Universidade Federal de Juiz de Fora

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Anderson Ferrari

Aplicação do Número "e" e do Logaritmo Natural em Fenômenos da Natureza

Juiz de Fora

2013

Anderson Ferrari

Aplicação do Número "e" e do Logaritmo Natural em Fenômenos da Natureza

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: José Barbosa Gomes

Juiz de Fora

2013

Ferrari, Anderson.

Aplicação do Número "e" e do Logarimo Natural em Fenômenos
da Natureza / Anderson Ferrari. - 2013.
44f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)
Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

1. Exponenciais. 2. Logaritmos Naturais. 3. Aplicações. I. Título.

CDU 51

Anderson Ferrari

Aplicação do Número "e" e do Logaritmo Natural em Fenômenos da Natureza

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal de Juiz de Fora.

Prof. Dr. José Barbosa Gomes
(Orientador)
PROFMAT
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

Prof[a]. Dr[a]. Sofia Carolina da Costa Melo
PROFMAT
UFJF

Prof. Dr. Alexandre Miranda Alves
UFV

Juiz de Fora, 22 de março de 2013.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pois sem Ele nada seria possível.

Aos familiares e amigos, pelo apoio constante.

Aos amigos do PROFMAT, pelo carinho e apoio nos momentos mais difíceis.

À CAPES pela oportunidade a mim concedida, pelas bolsas de estudo recebidas e apoio ao magnífico projeto.

Aos professores do PROFMAT, pelo empenho e dedicação.

RESUMO

Este trabalho versa sobre uma proposta de aprofundamento na abordagem e aplicação de Logaritmos Naturais para alunos do ensino médio, de como são deduzidas as expressões matemáticas (fórmulas) que modelam os fenômenos como, por exemplo, crescimento e decrescimento de uma população de bactérias e crescimento e decaimento radioativo. Inicialmente, faremos uma revisão dos tópicos necessários.

Palavras-Chave: Exponenciais. Logaritmos Naturais. Aplicações.

ABSTRACT

This paper discusses a proposal for deepening the approach and application of Natural Logarithms for high school students, how the Mathematical expressions are deduced (formulas) shaping phenomena such as, for example, growth and decrease of a population of bacteria and growth and radioactive decay. Initially, we will revise the necessary topics.

Key-words: Exponentials. Natural Logarithms. Applications.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Os logaritmos naturais são de grande importância na Matemática e possuem vasta aplicação em fenômenos na natureza.

Em grande parte dos livros didáticos, os logaritmos naturais são tratados de maneira superficial, levando o aluno a apenas aplicar fórmulas previamente determinadas e realizar cálculos que, para ele, não possuem muito sentido.

Enfatizamos ainda, alguns erros mais comuns cometidos por alunos na interpretação de problemas envolvendo o tema, ou seja, entendem que alguns fenômenos ocorrem de maneira linear, o que procuraremos desfazer mostrando exemplos contraditórios.

Não deixamos, porém, de tratar o assunto com o devido rigor matemático, apresentando definições formais de logaritmos naturais, taxas de variação, derivadas e equações diferenciais. Algumas dessas definições, como taxa de variação e derivadas, serão apresentadas aos alunos de forma mais intuitiva, pois ainda não possuem conhecimento matemático suficiente para uma apresentação formal.

A motivação para este trabalho decorre no que foi exposto nos parágrafos acima.

A proposta aqui apresentada é a de dar um tratamento mais profundo ao tema, fazendo com que o aluno tenha uma ideia mais sólida de Taxa de Variação para poder entender a modelagem de alguns problemas como, por exemplo, crescimento e decrescimento de uma população de bactérias, crescimento e decaimento radioativo, dentre outros.

O nosso público alvo é formado pelos alunos do ensino médio.

No capítulo 2 definimos logaritmo natural através da área limitada, no primeiro quadrante, por um intervalo abaixo do ramo da hipérbole $y = \frac{1}{x}$, no primeiro quadrante.

No capítulo 3 damos ênfase à Taxa de Variação, definindo previamente tangente à uma curva em um ponto e, logo após, derivadas, com ênfase na Taxa de Variação Instantânea.

No capítulo 4 tratamos das Equações Diferenciais que servirão de suporte para conclusões futuras que levarão às expressões envolvendo o número e e logaritmos naturais.

No capítulo 5 faremos as aplicações dos logaritmos naturais em alguns fenômenos da natureza como Decaimento Radioativo e Crescimento ou Redução na população de bactérias. Ainda neste capítulo, será colocada uma sugestão para que possamos abordar o tema Logaritmos Naturais com mais profundidade.

1 OBJETIVOS, PÚBLICO ALVO E DIFICULDADES PREVISTAS

Este trabalho tem por objetivo tratar do aprofundamento do estudo dos logaritmos naturais no ensino médio e por consequência dar subsídios ao professor para que possa fazer com que os alunos entendam as expressões matemáticas que dizem respeito aos logaritmos naturais apresentadas nos livros didáticos. Consideramos que devemos ir além de simples substituições em fórmulas mas entender por que elas têm aquela forma de apresentação.

As barreiras que por ventura apareçam, podem vir da dificuldade dos alunos de entenderem conceitos como taxa de variação e saberem fazer a distinção em situações que precisaremos dela. Por exemplo, no crescimento da população de bactérias o aluno pode confundir taxa de variação da quantidade com quantidade final. Além das dificuldades dos alunos, podem existir as difuculdades dadas pelo tratamento superficial nos livros didáticos e do próprio professor.

O público alvo de aplicação deste trabalho são os professores que atuam nas séries onde é abordado o assunto logaritmos, comumente na primeira ou segunda série do ensino médio.

2 NOTA HISTÓRICA

Esta seção está baseada na referência [2].

John Napier (ou Neper), não era matemático profissional. Era um proprietário escocês, Barão de Murchiston, que administrava suas grandes propriedades e escrevia sobre vários assuntos. Ele só se interessava por certos assuntos da matemática, particularmente os que se referiam a computação e trigonometria.

Napier conta que trabalhou em sua invenção dos logaritmos durante vinte anos antes de publicar seus resultados, o que colocaria a origem de suas ideias em 1594, aproximadamente. Ele pensava nas sequências, publicadas vez por outra, de potências sucessivas de um dado número como na *Arithmetica integra* de Stifel cinquenta anos antes e como nas obras de Arquimedes. Em tais sequencias era evidente que as somas e diferenças dos índices das potências correspondia a produtos e quocientes das próprias potências; mas uma sequência de potências inteiras de uma base, tal como dois, não podia ser usada para computações porque as grandes lacunas entre termos sucessivos tornavam a interpolação demasiado imprecisa.

A chave da obra de Napier pode ser explicada muito simplesmente. Para conservar próximos os termos numa progressão geométrica de potências inteiras de um número dado, é necessário tomar dado muito próximo de um. Napier por isso escolheu como seu número dado $1-10^7$ (ou 0,9999999). Assim os termos na progressão de potências crescentes ficam realmente próximos próximos demais, na verdade. Para chegar a um equilíbrio e evitar decimais Napier multiplicou cada potência por 10^7. Isto é $N = 10^7.(1-\frac{1}{10^7})^L$, então L é o logaritmo de Napier do número N. Assim seu logaritmo de 10^7 é 0, seu logaritmo de $10^7.(1-\frac{1}{10^7}) = 9999999$ é 1 e assim por diante. Dividindo seus números e logaritmos por 10^7 teríamos virtualmente um sistema de logaritmos de base $\frac{1}{e}$, pois $(1-\frac{1}{10^7})^{10^7}$ fica próximo de $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$. Deve-se lembrar, no entanto, que Napier não tinha o conceito de base de um sistema de logaritmos, pois sua definição era diferente da nossa.

Napier não pensou numa base para seu sistema, mas suas tabelas eram compiladas por multiplicações repetidas, equivalentes a potências de 0,9999999. Evidentemente a potência (ou número) decresce à medida que o índice (ou logaritmo) cresce. Isso é de se esperar, pois ele usava essencialmente a base $\frac{1}{e}$ que é menor que 1.

A publicação em 1614 do sistema de logaritmos teve sucesso imediato, e entre seus admiradores mais entusiásticos estava Henry Briggs, o primeiro *Savilian professor* de geometria em Oxford. Em 1615 ele visitou Napier em sua casa na Escócia, e lá eles discutiram possíveis modificações no método dos logaritmos. Briggs propôs o uso de potências de dez e Napier disse que tinha pensado nisso e concordava. Napier uma vez tinha proposto uma tabela usando $\log 1 = 0$ e $\log 10 = 10^{10}$ (para evitar frações). Os dois homens finalmente concordaram em que o logaritmo de um deveria ser zero e que o logaritmo de dez deveria ser um. Mas Napier já não tinha a energia suficiente para por em prática essas ideias. Morreu em 1617.

Napier foi de fato o primeiro a publicar uma obra sobre logaritmos, mas ideias muito semelhantes foram desenvolvidas independentemente na Suíça por Jobst Bürgi mais ou menos ao mesmo tempo. Na verdade, é possível que a ideia de logaritmo tenha ocorrido a Bürgi em 1588, o que seria meia dúzia de anos antes de Napier começar a trabalhar na mesma direção. Porém Bürgi só publicou seus resultados em 1620, meia dúzia de anos depois de Napier publicar sua *Descriptio*. A obra de Bürgi apareceu em Praga num livro intitulado *Arithmetische und geometrische Progress-Tabulen*, e isso indica que as influências que guiaram seu trabalho foram semelhantes às que operaram no caso de Napier. Os dois partiram das propriedades das sequências aritméticas e geométricas, estimulados, provavelmente, pelo método de prostaférese. As diferenças entre as obras dos dois homens estão principalmente na terminologia e nos valores numéricos que usavam; os princípios fundamentais eram os mesmos.

A invenção dos logaritmos veio a ter um tremendo impacto sobre a estrutura matemática. Os logaritmos foram saudados alegremente por Kepler não como uma contribuição de ideias, mas porque aumentavam enormemente a capacidade de computação dos astrônomos.

3 DEFINIÇÃO DE LOGARITMO NATURAL E DE EXPONENCIAL NATURAL

Neste capítulo daremos a definição geométrica de logaritmo natural e como consequência, da exponencial natural.

Uma referência para esta seção é o livro [3].

Inicialmente vamos estudar uma transformação geométrica bastante simples, que se revela útil para nossos propósitos.

Para cada número real $k > 0$, definimos a transformação (= função)

$$T = T_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

que associa a cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ o ponto $T(x, y) = (kx, \frac{y}{k})$, obtido de (x, y) multiplicando a abcissa por k e dividindo a ordenada pelo mesmo k.

Um retângulo X de lados paralelos aos eixos, com base medindo b e altura medindo a, é transformado por T num retângulo $X = T(X)$, ainda com lados paralelos aos eixos, porém com base kb e altura a/k. Portanto X e seu transformado $X = T(X)$ têm áreas iguais. Mais geralmente, T transforma toda figura F do plano numa figura $F = T(F)$, cujas dimensões em relação a F são alteradas pelo fator k na horizontal e $1/k$ na vertical. Logo F e F' têm a mesma área.

Seja

$$H = \left\{ \left(x, \frac{1}{x} \right) ; x > 0 \right\}$$

o ramo positivo da hipérbole equilátera $xy = 1$; H é o gráfico da função

$$h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, h(x) = \frac{1}{x}.$$

Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$ o conjunto H_a^b dos pontos (x, y) do plano tais que x está entre a e b e $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$ chama-se uma faixa de hipérbole. H_a^b é o conjunto do plano limitado lateralmente pelas verticais $x = a$, $x = b$, pelo eixo das abscissas e pelo ramo superior hipérbole H.

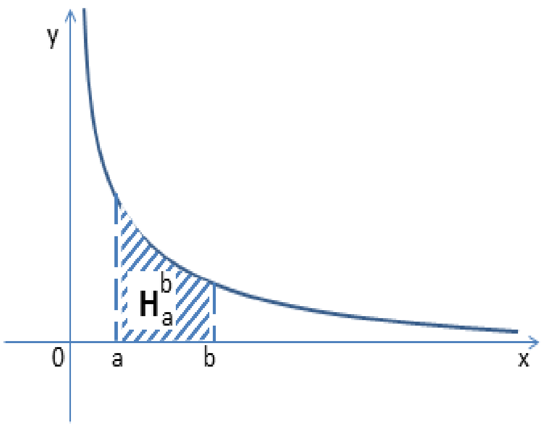

Figura 1: Área da região limitada

A transformação $T = T_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leva a faixa H_a^b na faixa H_{ak}^{bk}.

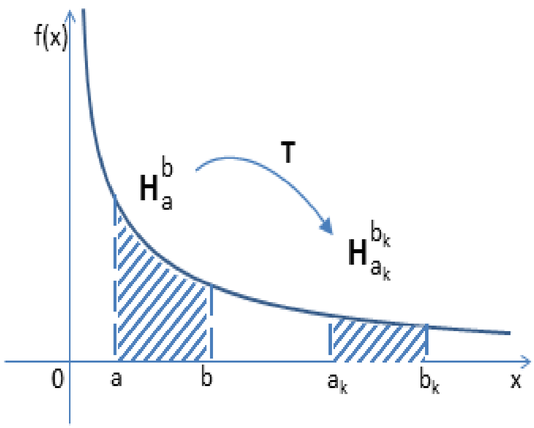

Figura 2: Transformação

Como T preserva áreas, segue-se que, para todo $k > 0$, as faixas H_a^b e H_{ak}^{bk} têm a mesma área.

Normalmente, a área de uma figura não é um número negativo. Mas às vezes é conveniente usar áreas orientadas, ou seja, providas de sinal $+$ ou $-$. É o que faremos agora.

Convencionaremos que a área da faixa de hipérbole H_a^b será positiva quando $a < b$, negativa quando $b < a$ e zero quando $a = b$.

Para deixar mais clara esta convenção, escreveremos

$$\text{ÁREA } H_a^b$$

com letras maiúsculas, para indicar a área orientada (provida de sinal). A área usual, com valores ≥ 0, será escrita como área H_a^b.

Assim, temos

$$\text{ÁREA } H_a^b = \text{ área } H_a^b > 0 \text{ se } a < b$$
$$\text{ÁREA } H_a^b = \text{ - área } H_a^b < 0 \text{ se } b < a$$
$$\text{ÁREA } H_a^b = 0 \text{ se } a = b$$

Quando $a < b < c$, tem-se

$$\text{área } H_a^b + \text{ área } H_b^c = \text{ área } H_a^c$$

Uma consequência da adoção de áreas orientadas é que se tem

$$\text{ÁREA } H_a^b = \text{ - ÁREA } H_b^a$$

Daí segue que vale a igualdade

$$\text{ÁREA } H_a^b + \text{ ÁREA } H_b^c = \text{ ÁREA } H_a^c$$

em qualquer dos seis casos $a \leq b \leq c$, $a \leq c \leq b$, $b \leq a \leq c$, $b \leq c \leq a$, $c \leq a \leq b$ e $c \leq b \leq a$. A igualdade acima é fácil provar. Basta considerar separadamente cada uma das seis possibilidades.

Usando a figura abaixo, temos:

$$\text{ÁREA } H_c^b = \text{ ÁREA } H_c^a + \text{ ÁREA } H_a^b \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{- ÁREA } H_c^a = \text{ ÁREA } H_a^b \text{ - ÁREA } H_c^b \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{ÁREA } H_a^c = \text{ ÁREA } H_a^b + \text{ ÁREA } H_b^c$$

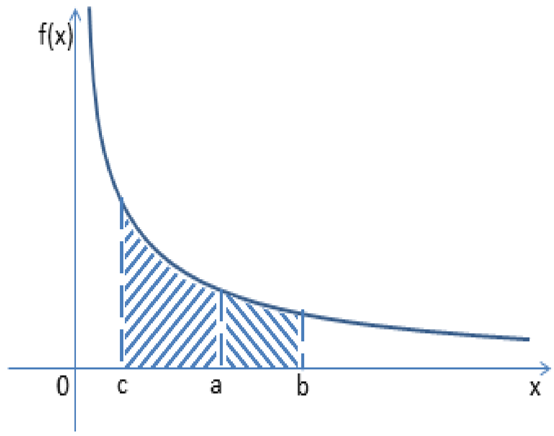

Figura 3: Soma de áreas

Definamos uma função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ pondo, para cada número real $x > 0$

$$f(x) = \text{ÁREA } H_1^x$$

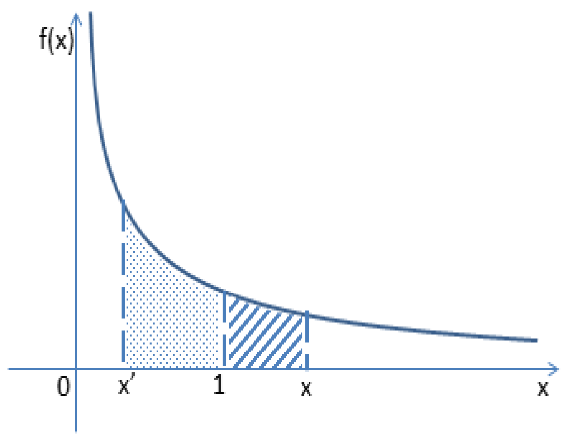

Figura 4: $f(x) =$ área H_1^x e $f(x') =$ área $H_{x'}^1$

$$\text{Se } x > 1,\ f(x) = \text{ÁREA } H_1^x = \text{área } H_1^x$$
$$\text{Se } x' < 1,\ f(x) = \text{ÁREA } H_1^{x'} = \text{- área } H_1^{x'} = \text{área } H_{x'}^1$$
$$\ln x = \text{área da região hachurada}$$
$$\ln x' = \text{área da região pontilhada}$$

Como resultado, temos as seguintes propriedades:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1;$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1;$$
$$f(1) = 0$$
$$f \text{ é crescente.}$$

Além disso, observamos que, para $x, y \in \mathbb{R}^+$ quaisquer:

$$f(xy) = \text{ÁREA } H_1^{xy} = \text{ÁREA } H_1^x + \text{ÁREA } H_x^{xy}.$$

Mas como vimos acima, ÁREA H_x^{xy} = ÁREA H_1^y. Logo $f(xy)$ = ÁREA H_1^x + ÁREA H_1^y, ou seja:

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

Recordemos o seguinte teorema:

Teorema 3.1 (Teorema da Caracterização das Funções Logarítmicas)**.** Seja $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^*$. Então existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada no livro [3].

Pelo Teorema 3.1, existe um número real positivo, que chamaremos de e, tal que

$$f(x) = \log_e x \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^+.$$

Escreveremos $\ln x$ em vez de $\log_e x$ e chamaremos o número $\ln x$ de *logaritmo natural de x.*

O número e, base dos logaritmos naturais, é caracterizado pelo fato de que seu logaritmo natural é igual a 1, ou seja, ÁREA $H_1^e = 1$ (Figura 5).

O número e é irracional. Um valor aproximado dessa importante constante é $e = 2{,}718281828459$.

A demonstração da irracionalidade do número e pode ser encontrada no livro [5].

Definimos a função exponencial natural $x \mapsto e^x$, de base e, como a função inversa da função $\ln = \log_e$:

$$e^x = y \Leftrightarrow \ln y = x$$

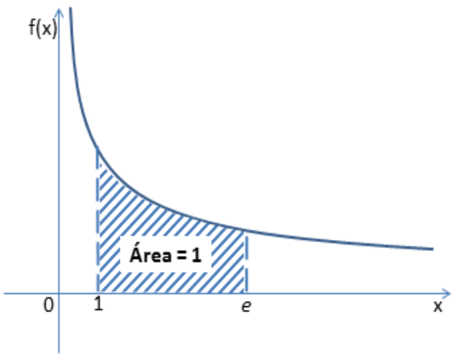

Figura 5: O número "e"

4 TAXA DE VARIAÇÃO

Neste capítulo daremos as definições necessárias que precisaremos para mostrar a proporcionalidade das taxas de crescimento e decrescimento. As referências para esta seção estão nos livros [4] e [7].

4.1 Tangentes

Se uma curva C tiver uma equação $y = f(x)$ e quisermos encontrar a tangente a C em um ponto $P(a, f(a))$, consideramos um ponto $Q(x, f(x))$ próximo ao ponto $P(a, f(a))$, onde $x \neq a$, e calculamos a inclinação da reta secante $\overleftrightarrow{PQ}$ $.Assim,$

$$m_{PQ} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

em que m_{PQ} é a inclinação da secante $\overleftrightarrow{PQ}$.

Então fazemos Q aproximar-se de P ao longo da curva λ ao obrigar x tender a a. Se m_{PQ} tender a um número m, então definimos a tangente t como a reta que passa por P e tem inclinação m. Isso implica dizer que a reta tangente t é a posição-limite da reta secante $\overleftrightarrow{PQ}$ quando Q tende a P.

4.1.1 Definição

A reta tangente a uma curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a, f(a))$ é a reta por P que tem inclinação

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

desde que esse limite exista.

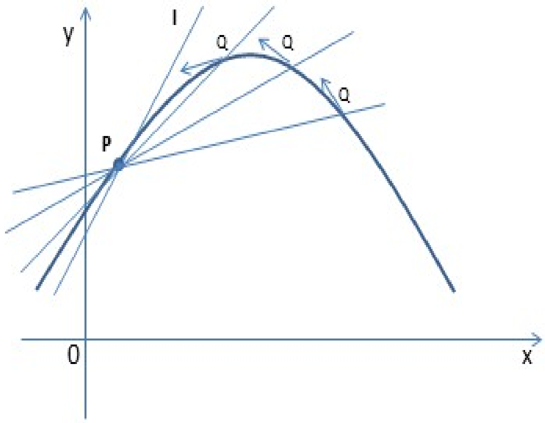

Figura 6: Tangente

4.2 Taxa de Variação

Dada uma função $y = f(x)$, a variação nos valores da função entre $x = a$ e $x = c$ é $\Delta y = f(c) - f(a)$. Δy é a diferença de dois valores de y e, por isso, é representada pela distância vertical indicada na figura 7. A inclinação da reta que liga os pontos A e C é a variação média de f entre $x = a$ e $x = c$. A figura 8 apresenta a secante entre $x = a$ e $x = c$.

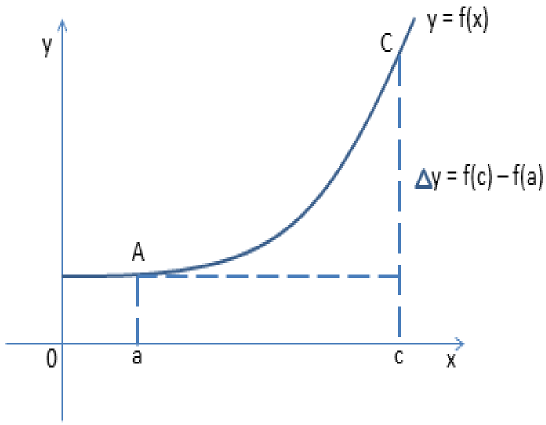

Figura 7: Variação

Na figura acima a variação na função é representada por uma função ao longo da vertical

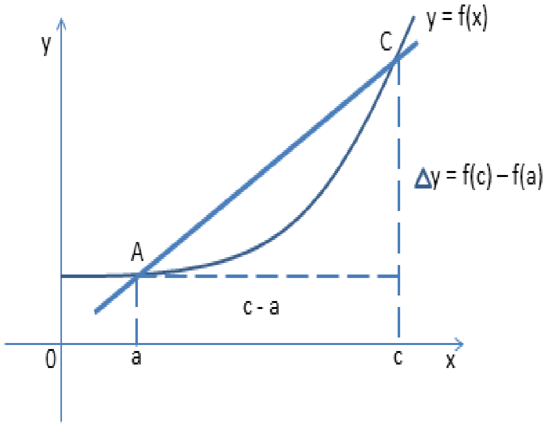

Figura 8: Taxa de variação

Na figura acima a inclinação da reta $\overleftrightarrow{AC}$ representa a taxa de variação média

$$\text{Variação Média} = \text{VM} = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$$

Acabamos de ver o que é Taxa de Variação Média de uma função em um intervalo.

Agora vamos considerar a variação de uma função em um ponto.

Se fizermos c se aproximar de a como visto na seção **(4.1)**, teremos:

$$\text{Taxa de Variação Instantânea} = \lim_{c\to a} VM = \lim_{c\to a} \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$$

4.3 Derivadas

4.3.1 Definição

A derivada de uma função f em um ponto a denotada por $f'(a)$, é

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

se o limite existir.

Se escrevermos $x = a + h$, então $h = x - a$ e h tende a 0 se e somente se x tende a a. Consequentemente, uma maneira equivalente de enunciar a definição de derivada é

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

4.4 Velocidade

Em geral, suponhamos que um objeto se mova sobre uma reta de acordo com a equação $s = f(t)$, na qual s é o deslocamento do objeto a partir da origem no instante t. A função f que descreve o movimento é chamada Função Posição do objeto. No intervalo de tempo entre $t = a$ e $t = a + h$ a variação na posição será de $f(a+h) - f(a)$.

A valocidade média nesse intervalo é

$$\text{velocidade média} = \frac{deslocamento}{tempo} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

que é o mesmo que a inclinação da reta $\overleftrightarrow{PQ}$ na figura.

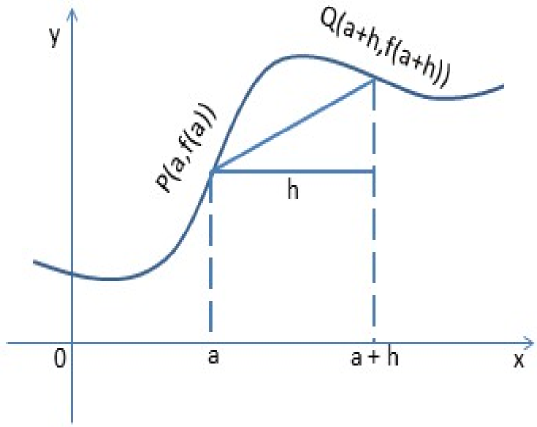

Figura 9: Inclinação da reta

Suponhamos agora que a velocidade média seja calculada em intervalos cada vez menores $[a, a+h]$. Em outras palavras, fazendo h tender a 0. Assim, definimos Velocidade Instantânea $v(a)$ no instante $t = a$ como o limite dessa velocidade

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Exemplo

Seja $s = f(t) = 4,9t^2$ a equação do movimento de uma bola abandonada em queda livre. Sabendo que essa bola foi abandonada a 450 metros acima do solo, pergunta-se:

a) Qual a velocidade da bola após 5 segundos?

b) Com qual velocidade chega ao solo?

Solução:

Precisaremos encontrar a valocidade tanto quando $t = 5$ quanto quando atinge o solo, de modo que é eficiente começar encontrando a velocidade em um instante geral $t = a$.

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4,9(a+h)^2 - 4,9a^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4,9(a^2 + 2ah + h^2 - a^2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4,9(2ah + h^2)}{h} = \lim_{h \to 0} 4,9(2a + h) = 9,8a$$

a) A velocidade após $5s$ é de $v(5) = (9{,}8).(5) = 49\ m/s$

b) Uma vez que a bola se encontra a 450 metros do solo, ela vai atingir o chão em t_1, quando $s(t_1) = 450$, isto é,

$$4,9{t_1}^2 = 450$$

Isso fornece

$${t_1}^2 = \tfrac{450}{4{,}9} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\tfrac{450}{4{,}9}}\ m/s$$

A velocidade com que a bola atinge o chão é, portanto,

$$v(t_1) = 9,8t_1\sqrt{\tfrac{450}{4{,}9}}\ m/s$$

No exemplo acima vimos a velocidade como taxa de variação da posição em relação ao tempo. Outros exemplos de taxa de variação na natureza podem ser vistos como, por exemplo, taxa de variação da quantidade de bactérias ou de algum material radioativo em relação ao tempo.

5 *EQUAÇÕES DIFERENCIAIS*

Neste capítulo serão tratadas as equações diferenciais que são usadas para fazermos a conexão entre taxa de variação instantânea e vários problemas ma natureza como, por exemplo, crescimento e decrescimento na população de bactérias e decaimento radioativo.

5.1 Definição

Uma referência para essa seção é o livro [1] e [6].

Chama-se equação diferencial a uma equação que envolve derivadas e cuja incógnita é uma função.

A notação $\frac{dy}{dx}$ significa "derivada da função y em relação à variável x". A notação $\frac{d^2y}{dx^2}$ significa a "derivada segunda da função y em relação à variável x", ou seja, é a derivada da derivada da função y em relação à variável x.

Exemplos:

a) $\frac{dy}{dx} = 3x - 1$

b) $\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 12y = 6e^{5x}$

c) $(\frac{d^2y}{dx^2})^3 - 5(\frac{dy}{dx})^4 = cosx$

d) $y' = y$

5.2 Classificação das Equações Diferenciais

A equação será chamada de ordinária se as variáveis dependentes forem função de uma única variável livre, caso contrário, serão chamadas de equações diferenciais parciais. As equações dos exemplos a, b, c e d anteriores são equações diferenciais ordinárias. Existem, ainda, as Equações Diferenciais Parciais que não são objetos de estudo neste trabalho. Neste trabalho usaremos apenas as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO).

5.2.1 Ordem

Chama-se ordem de uma (EDO) à dada pela derivada de maior ordem na equação. As equações a) e d) da seção 5.1 são de primeira ordem, já os exemplos b e c são de segunda ordem.

5.3 Solução

Uma solução para uma equação diferencial é uma função que quando substituída na equação diferencial a transforma numa identidade. As soluções podem ser: solução geral ou particular.

Chama-se Solução Geral à família de funções que verificam a equação diferencial, família esta indexada por constante(s) arbitrária(s).

Chama-se Solução Particular de uma equação diferencial à solução obtida a partir da solução geral impondo condições iniciais ou de contorno. Geralmente as condições iniciais serão dadas para o instante inicial $t = 0$. Já as condições de contorno aparecem quando nas equações de ordem superior os valores da função e de suas derivadas são dadas em pontos distintos.

As Equações Diferenciais que nos interessam neste trabalho são as equações de primeira ordem nas quais a variável independente não aparece explicitamente. Tais equações são ditas autônomas, e têm a forma

$$\tfrac{dy}{dt} = f(y) \qquad (5)$$

Vamos discutir essas equações no contexto de crescimento ou declínio em assuntos importantes em campos como, por exemplo, a medicina, dentre outros.

Por exemplo $y = \Phi(t)$ a população de uma determinada espécie de bactérias no instante t. A hipótese mais simples em relação à variação de população é que a taxa de variação de y é proporcional ao valor atual de y, ou seja,

$$\tfrac{dy}{dt} = ky \qquad (6)$$

onde a constante de proporcionalidade k é chamada de taxa de crescimento ou declínio, dependendo se positiva ou negativa. Vamos supor $k > 0$, de modo que a população está crescendo.

A solução da equação a equação (6) sujeita à condição inicial

$$y(0) = y_0 \qquad (7)$$

é dada por

$$y = y_0 e^{kt} \qquad (8)$$

ver por exemplo [1] e [6].

5.4 Exemplos

1. Mostre que $y = Ce^x$ é uma solução da equação $y' - y = 0$.

Resolução:

De $y = Ce^x$ resulta que $y' = Ce^x$. Substituindo na equação dada as expressões de y e y', obtém-se $Ce^x - Ce^x = 0$, pelo que a função $y = Ce^x$ satisfaz a equação diferencial dada, qualquer que seja o valor da constante arbitrária C.

2. a) Verifique que $P = Ce^{2t}$ é uma solução da equação diferencial $\frac{dP}{dt} = 2P$.
b) Ache a condição particular que satisfaz à condição inicial $P(0) = 0$.

Resolução:

a) Como $P = Ce^{2t}$, com C uma constante, achamos as expressões para ambos os membros:
1º membro: $\frac{dP}{dt} = Ce^{2t}.2 = 2Ce^{2t}$
$2^o membro$:2P $=$ 2Ce^{2t}
Como as duas expressões são iguais, $P = Ce^{2t}$ é uma solução da equação diferencial.

b) Fazemos $P(0) = 100$ na solução geral $P = Ce^{2t}$ e resolvemos para C:

$$100 = Ce^{2.0} \Rightarrow 100 = C.1 \Rightarrow C = 100$$

Logo, a solução particular para esse problema do valor inicial é $P = 100e^{2t}$.

5.5 Teorema da Existência e Unicidade da Solução de uma Equação Diferencial

Três perguntas importantes sobre soluções para uma EDO.

1. Dada uma equação diferencial, será que ela tem solução?
2. Se tiver solução, será que esta solução é única?
3. Existe uma solução que satisfaz a alguma condição especial?

Para responder a estas perguntas, existe o Teorema de Existência e Unicidade de Solução, cuja demonstração pode ser encontrada, por exemplo, no livro [6].

Teorema 5.1. Seja R uma região retangular xy definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, que contém o ponto (x_0, y_0) em seu interior. Se $f(x, y)$ e $\frac{df}{dx}$ são contínuas em R, então existe um intervalo I, centrado em x_0 e uma única função $y(x)$ definida em I que satisfaz o problema do valor inicial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, sujeito a $y(x_0) = y_0$.

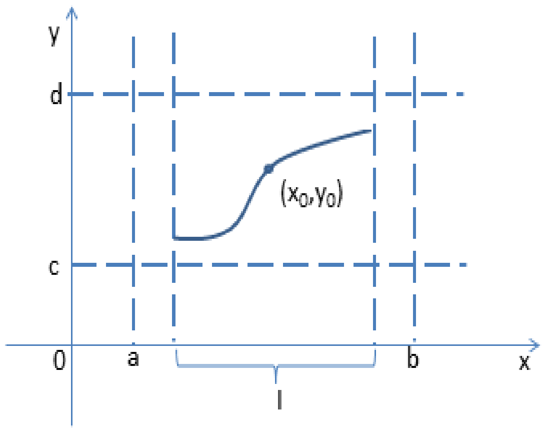

Figura 10: Função em um intervalo

5.5.1 Exemplos

M1. A taxa de crescimento populacional da bactéria *Escherichia coli* no intestino humano é proporcional ao tamanho de sua população. Em condições laboratoriais ideais, quando essa bactéria é desenvolvida em um caldo de cultura, o número de células na cultura dobra, aproximadamente, a cada 20 minutos.

a) Se a quantidade inicial de células era 100, determine a função $Q(t)$ que expressa o crescimento exponencial do número de células dessa bactéria em função do tempo t (em minutos).

b) Quanto tempo levará para uma colônia de 100 células atingir o valor de 1 milhão de células?

Resolução:

a) Seja $Q(t)$ a quantidade de bactérias no tempo t.

A taxa de variação do número de bactérias em função do tempo, ou seja, a velocidade com que o número de bactérias varia com o tempo, é dada por

$$Q'(t) = k.Q(t)$$

$$Q'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \tfrac{Q(t)-Q_0}{t-t_0} = k.Q(t_0)$$

ou seja,

$$\tfrac{dQ}{dt} = k.Q \qquad (9)$$

Concluímos, derivando a expressão abaixo e usando (5.1), que a solução única para a equação (9) é

$$Q(t) = Q_0 e^{kt}$$

onde Q_0 é a população inicial de bactérias.

Para $t = 20\ min$, temos $Q(20) = 2.Q_0$. Assim,

$$2Q_0 = Q_0 e^{k.20} \Rightarrow e^{k.20} = 2 \ln e^{k.20} = \ln 2 \Rightarrow 20.k.\ln e = \ln 2 \Rightarrow 20.k.1 = \ln 2 \Rightarrow k = \tfrac{\ln 2}{20}$$

observamos que $k > 0$, o que já era esperado pois a população de bactérias está crescendo, ou seja, $Q(t)$ é uma função exponencial crescente.

Então, como a quantidade inicial de células dessa bactéria é igual a 100, temos

$$Q(t) = 100 e^{\frac{\ln 2}{20}.t}$$

b) $Q(t) = 1000000$ e $Q_0 = 100$, daí temos que

$$1000000 = 100 e^{\frac{\ln 2}{20}.t} \Rightarrow 10000 = e^{\frac{\ln 2}{20}.t} \Rightarrow \ln 10000 = \tfrac{\ln 2}{20}.t \Rightarrow 4.\ln 10 = \tfrac{\ln 2}{20}.t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{80.\ln 10}{\ln 2}\ min$$

M2. O fósforo 32 (P-32) tem uma meia-vida de 14,2 dias.
a) Se 100g dessa substância estão presentes inicialmente, encontre a quantidade após t dias.
b) Qual quantidade restará da substância após 7,1 dias?
c) Qual a velocidade de decaimento do fósforo 32 em $t = 7,1$?

Resolução

a) Seja $Q(t)$ a quantidade de P-32 no tempo t,

Trata-se também de uma situação em que a taxa de variação da quantidade $Q(t)$ é proporcional à quantidade no tempo t.

$$Q'(t) = k.Q(t) \qquad (10)$$

Concluímos, derivando a expressão abaixo e usando (5.1), que a equação (10) admite solução única

$$Q(t) = Q_0 e^{kt}$$

De modo análogo ao exemplo M1, temos que:
para $t = 14,2$, temos $Q(14,2) = \frac{1}{2}Q_0$. Assim,

$$\frac{1}{2}Q_0 = Q_0.e^{k.14,2} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{k.14,2} \Rightarrow \ln\frac{1}{2} = \ln e^{k.14,2} \Rightarrow -\ln 2 = 14,2.k.\ln e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = -\frac{\ln 2}{14,2}$$

Observamos que $k < 0$ o que já era esperado pois a quantidade de material está decrescendo, ou seja, a função $Q(t)$ é uma função exponencial decrescente.

Então, como a quantidade inicial do material é de 100g, temos:

$$Q(t) = 100.e^{-\frac{\ln 2}{14,2}.t}$$

b) Para $t = 7,1$ dias vem:

$$Q(7,1) = 100.e^{-\frac{\ln 2}{14,2}.7,1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Q(7,1) = 100.e^{-\frac{\ln 2}{2}}\text{g}$$

c) A velocidade de decaimento é a variação da quantidade em função do tempo

$$\frac{dQ}{dt} = 100.e^{-\frac{\ln 2}{14,2}.t}.\left(-\frac{\ln 2}{14,2}\right)$$

Em $t = 7,1$, temos:

$$\frac{dQ}{dt} = 100.e^{-\frac{\ln 2}{14,2}.7,1}.\left(-\frac{\ln 2}{14,2}\right) = 100.e^{-\frac{\ln 2}{2}}.\left(-\frac{\ln 2}{14,2}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} = -100.e^{-\frac{\ln 2}{2}}.\left(\frac{\ln 2}{14,2}\right) \text{ g/dia}$$

Logo, a velocidade de decaimento é de $-100.e^{-\frac{\ln 2}{2}}.\left(\frac{\ln 2}{14,2}\right)$ g/dia.

6 *APLICAÇÃO DOS LOGARITMOS E EXPONENCIAIS NO ENSINO MÉDIO AOS TÓPICOS, POR EXEMPLO, CRESCIMENTO E DECRESCIMENTO EXPONENCIAL*

Neste capítulo iremos mostrar como os logaritmos naturais são tratados pelos livros didáticos no ensino médio e daremos uma proposta de abordagem, com um roteiro de sugestão para o professor, de como poderia ser conduzido de maneira mais profunda.

6.1 Entrevista com professores

Por meio de entrevistas, realizadas no ano de 2013, com quatro professores que trabalham o assunto Logaritmos e Exponenciais no Ensino Médio, foi elaborado um questionário com o seguinte título: Abordagem do assunto Logaritmos e Exponenciais no Ensino Médio.

A seguir temos as perguntas e respostas dadas por cada um deles.

Professor A: Professor do Colégio Cristo Redentor - JF:
1) Este assunto é tratado em sala?
R.: Este assunto é comentado e mostrado como aplicação, mas eu tenho certeza que é de maneira muito superficial.
2) O que você acha do modo como é abordado o assunto pelo livro didático adotado pela escola?
R.: Alguns autores se preocupam mais em apresentar as propriedades e aplicações e se esquecem dessas aplicações extremamente práticas. Alguns livros nem abordam o assunto. Logo, eu acho que o assunto é abordado de forma deficiente.
3) O tratamento dado ao tópico Crescimento e Decrescimento Exponencial (ex.: meia-vida de elementos radioativos, reprodução de bactérias) é por você considerado adequado para o Ensino Médio?
R.: Consultando um texto de ensino médio de um determinado autor muito conceituado e que é amplamente utilizado por escolas públicas e particulares pude observar que este

assunto nem é abordado, mas eu considero que estas aplicações são importantes e dentro de um contexto que motive o aluno é na minha opinião adequado para o ensino médio.
4) Há entre seus alunos, alguns que pensam em se tratar de um fenômeno linear e procuram resolver utilizando Regra de Três e/ou Função Afim?
R.: Respondendo sinceramente eu acredito que a maioria dos alunos ao encontrarem qualquer tipo de problema sempre pensam em fazer uma abordagem via regra de três.

Professor B: Professor no Instituto Granbery - JF:
1) Este assunto é tratado em sala?
R.: Sim, principalmente no primeiro ano, em funções.
2) O que você acha do modo como é abordado o assunto pelo livro didático adotado pela escola?
R.: Como na maioria: definição, propriedades e exercícios. No livro que adotamos, pelo menos temos textos e jogos que podemos explorar, deixando o assunto mais interessante, e levar a eles o conhecimento dos termos perguntados abaixo.
3) O tratamento dado ao tópico Crescimento e Decrescimento Exponencial (ex.: meia-vida de elementos radioativos, reprodução de bactérias) é por você considerado adequado para o Ensino Médio?
R.: Não, a maioria nunca ouviu falar nessas nomenclaturas, não fazem parte do seu vocabulário, por isso acham difícil o entendimento. Na idade em que estão, muitos alunos ainda não têm maturidade.
4) Há entre seus alunos, alguns que pensam em se tratar de um fenômeno linear e procuram resolver utilizando Regra de Três e/ou Função Afim?
R.: Poucos.

Professor C: Professor na E.E. Fernando Lobo - JF:
1) Este assunto é tratado em sala?
R.: Sim. Através da discussão e resolução de problemas de matemática financeira, datação do carbono 14, crescimentos de plantas, decaimento da massa de elementos químicos radioativos (incluindo meia vida), multiplicação de células ou bactérias, cálculos relativos a escala de Richter para terremotos, etc.
2) O que você acha do modo como é abordado o assunto pelo livro didático adotado pela escola?
R.: Acredito que de forma muito adequada. Os conceitos e propriedades dos conteúdos são apresentados inicialmente com exemplos de cálculos e depois aparecem os problemas

contextualizados. Desta forma, trabalha-se a parte da técnica de utilização dos conteúdos além da aplicação do conteúdo a situações reais o que fornece motivação aos estudantes para o estudo de exponenciais e logaritmos.

3) O tratamento dado ao tópico Crescimento e Decrescimento Exponencial (ex.: meia-vida de elementos radioativos, reprodução de bactérias) é por você considerado adequado para o Ensino Médio?

R.: Sim. Requer regras básicas de potenciação, radiciação e definições de logaritmos de modo que não creio haver restrições ao ensino desses itens no ensino médio.

4) Há entre seus alunos, alguns que pensam em se tratar de um fenômeno linear e procuram resolver utilizando Regra de Três e/ou Função Afim?

R.: Sempre há. É necessário reforçar que a variação entre as variáveis envolvidas é não linear. Quando usamos dois casos, um de variação linear e outro com variação exponencial fica claro e a interpretação equivocada em questão é eliminada. Recorro à comparação entre o acúmulo de dinheiro para a confecção de um churrasco para a turma ao final do ano. Consideramos a poupança linear semanal e a poupança exponencial semanal.

Professor D: Professor do Colégio dos Jesuítas - JF:

1) Este assunto é tratado em sala?

R.: Sim, em geral o assunto é abordado superficialmente.

2) O que você acha do modo como é abordado o assunto pelo livro didático adotado pela escola?

R.: A abordagem feita pelos livros didáticos não consegue explicitar ao aluno qual o significado do logaritmo. A maioria das definições apresentadas pelos textos remete aos logaritmos apenas como uma série de técnicas e algoritmos a serem aplicados. Nas problematizações que envolvem os logaritmos não fica claro qual a motivação para a aplicação de determinadas propriedades.

3) O tratamento dado ao tópico Crescimento e Decrescimento Exponencial (ex.: meia-vida de elementos radioativos, reprodução de bactérias) é por você considerado adequado para o Ensino Médio?

R.: Tais fenômenos possuem um tratamento muito inadequado. É sabido que para estabelecer o crescimento e decrescimento de alguns fenômenos naturais é necessário a utilizar a lei de crescimento e decrescimento natural. Essa lei necessita de uma definição para o número de Euler e, a partir daí, é necessário definir a lei de crescimento exponencial, o que não pode ser feita formalmente no ensino médio. A maioria dos professores prefere não abordar esse assunto visto sua dificuldade, tanto em formalizá-lo em sala de aula, quanto em resolver algumas situações problemas que aparecem. Quando a matéria é abordada em sala de aula, dificilmente o professor consegue satisfazer os questionamentos teóricos feitos pelos alunos. Acredito que seja necessário repensarmos o currículo de logaritmos no ensino médio, de forma a interpretar qual o significado disso para os alunos.

4) Há entre seus alunos, alguns que pensam em se tratar de um fenômeno linear e procuram resolver utilizando Regra de Três e/ou Função Afim?

R.: É comum grande parte dos alunos interpretar o crescimento e decrescimento dos logaritmos, como uma função linear. Isso ocorre não só com os logaritmos mas também com as funções exponenciais e quadráticas.

Com as respostas dadas pelos professores entrevistados podemos ver que o assunto Logaritmos e Exponenciais ainda são tratados de maneira superficial, com isso, não é de se admirar que os alunos não consigam ter uma ideia mais sólida da importância e aplicação deles. Isso vem reforçar ainda mais a necessidade de um tratamento mais detalhado sobre logaritmos.

6.2 Abordagem no Ensino Médio

Nesta seção iremos apresentar a abordagem feita por três livros didáticos e, logo após, apresentaremos uma proposta de abordagem.

6.2.1 Abordagem feita por alguns livros didáticos

Vamos, inicialmente, colocar as definições abordadas em três livros adotados para o Ensino Médio em diversas instituições de ensino.

Livro 01

Vamos considerar a sequência $(1+\frac{1}{n})^n$ com $n \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ ...\}$;

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1}}_{2{,}000},\ \underbrace{\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2}}_{2{,}2500},\ \ldots,\ \underbrace{\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}}_{2{,}7048},\ \ldots,\ \underbrace{\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}}_{2{,}7129},\ \ldots$$

$$\ldots \underbrace{\left(1+\frac{1}{5000}\right)^{5000}}_{2{,}7182}, \ \ldots, \ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

Quando n aumenta indefinidamente, a sequência $(1+\frac{1}{n})^n$ tende muito lentamente para o número irracional $e = 2,7182818284...$

Uma função exponencial muito importante em Matemática é aquela cuja base é e:

$$f(x) = e^x$$

Funções envolvendo essa função exponencial e^x aparecem com muita frequência nas aplicações da Matemática e na descrição de fenômenos naturais.

Livro 02

Sistema de logaritmos neperianos é o sistema de base e (e = 2,718..., número irracional), também chamado chamado sistema de logaritmos naturais. O nome neperiano lembra John Neper (1550 1617), autor de um dos primeiros trabalhos desenvolvendo a teoria dos logaritmos. Diz-se também sistema de logaritmos naturais, uma vez que no estudo de fenômenos naturais surge, muitas vezes, uma lei exponencial de base e. Os logaritmos neperianos são usados na Análise Matemática e em assuntos técnicos.

Indica-se, em geral, com um dos símbolos: $\log x, e$, ou $\ln x$.

Livro 03

Um importante número irracional, que é estudado em Cálculo Diferencial e Integral, é indicado pela letra e. Para compreendê-lo, consideremos a expressão $(1+x)^{\frac{1}{x}}$, em que $x \in \mathbb{R}^*$, e vejamos alguns valores que ela assume quando x se "aproxima" de zero.

x	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
$(1+x)^{(1/x)}$	2,594	2,705	2,717	2,7182	2,7183

Figura 11: Tabela com alguns valores de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$

À medida que x se torna menor, a expressão $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ fica cada vez mais próxima do número $e \cong 2,7183$.

O gráfico da função $y = e^x$ está representado abaixo

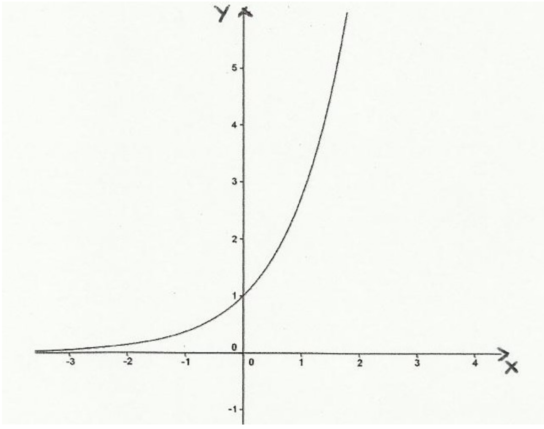

Figura 12: $y = e^x$

6.2.2 Proposta de Abordagem

Nesta seção faremos a nossa proposta de abordagem para que esse assunto seja tratado de forma mais profunda e interessante.

Pela forma superficial da abordagem dos logaritmos naturais no ensino médio, como já visto anteriormente neste trabalho, é que deveríamos, em minha opinião, tratá-lo de maneira mais profunda, onde o aluno consiga entender sua importância e além disso entender como são obtidas as fórmulas.

Tomemos, por exemplo, o caso de crescimento da população de uma certa bactéria com determinada quantidade inicial e em determinado tempo. Como poderíamos abordar esse assunto de modo mais profundo no ensino médio, afim de que o aluno tenha um entendimento mais apurado do fenômeno?

Uma sugestão para que o professor possa conduzir o assunto seria:

1º Passo: Introduzir a ideia de variação. Para isso, deverá proceder da seguinte forma:

Suponha uma função $y = f(x)$ definida no intervalo $[a, b]$. Quando o valor de x passa de a para b, a variação ocorrida em x seria $\Delta x = b - a$. Desta forma, os valores da função $y = f(x)$ passariam de $y = f(a)$ para $y = f(b)$, então a variação em y seria $\Delta y = f(b) - f(a)$.

A divisão de Δy por Δx é o que chamamos de Taxa Média de Variação (TMV) da função no intervalo $[a, b]$.

$$TMV = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Explicar que a *Taxa Média de Variação* indica o que ocorre em média com a função nesse intervalo. Se a TMV for positiva indica um crescimento médio; se a TMV for negativa, indica um decrescimento médio.

Por exemplo, $TMV = 2$ indica que a quantidade de bactérias estaria crescendo 2 unidades em média a cada unidade de tempo, ou seja, indica a velocidade média com que o número de bactérias está aumentando por unidade de tempo; $TMV = -2$ indica que a quantidade de bactérias estaria decrescendo 2 unidades em média a cada unidade de tempo, ou seja, indica a velocidade média com que o número de bactérias está diminuindo por unidade de tempo.

2º Passo: Ainda nessa linha de pensamento, enfatizar para que o aluno perceba que o crescimento ou decrescimento do número de bactérias é proporcional à quantidade, pois, por exemplo, vamos supor que a bactéria se reproduza a cada hora dando origem a outra. Se tivermos inicialmente uma bactéria, em uma hora teríamos duas; se forem inicialmente duas bactérias, em uma hora teríamos quatro; generalizando, se tivermos, inicialmente, n bactérias em uma hora teríamos $2n$ bactérias. Ou ainda, a quantidade final de bactérias será sempre proporcional à quantidade inicial; se a quantidade final for, por exemplo, de 1000 bactérias isso significa que a quantidade inicial foi de 500; se a quantidade final de bactérias for, por exemplo, 500, significa que a quantidade inicial foi de 250, considerando sempre o mesmo intervalo de tempo.

O aluno não deve confundir *Taxa de Variação* com *Quantidade de Bactérias*, ou seja, deve ficar claro para ele que, por exemplo, se tivermos 100 bactérias, em uma hora teremos 200 e em mais uma hora, teremos 400, isso é quantidade final de bactérias. Porém, de 100 para 200 houve, em uma hora um aumento de 100 e de 200 para 400 houve, também em uma hora, um aumento de 200. Ora, se em um mesmo intervalo de tempo houve, inicialmente um aumento de 100 e depois um aumento de 200, isso significa que, a velocidade de reprodução do primeiro momento para o segundo tem que aumentar. Ou seja, a *Taxa de Variação* da quantidade de bactérias em relação ao tempo quando vista nestes dois momentos aumentou. (Ver figura 13.)

3º Passo: Finalmente, procurar inserir a ideia de *Taxa Instantânea*. Utilizando o exemplo anterior de crescimento de bactérias, colocar a situação do tempo de medição entre uma observação e outra ser cada vez menor, ou seja, na função faríamos o ponto $x = a$ se aproximar cada vez mais do ponto $x = b$ e comentamos que, o que poderia aconteceria

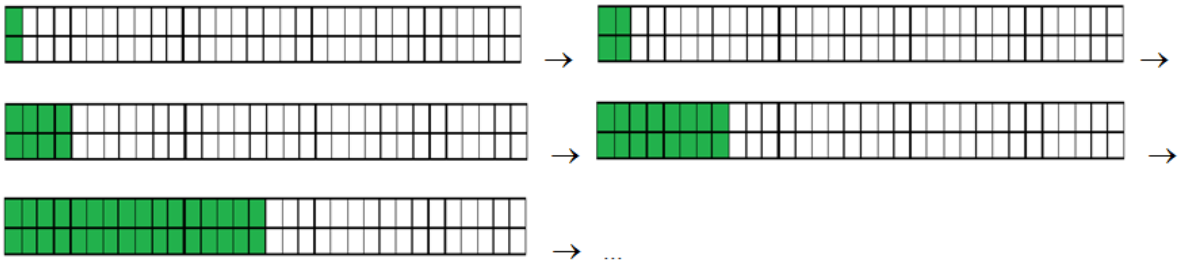

Figura 13: Evolução da reprodução de bactérias

se o ponto $x = a$ se aproximasse tanto que a diferença entre eles se aproximasse de zero e concluímos a ideia de *Taxa Instantânea* (poderíamos aí usar o exemplo de velocidade instantânea nos veículos para que o conceito seja melhor fixado). Usando esse exemplo para as bactérias, seria quando as observações são em momentos tão próximos um do outro que poderíamos admitir que as medições da quantidade são feitas instantaneamente.

Neste exemplo de crescimento de bactérias e nos exemplos de decaimento radioativo, dizemos que a taxa de variação da quantidade no tempo t é proporcional à quantidade nesse instante t. Devemos escrever da seguinte forma:

$$\textit{Taxa de Variação Instantânea (TVI)} = k.Q(t) \qquad (11)$$

onde $Q(t)$ é a quantidade de bactérias no tempo t e k é a constante de proporcionalidade.

Esta escrita (11) é indicada pois o aluno ainda não conhece a notação de limites.

4º Passo: A partir daí, é informar que esta expressão (11) é denominada Equação Diferencial, sua notação matemática é $\frac{dQ}{dt} = k.Q(t)$ e que é tratada somente a nível de ensino superior. Dizer também que a solução desta equação é da forma

$$Q(t) = Q_0.e^{k.t}$$

Assim, o aluno agora já sabe de onde aparecem as expressões com essas características em seu livro didático. O professor pode reforçar o entendimento do aluno utilizando, ainda, o exemplo abaixo.

Exemplo

A meia-vida de uma substância é o tempo necessário para que a quantidade dessa substância seja reduzida à metade da quantidade inicial. Um material radioativo tem uma meia-vida de 16 dias. Você deseja ter 30 g no final de 30 dias. Com qual quantidade desse material você deve começar?

Resolução

Desde que a meia-vida está dada em dias, nós mediremos o tempo em dias. Seja $Q = Q(t)$ a quantidade presente no instante t e $Q(0) = Q_0$ a quantidade inicial. Sabemos que k é uma constante e usaremos a meia-vida 16 dias para obter o valor da constante k.

Como

$$Q(t) = Q_0.e^{k.t}$$

então, para $t = 16$ teremos

$$Q(16) = \tfrac{1}{2}Q_0$$

logo

$$\tfrac{1}{2}Q_0 = Q_0.e^{16.k}$$

assim

$$e^{16.k} = \tfrac{1}{2}$$

Como ambos os membros da igualdade acima são números positivos, podemos aplicar o logaritmo natural em ambos os membros dessa igualdade, obtendo

$$\ln e^{16.k} = \ln \frac{1}{2}$$
$$16.k.\ln e = -\ln 2$$

Como $\ln e = 1$, temos

$$k = -\tfrac{\ln 2}{16}$$

e dessa forma temos a função que determina a quantidade de material radioativo a qualquer momento. Sua expressão será:

$$Q(t) = Q_0.e^{-\frac{\ln 2}{16}.t}$$

6.2.3 Consideração sobre linearidade

É conveniente destacar em sala de aula que o crescimento e decaimento não ocorrem linearmente. Por exemplo, suponhamos que determinada quantidade de substância radioativa tenha meia-vida de $4h$, ou seja, a cada $4h$ a quantidade de substância se reduz à metade da quantidade anterior. Vamos supor, ainda, que a quantidade inicial seja de $80mg$.

Então, podemos representar a evolução da situação acima da seguinte forma:

$$80\ mg \stackrel{4h}{\rightarrow} 40\ mg \stackrel{4h}{\rightarrow} 20\ mg \stackrel{4h}{\rightarrow} 10\ mg \stackrel{4h}{\rightarrow} 5\ mg \stackrel{4h}{\rightarrow} 2,5\ mg \stackrel{4h}{\rightarrow} \cdots \qquad (12)$$

Agora, vejamos que se imaginarmos que o decaimento radioativo se dá de forma "linear", ou seja, de acordo com uma função do tipo $q(t) = at+b$, onde $b = 80$, obteríamos que, após 4 horas ($t = 4$) teríamos a metade da quantidade inicial ($q = 40$). Daí,

$$40 = a.4 + 80 \Rightarrow 4a = -40 \Rightarrow a = -10$$

Então a expressão que caracterizaria a função seria $q(t) = -10t+80$. Então vejamos, fazendo $t = 8$ obtemos $q(8) = -10.8 + 80 = 0$. Ou seja, após 8 horas não teríamos mais a existência de material radioativo o que seria um absurdo pois, como vimos em (12), teríamos ainda 20 mg.

Um erro que também às vezes ocorre é quando se resolve este tipo de problema por regra de três, ou seja,

$Tempo(h)$	$Quantidade(Q_0\ mg)$
4	$\frac{1}{2}$
16	x

Como se trata de uma regra de três inversa, o valor encontrado para x seria igual a $\frac{1}{8}$, ou seja, após 16 horas a quantidade de material radioativo se reduziria a 10 mg e vimos acima que o valor correto seria 5 mg. O uso da regra de três reforça ainda mais a ideia errada de linearidade.

Outro exemplo bom para ser tratado seria o de crescimento de bactéria com taxa de variação da quantidade em relação ao tempo proporcional à quantidade naquele tempo.

CONCLUSÃO

Pelo que vimos, o assunto Logaritmos Naturais ainda é pouco explorado em sua essência no ensino médio pelos livros didáticos adotados. Porém, neste trabalho, demos uma ênfase mais profunda em suas aplicações nas situações que envolvem fenômenos naturais. Para isso, passamos por um pequeno histórico para poder situá-lo cronologcamente até chegarmos a conceitos mais elaborados como taxas de variação e proporcionalidade, fazendo com que o aluno entenda o porquê estudar o assunto bem como saber de onde vem as fórmulas que aparecem de maneira pronta nos exercícios em seus livros didáticos.

Daí a necessidade da proposta de abordagem que fizemos na tentativa de fazer com que o aluno consiga entender a essência do fenômeno que leva às fórmulas apresentadas nos livros didáticos, ou seja, ao invés de apenas substituir valores nas expressões dadas, vamos instigá-lo a investigar o porquê elas têm aquela apresentação.

Quem sabe dessa forma possa despertá-lo para o estudo mais prazeroso da Matemática e desmistificar a complexidade de alguns assuntos como, por exemplo, o estudo dos logaritmos.

REFERÊNCIAS

[1] BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R. C.: **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.** Rio de Janeiro: *LTC - GEN*, 2009.

[2] BOYER, C. B.: **História da Matemática**. São Paulo: *Edgard Blücher Ltda*, 1974.

[3] COELHO, P. C. P.; LIMA, E. L.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E.: **A Matemática do Ensino Médio**, v1. Rio de Janeiro: *SBM*, 2006.

[4] FLATH, D. E. et al; GLEASON, A. M.; HUGHES-HALLET, D.; LOCK, P. F.: **Cálculo e Aplicações**. São Paulo: *Edgard Blücher Ltda*, 2006.

[5] MAOR, Eli. **e: a história de um número**. Rio de Janeiro: *Record*, 2006.

[6] SOTOMAYOR, J.: **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. Rio de Janeiro: *IMPA*, 1979.

[7] STEWART, J.: **Cálculo**, v.1. São Paulo: *Cengage Learning*, 2011.