0, H) &= \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{w}(x_0 + \lambda, H) - \tilde{w}(x_0 + \lambda, H - n)}{n} \\ &\quad - \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{w}(x_0, H) - \tilde{w}(x_0, H - n)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{w}(x_0 + \lambda, H) - \tilde{w}(x_0 + \lambda, H - n)}{n} \\ &\quad - \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{w}(x_0, H) - \tilde{w}(x_0, H - n)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{w}(x_0, H - n) - \tilde{w}(x_0 + \lambda, H - n)}{n}. \end{aligned}$$

Do Teorema do Valor Intermediário, existe  $0 < \theta < 1$  de modo que:

$$\tilde{w}_y(x_0 + \lambda, H) - \tilde{w}_y(x_0, H) = -\lambda \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{1}{n} \tilde{w}_x(x_0 + \theta\lambda, H - n).$$

Do Lema 4.9 tem-se que  $\tilde{w}_x \leq 0$  em  $\bar{R}$  e portanto da relação dada acima temos

$$\tilde{w}_y(x_0 + \lambda, H) - \tilde{w}_y(x_0, H) \geq 0.$$

Isto mostra que  $\tilde{w}_y(x, H)$  seja não decrescente no intervalo  $[0, a]$ . Dado que  $\tilde{w}_y(0, H) = 0$  e  $\tilde{w}_y(a, H) = 0$  portanto  $w_y(x, H) = 0$  isto indica que  $w_y = 0$  sobre  $\Gamma_4$ .

Agora mostremos

$$\partial\Omega \cap \Gamma_4 = \emptyset.$$

Para obter este resultado, procederemos por contradição. Suponha que  $\partial\Omega \cap \Gamma_4 \neq \emptyset$ , isto indica que exista pelo menos um ponto  $P$ , da forma  $P = (x, H) \in \partial\Omega$ , com  $0 < x < a$ .

Note que esta interseção pode acontecer em:

- a) Um único ponto.
- b) Uma quantidade finita de pontos.
- c) Uma quantidade infinita de pontos.

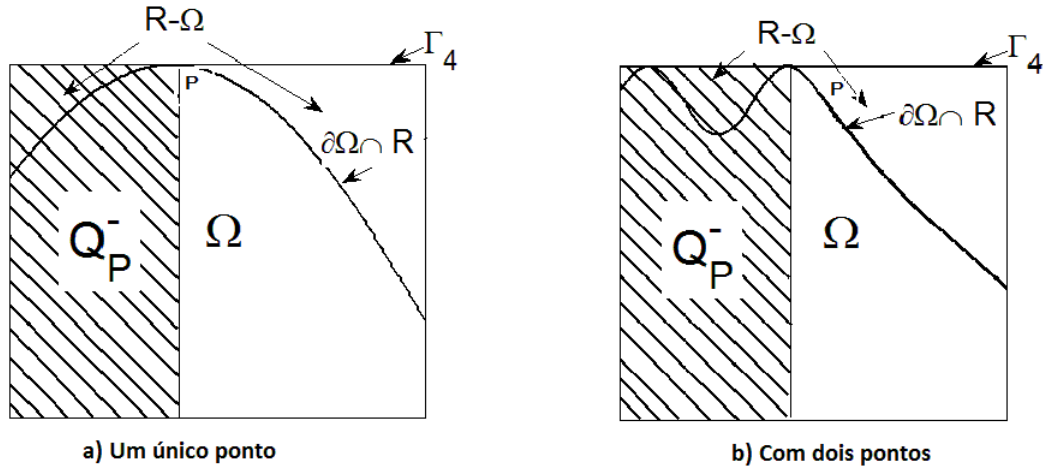


Figura 12: Possíveis representações de  $\Omega$  quando  $\partial\Omega$  intersecta a  $\Gamma_4$  em um e dois pontos.

Observe na Figura 12 que para os casos a) e b) o conjunto  $Q_P^-$  não está incluído estritamente no conjunto  $\Omega$ . Isto contradiz o Lema 4.10 e portanto nenhum destes casos é possível. Observe também na Figura 12 que a curva que descreve a  $\partial\Omega \cap R$  não pode ser crescente em nenhuma porção dela. De modo que no caso c) tem-se que a quantidade infinita de pontos na intersecção de  $\partial\Omega$  com  $\Gamma_4$  é dado pelo seguinte segmento:

$$\sigma = \{(x, H) : 0 < x < x_1\} \subset \Gamma_4, \text{ onde } x_1 < a.$$

Este segmento é representado na Figura 13. Já que  $\Delta w_x = 0$  numa vizinhança de um ponto  $(x_2, H) \in \sigma$  onde  $(x_2, H)$  é o ponto na qual  $w_x$  alcança seu valor mínimo, ou seja  $\tilde{w}(x_2, H) = 0$ . Assim

$$\frac{\partial w_x}{\partial \vec{n}}(x_2, H) = (w_{xx}(x_2, H), w_{xy}(x_2, H)) \cdot (0, 1) = w_{xy}(x_2, H) = 0.$$

Isto contradiz o Princípio do Máximo de Hopf e portanto  $\sigma$  não está incluído em  $\Gamma_4$ .

Assim  $\partial\Omega \cap \Gamma_4 = \emptyset$  e daqui tem-se  $\partial\Omega \cap R \neq \emptyset$ , o qual finaliza a prova do Lema. ■

Além disso pode-se deduzir do Lema 4.11 que a curva  $\phi$  é da forma:

$$\phi(x) = \inf\{y : (x, y) \in R - \Omega\}, \quad \text{para } 0 < x < a \quad (4.28)$$



$$\phi(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \phi(x) \quad \text{e} \quad \phi(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \phi(x).$$

Dos resultados obtidos no Lema 4.11, temos que a curva  $\phi$  que representa  $\partial\Omega \cap R$  é não crescente. A seguir mostraremos que a função  $\phi$  dada acima é não crescente. Para mostrar isso tome um ponto  $P_0 = (x_0, \phi(x_0))$  sobre a curva de interface e outro ponto  $P_1 = (x_1, \phi(x_1))$  tal que  $x_1 > x_0$ . Já que  $P_0$  esta sobre  $\partial\Omega \cap R$  isto indica que o ponto  $P_1$  esta em  $R \setminus \Omega$ , pela definição de  $\phi$  tem-se  $\phi(x_1) \leq \phi(x_0)$ . O qual mostra que  $\phi$  é não crescente.

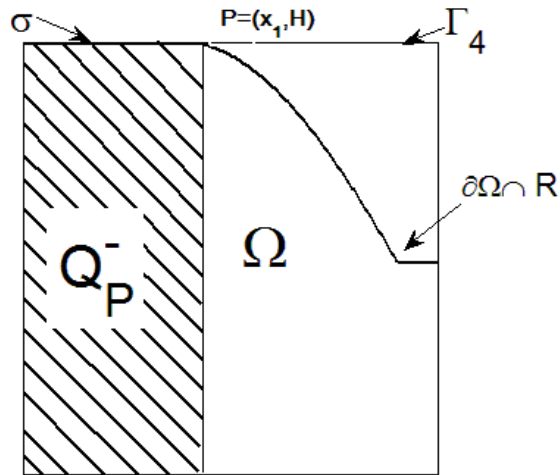


Figura 13: Possível representação de  $\Omega$  quando  $\partial\Omega \cap \Gamma_4 = \sigma$ .

Finalmente já que  $\tilde{w}_y \geq 0$  em  $R$  temos que a região  $\Omega$  é da forma

$$\Omega = \{(x, y) \in R : 0 < y < \phi(x) \quad \text{com} \quad 0 < x < a\}.$$

Mas lembre que a curva  $\phi$  é uma função estritamente decrescente com  $\phi(a) > h$ . A seguir serão mostrados estes resultados.

**Lema 4.12.** O conjunto  $\partial\Omega \cap R$  não contém segmentos paralelos aos eixos  $x$  e  $y$ . Portanto  $\phi$  é continua e estritamente decrescente.

**Demonstração:** Para mostrar este lema, procederemos por contradição. Suponha que existe algum segmento  $\sigma$  paralelo ao eixo  $y$  em  $\partial\Omega \cap R$ . Como  $\tilde{w} = 0$  em  $\partial\Omega \cap R$  então existe uma vizinhança aberta  $U \subset \Omega$  tal que  $\sigma \subset \partial U$  tal que  $\tilde{w} \in C^\infty(U \cup \sigma)$  e que verifique:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \tilde{w}_y = 0, & \text{em } U \\ \tilde{w}_y \leq 0, & \text{em } U \\ \tilde{w} = \tilde{w}_x = \tilde{w}_y = 0, & \text{sobre } \sigma \end{array} \right.$$

Observe que sobre o segmento  $\sigma$  o vetor normal é  $\vec{n} = (1, 0)$  e portanto:

$$\frac{\partial \tilde{w}_y}{\partial \vec{n}} = (w_{yx}, w_{yy}) \cdot (1, 0) = \tilde{w}_{yx}.$$

Dado que  $\tilde{w}_{yx} = \tilde{w}_{xy} = 0$ , então ao substituir na relação dada acima, temos que  $\frac{\partial \tilde{w}_y}{\partial \vec{n}} = 0$ . Isto contradiz o Princípio do Máximo de Hopf e portanto  $\partial\Omega \cap R$  não tem segmentos paralelos ao eixo  $y$ . Ou seja a função  $\phi$  esta bem definida e é continua.

De forma análoga consegue-se mostrar que  $\partial\Omega \cap R$  não tem segmentos paralelos ao eixo  $x$ , isto permite garantir que  $\phi$  é estritamente decrescente. ■

Do Lema 4.11 consegue-se provar que  $\phi(a) > h$ . Para mostrar este resultado procedemos por contradição, isto é, considere que  $\phi(a) \leq h$ . No caso que  $\phi(a) = h$  então não existe  $\Gamma_\sigma$  o qual não é possível. No caso que  $\phi(a) < h$  é claro que  $\frac{\phi(a)+h}{2}$  esta no intervalo  $[0, h[$  e portanto

$$\tilde{w} \left( a, \frac{\phi(a) + h}{2} \right) \in \Gamma_2.$$

Dado que  $\tilde{w}(a, h) = 0$  e da condição que  $\tilde{w}_y \leq 0$  sobre  $\Gamma_2$  temos  $\tilde{w}(a, \frac{\phi(a)+h}{2}) = 0$ . Mas substituindo do ponto  $(a, \frac{\phi(a)+h}{2})$  na função  $g$  tem-se

$$\tilde{w} \left( a, \frac{\phi(a) + h}{2} \right) = g \left( a, \frac{\phi(a) + h}{2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{h - \phi(a)}{2} \right)^2 \neq 0.$$

O qual é uma contradição pois  $\tilde{w} \left( a, \frac{\phi(a)+h}{2} \right) = 0$ . Com o qual garante-se que  $\phi(a) > h$ . Com os resultados vistos ate agora temos que

$$\Gamma = \partial\Omega \cap R = \partial\Omega - (\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4)$$

a qual é definida por

$$\Gamma = \{(x, y) \in R : y = \phi(x) \text{ com } 0 < x < a\},$$

onde  $\phi$  é a função dada em (4.28).

Finalmente, apresentamos o resultado final deste capítulo. Este teorema que pode ser visto em [20], mostra que a solução de (4.20) é solução do Problema do Dique Retangular.

**Teorema 4.13.** Seja  $\tilde{w} \in W^{2,p}(R) \cap C^{1,\lambda}(\bar{R})$ , com  $2 \leq p < \infty$  e  $0 < \lambda < 1$  a solução do seguinte problema :

$$\text{Achar } \tilde{w} \in \mathcal{K} : \int_R \nabla \tilde{w} \cdot \nabla (v - \tilde{w}) dx dy \geq - \int_R (v - \tilde{w}) dx dy, \quad \forall v \in \mathcal{K},$$

onde  $\mathcal{K} = \{v \in H^2(R) : v \geq 0 \text{ em } R \text{ e } v = g \text{ sobre } \partial R\}$  e  $g$  é definida como

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(H - y)^2 + \frac{x}{2a}[(h - y)^2 - (H - y)^2], & 0 \leq y \leq h. \\ \frac{1}{2}(H - y)^2 - \frac{x}{2a}(H - y)^2, & h \leq y \leq H. \end{cases}$$

Considerando o conjunto  $\Omega = \{(x, y) \in R : \tilde{w}(x, y) > 0\}$ , a função  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $u = y - \tilde{w}_y$  em  $\Omega$  e a função  $\phi : ]0, a[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\phi(x) = \inf\{y : (x, y) \in R - \Omega\}$ , com  $\phi(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \phi(x)$  e  $\phi(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \phi(x)$ . Então o par  $\{u, \phi\}$  é a solução ao Problema do Dique Retangular.

**Demonstração:** Pelo visto no Lema 4.11 temos que  $\phi$  é estritamente decrescente e que satisfaz que  $\phi(a) > h$ . A seguir mostraremos que  $u$  verifica as condições (4.1)-(4.6).

a) Dado que  $u = y - \tilde{w}_y = 0$  em  $\Omega$  então  $\Delta u = \Delta \tilde{w}_y$  em  $\Omega$  já que  $\Delta \tilde{w}_y = 0$  em  $\Omega$  temos que  $\Delta u = 0$  em  $\Omega$  o qual verifica (4.1).

b) Observe no segmento  $\Gamma_0$  que

$$u(0, y) = y - \tilde{w}_y(0, y) = y - g_y(0, h) = y + (h - y) = h, \quad y \in [0, H].$$

Isto indica que  $u(0, H) = H$  e portanto verifica (4.2).

c) De forma análoga observe que sobre  $\Gamma_2$  e  $\Gamma_3$  temos respectivamente

$$u(a, y) = y - \tilde{w}_y(a, y) = y - g_y(a, y) = \begin{cases} h & , \text{ sobre } \Gamma_2 \\ y & , \text{ sobre } \Gamma_3 \end{cases}$$

Em particular satisfaz para  $\Gamma_\sigma$ , portanto (4.3) é satisfeito.

d) Do Lema 3.7 lembre que  $\tilde{w}_{yy} = 1$  sobre  $\Gamma_1$  e note que  $u_y = 1 - \tilde{w}_{yy} = 0$  sobre  $\Gamma_1$ , com o qual (4.4) é satisfeito.

e) Dado que  $\Gamma = \partial\Omega \cap R$  pela continuidade é claro que  $\tilde{w}_y = 0$  sobre  $\Gamma$ , já que  $u = y - \tilde{w}_y$  em  $\Omega$ , isto indica que  $u = y$  sobre  $\Gamma$  portanto (4.5) é satisfeito.

f) Dado que  $u = y - \tilde{w}_y$  em  $\Omega$  isto indica que

$$u_x = -\tilde{w}_{yx} \quad \text{e} \quad u_y = 1 - \tilde{w}_{yy} \quad \text{em } \Omega.$$

Tomando  $\xi \in C_0^\infty(R)$  e substituindo nas relações obtidas acima temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \xi \, dx dy &= \int_{\Omega} [u_x \xi_x + u_y \xi_y] \, dx dy \\
&= \int_{\Omega} [-\tilde{w}_{yx} \xi_x + (1 - \tilde{w}_{yy}) \xi_y] \, dx dy \\
&= \int_{\Omega} [-\tilde{w}_{yx} \xi_x - \tilde{w}_{yy} \xi_y] \, dx dy + \int_{\Omega} \xi_y \, dx dy \\
&= - \int_{\Omega} \nabla \tilde{w}_y \cdot \nabla \xi \, dx dy + \int_{\Omega} \xi_y \, dx dy \\
&= - \int_R \nabla \tilde{w}_y \cdot \nabla \xi \, dy dx + \int_R \xi_y \, dx dy.
\end{aligned}$$

Aplicando a primeira identidade de Green na equação dada acima

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \xi \, dx dy = \int_R \Delta \tilde{w}_y \xi \, dx dy - \int_{\partial R} \frac{\partial \tilde{w}_y}{\partial \vec{n}} \xi \, ds + \int_0^a \int_0^H \xi_y \, dx dy.$$

Dado que  $\Delta \tilde{w}_y = 0$  em  $R$  isto indica que a primeira expressão é zero, dado que  $\xi = 0$  sobre  $\partial R$  isto indica que a segunda expressão também é zero. A terceira expressão pode ser expressado como  $\int_0^a \int_0^H \xi_y \, dx dy = \int_0^a [\xi(x, H) - \xi(x, 0)] \, dx = 0$ . Isto mostra que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \xi \, dx dy = 0.$$

Dado que  $\Delta u = 0$  em  $\Omega$  e da primeira identidade de Green, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \Delta u \xi \, dx dy &= - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \xi \, dx dy + \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \xi \, ds \\
0 &= 0 + \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \xi \, ds \\
0 &= \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \xi \, ds \\
0 &= \int_{\bar{\Gamma}_0} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \xi \, ds + \int_{\bar{\Gamma}_1} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \xi \, ds + \int_{\bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_\sigma} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \xi \, ds + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \xi \, ds.
\end{aligned}$$

Observe que  $\partial \Omega = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1 \cup (\bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_\sigma) \cup \Gamma$  e que as regiões  $\bar{\Gamma}_0$ ,  $\bar{\Gamma}_1$  e  $(\bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_\sigma)$  são porções da fronteira de  $R$ . Já que a função  $\xi$  é zero sobre  $\partial R$  portanto também é zeros nessas regiões. Assim ao substituir na equação dada acima tem-se

$$0 = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \xi \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ sobre } \Gamma.$$

Isto finalmente mostra (4.6).

Portanto dado que  $u$  satisfaz as condições (4.1)-(4.6) e  $\phi$  é uma função estritamente decrescente, então o par  $\{u, \phi\}$  é solução do Problema do Dique Retangular. ■

Resumindo o visto neste capítulo, tem-se um resultado de equivalência entre o Problema do Dique Retangular e uma inequação variacional associada a um problema tipo obstáculo. Além disso pela técnica de prolongamento por reflexão sucessivas consegue-se atingir regularidade nos vértices do retângulo  $R$  o qual permite que  $R$  seja suficientemente regular. Ao ter regularidade suficientes das funções  $f$ ,  $\varphi$  e  $g$  e o domínio  $R$  garantimos que a solução fraca deste problema tipo obstáculo é também uma solução forte e em particular satisfaz um Problema de Complementaridade da forma :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta\tilde{w} \geq -1, & \text{em } R \\ \tilde{w} \geq 0, & \text{em } R \\ (-\Delta\tilde{w} + 1)\tilde{w} = 0, & \text{em } R \end{array} \right.$$

No seguinte capítulo, será estudado o algoritmo FDA-NCP, para resolver um Problema de Complementaridade e sua resolução numérica via diferenças finitas.

## 5 PROBLEMA DE COMPLEMENTARIDADE

Os diversos modelos que aparecem na Física, Engenharia, Economia, se reduzem a resolver um problema de minimização ou um sistema de equações ou um problema de complementaridade. Como foi visto nos capítulos anteriores tanto o Problema do Obstáculo como o Problema do Dique Retangular são associados a um Problema de Complementaridade (PC).

Segundo [26], considere uma função vetorial  $F$ , da forma :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)). \end{aligned}$$

O Problema de Complementaridade consiste em determinar  $x \in \mathbb{R}^n$  que satisfaça as seguintes condições :

$$(PC) \begin{cases} x \geq \mathbf{0} &\Leftrightarrow x_i \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \\ F(x) \geq \mathbf{0} &\Leftrightarrow F_i(x) \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \\ x \bullet F(x) = \mathbf{0} &\Leftrightarrow x_i F_i(x) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

As inequações dadas acima são conhecidas como condições de positividade para (PC) e a equação  $x \bullet F(x) = 0$  é definida via o produto de Hadamard

$$x \bullet F(x) = \begin{pmatrix} x_1 F_1(x) \\ \vdots \\ x_n F_n(x) \end{pmatrix}.$$

Das condições de positividade definimos o Conjunto de Pontos Viáveis,  $\Omega$ , da forma :

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0 \text{ e } F(x) \geq 0\}.$$

Quando as desigualdades são estritas definimos o Conjunto de Pontos Estritamente Viáveis,  $\Omega^0$ , da forma:

$$\Omega^0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x > 0 \text{ e } F(x) > 0\}.$$

Quando  $F(x) = Ax + b$ , com  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $b \in \mathbb{R}^n$ , dizemos que (PC) é um Problema de Complementaridade Linear (LCP), caso contrario é um Problema de Complementaridade Não-Linear (NCP). Para resolver (PC) de forma computacional devemos buscar métodos numéricos para obter a solução deste problema. O estudo destes métodos se iniciaram nas décadas de 60's e inícios de 70's utilizando-se o artifício de reescrever (PC) como um problema de minimização sem restrições, para isso utiliza-se funções especiais chamadas Funções de Mérito, veja [13], [19] e [24].

Dizemos que  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de mérito associado a um (PC), se satisfaz:

- $\phi(x) \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$
- $\phi(x) = 0$  se e somente se  $x$  é solução do Problema de Complementaridade.

É fácil ver que o mínimo global de  $\phi$  é a solução do (PC) e vice-versa. O inconveniente de resolver este problema via um problema de minimização é que nem sempre é possível garantir que o mínimo encontrado seja global e ainda a maioria destes algoritmos de minimização são baseados em técnicas diferenciáveis. Já que boa parte das Funções de Mérito não tem a diferenciabilidade requerida, a utilização destes algoritmos de minimização são inviáveis para este caso.

Outra alternativa para resolver (PC) foi proposta em 1976 por Olvi L. Mangasarian [25]. Esta proposta consiste em associar o (PC) com um Sistema de Equações não Lineares. A equivalência é obtida usando funções especiais chamadas Funções-NCP. Dizemos que  $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma Função-NCP associada a um (PC) se satisfaz.

$$\psi(a, b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \geq 0 \quad , \quad b \geq 0 \quad \text{e} \quad ab = 0.$$

Se  $\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi(x_1, F_1(x)) \\ \vdots \\ \psi(x_n, F_n(x)) \end{pmatrix}$ , então a solução de  $\Psi(x) = \mathbf{0}$  é solução de (PC).

A fim de contornar a dificuldade apresentada pela não diferenciabilidade, vários autores estudaram e desenvolveram métodos numéricos que resolva este problema de diferenciabilidade. Entre estes métodos destacamos os Métodos de Suavização [4], Métodos de Ponto Interior [9] e Métodos Tipo Projeção [30].

Dado que o Problema do Obstáculo é associado a um problema de complementaridade,

da forma :

$$\text{Achar } u \in \mathcal{K}_g^\varphi : \begin{cases} u \geq \varphi, & \text{em } \Omega \\ -\Delta u \geq f, & \text{em } \Omega \\ (-\Delta u - f)(u - \varphi) = 0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Para resolver numericamente este problema, usaremos o Algoritmo FDA-NCP, veja [17].

## 5.1 O ALGORITMO FDA-NCP

O Algoritmo FDA-NCP ( "Feasible Directions Algorithm for Nonlinear Complementarity Problem ") é um Algoritmo de Ponto Interior que resolve numericamente um Problema de Complementaridade, da forma :

$$\text{Achar } x \in \mathbb{R}^n : \begin{cases} x \geq \mathbf{0}. \\ F(x) \geq \mathbf{0}. \\ x \bullet F(x) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (5.1)$$

A ideia básica deste algoritmo é gerar uma sequência de pontos interiores em  $\Omega$  que converge a uma solução de (5.1).

Antes de continuar com o algoritmo veremos alguns conceitos básicos.

- Dizemos que um vetor  $d$  é uma direção viável em  $\Omega$ , se existe  $\theta > 0$  tal que

$$x + td \in \Omega, \quad \text{para todo } t \in [0, \theta].$$

- Dizemos que o campo vetorial  $d(\cdot)$  é um campo de direções uniformemente viáveis, se existe  $\theta > 0$  tal que

$$x + td(x) \in \Omega, \quad \text{para todo } t \in [0, \theta] \text{ e } x \in \Omega.$$

- Dizemos que um vetor  $d$  é uma direção de descida para  $\phi$ , se existe  $\theta > 0$  tal que

$$\phi(x + td) < \phi(x), \quad \text{para todo } t \in [0, \theta].$$

Para que o Algoritmo FDA-NCP gere a sequência  $x^k \in \Omega^0$  é necessário obter um campo de direções uniformemente viáveis em  $\Omega$ . Para garantir que essa sequência convirja à solução de (5.1), usaremos uma função  $\phi$ , de tal forma que o campo de direções uniformemente viáveis seja de descida para  $\phi$ . A seguir construiremos esse campo de direções.

Consideremos  $H(x) = x \bullet F(x)$  e definamos o seguinte sistema :

$$\text{Achar } x \in \Omega : \quad H(x) = \mathbf{0}. \quad (5.2)$$



Observe que (5.1) e (5.2) são equivalentes.

Aplicando a iteração de Newton no sistema  $H(x) = 0$ , obtemos a direção  $d_1^k$

$$J_H(x^k)d_1^k = -H(x^k), \quad (5.3)$$

onde  $d_1^k$  é a direção de Newton e  $J_H(x^k)$  é a matriz Jacobiana de  $H$  no ponto  $x^k$ . Assim o próximo ponto  $x^{k+1}$  é obtido da relação  $x^{k+1} = x^k + d_1^k$ .

Note que a matriz Jacobiana  $J_H(x)$  é da forma

$$J_H(x) = \text{diag}(F(x)) + \text{diag}(x)J_F(x), \quad (5.4)$$

onde  $\text{diag}(v)$  é uma matriz diagonal com  $\text{diag}(v)_{ii} = v_i \forall i = 1, \dots, n$ .

Quando em algum índice  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  ocorre que  $H_i(x^k) = 0$  sem que  $x^k$  seja a solução de (5.1), então pode acontecer algum dos seguintes casos :

$$x_i^k = 0 \quad \text{ou} \quad F_i(x^k) = 0.$$

De (5.4) temos na  $i$ -ésima linha de (5.2) a seguinte relação:

$$[F_i(x^k)e_i + x_i^k \nabla F_i(x^k)]d_1^k = 0.$$

Portanto para cada caso tem-se :

- Caso 1: Se  $x_i^k = 0$  e  $F_i(x^k) > 0$ , isso implica que  $d_1^k$  é tangente a restrição  $x_i \geq 0$ .

- Caso 2: Se  $x_i^k > 0$  e  $F_i(x^k) = 0$ , isso implica que  $d_1^k$  é tangente a restrição  $F_i(x) \geq 0$ .

Até este ponto nada garante que  $x^{k+1}$  encontra-se na região viável. O seguinte resultado mostra quando uma direção  $d$  é viável em  $\Omega$ .

**Proposição 5.1.** Seja  $d \in \mathbb{R}^n$  e  $x \in \Omega$ . Se a direção  $d$  satisfaz as seguintes condições:

**a.**  $d_i > 0$  para todo índice  $i$  tal que  $x_i = 0$ .

**b.**  $\nabla F_i(x)d > 0$  para todo índice  $i$  tal que  $F_i(x) = 0$ .

Então  $d$  é uma direção viável em  $\Omega$ .

**Demonstração:** A prova desta proposição pode ser vista em [18]. ■

Para encontrar uma direção que seja viável em  $\Omega$ , basta introduzir uma perturbação no lado direito de (5.3). Geometricamente, esta perturbação define uma segunda direção  $d_2^k$  chamada direção de restauração para o conjunto  $\Omega$  e é obtida quando resolvemos

$$J_H(x^k)d_2^k = \rho^k E, \quad E = (1, \dots, 1)^T, \quad (5.5)$$

onde  $\rho^k > 0$  só se anula numa solução do Problema de Complementaridade.

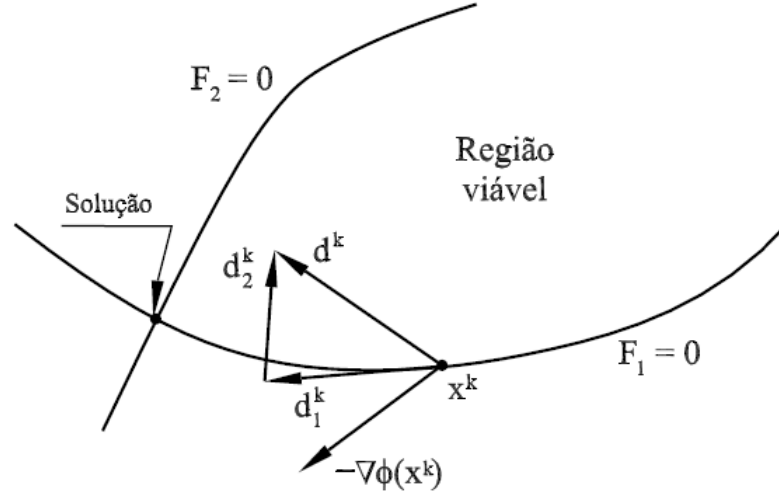


Figura 14: Representação da direção viável.  
Fonte: Mazorche, S.R ; 2007.

Desta forma uma combinação linear adequada entre a direção de Newton  $d_1^k$  e a direção de restauração  $d_2^k$  gera uma direção  $d^k$ , que tem a propriedade de ser viável em  $\Omega$ .

Considere  $\rho^k$  da seguinte forma :

$$\rho^k = \rho_0 \frac{\phi(x^k)^\beta}{n}, \quad \text{com } \rho_0 > 0 \quad \text{e} \quad \beta \in [1, 2], \quad (5.6)$$

onde a função  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é definida como :

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n x_i F_i(x). \quad (5.7)$$

Finalmente o vetor  $d^k$  é obtido ao resolver :

$$J_H(x^k)d^k = -H(x^k) + \rho^k E. \quad (5.8)$$

A seguir apresentamos o resultado [26], que garante que  $d^k$  é uma direção viável em  $\Omega$ .

**Proposição 5.2.** (Viabilidade da direção) Considere  $x^k \in \Omega$  tal que  $\phi(x^k) > 0$  e a matriz Jacobiana  $J_H(x^k)$  não singular. Então o vetor  $d^k$  obtida pela resolução de (5.8) é uma direção viável em  $\Omega$ .

**Demonstração:** No caso que  $x^k \in \Omega$  seja um ponto estritamente viável então qualquer vetor  $d^k$  é uma direção viável em  $\Omega$ . Portanto basta verificar no caso em que  $H_i(x^k) = 0$  sem ser  $x^k$  uma solução de (5.1). De (5.4) temos na  $i$ -ésima linha de (5.5), a seguinte relação :

$$[e_i F_i(x^k) + x_i^k \nabla F_i(x^k)]d^k = -x_i^k F_i(x^k) + \rho^k.$$

Da equação dada acima temos os seguintes casos :

- Caso 1 : Se  $x_i^k = 0$  e  $F_i(x^k) > 0$ , então  $[e_i F_i(x^k)]d^k = F_i(x^k)d_i^k = \rho^k$ , logo  $d_i^k = \frac{\rho^k}{F_i(x^k)} > 0$ .

Como  $\rho^k > 0$  e  $F_i(x^k)$  então  $d_i^k > 0$ .

-Caso 2 : Se  $x_i^k > 0$  e  $F_i(x^k) = 0$ , então  $[x_i^k \nabla F_i(x^k)]d^k = x_i^k [\nabla F_i(x^k)]d^k = \rho^k$ . Como  $\rho^k > 0$  e  $x_i^k > 0$ , então  $\nabla F_i(x^k)d^k > 0$ .

Dos casos vistos acima, note que o vetor  $d^k$  verifica as hipóteses da Proposição 5.1, isto mostra que  $d^k$  é uma direção viável em  $\Omega$ . ■

A Proposição 5.2 mostra que o vetor  $d^k$  é uma direção viável em  $\Omega$ , mas falta ainda mostrar que com esta direção a sequência gerada converge para uma solução de (5.1). Lembrando que na solução de (5.1) tem-se que  $\rho^k = 0$ , então pela forma como  $\rho^k$  foi definido, basta mostrar que  $d^k$  é uma direção de descida para a função potencial  $\phi$ . Isto será mostrado na seguinte proposição, [26].

**Proposição 5.3.** Em todo ponto  $x^k \in \Omega$  tal que  $\phi(x^k) > 0$ , temos que a direção  $d^k$  obtida pela resolução de (5.8) é uma direção de descida para  $\phi$  sempre que  $0 < \rho_0 \phi(x^k)^{\beta-1} < 1$ .

**Demonstração:** Para garantir que  $d^k$  é uma direção de descida para  $\phi$  temos que mostrar que  $\nabla \phi(x^k)d^k < 0$ . Note de (5.7) que  $\nabla \phi(x^k)$  é da forma :

$$\nabla \phi(x^k) = E^T [\text{diag}(F(x^k) + \text{diag}(x^k)\nabla F(x^k))].$$

Ao multiplicar a relação acima por  $d^k$ , obtemos :

$$\begin{aligned} \nabla \phi(x^k)d^k &= E^T [\text{diag}(F(x^k) + \text{diag}(x^k)\nabla F(x^k))]d^k \\ &= E^T (-H(x^k) + \rho^k E) \\ &= -\phi(x^k) + \rho^k n \\ &= -[1 - \rho_0 \phi(x^k)^{\beta-1}] \phi(x^k). \end{aligned}$$

Isto mostra que  $\nabla \phi(x^k)d^k < 0$ , sempre que em  $0 < \rho_0 \phi(x^k)^{\beta-1} < 1$ . ■

Conforme visto em [26] o campo vetorial  $d(\cdot)$  é um campo de direções uniformemente viáveis e limitado. E quando implementamos uma busca inexata, como por exemplo busca de Armijo, temos a garantia que o passo da busca é não nulo. Em [27] é apresentado um algoritmo de ponto interior com busca em arco, chamado Algoritmo FAIPA.

O Algoritmo FDA-NCP tem convergência global para uma solução de (5.1).

**Algoritmo FDA-NCP :** Considere os parâmetros:  $c, \epsilon > 0$ ,  $\rho_0, \eta, \nu \in ]0, 1[$  e  $\beta \in ]1, 2[$ . Tome  $x^0 \in \Omega$  estritamente viável tal que  $\phi(x^0) \leq c$  e  $k = 0$ .

**Passo 1: Direção de busca :** Resolva o sistema

$$[\text{diag}(F(x^k)) + \text{diag}(x^k)J_F(x^k)]d^k = -H(x^k) + \rho^k E,$$

onde  $\rho^k = \rho_0 \frac{(\phi(x^k))^\beta}{n}$  e  $\rho_0 = \frac{\alpha}{c^{\beta-1}}$ .

**Passo 2: Busca Armijo :** Defina o tamanho de passo  $t^k$  com sendo o primeiro valor da sequência  $\{1, \nu, \nu^2, \dots\}$  que satisfaz

- a.  $x^k + t^k d^k \geq 0$ .
- b.  $F(x^k + t^k d^k) \geq 0$ .
- c.  $\phi(x^k) + t^k \eta [\nabla \phi(x^k)]^T d^k \geq \phi(x^k + t^k d^k)$ .

**Passo 3: Atualização dos dados :** Fazer

$$x^{k+1} := x^k + t^k d^k.$$

$$k := k + 1.$$

**Passo 4: Critério de Parada :** Se  $\phi(x^{k+1}) < \epsilon$  pare, caso contrario volte ao passo 1.

Observe que o passo 1 do Algoritmo FDA-NCP permite obter uma direção de busca  $d^k$ , pela resolução de um sistema de equações. Como vimos anteriormente esta direção de busca é uma direção viável em  $\Omega$  e de descida para a função potencial  $\phi$ . No passo 2 é realizado uma busca de Armijo para assim garantir que  $x^{k+1}$  esteja dentro da região viável  $\Omega$  e que tenha um decaimento na função potencial  $\phi$ . Dado que a busca linear esta bem definida, o passo  $t^k$  é não nulo e o valor da função  $\phi$  vai a zero o que implica que  $d^k$  na solução também vai a zero. Isto permite usar como critério de parada o valor da função  $\phi$ . que monitora a convergência do algoritmo. Como visto em [17] e [26] para os casos em que  $\beta \in ]1, 2[$  temos a convergência superlinear e para  $\beta = 2$  e o tamanho do passo da busca,  $t^k = 1$  com  $k$  suficientemente grande, temos a convergência quadrática. Para aplicar o Algoritmo FDA-NCP em problemas tipo obstáculo temos que fazer primeiro a discretização do Problema de Complementaridade associado. Este procedimento é obtido usando o método das diferenças finitas que é descrito na seguinte seção.

## 5.2 DISCRETIZAÇÃO VIA DIFERENÇAS FINITAS

O método das diferenças finitas [21] é uma técnica numérica usada em equações diferenciais para aproximar o valor das derivadas da função por uma relação diferença/quociente apropriada. Nos Capítulos 2 e 3, ao considerar regularidade apropriada vimos que os problemas ali tratados são equivalentes a

$$\text{Achar } u \in \mathcal{K}_g^\varphi : \begin{cases} u \geq \varphi, & \text{em } \Omega \\ -\Delta u \geq f, & \text{em } \Omega \\ (-\Delta u - f)(u - \varphi) = 0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

O método das diferenças finitas será usada para obter uma forma aproximada do operador Laplaciano. Este procedimento consiste em levar o Laplaciano para uma matriz quadrada  $\mathcal{M}$ . Feito a discretização consegue-se levar o problema acima para um Problema de Complementaridade Linear o qual permite aplicar o Algoritmo FDA-NCP. Nesta seção só sera descrito o caso de problemas tipo obstáculo Bidimensional. A aplicação do Método das Diferenças Finitas, para o caso unidimensional é análogo e muito mais fácil. Seguindo [2], para fazer discretização de um domínio  $\Omega$ , da forma:

$$\Omega = ]a, b[ \times ]c, d[ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, c < y < d\}.$$

Tome  $N \in \mathbb{N}$  e defina os incrementos nas variáveis  $x$  e  $y$  respectivamente, como :

$$\Delta x = \frac{b-a}{N} \quad \text{e} \quad \Delta y = \frac{d-c}{N}.$$

A discretização do domínio  $\Omega$  é dado pelo conjunto  $\Omega_d$ , da forma:

$$\Omega_d = \{(x_i, y_i) \in \Omega : x_i = a + i\Delta x, y_i = c + i\Delta y, 0 \leq i \leq N\}$$

e sua fronteira  $\partial\Omega_d = \partial\Omega_d^1 \cup \partial\Omega_d^2 \cup \partial\Omega_d^3 \cup \partial\Omega_d^4$ , onde

$$\partial\Omega_d^1 = \{(x_i, c) \in \partial\Omega : x = a + i\Delta x, 0 \leq i \leq N\}.$$

$$\partial\Omega_d^2 = \{(b, y_i) \in \partial\Omega : y = c + i\Delta y, 0 \leq i \leq N\}.$$

$$\partial\Omega_d^3 = \{(x_i, d) \in \partial\Omega : x = a + i\Delta x, 0 \leq i \leq N\}.$$

$$\partial\Omega_d^4 = \{(a, y_i) \in \partial\Omega : y = c + i\Delta y, 0 \leq i \leq N\}.$$

Com base em  $\Omega_d$  será feito a discretização de  $-\Delta u = f$ .

Portanto para  $(x_i, y_j) \in \bar{\Omega}_d$  denote por  $U_{i,j} = u(x_i, y_j)$  e  $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$ , a formula de

aproximação é a seguinte :

$$\frac{-U_{i-1,j} + 2U_{i,j} - U_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{-U_{i,j-1} + 2U_{i,j} - U_{i,j+1}}{\Delta y^2} = f_{ij}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, N-1. \quad (5.9)$$

Observe que o valor aproximado do Laplaciano em  $(x_i, y_j)$  depende da avaliação da função  $u$  em 5 pontos. A expressão dada em (5.9) é conhecida como Formula do 5 pontos. Em particular quando  $\Delta x = \Delta y = h$ , temos que (5.9) é da forma :

$$-\frac{1}{h^2}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) = f_{i,j}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, N-1. \quad (5.10)$$

Um esquema de (5.10) pode ser visto na Figura 15.

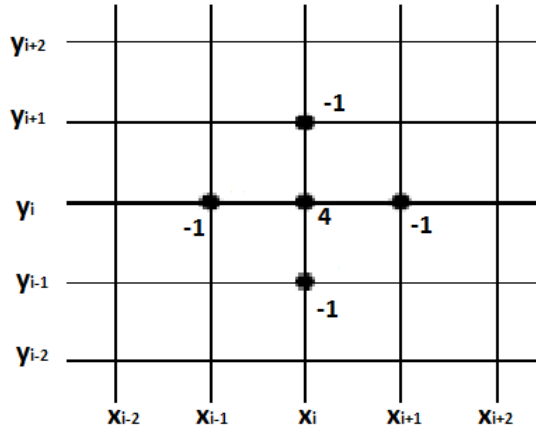


Figura 15: Stencil do esquema de 5 pontos.  
Fonte : Leveque, R. ; 2007.

A seguir será determinada a matriz quadrada  $\mathcal{M}$  que corresponde à forma discreta do Laplaciano. Reescrevendo (5.9) como um sistema, temos as seguintes equações :

a. No caso em que  $i = 1$  tem-se :

$$2 \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) U_{1,1} - \frac{U_{2,1}}{\Delta x^2} - \frac{U_{1,2}}{\Delta y^2} = f_{1,1} + \frac{U_{0,1}}{\Delta x^2} + \frac{U_{1,0}}{\Delta y^2}.$$

$$2 \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) U_{1,j} - \frac{U_{2,j}}{\Delta x^2} - \frac{U_{1,j-1} + U_{1,j+1}}{\Delta y^2} = f_{1,j} + \frac{U_{0,j}}{\Delta x^2}, \quad j = 2, \dots, N-1.$$

$$2 \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) U_{1,N} - \frac{U_{2,N}}{\Delta x^2} - \frac{U_{1,N-1}}{\Delta y^2} = f_{1,N} + \frac{U_{0,N}}{\Delta x^2} + \frac{U_{1,N+1}}{\Delta y^2}.$$

**b.** No caso em que  $i = 2, 3, \dots, N - 1$ , tem-se :

$$2 \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) U_{i,1} - \frac{U_{i-1,1} + U_{i+1,1}}{\Delta x^2} - \frac{U_{i,2}}{\Delta y^2} = f_{i,1} + \frac{U_{i,0}}{\Delta y^2}.$$

$$2 \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) U_{i,j} - \frac{U_{i-1,j} + U_{i+1,j}}{\Delta x^2} - \frac{U_{i,j-1} + U_{i,j+1}}{\Delta y^2} = f_{i,j} \quad , j = 2, \dots, N - 1.$$

$$2 \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) U_{i,N} - \frac{U_{i-1,N} + U_{i+1,N}}{\Delta x^2} - \frac{U_{i,N-1}}{\Delta y^2} = f_{i,N} + \frac{U_{i,N+1}}{\Delta y^2}.$$

**c.** Finalmente no caso em que  $i = N$ , tem-se :

$$2 \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) U_{N,1} - \frac{U_{N-1,1}}{\Delta x^2} - \frac{U_{N,2}}{\Delta y^2} = f_{N,1} + \frac{U_{N+1,1}}{\Delta x^2} + \frac{U_{N,0}}{\Delta y^2}.$$

$$2 \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) U_{N,j} - \frac{U_{N-1,j}}{\Delta x^2} - \frac{U_{N,j-1} + U_{N,j+1}}{\Delta y^2} = f_{N,j} + \frac{U_{N+1,j}}{\Delta x^2} \quad , j = 2, \dots, N - 1.$$

$$2 \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) U_{N,N} - \frac{U_{N-1,N}}{\Delta x^2} - \frac{U_{N,N-1}}{\Delta y^2} = f_{N,N} + \frac{U_{N+1,N}}{\Delta x^2} + \frac{U_{N,N+1}}{\Delta y^2}.$$

Como as expressões da forma  $U_{i,0}$ ,  $U_{0,i}$ ,  $U_{N+1,i}$  e  $U_{i,N+1}$  representam valores de  $u$  avaliadas sobre  $\partial\Omega$ , então nesses pontos o valor de  $U$  assume o valor da função  $g$ . Logo pelos itens **a**, **b** e **c** dados acima, obtemos um sistema  $N^2$  equações com  $N^2$  incógnitas, logo as expressões do lado esquerdo podem ser resumidas em uma matriz quadrada  $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{N^2 \times N^2}$ . Antes de determinar a matriz  $\mathcal{M}$ , precisa-se escolher primeiro uma ordenação para os pontos de  $\Omega_d$ . Posto que existem varias ordenações possíveis então que existem varias matrizes possíveis. Tal vez a forma mais simple de ordenar estes pontos em  $\Omega_d$  seja percorrida linha por linha, da esquerda para direita e de baixo para cima. Este ordenamento é descrito da seguinte forma :

$$U_{1,1}, U_{2,1}, \dots, U_{N,1}, U_{1,2}, \dots, U_{N,2}, \dots, U_{1,N-1}, \dots, U_{N,N-1}, U_{1,N}, U_{2,N}, \dots, U_{N,N}.$$

Considerando isto, consegue-se definir o vetor  $U$ , como :

$$U = \begin{pmatrix} U^{[1]} \\ U^{[2]} \\ \vdots \\ U^{[N]} \end{pmatrix}, \quad \text{onde} \quad U^{[j]} = \begin{pmatrix} U_{1,j} \\ U_{2,j} \\ \vdots \\ U_{N,j} \end{pmatrix}.$$

Portanto  $\mathcal{M}$  é uma matriz de  $N \times N$  blocos de dimensão  $N \times N$ , expressado como :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{B} & -\frac{1}{\Delta y^2} \mathcal{I} & & & & & \\ -\frac{1}{\Delta y^2} \mathcal{I} & \mathcal{B} & -\frac{1}{\Delta y^2} \mathcal{I} & & & & \\ & -\frac{1}{\Delta y^2} \mathcal{I} & \mathcal{B} & -\frac{1}{\Delta y^2} \mathcal{I} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -\frac{1}{\Delta y^2} \mathcal{I} & \mathcal{B} & -\frac{1}{\Delta y^2} \mathcal{I} & \\ & & & & -\frac{1}{\Delta y^2} \mathcal{I} & \mathcal{B} & \\ & & & & & -\frac{1}{\Delta y^2} \mathcal{I} & \mathcal{B} \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

onde  $\mathcal{I}$  é a matriz identidade de ordem  $N \times N$  e  $\mathcal{B}$  é uma matriz tridiagonal de ordem  $N \times N$  da forma:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 2\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right) & -\frac{1}{\Delta x^2} & & & & & \\ -\frac{1}{\Delta x^2} & 2\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right) & -\frac{1}{\Delta x^2} & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & -\frac{1}{\Delta x^2} & 2\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right) & -\frac{1}{\Delta x^2} & & \\ & & & -\frac{1}{\Delta x^2} & 2\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right) & -\frac{1}{\Delta x^2} & \\ & & & & -\frac{1}{\Delta x^2} & 2\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right) & \end{pmatrix}.$$

No caso que  $\Delta x = \Delta y = h$  então da formula (5.10) tem-se que a matriz  $\mathcal{M}$  é tridiagonal por blocos, da forma :

$$\mathcal{M} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} \mathcal{B} & -\mathcal{I} & & & & & \\ -\mathcal{I} & \mathcal{B} & -\mathcal{I} & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & -\mathcal{I} & \mathcal{B} & -\mathcal{I} & & \\ & & & -\mathcal{I} & \mathcal{B} & & \end{pmatrix}, \quad \text{onde } \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & -1 & 4 & -1 & \\ & & & & -1 & 4 & \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Observe que as expressões descritas na parte direita das equações vistas nos itens (a) , (b) e (c) podem ser resumidas em um vetor coluna  $\mathcal{F}$  de ordem  $N^2 \times 1$  da forma:

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \tilde{f}^{[1]} \\ \tilde{f}^{[2]} \\ \vdots \\ \tilde{f}^{[N-1]} \\ \tilde{f}^{[N]} \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$



Para  $k = 1$  temos que  $\tilde{f}^{[1]}$  é da forma :

$$\tilde{f}^{[1]} = \begin{pmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \\ \vdots \\ f_{N-1,1} \\ f_{N,1} \end{pmatrix} + \frac{1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} U_{0,1} \\ U_{0,2} \\ \vdots \\ U_{0,N-1} \\ U_{0,N} \end{pmatrix} + \frac{1}{\Delta y^2} \begin{pmatrix} U_{1,0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ U_{N,0} \end{pmatrix}.$$

Para  $1 < k < N$  temos que  $\tilde{f}^{[k]}$  é da forma :

$$\tilde{f}^{[k]} = \begin{pmatrix} f_{1,j} \\ f_{2,j} \\ \vdots \\ f_{N-1,j} \\ f_{N,j} \end{pmatrix} + \frac{1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} U_{0,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ U_{N+1,j} \end{pmatrix}, \quad j = 2, 3, \dots, N-1.$$

Para  $k = N$  temos que  $\tilde{f}^{[N]}$  é da forma :

$$\tilde{f}^{[N]} = \begin{pmatrix} f_{1,N} \\ f_{2,N} \\ \vdots \\ f_{N-1,N} \\ f_{N,N} \end{pmatrix} + \frac{1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} U_{0,N} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ U_{N+1,N} \end{pmatrix} + \frac{1}{\Delta y^2} \begin{pmatrix} U_{1,N+1} \\ U_{2,N+1} \\ \vdots \\ U_{N-1,N+1} \\ U_{N,N+1} \end{pmatrix}.$$

No caso em que  $u = 0$  sobre  $\partial\Omega$ , temos que  $\mathcal{F}$  é da forma :

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} f^{[1]} \\ \vdots \\ f^{[N]} \end{pmatrix}, \quad \text{onde } f^{[k]} = \begin{pmatrix} f_{1,k} \\ \vdots \\ f_{N,k} \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

De forma análoga denotando por  $\varphi_{i,j} = \varphi(x_i, y_j)$ . Obtemos um vetor coluna  $\mathcal{P}$  de ordem  $N^2 \times 1$  que representa a forma discreta do obstáculo.

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}^{[1]} \\ \vdots \\ \mathcal{P}^{[N]} \end{pmatrix}, \quad \text{onde } \mathcal{P}^{[k]} = \begin{pmatrix} \varphi_{1,k} \\ \vdots \\ \varphi_{N,k} \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

Fazendo  $X = U - \mathcal{P}$  e de (5.11), (5.13) e (5.15), obtemos um Problema de Complemen-

taridade Linear

$$\text{Achar } X \in \mathbb{R}^{N^2} : \begin{cases} X \geq O, & \text{em } \Omega_d. \\ -\mathcal{M}X - \mathcal{M}\mathcal{P} - \mathcal{F} \geq 0, & \text{em } \Omega_d. \\ X \bullet (-\mathcal{M}X - \mathcal{M}\mathcal{P} - \mathcal{F}) = 0, & \text{em } \Omega_d. \end{cases} \quad (5.16)$$

Esta formulação será a utilizada para resolver numericamente os problemas tipo obstáculo.

## 5.3 ESTUDO NUMÉRICO

Segundo [15], consideremos por  $U \in \mathbb{R}^n$  a solução do Problema do Obstáculo e por  $U^* \in \mathbb{R}^n$  a aproximação obtida pela técnica numérica utilizada. Seja a norma  $\|\cdot\|_2$ , dizemos que

$$\epsilon_{abs} = \|U^* - U\|_2$$

é o Erro Absoluto em  $U^*$ . Quando  $U \neq \mathbf{0}$ , dizemos que

$$\epsilon_{rel} = \frac{\|U^* - U\|_2}{\|U\|_2}$$

é o Erro Relativo em  $U^*$ . Estas definições serão utilizadas nesta seção.

### 5.3.1 Exemplos de problemas tipo obstáculo

#### A. Caso Unidimensional.

- **Exemplo A1.** Considere o domínio  $\Omega = ]-1, 1[$  e as funções  $f, \varphi$  e  $g$  como

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 32x^2, & \text{se } |x| \leq \frac{1}{4}. \\ -1, & \text{caso contrario.} \end{cases}, \quad \varphi(x) = -\frac{1}{18} \quad \text{e} \quad g(x) = 0.$$

Com estes dados a solução analítica para o Problema do Obstáculo é :

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{18} + \frac{1}{2}(x + \frac{2}{3})^2, & \text{se } -1 \leq x \leq -\frac{2}{3}. \\ \varphi(x), & \text{se } -\frac{2}{3} \leq x \leq -\frac{1}{3}. \\ -\frac{1}{18} + \frac{1}{2}(x + \frac{1}{3})^2, & \text{se } -\frac{1}{3} \leq x \leq -\frac{1}{4}. \\ -\frac{1}{32} + \frac{8x^2}{3}(x^2 - \frac{3}{16}), & \text{se } -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}. \\ -\frac{1}{18} + \frac{1}{2}(x - \frac{1}{3})^2, & \text{se } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{3}. \\ \varphi(x), & \text{se } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}. \\ -\frac{1}{18} + \frac{1}{2}(x - \frac{2}{3})^2, & \text{se } \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

- **Exemplo A2.** Considere o domínio  $\Omega = ]-1, 1[$  e as funções  $f, \varphi$  e  $g$  como:

$$f(x) = -8 \quad , \quad \varphi(x) = 1 - 4x^2 \quad \text{e} \quad g(x) = 0.$$

Com estes dados a solução analítica para o Problema do Obstáculo é :

$$u(x) = \begin{cases} 4x^2 + 16bx - (1 + 16b), & \text{se } -1 \leq x < -b \\ \varphi(x), & \text{se } -b \leq x \leq b. \\ 4x^2 - 16bx - (1 + 16b), & \text{se } b < x \leq 1. \end{cases}$$

onde  $b = 1 - \frac{\sqrt{6}}{4} \approx 0.3876276$ .

- **Exemplo A3.** Considere o domínio  $\Omega = ]-1, 1[$  e as funções  $f, \varphi$  e  $g$  como

$$f(x) = -8 \quad , \quad \varphi(x) = \begin{cases} 3 + 4x, & \text{se } x \leq 0. \\ 3 - 4x, & \text{se } x > 0. \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = 0.$$

Com estes dados a solução analítica para o Problema do Obstáculo é :

$$u(x) = \begin{cases} 4(x+1)^2, & \text{se } -1 \leq x < -\frac{1}{2}. \\ \varphi(x), & \text{se } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}. \\ 4(x-1)^2, & \text{se } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

- **Exemplo A4.** Considere o domínio  $\Omega = ]-1, 1[$  e as funções  $f, \varphi$  e  $g$  como

$$f(x) = -4.5 \quad , \quad \varphi(x) = \begin{cases} -3 - 3x, & \text{se } x \leq 0. \\ -3 + 3x, & \text{se } x > 0. \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = 0.$$

Com estes dados a solução analítica para o Problema do Obstáculo é :

$$u(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{se } -1 \leq x < -\frac{2}{3}. \\ \frac{9}{4}x^2 - 2, & \text{se } -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}. \\ \varphi(x), & \text{se } \frac{2}{3} < x \leq 1. \end{cases}$$

## B. Caso bidimensional.

- **Exemplo B1.** Considere o domínio  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$  e as funções  $f, \varphi$  e  $g$  como

$$f(x, y) = 0 \quad , \quad \varphi(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad |y - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{4}. \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

e

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 - (2x - 1)^2, & \text{se } y = 0, 1. \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

- **Exemplo B2.** Considere o domínio  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$  e as funções  $f, \varphi$  e  $g$  como

$$f(x, y) = 0 \quad , \quad g(x, y) = \begin{cases} 1 - (2x - 1)^2, & \text{se } y = 0, 1. \\ 0 & , \text{ caso contrario.} \end{cases}$$

e

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 400 \left(x - \frac{1}{4}\right) \left(x - \frac{3}{4}\right) \left(y - \frac{1}{4}\right) \left(y - \frac{3}{4}\right), & \text{se } |x - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{4} \text{ e } |y - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{4}. \\ 0 & , \text{ caso contrario.} \end{cases}$$

- **Exemplo B3.** Considere o domínio  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$  e as funções  $f, \varphi$  e  $g$  como

$$f(x, y) = -16x(1 - x)y(1 - y) \quad , \quad \varphi(x, y) = -0.008(1 + 2x + 2y) \quad \text{e} \quad g(x, y) = 0$$

- **Exemplo B4.** Considere o domínio  $\Omega = ]-2, 2[ \times ]-2, 2[$  e as funções  $f, \varphi$  e  $g$  como

$$f(x, y) = 0 \quad , \quad \varphi(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2}, & \text{se } x^2 + y^2 \leq 1. \\ -1 & , \text{ caso contrario.} \end{cases}$$

e

$$g(x, y) = -\frac{r^2}{\sqrt{1 - r^2}} \ln \left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} \right), \quad \text{onde } r = 0.6979651482.$$

- **Exemplo B5. (Problema do Dique Retangular).** Seja  $R = ]0, 6.1592[ \times ]0, 6.3014[$  e as funções  $f, \varphi$  e  $g$ , como  $f(x, y) = -1$  ,  $\varphi(x, y) = 0$  e

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(6.3014 - y)^2 + \frac{x}{12.3184}[(1.2359 - y)^2 - (6.3014 - y)^2] & , \text{se } y \leq 1.2359 \\ \frac{1}{2}(6.3014 - y)^2 - \frac{x}{12.3184}(6.3014 - y)^2 & , \text{se } y \geq 1.2359 \end{cases}$$

### 5.3.2 Resultados Numéricos

Consideramos parâmetros fixos para o Algoritmo FDA-NCP. O valor da constante que contribui com a direção de restauração é

$$\rho_0 = \alpha \min\{1, \phi(x^k)^{\beta-1}\}, \quad \text{onde } \alpha = 0.25 \quad \text{e} \quad \beta \in ]1, 2].$$

Os parâmetros associados à busca de Armijo são  $\eta = 0.4$  ,  $\nu = 0.8$  e o critério de parada é  $\phi(x^k) \leq 10^{-7}$ . Para o parâmetro que influencia na taxa de convergência consideramos  $\beta = 1.1$  e  $\beta = 2$ .

Para o caso unidimensional, os resultados numéricos são expressados via o erro absoluto. Para o caso bidimensional, os resultados numéricos são expressados segundo o numero de iterações e o numero de buscas de Armijo.

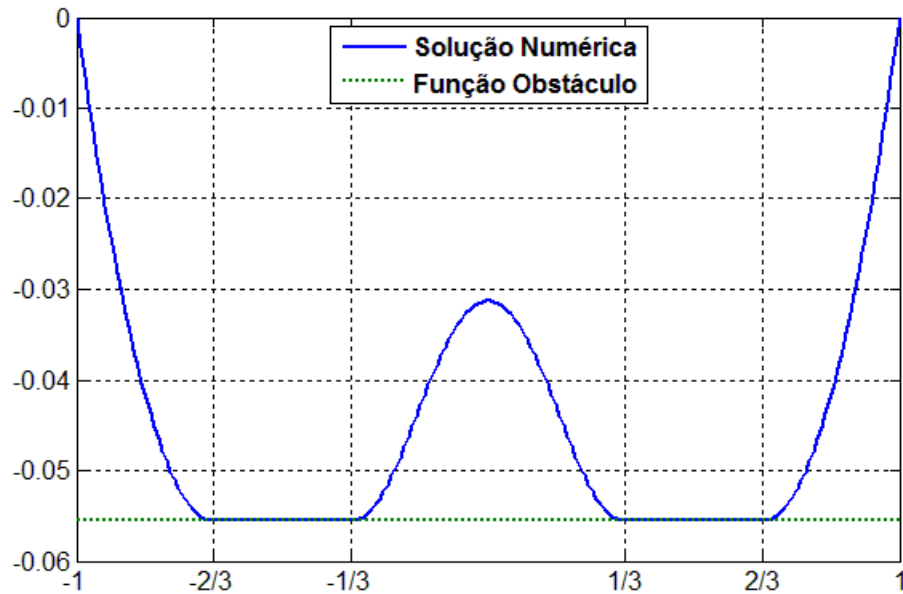


Figura 16: Solução numérica do Exemplo A1 para  $N = 200$ .

Como pode ser visto na 16, temos uma boa aproximação para o Exemplo A1 quando  $N = 200$ , ou seja quando  $h = 0.01$ . Este fato é verificado na Tabela 5.3.2, já que o erro absoluto  $\|U - U^*\|_2$  decresce quando aumentamos o valor de  $N$  em cada caso. Observe também que não existe muita diferença entre os erros absolutos obtidos em cada caso.

$\beta$	1.1	2
$N$	$\ U - U^*\ _2$	$\ U - U^*\ _2$
100	$2.6364 \times 10^{-4}$	$2.6367 \times 10^{-4}$
200	$7.3092 \times 10^{-5}$	$7.3078 \times 10^{-5}$
400	$2.7128 \times 10^{-5}$	$2.7103 \times 10^{-5}$
800	$9.3539 \times 10^{-6}$	$9.3196 \times 10^{-6}$
1600	$3.3470 \times 10^{-6}$	$3.2980 \times 10^{-6}$
3200	$1.1740 \times 10^{-6}$	$1.1510 \times 10^{-6}$

Tabela 1: Resultados numéricos para o Exemplo A1.

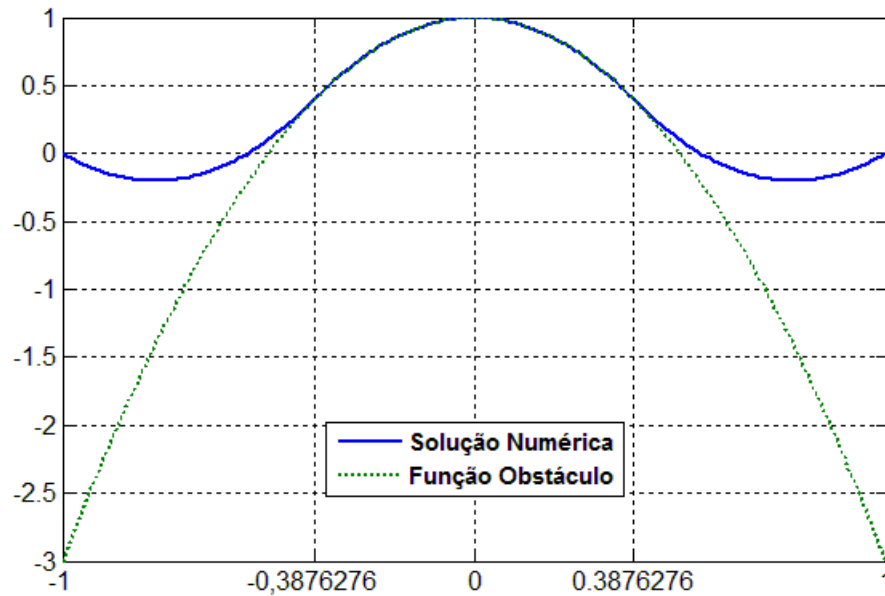


Figura 17: Solução numérica do Exemplo A2 para  $N = 200$ .

Como pode ser visto na Figura 17, temos uma boa aproximação para o Exemplo A2 quando  $N = 200$ , ou seja quando  $h = 0.01$ . Este fato é verificado na Tabela 2, já que o erro absoluto  $\|U - U^*\|_2$  decresce quando aumentamos o valor de  $N$ , para cada caso que toma o valor de  $\beta$ . Observe também que só existe diferença entre os erros absolutos em cada caso a partir de  $N=800$ .

$\beta$	1.1	2
$N$	$\ U - U^*\ _2$	$\ U - U^*\ _2$
100	$2.1000 \times 10^{-3}$	$2.1000 \times 10^{-3}$
200	$2.9067 \times 10^{-4}$	$2.9067 \times 10^{-4}$
400	$4.0845 \times 10^{-4}$	$4.0845 \times 10^{-4}$
800	$1.6578 \times 10^{-6}$	$1.6548 \times 10^{-6}$
1600	$2.3476 \times 10^{-6}$	$2.3448 \times 10^{-6}$
3200	$3.3194 \times 10^{-6}$	$3.3202 \times 10^{-6}$

Tabela 2: Resultados numéricos para o Exemplo A2.

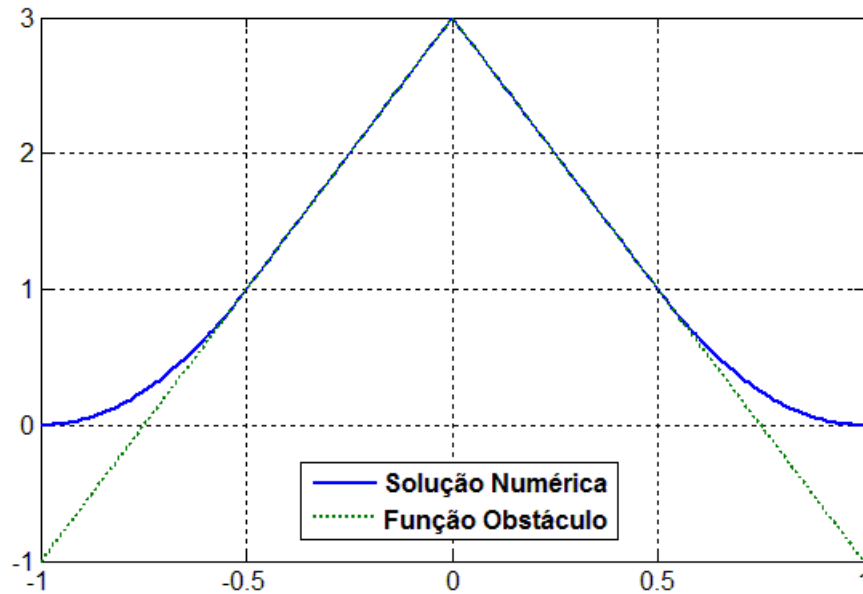


Figura 18: Solução numérica do Exemplo A3 para  $N = 200$ .

Da Figura 18, notamos que a aproximação para o Exemplo A3 é muito boa quando  $N = 200$ , ou seja quando  $h = 0.01$ . Pelo visto na Tabela 3, observamos que os valores do erro absoluto são muito pequenos (Por exemplo  $\|U - U^*\|_2 \simeq 2 \times 10^{-11}$  quando  $N = 200$ ) e aumentam quando o valor de  $N > 200$ . Isto acontece pois o erro absoluto esta muito proximo do erro da maquina.

$\beta$	1.1	2
$N$	$\ U - U^*\ _2$	$\ U - U^*\ _2$
100	$9.5043 \times 10^{-11}$	$1.3392 \times 10^{-9}$
200	$2.0323 \times 10^{-11}$	$2.1712 \times 10^{-9}$
400	$6.0998 \times 10^{-11}$	$3.8203 \times 10^{-9}$
800	$4.4034 \times 10^{-10}$	$1.0751 \times 10^{-8}$
1600	$1.6970 \times 10^{-9}$	$6.5375 \times 10^{-9}$
3200	$2.8341 \times 10^{-9}$	$3.9220 \times 10^{-9}$

Tabela 3: Resultados numéricos para o Exemplo A3.

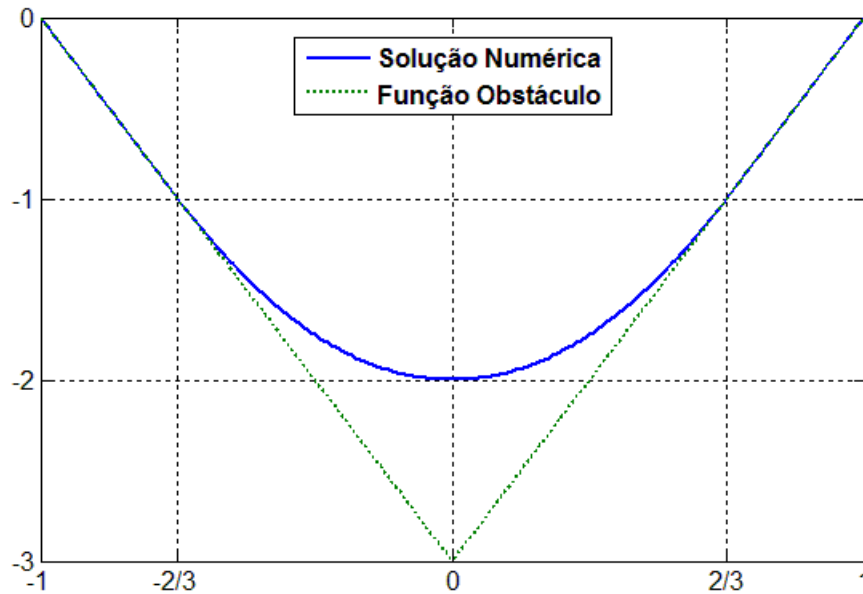


Figura 19: Solução numérica do Exemplo A4 para  $N = 200$ .

Como pode ser visto na Figura 19, temos uma boa aproximação para o Exemplo A2 quando  $N = 200$ , ou seja quando  $h = 0.01$ . Este fato é verificado na Tabela 4, já que o erro absoluto  $\|U - U^*\|_2$  decresce quando aumentamos o valor de  $N$ , para cada caso que toma o valor de  $\beta$ . Observe também não existe muita diferença entre os erros absolutos obtidos para cada valor de  $N$ .

$\beta$	1.1	2
$N$	$\ U - U^*\ _2$	$\ U - U^*\ _2$
100	$8.1854 \times 10^{-4}$	$8.1853 \times 10^{-4}$
200	$2.8831 \times 10^{-4}$	$2.8831 \times 10^{-4}$
400	$1.0213 \times 10^{-4}$	$1.0212 \times 10^{-4}$
800	$3.6068 \times 10^{-5}$	$3.6045 \times 10^{-5}$
1600	$1.2748 \times 10^{-5}$	$1.2741 \times 10^{-5}$
3200	$4.4887 \times 10^{-6}$	$4.4902 \times 10^{-6}$

Tabela 4: Resultados numéricos para o Exemplo A4.



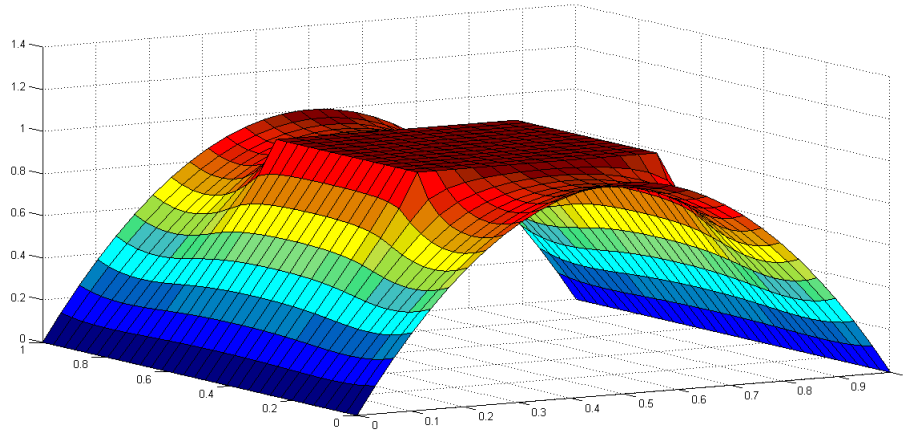


Figura 20: Solução numérica do Exemplo B1 para  $N^2 = 900$ .

Na Figura 20, temos a solução numérica do Exemplo B1 para  $N^2 = 900$ , ou seja quando temos uma malha  $30 \times 30$ . Como pode ser visto na Tabela 5 temos que quando aumenta o valor de  $N^2$  aumenta o numero de iterações e o numero de buscas. Quando  $\beta = 2$ , temos que o algoritmo FDA-NCP, realiza muitas iterações e buscas lineares.

$\beta$	1.1	2	1.1	2
$N^2$	Iterações	Iterações	Busca Linear	Busca Linear
400	23	24	0	25
900	24	62	1	998
1600	25	*	6	*
2500	26	*	11	*
3600	27	*	13	*

Tabela 5: Resultados numéricos para o Exemplo B1.

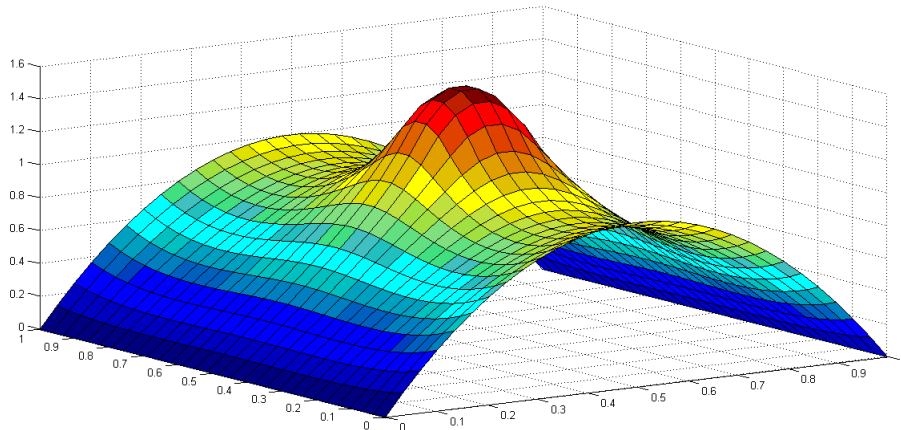


Figura 21: Solução numérica do Exemplo B2 para  $N^2 = 900$ .

Na Figura 21, temos a solução numérica do Exemplo B2 para  $N^2 = 900$ , ou seja quando temos uma malha  $30 \times 30$ . Como pode ser visto na Tabela 6 temos que quando aumenta o valor de  $N^2$  aumenta o numero de Iterações e o numero de buscas. Notemos que tomando  $\beta = 1$ , temos só uma busca linear e tomando  $\beta = 2$ , o numero de buscas aumentam quando aumentamos o valor de  $N^2$ .

$\beta$	1.1	2	1.1	2
$N^2$	Iterações	Iterações	Busca Linear	Busca Linear
400	21	19	1	17
900	22	20	1	20
1600	22	21	1	22
2500	22	21	1	22
3600	22	22	1	24

Tabela 6: Resultados numéricos para o Exemplo B2.

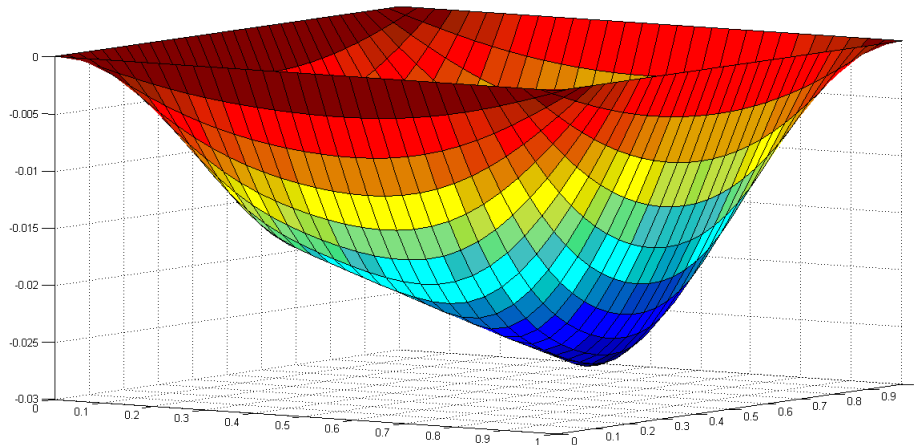


Figura 22: Solução numérica do Exemplo B3 para  $N^2 = 900$ .

Na Figura 22, temos a solução numérica do Exemplo B3 para  $N^2 = 900$ , ou seja quando temos uma malha  $30 \times 30$ . Como pode ser visto na Tabela 7 temos que quando aumenta o valor de  $N^2$  aumenta o numero de Iterações. Notemos que não temos buscas lineares para o caso  $\beta = 1.1$  e para o caso  $\beta = 2$ , temos que as buscas lineares aumentam quando aumentamos o valor de  $N^2$ .

$\beta$	1.1	2	1.1	2
$N^2$	Iterações	Iterações	Busca Linear	Busca Linear
400	22	21	0	18
900	23	22	0	20
1600	23	23	0	22
2500	23	23	0	22
3600	23	23	0	23

Tabela 7: Resultados numéricos para o Exemplo B3.

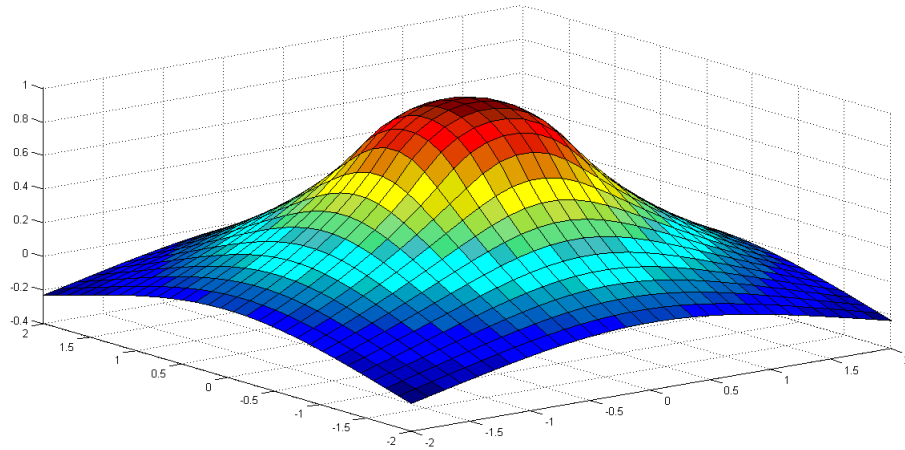


Figura 23: Solução numérica do Exemplo B4 para  $N^2 = 900$ .

Na Figura 23, temos a solução numérica do Exemplo B4 para  $N^2 = 900$ , ou seja quando temos uma malha  $30 \times 30$ . Como pode ser visto na Tabela 8 temos que quando aumenta o valor de  $N^2$  aumenta o numero de Iterações. Notemos que não temos buscas lineares para o caso  $\beta = 1.1$  e para o caso  $\beta = 2$ , temos que as buscas lineares aumentam quando aumentamos o valor de  $N^2$ .

$\beta$	1.1	2	1.1	2
$N^2$	Iterações	Iterações	B. Linear	B. Linear
100	22	20	0	13
400	23	21	0	16
900	24	22	0	18
1600	24	22	0	19
2500	24	23	0	20

Tabela 8: Resultados numéricos para o Exemplo B4.

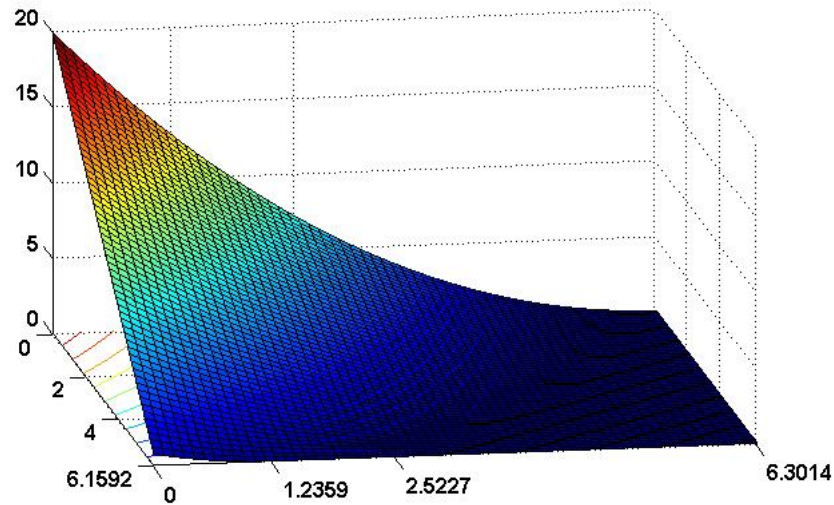


Figura 24: Solução numérica do Exemplo B5 para  $N^2 = 1600$ .

Na Figura 24, temos a solução numérica do Exemplo B5 para  $N^2 = 1600$ , ou seja quando temos uma malha  $40 \times 40$ . Como pode ser visto na Tabela 9 temos que quando aumenta o valor de  $N^2$  aumenta o numero de Iterações. Notemos que quase não tem buscas lineares quando  $\beta = 1.1$ . Quando  $\beta = 2$ , o Algoritmo FDA-NCP realiza muitas iterações e buscas lineares.

$\beta$	1.1	2	1.1	2
$N^2$	Iterações	Iterações	B. Linear	B. Linear
100	23	21	0	12
400	24	22	0	17
900	24	25	0	45
1600	25	*	1	*
2500	24	*	1	*

Tabela 9: Resultados numéricos para o Exemplo B5.

Este problema é um caso para o Problema do Dique Retangular, logo dos resultados tomando  $N^2 = 2500$ , tomamos os valores da matriz entre  $10^{-5}$  e  $10^{-6}$  para obter a curva que representa a fronteira livre, representado na Figura 25.

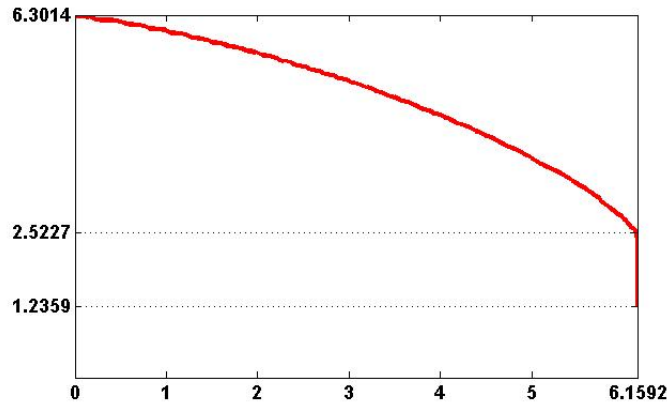


Figura 25: Curva de interface obtida numericamente.

### 5.3.3 Análise de Erros

Para o caso unidimensional consideremos  $N$  como o numero de partições de comprimento  $h = \frac{2}{N}$  no intervalo  $] - 1, 1[$  e o Problema de Poisson em uma dimensão.

$$\begin{cases} -U''(x) = f \\ U(-1) = U(1) = 0 \end{cases}$$

Segundo [2], na discretização de  $U''(x_0)$  via diferença centrada, temos pela aproximação de Taylor

$$U''(x_0) = \frac{U(x_0 + h) - 2U(x_0) + U(x_0 - h)}{h^2} - \frac{2}{4!}U^{(4)}(x_0)h^2 - \frac{2}{5!}U^{(6)}(x_0)h^4 - \dots$$

o que fornece uma aproximação para  $U''(x_0)$ , denotada por  $U_h$  da forma :

$$U_h = \frac{U(x_0 + h) - 2U(x_0) + U(x_0 - h)}{h^2}.$$

com erro  $\epsilon = -\frac{1}{12}U^{(4)}(\xi)h^2 = \mathcal{O}(h^2)$ , onde  $x_0 - h \leq \xi \leq x_0 + h$ . Desta forma temos que

$$U = U_h + \mathcal{O}(h^2).$$

De forma análoga, temos  $U = U_{\frac{h}{2}} + \mathcal{O}((\frac{h}{2})^2) = U_{\frac{h}{2}} + \frac{1}{4}\mathcal{O}(h^2)$ . Definindo o erro relativo com comprimento  $h$  como  $E_h = \|U_h - U_{\frac{h}{2}}\|_2$ , pelas relações obtidas acima, temos

$$E_h = \|U_h - U_{\frac{h}{2}}\| = \frac{3}{4}\mathcal{O}(h^2).$$

Seguindo o mesmo procedimento, obtemos

$$E_{\frac{h}{2}} = \|U_{\frac{h}{2}} - U_{\frac{h}{4}}\| = \frac{3}{16}\mathcal{O}(h^2) \quad , \quad E_{\frac{h}{4}} = \|U_{\frac{h}{4}} - U_{\frac{h}{8}}\| = \frac{3}{64}\mathcal{O}(h^2) \quad , \quad \dots$$

Observemos que os quocientes dos erros relativos, satisfazem

$$\frac{E_h}{E_{\frac{h}{2}}} = 4 \quad , \quad \frac{E_{\frac{h}{2}}}{E_{\frac{h}{4}}} = 4 \quad , \quad \frac{E_{\frac{h}{4}}}{E_{\frac{h}{8}}} = 4 \quad , \dots$$

Tomando  $N = 20$ , temos 21 pontos no intervalo  $[-1, 1]$ , cuja distancia entre eles é  $h = 0.1$ . Notemos da Tabela 11 que os valores dos quocientes no Exemplo A1 é boa, para o Exemplo A2 a performance dos erros é deficiente, isto dificulta que os quocientes não sejam próximos ao valor esperado. O Exemplo A3 não apresenta uma boa aproximação pois os erros estão muito próximos ao erro da maquina. O contrario acontece com o Exemplo A4, onde os valores dos quocientes são próximos a 4.

$h = 0.1$	A1	A2	A3	A4
$E_h = \ U_h - U_{\frac{h}{2}}\ $	$2.80 \times 10^{-3}$	$5.98 \times 10^{-9}$	$2.97 \times 10^{-9}$	$6.80 \times 10^{-3}$
$E_{\frac{h}{2}} = \ U_{\frac{h}{2}} - U_{\frac{h}{4}}\ $	$5.62 \times 10^{-4}$	$1.93 \times 10^{-5}$	$1.85 \times 10^{-9}$	$1.70 \times 10^{-3}$
$E_{\frac{h}{4}} = \ U_{\frac{h}{4}} - U_{\frac{h}{8}}\ $	$9.25 \times 10^{-5}$	$2.70 \times 10^{-3}$	$6.96 \times 10^{-10}$	$4.23 \times 10^{-4}$
$E_{\frac{h}{8}} = \ U_{\frac{h}{8}} - U_{\frac{h}{16}}\ $	$2.86 \times 10^{-5}$	$2.51 \times 10^{-9}$	$9.24 \times 10^{-9}$	$1.06 \times 10^{-4}$

Tabela 10: Erros relativos do caso unidimensional para  $h = 0.1$ .

$h = 0.1$	A1	A2	A3	A4
$E_h/E_{\frac{h}{2}}$	4.98	*	1.61	4
$E_{\frac{h}{2}}/E_{\frac{h}{4}}$	6.07	*	2.65	4.01
$E_{\frac{h}{4}}/E_{\frac{h}{8}}$	3.23	*	*	3.99

Tabela 11: Quocientes relativos para  $h = 0.1$ .

Tomando  $N = 25$ , temos 26 pontos no intervalo  $[-1, 1]$ . Notemos da Tabela 13 que os valores dos quocientes no Exemplo A1 é boa. Para o Exemplo A2 conseguimos melhorar os valores dos quocientes, pois esta vez for escolhidos uma quantidade par de pontos evitando assim a simétrica dos resultados. Para o Exemplo A3 ainda temos os mesmos inconvenientes que no caso anterior. Para o Exemplo A4 temos os resultados esperados para os dois últimos quocientes relativos.

$h = 0.08$	A1	A2	A3	A4
$E_h = \ U_h - U_{\frac{h}{2}}\ $	$1.91 \times 10^{-3}$	$1.00 \times 10^{-2}$	$2.76 \times 10^{-4}$	$1.57 \times 10^{-8}$
$E_{\frac{h}{2}} = \ U_{\frac{h}{2}} - U_{\frac{h}{4}}\ $	$2.47 \times 10^{-4}$	$1.73 \times 10^{-3}$	$3.32 \times 10^{-4}$	$1.20 \times 10^{-3}$
$E_{\frac{h}{4}} = \ U_{\frac{h}{4}} - U_{\frac{h}{8}}\ $	$1.37 \times 10^{-4}$	$9.06 \times 10^{-4}$	$3.91 \times 10^{-10}$	$3.00 \times 10^{-4}$
$E_{\frac{h}{8}} = \ U_{\frac{h}{8}} - U_{\frac{h}{16}}\ $	$1.86 \times 10^{-5}$	$4.45 \times 10^{-8}$	$5.25 \times 10^{-10}$	$7.50 \times 10^{-5}$

Tabela 12: Erros relativos do caso unidimensional para  $h = 0.08$ .

$h = 0.08$	A1	A2	A3	A4
$E_h/E_{\frac{h}{2}}$	7,73	5,78	*	*
$E_{\frac{h}{2}}/E_{\frac{h}{4}}$	1,80	1,91	*	4
$E_{\frac{h}{4}}/E_{\frac{h}{8}}$	7,36	*	*	4

Tabela 13: Quocientes relativos para  $h = 0.08$ .

Para o caso bidimensional o procedimento é análogo. Pelo visto em [2], temos

$$U = U_{\Delta x, \Delta y} + \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y^2),$$

e da mesma forma  $U = U_{\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta y}{2}} + \frac{1}{4}\mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y^2)$ . Assim como no caso anterior, definamos

$$E_{\Delta x, \Delta y} = \|U_{\Delta x, \Delta y} - U_{\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta y}{2}}\| = \frac{3}{4}\mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y^2);$$

$$E_{\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta y}{2}} = \|U_{\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta y}{2}} - U_{\frac{\Delta x}{4}, \frac{\Delta y}{4}}\| = \frac{3}{16}\mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y^2);$$

$$E_{\frac{\Delta x}{4}, \frac{\Delta y}{4}} = \|U_{\frac{\Delta x}{4}, \frac{\Delta y}{4}} - U_{\frac{\Delta x}{8}, \frac{\Delta y}{8}}\| = \frac{3}{64}\mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta y^2);$$

e assim sucessivamente.

Tomando  $N = 8$  nos exemplos B1, B2, B3 e B4, já que os domínios são quadrados, então  $\Delta x = \Delta y$  para cada caso. Isto indica que são escolhidos 81 pontos para fazer a análise de erros. A Tabela 14 mostra os resultados dos erros relativos e a Tabela 15 os quocientes relativos respectivos. Para o Exemplo B5, que é o Problema do Dique Retangular, tomaremos distintos valores para  $N$ . Os valores são  $N = 8$ ,  $N = 10$  e  $N = 12$ , desta forma o numero de pontos escolhidos na malha são 81, 121 e 169.



	B1 $\Delta x = \Delta y = 0.125$	B2 $\Delta x = \Delta y = 0.125$	B3 $\Delta x = \Delta y = 0.125$	B4 $\Delta x = \Delta y = 0.50$
$E_{\Delta x, \Delta y}$	$4.21 \times 10^{-2}$	0.1092	$1.11 \times 10^{-3}$	0.2481
$E_{\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta y}{2}}$	$1.00 \times 10^{-2}$	0.0501	$4.85 \times 10^{-4}$	0.0213
$E_{\frac{\Delta x}{4}, \frac{\Delta y}{4}}$	$6.30 \times 10^{-3}$	0.0092	$6.77 \times 10^{-5}$	0.0040

Tabela 14: Erros relativos para os Exemplos B1,B2, B3 e B4.

	B1 $\Delta x = \Delta y = 0.125$	B2 $\Delta x = \Delta y = 0.125$	B3 $\Delta x = \Delta y = 0.5$	B4 $\Delta x = \Delta y = 0.125$
$\frac{E_{\Delta x, \Delta y}}{E_{\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta y}{2}}}$	4.21	2.17	2.28	11.64
$\frac{E_{\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta y}{2}}}{E_{\frac{\Delta x}{4}, \frac{\Delta y}{4}}}$	1.58	5.44	7.16	5.32

Tabela 15: Quocientes relativos para os Exemplos B1,B2, B3 e B4.

	$N = 8$	$N = 10$	$N = 12$
$E_{\Delta x, \Delta y}$	2.6407	2.3307	2.1142
$E_{\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta y}{2}}$	0.9715	0.8698	0.7944
$E_{\frac{\Delta x}{4}, \frac{\Delta y}{4}}$	0.4626	0.4184	0.3947

Tabela 16: Erros relativos para o Exemplos B5.

	B1	B2	B3
$\frac{E_{\Delta x, \Delta y}}{E_{\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta y}{2}}}$	2.78	2.67	2.66
$\frac{E_{\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta y}{2}}}{E_{\frac{\Delta x}{4}, \frac{\Delta y}{4}}}$	2.10	2.08	2.06

Tabela 17: Quocientes relativos para o Exemplos B5.

## **6 CONCLUSÕES**

Neste trabalho mostramos os resultados de existência e unicidade da solução de uma inequação variacional e sua equivalência com um problema de minimização, quando a forma bilinear associada é simétrica.

Usando estes resultados garantimos a existência e unicidade da solução fraca para o Problema do Obstáculo. Logo usando um método de penalização e os resultados de regularidade para EDP's elípticas, mostramos que a solução fraca é forte e viceversa. Portanto quando as condições de regularidade do problema são satisfeitas, podemos resolver uma inequação variacional, um problema de minimização ou um Problema de Complementaridade. Isto permite aplicar o Algoritmo FDA-NCP para resolver numericamente estes problemas de complementaridade associados.

Também vimos que o Problema do Dique Retangular pode ser escrito como um Problema do Obstáculo que por sua vez reescrito como um Problema de Complementaridade nos permite aplicar o Algoritmo FDA-NCP, para obtermos a solução numérica do Problema do Dique Retangular.

# ***REFERÊNCIAS***

- [1] BAIOCCHI, C. ; CAPELO C. *Variational and Quasivariational Inequalities Applications to Free Boundary Problems*. Wiley, 1984.
- [2] BIEZUNER, R. J. *Notas de Aula de Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Parciais Elípticas*. Belo Horizonte: UFMG, 2007.
- [3] BREZIS, H. *Functional Analysis. Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. New York: Springer-Verlag, 2010.
- [4] CHEN, C.; MANGASARIAN, O. L. *A class of smothing functions for nonlinear and mixed complementarity problem*. *Comput. Optim. Appl.*, 1996.
- [5] COMINCIOLI, V. *On some oblique derivative problem arising in the fluid flow in porous media*. *Appl. Math*, 1975.
- [6] CRANK, J. *Free and Moving Boundary Problems*. New York: Oxford University Press, 1984.
- [7] EKELAND, I. ; TERMAN, R. *Convex Analysis and Variational Problems*. Amsterdam: North-Holland, 1976.
- [8] ELLIOT, C. M. ; OCKENDON J. R. *Weak and Variational Methods for Moving Boundary Problems*. Massachusetts: Pitman Publishing, 1982.
- [9] FERRIS, M. C. : KANSOV, C. *Complementarity and related problems: A survey*. In *P. M. Pardalos and M. G. C. Resende, editors, Handbook of Applid Optimization*. New York: Oxford University Press, 2002.
- [10] FICHERA, G. *Problemi elastostatici com vincoli unilaterali: Il problema de Signorini con ambigue conizione al contorno*. *Mem. Accad. Naz. Lincei*, 1964.
- [11] FILHO, O. P. *Modelo de Infiltração em Barragem com Fundo Semi-impermeavel*. Tese de Doutorado. COPPE,UFRJ, Rio de Janeiro, 2006.
- [12] FRIEDMAN, A. *Free Boundary Problems in Science and Techonology*. Notice of the AMS, 2000.
- [13] GEIGER, C. ; KANZOW, C. *On the Resolution of Monotone Complementarity Problems*. *Comput. Optim. Appl*, 1996.
- [14] GOWLINSKI, R. *Numerical Methods for Nonlinear Variatinal Problems*. Springer-Verlag, 2008.
- [15] GOLUB, G. H. ; VAN LOAN, C. F. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 1996.

- [16] HARTAM, G. J. ; STAMPACCHIA, G. *On Some non Linear Elliptic Differential Functional Equations*. Acta Math. 115, 1966.
- [17] HERSKOVITS, J. ; MAZORCHE, S. *A Feasible Directions Algorithm for Nonlinear Complementarity Problem and Applications in Mechanics*. Struct Multidisc Optim, 2009.
- [18] IZMAILOV, A. ; SOLODOV, M. V. *Otimização-Volume 2, Métodos Computacionais*. IMPA, 2012.
- [19] KANSOV, C. *Nonlinear complementarity as unconstrained optimization*. JOTA, 88 , 1996.
- [20] KINDERLEHER, D. ; STAMPACCHIA, G. *An Introduction to Variational Inequalities and their Applications*. New York: Oxford University Press, 1984.
- [21] LEVEQUE, R. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. Washington: University of Washington, 2007.
- [22] LIONS, J. L. ; STAMPACCHIA, G. *Variational Inequalities*. Comm. Pure Appl. Math 20, 1967.
- [23] LIONS, J. L. *Sur quelques questions d'analyse de mécanique et de contrôle optimal*. Montreal: Les Presses de l'Université de Montréal, 1976.
- [24] MANGASARIAN, O. L. ; SOLODOV, M. V. *Nonlinear complementarity as unconstrained and constrained minimization*. Math. Programming (Serie B), 62, 1993.
- [25] MANGASARIAN, O. L. *Equivalence of the complementarity problem to a system of nonlinear equations*. SIAM J. Appl. Math, 31, 1976.
- [26] MAZORCHE, S. R. *Algoritmos para Problemas de Complementaridade não Linear*. Tese de Doutorado. COPPE, UFRJ, Rio de Janeiro, 2007.
- [27] MAZORCHE, S.R. ; HERSKOVITS, J. *A new interior point algorithm for nonlinear complementarity problems*. In: Proceedings of WCSMO6 - Sixth World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization (May-June, 13-14, 2005). Rio de Janeiro, Brasil
- [28] RODRIGUES, J. F. *Obstacle Problems in Mathematical Physics*. North Holland Mathematics Studies, 1987.
- [29] STETTER, H. J. *Analysis of Discretization Methods for Ordinary Differential Equations*. New York: Springer-Verlag, 1973.
- [30] SOLODOV, M. V. ; SVAITER, B. F. *A New Projection Method for Variational Inequality Problem*. SIAM Journal on Control and Optimization V. 37, 1999.