



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

Nicolas Alves de Moraes

**Singularidades no espaço-tempo de Schwarzschild em Gravitação Quântica de
Wheeler-DeWitt: Uma abordagem via interpretação de de Broglie-Bohm**

Juiz de Fora

2026

Nicolas Alves de Moraes

**Singularidades no espaço-tempo de Schwarzschild em Gravitação Quântica de
Wheeler-DeWitt: Uma abordagem via interpretação de de Broglie-Bohm**

Dissertação apresentada ao Programa de
Pós Graduação em Física da Universidade
Federal de Juiz de Fora como requisito par-
cial à obtenção do título de Mestre em Física.
Área de concentração: Física

Orientador: Prof Dr. Gil de Oliveira Neto

Juiz de Fora

2026

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da
UFJF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Alves de Moraes, Nicolas.

Singularidades no espaço-tempo de Schwarzschild em Gravitação Quântica de Wheeler-DeWitt: Uma abordagem via interpretação de de Broglie-Bohm / Nicolas Alves de Moraes. – 2026.

108 f. : il.

Orientador: Gil de Oliveira Neto

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós Graduação em Física, 2026.

1. Gravitação Quântica. 2. Equação de Wheeler-DeWitt. 3. Interpretação de de Broglie-Bohm. I. de Oliveira Neto, Gil. II. Singularidades no espaço-tempo de Schwarzschild em Gravitação Quântica de Wheeler-DeWitt.

Nicolas Alves de Moraes

Singularidades no espaço-tempo de Schwarzschild em gravitação quântica de Wheeler-DeWitt: Uma abordagem via interpretação de de Broglie-Bohm

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física. Área de concentração: Física.

Aprovada em 08 de junho de 2026.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Prof. Dr. Germano Amaral Monerat

Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)

Prof. Dr. Tibério de Paula Netto

Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Juiz de Fora, 07/06/2026.



Documento assinado eletronicamente por **Gil de Oliveira Neto, Membro**, em 08/06/2026, às 15:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Germano Amaral Monerat, Usuário Externo**, em 08/06/2026, às 15:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Tibério de Paula Netto, Membro**, em 08/06/2026, às 15:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **3016686** e o código CRC **7BB624CC**.

AGRADECIMENTOS

A primeira pessoa a qual dedico este trabalho é a minha companheira de todas as horas, Cinthia. Sem ela a minha estadia em Juiz de Fora talvez não tivesse ocorrido. A sua presença lá comigo me deu forças em muitos momentos para seguir trabalhando, estudando e pesquisando.

Agradeço muito aos meus pais também, pois sempre me incentivaram a continuar estudando e fazendo física, o que me trouxe muita motivação ao longo de todo esse tempo.

Cito também meu orientador, o Prof^o Gil a quem tive o prazer de ter discussões muito frutíferas sobre os temas que estudei no mestrado, bem como todo o aprendizado que me foi proporcionado nesse período de formação. Da mesma forma, agradeço ao prof^o Bruno, pois suas aulas de informação quântica me introduziram a um assunto de muita relevância atualmente e as ideias que foram abordadas certamente estarão no meu horizonte enquanto pesquisador.

Agradeço também aos colegas que fiz no departamento de física, Gabriel, Lucas, Pedro, Thales, Daniel e Benny. As conversas eram sempre muito agradáveis e divertidas, bem como as discussões sobre física.

Por fim, agradeço a FAPEMIG pelo financiamento durante o mestrado, sem isso essa dissertação não seria possível.

“Devemos lembrar que o que observamos não é a natureza em si mesma, mas a natureza exposta ao nosso modo de interrogá-la.”
(Werner Heisenberg, *Physics and Philosophy: The Revolution in Modern Science*, 1958)

RESUMO

Esta dissertação investiga o problema da singularidade no interior do buraco negro de Schwarzschild no contexto da gravitação quântica canônica. O trabalho apresenta uma revisão do formalismo ADM e da equação de Wheeler–DeWitt, com foco na quantização de modelos de minisuperespaço. Em seguida, utiliza-se a interpretação causal de de Broglie–Bohm para analisar a dinâmica quântica de um modelo associado ao buraco negro de Schwarzschild. Os resultados indicam que o potencial quântico pode tornar-se dominante nas proximidades da singularidade clássica, de tal sorte a eliminá-la. No limite em que os efeitos quânticos se tornam desprezíveis, recupera-se o comportamento clássico esperado. Esses resultados sugerem que a abordagem adotada fornece um quadro relevante para a eliminação das singularidades em buracos negros.

Palavras-chave: gravitação quântica canônica; equação de Wheeler–DeWitt; interpretação de de Broglie–Bohm; buraco negro de Schwarzschild; singularidades.

ABSTRACT

This dissertation investigates the problem of the singularity inside the Schwarzschild black hole in the context of canonical quantum gravity. The work presents a review of the ADM formalism and the Wheeler–DeWitt equation, with a focus on the quantization of minisuperspace models. Then, the causal interpretation of de Broglie–Bohm is used to analyze the quantum dynamics of a model associated with the Schwarzschild black hole. The results indicate that the quantum potential may become dominant in the vicinity of the classical singularity, in such a way to eliminate it. In the limit in which quantum effects become negligible, the expected classical behavior is recovered. These results suggest that the adopted approach provides a relevant framework for the elimination of singularities in black holes.

Keywords: canonical quantum gravity; Wheeler–DeWitt equation; de Broglie–Bohm interpretation; Schwarzschild black hole; singularities.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	Formalismo ADM	13
2.1	Decomposição 3+1	13
2.2	Folheação do espaço-tempo	13
2.3	Variáveis ADM e a decomposição da métrica	14
2.4	Vetor normal nas variáveis ADM	19
2.5	Curvatura Extrínseca	19
2.6	Ação ADM e a Métrica de DeWitt	22
2.7	Momento conjugado e vínculos primários	25
2.8	Hamiltoniana ADM	27
2.9	Conexão entre vínculos e teorias de calibre na forma hamiltoniana . .	29
2.9.1	Formulação Hamiltoniana do Eletromagnetismo	32
2.10	De volta à Relatividade Geral: Vínculos Secundários	38
2.11	Propriedades e Significado dos Vínculos	40
2.12	Observações finais	47
3	Quantização da Relatividade Geral	48
3.1	Gravitação quântica canônica	48
3.2	Equação de Wheeler–DeWitt e invariância por difeomorfismos	49
3.3	Consequências da quantização canônica da gravidade e o problema do tempo	51
3.4	Quantização em minisuperespaços	53
3.5	Observações finais acerca da gravitação quântica canônica	57
4	Interpretação de de Broglie–Bohm da Mecânica Quântica	59
4.1	Postulados da interpretação causal	59
4.2	Equação de movimento para a partícula e a onda	60
4.3	Equação de Hamilton–Jacobi	62
4.4	Introdução da probabilidade e medidas ideais	64
4.5	Interpretação causal aplicada à Gravitação Quântica de Wheeler–DeWitt	67
5	Buracos Negros Quânticos na interpretação de de Broglie–Bohm . .	72
5.1	Hamiltoniana do Buraco Negro de Schwarzschild	72
5.2	Quantização Canônica do Buraco Negro de Schwarzschild	80
5.3	Solução da Equação de Wheeler–DeWitt	81
5.3.1	Trajetória bohmiana	85
5.3.2	Potencial Quântico	89
6	CONCLUSÃO	92
	REFERÊNCIAS	93
A	Demonstração da Álgebra de Deformação das Hipersuperfícies . . .	96

A.1	Variação do Vínculo de Momento	96
A.2	Variação do Vínculo Hamiltoniano	100
A.3	Álgebra do Vínculo Hamiltoniano	102
A.4	Álgebra Mista dos Vínculos	104
A.5	Álgebra do Vínculo de Momento	106

LISTA DE SÍMBOLOS

α, β, μ, ν	Índices espaço-temporais
a, b, c, d, i, j, k, l	Índices espaciais
$c = \hbar = G_N = 1$	Unidades naturais
$\bar{\nabla}_a$	Derivada covariante intrínseca
$\bar{\Gamma}^c_{ab}$	Símbolo de Christoffel tridimensional
$\mathcal{R}$	Escalar de Ricci tridimensional

1 INTRODUÇÃO

A relatividade geral figura como uma das teorias mais importantes já desenvolvidas pela ciência moderna. Por meio dela, a humanidade teve acesso a todo um arcabouço de fenômenos antes inexplorados devido a limitações experimentais e teóricas, uma vez que se apoiavam na gravitação Newtoniana, que apesar de representar um salto tremendo em relação às ideias anteriores, esta não trouxe respostas a problemas envolvendo a relatividade do movimento, ideia central da teoria de Einstein, que o levou aos louros da gravitação durante o século XX.

O objeto de estudos ao qual dedica-se esta dissertação são os buracos negros. O embrião inicial para essas ideias surge ainda no século XVIII com John Michell [11], que utilizando da mecânica newtoniana (já consolidada naquele período) propôs a existência de "estrelas escuras" cuja massa seria tão grande que nem mesmo a luz poderia escapar de seu campo gravitacional. Pouco depois Laplace também apresentou uma ideia semelhante.

Esses objetos não configuravam buracos negros do ponto de vista moderno, isto é, ainda não havia a noção de espaço-tempo curvo e tão pouco de horizonte de eventos. Tais definições só foram estabelecidas com o advento da relatividade geral de Einstein em 1915-1916, seguida de sua primeira solução exata obtida por Karl Schwarzschild [2]. Tal solução possui simetria esférica e isso se deu muito provavelmente devido a inspiração em estrelas e planetas, bem como devido a argumentos de simplificação. Além disso, ela também introduzia um fato chocante: havia a existência de duas regiões do espaço-tempo com singularidades, que ocorriam tanto no entorno do objeto massivo considerado, bem como em seu centro. A primeira passou a ser chamada como horizonte de eventos (ou raio de Schwarzschild) e em 1933 foi demonstrado por George Lemaître [2] que tratava-se na verdade de uma singularidade removível [16, 37], pois não sobrevivia a certas transformações de coordenadas. Quanto a segunda, esta ainda permanece como uma patologia da teoria e não pôde ser removida em virtude de uma transformação de coordenadas.

Em certo sentido, pode-se pensar que a relatividade geral prevê os seus próprios limites através das singularidades. Há propostas na literatura que visam resolver esse problema por meio de argumentos puramente clássicos via teorias modificadas de gravitação, dando origem aos buracos negros regulares, isto é, livres de qualquer região singular. Um exemplo é a solução de buracos negros na teoria de Einstein-Cartan na qual a presença do spin inibe a existência de singularidades cujo destino final é um *bounce*. Esse efeito ocorre quando a densidade de spin é alta e em modelos de colapso como o de Oppenheimer-Snyder, o sistema é freado chegando a um raio limite [21]. Apesar de ser um resultado interessante, é importante termos em mente que trata-se de

um modelo clássico a cerca de estrelas e assim como o spin, a matéria que permeia esses corpos também é de natureza quântica. Isso é um indicativo de que devemos procurar respostas para a resolução da singularidade na mecânica quântica, em particular na gravitação quântica.

Ainda restam dúvidas se a gravidade realmente deve ser quantizada como ocorreu com as outras interações fundamentais da natureza, mas acredita-se que se isso for possível, certamente fornecerá respostas para muitas questões em aberto na física, sobretudo o problema da singularidade. Há algumas propostas nessa direção que exploram a quantização de buracos negros através da abordagem da quantização canônica da relatividade geral. Com esse horizonte em mente e inspirado pelo trabalho clássico de DeWitt [15] no qual ele advoga que no contexto da cosmologia quântica, a função de onda deve ir a zero na singularidade inicial, que em outras palavras significa que não haveria nenhuma corrente de probabilidade não nula para além da região singular, os autores Harpreet Singh e Malay K. Nandy [36] levaram essa ideia para as soluções de buracos negros. Eles obtiveram a função de onda um buraco negro quântico, calculando classes de validade na qual ela se anula e, portanto, a existência de buracos negros regulares só é garantida quando estes são representados por estados quânticos cuja função de onda vai a zero na singularidade. Além disso, também generalizaram a proposta de DeWitt indo além e calculando o valor esperado do operador de Kretschmann, mostrando que ele é regular apenas para os estados cuja função de onda satisfaz o critério de DeWitt. Há outros trabalhos que também buscam compreender o comportamento quântico de buracos negros mas que não estão diretamente relacionados com o problema da singularidade, dentre eles vale citar [25, 40].

Nessa dissertação explora-se uma possível solução ao problema da singularidade por meio da gravitação quântica canônica usando a interpretação de de Broglie-Bohm (também chamada de interpretação causal ou determinística), visto que ela permite o cálculo explícito das trajetórias quânticas. A motivação para trabalhar com a interpretação causal vem de argumentos oriundos da cosmologia quântica, uma vez que a interpretação de Copenhagen não é adequada [32, 33], pois ela exige a existência de um observador externo para manipular o aparato experimental e isso claramente deixa de fazer sentido quando consideramos o estudo do universo como um todo, pois não há como definir algo que está além dele. Há um trabalho que visa entender o comportamento quântico de buracos negros na região próxima ao horizonte de eventos usando interpretação causal, a saber [27].

Para apresentar essas ideias de maneira adequada, optou-se por organizar a dissertação da seguinte forma: o segundo capítulo traz uma introdução ao formalismo ADM, devido a sua grande importância na quantização canônica e por extensão, o terceiro capítulo trata da quantização canônica da relatividade geral e as consequências

oriundas desse procedimento (como o desaparecimento do tempo, por exemplo). O quarto capítulo compreende uma introdução à interpretação de Broglie-Bohm com o intuito de aplicá-la a quantização de buracos negros, quantização esta que é feita no quinto capítulo por meio de um modelo de minisuperespaço utilizando a métrica de Kantowski-Sachs.

2 Formalismo ADM

Com o objetivo de construir uma descrição quântica da gravitação na formulação hamiltoniana da Relatividade Geral, é importante introduzir os aspectos clássicos que fundamentam esse ferramental matemático.

2.1 Decomposição 3+1

Uma motivação para empregar o formalismo hamiltoniano da mecânica clássica no estudo de sistemas físicos é que ele reescreve a dinâmica em termos de equações diferenciais de primeira ordem [29]. Além disso, esse formalismo torna explícitas estruturas internas das teorias, como a relação entre simetrias e a presença de vínculos, que surgem quando a descrição possui redundâncias associadas a invariâncias de calibre.

A descrição hamiltoniana inicia-se substituindo o par formado pelas coordenadas generalizadas e suas velocidades, $(q, \dot{q})$, pelo par de variáveis canônicas (q, p) , em que p é o momento canonicamente conjugado a q , definido por,

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}. \quad (2.1)$$

Ao tentar aplicar essas ideias à Relatividade Geral, deparamo-nos com uma sutileza: a definição acima envolve a derivada temporal $\dot{q}$, isto é, pressupõe uma noção de “tempo” para definir as velocidades. Em uma teoria covariante como a Relatividade Geral, porém, as coordenadas não têm, em si, significado físico privilegiado, em particular, não existe uma coordenada que seja *a priori* identificada como tempo [6, 24]. Assim, para construir uma formulação hamiltoniana, é necessário introduzir uma folheação do espaço-tempo por hipersuperfícies espaciais (decomposição 3 + 1) e parametrizá-la como uma evolução entre essas hipersuperfícies. Essa escolha quebra a covariância física e explicita a redundância associada às transformações de difeomorfismo¹, que aparece no formalismo hamiltoniano na forma de vínculos.

2.2 Folheação do espaço-tempo

Como discutido anteriormente, a Relatividade Geral não possui um tempo absoluto: a teoria é invariante por difeomorfismos. Assim, a estratégia adotada para construir a formulação hamiltoniana — o formalismo ADM² — consiste em folhear o espaço-tempo por hipersuperfícies tipo-espaço.

¹ Um difeomorfismo é essencialmente uma mudança suave de coordenadas que também é invertível de forma suave.

² O nome refere-se a Richard Arnowitt, Stanley Deser e Charles W. Misner.

Desse ponto em diante, o capítulo irá tratar de hipersuperfícies, portanto aos leitores que não possuem conhecimento desse assunto, recomenda-se a leitura de [6], [24] e [34].

Seja o espaço-tempo $(\mathcal{M}, g)$, onde $\mathcal{M}$ é a variedade diferenciável e g é a métrica lorentziana. O procedimento de folheação é implementado escolhendo-se uma função tempo $t = t(x^\alpha)$, definida em $\mathcal{M}$, onde x^α (os índices gregos irão correr com $\alpha = 0, 1, 2, 3$) denotam coordenadas no espaço-tempo. Essa função define uma família de hipersuperfícies tipo-espaço Σ_t imersas em $\mathcal{M}$, isto é, $\Sigma_t \subset \mathcal{M}$.

Em particular, para um valor fixo t_0 , define-se,

$$\Sigma_{t_0} = \{x^\alpha \in \mathcal{M} : t(x^\alpha) = t_0\}, \quad (2.2)$$

onde t_0 parametriza uma folha específica da folheação. A "evolução temporal" será entendida como a passagem de uma hipersuperfície Σ_t para uma hipersuperfície vizinha Σ_{t+dt} ao longo de um campo vetorial de evolução no espaço-tempo.

Para que esse procedimento seja bem definido globalmente, usualmente assume-se que o espaço-tempo seja globalmente hiperbólico. Equivalentemente, exige-se que:

- não existam curvas causais fechadas em $\mathcal{M}$;
- as hipersuperfícies Σ_t sejam tipo-espaço, de modo que a métrica induzida nelas seja riemanniana, com assinatura $(+, +, +)$;
- as hipersuperfícies Σ_t não se intersectem e cada ponto de $\mathcal{M}$ pertença a exatamente uma folha;
- exista uma hipersuperfície de Cauchy (por exemplo, uma folha Σ_{t_0}) cujos dados iniciais determinem univocamente a evolução.

2.3 Variáveis ADM e a decomposição da métrica

Introduzem-se, portanto, coordenadas adaptadas à folheação, $x^\alpha = x^\alpha(t, y^a)$, onde t rotula as hipersuperfícies e y^a (os índices latinos irão correr com $a = 1, 2, 3$) são coordenadas intrínsecas em cada folha Σ_t . A partir disso, obtêm-se as componentes do conjunto de vetores tangentes a Σ_t ,

$$e_a^\alpha = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \right)_t, \quad (2.3)$$

bem como as componentes do campo vetorial associado à evolução temporal,

$$(\partial_t)^\alpha = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial t} \right)_y. \quad (2.4)$$

Decompondo o vetor $(\partial_t)^\alpha$ em partes normal e tangente à hipersuperfície, obtém-se

$$(\partial_t)^\alpha = \mathcal{N} n^\alpha + e_a^\alpha N^a, \quad (2.5)$$

onde $\mathcal{N}$ é a função *Lapso* e N^a é o vetor *Shift*. Essas quantidades, juntamente com a métrica induzida na folha (que será introduzida posteriormente), constituem as variáveis ADM. Já n^α é o vetor normal unitário a Σ_t , escolhido apontando para o futuro (isto é, tipo-tempo e orientado temporalmente). Tanto $\mathcal{N}$, quanto N^a parametrizam a liberdade na escolha do campo vetorial de evolução temporal $(\partial_t)^\alpha$, via a função $t = t(x^\alpha)$. Essa liberdade está associada ao fato de que podemos escolher diferentes formas de parametrizar a folheação do espaço-tempo. No formalismo hamiltoniano, essa arbitrariedade se manifesta por meio dos vínculos da teoria, que codificam a invariância por difeomorfismos da Relatividade Geral.

Antes de reescrevermos as grandezas em termos das variáveis ADM e discutirmos seus desdobramentos, é necessário entender o significado geométrico do conjunto de variáveis $[\mathcal{N}, N^i, (\partial_t)^\mu]$. Conforme mostra a Figura 1, o papel do campo vetorial de evolução temporal $(\partial_t)^\mu$ é conduzir a dinâmica entre as hipersuperfícies Σ_t e Σ_{t+dt} , o que é descrito pela decomposição (2.5). Consideremos, por exemplo, um ponto $a \in \Sigma_t$ (ver Figura 1). Ao evoluirmos a por um intervalo dt ao longo de t^μ , obtemos um ponto em Σ_{t+dt} . A componente normal dessa evolução (proporcional a n^μ) leva a a um ponto b em Σ_{t+dt} . No entanto, como a evolução temporal discutida aqui é feita mantendo as coordenadas espaciais x^i fixas, o ponto correspondente deve ser c . A forma de corrigir essa diferença é exatamente introduzindo o vetor *shift* N^μ , responsável por levar b a c ao longo da hipersuperfície Σ_{t+dt} .

Outra interpretação possível para a função lapso é a de ser um fator de conversão para o tempo próprio medido por um observador normal que se move com uma 4-velocidade n^μ entre Σ_t e Σ_{t+dt} . Portanto,

$$d\tau = \mathcal{N} dt, \quad (2.6)$$

onde $d\tau$ é o incremento de tempo físico medido por quem atravessa as folhas ortogonalmente e dt é o incremento de tempo escolhido para folhear o espaço-tempo.

De posse dos vetores tangente e do campo vetorial de evolução temporal (2.3) e (2.4), podemos escrever a expressão para o deslocamento ao longo do espaço-tempo,

$$dx^\alpha = (\partial_t)^\alpha dt + e_a^\alpha dy^a = (\mathcal{N} n^\alpha + e_a^\alpha N^a) dt + e_a^\alpha dy^a, \quad (2.7)$$

ou seja,

$$dx^\alpha = \mathcal{N} n^\alpha dt + e_a^\alpha (dy^a + N^a dt). \quad (2.8)$$

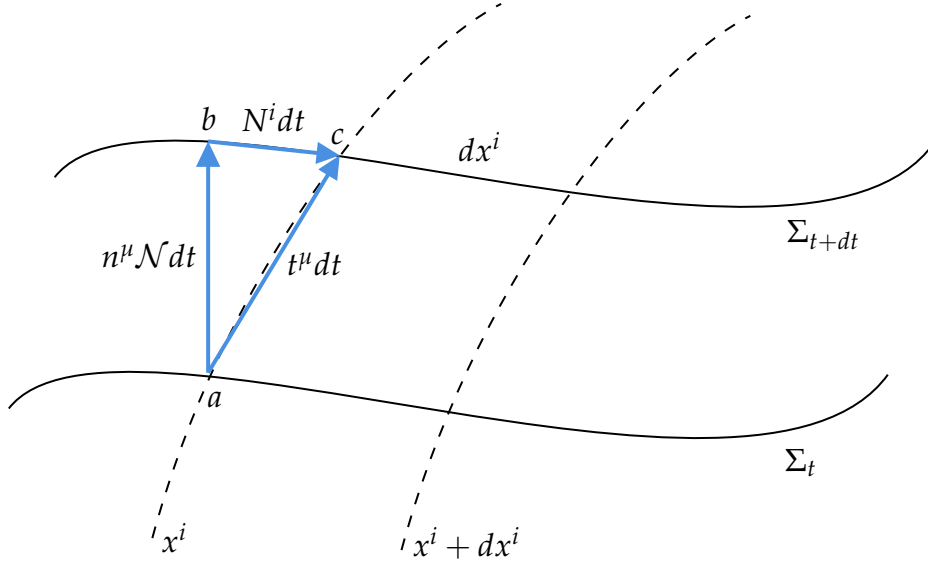


Figura 1 – Interpretação geométrica da função Lapso e do vetor *Shift*.

Fonte: Adaptada de [24].

Tendo escrito a expressão do deslocamento, podemos obter o intervalo entre eventos no espaço-tempo em termos das variáveis ADM, de modo que,

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (2.9)$$

onde $g_{\alpha\beta}$ é a métrica do espaço-tempo. Substituindo a expressão para dx^α ,

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} [\mathcal{N} n^\alpha dt + e_a^\alpha (dy^a + N^a dt)] [\mathcal{N} n^\beta dt + e_b^\beta (dy^b + N^b dt)], \quad (2.10)$$

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} \left[\mathcal{N}^2 n^\alpha n^\beta dt^2 + \mathcal{N} n^\alpha e_b^\beta (dy^b + N^b dt) + \mathcal{N} n^\beta e_a^\alpha (dy^a + N^a dt) + e_a^\alpha e_b^\beta (dy^a + N^a dt)(dy^b + N^b dt) \right]. \quad (2.11)$$

Tendo em vista que $\Sigma_t \subset \mathcal{M}$, então a métrica do espaço-tempo induz uma métrica nas hipersuperfícies, de modo que,

$$h_{ab} = e_a^\alpha e_b^\beta g_{\alpha\beta}. \quad (2.12)$$

Além disso, sendo os vetores normais n^α tipo tempo, então,

$$g_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = -1, \quad (2.13)$$

dessa forma,

$$ds^2 = -\mathcal{N}^2 dt^2 + \underbrace{\mathcal{N} n_\beta e_b^\beta}_{=0} (dy^b + N^b dt) + \mathcal{N} \underbrace{n_\alpha e_a^\alpha}_{=0} (dy^a + N^a dt) + h_{ab} (dy^a + N^a dt)(dy^b + N^b dt). \quad (2.14)$$

$$ds^2 = -\mathcal{N}^2 dt^2 + h_{ab}(dy^a + N^a dt)(dy^b + N^b dt), \quad (2.15)$$

onde usamos a ortogonalidade entre os vetores tangente e normal. Expandindo,

$$ds^2 = -\mathcal{N}^2 dt^2 + h_{ab}N^b dt dy^a + h_{ab}N^a dt dy^b + h_{ab}N^a N^b dt^2, \quad (2.16)$$

$$ds^2 = (-\mathcal{N}^2 + h_{ab}N^a N^b) dt^2 + h_{ab}(N^a dy^b + N^b dy^a) dt + h_{ab} dy^a dy^b. \quad (2.17)$$

Explorando a simetria da métrica induzida $h_{ab} = h_{ba}$, os termos mistos se combinam, resultando em,

$$ds^2 = (-\mathcal{N}^2 + h_{ab}N^a N^b) dt^2 + 2h_{ab}N^a dy^b dt + h_{ab} dy^a dy^b, \quad (2.18)$$

e assim, concluímos que,

$$g_{tt} = -\mathcal{N}^2 + h_{ab}N^a N^b, \quad g_{at} = g_{ta} = h_{ab}N^a \quad \text{e} \quad g_{ab} = h_{ab} \quad (2.19)$$

ou, na forma matricial,

$$g_{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{c|c} -\mathcal{N}^2 + h_{ab}N^a N^b & N_a \\ \hline N_b & h_{ab} \end{array} \right), \quad (2.20)$$

e assim obtemos a decomposição da métrica em termos das variáveis ADM.

Notamos que a métrica está na forma de uma matriz dada em blocos cujos elementos estão em notação indicial, portanto, a melhor estratégia para obter a inversa da métrica é partir de um *ansatz*,

$$g^{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{c|c} A & B^a \\ \hline B^b & C^{ab} \end{array} \right), \quad (2.21)$$

onde vê-se que $g^{\alpha\beta}$ foi escolhida de modo a apresentar a forma de $g_{\alpha\beta}$. Essa é uma maneira segura de se obter a inversa, pois evita erros provenientes da notação indicial. Sabendo que $g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$, então,

$$g_{i\beta}g^{\beta t} = 0 \quad \Rightarrow \quad g_{it}g^{tt} + g_{ij}g^{jt} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_i A + h_{ij}B^j = 0, \quad (2.22)$$

$$g_{t\beta}g^{\beta t} = 1 \quad \Rightarrow \quad g_{tt}g^{tt} + g_{ti}g^{it} = 1 \quad \Rightarrow \quad (-\mathcal{N}^2 + h_{ab}N^a N^b)A + N_i B^i = 1, \quad (2.23)$$

$$g_{i\beta}g^{\beta j} = \delta_i^j \quad \Rightarrow \quad g_{it}g^{tj} + g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j \quad \Rightarrow \quad N_i B^j + h_{ik}C^{kj} = \delta_i^j. \quad (2.24)$$

De (2.22),

$$N_i A + B_i = 0 \quad \Rightarrow \quad B_i = -A N_i, \quad (2.25)$$

substituindo em (2.23),

$$(-\mathcal{N}^2 + h_{ab}N^a N^b)A + N_i(-A N^i) = 1 \quad \Rightarrow \quad (-\mathcal{N}^2 + h_{ab}N^a N^b)A - A N_i N^i = 1, \quad (2.26)$$

$$-\mathcal{N}^2 A + \underbrace{h_{ab}N^a N^b - h_{ij}N^i N^j}_{=0} = 1 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{\mathcal{N}^2}. \quad (2.27)$$

E agora, substituindo (2.27) em (2.26), obtemos,

$$B_i = -AN_i \quad \Rightarrow \quad B^i = \frac{N^i}{\mathcal{N}^2}. \quad (2.28)$$

Por fim, substituindo (2.28) em (2.24),

$$N_i B^j + h_{ik} C^{kj} = \delta_i^j \quad \Rightarrow \quad \frac{N_i N^j}{\mathcal{N}^2} + h_{ik} C^{kj} = \delta_i^j, \quad (2.29)$$

multiplicando por h^{li} dos dois lados,

$$\frac{h^{li} N_i N^j}{\mathcal{N}^2} + h^{li} h_{ik} C^{kj} = h^{li} \delta_i^j \quad \Rightarrow \quad \frac{N^l N^j}{\mathcal{N}^2} + \delta_k^l C^{kj} = h^{lj}, \quad (2.30)$$

logo,

$$C^{ij} = h^{ij} - \frac{N^i N^j}{\mathcal{N}^2}. \quad (2.31)$$

Portanto,

$$g^{tt} = -\frac{1}{\mathcal{N}^2}, \quad g^{at} = \frac{N^a}{\mathcal{N}^2} \quad \text{e} \quad g^{ab} = h^{ab} - \frac{N^a N^b}{\mathcal{N}^2}, \quad (2.32)$$

na forma matricial,

$$g^{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{c|c} -\mathcal{N}^{-2} & \mathcal{N}^{-2} N^b \\ \hline \mathcal{N}^{-2} N^a & h^{ab} - \mathcal{N}^{-2} N^a N^b \end{array} \right). \quad (2.33)$$

Conhecendo a forma matricial de $g_{\alpha\beta}$, podemos calcular seu determinante notando que a métrica possui a forma,

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B}^T \\ \mathbb{B} & \mathbb{C} \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

com isso, o determinante é dado por³,

$$\det g_{\alpha\beta} = \det \mathbb{C} \det (\mathbb{A} - \mathbb{B}^T \mathbb{C}^{-1} \mathbb{B}). \quad (2.35)$$

Reconhecendo,

$$\begin{cases} \mathbb{A} = -\mathcal{N}^2 + h_{ab} N^a N^b, \\ \mathbb{B} = h_{ab} N^b, \\ \mathbb{C} = h_{ab}, \end{cases} \quad (2.36)$$

dessa forma,

$$\mathbb{A} - \mathbb{B}^T \mathbb{C}^{-1} \mathbb{B} = (-\mathcal{N}^2 + h_{ab} N^a N^b) - h^{cd} N_c N_d = -\mathcal{N}^2, \quad (2.37)$$

logo,

$$\det g_{\alpha\beta} = \det h_{ab} (-\mathcal{N}^2) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{-g} = \mathcal{N} \sqrt{h}. \quad (2.38)$$

onde $\det g_{\alpha\beta} \equiv g$ e $\det h_{\alpha\beta} \equiv h$.

³ Essa identidade é conhecida como Complemento de Schur.

2.4 Vetor normal nas variáveis ADM

Conhecidas as variáveis ADM, podemos também obter as componentes do vetor normal em termos delas e para obtê-las, notemos que $n_\alpha \propto \partial_\alpha t$, logo $n^\alpha = C \partial_\alpha t$. Portanto,

$$n^\alpha n_\alpha = -1 \quad \Rightarrow \quad C^2 \partial^\alpha t \partial_\alpha t = C^2 g^{\alpha\beta} \partial_\alpha t \partial_\beta t = -1. \quad (2.39)$$

Em coordenadas adaptadas à folheação (t, y^a) temos que $\partial_a t = 0$, pois $\partial_\alpha t = \delta_a^0$, de modo que,

$$C^2 g^{\alpha\beta} \partial_\alpha t \partial_\beta t = -1 \quad \Rightarrow \quad C^2 (g^{tt} \partial_t t \partial_t t + \underbrace{\partial_a t \partial_b t}_{=0}) = -1 \quad (2.40)$$

$$C^2 g^{tt} = -\frac{C^2}{\mathcal{N}^2} \quad \Rightarrow \quad C = \pm \mathcal{N} \quad (2.41)$$

escolheremos o sinal negativo para fixar a orientação tempo dirigida para o futuro⁴,

$$n_\alpha = -\mathcal{N} \partial_\alpha t. \quad (2.42)$$

Além disso, temos também que,

$$n^\alpha = g^{\alpha\beta} n_\beta = -\mathcal{N} g^{\alpha\beta} \partial_\beta t = -\mathcal{N} g^{\alpha t} \cdot 1 = -\mathcal{N} g^{\alpha t}, \quad (2.43)$$

então,

$$n^t = -\mathcal{N} g^{tt} = \frac{1}{\mathcal{N}} \quad \text{e} \quad n^a = -\mathcal{N} g^{at} = -\mathcal{N} \frac{N^a}{\mathcal{N}^2} = -\frac{N^a}{\mathcal{N}}, \quad (2.44)$$

em termos das componentes,

$$n_\alpha = (-\mathcal{N}, 0, 0, 0) \quad \text{e} \quad n^\alpha = \left(\frac{1}{\mathcal{N}}, -\frac{N^a}{\mathcal{N}} \right). \quad (2.45)$$

Vale destacar também que nas coordenadas (t, y^a) o vetor tangente toma a forma (veja (2.3)),

$$e_a^\alpha = (0, \delta_a^b). \quad (2.46)$$

2.5 Curvatura Extrínseca

Outra quantidade de grande importância é o tensor de *curvatura extrínseca*, definido por [28],

$$K_{ab} = e_a^\alpha e_b^\beta \nabla_\alpha n_\beta. \quad (2.47)$$

Vemos que ele mede a curvatura da hipersuperfície a partir da variação do vetor normal ao comparar pontos diferentes de Σ_t (ver Figura 2). Daí o nome *curvatura extrínseca*: esse tensor quantifica como a hipersuperfície se curva quando vista “de fora”. Além disso, trata-se de uma quantidade puramente espacial, pois está projetada ao longo de

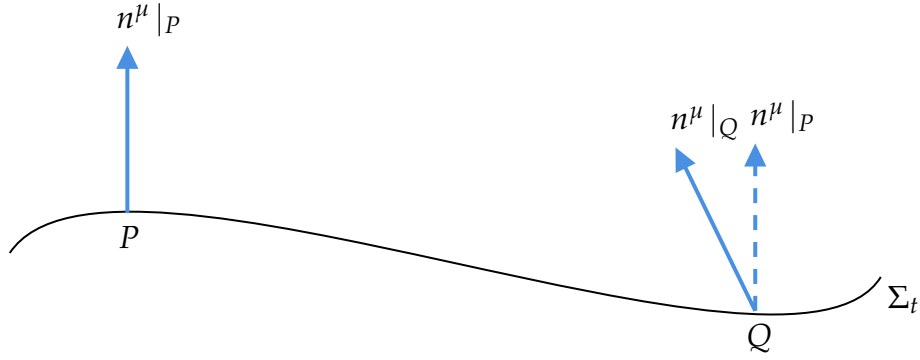


Figura 2 – A curvatura extrínseca mede a curvatura da hipersuperfície através da taxa de variação que o vetor normal sofre quando visto de pontos diferentes, isso fica evidente quando consideramos os pontos P e Q da figura.

Fonte: Adaptada de [28].

Σ_t . Uma expressão mais conveniente pode ser obtida em termos da métrica induzida. Com esse objetivo, substituímos (2.42) em (2.47),

$$K_{ab} = e_a^\alpha e_b^\beta \nabla_\alpha n_\beta = -e_a^\alpha e_b^\beta \nabla_\alpha (\mathcal{N} \partial_\beta t), \quad (2.48)$$

$$K_{ab} = -e_a^\alpha e_b^\beta (\nabla_\alpha \mathcal{N})(\partial_\beta t) - \mathcal{N} e_a^\alpha e_b^\beta \nabla_\alpha \partial_\beta t. \quad (2.49)$$

O primeiro termo se anula, pois,

$$e_b^\beta \partial_\beta t = -\frac{1}{\mathcal{N}} e_b^\beta (\mathcal{N} \partial_\beta t) = \frac{1}{\mathcal{N}} e_b^\beta n_\beta = 0. \quad (2.50)$$

Logo,

$$K_{ab} = -\mathcal{N} e_a^\alpha e_b^\beta \nabla_\alpha \partial_\beta t = -\mathcal{N} e_a^\alpha e_b^\beta (\partial_\alpha \partial_\beta t - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \partial_\mu t). \quad (2.51)$$

Novamente, o primeiro termo da equação anterior se anula pelo mesmo argumento,

$$e_a^\alpha e_b^\beta \partial_\alpha \partial_\beta t = 0. \quad (2.52)$$

Definindo $\Gamma_{\alpha\beta}^t \equiv \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \partial_\mu t$, obtemos,

$$K_{ab} = \mathcal{N} e_a^\alpha e_b^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^t. \quad (2.53)$$

Expandindo a contração em $\Gamma_{\alpha\beta}^t = g^{t\lambda} \Gamma_{\lambda\alpha\beta}$,

$$K_{ab} = \mathcal{N} e_a^\alpha e_b^\beta g^{t\lambda} \Gamma_{\lambda\alpha\beta} = \mathcal{N} e_a^\alpha e_b^\beta g^{tt} \Gamma_{t\alpha\beta} + \mathcal{N} e_a^\alpha e_b^\beta g^{tc} \Gamma_{c\alpha\beta}. \quad (2.54)$$

Projetando o símbolo de Christoffel ao longo da hipersuperfície,

$$\bar{\Gamma}_{tab} \equiv e_a^\alpha e_b^\beta \Gamma_{t\alpha\beta}, \quad \bar{\Gamma}_{cab} \equiv e_a^\alpha e_b^\beta \Gamma_{c\alpha\beta}, \quad (2.55)$$

⁴ A assinatura da métrica é $(-, +, +, +)$.

segue que,

$$K_{ab} = \mathcal{N} g^{tt} \bar{\Gamma}_{tab} + \mathcal{N} g^{tc} \bar{\Gamma}_{cab} = -\mathcal{N}^{-1} \bar{\Gamma}_{tab} + \mathcal{N}^{-1} N^c \bar{\Gamma}_{cab}, \quad (2.56)$$

onde usamos (2.33).

Da definição,

$$\bar{\Gamma}_{tab} = \frac{1}{2} (\partial_a h_{bt} + \partial_b h_{ta} - \partial_t h_{ab}), \quad (2.57)$$

com

$$h_{bt} = e_b^\alpha e_t^\beta g_{\alpha\beta} = g_{bt} = N_b, \quad (2.58)$$

onde usamos (2.20). Substituindo (2.58) em (2.57),

$$2\bar{\Gamma}_{tab} = \partial_a N_b + \partial_b N_a - \partial_t h_{ab}. \quad (2.59)$$

Substituindo (2.59) em (2.56), obtemos,

$$K_{ab} = -\frac{1}{2\mathcal{N}} (\partial_a N_b + \partial_b N_a - \partial_t h_{ab}) + \frac{1}{\mathcal{N}} N^c \bar{\Gamma}_{cab}. \quad (2.60)$$

Usando a simetria $\bar{\Gamma}_{ab}^c = \bar{\Gamma}_{ba}^c$ e a definição da derivada covariante intrínseca,

$$\bar{\nabla}_a N_b = \partial_a N_b - \bar{\Gamma}_{ab}^c N_c, \quad (2.61)$$

chegamos à forma usual

$$K_{ab} = \frac{1}{2\mathcal{N}} (\partial_t h_{ab} - \bar{\nabla}_a N_b - \bar{\nabla}_b N_a), \quad (2.62)$$

onde vemos da definição que a curvatura extrínseca é simétrica $K_{ab} = K_{ba}$. Aqui,

$$\bar{\nabla}_a = e_a^\alpha \nabla_\alpha. \quad (2.63)$$

Também é comum escrever a curvatura extrínseca em termos de derivadas de Lie. Para isso, definimos a derivada temporal de um campo arbitrário q como [34],

$$\partial_t q = \dot{q} \equiv \mathcal{L}_{\partial_t} q, \quad (2.64)$$

onde a derivada de Lie é tomada ao longo do campo vetorial de evolução temporal (2.4). Agora, podemos calcular a derivada de Lie da métrica induzida ao longo do vetor *shift*,

$$\mathcal{L}_{\vec{N}} h_{ab} = N^c \bar{\nabla}_c h_{ab} + (\bar{\nabla}_a N^c) h_{cb} + (\bar{\nabla}_b N^c) h_{ac}, \quad (2.65)$$

e usando $\bar{\nabla}_c h_{ab} = 0$, obtemos

$$\mathcal{L}_{\vec{N}} h_{ab} = \bar{\nabla}_a N_b + \bar{\nabla}_b N_a. \quad (2.66)$$

Daí segue que

$$K_{ab} = \frac{1}{2\mathcal{N}} (\mathcal{L}_{\partial_t} h_{ab} - \mathcal{L}_{\vec{N}} h_{ab}). \quad (2.67)$$

2.6 Ação ADM e a Métrica de DeWitt

A teoria da relatividade geral pode ser obtida a partir da variação da ação de Einstein–Hilbert,

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} R, \quad (2.68)$$

onde R é o escalar de Ricci. Ao longo dessa dissertação iremos adotar as unidades naturais, a saber,

$$c = \hbar = G_N = 1. \quad (2.69)$$

Para escrevê-la em termos das variáveis ADM, será necessário utilizar a decomposição de Gauss–Codazzi (ver [6] e [34])⁵,

$$R = \mathcal{R} + K^{ab} K_{ab} - K^2 - 2\nabla_\alpha (n^\beta \nabla_\beta n^\alpha - n^\alpha \nabla_\beta n^\beta), \quad (2.70)$$

onde $\mathcal{R}$ é o escalar de Ricci tridimensional e $K = h^{ab} K_{ab}$ é o traço da curvatura extrínseca.

Se ignorarmos o termo de derivada total, obtemos a ação ADM,

$$S_{ADM} = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^4x \mathcal{N} \sqrt{h} (\mathcal{R} + K^{ab} K_{ab} - K^2). \quad (2.71)$$

Caso optemos por manter o termo de derivada total, podemos reescrever a ação de Einstein–Hilbert como

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} R = S_{ADM} - \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \nabla_\alpha (n^\beta \nabla_\beta n^\alpha - n^\alpha \nabla_\beta n^\beta), \quad (2.72)$$

ou, equivalentemente,

$$S_{ADM} = S_{EH} + \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \nabla_\alpha (n^\beta \nabla_\beta n^\alpha - n^\alpha \nabla_\beta n^\beta). \quad (2.73)$$

Usando o teorema de Gauss (ver [34]),

$$S_{ADM} = S_{EH} + \frac{1}{8\pi} \oint_{\Sigma_t} d^3y \sqrt{h} n_\alpha (n^\beta \nabla_\beta n^\alpha - n^\alpha \nabla_\beta n^\beta). \quad (2.74)$$

Notamos que o primeiro termo no integrando é nulo,

$$n_\alpha n^\beta \nabla_\beta n^\alpha = n^\beta n_\alpha \nabla_\beta n^\alpha = \frac{1}{2} n^\beta \nabla_\beta (n_\alpha n^\alpha) = \frac{1}{2} n^\beta \nabla_\beta (-1) = 0, \quad (2.75)$$

e, assim, chegamos a

$$\begin{aligned} S_{ADM} &= S_{EH} - \frac{1}{8\pi} \oint_{\Sigma_t} d^3y \sqrt{h} n_\alpha n^\alpha \nabla_\beta n^\beta \\ &= S_{EH} + \frac{1}{8\pi} \oint_{\Sigma_t} d^3y \sqrt{h} \nabla_\beta n^\beta, \end{aligned} \quad (2.76)$$

⁵ Uma dedução mais detalhada pode ser encontrada em [24].

onde usamos $n_\alpha n^\alpha = -1$.

Podemos ainda manipular o termo,

$$\begin{aligned}\nabla_\beta n^\beta &= g^{\alpha\beta} \nabla_\beta n_\alpha = (h^{\alpha\beta} - n^\alpha n^\beta) \nabla_\beta n_\alpha = h^{\alpha\beta} \nabla_\beta n_\alpha \\ &= e_a^\alpha e_b^\beta h^{ab} \nabla_\beta n_\alpha = h^{ab} K_{ab} = K,\end{aligned}\tag{2.77}$$

onde usamos a decomposição da métrica em termos de $h^{\alpha\beta}$ e n^α (ver [24]). De posse desses resultados, obtemos

$$S_{ADM} = S_{EH} + \frac{1}{8\pi} \oint_{\Sigma_t} d^3y \sqrt{h} K \quad \Rightarrow \quad S_{ADM} = S_{EH} + S_{GHY}.\tag{2.78}$$

O último termo na equação acima é chamado de *termo de contorno de Gibbons–Hawking–York*⁶. Sua relevância está no fato de tornar bem definido, do ponto de vista matemático, o procedimento de integração por partes na variação da ação: sem esse termo, surgem contribuições de contorno envolvendo derivadas normais da métrica. Esse termo também é necessário quando se realiza a quantização via integral de caminho⁷[30], garantindo um princípio variacional consistente sob as condições de contorno apropriadas. Vale notar que, nesta dedução, o termo de contorno surge de forma natural, diferentemente de como frequentemente aparece na literatura, isto é, sendo introduzido “à mão”.

Retornando à ação ADM,

$$S_{ADM} = \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{h} \mathcal{N} (\mathcal{R} + K^{ab} K_{ab} - K^2) = \int_{\mathcal{M}} dt d^3y \sqrt{h} \mathcal{N} (\mathcal{R} + K^{ab} K_{ab} - K^2),\tag{2.79}$$

onde

$$S_{ADM} = \int_{\mathcal{M}} dt L_{ADM} = \int_{\mathcal{M}} dt d^3y \mathcal{L}_{ADM},\tag{2.80}$$

sendo L_{ADM} e $\mathcal{L}_{ADM}$ a lagrangiana ADM e a densidade lagrangiana ADM, respectivamente.

Essa última pode ser reescrita em uma forma mais conveniente notando que

$$\begin{aligned}K^{ab} K_{ab} - K^2 &= K_{ab} K^{ab} - K^2 \\ &= K_{ab} h^{ac} h^{bd} K_{cd} - (h^{ab} K_{ab})(h^{cd} K_{cd}) \\ &= (h^{ac} h^{bd} - h^{ab} h^{cd}) K_{ab} K_{cd} \\ &= \left[\frac{1}{2} (h^{ac} h^{bd} + h^{ad} h^{bc}) - h^{ab} h^{cd} \right] K_{ab} K_{cd} \\ &= \frac{1}{2} (h^{ac} h^{bd} + h^{ad} h^{bc} - 2h^{ab} h^{cd}) K_{ab} K_{cd} \\ &= \frac{1}{\sqrt{h}} G^{abcd} K_{ab} K_{cd},\end{aligned}\tag{2.81}$$

⁶ O nome é devido a Gary Gibbons, Stephen Hawking e James W. York.

⁷ Por exemplo, em cosmologia quântica.

onde,

$$G^{abcd} = \frac{\sqrt{h}}{2} (h^{ac}h^{bd} + h^{ad}h^{bc} - 2h^{ab}h^{cd}) \quad (2.82)$$

é a inversa da *métrica de DeWitt*. Da definição decorre as simetrias nos índices,

$$G^{abcd} = G^{bacd} = G^{abdc} = G^{cdab}. \quad (2.83)$$

A métrica de DeWitt é definida por,

$$G_{abcd} = \frac{1}{2\sqrt{h}} (h_{ac}h_{bd} + h_{ad}h_{bc} - h_{ab}h_{cd}), \quad (2.84)$$

satisfazendo,

$$G^{abcd}G_{cdef} = \frac{1}{2} (h^{ac}h^{bd} + h^{ad}h^{bc} - 2h^{ab}h^{cd}) \frac{1}{2} (h_{ce}h_{df} + h_{cf}h_{de} - h_{cd}h_{ef}), \quad (2.85)$$

$$G^{abcd}G_{cdef} = \frac{1}{4} (\delta_e^a \delta_f^b + \delta_f^a \delta_e^b - \delta_d^a h^{bd} h_{ef} + \delta_f^a \delta_e^b + \delta_f^b \delta_e^a - \delta_c^a \delta_c^b h^{bc} h_{ef} - 2\delta_e^d h^{ab} h_{df} - 2\delta_f^d h^{ab} h_{de} + 6h^{ab} h_{ef}), \quad (2.86)$$

$$G^{abcd}G_{cdef} = \frac{1}{4} (2\delta_e^a \delta_f^b + 2\delta_f^a \delta_e^b - 2h^{ba} h_{ef} - 4h^{ab} h_{ef} + 6h^{ab} h_{ef}), \quad (2.87)$$

$$G^{abcd}G_{cdef} = \frac{1}{2} (\delta_e^a \delta_f^b + \delta_f^a \delta_e^b) \Rightarrow G^{abcd}G_{cdef} = \mathcal{I}^{ab}_{ef} \quad (2.88)$$

onde $\mathcal{I}^{ab}_{ef} \equiv \frac{1}{2} (\delta_e^a \delta_f^b + \delta_f^a \delta_e^b)$. Nesse ponto, é importante estabelecer algumas ideias. A partir da folheação, a variável dinâmica que passa a descrever a geometria espacial é a métrica induzida h_{ab} , em conjunto com as variáveis ADM. Podemos, então, considerar o espaço formado por todas as configurações geométricas possíveis em Σ_t , levando em conta que duas métricas podem estar relacionadas por uma transformação de coordenadas (um difeomorfismo)⁸. Portanto, definimos o *superespaço* como o quociente,

$$S(\Sigma_t) = \text{Riem}(\Sigma_t) / \text{Diff}(\Sigma_t), \quad (2.89)$$

onde $\text{Riem}(\Sigma_t)$ é o espaço de todas as métricas tridimensionais e $\text{Diff}(\Sigma_t)$ representa o grupo de difeomorfismos de Σ_t . Em outras palavras, o superespaço é formado por classes de equivalência sob transformações de coordenadas em Σ_t [30]. Como veremos adiante, isso se reflete na presença de vínculos na formulação hamiltoniana, característica típica de uma teoria de calibre.

O papel da métrica de DeWitt é o de definir uma supermétrica no espaço de métricas (e, de forma apropriada, no superespaço). Aos leitores interessados numa descrição mais detalhada e matematicamente mais robusta a cerca do superespaço pode ser encontrado em [15].

⁸ Duas métricas h_{ab} e h'_{ab} podem representar a mesma geometria tridimensional se diferirem apenas por uma mudança suave de coordenadas (um difeomorfismo) em Σ_t .

Estabelecidas essas ideias, voltemos à densidade lagrangiana ADM, agora escrita em termos da métrica de DeWitt,

$$\mathcal{L}_{ADM} = \mathcal{N} \left(G^{abcd} K_{ab} K_{cd} + \sqrt{h} \mathcal{R} \right), \quad (2.90)$$

em que o primeiro termo tem a forma de um termo cinético, enquanto o segundo pode ser interpretado como um termo do tipo potencial.

2.7 Momento conjugado e vínculos primários

O primeiro passo em direção à formulação hamiltoniana da relatividade geral é calcular o momento canonicamente conjugado. Seja, então,

$$\begin{aligned} \Pi^{ab} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{ADM}}{\partial \dot{h}_{ab}} = \frac{\partial}{\partial \dot{h}_{ab}} [\mathcal{N} (G^{abcd} K_{ab} K_{cd} + \sqrt{h} \mathcal{R})] \\ &= 2\mathcal{N} G^{ijkl} K_{ij} \frac{\partial K_{lk}}{\partial \dot{h}_{ab}} = 2\mathcal{N} G^{ijkl} K_{ij} \frac{1}{2\mathcal{N}} \delta_l^a \delta_k^b \\ &= G^{ijab} K_{ij} = \frac{\sqrt{h}}{2} (h^{ia} h^{jb} + h^{ib} h^{aj} - 2h^{ij} h^{ab}) K_{ij} \\ &= \frac{\sqrt{h}}{2} (K^{ab} + K^{ba} - 2h^{ab} K), \end{aligned} \quad (2.91)$$

onde usamos (2.62) na segunda linha. Explorando a simetria da curvatura extrínseca, chegamos em,

$$\Pi^{ab} = \sqrt{h} (K^{ab} - h^{ab} K). \quad (2.92)$$

A raiz quadrada da métrica tridimensional indica que o momento canônico é uma densidade tensorial de peso 1 e da definição, vemos a propriedade de simetria,

$$\Pi^{ab} = \Pi^{ba}. \quad (2.93)$$

A expressão para o momento pode ser escrita também em termos da métrica de DeWitt. Começamos tomando o traço de (2.92),

$$h_{ab} \Pi^{ab} = \sqrt{h} (h_{ab} K^{ab} - h_{ab} h^{ab} K) \Rightarrow \Pi = \sqrt{h} (K - 3K) \quad (2.94)$$

$$\Pi = -2\sqrt{h} K, \quad (2.95)$$

onde $\Pi = h_{ab} \Pi^{ab}$ é o traço do momento canônico. Então de (2.92), temos que,

$$\sqrt{h} K^{ab} = \Pi^{ab} - \sqrt{h} h^{ab} K = \Pi^{ab} - \frac{1}{2} h^{ab} \Pi \Rightarrow \sqrt{h} K_{ab} = \Pi_{ab} - \frac{1}{2} h_{ab} \Pi, \quad (2.96)$$

onde usamos (2.95). Podemos escrever,

$$\begin{aligned} \sqrt{h} K_{ab} &= \Pi_{ab} - \frac{1}{2} h_{ab} h_{cd} \Pi^{cd} = h_{ac} h_{bd} \Pi^{cd} - \frac{1}{2} h_{ab} h_{cd} \Pi^{cd} \\ &= \left(h_{ac} h_{bd} - \frac{1}{2} h_{ab} h_{cd} \right) \Pi^{cd}, \end{aligned} \quad (2.97)$$

usando a simetria do momento canônico,

$$\sqrt{h}K_{ab} = \frac{1}{2}(h_{ac}h_{bd} + h_{ad}h_{bc} - h_{ab}h_{cd})\Pi^{cd} \Rightarrow K_{ab} = G_{abcd}\Pi^{cd}. \quad (2.98)$$

Contraindo com a inversa da métrica de DeWitt,

$$G^{efab}K_{ab} = G^{efab}G_{abcd}\Pi^{cd} = \mathcal{I}^{ef}_{cd}\Pi^{cd}, \quad (2.99)$$

onde usamos (2.88). Logo,

$$\Pi^{ab} = G^{abcd}K_{cd}. \quad (2.100)$$

Retornando para as variáveis ADM, se calcula os momentos canonicamente conjugados a ambas, de modo a obtermos,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{N}} = \frac{\partial \mathcal{L}_{ADM}}{\partial \dot{\mathcal{N}}} = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_{\dot{N}^i} = \frac{\partial \mathcal{L}_{ADM}}{\partial \dot{N}^i} = 0, \quad (2.101)$$

sendo esses vínculos primários. O resultado não deve ser surpreendente, afinal, tanto a função lapso, quanto o vetor *shift* foram impostos à mão com a finalidade de nos auxiliar no processo de folheação do espaço-tempo, de modo que não são variáveis dinâmicas e isso se expressa pela ausência delas na densidade lagrangiana. Como veremos, estas quantidades são na verdade multiplicadores de Lagrange e irão gerar os vínculos da teoria na forma hamiltoniana, a saber, o *vínculo hamiltoniano* e *vínculo de momento*.

Antes de discutir o papel dos vínculos na gravitação, precisamos calculá-los. Começemos variando a ação ADM com respeito à função lapso,

$$\frac{\delta S_{ADM}}{\delta \mathcal{N}} = 0 \Rightarrow \frac{\delta \mathcal{L}_{ADM}}{\delta \mathcal{N}} = 0, \quad (2.102)$$

logo,

$$\frac{\delta}{\delta \mathcal{N}}[\mathcal{N}(G^{abcd}K_{ab}K_{cd} - \sqrt{h}\mathcal{R})] = 0, \quad (2.103)$$

$$(G^{abcd}K_{ab}K_{cd} + \sqrt{h}\mathcal{R}) + \mathcal{N}G^{abcd}K_{ab}2\frac{\delta K_{cd}}{\delta \mathcal{N}} = 0, \quad (2.104)$$

$$G^{abcd}K_{ab}K_{cd} + \sqrt{h}\mathcal{R} + 2\mathcal{N}G^{abcd}K_{ab}\frac{\delta}{\delta \mathcal{N}}\left[\frac{1}{2\mathcal{N}}(\dot{h}_{cd} - \bar{\nabla}_c N_d - \bar{\nabla}_d N_c)\right] = 0, \quad (2.105)$$

$$G^{abcd}K_{ab}K_{cd} + \sqrt{h}\mathcal{R} + 2\mathcal{N}G^{abcd}K_{ab}\left[-\frac{1}{2\mathcal{N}^2}(\dot{h}_{cd} - \bar{\nabla}_c N_d - \bar{\nabla}_d N_c)\right] = 0, \quad (2.106)$$

$$G^{abcd}K_{ab}K_{cd} + \sqrt{h}\mathcal{R} - 2G^{abcd}K_{ab}\left[\frac{1}{2\mathcal{N}}(\dot{h}_{cd} - \bar{\nabla}_c N_d - \bar{\nabla}_d N_c)\right] = 0, \quad (2.107)$$

$$G^{abcd}K_{ab}K_{cd} + \sqrt{h}\mathcal{R} - 2G^{abcd}K_{ab}K_{cd} = 0, \quad (2.108)$$

$$G^{abcd}K_{ab}K_{cd} - \sqrt{h}\mathcal{R} = 0 \Rightarrow \mathcal{H} = 0, \quad (2.109)$$

e assim obtemos o vínculo hamiltoniano,

$$\mathcal{H} = G^{abcd}K_{ab}K_{cd} - \sqrt{h}\mathcal{R}. \quad (2.110)$$

Para obtermos o vínculos de momento precisamos variar a ação com respeito ao vetor *shift*. Será conveniente parametrizar a ação introduzindo um parâmetro λ arbitrário, de modo que,

$$N_i(\lambda) = N_i + \lambda \delta N_i, \quad (2.111)$$

com a condição de contorno $\delta N_i|_{\partial\Sigma_t} = 0$, de tal sorte que a ação toma a forma,

$$S_{ADM} = S_{ADM}[N_i(\lambda)], \quad (2.112)$$

e dessa forma a variação da ação em primeira ordem em torno de $\lambda = 0$ é o que nos interessa. Então,

$$N_i(0) = N_i \Rightarrow S_{ADM}(\lambda) = S_{ADM}(0) + \lambda \left. \frac{\delta S_{ADM}}{\delta \lambda} \right|_{\lambda=0} + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (2.113)$$

Afim de encontrarmos a solução estacionária do funcional ação, façamos,

$$\left. \frac{\delta S_{ADM}}{\delta \lambda} \right|_{\lambda=0} = 0 \Rightarrow \left. \frac{\delta}{\delta \lambda} \right|_{\lambda=0} \mathcal{N}(G^{abcd} K_{ab} K_{cd} + \sqrt{h} \mathcal{R}) = 0, \quad (2.114)$$

$$2\mathcal{N} G^{abcd} K_{ab} \left. \frac{\delta K_{cd}}{\delta \lambda} \right|_{\lambda=0} = 0 \Rightarrow \mathcal{N} G^{abcd} K_{ab} 2 \frac{1}{2\mathcal{N}} \left. \frac{\delta}{\delta \lambda} (\bar{\nabla}_c N_d) \right|_{\lambda=0} = 0 \quad (2.115)$$

$$G^{abcd} K_{ab} \bar{\nabla}_c \left(\left. \frac{\delta N_d}{\delta \lambda} \right|_{\lambda=0} \right) = 0 \Rightarrow G^{abcd} K_{ab} \bar{\nabla}_c (\delta N_d) = 0, \quad (2.116)$$

onde usamos (2.62) na segunda linha e (2.111) na terceira linha. Integrando por partes,

$$\bar{\nabla}_c (G^{abcd} K_{ab} \delta N_d) - \bar{\nabla}_c (G^{abcd} K_{ab}) \delta N_d = 0. \quad (2.117)$$

Usando a condição $\delta N_d|_{\partial\Sigma_t} = 0$,

$$-\bar{\nabla}_c (G^{abcd} K_{ab}) = 0 \Rightarrow -2\bar{\nabla}_c \Pi^{cd} = 0. \quad (2.118)$$

Ou seja,

$$\mathcal{H}^a = -2\bar{\nabla}_b \Pi^{ab}, \quad (2.119)$$

onde usamos (2.100).

2.8 Hamiltoniana ADM

Começemos tomando a transformada de Legendre,

$$\mathcal{H}_{ADM} = \Pi^{ab} \dot{h}_{ab} - \mathcal{L}_{ADM}, \quad (2.120)$$

$$\mathcal{H}_{ADM} = \Pi^{ab} \dot{h}_{ab} - \mathcal{N}(G^{abcd} K_{ab} K_{cd} + \sqrt{h} \mathcal{R}), \quad (2.121)$$

onde $\mathcal{H}_{ADM}$ é a densidade hamiltoniana ADM. Precisamos escrevê-la apenas em termos dos momentos e da métrica induzida. Logo,

$$\Pi^{ab}\dot{h}_{ab} = \Pi^{ab}(2\mathcal{N}K_{ab} + \bar{\nabla}_a N_b + \bar{\nabla}_b N_a) = \Pi^{ab}(2\mathcal{N}K_{ab} + 2\bar{\nabla}_a N_b), \quad (2.122)$$

onde usamos (2.62). Fazendo o cálculo passo a passo, podemos começar combinando

$$\begin{aligned} 2\mathcal{N}\Pi^{ab}K_{ab} - \mathcal{N}G^{abcd}K_{ab}K_{cd} &= 2\mathcal{N}G^{abcd}K_{ab}K_{cd} - \mathcal{N}G^{abcd}K_{ab}K_{cd} \\ &= \mathcal{N}G^{abcd}K_{ab}K_{cd}, \end{aligned} \quad (2.123)$$

onde usamos (2.100). Portanto,

$$\mathcal{H}_{ADM} = \mathcal{N}G^{abcd}K_{ab}K_{cd} + 2\Pi^{ab}\bar{\nabla}_a N_b - \mathcal{N}\sqrt{h}\mathcal{R}, \quad (2.124)$$

$$\mathcal{H}_{ADM} = \mathcal{N}(G^{abcd}K_{ab}K_{cd} - \sqrt{h}\mathcal{R}) + 2\Pi^{ab}\bar{\nabla}_a N_b. \quad (2.125)$$

Integrando o segundo termo por partes e ignorando derivadas totais, obtemos

$$\mathcal{H}_{ADM} = \mathcal{N}(G^{abcd}K_{ab}K_{cd} - \sqrt{h}\mathcal{R}) - 2N_b\bar{\nabla}_a \Pi^{ab}. \quad (2.126)$$

Assim,

$$\mathcal{H}_{ADM} = \mathcal{N}\mathcal{H} + N_a\mathcal{H}^a, \quad (2.127)$$

onde usamos (2.110) e (2.119). Vemos que a densidade hamiltoniana depende apenas dos vínculos da relatividade geral, e as consequências disso serão exploradas quando tratarmos da quantização canônica da gravitação.

Mencionado o procedimento de quantização canônica que pretendemos realizar nos próximos capítulos, se mostra útil escrever a densidade hamiltoniana em termos do par de variáveis canônicas (h_{ab}, Π^{ab}) . Substituindo (2.100) em (2.125), obtemos,

$$\mathcal{H}_{ADM} = \mathcal{N}(G^{abcd}K_{ab}K_{cd} - \sqrt{h}\mathcal{R}) - 2N_b\bar{\nabla}_a \Pi^{ab}, \quad (2.128)$$

$$\mathcal{H}_{ADM} = \mathcal{N}(\Pi^{ab}K_{ab} - \sqrt{h}\mathcal{R}) - 2N_b\bar{\nabla}_a \Pi^{ab}, \quad (2.129)$$

e agora substituindo (2.98) na expressão acima, chegamos em,

$$\mathcal{H}_{ADM} = \mathcal{N}(G_{abcd}\Pi^{ab}\Pi^{cd} - \sqrt{h}\mathcal{R}) - 2N_b\bar{\nabla}_a \Pi^{ab}. \quad (2.130)$$

Ainda em nível clássico, notamos que a Hamiltoniana ADM se anula na superfície de vínculos. De fato,

$$H_{ADM} = \int_{\Sigma} d^3y \mathcal{H}_{ADM} \Rightarrow H_{ADM} = \int_{\Sigma} d^3y (\mathcal{N}\mathcal{H} + N_a\mathcal{H}^a). \quad (2.131)$$

Como,

$$\mathcal{H} \approx 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{H}^a \approx 0, \quad (2.132)$$

segue que

$$H_{ADM} \approx 0. \quad (2.133)$$

Apesar de frequentemente se escrever a igualdade com “=”, o mais correto aqui é usar o símbolo de igualdade fraca “ $\approx$ ”. O motivo é que esses vínculos não são válidos em todo o espaço de fase, eles definem uma subvariedade (mais precisamente, uma hipersuperfície) do espaço de fase⁹, e apenas nela a igualdade é satisfeita.

Isso não é mero preciosismo acadêmico: como a relatividade geral é invariante por difeomorfismos, ela pode ser tratada como uma teoria de calibre, e surgem sutilezas associadas a essa estrutura. Antes, porém, façamos um interlúdio sobre a conexão entre vínculos e teorias de calibre na formulação hamiltoniana.

2.9 Conexão entre vínculos e teorias de calibre na forma hamiltoniana

Seja uma coleção arbitrária de campos $q^i(x)$, onde i inclui índices internos e espaciais. O lagrangiano da teoria tem a forma

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(q, \partial q, \dot{q}), \quad (2.134)$$

e define-se o momento canônico por

$$p_i = \frac{\delta L}{\delta \dot{q}^i}. \quad (2.135)$$

Em teorias “regulares”, é possível inverter $\dot{q}^i$ em termos de (q, p) . Por outro lado, em teorias de calibre, a matriz hessiana em relação às velocidades,

$$W_{ij} = \frac{\delta^2 L}{\delta \dot{q}^i \delta \dot{q}^j}, \quad (2.136)$$

é singular. Portanto, a relação (2.135) não pode ser invertida para todos os campos. Isso gera restrições, ou seja, *vínculos primários*, que são funções da forma

$$\Phi_\alpha(q, p) \approx 0, \quad (2.137)$$

onde α denota cada um dos vínculos que a teoria possui. Novamente, o símbolo $\approx$ (igualdade fraca) indica que a expressão é válida somente na subvariedade de vínculos do espaço de fase, em particular, não se deve impor $\Phi_\alpha = 0$ antes de calcular os parênteses de Poisson, cuja a definição para campos é dada por [29],

$$\{X(\vec{x}), Y(\vec{y})\} = \int d^3\vec{z} \left(\frac{\delta X(\vec{x})}{\delta \phi_i(\vec{z})} \frac{\delta Y(\vec{y})}{\delta \Pi^j(\vec{z})} - \frac{\delta X(\vec{x})}{\delta \Pi^j(\vec{z})} \frac{\delta Y(\vec{y})}{\delta \phi_i(\vec{z})} \right), \quad (2.138)$$

onde X e Y são variáveis dinâmicas arbitrárias, enquanto ϕ_i são campos de natureza arbitrária.

⁹ Os vínculos definem uma hipersuperfície no espaço de fase (ver [29]).

De modo geral, os vínculos $\Phi_\alpha \approx 0$ definem uma subvariedade $\Gamma_C \subset \Omega$, onde Ω denota o espaço de fase. A dinâmica física da teoria ocorre em Γ_C , porém há redundâncias: pontos dessa subvariedade podem representar o mesmo estado físico por estarem conectados por uma *transformação de calibre*.

Seguindo, obtemos a hamiltoniana canônica,

$$H_c = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x (p_i \dot{q}^i - \mathcal{L}). \quad (2.139)$$

Contudo, levando em conta a existência de vínculos, a quantidade relevante é a hamiltoniana total,

$$H_T = H_c + \int d^3x u^\alpha \Phi_\alpha, \quad (2.140)$$

onde $u^\alpha(x)$ são multiplicadores de Lagrange, em geral funções do tempo e do espaço. Como discutido anteriormente, a dinâmica ocorre na subvariedade determinada pelos vínculos, o que exige que eles sejam preservados no tempo:

$$\dot{\Phi}_\alpha = \{\Phi_\alpha, H_T\} \approx 0. \quad (2.141)$$

Isso permite:

- determinar alguns u^α ;
- gerar vínculos secundários $\chi_\beta \approx 0$.

Esse procedimento é conhecido como *algoritmo de Dirac–Bergmann* (ver [22] e [29]). Ele deve ser aplicado até fechar, isto é, até que não surjam novos vínculos e todos os multiplicadores de Lagrange sejam determinados (ou permaneçam arbitrários, quando associados a vínculos de primeira classe).

Obtido o conjunto completo de vínculos, classificamo-los de acordo com a álgebra de Poisson:

- Vínculos de primeira classe G : aqueles cujos parênteses de Poisson com todos os vínculos são fracamente nulos,

$$\{G, \Phi_\alpha\} \approx 0, \quad (2.142)$$

- Vínculos de segunda classe S_a : aqueles para os quais a matriz

$$C_{ab}(x, y) = \{S_a(x), S_b(y)\} \quad (2.143)$$

é inversível (na subvariedade de vínculos).

Quanto à origem, os vínculos primários são aqueles oriundos da definição do momento canônico, enquanto os vínculos secundários surgem da consistência da preservação temporal dos vínculos. Apesar dessa separação, do ponto de vista da dinâmica, não há diferença essencial entre eles. A vantagem da classificação em primeira e segunda classe é conceitual: vínculos de primeira classe estão associados à liberdade de calibre, enquanto os de segunda classe são restrições reais¹⁰ no espaço de fase.

As transformações de calibre, no formalismo hamiltoniano, tomam a forma de transformações infinitesimais geradas por um funcional gerador. Uma construção sistemática é a de Castellani [9]. No caso simples em que há uma cadeia primário–secundário, o gerador pode ser escrito esquematicamente como

$$G[\Phi, \chi] = \int d^3x (\dot{\zeta} \Phi + \zeta \chi), \quad (2.144)$$

onde ζ é um parâmetro infinitesimal, e Φ e χ são vínculos de primeira classe (primário e secundário, respectivamente). A transformação de calibre é, portanto,

$$\delta_\zeta F = \{F, G[\Phi, \chi]\}, \quad (2.145)$$

onde F é uma variável dinâmica arbitrária. Essa construção permite definir os observáveis de Dirac como variáveis dinâmicas invariantes por transformações de calibre, isto é,

$$\{O, G[\Phi, \chi]\} \approx 0. \quad (2.146)$$

Uma vez que os vínculos caracterizam restrições no espaço de fase, é natural que afetem os graus de liberdade da teoria¹¹. Para um sistema com N coordenadas q^i (logo, $2N$ dimensões no espaço de fase):

- cada vínculo de segunda classe remove 1 dimensão do espaço de fase;
- cada vínculo de primeira classe remove 2 dimensões do espaço de fase (uma devido à equação de vínculo e outra devido à simetria de calibre).

Assim,

$$\text{Graus de liberdade} = N - (\text{vínculos de 1ª classe}) - \frac{1}{2}(\text{vínculos de 2ª classe}). \quad (2.147)$$

¹⁰ Uma maneira de lidar com vínculos de segunda classe é por meio dos parênteses de Dirac, úteis na quantização de teorias com vínculos. O presente trabalho não cobrirá tal procedimento, recomenda-se [4] e [12].

¹¹ Neste trabalho, esses graus de liberdade são os campos.

2.9.1 Formulação Hamiltoniana do Eletromagnetismo

A melhor forma de ilustrar o formalismo de teorias com vínculos é por meio da formulação hamiltoniana do eletromagnetismo.

Seja a densidade lagrangiana de Maxwell,

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \quad (2.148)$$

sendo $F_{\alpha\beta}$ o tensor de campo, onde

$$F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha} \quad , \quad F_{0a} = \partial_0 A_a - \partial_a A_0 = -E_a \quad \text{e} \quad F_{ab} = \epsilon_{abc} B^c. \quad (2.149)$$

Aqui, o par (A_0, A_a) é o potencial eletromagnético, E_a e B_a são os campos elétrico e magnético, respectivamente, e ϵ_{abc} é o símbolo de Levi-Civita em três dimensões. Então,

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}(2F_{0i}F^{0i} + F_{ij}F^{ij}) = -\frac{1}{4}(-2E_i E^i + \epsilon_{ijk}\epsilon^{ijl} B^k B_l), \quad (2.150)$$

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}[-2\vec{E}^2 + (\delta_k^l \delta_j^i - \delta_k^i \delta_j^l) B^k B_l] = -\frac{1}{4}[-2\vec{E}^2 + (3\delta_k^l - \delta_k^l) B^k B_l], \quad (2.151)$$

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}(-2\vec{E}^2 + 2\delta_k^l B^k B_l), \quad (2.152)$$

ou seja,

$$\mathcal{L}_{EM} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2). \quad (2.153)$$

Os momentos canônicos em relação ao par (A_0, A_a) são

$$\Pi_{EM}^0 = \frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial \dot{A}_0} = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \dot{A}_0} (2F_{0i}F^{0i} + F_{ij}F^{ij}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial (F_{0i}F^{0i})}{\partial \dot{A}_0}, \quad (2.154)$$

$$\Pi_{EM}^0 = -\frac{2}{2} F_{0i} \frac{\partial F_{0i}}{\partial \dot{A}_0} = -(\partial_0 A_i - \partial_i A_0) \frac{\partial}{\partial \dot{A}_0} (\partial_0 A_i - \partial_i A_0). \quad (2.155)$$

Vemos claramente que

$$\Pi_{EM}^0 = 0, \quad (2.156)$$

portanto, trata-se de um vínculo primário. Temos também

$$\Pi_{EM}^a = \frac{\partial \mathcal{L}_{EM}}{\partial \dot{A}_a} = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \dot{A}_a} (2F_{0i}F^{0i} + F_{ij}F^{ij}) = -\frac{2}{2} F^{0i} \frac{\partial F_{0i}}{\partial \dot{A}_a}, \quad (2.157)$$

$$\Pi_{EM}^a = -(\partial^0 A^i - \partial^i A^0) \frac{\partial}{\partial \dot{A}_a} (\partial_0 A_i - \partial_i A_0) = -\underbrace{(\partial^0 A^i - \partial^i A^0)}_{=E^i} \delta_i^a, \quad (2.158)$$

$$\Pi_{EM}^a = -E^a. \quad (2.159)$$

De posse da expressão do momento $\Pi^a = -E^a$, podemos escrever

$$F_{0a} = \partial_0 A_a - \partial_a A_0 = -E_a = \Pi_a \quad \Rightarrow \quad \dot{A}_a = \Pi_a + \partial_a A_0. \quad (2.160)$$

Assim, a densidade hamiltoniana pode ser calculada:

$$\mathcal{H}_{EM} = \Pi^a \dot{A}_a - \mathcal{L}_{EM} = \Pi^a (\Pi_a + \partial_a A_0) - \mathcal{L}_{EM}, \quad (2.161)$$

$$\mathcal{H}_{EM} = \Pi^a \Pi_a + \Pi^a \partial_a A_0 - \mathcal{L}_{EM} = \Pi^a \Pi_a + \Pi^a \partial_a A_0 - \frac{1}{2} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2), \quad (2.162)$$

onde usamos (2.153). Agora, notando que

$$\vec{E}^2 = E_a E^a = \Pi_a \Pi^a = \vec{\Pi}^2,$$

temos

$$\mathcal{H}_{EM} = \vec{\Pi}^2 + \Pi^a \partial_a A_0 - \frac{1}{2} (\vec{\Pi}^2 - \vec{B}^2) = \frac{1}{2} (\vec{\Pi}^2 + \vec{B}^2) + \Pi^a \partial_a A_0. \quad (2.163)$$

Integrando por partes,

$$\mathcal{H}_{EM} = \frac{1}{2} (\vec{\Pi}^2 + \vec{B}^2) - A_0 (\partial_a \Pi^a) + \partial_a (A_0 \Pi^a). \quad (2.164)$$

Ignorando o termo de contorno, obtemos

$$\mathcal{H}_{EM} = \frac{1}{2} (\vec{\Pi}^2 + \vec{B}^2) - A_0 (\partial_a \Pi^a) = \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + A_0 (\partial_a E^a). \quad (2.165)$$

Finalmente, a hamiltoniana é

$$H_{EM} = \int d^3x \mathcal{H}_{EM} = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + A_0 (\partial_a E^a) \right], \quad (2.166)$$

ficando evidente que as variáveis dinâmicas são o par (A_a, E^a) .

A partir daqui, obteremos os parênteses de Poisson fundamentais da teoria eletromagnética, assim como suas equações de movimento. Vale observar que os parênteses de Poisson são tomados a tempo constante, isto é, as integrais são consideradas sobre uma hipersuperfície tipo-espaco de tempo constante, por isso, é necessário explicitar que as variáveis dinâmicas envolvidas no cálculo são avaliadas em pontos espaciais distintos. Seja, então,

$$\begin{aligned} \{A_a(\vec{x}), E^b(\vec{y})\} &= -\{A_a(\vec{x}), \Pi^b(\vec{y})\} \\ &= -\int d^3z \left[\frac{\delta A_a(\vec{x})}{\delta A_c(\vec{z})} \frac{\delta \Pi^b(\vec{y})}{\delta \Pi^c(\vec{z})} - \underbrace{\frac{\delta A_a(\vec{x})}{\delta \Pi^c(\vec{z})} \frac{\delta \Pi^b(\vec{y})}{\delta A_c(\vec{z})}}_{=0} \right] \\ &= -\int d^3z \delta_a^c \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{z}) \delta_c^b \delta^{(3)}(\vec{y} - \vec{z}) \\ &= -\delta_a^b \int d^3z \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{z}) \delta^{(3)}(\vec{y} - \vec{z}). \end{aligned} \quad (2.167)$$

Usando a propriedade de filtragem da delta de Dirac, obtemos

$$\{A_a(\vec{x}), E^b(\vec{y})\} = -\delta_a^b \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \iff \{A_a(\vec{x}), \Pi^b(\vec{y})\} = \delta_a^b \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (2.168)$$

Segue também que

$$\{A_a(\vec{x}), A^b(\vec{y})\} = 0 \quad \text{e} \quad \{\Pi_a(\vec{x}), \Pi^b(\vec{y})\} = 0. \quad (2.169)$$

As equações de Hamilton são

$$\begin{aligned} \dot{A}_a(\vec{x}) &= \{A_a(\vec{x}), H_{EM}\} \\ &= \{A_a(\vec{x}), \int d^3y \left[\frac{1}{2}(\vec{\Pi}^2(\vec{y}) + \vec{B}^2(\vec{y})) - A_0(\vec{y}) \partial_b^{\vec{y}} \Pi^b(\vec{y}) \right]\} \\ &= \int d^3y \left[\frac{1}{2} \{A_a(\vec{x}), \vec{\Pi}^2(\vec{y})\} - A_0(\vec{y}) \{A_a(\vec{x}), \partial_b^{\vec{y}} \Pi^b(\vec{y})\} \right] \\ &= \int d^3y \left[\{A_a(\vec{x}), \Pi^b(\vec{y})\} \Pi_b(\vec{y}) - \partial_b^{\vec{y}} (A_0(\vec{y}) \{A_a(\vec{x}), \Pi^b(\vec{y})\}) \right] \\ &= \int d^3y \left[\delta_a^b \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \Pi_b(\vec{y}) - \delta_a^b \partial_b^{\vec{y}} (\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) A_0(\vec{y})) \right]. \end{aligned} \quad (2.170)$$

Aplicando novamente a propriedade de filtragem da delta de Dirac e integrando o segundo termo por partes, chegamos a

$$\dot{A}_a = \Pi_a + \partial_a A_0, \quad (2.171)$$

em concordância com (2.160). Podemos calcular também

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}^a(\vec{x}) &= \{\Pi^a(\vec{x}), H_{EM}\} \\ &= \{\Pi^a(\vec{x}), \int d^3y \left[\frac{1}{2}(\vec{\Pi}^2(\vec{y}) + \vec{B}^2(\vec{y})) - A_0(\vec{y}) \partial_b^{\vec{y}} \Pi^b(\vec{y}) \right]\} \\ &= \frac{1}{2} \int d^3y \{ \Pi^a(\vec{x}), \vec{B}^2(\vec{y}) \} \\ &= \int d^3y \{ \Pi^a(\vec{x}), B_b(\vec{y}) \} B^b(\vec{y}). \end{aligned} \quad (2.172)$$

Para efetuarmos essa operação, é necessário escrever o campo magnético em termos do potencial eletromagnético. Sendo

$$F_{ab} = \epsilon_{abc} B^c, \quad (2.173)$$

podemos explicitar o campo magnético:

$$\epsilon^{abd} F_{ab} = \epsilon^{abd} \epsilon_{abc} B^c \Rightarrow \epsilon^{abd} F_{ab} = (\delta_b^d \delta_c^d - \delta_c^b \delta_b^d) B^c. \quad (2.174)$$

Logo,

$$(3B^d - \delta_b^d B^b) = \epsilon^{abd} F_{ab} \Rightarrow (3B^d - B^d) = \epsilon^{abd} F_{ab}, \quad (2.175)$$

e, portanto,

$$B^c = \frac{1}{2} \epsilon^{abc} F_{ab}. \quad (2.176)$$

Essa expressão pode ser simplificada notando que

$$B^c = \frac{1}{2} \epsilon^{abc} (\partial_a A_b - \partial_b A_a) = \frac{1}{2} \epsilon^{abc} \partial_a A_b - \frac{1}{2} \epsilon^{abc} \partial_b A_a. \quad (2.177)$$

Podemos permutar os índices a e b no segundo termo:

$$B^c = \frac{1}{2}\epsilon^{abc}\partial_a A_b - \frac{1}{2}\epsilon^{bac}\partial_a A_b. \quad (2.178)$$

Usando a antissimetria do símbolo de Levi-Civita, $\epsilon^{abc} = -\epsilon^{bac}$, chegamos a

$$B^c = \epsilon^{abc}\partial_a A_b. \quad (2.179)$$

Voltando à equação de Hamilton,

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}^a(\vec{x}) &= \int d^3y \epsilon^{cde} \epsilon_{efb} \{ \Pi^a(\vec{x}), \partial_c^{\vec{y}} A_d(\vec{y}) \} \partial_{\vec{y}}^e A^f(\vec{y}) \\ &= \int d^3y (\delta_e^c \delta_f^d - \delta_f^c \delta_e^d) \partial_c^{\vec{y}} \{ \Pi^a(\vec{x}), A_d(\vec{y}) \} \partial_{\vec{y}}^e A^f(\vec{y}) \\ &= - \int d^3y (\delta_e^c \delta_f^d - \delta_f^c \delta_e^d) \partial_c^{\vec{y}} [\delta_d^a \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})] \partial_{\vec{y}}^e A^f(\vec{y}) \\ &= - \int d^3y (\delta_e^c \delta_f^a - \delta_f^c \delta_e^a) \partial_c^{\vec{y}} [\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})] \partial_{\vec{y}}^e A^f(\vec{y}) \\ &= - \int d^3y \partial_c^{\vec{y}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) (\partial_{\vec{y}}^c A^a(\vec{y}) - \partial_{\vec{y}}^a A^c(\vec{y})). \end{aligned} \quad (2.180)$$

Integrando por partes,

$$\dot{\Pi}^a(\vec{x}) = \int d^3y \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \partial_c^{\vec{y}} (\partial_{\vec{y}}^c A^a(\vec{y}) - \partial_{\vec{y}}^a A^c(\vec{y})), \quad (2.181)$$

portanto,

$$\dot{\Pi}^a = \partial_c F^{ca}. \quad (2.182)$$

Como

$$\dot{\Pi}^a = -\dot{E}^a = -\partial_0 E^a = -\partial_0 F^{0a}, \quad (2.183)$$

temos

$$-\partial_0 F^{0a} = \partial_c F^{ca} \quad \Rightarrow \quad \partial_0 F^{0a} + \partial_c F^{ca} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\alpha F^{\alpha a} = 0. \quad (2.184)$$

Lembremos agora que o vínculo primário da teoria eletromagnética é $\Pi^0 = 0$. É importante encontrar o vínculo secundário oriundo da condição de consistência,

$$\dot{\Pi}^0 = \{ \Pi^0, H_{EM} \} \approx 0. \quad (2.185)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \{ \Pi^0(\vec{x}), \int d^3y \left[\frac{1}{2}(\vec{\Pi}^2 + \vec{B}^2) - A_0(\vec{y}) \partial_a^{\vec{y}} \Pi^a(\vec{y}) \right] \} &= - \{ \Pi^0(\vec{x}), \int d^3y A_0(\vec{y}) \partial_a^{\vec{y}} \Pi^a(\vec{y}) \} \\ &= - \int d^3y \{ \Pi^0(\vec{x}), A_0(\vec{y}) \} \partial_a^{\vec{y}} \Pi^a(\vec{y}) \\ &= \int d^3y \delta_0^0 \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \partial_a^{\vec{y}} \Pi^a(\vec{y}) \\ &= \partial_a \Pi^a(\vec{x}). \end{aligned} \quad (2.186)$$

Conclui-se, portanto,

$$\partial_a \Pi^a = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_a E^a = 0. \quad (2.187)$$

Essa expressão é a conhecida lei de Gauss. Ela aparece aqui como um vínculo secundário da teoria eletromagnética de Maxwell:

$$\mathbb{G} = \partial_a E^a. \quad (2.188)$$

A ausência de derivadas temporais explicita que esta não é uma equação de evolução, mas sim uma restrição sobre os dados iniciais em uma hipersuperfície inicial.

Salientemos também que esse resultado já estava implícito ao calcular a hamiltoniana,

$$H_{EM} = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\vec{\Pi}^2 + \vec{B}^2) - A_0 (\partial_a \Pi^a) \right], \quad (2.189)$$

onde A_0 desempenha o papel de multiplicador de Lagrange (compare com (2.140)). Além disso, como deve ter ficado claro, o vínculo de Gauss é um vínculo de primeira classe, afinal,

$$\{\mathbb{G}, \Pi^0\} = \{\partial_a E^a, \Pi^0\} = 0. \quad (2.190)$$

Como não há outros vínculos secundários, conclui-se que $\mathbb{G}$ gera transformações de calibre.

Seja, então, o gerador das transformações de calibre (compare com (2.144)). Aqui adotamos uma forma reduzida do gerador, suficiente para descrever a ação sobre A_a e E^a :

$$G = \int d^3x \Lambda(\vec{x}) \partial_a E^a(\vec{x}), \quad (2.191)$$

onde Λ é o parâmetro infinitesimal de calibre. De posse do gerador, vejamos como ele atua no potencial eletromagnético:

$$\begin{aligned} \delta_\Lambda A_a(\vec{x}) &= \{A_a(\vec{x}), G\} = \{A_a(\vec{x}), \int d^3y \Lambda(\vec{y}) \partial_b E^b(\vec{y})\} \\ &= - \int d^3y \Lambda(\vec{y}) \partial_b^{\vec{y}} \{A_a(\vec{x}), \Pi^b(\vec{y})\} \\ &= - \int d^3y \Lambda(\vec{y}) \partial_b^{\vec{y}} \delta_a^b \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \\ &= \int d^3y \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \partial_a^{\vec{y}} \Lambda(\vec{y}) \\ &= \partial_a \Lambda(\vec{x}). \end{aligned} \quad (2.192)$$

onde integramos por partes e aplicamos a propriedade de filtragem da delta de Dirac na penúltima linha. Essa expressão explicita a liberdade de calibre do potencial eletromagnético:

$$A_a \rightarrow A_a + \partial_a \Lambda. \quad (2.193)$$

Outro cálculo interessante é obter a transformação de calibre sofrida pelo campo elétrico:

$$\begin{aligned}
 \delta_{\Lambda} E^a(\vec{x}) &= \{E^a(\vec{x}), G\} = \{E^a(\vec{x}), \int d^3y \Lambda(\vec{y}) \partial_b E^b(\vec{y})\} \\
 &= \int d^3y \Lambda(\vec{y}) \partial_b^{\vec{y}} \underbrace{\{E^a(\vec{x}), E^b(\vec{y})\}}_{=0} \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.194}$$

Esses resultados estão em consonância com a classificação de Dirac: a liberdade de calibre reflete o fato de que certas variáveis dinâmicas não correspondem diretamente a observáveis físicos. Em outras palavras, podemos realizar transformações que alteram a forma funcional dos potenciais sem modificar as quantidades mensuráveis. No eletromagnetismo, isso aparece de modo explícito: o potencial A_a transforma-se por

$$A_a \rightarrow A_a + \partial_a \Lambda,$$

enquanto o campo elétrico E^a permanece invariante, evidenciando que os observáveis físicos não dependem da escolha de calibre.

Outro aspecto importante é que o grupo de simetria do eletromagnetismo é o $U(1)$ ¹², sendo este um *grupo de Lie abeliano*. Diz-se que um grupo é abeliano quando duas transformações (de calibre) realizadas em ordens diferentes conduzem ao mesmo resultado.

Considerando os geradores X_a de um grupo de Lie, eles satisfazem a *álgebra de Lie*,

$$[X_a, X_b] = i f_{ab}^c X_c, \tag{2.195}$$

onde f_{ab}^c são as *constantes de estrutura*. Um grupo é abeliano se, e somente se, todas as constantes de estrutura são nulas, isto é, $f_{ab}^c = 0$ (equivalentemente, $[X_a, X_b] = 0$ para todo a, b). Caso contrário, o grupo é dito *não abeliano*.

O fato de $U(1)$ ser abeliano reflete-se, no formalismo hamiltoniano, no fecho trivial da álgebra do gerador de calibre:

$$\{G[\Lambda_1], G[\Lambda_2]\} = 0, \tag{2.196}$$

onde Λ_1 e Λ_2 são dois parâmetros infinitesimais (em geral distintos), correspondendo a duas transformações de calibre. De fato, esse resultado é esperado, pois o cálculo envolve apenas parênteses de Poisson entre E^a e ele mesmo, os quais são nulos.

¹² O grupo unitário $U(1)$ é o mais simples da física: ele descreve simetrias de fase, sendo representado pelos números complexos de módulo 1, usualmente escritos como exponenciais complexas.

2.10 De volta à Relatividade Geral: Vínculos Secundários

De volta à gravidade, vimos que $\mathcal{P}_{\mathcal{N}} = 0$ e $\mathcal{P}_{\vec{N}} = 0$ são os vínculos primários da teoria e como tal, eles devem ser preservados pela evolução temporal gerada pela hamiltoniana,

$$\dot{\mathcal{P}}_{\mathcal{N}} = \{\mathcal{P}_{\mathcal{N}}, H_{ADM}\} \approx 0 \quad \text{e} \quad \dot{\mathcal{P}}_{\vec{N}} = \{\mathcal{P}_{\vec{N}}, H_{ADM}\} \approx 0. \quad (2.197)$$

É natural indagar sobre a existência de vínculos secundários, afinal, podemos obtê-los por meio da condição de consistência. Começemos por

$$\begin{aligned} \{\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(\vec{x}), H_{ADM}\} &= \{\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(\vec{x}), \int_{\Sigma_t} d^3y (\mathcal{N}(\vec{y}) \mathcal{H}(\vec{y}) + N_a(\vec{y}) \mathcal{H}^a(\vec{y}))\} \\ &= \int_{\Sigma_t} d^3y \{\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(\vec{x}), \mathcal{N}(\vec{y})\} \mathcal{H}(\vec{y}). \end{aligned} \quad (2.198)$$

Da condição $\dot{\mathcal{P}}_{\mathcal{N}} \approx 0$, concluímos que $\mathcal{H} \approx 0$, sendo $\mathcal{H}$ o vínculo hamiltoniano (secundário). Não deve ser surpresa que, ao fazer o mesmo cálculo para $\mathcal{P}_{\vec{N}}$, obteremos $\mathcal{H}^a$ como vínculo secundário. De fato,

$$\begin{aligned} \{\mathcal{P}_{\vec{N}}(\vec{x}), H_{ADM}\} &= \{\mathcal{P}_{\vec{N}}(\vec{x}), \int_{\Sigma_t} d^3y (\mathcal{N}(\vec{y}) \mathcal{H}(\vec{y}) + N_a(\vec{y}) \mathcal{H}^a(\vec{y}))\} \\ &= \int_{\Sigma_t} d^3y \{\mathcal{P}_{\vec{N}}(\vec{x}), N_a(\vec{y})\} \mathcal{H}^a(\vec{y}). \end{aligned} \quad (2.199)$$

Assim, $\dot{\mathcal{P}}_{\vec{N}} \approx 0 \Rightarrow \mathcal{H}^a \approx 0$. A trivialidade desses resultados mostra claramente que não se trata de equações de evolução, em particular, esses vínculos caracterizam restrições no espaço de fase. Como veremos, eles estão relacionados à simetria de calibre da gravitação.

Quanto às equações de evolução, isto é, às equações de Hamilton, antes calculemos os parênteses de Poisson fundamentais para o par de coordenadas canônicas (h_{ab}, Π^{ab}) . Então,

$$\begin{aligned} \{h_{ab}(\vec{x}), \Pi^{cd}(\vec{y})\} &= \int_{\Sigma_t} d^3z \left(\frac{\delta h_{ab}(\vec{x})}{\delta h_{ij}(\vec{z})} \frac{\delta \Pi^{cd}(\vec{y})}{\delta \Pi^{ij}(\vec{z})} - \frac{\delta h_{ab}(\vec{x})}{\delta \Pi^{ij}(\vec{z})} \frac{\delta \Pi^{cd}(\vec{y})}{\delta h_{ij}(\vec{z})} \right) \\ &= \int_{\Sigma_t} d^3z \delta_a^i \delta_b^j \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{z}) \delta_i^c \delta_j^d \delta^{(3)}(\vec{y} - \vec{z}). \end{aligned} \quad (2.200)$$

Usando a filtragem da delta de Dirac, chegamos a

$$\{h_{ab}(\vec{x}), \Pi^{cd}(\vec{y})\} = \delta_a^c \delta_b^d \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (2.201)$$

Como Π^{cd} é simétrico, essa relação também pode ser escrita na forma simetrizada:

$$\{h_{ab}(\vec{x}), \Pi^{cd}(\vec{y})\} = \frac{1}{2} (\delta_a^c \delta_b^d + \delta_a^d \delta_b^c) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (2.202)$$

Além disso, obviamente,

$$\{h_{ab}(\vec{x}), h_{cd}(\vec{y})\} = 0 \quad \text{e} \quad \{\Pi^{ab}(\vec{x}), \Pi^{cd}(\vec{y})\} = 0. \quad (2.203)$$

Essas relações serão de grande importância quando fizermos a quantização canônica da relatividade geral.

A evolução temporal das variáveis canônicas é gerada pela hamiltoniana. Começemos por

$$\begin{aligned} \dot{h}_{ab}(\vec{x}) &= \{h_{ab}(\vec{x}), H_{ADM}\} \\ &= \{h_{ab}(\vec{x}), \int_{\Sigma_t} d^3y [\mathcal{N}(G_{ijkl}\Pi^{ij}\Pi^{lk} - \sqrt{h}\mathcal{R}) - 2N_i\bar{\nabla}_j\Pi^{ij}]\} \\ &= 2 \int_{\Sigma_t} d^3y [\mathcal{N}(\vec{y})G_{ijkl}(\vec{y})\{h_{ab}(\vec{x}), \Pi^{ij}(\vec{y})\}\Pi^{lk}(\vec{y}) - N_i(\vec{y})\bar{\nabla}_j^{\vec{y}}\{h_{ab}(\vec{x}), \Pi^{ij}(\vec{y})\}] \\ &= 2 \int_{\Sigma_t} d^3y [\mathcal{N}(\vec{y})G_{ijkl}(\vec{y})\delta_a^i\delta_b^j\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})\Pi^{kl}(\vec{y}) - N_i(\vec{y})\bar{\nabla}_j^{\vec{y}}(\delta_a^i\delta_b^j\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}))]. \end{aligned} \quad (2.204)$$

Integrando o segundo termo por partes,

$$\begin{aligned} \dot{h}_{ab}(\vec{x}) &= 2 \int_{\Sigma_t} d^3y [\mathcal{N}(\vec{y})G_{abkl}(\vec{y})\Pi^{kl}(\vec{y})\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) + \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})\bar{\nabla}_b^{\vec{y}}N_a(\vec{y})] \\ &= 2\mathcal{N}(\vec{x})G_{abkl}(\vec{x})\Pi^{kl}(\vec{x}) + 2\bar{\nabla}_bN_a(\vec{x}). \end{aligned} \quad (2.205)$$

Usando (2.98) e simetrizando os índices a e b no segundo termo, chegamos a

$$\dot{h}_{ab} = 2\mathcal{N}K_{ab} + \bar{\nabla}_aN_b + \bar{\nabla}_bN_a. \quad (2.206)$$

Essa equação de movimento já havia sido obtida anteriormente: ela coincide com a definição da curvatura extrínseca em termos das variáveis ADM (ver (2.62)).

A segunda equação de Hamilton é

$$\dot{\Pi}_{ab} = \{\Pi_{ab}, H_{ADM}\}. \quad (2.207)$$

Devido à complexidade dos cálculos necessários para obtê-la explicitamente, recomenda-se a leitura de [24], onde o desenvolvimento é apresentado em detalhes. Ainda sobre esse ponto, vale comentar que as equações de movimento da relatividade geral na forma hamiltoniana podem ser obtidas de maneira equivalente tomando-se derivadas funcionais da hamiltoniana ADM em relação às variáveis canônicas, a saber,

$$\dot{h}_{ab} = \frac{\delta H_{ADM}}{\delta \Pi^{ab}} \quad \text{e} \quad \dot{\Pi}_{ab} = -\frac{\delta H_{ADM}}{\delta h^{ab}}. \quad (2.208)$$

Esse é, inclusive, o método utilizado em [24], e por isso recomenda-se novamente a sua leitura.

Tanto as equações de movimento quanto os vínculos estão relacionados às equações de campo de Einstein. O formalismo ADM realiza uma decomposição $3 + 1$ do

espaço-tempo por meio de uma folheação composta por hipersuperfícies espaciais. A consequência principal é que equações que originalmente aparecem em forma covariante (com espaço e tempo em pé de igualdade) passam a se decompor em partes “temporais”, “espaciais” e “mistas”. Isso é particularmente útil quando se deseja estudar a evolução de geometrias específicas ou implementar algoritmos computacionais, como ocorre em *relatividade numérica*. Não faremos esses desenvolvimentos aqui por fugirem do escopo desta dissertação, aos leitores interessados recomenda-se a leitura de [6], [19] e [24].

2.11 Propriedades e Significado dos Vínculos

A condição de consistência dos vínculos primários nos permitiu obter os vínculos secundários,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\mathcal{N}} = 0 &\Rightarrow \mathcal{H} = 0 \\ \mathcal{P}_{\vec{N}} = 0 &\Rightarrow \mathcal{H}_a = 0,\end{aligned}\tag{2.209}$$

e uma pergunta natural é: seria possível obter outros vínculos (terciários, ...) se aplicássemos a condição de consistência aos vínculos secundários, isto é,

$$\dot{\mathcal{H}} = \{\mathcal{H}, H_{ADM}\} \approx 0 \quad \text{e} \quad \dot{\mathcal{H}}_a = \{\mathcal{H}_a, H_{ADM}\} \approx 0? \tag{2.210}$$

Ou, de forma explícita,

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{H}}(\vec{x}) &= \int d^3y \mathcal{N}(\vec{y}) \{\mathcal{H}(\vec{x}), \mathcal{H}(\vec{y})\} + \int d^3y N^a(\vec{y}) \{\mathcal{H}(\vec{x}), \mathcal{H}_a(\vec{y})\} \approx 0 \\ \dot{\mathcal{H}}_a(\vec{x}) &= \int d^3y \mathcal{N}(\vec{y}) \{\mathcal{H}_a(\vec{x}), \mathcal{H}(\vec{y})\} + \int d^3y N^b(\vec{y}) \{\mathcal{H}_a(\vec{x}), \mathcal{H}_b(\vec{y})\} \approx 0,\end{aligned}\tag{2.211}$$

onde usamos (2.131). O problema, agora, se reduz a um cálculo concreto: avaliar os parênteses de Poisson nos fornecerá a resposta que procuramos.

Por questão de simplicidade, começaremos pelo vínculo de momento. Da definição (2.119), podemos escrever,

$$\mathcal{H}^a = -2\bar{\nabla}_b \Pi^{ab} \Rightarrow \mathcal{H}_a = -2\bar{\nabla}_b \Pi^b_a. \tag{2.212}$$

Usando o fato de que $\bar{\nabla}_a h_{bc} = 0$, segue que

$$\{\mathcal{H}_a(\vec{x}), \mathcal{H}_b(\vec{y})\} = \{-2h_{ac}(\vec{x})\bar{\nabla}_d^{\vec{x}}\Pi^{dc}(\vec{x}), -2h_{be}(\vec{y})\bar{\nabla}_f^{\vec{y}}\Pi^{fe}(\vec{y})\}, \tag{2.213}$$

$$\{\mathcal{H}_a(\vec{x}), \mathcal{H}_b(\vec{y})\} = 4\{h_{ac}(\vec{x})\bar{\nabla}_d^{\vec{x}}\Pi^{dc}(\vec{x}), h_{be}(\vec{y})\bar{\nabla}_f^{\vec{y}}\Pi^{fe}(\vec{y})\}, \tag{2.214}$$

$$\begin{aligned}\{\mathcal{H}_a(\vec{x}), \mathcal{H}_b(\vec{y})\} &= 4\left[h_{be}(\vec{y})\{h_{ac}(\vec{x}), \bar{\nabla}_f^{\vec{y}}\Pi^{fe}(\vec{y})\}\bar{\nabla}_d^{\vec{x}}\Pi^{dc}(\vec{x}) \right. \\ &\quad \left. + h_{ac}(\vec{x})\{\bar{\nabla}_d^{\vec{x}}\Pi^{dc}(\vec{x}), h_{be}(\vec{y})\}\bar{\nabla}_f^{\vec{y}}\Pi^{fe}(\vec{y})\right],\end{aligned}\tag{2.215}$$

$$\{\mathcal{H}_a(\vec{x}), \mathcal{H}_b(\vec{y})\} = 4 \left[h_{be}(\vec{y}) \bar{\nabla}_f^{\vec{y}} \{h_{ac}(\vec{x}), \Pi^{fe}(\vec{y})\} \bar{\nabla}_d^{\vec{x}} \Pi^{dc}(\vec{x}) + h_{ac}(\vec{x}) \bar{\nabla}_d^{\vec{x}} \{\Pi^{dc}(\vec{x}), h_{be}(\vec{y})\} \bar{\nabla}_f^{\vec{y}} \Pi^{fe}(\vec{y}) \right], \quad (2.216)$$

$$\{\mathcal{H}_a(\vec{x}), \mathcal{H}_b(\vec{y})\} = 4 \left[h_{be}(\vec{y}) \delta_a^f \delta_c^e \bar{\nabla}_f^{\vec{y}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \bar{\nabla}_d^{\vec{x}} \Pi^{dc}(\vec{x}) - h_{ac}(\vec{x}) \delta_b^d \delta_e^c \bar{\nabla}_d^{\vec{x}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \bar{\nabla}_f^{\vec{y}} \Pi^{fe}(\vec{y}) \right] \quad (2.217)$$

$$\{\mathcal{H}_a(\vec{x}), \mathcal{H}_b(\vec{y})\} = 4 \left[h_{bc}(\vec{y}) \bar{\nabla}_a^{\vec{y}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \bar{\nabla}_d^{\vec{x}} \Pi^{dc}(\vec{x}) - h_{ae}(\vec{x}) \bar{\nabla}_b^{\vec{x}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \bar{\nabla}_f^{\vec{y}} \Pi^{fe}(\vec{y}) \right]. \quad (2.218)$$

Para evitar contas muito longas e não deixar a notação muito carregada, optou-se por não usar os parênteses de Poisson na forma simetrizada.

Usando a propriedade (ver [17]),

$$f(x) \partial_a^y \delta(x - y) = f(y) \partial_a^y \delta(x - y) + (\partial_a f)(y) \delta(x - y), \quad (2.219)$$

e, na forma equivalente com $x \leftrightarrow y$,

$$f(y) \partial_a^y \delta(x - y) = f(x) \partial_a^x \delta(x - y) + (\partial_a f)(x) \delta(x - y), \quad (2.220)$$

e levando em conta que $\bar{\nabla}_a h_{bc} = 0$, obtemos

$$\{\mathcal{H}_a(\vec{x}), \mathcal{H}_b(\vec{y})\} = 4 \left[h_{bc}(\vec{x}) \bar{\nabla}_a^{\vec{y}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \bar{\nabla}_d^{\vec{x}} \Pi^{dc}(\vec{x}) - h_{ae}(\vec{x}) \bar{\nabla}_b^{\vec{x}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \bar{\nabla}_f^{\vec{y}} \Pi^{fe}(\vec{x}) \right], \quad (2.221)$$

$$\{\mathcal{H}_a(\vec{x}), \mathcal{H}_b(\vec{y})\} = 2 \bar{\nabla}_d^{\vec{x}} \Pi^{dc}(\vec{x}) h_{bc}(\vec{x}) \bar{\nabla}_a^{\vec{y}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) - 2 \bar{\nabla}_f^{\vec{x}} \Pi^{fe}(\vec{x}) h_{ae}(\vec{x}) \bar{\nabla}_b^{\vec{x}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (2.222)$$

Notando que, na ação sobre $\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$, vale $\bar{\nabla} \rightarrow \partial$, e usando a propriedade,

$$\partial_a^x \delta(x - y) = -\partial_a^y \delta(x - y), \quad (2.223)$$

segue que

$$\{\mathcal{H}_a(\vec{x}), \mathcal{H}_b(\vec{y})\} = -2 \bar{\nabla}_d^{\vec{x}} \Pi^{dc}(\vec{x}) h_{cb}(\vec{x}) \partial_a^{\vec{x}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) - 2 \bar{\nabla}_f^{\vec{x}} \Pi^{fe}(\vec{x}) h_{ea}(\vec{x}) \partial_b^{\vec{x}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (2.224)$$

Concluimos que

$$\{\mathcal{H}_a(\vec{x}), \mathcal{H}_b(\vec{y})\} = \mathcal{H}_b(\vec{x}) \partial_a^{\vec{x}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) + \mathcal{H}_a(\vec{x}) \partial_b^{\vec{x}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (2.225)$$

Esse resultado revela uma característica interessante: a álgebra não possui constantes de estrutura na forma (2.195), mas sim coeficientes que dependem dos pontos do espaço (e, em geral, do próprio campo métrico). Além disso, essa álgebra é fechada na hipersuperfície definida pelos vínculos, isto é,

$$\{\mathcal{H}_a(\vec{x}), \mathcal{H}_b(\vec{y})\} \approx 0, \quad (2.226)$$

o que sugere que não teremos vínculos terciários. Antes de seguir com o cálculo dos dois últimos parênteses de Poisson, investiguemos um pouco mais o papel do vínculo de momento.

Para entendermos melhor o significado desses vínculos e de sua álgebra, consideremos os geradores de transformações de calibre na forma de Castellani (compare com (2.144)),

$$\mathbb{H}[\mathcal{N}] = \int d^3x \mathcal{N} \mathcal{H} \quad \text{e} \quad \mathbb{P}[\vec{N}] = \int d^3x N^a \mathcal{H}_a, \quad (2.227)$$

de modo que a Hamiltoniana ADM toma a forma,

$$\mathbb{H}_{ADM}[\mathcal{N}, \vec{N}] = \mathbb{H}[\mathcal{N}] + \mathbb{P}[\vec{N}]. \quad (2.228)$$

De posse dos geradores, vejamos a ação deles nas variáveis canônicas da relatividade geral. Começemos por,

$$\begin{aligned} \{h_{ab}(\vec{x}), \mathbb{P}[\vec{N}]\} &= \{h_{ab}(\vec{x}), \int d^3y (-2N_c(\vec{y}) \bar{\nabla}_d^{\vec{y}} \Pi^{cd}(\vec{y}))\} \\ &= 2 \int d^3y \{h_{ab}(\vec{x}), \Pi^{cd}(\vec{y})\} \bar{\nabla}_d^{\vec{y}} N_c(\vec{y}) \\ &= 2 \int d^3y \frac{1}{2} (\delta_a^c \delta_b^d + \delta_a^d \delta_b^c) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \bar{\nabla}_d^{\vec{y}} N_c(\vec{y}) \\ &= (\delta_a^c \delta_b^d + \delta_a^d \delta_b^c) \bar{\nabla}_d^{\vec{x}} N_c(\vec{x}) \\ &= \bar{\nabla}_a N_b + \bar{\nabla}_b N_a. \end{aligned} \quad (2.229)$$

A transformação de calibre gerada pelo vínculo de momento corresponde aos difeomorfismos espaciais, isto é, reparametrizações dentro de Σ_t . Isso fica claro olhando para a expressão acima, pois o *shift* é o objeto usado para parametrizar deslocamentos espaciais, e uma combinação simétrica de suas derivadas covariantes revela exatamente esse comportamento.

Por outro lado, se tomarmos $N_a \rightarrow \xi_a$, onde ξ_a é um campo vetorial arbitrário, podemos reescrever essa transformação de calibre para uma direção qualquer:

$$\delta_{\xi} h_{ab} = \{h_{ab}, \mathbb{P}[\xi_c]\} = \bar{\nabla}_a \xi_b + \bar{\nabla}_b \xi_a = \mathcal{L}_{\xi} h_{ab}, \quad (2.230)$$

onde

$$\mathcal{L}_{\xi} h_{ab} = \bar{\nabla}_a \xi_b + \bar{\nabla}_b \xi_a. \quad (2.231)$$

Calculemos agora

$$\begin{aligned} \delta_{\xi} \Pi^{ab} &= \{\Pi^{ab}, \mathbb{P}[\xi_c]\} \\ &= \{\Pi^{ab}(\vec{x}), \int d^3y \xi_c(\vec{y}) (-2 \bar{\nabla}_d^{\vec{y}} \Pi^{dc}(\vec{y}))\} \\ &= -2 \int d^3y \{\Pi^{ab}(\vec{x}), h_{ec}(\vec{y}) \xi^e(\vec{y}) \bar{\nabla}_d^{\vec{y}} \Pi^{dc}(\vec{y})\} \\ &= -2 \int d^3y \{\Pi^{ab}(\vec{x}), h_{ec}(\vec{y})\} \xi^e(\vec{y}) \bar{\nabla}_d^{\vec{y}} \Pi^{dc}(\vec{y}) - 2 \int d^3y \{\Pi^{ab}(\vec{x}), \bar{\nabla}_d^{\vec{y}} \Pi^{dc}(\vec{y})\} h_{ec}(\vec{y}) \xi^e(\vec{y}) \end{aligned} \quad (2.232)$$

. Trabalhando com o primeiro termo,

$$\begin{aligned} -2 \int d^3 y \{ \Pi^{ab}(\vec{x}), h_{ec}(\vec{y}) \} \zeta^e(\vec{y}) \bar{\nabla}_d^{\vec{y}} \Pi^{dc}(\vec{y}) &= \int d^3 y (\delta_e^a \delta_c^b + \delta_e^b \delta_c^a) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \zeta^e(\vec{y}) \bar{\nabla}_d^{\vec{y}} \Pi^{dc}(\vec{y}) \\ &= \zeta^a(\vec{x}) \bar{\nabla}_d^{\vec{x}} \Pi^{db}(\vec{x}) + \zeta^b(\vec{x}) \bar{\nabla}_d^{\vec{x}} \Pi^{da}(\vec{x}), \end{aligned} \quad (2.233)$$

e, agora, para o segundo termo, notamos que o momento canônico é uma densidade tensorial de peso 1 (para mais detalhes, veja [6] e [24]), logo,

$$\bar{\nabla}_d \Pi^{dc} = \partial_d \Pi^{dc} + \bar{\Gamma}_{fd}^c \Pi^{fd} + \underbrace{\bar{\Gamma}_{fd}^d \Pi^{cf} - \bar{\Gamma}_{fd}^f \Pi^{cd}}_{=0(d \leftrightarrow f)} \quad (2.234)$$

de modo que

$$\bar{\nabla}_d \Pi^{dc} = \partial_d \Pi^{dc} + \bar{\Gamma}_{fd}^c \Pi^{fd}. \quad (2.235)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} -2 \int d^3 y \{ \Pi^{ab}(\vec{x}), \bar{\nabla}_d^{\vec{y}} \Pi^{dc}(\vec{y}) \} h_{ce}(\vec{y}) \zeta^e(\vec{y}) &= -2 \int d^3 y \underbrace{\{ \Pi^{ab}(\vec{x}), \partial_d^{\vec{y}} \Pi^{dc}(\vec{y}) \}}_{=0} h_{ce}(\vec{y}) \zeta^e(\vec{y}) \\ &\quad - 2 \int d^3 y \{ \Pi^{ab}(\vec{x}), \bar{\Gamma}_{fd}^c(\vec{y}) \} \Pi^{fd}(\vec{y}) h_{ce}(\vec{y}) \zeta^e(\vec{y}) \\ &= 2 \int d^3 y \{ \Pi^{ab}(\vec{x}), \bar{\Gamma}_{fd}^c(\vec{y}) \} \Pi^{fd}(\vec{y}) h_{ec}(\vec{y}) \zeta^e(\vec{y}). \end{aligned} \quad (2.236)$$

As métricas induzidas no símbolo de Christoffel contribuem com o parêntese de Poisson. Para simplificar as contas, notamos que

$$\begin{aligned} \{ \Pi^{ab}(\vec{x}), \bar{\Gamma}_{fd}^c(\vec{y}) \} &= \int d^3 z \left(\underbrace{\frac{\delta \Pi^{ab}(\vec{x})}{\delta h_{ij}(\vec{z})}}_{=0} \frac{\delta \bar{\Gamma}_{fd}^c(\vec{y})}{\delta \Pi^{ij}(\vec{z})} - \frac{\delta \Pi^{ab}(\vec{x})}{\delta \Pi^{ij}(\vec{z})} \frac{\delta \bar{\Gamma}_{fd}^c(\vec{y})}{\delta h_{ij}(\vec{z})} \right) \\ &= - \int d^3 z \delta_i^a \delta_j^b \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{z}) \frac{\delta \bar{\Gamma}_{fd}^c(\vec{y})}{\delta h_{ij}(\vec{z})} \\ &= - \delta_i^a \delta_j^b \frac{\delta \bar{\Gamma}_{fd}^c(\vec{y})}{\delta h_{ij}(\vec{x})} = - \frac{\delta \bar{\Gamma}_{fd}^c(\vec{y})}{\delta h_{ab}(\vec{x})}. \end{aligned} \quad (2.237)$$

Levando esse resultado no segundo termo completo,

$$-2 \int d^3 y \{ \Pi^{ab}(\vec{x}), \bar{\Gamma}_{fd}^c(\vec{y}) \} \Pi^{fd}(\vec{y}) h_{ce}(\vec{y}) \zeta^e(\vec{y}) = 2 \int d^3 y \frac{\delta \bar{\Gamma}_{fd}^c(\vec{y})}{\delta h_{ab}(\vec{x})} \Pi^{fd}(\vec{y}) h_{ce}(\vec{y}) \zeta^e(\vec{y}). \quad (2.238)$$

A expressão da variação do símbolo de Christoffel é dada por (ver [6] e [24]),

$$\delta \bar{\Gamma}_{fd}^c = \frac{1}{2} h^{ci} (\bar{\nabla}_f \delta h_{di} + \bar{\nabla}_d \delta h_{if} - \bar{\nabla}_i \delta h_{fd}). \quad (2.239)$$

A partir daqui, as passagens matemáticas serão abreviadas, mas nos levarão ao resultado que buscamos. Então,

$$\begin{aligned} & \int d^3y \frac{\delta \bar{\Gamma}_{fd}^c(\vec{y})}{\delta h_{ab}(\vec{x})} \Pi^{fd}(\vec{y}) h_{ce}(\vec{y}) \xi^e(\vec{y}) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3y h^{ci}(\vec{y}) \left(\bar{\nabla}_f^{\vec{y}} \frac{\delta h_{di}(\vec{y})}{\delta h_{ab}(\vec{x})} + \bar{\nabla}_d^{\vec{y}} \frac{\delta h_{if}(\vec{y})}{\delta h_{ab}(\vec{x})} - \bar{\nabla}_i^{\vec{y}} \frac{\delta h_{fd}(\vec{y})}{\delta h_{ab}(\vec{x})} \right) \Pi^{fd}(\vec{y}) h_{ce}(\vec{y}) \xi^e(\vec{y}). \end{aligned} \quad (2.240)$$

A fim de simplificar os cálculos, consideremos termo a termo na integral. Começando por

$$\begin{aligned} \int d^3y \Pi^{fd}(\vec{y}) \bar{\nabla}_f^{\vec{y}} \left(\frac{\delta h_{di}(\vec{y})}{\delta h_{ab}(\vec{x})} \right) \xi^i(\vec{y}) &= - \int d^3y \frac{\delta h_{di}(\vec{y})}{\delta h_{ab}(\vec{x})} \bar{\nabla}_f^{\vec{y}} (\Pi^{fd}(\vec{y}) \xi^i(\vec{y})) \\ &= - \int d^3y \delta_d^a \delta_i^b \delta^{(3)}(\vec{y} - \vec{x}) \bar{\nabla}_f^{\vec{y}} (\Pi^{fd}(\vec{y}) \xi^i(\vec{y})) \\ &= - \bar{\nabla}_f^{\vec{x}} (\Pi^{fa}(\vec{x}) \xi^b(\vec{x})), \end{aligned} \quad (2.241)$$

onde integramos por partes. E agora,

$$\begin{aligned} \int d^3y \Pi^{fd}(\vec{y}) \bar{\nabla}_d^{\vec{y}} \left(\frac{\delta h_{if}(\vec{y})}{\delta h_{ab}(\vec{x})} \right) \xi^i(\vec{y}) &= - \int d^3y \frac{\delta h_{if}(\vec{y})}{\delta h_{ab}(\vec{x})} \bar{\nabla}_d^{\vec{y}} (\Pi^{fd}(\vec{y}) \xi^i(\vec{y})) \\ &= - \int d^3y \delta_i^a \delta_f^b \delta^{(3)}(\vec{y} - \vec{x}) \bar{\nabla}_d^{\vec{y}} (\Pi^{fd}(\vec{y}) \xi^i(\vec{y})) \\ &= - \bar{\nabla}_d^{\vec{x}} (\Pi^{bd}(\vec{x}) \xi^a(\vec{x})), \end{aligned} \quad (2.242)$$

onde integramos por partes novamente. Por fim,

$$\begin{aligned} - \int d^3y \Pi^{fd}(\vec{y}) \bar{\nabla}_i^{\vec{y}} \left(\frac{\delta h_{fd}(\vec{y})}{\delta h_{ab}(\vec{x})} \right) \xi^i(\vec{y}) &= \int d^3y \frac{\delta h_{fd}(\vec{y})}{\delta h_{ab}(\vec{x})} \bar{\nabla}_i^{\vec{y}} (\Pi^{fd}(\vec{y}) \xi^i(\vec{y})) \\ &= \int d^3y \delta_f^a \delta_d^b \delta^{(3)}(\vec{y} - \vec{x}) \bar{\nabla}_i^{\vec{y}} (\Pi^{fd}(\vec{y}) \xi^i(\vec{y})) \\ &= \bar{\nabla}_i^{\vec{x}} (\Pi^{ab}(\vec{x}) \xi^i(\vec{x})). \end{aligned} \quad (2.243)$$

Juntando as equações (2.233), (2.241), (2.242) e (2.243), chegamos a

$$\delta_{\xi} \Pi^{ab} = \xi^a \bar{\nabla}_c \Pi^{cb} + \xi^b \bar{\nabla}_c \Pi^{ca} - \bar{\nabla}_c (\Pi^{ca} \xi^b) - \bar{\nabla}_c (\Pi^{cb} \xi^a) + \bar{\nabla}_c (\Pi^{ab} \xi^c), \quad (2.244)$$

$$\begin{aligned} \delta_{\xi} \Pi^{ab} &= \bar{\nabla}_c (\Pi^{cb} \xi^a) - \Pi^{cb} \bar{\nabla}_c \xi^a + \bar{\nabla}_c (\Pi^{ca} \xi^b) - \Pi^{ca} \bar{\nabla}_c \xi^b - \bar{\nabla}_c (\Pi^{ca} \xi^b) \\ &\quad - \bar{\nabla}_c (\Pi^{cb} \xi^a) + \bar{\nabla}_c (\Pi^{ab} \xi^c), \end{aligned} \quad (2.245)$$

concluimos que

$$\delta_{\xi} \Pi^{ab} = \{\Pi^{ab}, \mathbb{P}[\xi_c]\} = \bar{\nabla}_c (\Pi^{ab} \xi^c) - \Pi^{ca} \bar{\nabla}_c \xi^b - \Pi^{cb} \bar{\nabla}_c \xi^a = \mathcal{L}_{\xi} \Pi^{ab}, \quad (2.246)$$

onde

$$\mathcal{L}_{\xi} \Pi^{ab} = \bar{\nabla}_c (\Pi^{ab} \xi^c) - \Pi^{ca} \bar{\nabla}_c \xi^b - \Pi^{cb} \bar{\nabla}_c \xi^a. \quad (2.247)$$

Esses resultados indicam que, para qualquer variável canônica $F = F[h_{ab}, \Pi^{cd}]$, temos

$$\delta_{\xi} F = \{F, \mathbb{P}[\xi_c]\} = \mathcal{L}_{\xi} F, \quad (2.248)$$

e a presença da derivada de Lie aqui é natural: as transformações de calibre na relatividade geral estão associadas à liberdade de escolha de coordenadas, e a derivada de Lie descreve precisamente como os campos são arrastados ao longo do fluxo gerado por um campo vetorial.

Seguindo agora para o parêntese de Poisson envolvendo apenas o vínculo hamiltoniano, este é mais complicado que o anterior e, para lidarmos com isso, enunciaremos a álgebra na forma dos geradores:

$$\{\mathbb{H}[\mathcal{N}_1], \mathbb{H}[\mathcal{N}_2]\} = \mathbb{P}[\mathcal{N}_1 \bar{\nabla} \mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_2 \bar{\nabla} \mathcal{N}_1], \quad (2.249)$$

$$\{\mathbb{P}[\vec{N}], \mathbb{H}[\mathcal{N}]\} = \mathbb{H}[\mathcal{L}_{\vec{N}} \mathcal{N}], \quad (2.250)$$

$$\{\mathbb{P}[\vec{N}_1], \mathbb{P}[\vec{N}_2]\} = \mathbb{P}[[\vec{N}_1, \vec{N}_2]]. \quad (2.251)$$

Optou-se por apenas enunciá-los, pois a demonstração envolve um volume grande de cálculos, estes foram reservados para o Apêndice A a fim de não quebrar a cadência de leitura e focarmos nos pontos importantes.

A álgebra “nua” do vínculo hamiltoniano pode ser obtida a partir de (2.249):

$$\begin{aligned} \int \int d^3x d^3y \mathcal{N}_1(\vec{x}) \mathcal{N}_2(\vec{y}) \{\mathcal{H}(\vec{x}), \mathcal{H}(\vec{y})\} &= \int d^3x \mathcal{H}_a(\vec{x}) h^{ab}(\vec{x}) \left(\mathcal{N}_1(\vec{x}) \bar{\nabla}_b^{\vec{x}} \mathcal{N}_2(\vec{x}) \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{N}_2(\vec{x}) \bar{\nabla}_b^{\vec{x}} \mathcal{N}_1(\vec{x}) \right). \end{aligned} \quad (2.252)$$

Os dois integrandos do lado direito podem ser reescritos em termos da delta de Dirac:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_a(\vec{x}) h^{ab}(\vec{x}) \mathcal{N}_1(\vec{x}) \bar{\nabla}_b^{\vec{x}} \mathcal{N}_2(\vec{x}) &= \int d^3y \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \mathcal{H}_a(\vec{y}) h^{ab}(\vec{x}) \mathcal{N}_1(\vec{x}) \bar{\nabla}_b^{\vec{y}} \mathcal{N}_2(\vec{y}) \\ &= - \int d^3y \mathcal{N}_1(\vec{x}) \mathcal{N}_2(\vec{y}) \mathcal{H}_a(\vec{x}) h^{ab}(\vec{x}) \partial_b^{\vec{y}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \end{aligned} \quad (2.253)$$

onde integramos por partes. Analogamente,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_a(\vec{x}) h^{ab}(\vec{x}) \mathcal{N}_2(\vec{x}) \bar{\nabla}_b^{\vec{x}} \mathcal{N}_1(\vec{x}) &= \int d^3y \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \mathcal{H}_a(\vec{y}) h^{ab}(\vec{y}) \mathcal{N}_2(\vec{y}) \bar{\nabla}_b^{\vec{x}} \mathcal{N}_1(\vec{x}) \\ &= - \int d^3y \mathcal{N}_1(\vec{x}) \mathcal{N}_2(\vec{y}) \mathcal{H}_a(\vec{y}) h^{ab}(\vec{y}) \partial_b^{\vec{x}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \end{aligned} \quad (2.254)$$

onde integramos por partes novamente. Levando (2.253) e (2.254) em (2.252), obtemos

$$\begin{aligned} \int \int d^3x d^3y \mathcal{N}_1(\vec{x}) \mathcal{N}_2(\vec{y}) \{\mathcal{H}(\vec{x}), \mathcal{H}(\vec{y})\} \\ = \int \int d^3x d^3y \mathcal{N}_1(\vec{x}) \mathcal{N}_2(\vec{y}) \left(h^{ab}(\vec{y}) \mathcal{H}_b(\vec{y}) \partial_a^{\vec{x}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) - h^{ab}(\vec{x}) \mathcal{H}_b(\vec{x}) \partial_a^{\vec{y}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \right), \end{aligned} \quad (2.255)$$

e, usando as propriedades (2.219) e (2.223),

$$\begin{aligned} & \int \int d^3x d^3y \mathcal{N}_1(\vec{x}) \mathcal{N}_2(\vec{y}) \{ \mathcal{H}(\vec{x}), \mathcal{H}(\vec{y}) \} \\ &= \int \int d^3x d^3y \mathcal{N}_1(\vec{x}) \mathcal{N}_2(\vec{y}) (h^{ab}(\vec{x}) \mathcal{H}_b(\vec{x}) + h^{ab}(\vec{y}) \mathcal{H}_b(\vec{y})) \partial_a^{\vec{x}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned} \quad (2.256)$$

Concluimos que

$$\{ \mathcal{H}(\vec{x}), \mathcal{H}(\vec{y}) \} = (h^{ab}(\vec{x}) \mathcal{H}_b(\vec{x}) + h^{ab}(\vec{y}) \mathcal{H}_b(\vec{y})) \partial_a^{\vec{x}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (2.257)$$

Há uma clara semelhança entre essa e a álgebra do vínculo de momento (2.225), onde ambas compartilham a característica de que não há constantes de estrutura, mas sim dependência na própria métrica induzida e nos vínculos.

Por fim, a última álgebra “nua” pode ser obtida de (2.250):

$$\int \int d^3x d^3y \mathcal{N}(\vec{x}) N^a(\vec{y}) \{ \mathcal{H}(\vec{x}), \mathcal{H}_a(\vec{y}) \} = \int d^3x \mathcal{H}(\vec{x}) N^a(\vec{x}) \partial_a^{\vec{x}} \mathcal{N}(\vec{x}), \quad (2.258)$$

e reescrevendo o lado direito,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\vec{x}) N^a(\vec{x}) \partial_a^{\vec{x}} \mathcal{N}(\vec{x}) &= \int d^3y \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \mathcal{H}(\vec{x}) N^a(\vec{y}) \partial_a^{\vec{x}} \mathcal{N}(\vec{x}) \\ &= - \int d^3y \mathcal{H}(\vec{x}) \mathcal{N}(\vec{x}) N^a(\vec{y}) \partial_a^{\vec{x}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \\ &= \int d^3y \mathcal{H}(\vec{x}) \mathcal{N}(\vec{x}) N^a(\vec{y}) \partial_a^{\vec{y}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \end{aligned} \quad (2.259)$$

onde integramos por partes e usamos a propriedade (2.223). Levando esse resultado em (2.258),

$$\int \int d^3x d^3y \mathcal{N}(\vec{x}) N^a(\vec{y}) \{ \mathcal{H}(\vec{x}), \mathcal{H}_a(\vec{y}) \} = \int \int d^3x d^3y \mathcal{H}(\vec{x}) \mathcal{N}(\vec{x}) N^a(\vec{y}) \partial_a^{\vec{y}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (2.260)$$

Concluimos que

$$\{ \mathcal{H}(\vec{x}), \mathcal{H}_a(\vec{y}) \} = \mathcal{H}(\vec{x}) \partial_a^{\vec{y}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (2.261)$$

Em comparação com as álgebras anteriores, esta também não possui constantes de estrutura.

Isto posto, voltemos para a primeira questão que pretendíamos responder: há vínculos terciários? Uma olhada na expressão

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{H}}(\vec{x}) &= \int d^3y \mathcal{N}(\vec{y}) \{ \mathcal{H}(\vec{x}), \mathcal{H}(\vec{y}) \} + \int d^3y N^a(\vec{y}) \{ \mathcal{H}(\vec{x}), \mathcal{H}_a(\vec{y}) \} \approx 0 \\ \dot{\mathcal{H}}_a(\vec{x}) &= \int d^3y \mathcal{N}(\vec{y}) \{ \mathcal{H}_a(\vec{x}), \mathcal{H}(\vec{y}) \} + \int d^3y N^b(\vec{y}) \{ \mathcal{H}_a(\vec{x}), \mathcal{H}_b(\vec{y}) \} \approx 0, \end{aligned} \quad (2.262)$$

e comparando com as álgebras obtidas,

$$\{ \mathcal{H}(\vec{x}), \mathcal{H}(\vec{y}) \} = (h^{ab}(\vec{x}) \mathcal{H}_b(\vec{x}) + h^{ab}(\vec{y}) \mathcal{H}_b(\vec{y})) \partial_a^{\vec{x}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.263)$$

$$\{\mathcal{H}(\vec{x}), \mathcal{H}_a(\vec{y})\} = \mathcal{H}(\vec{x}) \partial_a^{\vec{y}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.264)$$

$$\{\mathcal{H}_a(\vec{x}), \mathcal{H}_b(\vec{y})\} = \mathcal{H}_b(\vec{x}) \partial_a^{\vec{x}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) + \mathcal{H}_a(\vec{x}) \partial_b^{\vec{x}} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.265)$$

chegamos à mesma conclusão anterior: a álgebra é fechada na subvariedade definida pelos vínculos no espaço de fase, portanto, não há vínculos terciários. Outra consequência do fechamento é que os vínculos hamiltoniano e de momento são vínculos de primeira classe e, portanto, geram transformações de calibre. Isso foi mostrado acima para o vínculo de momento, que está relacionado à liberdade de escolha de coordenadas espaciais.

O mesmo vale para o vínculo hamiltoniano: como o tempo também é uma coordenada, as “translações temporais” passam a ser interpretadas, neste contexto, como transformações de calibre. Desse modo, o vínculo hamiltoniano desempenha o papel de gerar deformações normais às hipersuperfícies. Além disso, como a Hamiltoniana ADM é uma combinação linear de vínculos (com $\mathcal{N}$ e N^a como multiplicadores de Lagrange), ela se anula sobre a superfície de vínculos. Sendo H_{ADM} o gerador da evolução temporal, ela própria é um funcional dos vínculos.

2.12 Observações finais

O formalismo ADM também pode ser obtido por um método alternativo, isto é, por meio da álgebra de vínculos desenvolvida por Dirac. Esse caminho é conhecido na literatura como “a sétima rota para a geometrodinâmica”. O termo geometrodinâmica foi cunhado pelo físico John Wheeler e se mostra muito apropriado: afinal, com o advento da relatividade geral, o estudo da gravitação passa a ser o estudo do espaço-tempo, entendido aqui como uma entidade geométrica dotada de propriedades como a curvatura, por exemplo. A respeito desse método, recomenda-se consultar [6] e [7].

Para que o texto não ficasse extenso demais, optou-se também por não fazer uma discussão detalhada acerca dos termos de contorno, uma vez que eles não contribuem para a quantização canônica que pretendemos realizar¹³. Aos leitores interessados em se aprofundar nesse tópico, recomenda-se também [6].

¹³ Por outro lado, os termos de contorno são de extrema importância na abordagem de integral de caminho, pois a ação de Einstein–Hilbert contém derivadas de segunda ordem da métrica, por isso, é necessário acrescentar um termo de contorno apropriado para que o problema variacional seja bem posto.

3 Quantização da Relatividade Geral

3.1 Gravitação quântica canônica

São muitas as abordagens em gravitação quântica, todas com as suas vantagens, problemas e limitações. A prescrição que adotaremos aqui é a quantização canônica, uma vez que o formalismo hamiltoniano da relatividade geral foi desenvolvido no Capítulo 2. Além disso, trata-se de um método que permite um estudo mais direto quando aplicado a buracos negros e cosmologia, pois quantizaremos o próprio espaço-tempo como um todo a partir de um modelo inicial escolhido. Isso ficará mais claro no Capítulo 4, quando estudarmos o comportamento quântico de buracos negros de Schwarzschild.

O procedimento de quantização canônica consiste em substituir os parênteses de Poisson das variáveis dinâmicas fundamentais da teoria pelos comutadores, isto é (em unidades $\hbar = 1$),

$$\{ \quad , \quad \} \rightarrow \frac{1}{i} [\quad , \quad]. \quad (3.1)$$

Do formalismo ADM, sabemos que os parênteses fundamentais da teoria são,

$$\{h_{ab}(\vec{x}), \Pi^{cd}(\vec{y})\} = \frac{1}{2}(\delta_a^c \delta_b^d + \delta_a^d \delta_b^c) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (3.2)$$

e, assim, a quantização toma a forma

$$[\hat{h}_{ab}(\vec{x}), \hat{h}_{cd}(\vec{y})] = 0 = [\hat{\Pi}^{ab}(\vec{x}), \hat{\Pi}^{cd}(\vec{y})], \quad (3.3)$$

$$[\hat{h}_{ab}(\vec{x}), \hat{\Pi}^{cd}(\vec{y})] = \frac{i}{2}(\delta_a^c \delta_b^d + \delta_a^d \delta_b^c) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.4)$$

Dessa forma, a métrica induzida e seu momento conjugado passam a desempenhar o papel de operadores que atuam em estados do sistema. Assumiremos a existência de um espaço auxiliar $\mathcal{F}$ [28] sobre o qual podemos definir estados $\Psi = \Psi[h_{ab}]$, que, nesse contexto, são interpretados como funcionais de onda, de modo que todos os $\Psi[h_{ab}]$ possíveis pertencem a $\mathcal{F}$. Além disso, devido à existência de vínculos, são físicos apenas os estados que os satisfazem, assim, somos levados a considerar também um subespaço $\mathcal{F}_{\text{phys}}$ que acomode esses estados físicos, isto é,

$$\mathcal{F}_{\text{phys}} \subset \mathcal{F} \quad \text{onde} \quad \Psi_{\text{phys}} \in \mathcal{F}_{\text{phys}}. \quad (3.5)$$

Portanto, na representação de Schrödinger, temos que

$$\hat{h}_{ab} \Psi[h_{ab}] = h_{ab} \Psi[h_{ab}] \quad \text{e} \quad \hat{\Pi}^{cd} \Psi[h_{ab}] = -i \frac{\delta}{\delta h_{cd}} \Psi[h_{ab}]. \quad (3.6)$$

Para que $\mathcal{F}$ alcance o status de espaço de Hilbert, é necessário definir um produto interno, se escolhermos um produto interno do tipo Schrödinger [28], a saber,

$$\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle = \int_{\Sigma_t} \mathcal{D}\mu[h_{ab}] \Psi_1^*[h_{ab}] \Psi_2[h_{ab}], \quad (3.7)$$

vemos que surgem alguns problemas. O primeiro trata do fato de que a medida de integração nem sempre é invariante por translação como ocorre em integrais ordinárias sobre $\mathbb{R}$. Outro problema tem relação com o tempo, uma vez que a folheação Σ_t está associada a uma escolha de parametrização (ou calibre) do espaço-tempo, assim, ao se utilizar essa definição para calcular probabilidades, por exemplo, estas não são necessariamente preservadas ao longo da evolução temporal, pois as integrais são tomadas em hipersuperfícies particulares.

3.2 Equação de Wheeler–DeWitt e invariância por difeomorfismos

Como vimos, os estados quânticos que carregam informação sobre a física do sistema são aqueles que satisfazem os vínculos. Isso implica que devemos promover os vínculos hamiltoniano e de momento a operadores quânticos, construídos a partir de h_{ab} e Π^{cd} e, por fim, aplicá-los aos autoestados do sistema. Portanto,

$$\hat{\mathcal{H}}\Psi = 0 \quad \text{e} \quad \hat{\mathcal{H}}_a\Psi = 0. \quad (3.8)$$

Começemos explorando a segunda equação. Sendo o vínculo de momento,

$$\mathcal{H}_a = \bar{\nabla}_b \Pi^b_a, \quad (3.9)$$

então, usando a definição do momento canônico na forma de operador quântico (3.6), vemos que,

$$\hat{\mathcal{H}}_a\Psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\nabla}_b \left(\frac{\delta\Psi}{\delta h_{ab}(\vec{y})} \right) = 0, \quad (3.10)$$

onde explicitamos as coordenadas $\vec{y}$ adaptadas às hipersuperfícies. No regime clássico, o vínculo de momento é o gerador de difeomorfismos espaciais, portanto, vejamos como se dá a sua atuação no caso quântico. Consideremos uma transformação infinitesimal de coordenadas,

$$y'^i = y^i + \xi^i, \quad (3.11)$$

onde $|\xi^i| \ll 1$. A transformação da métrica induzida será dada por

$$h'_{ab} = h_{cd} \frac{\partial y'^c}{\partial y^a} \frac{\partial y'^d}{\partial y^b}, \quad (3.12)$$

de modo que,

$$\begin{aligned} h'_{ab} &= h_{cd} (\delta^c_a + \partial_a \xi^c) (\delta^d_b + \partial_b \xi^d) \\ &= h_{cd} (\delta^c_a \delta^d_b + \delta^c_a \partial_b \xi^d + \delta^d_b \partial_a \xi^c) + \mathcal{O}(\xi^2), \end{aligned} \quad (3.13)$$

em primeira ordem,

$$h'_{ab} = h_{ab} + h_{ad} \partial_b \xi^d + h_{cb} \partial_a \xi^c. \quad (3.14)$$

Na forma covariante $\partial \rightarrow \bar{\nabla}$,

$$\begin{aligned} h'_{ab} &= h_{ab} + h_{ad} \bar{\nabla}_b \xi^d + h_{cb} \bar{\nabla}_a \xi^c \\ &= h_{ab} + \bar{\nabla}_b \xi_a + \bar{\nabla}_a \xi_b \\ &= h_{ab} + \mathcal{L}_\xi h_{ab}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

ou seja,

$$h'_{ab} - h_{ab} = \mathcal{L}_\xi h_{ab} \quad \Rightarrow \quad \delta_\xi h_{ab} = \mathcal{L}_\xi h_{ab}, \quad (3.16)$$

resultado já conhecido (compare com (2.230)).

O que queremos realmente é entender como o estado muda devido a essa transformação de coordenadas. Com esse objetivo e levando em conta que Ψ é um funcional, façamos a expansão em primeira ordem,

$$\begin{aligned} \Psi[h'_{ab}] &= \Psi[h_{ab} + \mathcal{L}_\xi h_{ab}] \\ &= \Psi[h_{ab}] + \int_{\Sigma_t} d^3y \mathcal{L}_\xi h_{ab}(\vec{y}) \frac{\delta \Psi}{\delta h_{ab}(\vec{y})} \\ &= \Psi[h_{ab}] + 2 \int_{\Sigma_t} d^3y \bar{\nabla}_a \xi_b \frac{\delta \Psi}{\delta h_{ab}}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Integrando por partes (e desprezando termos de contorno), obtemos,

$$\Psi[h'_{ab}] = \Psi[h_{ab}] - 2 \int_{\Sigma_t} d^3y \xi_b \bar{\nabla}_a \left(\frac{\delta \Psi}{\delta h_{ab}} \right). \quad (3.18)$$

Usando o vínculo de momento na forma quântica (3.10), concluimos que,

$$\Psi[h'_{ab}] = \Psi[h_{ab}] \quad \Rightarrow \quad \delta_\xi \Psi = 0. \quad (3.19)$$

Esse resultado mostra que os funcionais de onda são invariantes sob difeomorfismos espaciais, isto é, os estados quânticos dependem apenas das classes de equivalência de geometrias tridimensionais. Apesar disso, um ponto importante é que a descrição geometrodinâmica clássica não se transfere de modo direto para o caso quântico: a partir do momento em que h_{ab} é promovida a operador, sua definição rigorosa envolve questões de regularização e (eventualmente) distribuições a valores de operador, de modo que a interpretação geométrica clássica da métrica deixa de ser imediatamente aplicável.

E agora iremos explorar a primeira equação de (3.8). Sendo o vínculo hamiltoniano,

$$G_{abcd} \Pi^{ab} \Pi^{cd} - \sqrt{h} \mathcal{R} = 0, \quad (3.20)$$

e usando novamente a definição da métrica induzida e do momento canônico na forma de operadores quânticos (3.6), então,

$$\hat{\mathcal{H}}\Psi = 0 \quad \Rightarrow \quad -\hat{G}_{abcd}(\vec{y}) \frac{\delta^2 \Psi}{\delta h_{ab}(\vec{y}) \delta h_{cd}(\vec{y})} - \sqrt{h}(\vec{y}) \hat{\mathcal{R}}(\vec{y}) \Psi = 0, \quad (3.21)$$

sendo essa a *Equação de Wheeler-DeWitt*. Essa equação irá determinar toda a dinâmica quântica da relatividade geral, isto é, por meio dela que iremos determinar os funcionais de onda.

Até aqui, assumimos apenas a gravitação no vácuo e, para o caso de incluirmos campos de matéria, haverá vínculos associados a esses campos, de modo que os vínculos hamiltoniano e de momento tomam a forma geral

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_G + \mathcal{H}_M \quad \text{e} \quad \mathcal{H}^a = \mathcal{H}_G^a + \mathcal{H}_M^a, \quad (3.22)$$

onde os subíndices G e M se referem à parte gravitacional e à parte de matéria, respectivamente. Promovendo os vínculos acima a operadores e aplicando-os aos estados quânticos, obtemos a equação de Wheeler-DeWitt,

$$-\hat{G}_{abcd} \frac{\delta^2 \Psi[\hat{h}_{ab}, \hat{\phi}^A]}{\delta h_{ab} \delta h_{cd}} - \sqrt{h} \hat{\mathcal{R}} \Psi[\hat{h}_{ab}, \hat{\phi}^A] + V[\hat{h}_{ab}, \hat{\phi}^A] \Psi[\hat{h}_{ab}, \hat{\phi}^A] = 0, \quad (3.23)$$

onde ϕ^A representa campos de matéria arbitrários, sejam eles de qualquer natureza (campos escalares, vetoriais, espinoriais ou tensoriais), e A é um índice caso haja mais de um campo. O termo V representa, de maneira geral, um possível potencial, cuja origem está nas fontes do campo gravitacional (incluindo os termos provenientes da parte de matéria).

Quanto à aplicação do vínculo de momento na forma de operador, incluindo o vínculo da parte de matéria, o resultado ainda é o mesmo: os estados quânticos continuam invariantes por difeomorfismos espaciais. Isso é esperado, afinal trata-se de uma simetria oriunda da própria estrutura do espaço-tempo e, portanto, não deve depender da presença de fontes.

3.3 Consequências da quantização canônica da gravidade e o problema do tempo

Nesse ponto é importante destacar algumas características do procedimento de quantização que adotamos. Sendo a equação de Wheeler-DeWitt a equação dinâmica da teoria, ao resolvê-la, obtemos como solução o funcional de onda $\Psi[h_{ab}]$. Em princípio, podemos pensá-lo como sendo análogo à função de onda em mecânica quântica não relativística, no sentido de que $|\Psi|^2$ pode ser associado a uma densidade de probabilidade. Uma questão surge aqui: afinal, quando o objeto de estudo é a função de onda não relativística, obtemos probabilidades relativas à posição e ao momento, mas e aqui na gravitação quântica? Nesse caso, o que se busca é interpretar $|\Psi[h_{ab}]|^2$ como uma medida no espaço das geometrias espaciais, associada à probabilidade de a hipersuperfície espacial assumir alguma geometria específica (isto é, uma classe de equivalência de h_{ab} sob difeomorfismos). Lembrando, claro, que o estado quântico é invariante por difeomorfismos (em particular, por difeomorfismos espaciais), de modo

que a mesma geometria pode ser representada por diferentes métricas induzidas h_{ab} relacionadas por reparametrizações.

Apesar dessa interpretação interessante sobre o funcional de onda, resolver a equação de Wheeler–DeWitt não é uma tarefa fácil, muito pelo contrário, pois trata-se de uma equação diferencial funcional de segunda ordem. A estratégia adotada pelos físicos é utilizar modelos de minissuperspaço, isto é, modelos de universo ou de buracos negros que permitem algum grau de simplificação e até mesmo soluções exatas. Na seção seguinte trataremos disso com mais detalhes.

Devemos levar em conta também que o termo cinético não envolve somente os momentos canônicos na forma de operadores quânticos, como também a supermétrica de DeWitt, que possui dependência explícita nas métricas induzidas, estas que também são promovidas a operadores. Isso dá origem ao chamado problema de ordenamento, pois, ao considerarmos

$$\hat{G}_{abcd}\hat{\Pi}^{ab}\hat{\Pi}^{cd}, \quad \hat{\Pi}^{ab}\hat{G}_{abcd}\hat{\Pi}^{cd} \quad \text{e} \quad \hat{\Pi}^{ab}\hat{\Pi}^{cd}\hat{G}_{abcd}, \quad (3.24)$$

podemos obter resultados diferentes. Isso está intimamente relacionado ao fato de que medidas podem interferir umas nas outras quando as grandezas correspondentes não são compatíveis, e isso é visto do ponto de vista matemático por meio de comutadores: em condições usuais, operadores que comutam admitem autovetores comuns e podem ser simultaneamente diagonalizados. Ou seja, medidas feitas relativas a grandezas representadas por operadores que comutam não se perturbam mutuamente no sentido usual.

Agora, discutiremos outro aspecto relevante da mecânica quântica, que é a evolução temporal gerada pela hamiltoniana por meio da equação de Schrödinger, a saber,

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi. \quad (3.25)$$

Como visto no capítulo 2, o fato de a relatividade geral ser uma teoria de calibre cuja simetria é a invariância por difeomorfismos significa que estamos incluindo também translações temporais, já que o próprio tempo é uma coordenada aqui. Devido a isso, a própria hamiltoniana se torna um vínculo,

$$H_{ADM} \approx 0, \quad (3.26)$$

e ao promovê-la a um operador resulta na aniquilação do estado quântico,

$$\hat{H}_{ADM}\Psi = 0. \quad (3.27)$$

Essa ausência do tempo no regime quântico está, portanto, intimamente ligada à invariância por difeomorfismos e faz a dinâmica ser congelada em um certo sentido. O tempo, na relatividade geral, é um rótulo associado à escolha de folheação, diferentemente da

mecânica não relativística, na qual o tempo é visto como um parâmetro externo. Há algumas abordagens e sugestões para se construir uma noção de tempo (interno ou efetivo) na gravitação quântica de Wheeler–DeWitt, seja antes ou após a quantização [28]. Acerca desse tópico, para detalhes técnicos mais avançados, recomenda-se a leitura de [23].

3.4 Quantização em minisuperespaços

Como discutido acima, a equação de Wheeler–DeWitt se apresenta para nós numa forma complicada, e uma estratégia adotada pelos físicos para contornar esse problema é assumir modelos de minisuperespaços, isto é, um subespaço do superespaço de métricas.

De maneira geral, essa simplificação consiste em reduzir os graus de liberdade, de modo a fornecer um mecanismo pelo qual se pode estudar alguns aspectos isolados da teoria completa, pois engloba uma boa gama de sistemas físicos em relatividade geral [30].

A métrica escrita na forma das variáveis ADM toma a forma,

$$ds^2 = \left(-\mathcal{N}^2 + h_{ab}N^aN^b \right) dt^2 + 2h_{ab}N^b dt dy^a + h_{ab} dy^a dy^b, \quad (3.28)$$

de modo que os modelos de minisuperespaços consistem em assumir que a função lapso é homogênea, $\mathcal{N} = \mathcal{N}(t)$, e que o vetor *shift* se anula, $N^a = 0$. Nessas condições, a métrica ADM pode ser reescrita como,

$$ds^2 = -\mathcal{N}^2(t) dt^2 + h_{ab}(\vec{y}, t) dy^a dy^b. \quad (3.29)$$

Como vimos também, a ação ADM tem a forma,

$$S_{ADM} = \int_{\Sigma_t} dt d^3y \mathcal{N} \left(G^{abcd} K_{ab} K_{cd} + \sqrt{h} \mathcal{R} \right), \quad (3.30)$$

onde o tensor de curvatura extrínseca obtém uma forma simplificada,

$$K_{ab} = \frac{1}{2\mathcal{N}} (\dot{h}_{ab} - \underbrace{\bar{\nabla}_{(a} N_{b)}}_{=0}) = \frac{1}{2\mathcal{N}} \dot{h}_{ab}. \quad (3.31)$$

De posse dessas expressões, podemos reescrever o termo cinético da densidade lagrangiana ADM,

$$\begin{aligned} G^{abcd} K_{ab} K_{cd} &= \frac{1}{4\mathcal{N}^2} G^{abcd} \dot{h}_{ab} \dot{h}_{cd} \\ &= \frac{1}{4\mathcal{N}^2} G^{abcd} \frac{\partial h_{ab}}{\partial q_A} \dot{q}_A \frac{\partial h_{cd}}{\partial q_B} \dot{q}_B \\ &= \frac{1}{4\mathcal{N}^2} G^{AB} \dot{q}_A \dot{q}_B, \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde

$$G^{AB} = G^{abcd} \frac{\partial h_{ab}}{\partial q_A} \frac{\partial h_{cd}}{\partial q_B}, \quad (3.33)$$

é a métrica do minisuperespaço, e os q_A na segunda linha de (3.32) são os graus de liberdade da métrica induzida. Com isso, a ação ADM segue como,

$$\begin{aligned} S_{ADM} &= \int_{\Sigma_t} dt d^3y \mathcal{N} \left(G^{abcd} K_{ab} K_{cd} + \sqrt{h} \mathcal{R} \right) \\ &= \int_{\Sigma_t} dt d^3y \mathcal{N} \left[\frac{1}{4\mathcal{N}^2} G^{AB} \dot{q}_A \dot{q}_B + \sqrt{h} \mathcal{R} \right] \\ &= \int_{\Sigma_t} dt \left[\frac{1}{2\mathcal{N}} G^{AB} \dot{q}_A \dot{q}_B - \mathcal{N} U(q) \right] \underbrace{\int_{\Sigma_t} d^3y \frac{1}{2}}_{=\mathcal{V}_0}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

ou seja,

$$S_{ADM} = \mathcal{V}_0 \int dt \frac{1}{2\mathcal{N}} \left[G^{AB} \dot{q}_A \dot{q}_B - \mathcal{N} U(q) \right]. \quad (3.35)$$

A ação ADM pôde ser reescrita convenientemente como a ação de uma partícula relativística em espaço-tempo curvo sob a ação de um potencial $U(q)$, onde

$$U(q) = -\sqrt{h} \mathcal{R}. \quad (3.36)$$

É comum os físicos tomarem o volume espacial como unitário, $\mathcal{V}_0 = 1$, por motivos de simplificação de cálculos, além de parametrizarem a ação como [30],

$$S_{ADM} = \int_0^1 dt L_{ADM}, \quad (3.37)$$

onde

$$L_{ADM} = \frac{1}{2\mathcal{N}} \left[G^{AB} \dot{q}_A \dot{q}_B - \mathcal{N} U(q) \right]. \quad (3.38)$$

Isso posto e levando em conta que a ação se mostra em um formato amigável, isso nos motiva a utilizar as equações de Euler–Lagrange a fim de obter as equações de movimento para os modelos de minisuperespaço. Seja, portanto,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{ADM}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L_{ADM}}{\partial q_i} = 0, \quad (3.39)$$

de modo que

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2\mathcal{N}} G^{AB} \dot{q}_A \dot{q}_B - \mathcal{N} U(q) \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{2\mathcal{N}} G^{AB} \dot{q}_A \dot{q}_B - \mathcal{N} U(q) \right) = 0. \quad (3.40)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2\mathcal{N}} G^{AB} (\delta_A^i \dot{q}_B + \dot{q}_A \delta_B^i) \right] - \frac{1}{2\mathcal{N}} \frac{\partial G^{AB}}{\partial q_i} \dot{q}_A \dot{q}_B + \mathcal{N} \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (3.41)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2\mathcal{N}} (G^{iB} \dot{q}_B + G^{Ai} \dot{q}_A) \right] - \frac{1}{2\mathcal{N}} \partial^i G^{AB} \dot{q}_A \dot{q}_B + \mathcal{N} \partial^i U(q) = 0, \quad (3.42)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\mathcal{N}} G^{Ai} \dot{q}_A \right] - \frac{1}{2\mathcal{N}} \partial^i G^{AB} \dot{q}_A \dot{q}_B + \mathcal{N} \partial^i U(q) = 0, \quad (3.43)$$

$$G^{Ai} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{q}_A}{\mathcal{N}} \right) + \frac{d}{dt} (G^{Ai}) \frac{\dot{q}_A}{\mathcal{N}} - \frac{1}{2\mathcal{N}} \partial^i G^{AB} \dot{q}_A \dot{q}_B + \mathcal{N} \partial^i U(q) = 0, \quad (3.44)$$

$$G^{Ai} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{q}_A}{\mathcal{N}} \right) + \frac{\partial G^{Ai}}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} \frac{\dot{q}_A}{\mathcal{N}} - \frac{1}{2\mathcal{N}} \partial^i G^{AB} \dot{q}_A \dot{q}_B + \mathcal{N} \partial^i U(q) = 0, \quad (3.45)$$

$$G^{Ai} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{q}_A}{\mathcal{N}} \right) + \frac{1}{\mathcal{N}} \partial^j G^{Ai} \dot{q}_j \frac{\dot{q}_A}{\mathcal{N}} - \frac{1}{2\mathcal{N}} \partial^i G^{AB} \dot{q}_A \dot{q}_B + \mathcal{N} \partial^i U(q) = 0, \quad (3.46)$$

explorando a simetria de $G^{AB} = G^{BA}$,

$$G^{Ai} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{q}_A}{\mathcal{N}} \right) + \frac{1}{2\mathcal{N}} (\partial^j G^{Ai} + \partial^A G^{ji}) \dot{q}_A \dot{q}_j - \frac{1}{2\mathcal{N}} \partial^i G^{AB} \dot{q}_A \dot{q}_B + \mathcal{N} \partial^i U(q) = 0, \quad (3.47)$$

$$G^{Ai} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{q}_A}{\mathcal{N}} \right) + \frac{1}{2\mathcal{N}} (\partial^A G^{ji} + \partial^j G^{Ai} - \partial^i G^{Aj}) \dot{q}_A \dot{q}_j + \mathcal{N} \partial^i U(q) = 0, \quad (3.48)$$

ou,

$$G^{Ai} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{q}_A}{\mathcal{N}} \right) + \frac{1}{\mathcal{N}} \left[\frac{1}{2} (\partial^A G^{ji} + \partial^j G^{Ai} - \partial^i G^{Aj}) \right] \dot{q}_A \dot{q}_j + \mathcal{N} \partial^i U(q) = 0, \quad (3.49)$$

contraíndo com a métrica do minisuperespaço,

$$G_{Bi} G^{Ai} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{q}_A}{\mathcal{N}} \right) + \frac{1}{\mathcal{N}} \left[\frac{G_{Bi}}{2} (\partial^A G^{ji} + \partial^j G^{Ai} - \partial^i G^{Aj}) \right] \dot{q}_A \dot{q}_j + \mathcal{N} G_{Bi} \partial^i U(q) = 0, \quad (3.50)$$

$$\delta_B^A \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{q}_A}{\mathcal{N}} \right) + \frac{1}{\mathcal{N}} \left[\frac{G_{Bi}}{2} (\partial^A G^{ji} + \partial^j G^{Ai} - \partial^i G^{Aj}) \right] \dot{q}_A \dot{q}_j + \mathcal{N} G_{Bi} \partial^i U(q) = 0. \quad (3.51)$$

Podemos reescrever como,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{q}^B}{\mathcal{N}} \right) + \frac{1}{\mathcal{N}} \left[\frac{G^{Bi}}{2} (\partial_A G_{ji} + \partial_j G_{iA} - \partial_i G_{Aj}) \right] \dot{q}^A \dot{q}^j + \mathcal{N} G^{Bi} \partial_i U(q) = 0, \quad (3.52)$$

$$\frac{1}{\mathcal{N}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{q}^i}{\mathcal{N}} \right) + \Gamma_{jk}^i \dot{q}^j \dot{q}^k + \mathcal{N} G^{ij} \partial_j U = 0, \quad (3.53)$$

onde

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{G^{il}}{2} (\partial_j G_{kl} + \partial_k G_{lj} - \partial_l G_{jk}). \quad (3.54)$$

Considerando agora,

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_{ADM}}{\partial \dot{\mathcal{N}}} \right)}_{=0} - \frac{\partial L_{ADM}}{\partial \mathcal{N}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L_{ADM}}{\partial \mathcal{N}} = 0, \quad (3.55)$$

logo,

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{N}} \left[\frac{1}{2\mathcal{N}} G^{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - \mathcal{N} U(q) \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2\mathcal{N}^2} G^{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - U(q) = 0, \quad (3.56)$$

e assim obtemos o vínculo hamiltoniano,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\mathcal{N}^2} G^{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + U(q) = 0. \quad (3.57)$$

A formulação hamiltoniana pode ser obtida introduzindo o momento canonicamente conjugado às coordenadas q^i . Então,

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial L_{ADM}}{\partial \dot{q}^i} \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \left[\frac{1}{2\mathcal{N}} G_{AB} \dot{q}^A \dot{q}^B - \mathcal{N}U(q) \right] \\ &= \frac{1}{2\mathcal{N}} G_{AB} (\delta_i^A \dot{q}^B + \dot{q}^A \delta_i^B) \\ &= \frac{1}{\mathcal{N}} G_{Ai} \dot{q}^A. \end{aligned} \quad (3.58)$$

A hamiltoniana no contexto de minisuperespaço pode ser calculada,

$$H_{ADM} = p_i \dot{q}^i - L_{ADM} = p_i \dot{q}^i - \frac{1}{2\mathcal{N}} G_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j + \mathcal{N}U, \quad (3.59)$$

onde,

$$p_A = \frac{1}{\mathcal{N}} G_{AB} \dot{q}^B \Rightarrow G^{CA} p_A = \frac{1}{\mathcal{N}} G^{CA} G_{AB} \dot{q}^B, \quad (3.60)$$

$$\delta_B^C \dot{q}^B = \mathcal{N} G^{AC} p_A \Rightarrow \dot{q}^C = \mathcal{N} G^{AC} p_A, \quad (3.61)$$

portanto,

$$H_{ADM} = p_i \mathcal{N} G^{ij} p_j - \frac{1}{2\mathcal{N}} G_{ij} \mathcal{N} G^{ik} p_k \mathcal{N} G^{jl} p_l + \mathcal{N}U, \quad (3.62)$$

$$H_{ADM} = \mathcal{N} G^{ji} p_i p_j - \frac{\mathcal{N}}{2} G_{ij} G^{ik} G^{jl} p_k p_l + \mathcal{N}U, \quad (3.63)$$

$$H_{ADM} = \mathcal{N} G^{ji} p_i p_j - \frac{\mathcal{N}}{2} \delta_j^k G^{jl} p_k p_l + \mathcal{N}U, \quad (3.64)$$

$$H_{ADM} = \mathcal{N} G^{ij} p_i p_j - \frac{\mathcal{N}}{2} G^{kl} p_k p_l + \mathcal{N}U, \quad (3.65)$$

$$H_{ADM} = \frac{\mathcal{N}}{2} G^{ij} p_i p_j + \mathcal{N}U = \mathcal{N} \underbrace{\left[\frac{1}{2} G^{ij} p_i p_j + U \right]}_{=\mathcal{H}}, \quad (3.66)$$

e como era se esperar, a hamiltoniana agora é composta apenas pela função lapso e pelo vínculo hamiltoniano,

$$H_{ADM} = \mathcal{N}\mathcal{H}, \quad (3.67)$$

e nesse sentido, novamente a hamiltoniana ADM se anula.

Seguindo, a quantização canônica pode ser feita promovendo as variáveis q^i e seus momentos canonicamente conjugados p_i a operadores, de modo que as relações de comutação tomam a forma,

$$[q_i(\vec{x}), p^j(\vec{y})] = i \delta_i^j \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (3.68)$$

$$[q_i(\vec{x}), q_j(\vec{y})] = 0 = [p^i(\vec{x}), p^j(\vec{y})]. \quad (3.69)$$

Introduzimos também uma função de onda $\Psi = \Psi(q^i)$, que irá representar o estado quântico da geometria, e, na representação de Schrödinger, temos que

$$\hat{q}^i \Psi = q^i \Psi \quad \text{e} \quad \hat{p}_i \Psi = -i \frac{\partial \Psi}{\partial q^i}. \quad (3.70)$$

A dinâmica quântica surge aqui por meio da equação de Wheeler–DeWitt, construindo o operador quântico associado à hamiltoniana e aplicando-o aos estados. Mesmo assumindo os modelos de minisuperespaço, vimos que os vínculos ainda se mantêm e, nesse contexto, a hamiltoniana se anula na superfície de vínculos, portanto, Ψ deve ser aniquilada:

$$\hat{H}\Psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathcal{H}}\Psi = 0. \quad (3.71)$$

Fazendo a seguinte escolha de ordenamento $\hat{G}^{ij} \hat{p}_i \hat{p}_j$, então

$$-\frac{1}{2} \hat{G}^{ij} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q^i \partial q^j} + \hat{U}\Psi = 0. \quad (3.72)$$

O problema do ordenamento ainda persiste aqui e, quanto a isso, há algumas propostas acerca de como lidar com essa questão. Uma dentre as mais conhecidas na literatura é o uso do operador de Laplace–Beltrami [30],

$$\frac{1}{\sqrt{|G|}} \partial_i \left(\sqrt{|G|} G^{ij} \partial_j \Psi \right) \equiv \nabla^2 \Psi, \quad (3.73)$$

onde G é o determinante da métrica do minisuperespaço. Assim, a equação de Wheeler–DeWitt pode ser reescrita de uma maneira ainda mais amistosa,

$$-\frac{1}{2} \nabla^2 \Psi + \hat{U}\Psi = 0. \quad (3.74)$$

3.5 Observações finais acerca da gravitação quântica canônica

A gravitação quântica canônica se mostra como uma poderosa ferramenta de estudo quando se deseja investigar modelos relacionados à cosmologia e a buracos negros. Em relação à primeira, há um problema crucial com o qual a cosmologia quântica busca lidar: como interpretar, de fato, a função de onda, uma vez que ela é vista aqui como a função de onda do Universo. Um detalhe importante nesse contexto é que a supermétrica de DeWitt possui assinatura $(-, +, +, +, +, +)$, dando origem a equações hiperbólicas, como a equação de Klein–Gordon, por exemplo. Esta, por sua vez, apresenta complicações relacionadas à noção de probabilidade, uma vez que a densidade de probabilidade associada pode assumir valores negativos. Algo análogo pode ocorrer também na gravitação quântica canônica, afinal para que a densidade

de probabilidade esteja bem definida, é necessário assumir um produto interno que capture bem a natureza dos objetos que estamos tratando aqui.

Não abordamos esses aspectos em detalhes, pois o propósito desta dissertação é aplicar a equação de Wheeler–DeWitt a buracos negros. Portanto, aos leitores interessados em gravitação quântica (e, em particular, em cosmologia quântica), recomenda-se a leitura de [7], [10], [28], [30] e [31].

4 Interpretação de de Broglie–Bohm da Mecânica Quântica

Essa interpretação da mecânica quântica também é chamada de interpretação causal, uma vez que traz consigo um caráter determinístico. Essencialmente, o que foi proposto por esses autores é que, uma vez conhecidos os dados iniciais associados ao sistema quântico, seria possível, em princípio, determinar as trajetórias das partículas. Vejamos abaixo como essas ideias se relacionam com a gravitação quântica.

Com a finalidade de apresentar as ideias e os cálculos com maior clareza, a constante $\hbar$ será mantida explícita (fora das unidades naturais) e, caso contrário, isso ficará indicado.

4.1 Postulados da interpretação causal

Por simplicidade, iremos assumir inicialmente os postulados no contexto da mecânica quântica não relativística para partículas pontuais. Isso posto, os postulados afirmam que [30]:

- Seja um sistema físico individual composto por uma única partícula cujo movimento se dá no espaço-tempo. A trajetória desta será representada pela chamada onda-guia;
- Essa onda, descrita aqui por $\Psi = \Psi(\vec{r}, t)$, é solução da equação de Schrödinger;
- Conhecida a onda-guia, a trajetória $\vec{r}$ da partícula pode ser determinada pela equação guia,

$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{1}{m} \vec{\nabla} S(\vec{r}, t), \quad (4.1)$$

onde m é a massa da partícula e S é a fase da onda quando escrita na forma exponencial complexa (forma polar). Destacamos também que, conhecidos os valores iniciais da posição, a trajetória é completamente determinada nesse contexto;

- Analogamente ao que é feito na interpretação de Copenhague, a probabilidade de se encontrar a partícula numa dada região do espaço, digamos, entre $\vec{r}$ e $\vec{r} + d\vec{r}$, é dada por

$$R^2(\vec{r}, t) d^3r, \quad (4.2)$$

onde $R^2 = |\Psi|^2$.

4.2 Equação de movimento para a partícula e a onda

Com base nesses postulados, podemos começar a construir a dinâmica inerente ao sistema quântico. Começemos escrevendo a função de onda na forma polar,

$$\Psi = Re^{iS/\hbar} = R \cos\left(\frac{S}{\hbar}\right) + iR \sin\left(\frac{S}{\hbar}\right), \quad (4.3)$$

onde $R = R(\vec{r}, t)$ é a amplitude real não negativa e $S = S(\vec{r}, t)$ é a fase real. Como discutido anteriormente, a amplitude de probabilidade é obtida por meio de

$$|\Psi|^2 = \Psi\Psi^* = (Re^{iS/\hbar})(Re^{-iS/\hbar}) = R^2 \Rightarrow R = \sqrt{\Psi\Psi^*}. \quad (4.4)$$

Além disso, a fase pode ser obtida a partir de

$$\frac{\Psi}{\Psi^*} = \frac{e^{iS/\hbar}}{e^{-iS/\hbar}} = e^{2iS/\hbar} \Rightarrow \frac{2iS}{\hbar} = \ln\left(\frac{\Psi}{\Psi^*}\right) \Rightarrow S = \frac{\hbar}{2i} \ln\left(\frac{\Psi}{\Psi^*}\right). \quad (4.5)$$

Fazendo a decomposição da função de onda, conseguimos chegar em outras expressões para a amplitude e para a fase,

$$\Psi = \psi_1 + i\psi_2 \quad \text{onde} \quad \begin{cases} \psi_1 = R \cos\left(\frac{S}{\hbar}\right) \\ \psi_2 = R \sin\left(\frac{S}{\hbar}\right) \end{cases}, \quad (4.6)$$

então,

$$|\Psi|^2 = \Psi\Psi^* = (\psi_1 + i\psi_2)(\psi_1 - i\psi_2) = \psi_1^2 - i\psi_1\psi_2 + i\psi_2\psi_1 + \psi_2^2, \quad (4.7)$$

logo,

$$|\Psi|^2 = \psi_1^2 + \psi_2^2 = R^2 \Rightarrow R = \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}. \quad (4.8)$$

E também,

$$\frac{\psi_2}{\psi_1} = \tan\left(\frac{S}{\hbar}\right) \Rightarrow S = \hbar \arctan\left(\frac{\psi_2}{\psi_1}\right). \quad (4.9)$$

A dinâmica quântica vem da equação de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V\Psi, \quad (4.10)$$

onde $V = V(\vec{r})$ é o potencial independente do tempo. Substituindo a função de onda na forma polar,

$$i\hbar \frac{\partial (Re^{iS/\hbar})}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 (Re^{iS/\hbar}) + VRe^{iS/\hbar}, \quad (4.11)$$

$$i\hbar \frac{\partial R}{\partial t} e^{iS/\hbar} + i\hbar R \frac{i}{\hbar} \frac{\partial S}{\partial t} e^{iS/\hbar} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 (Re^{iS/\hbar}) + VRe^{iS/\hbar}. \quad (4.12)$$

Para calcular o laplaciano, podemos usar a identidade,

$$\nabla^2(fg) = (\nabla^2 f)g + 2\vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} g + f\nabla^2 g, \quad (4.13)$$

onde f e g são funções reais arbitrárias. Considerando

$$f = R \quad \text{e} \quad g = e^{iS/\hbar}, \quad (4.14)$$

com isso, podemos obter os três termos de (4.13). Começando com o primeiro termo,

$$(\nabla^2 f)g = (\nabla^2 R)e^{iS/\hbar}, \quad (4.15)$$

e o segundo termo,

$$2\vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} g = 2\vec{\nabla} R \cdot \vec{\nabla} (e^{iS/\hbar}) = \frac{2i}{\hbar} e^{iS/\hbar} \vec{\nabla} R \cdot \vec{\nabla} S, \quad (4.16)$$

e por fim, o terceiro termo,

$$\begin{aligned} f\nabla^2 g &= R\nabla^2 (e^{iS/\hbar}) = R\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} e^{iS/\hbar}) = \frac{i}{\hbar} R\vec{\nabla} \cdot (e^{iS/\hbar} \vec{\nabla} S) \\ &= \frac{i}{\hbar} R \left(\vec{\nabla} e^{iS/\hbar} \cdot \vec{\nabla} S + e^{iS/\hbar} \nabla^2 S \right) \\ &= \frac{i}{\hbar} R \left[\frac{i}{\hbar} e^{iS/\hbar} (\vec{\nabla} S)^2 + e^{iS/\hbar} \nabla^2 S \right] \\ &= R \left[-\frac{1}{\hbar^2} (\vec{\nabla} S)^2 + \frac{i}{\hbar} \nabla^2 S \right] e^{iS/\hbar}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Substituindo (4.15), (4.16) e (4.17) em (4.12),

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial R}{\partial t} e^{iS/\hbar} - R \frac{\partial S}{\partial t} e^{iS/\hbar} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \nabla^2 R + R \left[-\frac{1}{\hbar^2} (\vec{\nabla} S)^2 + \frac{i}{\hbar} \nabla^2 S \right] + \frac{2i}{\hbar} \vec{\nabla} R \cdot \vec{\nabla} S \right\} e^{iS/\hbar} \\ &\quad + V R e^{iS/\hbar}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

dividindo por $\Psi = R e^{iS/\hbar}$,

$$\frac{i\hbar}{R} \frac{\partial R}{\partial t} - \frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\nabla^2 R}{R} - \frac{(\vec{\nabla} S)^2}{\hbar^2} + \frac{i}{\hbar} \nabla^2 S + \frac{2i}{\hbar} \frac{\vec{\nabla} R \cdot \vec{\nabla} S}{R} \right] + V, \quad (4.19)$$

$$i\hbar \left[\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\nabla^2 S}{2m} + \frac{\vec{\nabla} R \cdot \vec{\nabla} S}{mR} \right] - \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\nabla^2 R}{R} - \frac{(\vec{\nabla} S)^2}{\hbar^2} \right] - V = 0, \quad (4.20)$$

e assim vemos que surgem duas equações, uma delas fruto de uma parte real e a outra de uma parte imaginária. A parte real é

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\vec{\nabla} S)^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} + V = 0, \quad (4.21)$$

e a parte imaginária,

$$\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\nabla^2 S}{2m} + \frac{\vec{\nabla} R \cdot \vec{\nabla} S}{mR} = 0 \Rightarrow 2R \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{R^2}{m} \nabla^2 S + \frac{2R}{m} \vec{\nabla} R \cdot \vec{\nabla} S = 0, \quad (4.22)$$

portanto,

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{R^2 \vec{\nabla} S}{m} \right) = 0, \quad (4.23)$$

com condições iniciais $R_0 = R(\vec{r}, 0)$ e $S_0 = S(\vec{r}, 0)$. Essas equações formam um conjunto de equações acopladas, onde esta última é a equação de continuidade que reflete a conservação da probabilidade no tempo, com

$$R^2 = |\Psi|^2, \quad (4.24)$$

a densidade de probabilidade, e

$$\vec{J} = \frac{R^2 \vec{\nabla} S}{m}, \quad (4.25)$$

a corrente de probabilidade.

4.3 Equação de Hamilton–Jacobi

É possível agora fazer uma associação concreta entre a partícula, do ponto de vista quântico, e a onda-guia que a descreve, tendo em vista que, ao substituir a função de onda na forma polar na equação de Schrödinger, obtivemos uma equação de movimento para o caso quântico que possui uma forma parecida com a equação de Hamilton–Jacobi (ver 4.21), a saber,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\vec{\nabla} S)^2}{2m} + Q + V = 0, \quad (4.26)$$

onde

$$Q(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R}, \quad (4.27)$$

é o chamado potencial quântico. De fato, pela similaridade com o caso clássico, a essa equação dá-se o nome de equação de Hamilton–Jacobi quântica.

A conexão dessa expressão com a partícula se dá ao resolvê-la, pois obtém-se a fase e, por meio dela, encontramos a trajetória quântica a partir da equação-guia (veja os postulados),

$$\dot{\vec{r}} = \frac{1}{m} \vec{\nabla} S \Rightarrow \vec{p} = \vec{\nabla} S, \quad (4.28)$$

de tal forma que

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{p^2}{2m} + Q + V = 0 \Rightarrow -\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{p^2}{2m} + Q + V = E, \quad (4.29)$$

sendo este último a energia total do sistema.

Apesar de parecer arbitrária a introdução da equação-guia por meio de um dos postulados, se olharmos atentamente para a equação (4.23), vemos que ela é semelhante à equação de conservação clássica,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (4.30)$$

onde $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ é a densidade de partículas no espaço. Ao compará-las, vemos que a velocidade no caso quântico é dada por

$$\vec{v} = \frac{\vec{\nabla} S}{m}. \quad (4.31)$$

É necessário também discutirmos um pouco o papel do potencial quântico que surgiu na equação de Hamilton–Jacobi quântica,

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R}. \quad (4.32)$$

Diferentemente do potencial clássico V , o potencial quântico Q não é uma função externa que dita a dinâmica do sistema, na verdade, ele está intimamente relacionado com o estado quântico total do sistema [30]. Isto é, ele depende da amplitude R , que por sua vez depende da função de onda como um todo. Em conclusão, $Q = Q(\Psi)$ não é uma entrada do problema: ele é uma saída que pode ser obtida conhecendo-se a função de onda completa.

Isso pode não parecer muito intuitivo, mas, como está claro aqui, o potencial quântico é relevante em pequenas escalas e, portanto, não há como deduzirmos a partir de princípios mais básicos, de forma direta, os seus efeitos sobre o sistema quântico. O que ocorre, na prática, é que utilizaremos autoestados já conhecidos previamente, pois é por meio deles que obteremos a forma funcional de Q para, só então, descobrirmos como ele atua no regime quântico.

Apesar disso, o potencial quântico pode ser pensado em pé de igualdade com o potencial clássico [30]. Para vermos isso, comecemos tomando o gradiente da equação (4.21),

$$\vec{\nabla} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\vec{\nabla} S)^2}{2m} + Q + V \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial(\vec{\nabla} S)}{\partial t} + \frac{1}{2m} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} S \cdot \vec{\nabla} S) + \vec{\nabla}(Q + V) = 0, \quad (4.33)$$

usando a identidade para dois vetores arbitrários $\vec{v}$ e $\vec{u}$,

$$\vec{\nabla}(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}), \quad (4.34)$$

logo,

$$\frac{\partial \vec{\nabla} S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[2(\vec{\nabla} S \cdot \vec{\nabla})\vec{\nabla} S + 2\vec{\nabla} S \times \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} S)}_{=0} \right] + \vec{\nabla}(Q + V) = 0, \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial(\vec{\nabla} S)}{\partial t} + \frac{1}{m}(\vec{\nabla} S \cdot \vec{\nabla})\vec{\nabla} S = -\vec{\nabla}(Q + V), \quad (4.36)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m}(\vec{\nabla} S \cdot \vec{\nabla}) \right] \vec{\nabla} S = -\vec{\nabla}(Q + V). \quad (4.37)$$

Usando a equação-guia,

$$\dot{\vec{r}} = \frac{1}{m}(\vec{\nabla}S), \quad (4.38)$$

então,

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m}(m\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}) \right] m\dot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}(Q + V) \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} \right) m\dot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}(Q + V), \quad (4.39)$$

e sabendo que

$$\frac{\partial}{\partial t} + \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{d}{dt}, \quad (4.40)$$

chegamos em

$$\frac{d(m\dot{\vec{r}})}{dt} = -\vec{\nabla}(Q + V) \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = -\vec{\nabla}(Q + V). \quad (4.41)$$

Essa equação possui a forma da segunda lei de Newton, com um termo de força clássica $-\vec{\nabla}V$ e um termo de força quântica $-\vec{\nabla}Q$, e pode ser vista como uma equação de movimento para a partícula, apesar de que resolver a equação-guia é, em geral, menos trabalhoso.

4.4 Introdução da probabilidade e medidas ideais

Na teoria desenvolvida por Bohm, um sistema físico individual é composto por uma função de onda $\Psi(\vec{r}, t)$ e uma partícula com posição bem definida $\vec{r}(t)$. A evolução de ambas é determinística no sentido de que a função de onda satisfaz a equação de Schrödinger e a função horária da posição satisfaz a equação-guia. Portanto, dado $\Psi_0(\vec{r}, 0)$ e $\vec{r}_0(0)$, o sistema está completamente determinado. O único problema que ainda resta é que, por limitações experimentais, seria possível preparar um sistema em um estado inicial Ψ_0 , mas o mesmo não vale para $\vec{r}_0$, uma vez que, para determinar as posições das partículas, é necessário interagir com o sistema e, assim, perturbá-lo. Esse é um resultado central da mecânica quântica, frequentemente associado ao princípio de incerteza de Heisenberg.

Para lidar com isso, introduzimos um conjunto estatístico de sistemas idênticos, nos quais cada sistema tem a mesma forma funcional da função de onda $\Psi(\vec{r})$, mas pode ter uma posição inicial diferente $\vec{r}_0$ e, eventualmente, funções de onda diferentes indexadas por i , representando variações possíveis. Introduz-se, portanto, a função $P_0(\vec{r}, i)$, que representa a densidade de sistemas do conjunto que:

- têm a função de onda $\Psi_i(\vec{r})$;
- cuja partícula está inicialmente (em $t = 0$) no ponto $\vec{r}$;
- a função $P_0(\vec{r}, i)$ satisfaz

$$P_0(\vec{r}, i) \geq 0, \quad \forall \vec{r}, i. \quad (4.42)$$

Nesse sentido, a função $P_0(\vec{r}, i) d^3r$ dá a probabilidade de que um sistema no conjunto tenha função de onda $\Psi_i(\vec{r})$ e a partícula na vizinhança de volume d^3r em torno de $\vec{r}$, no tempo $t = 0$. Entretanto, o conjunto é uma construção fictícia [30], e cada membro do conjunto é um “representante” de um possível comportamento. Ou seja, apesar de usarmos essa construção estatística, na prática só existe um sistema real, com uma partícula real. Mas, como não temos acesso à posição inicial exata, trataremos o problema estatisticamente via o conjunto.

Em particular, na formulação de de Broglie–Bohm da mecânica quântica temos que $P_0 = R_0^2$. Podemos restringir a análise ao caso em que se conhece o estado inicial da onda $\Psi_0(\vec{r})$, mas não se sabe a posição inicial da partícula. Com isso, postulamos que a função $R_0(\vec{r})$ possui quadrado integrável e normalizado,

$$\int R_0^2(\vec{r}) d^3r = 1. \quad (4.43)$$

Assim, a probabilidade de que a partícula, no conjunto associado com a mesma onda Ψ_0 , esteja em um volume d^3r na vizinhança do ponto $\vec{r}$ é dada por $R_0^2(\vec{r}) d^3r$, isto é,

$$P_0(\vec{r}) = R_0^2(\vec{r}). \quad (4.44)$$

Uma vez que a função $R^2(\vec{r}, t)$ satisfaz a equação de conservação de probabilidade,

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{R^2 \vec{\nabla} S}{m} \right) = 0, \quad (4.45)$$

segue que $R^2(\vec{r}, t)$ determina a distribuição de probabilidade no instante t , se a condição $P_0(\vec{r}) = R_0^2(\vec{r})$ vale em $t = 0$.

Com o objetivo de ilustrar com mais clareza essa construção que fizemos acerca de como lidar com a imprecisão do aparato experimental, façamos uma digressão sobre como realizar medições ideais na teoria causal proposta aqui. Para tanto, consideremos inicialmente o caso ideal no qual as medidas não destroem o sistema quântico de interesse e sua repetição leva sempre ao mesmo resultado. Então, podemos associar o estado quântico $|\psi_0(\vec{x}, t)\rangle$ ao sistema, com $|\psi_0\rangle \in \mathcal{H}_X$, onde $\mathcal{H}_X$ é o espaço de Hilbert do sistema. Agora, levando em conta que queremos medir uma grandeza arbitrária A , representada aqui pelo operador $\hat{A}$, e por simplicidade iremos tomá-la como não degenerada. Quanto ao aparato experimental¹, este será representado pelo estado quântico $|\phi_0(\vec{y})\rangle$, onde $|\phi_0\rangle \in \mathcal{H}_Y$, sendo $\mathcal{H}_Y$ o espaço de Hilbert do aparato experimental. Isso posto, e sendo o sistema e o aparato experimental independentes entre si, então o estado quântico do universo será,

$$|\Psi_0(\vec{x}, \vec{y})\rangle = |\psi_0(\vec{x})\rangle \otimes |\phi_0(\vec{y})\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \Psi_0(\vec{x}, \vec{y}) = \psi_0(\vec{x})\phi_0(\vec{y}), \quad (4.46)$$

¹ É usual os autores que trabalham com informação quântica se referirem ao aparato experimental como sendo o ambiente.

onde $\mathcal{H} = \mathcal{H}_X \otimes \mathcal{H}_Y$ é o espaço de Hilbert do universo. Podemos expandir $|\psi_0\rangle$ em termos dos autoestados de $\hat{A}$, a fim de facilitar a análise,

$$|\psi_0(\vec{x})\rangle = \sum_a c_a |\psi_a(\vec{x})\rangle \quad \text{onde} \quad \hat{A} |\psi_a\rangle = a |\psi_a\rangle . \quad (4.47)$$

Consideremos também uma hamiltoniana de interação,

$$\hat{H}_{\text{int}} = g(\hat{A}_X \otimes \hat{\mathbb{1}}_Y)(\hat{\mathbb{1}}_X \otimes \hat{P}_Y) = g\hat{A}_X \otimes \hat{P}_Y , \quad (4.48)$$

onde g é a constante de acoplamento.

A presença do operador momento aqui é necessária, pois a coordenada y é pensada como o grau de liberdade do “ponteiro” do aparato experimental, portanto, o operador $\hat{P}_Y$ faz o papel de gerador do deslocamento de y quando ocorre a medição, isto é, o ponteiro se “mexe”. Durante a medição, o sistema evolui no tempo por meio do operador de evolução unitário,

$$\hat{U} = e^{-i\hat{H}_{\text{int}}t/\hbar} = e^{-igt\hat{A}_X \otimes \hat{P}_Y/\hbar} . \quad (4.49)$$

Logo, sendo o estado inicial do universo

$$|\Psi_0(\vec{x}, \vec{y})\rangle = |\psi_0(\vec{x})\rangle \otimes |\phi_0(\vec{y})\rangle , \quad (4.50)$$

temos

$$\begin{aligned} |\Psi(\vec{x}, \vec{y}, t)\rangle &= \hat{U} |\Psi_0(\vec{x}, \vec{y})\rangle \\ &= e^{-igt\hat{A}_X \otimes \hat{P}_Y/\hbar} |\Psi_0(\vec{x}, \vec{y})\rangle \\ &= e^{-igt\hat{A}_X \otimes \hat{P}_Y/\hbar} \sum_a c_a |\psi_a(\vec{x})\rangle \otimes |\phi_0(\vec{y})\rangle . \end{aligned} \quad (4.51)$$

Sabendo que

$$\hat{A}_X \otimes \hat{P}_Y(|\psi_a\rangle \otimes |\phi_0\rangle) = \hat{A}_X |\psi_a\rangle \otimes \hat{P}_Y |\phi_0\rangle = a |\psi_a\rangle \otimes \hat{P}_Y |\phi_0\rangle , \quad (4.52)$$

segue que

$$|\Psi(\vec{x}, \vec{y}, t)\rangle = \sum_a c_a |\psi_a(\vec{x})\rangle \otimes e^{-igt\hat{P}_Y/\hbar} |\phi_0\rangle . \quad (4.53)$$

Como $\hat{P}_Y$ é o gerador de translações em $\vec{y}$, obtemos o deslocamento do estado do ponteiro,

$$e^{-igt\hat{P}_Y/\hbar} |\phi_0\rangle = |\phi_0(\vec{y} - gta)\rangle , \quad (4.54)$$

de modo que

$$|\Psi(\vec{x}, \vec{y}, t)\rangle = \sum_a c_a |\psi_a(\vec{x})\rangle \otimes |\phi_0(\vec{y} - gta)\rangle , \quad (4.55)$$

ou, na representação da posição,

$$\Psi(\vec{x}, \vec{y}, t) = \sum_a c_a \psi_a(\vec{x}) \phi_0(\vec{y} - gta) . \quad (4.56)$$

É importante salientar que se trata de uma medida ideal, de modo que não há sobreposição entre os estados do ponteiro, isto é, o aparato experimental correlaciona cada autovalor a a um estado distinto do ponteiro (associado a cada autoestado ψ_a). Ao se fazer essa medição, haverá o colapso da função de onda para um desses autoestados,

$$\Psi(\vec{x}, \vec{y}, t) \rightarrow c_a \psi_a(\vec{x}) \phi_0(\vec{y} - gta), \quad (4.57)$$

de tal maneira que os demais autoestados se tornam inacessíveis ao sistema.

A diferença entre a interpretação de de Broglie–Bohm e a interpretação de Copenhague é que, na primeira, o colapso efetivo não é aleatório: uma vez conhecidos os valores iniciais associados ao sistema, o resultado da medição fica completamente determinado. Geralmente descreve-se esse procedimento em termos de ramos da função de onda, ao ocorrer o colapso efetivo, então os demais ramos tornam-se inacessíveis e não possuem mais relação causal com o sistema físico de interesse.

4.5 Interpretação causal aplicada à Gravitação Quântica de Wheeler–DeWitt

Apesar de este capítulo parecer deslocado dos primeiros, é aqui que veremos sua conexão com a gravitação canônica de Wheeler–DeWitt. Essa formulação encontra na cosmologia quântica um campo muito fértil para a sua aplicação, uma vez que, por meio desse método, pretende-se quantizar o Universo como um todo. Se assumirmos que a mecânica quântica é passível de aplicação também em todos os regimes da física, então será necessário nos apoiarmos em alguma de suas interpretações a fim de dar sentido aos resultados obtidos.

A interpretação mais utilizada entre os físicos certamente é a de Copenhague, porém ela apresenta dificuldades neste contexto, uma vez que, em seus postulados, exige a existência de um domínio externo clássico no qual as medidas são realizadas. Essa necessidade se deve ao fato de que o colapso da função de onda em um de seus autoestados possíveis não é uma evolução unitária [32]. Além disso, sendo a cosmologia o estudo do Universo como um todo, ele se torna o próprio laboratório e, portanto, não há sentido em postular um domínio externo no qual as medidas são realizadas [33]. Pela mesma razão, a interpretação estatística usual da função de onda também se torna problemática em relatividade geral quântica: não há, em princípio, um conjunto externo de universos sobre o qual realizar medições repetidas, nem um observador clássico externo em relação ao sistema total. Assim, a própria noção de probabilidade precisa ser tratada com cuidado nesse contexto.

Por outro lado, a interpretação de de Broglie–Bohm fornece aqui uma estrutura mais robusta, no sentido de não exigir o conceito de colapso: a evolução é completamente determinada tanto pela equação de Schrödinger quanto pela equação-guia. Isso

nos motiva a aplicá-la tanto à cosmologia quântica quanto a buracos negros quânticos, sendo este último o objeto de investigação desta dissertação no capítulo seguinte.

Para aplicarmos a interpretação de de Broglie–Bohm à relatividade geral quântica, consideremos a ação de Einstein–Hilbert acoplada minimamente ao setor de matéria por meio de um campo escalar com potencial arbitrário $U(\Phi)$,

$$S_{\text{grav}} = S_{\text{EH}} + S_{\text{mat}} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - U(\Phi) \right], \quad (4.58)$$

onde Φ é um campo escalar. Vale destacar que os resultados obtidos aqui permanecem válidos para campos de matéria de qualquer natureza, desde que o setor de matéria esteja minimamente acoplado à gravidade².

Como a equação de Wheeler–DeWitt desempenha o papel de equação dinâmica, estaremos interessados nela. Como ela pode ser obtida a partir do vínculo hamiltoniano, consideremos aqui a sua decomposição em termos das contribuições gravitacional e de matéria,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_g + \mathcal{H}_{\text{mat}}, \quad (4.59)$$

cujas quantização fornece

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_g + \hat{\mathcal{H}}_{\text{mat}} \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathcal{H}}\Psi[h_{ij}, \Phi] = \hat{\mathcal{H}}_g\Psi[h_{ij}, \Phi] + \hat{\mathcal{H}}_{\text{mat}}\Psi[h_{ij}, \Phi]. \quad (4.60)$$

A parte gravitacional do vínculo hamiltoniano já é conhecida, pois foi calculada no Capítulo 2 (ver Eq. 2.110). Assim, para obtermos o vínculo hamiltoniano do setor de matéria, será necessário calcular a hamiltoniana correspondente. Seja, portanto,

$$H_{\text{mat}} = \Pi_\Phi \dot{\Phi} - \mathcal{L}_\Phi. \quad (4.61)$$

Precisamos escrever a hamiltoniana do setor de matéria em termos das variáveis ADM. Sabendo que

$$g^{\mu\nu} = \left(\frac{-1/\mathcal{N}^2}{N^j/\mathcal{N}^2} \middle| \frac{N^i/\mathcal{N}^2}{h^{ij} - N^i N^j/\mathcal{N}^2} \right) \quad \text{e} \quad \sqrt{-g} = \mathcal{N} \sqrt{h}, \quad (4.62)$$

a densidade lagrangiana do campo escalar em espaço curvo toma a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Phi &= \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - U(\Phi) \right] \\ &= \mathcal{N} \sqrt{h} \left[-\frac{1}{2} g^{00} \dot{\Phi}^2 - g^{i0} \dot{\Phi} \partial_i \Phi - \frac{1}{2} g^{ij} \partial_i \Phi \partial_j \Phi - U(\Phi) \right] \\ &= \mathcal{N} \sqrt{h} \left[\frac{1}{2\mathcal{N}^2} \dot{\Phi}^2 - \frac{N^i}{\mathcal{N}^2} \dot{\Phi} \partial_i \Phi - \frac{1}{2} \left(h^{ij} - \frac{N^i N^j}{\mathcal{N}^2} \right) \partial_i \Phi \partial_j \Phi - U(\Phi) \right] \\ &= \mathcal{N} \sqrt{h} \left[\frac{1}{2\mathcal{N}^2} (\dot{\Phi} - N^i \partial_i \Phi)^2 - \frac{1}{2} h^{ij} \partial_i \Phi \partial_j \Phi - U(\Phi) \right]. \end{aligned} \quad (4.63)$$

² Isto é, os campos de matéria acoplam-se apenas à métrica, e não às derivadas da métrica.

O momento conjugado ao campo escalar é

$$\Pi_\Phi = \frac{\partial \mathcal{L}_\Phi}{\partial \dot{\Phi}} = \frac{\sqrt{h}}{\mathcal{N}} (\dot{\Phi} - N^i \partial_i \Phi) \Rightarrow \dot{\Phi} = \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{h}} \Pi_\Phi + N^i \partial_i \Phi. \quad (4.64)$$

Substituindo (4.63) e (4.64) em (4.61), obtém-se

$$\begin{aligned} H_{\text{mat}} &= \Pi_\Phi \left(\frac{\mathcal{N}}{\sqrt{h}} \Pi_\Phi + N^i \partial_i \Phi \right) - \mathcal{N} \sqrt{h} \left[\frac{1}{2\mathcal{N}^2} \frac{\mathcal{N}^2}{h} \Pi_\Phi^2 - \frac{1}{2} h^{ij} \partial_i \Phi \partial_j \Phi - U(\Phi) \right] \\ &= \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{h}} \Pi_\Phi^2 + N^i \Pi_\Phi \partial_i \Phi - \frac{\mathcal{N}}{2\sqrt{h}} \Pi_\Phi^2 + \frac{\mathcal{N}\sqrt{h}}{2} h^{ij} \partial_i \Phi \partial_j \Phi + \mathcal{N}\sqrt{h} U(\Phi) \\ &= \mathcal{N} \left[\frac{1}{2\sqrt{h}} \Pi_\Phi^2 + \frac{\sqrt{h}}{2} h^{ij} \partial_i \Phi \partial_j \Phi + \sqrt{h} U(\Phi) \right] + N^i \Pi_\Phi \partial_i \Phi. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Logo,

$$H_{\text{mat}} = \mathcal{N} \left[\frac{1}{2\sqrt{h}} \Pi_\Phi^2 + \sqrt{h} \left(\frac{1}{2} h^{ij} \partial_i \Phi \partial_j \Phi + U(\Phi) \right) \right] + N^i \Pi_\Phi \partial_i \Phi, \quad (4.66)$$

onde reconhecemos o vínculo hamiltoniano para o setor de matéria,

$$\mathcal{H}_{\text{mat}} = \frac{1}{2\sqrt{h}} \Pi_\Phi^2 + \sqrt{h} \left(\frac{1}{2} h^{ij} \partial_i \Phi \partial_j \Phi + U(\Phi) \right). \quad (4.67)$$

A quantização é feita na representação das coordenadas,

$$\hat{\Pi}^{ij} \rightarrow -i \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \quad \text{e} \quad \hat{\Pi}_\Phi \rightarrow -i \frac{\delta}{\delta \Phi}, \quad (4.68)$$

usando (3.23), (4.60) e (4.67), onde estaremos adotando as unidades naturais daqui em diante $\hbar = 1$. Assim, obtemos a equação de Wheeler-DeWitt,

$$\left[-\hat{G}_{ijkl} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \frac{\delta}{\delta h_{kl}} - \frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\delta^2}{\delta \Phi^2} + \hat{V} \right] \Psi[h_{ij}, \Phi] = 0, \quad (4.69)$$

onde

$$\hat{V} = \sqrt{h} \left[-\mathcal{R} + \frac{1}{2} h^{ij} \partial_i \Phi \partial_j \Phi + U(\Phi) \right]. \quad (4.70)$$

Notando que não foi levado em conta um ordenamento específico de operadores.

De posse da equação de Wheeler-DeWitt para a gravitação acoplada a um campo escalar, podemos analisar os desdobramentos ao aplicar a interpretação de de Broglie-Bohm. Como vimos, isso é feito escrevendo a função de onda na forma polar, isto é,

$$\Psi[h_{ij}, \Phi] = A e^{iS}, \quad (4.71)$$

onde $S = S[h_{ij}, \Phi]$ e $A = A[h_{ij}, \Phi]$ são a fase e a amplitude, respectivamente. Logo,

$$\left[-\hat{G}_{ijkl} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \frac{\delta}{\delta h_{kl}} - \frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\delta^2}{\delta \Phi^2} + \hat{V} \right] A e^{iS} = 0. \quad (4.72)$$

Começando pelas derivadas em relação à Φ ,

$$\frac{\delta \Psi}{\delta \Phi} = \frac{\delta}{\delta \Phi} (A e^{iS}) = \left(\frac{\delta A}{\delta \Phi} + iA \frac{\delta S}{\delta \Phi} \right) e^{iS}, \quad (4.73)$$

então,

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \Psi}{\delta \Phi^2} &= \left[\frac{\delta}{\delta \Phi} \left(\frac{\delta A}{\delta \Phi} + iA \frac{\delta S}{\delta \Phi} \right) \right] e^{iS} + \left(\frac{\delta A}{\delta \Phi} + iA \frac{\delta S}{\delta \Phi} \right) \frac{\delta}{\delta \Phi} e^{iS} \\ &= \left(\frac{\delta^2 A}{\delta \Phi^2} + i \frac{\delta A}{\delta \Phi} \frac{\delta S}{\delta \Phi} + iA \frac{\delta^2 S}{\delta \Phi^2} \right) e^{iS} + \left(\frac{\delta A}{\delta \Phi} + iA \frac{\delta S}{\delta \Phi} \right) i \frac{\delta S}{\delta \Phi} e^{iS} \\ &= \left(\frac{\delta^2 A}{\delta \Phi^2} + i \frac{\delta A}{\delta \Phi} \frac{\delta S}{\delta \Phi} + iA \frac{\delta^2 S}{\delta \Phi^2} \right) e^{iS} + \left[i \frac{\delta A}{\delta \Phi} \frac{\delta S}{\delta \Phi} - A \left(\frac{\delta S}{\delta \Phi} \right)^2 \right] e^{iS} \\ &= \left[\frac{\delta^2 A}{\delta \Phi^2} + 2i \frac{\delta A}{\delta \Phi} \frac{\delta S}{\delta \Phi} + iA \frac{\delta^2 S}{\delta \Phi^2} - A \left(\frac{\delta S}{\delta \Phi} \right)^2 \right] e^{iS}, \end{aligned} \quad (4.74)$$

e no setor gravitacional teremos o mesmo procedimento,

$$\frac{\delta \Psi}{\delta h_{ij}} = \frac{\delta}{\delta h_{ij}} (A e^{iS}) = \left(\frac{\delta A}{\delta h_{ij}} + iA \frac{\delta S}{\delta h_{ij}} \right) e^{iS}, \quad (4.75)$$

então,

$$\frac{\delta^2 \Psi}{\delta h_{ij} \delta h_{kl}} = \left[\frac{\delta^2 A}{\delta h_{ij} \delta h_{kl}} + 2i \frac{\delta A}{\delta h_{ij}} \frac{\delta S}{\delta h_{kl}} + iA \frac{\delta^2 S}{\delta h_{ij} \delta h_{kl}} - A \frac{\delta S}{\delta h_{ij}} \frac{\delta S}{\delta h_{kl}} \right] e^{iS}, \quad (4.76)$$

onde, no termo misto, já usamos a simetria do operador com $\hat{G}_{ijkl}$ ao contrair os índices.

Substituindo (4.74) e (4.76) na equação de Wheeler–DeWitt (4.72),

$$\begin{aligned} & -\hat{G}_{ijkl} \left[\frac{\delta^2 A}{\delta h_{ij} \delta h_{kl}} + 2i \frac{\delta A}{\delta h_{ij}} \frac{\delta S}{\delta h_{kl}} + iA \frac{\delta^2 S}{\delta h_{ij} \delta h_{kl}} - A \frac{\delta S}{\delta h_{ij}} \frac{\delta S}{\delta h_{kl}} \right] e^{iS} \\ & - \frac{1}{2\sqrt{h}} \left[\frac{\delta^2 A}{\delta \Phi^2} + 2i \frac{\delta A}{\delta \Phi} \frac{\delta S}{\delta \Phi} + iA \frac{\delta^2 S}{\delta \Phi^2} - A \left(\frac{\delta S}{\delta \Phi} \right)^2 \right] e^{iS} + \hat{V} A e^{iS} = 0, \end{aligned} \quad (4.77)$$

e, dividindo todos os termos por $A e^{iS}$ e rearranjando os termos semelhantes, obtemos

$$\begin{aligned} & i \left[-\hat{G}_{ijkl} \left(\frac{2}{A} \frac{\delta A}{\delta h_{ij}} \frac{\delta S}{\delta h_{kl}} + \frac{\delta^2 S}{\delta h_{ij} \delta h_{kl}} \right) - \frac{1}{\sqrt{h} A} \frac{\delta A}{\delta \Phi} \frac{\delta S}{\delta \Phi} - \frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\delta^2 S}{\delta \Phi^2} \right] \\ & - \hat{G}_{ijkl} \left(\frac{1}{A} \frac{\delta^2 A}{\delta h_{ij} \delta h_{kl}} - \frac{\delta S}{\delta h_{ij}} \frac{\delta S}{\delta h_{kl}} \right) - \frac{1}{2\sqrt{h} A} \frac{\delta^2 A}{\delta \Phi^2} + \frac{1}{2\sqrt{h}} \left(\frac{\delta S}{\delta \Phi} \right)^2 + \hat{V} = 0. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Separando a parte real, obtemos

$$\hat{G}_{ijkl} \frac{\delta S}{\delta h_{ij}} \frac{\delta S}{\delta h_{kl}} + \frac{1}{2\sqrt{h}} \left(\frac{\delta S}{\delta \Phi} \right)^2 + \hat{V} - \frac{1}{A} \left(\hat{G}_{ijkl} \frac{\delta^2 A}{\delta h_{ij} \delta h_{kl}} + \frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\delta^2 A}{\delta \Phi^2} \right) = 0, \quad (4.79)$$

onde reconhecemos o potencial quântico,

$$\hat{Q} = -\frac{1}{A} \left(\hat{G}_{ijkl} \frac{\delta^2 A}{\delta h_{ij} \delta h_{kl}} + \frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\delta^2 A}{\delta \Phi^2} \right). \quad (4.80)$$

Daí, portanto, chegamos à equação de Hamilton–Jacobi quântica para a relatividade geral quântica,

$$\hat{G}_{ijkl} \frac{\delta S}{\delta h_{ij}} \frac{\delta S}{\delta h_{kl}} + \frac{1}{2\sqrt{h}} \left(\frac{\delta S}{\delta \Phi} \right)^2 + \hat{V} + \hat{Q} = 0. \quad (4.81)$$

Olhando novamente para (4.78), resta ainda a parte imaginária. Neste caso, multipliquemos essa parte por A^2 , de tal modo que obtemos

$$\hat{G}_{ijkl} \left(2A \frac{\delta A}{\delta h_{ij}} \frac{\delta S}{\delta h_{kl}} + A^2 \frac{\delta^2 S}{\delta h_{ij} \delta h_{kl}} \right) + \frac{A}{\sqrt{h}} \frac{\delta A}{\delta \Phi} \frac{\delta S}{\delta \Phi} + \frac{A^2}{2\sqrt{h}} \frac{\delta^2 S}{\delta \Phi^2} = 0, \quad (4.82)$$

ou, de maneira compacta,

$$\hat{G}_{ijkl} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \left(A^2 \frac{\delta S}{\delta h_{kl}} \right) + \frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{\delta}{\delta \Phi} \left(A^2 \frac{\delta S}{\delta \Phi} \right) = 0. \quad (4.83)$$

Apesar da semelhança formal com uma equação de conservação (compare com (4.23)), não podemos interpretá-la diretamente como conservação de probabilidade devido à natureza hiperbólica do superspaço associada à assinatura indefinida da métrica de DeWitt $\hat{G}_{ijkl}$.

Conhecidas as equações dinâmicas, a interpretação de de Broglie–Bohm nos permite inferir que a evolução da métrica induzida e de seus momentos conjugados, tanto no setor gravitacional quanto no setor do campo escalar, pode ser postulada por meio das equações-guia,

$$\Pi^{ij} = \frac{\delta S[h_{ij}, \Phi]}{\delta h_{ij}} \quad \text{e} \quad \Pi_\Phi = \frac{\delta S[h_{ij}, \Phi]}{\delta \Phi}, \quad (4.84)$$

onde,

$$\Pi^{ij} = \sqrt{h}(h^{ij}K - K^{ij}) = G^{ijkl}(\dot{h}_{kl} - \bar{\nabla}_k N_l - \bar{\nabla}_l N_k), \quad (4.85)$$

e também,

$$\Pi_\Phi = \frac{\sqrt{h}}{\mathcal{N}}(\dot{\Phi} - N^i \partial_i \Phi). \quad (4.86)$$

Essas são equações diferenciais funcionais de primeira ordem que, ao serem integradas, revelam as trajetórias bohmianas percorridas pela métrica induzida na presença do potencial quântico Q . Nesse quadro, a dinâmica recupera o comportamento clássico no limite $Q \rightarrow 0$, isto é, obtemos novamente as soluções clássicas associadas à equação de Hamilton–Jacobi da relatividade geral.

5 Buracos Negros Quânticos na interpretação de de Broglie–Bohm

Os capítulos iniciais serviram como preparação para este. Aqui aplicaremos todas as ideias abordadas, as quais culminarão na quantização canônica de um buraco negro de Schwarzschild via equação de Wheeler–DeWitt.

Este capítulo apresenta as ideias e os cálculos desenvolvidos durante a pesquisa realizada no mestrado, que constituem a base desta dissertação, bem como resultados relacionados a um artigo ainda não publicado.

5.1 Hamiltoniana do Buraco Negro de Schwarzschild

Nosso objetivo aqui será investigar o comportamento da singularidade em um espaço-tempo de Schwarzschild a partir da quantização canônica da gravitação no formalismo ADM. Como ferramenta de trabalho, utilizaremos a interpretação de de Broglie–Bohm, de modo a analisarmos as trajetórias bohmianas calculadas, bem como o potencial quântico associado ao modelo.

Como é bem conhecido, a solução de Schwarzschild foi obtida no âmbito da relatividade geral de Albert Einstein, isto é, no regime clássico [38, 39]. A característica marcante dessa solução é a presença de uma singularidade em seu interior. Esse fato evidencia a incapacidade das teorias clássicas de fornecer uma descrição fidedigna do interior de buracos negros, uma vez que, devido à existência de horizontes de eventos, não é possível, em princípio, obter informações acerca do destino final de observadores em queda livre em direção à singularidade. De certa forma, o próprio significado de espaço-tempo deixa de fazer sentido quando nos aproximamos da singularidade. Mesmo quando consideramos transformações de coordenadas como as de Eddington–Finkelstein e de Kruskal–Szekeres, conseguimos apenas eliminar a singularidade de coordenadas associada ao horizonte de eventos, mas a singularidade física ainda permanece [16, 37]. Portanto, sendo a mecânica quântica uma teoria bem-sucedida em suas diversas áreas de aplicação, isso nos motiva a buscar uma abordagem sob a sua perspectiva ao tentar compreender o comportamento de singularidades. Tal abordagem pode, por um lado, indicar que o sistema torna-se livre dessa patologia e, por outro, fornecer algum entendimento acerca da própria natureza quântica do espaço-tempo.

Para iniciarmos nossa discussão, precisamos considerar um modelo de espaço-tempo para trabalhar. A singularidade se apresenta já na solução externa de Schwarzschild, a saber,

$$ds_{\text{ext}}^2 = -F(r)dt^2 + \frac{dr^2}{F(r)} + r^2d\Omega^2, \quad (5.1)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ é a métrica de uma 2-esfera, além disso temos a função $F(r) = 1 - \frac{2M}{r}$, com $F(r) > 0$. Como vemos, a noção de espaço-tempo se esvai quando

tomamos $r \rightarrow 0$ e para entendermos o mecanismo que opera nesse regime, precisamos olhar para a solução interior de Schwarzschild. Acontece que quando fazemos essa transição, isto é, quando consideramos $r < 2M$, espaço e tempo trocam de papel, de modo que,

$$ds_{\text{int}}^2 = f(r)dt^2 - \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2, \quad (5.2)$$

onde $f(r) = \frac{2M}{r} - 1$, com $f(r) > 0$. Essa inversão entre os papéis de r e t nos leva a inferirmos o seguinte comportamento para métrica interior,

$$ds_{\text{int}}^2 = -\frac{dt^2}{f(t)} + f(t)dr^2 + t^2 d\Omega^2. \quad (5.3)$$

O modelo adotado é conhecido como *métrica de Kantowski–Sachs* [26], introduzida originalmente em contextos cosmológicos anisotrópicos¹, em contraste com o modelo de Friedmann–Robertson–Walker, que é isotrópico. O ponto interessante aqui é que o interior do buraco negro de Schwarzschild emula, até certo sentido, um comportamento análogo ao de uma métrica cosmológica: na região $r < 2M$, a evolução ao longo de geodésicas temporais torna-se inevitável em direção à singularidade em $r = 0$, que aparece como destino futuro desses observadores. Nesse sentido, pode-se interpretar a região $r < 2M$ como um “universo” anisotrópico cuja evolução é inexorável, embora se trate de um fenômeno fisicamente distinto de uma cosmologia de expansão. Ainda assim, essa analogia permanece intrigante.

Isso posto, nosso objetivo aqui é quantizar canonicamente um buraco de Schwarzschild por meio de sua Hamiltoniana, sendo esta construída a partir da métrica de Kantowski-Sachs. Portanto, tomemos como generalização o seguinte modelo de mini-superespaço,

$$ds^2 = -\mathcal{N}^2(t) dt^2 + u(t) dr^2 + v(t) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (5.4)$$

onde $\mathcal{N}$ é função Lapso e também,

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-\mathcal{N}^2(t), h_{ij}) \quad \text{com} \quad h_{ij} = \text{diag}(u(t), v(t), v(t) \sin^2 \theta). \quad (5.5)$$

Tal modelo foi adotado pelos físicos Harpreet Singh e Malay K. Nandy em um trabalho publicado em 2024 [36], o qual, inclusive, influenciou fortemente o início desse capítulo.

Dado isso, para obtermos a hamiltoniana do modelo, é necessário calcular algumas quantidades que serão de grande utilidade. Começemos, então, encontrando os Símbolos de Christoffel 3D não nulos relativos à métrica induzida $h_{ij} = \text{diag}(u, v, v \sin^2 \theta)$,

$$\bar{\Gamma}_{ab}^c = \frac{1}{2} h^{cd} (\partial_a h_{db} + \partial_b h_{ad} + \partial_d h_{ab}). \quad (5.6)$$

¹ Modelos cosmológicos anisotrópicos são aqueles aos quais a expansão do universo não é homogênea em todas as direções.

Então,

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{\phi\phi}^{\theta} &= \frac{1}{2}(\partial_{\theta}h_{d\phi} + \partial_{\phi}h_{\theta d} - \partial_d h_{\phi\theta}) = -\frac{1}{2}h^{\theta\theta}\partial_{\theta}h_{\phi\phi} = -\frac{1}{2v}\partial_{\theta}(v\sin^2\theta) \\ &= -\frac{1}{2v}2v\sin\theta\cos\theta = -\sin\theta\cos\theta,\end{aligned}\quad (5.7)$$

e também,

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{\theta\phi}^{\phi} &= \bar{\Gamma}_{\phi\theta}^{\phi} = \frac{1}{2}h^{\phi\theta}(\partial_{\theta}h_{d\phi} + \partial_{\phi}h_{\theta d} - \partial_d h_{\phi\theta}) = \frac{1}{2}h^{\phi\phi}\partial_{\theta}h_{\phi\phi} = \frac{1}{2v\sin^2\theta}\partial_{\theta}(v\sin^2\theta) \\ &= \frac{1}{2v\sin^2\theta}2v\sin\theta\cos\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta.\end{aligned}\quad (5.8)$$

Calculemos agora o tensor de Ricci 3D,

$$\mathcal{R}_{ab} = \partial_c \bar{\Gamma}_{ba}^c - \partial_b \bar{\Gamma}_{ca}^c + \bar{\Gamma}_{cd}^c \bar{\Gamma}_{ba}^d - \bar{\Gamma}_{bd}^c \bar{\Gamma}_{ca}^d, \quad (5.9)$$

então, comecemos por,

$$\mathcal{R}_{rr} = \partial_c \bar{\Gamma}_{rr}^c - \partial_r \bar{\Gamma}_{cr}^c + \bar{\Gamma}_{cd}^c \bar{\Gamma}_{rr}^d - \bar{\Gamma}_{rd}^c \bar{\Gamma}_{cr}^d. \quad (5.10)$$

Façamos o cálculo termo a termo,

$$\begin{cases} \partial_c \bar{\Gamma}_{rr}^c = \partial_r \bar{\Gamma}_{rr}^r + \partial_{\theta} \bar{\Gamma}_{rr}^{\theta} + \partial_{\phi} \bar{\Gamma}_{rr}^{\phi} = 0, \\ \partial_r \bar{\Gamma}_{cr}^c = \partial_r \bar{\Gamma}_{rr}^r + \partial_r \bar{\Gamma}_{\theta r}^{\theta} + \partial_{\phi} \bar{\Gamma}_{\phi r}^{\phi} = 0, \\ \bar{\Gamma}_{cd}^c \bar{\Gamma}_{rr}^d = \bar{\Gamma}_{rd}^r \bar{\Gamma}_{rr}^d + \bar{\Gamma}_{\theta d}^{\theta} \bar{\Gamma}_{rr}^d + \bar{\Gamma}_{\phi d}^{\phi} \bar{\Gamma}_{rr}^d = 0, \\ \bar{\Gamma}_{rd}^c \bar{\Gamma}_{cr}^d = 0. \end{cases} \quad (5.11)$$

Portanto,

$$\mathcal{R}_{rr} = 0. \quad (5.12)$$

E agora,

$$\mathcal{R}_{\theta\theta} = \partial_c \bar{\Gamma}_{\theta\theta}^c - \partial_{\theta} \bar{\Gamma}_{c\theta}^c + \bar{\Gamma}_{cd}^c \bar{\Gamma}_{\theta\theta}^d - \bar{\Gamma}_{\theta d}^c \bar{\Gamma}_{c\theta}^d, \quad (5.13)$$

calculando cada termo,

$$\begin{cases} \partial_c \bar{\Gamma}_{\theta\theta}^c = \partial_r \bar{\Gamma}_{\theta\theta}^r + \partial_{\theta} \bar{\Gamma}_{\theta\theta}^{\theta} + \partial_{\phi} \bar{\Gamma}_{\theta\theta}^{\phi} = 0, \\ \partial_{\theta} \bar{\Gamma}_{c\theta}^c = \partial_{\theta} \bar{\Gamma}_{\theta\theta}^{\theta} + \partial_{\theta} \bar{\Gamma}_{\theta\theta}^{\theta} + \partial_{\theta} \bar{\Gamma}_{\phi\theta}^{\phi} = \partial_{\theta} \bar{\Gamma}_{\phi\theta}^{\phi} = \partial_{\theta} \cot\theta = -\csc^2\theta, \\ \bar{\Gamma}_{cd}^c \bar{\Gamma}_{\theta\theta}^d = \bar{\Gamma}_{rd}^r \bar{\Gamma}_{\theta\theta}^d + \bar{\Gamma}_{\theta d}^{\theta} \bar{\Gamma}_{\theta\theta}^d + \bar{\Gamma}_{\phi d}^{\phi} \bar{\Gamma}_{\theta\theta}^d = 0, \\ \bar{\Gamma}_{\theta d}^c \bar{\Gamma}_{c\theta}^d = \bar{\Gamma}_{\theta d}^r \bar{\Gamma}_{r\theta}^d + \bar{\Gamma}_{\theta d}^{\theta} \bar{\Gamma}_{\theta\theta}^d + \bar{\Gamma}_{\theta d}^{\phi} \bar{\Gamma}_{\phi\theta}^d = \bar{\Gamma}_{\theta d}^{\phi} \bar{\Gamma}_{\phi\theta}^d = \bar{\Gamma}_{\theta\phi}^{\phi} \bar{\Gamma}_{\phi\theta}^{\phi} = \bar{\Gamma}_{\theta\phi}^c \bar{\Gamma}_{\phi\theta}^c = \cot^2\theta, \end{cases} \quad (5.14)$$

portanto,

$$\mathcal{R}_{\theta\theta} = \csc^2\theta - \cot^2\theta \Rightarrow \mathcal{R}_{\theta\theta} = 1. \quad (5.15)$$

Por fim,

$$\mathcal{R}_{\phi\phi} = \partial_c \bar{\Gamma}_{\phi\phi}^c - \partial_{\phi} \bar{\Gamma}_{c\phi}^c + \bar{\Gamma}_{cd}^c \bar{\Gamma}_{\phi\phi}^d - \bar{\Gamma}_{\phi d}^c \bar{\Gamma}_{c\phi}^d, \quad (5.16)$$

e calculando novamente termo a termo,

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_c \bar{\Gamma}_{\phi\phi}^c = \partial_r \bar{\Gamma}_{\phi\phi}^r + \partial_\theta \bar{\Gamma}_{\phi\phi}^\theta + \bar{\Gamma}_{\phi\phi}^\theta = \partial_\theta (-\cos \theta \sin \theta) = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta, \\ \partial_\phi \bar{\Gamma}_{c\phi}^c = \partial_\phi \bar{\Gamma}_{r\phi}^r + \partial_\phi \bar{\Gamma}_{\theta\phi}^\theta + \partial_\phi \bar{\Gamma}_{\phi\phi}^\phi = 0, \\ \bar{\Gamma}_{cd}^c \bar{\Gamma}_{\phi\phi}^d = \bar{\Gamma}_{rd}^r \bar{\Gamma}_{\phi\phi}^d + \bar{\Gamma}_{\theta d}^\theta \bar{\Gamma}_{\phi\phi}^d + \bar{\Gamma}_{\phi d}^\phi \bar{\Gamma}_{\phi\phi}^d = \bar{\Gamma}_{\phi\theta}^\phi \bar{\Gamma}_{\phi\phi}^\theta \\ \quad = -\cot \theta \sin \theta \cos \theta = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin \theta \cos \theta = -\cos \theta, \\ \bar{\Gamma}_{\phi d}^c \bar{\Gamma}_{c\phi}^d = \bar{\Gamma}_{\phi d}^r \bar{\Gamma}_{r\phi}^d + \bar{\Gamma}_{\phi d}^\theta \bar{\Gamma}_{\theta\phi}^d + \bar{\Gamma}_{\phi d}^\phi \bar{\Gamma}_{\phi\phi}^d = \bar{\Gamma}_{\phi\phi}^\theta \bar{\Gamma}_{\theta\phi}^\phi + \bar{\Gamma}_{\phi\theta}^\phi \bar{\Gamma}_{\phi\phi}^\theta = 2\bar{\Gamma}_{\phi\phi}^\theta \bar{\Gamma}_{\theta\phi}^\phi \\ \quad = -2 \sin \theta \cos \theta \cot \theta = -2 \cos^2 \theta, \end{array} \right. \quad (5.17)$$

e concluímos que,

$$\mathcal{R}_{\phi\phi} = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta - \cos^2 \theta + 2 \cos^2 \theta \Rightarrow \mathcal{R}_{\phi\phi} = \sin^2 \theta. \quad (5.18)$$

De posse do tensor de Ricci, podemos calcular o escalar de curvatura 3D,

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= h^{ij} \mathcal{R}_{ij} = h^{rr} \mathcal{R}_{rr} + h^{\theta\theta} \mathcal{R}_{\theta\theta} + h^{\phi\phi} \mathcal{R}_{\phi\phi} \\ &= \frac{1}{u} \cdot 0 + \frac{1}{v} \cdot 1 + \frac{1}{v \sin^2 \theta} \cdot \sin^2 \theta = \frac{1}{v} + \frac{1}{v} = \frac{2}{v}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

logo,

$$\mathcal{R} = \frac{2}{v(t)}. \quad (5.20)$$

Seja, agora, o tensor curvatura extrínseca para esse modelo,

$$K_{ij} = -\frac{1}{2\mathcal{N}} (\dot{h}_{ij} - \bar{\nabla}_i N_j - \bar{\nabla}_j N_i) = -\frac{1}{2\mathcal{N}} \dot{h}_{ij}, \quad (5.21)$$

onde $N_i = 0$, pois trata-se de um modelo de minisuperespaço. Então,

$$K_{ij} = -\frac{1}{2\mathcal{N}} \text{diag} (\dot{u}, \dot{v}, \dot{v} \sin^2 \theta), \quad (5.22)$$

e o seu traço,

$$\begin{aligned} K &= h^{ij} K_{ij} = h^{rr} K_{rr} + h^{\theta\theta} K_{\theta\theta} + h^{\phi\phi} K_{\phi\phi} \\ &= \frac{1}{u} \left(-\frac{1}{2\mathcal{N}} \dot{u} \right) + \frac{1}{v} \left(-\frac{1}{2\mathcal{N}} \dot{v} \right) + \frac{1}{v \sin^2 \theta} \left(-\frac{1}{2\mathcal{N}} \dot{v} \sin^2 \theta \right) \\ &= -\frac{1}{2\mathcal{N}} \frac{\dot{u}}{u} - \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{\dot{v}}{v}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

O último ingrediente necessário para a hamiltoniana será calcular a contração do tensor de curvatura extrínseca. Começemos por,

$$K^{ij} = h^{ia} h^{jb} K_{ab}, \quad (5.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K^{rr} = h^{ra} h^{rb} K_{ab} = h^{rr} h^{rr} K_{rr} = \frac{1}{u^2} \left(-\frac{1}{2\mathcal{N}} \dot{u} \right) = -\frac{1}{2\mathcal{N}} \frac{\dot{u}}{u^2}, \\ K^{\theta\theta} = h^{\theta a} h^{\theta b} K_{\theta\theta} = h^{\theta\theta} h^{\theta\theta} K_{\theta\theta} = \frac{1}{v^2} \left(-\frac{1}{2\mathcal{N}} \dot{v} \right) = -\frac{1}{2\mathcal{N}} \frac{\dot{v}}{v^2}, \\ K^{\phi\phi} = h^{\phi a} h^{\phi b} K_{\phi\phi} = h^{\phi\phi} h^{\phi\phi} K_{\phi\phi} = \frac{1}{v^2 \sin^4 \theta} \left(-\frac{1}{2\mathcal{N}} \dot{v} \sin^2 \theta \right) = -\frac{1}{2\mathcal{N}} \frac{\dot{v}}{v^2 \sin^2 \theta}. \end{array} \right. \quad (5.25)$$

E com isso, chegamos em,

$$\begin{aligned}
 K_{ij}K^{ij} &= K_{rr}K^{rr} + K^{\theta\theta}K_{\theta\theta} + K^{\phi\phi}K_{\phi\phi} \\
 &= \left(-\frac{1}{2\mathcal{N}}\dot{u}\right)\left(-\frac{1}{2\mathcal{N}}\frac{\dot{u}}{u^2}\right) + \left(-\frac{1}{2\mathcal{N}}\dot{v}\right)\left(-\frac{1}{2\mathcal{N}}\frac{\dot{v}}{v^2}\right) \\
 &\quad + \left(-\frac{1}{2\mathcal{N}}\dot{v}\sin^2\theta\right)\left(-\frac{1}{2\mathcal{N}}\frac{\dot{v}}{v^2\sin^2\theta}\right) \\
 &= \frac{1}{4\mathcal{N}^2}\frac{\dot{u}^2}{u^2} + \frac{1}{2\mathcal{N}}\frac{\dot{v}^2}{v^2}.
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Consideremos a ação de Einstein-Hilbert para o modelo,

$$S_g = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} d^4x \mathcal{L}_g, \tag{5.27}$$

onde a densidade lagrangiana na decomposição 3 + 1 toma a forma,

$$\mathcal{L}_g = \frac{1}{16\pi} \mathcal{N} \sqrt{h} (K_{ij}K^{ij} - K^2 + \mathcal{R}), \tag{5.28}$$

usando (5.20), (5.23) e (5.26), então,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_g &= \frac{\sqrt{\mathcal{N}^2 u v^2 \sin^2 \theta}}{16\pi} \left[\frac{1}{4\mathcal{N}^2} \frac{\dot{u}^2}{u^2} + \frac{1}{2\mathcal{N}^2} \frac{\dot{v}^2}{v} - \left(-\frac{1}{2\mathcal{N}} \frac{u^2}{u} - \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{\dot{v}}{v} \right)^2 + \frac{2}{v} \right] \\
 &= \frac{\sqrt{\mathcal{N}^2 u v^2 \sin^2 \theta}}{16\pi} \left(\frac{1}{4\mathcal{N}^2} \frac{\dot{u}^2}{u} + \frac{1}{2\mathcal{N}^2} \frac{\dot{v}^2}{v} - \frac{1}{4\mathcal{N}^2} \frac{\dot{u}^2}{u} - 2 \frac{1}{2\mathcal{N}} \frac{\dot{u}}{u} \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{\dot{v}}{v} - \frac{1}{\mathcal{N}^2} \frac{\dot{v}^2}{v^2} + \frac{2}{v} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{\mathcal{N}^2 u v^2 \sin^2 \theta}}{16\pi} \left(-\frac{1}{2\mathcal{N}^2} \frac{\dot{v}^2}{v^2} - \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{\dot{u}\dot{v}}{uv} + \frac{2}{v} \right).
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

De posse da densidade lagrangiana, podemos obter a lagrangiana do modelo,

$$\begin{aligned}
 L_g &= \int_{\Sigma_t} d^3y \mathcal{L}_g \\
 &= \frac{\sqrt{\mathcal{N}^2 u v^2}}{16\pi} \left(-\frac{1}{2\mathcal{N}^2} \frac{\dot{v}^2}{v^2} - \frac{1}{\mathcal{N}^2} \frac{\dot{u}\dot{v}}{uv} + \frac{2}{v} \right) \int dr \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\
 &\quad \frac{\sqrt{\mathcal{N}^2 u v^2}}{16\pi} \left(-\frac{1}{2\mathcal{N}^2} \frac{\dot{v}^2}{v^2} - \frac{1}{\mathcal{N}^2} \frac{\dot{u}\dot{v}}{uv} + \frac{2}{v} \right) \cdot R \cdot 2 \cdot 2\pi \\
 &= \frac{R\mathcal{N}}{4} \sqrt{uv^2} \left(-\frac{1}{2\mathcal{N}^2} \frac{\dot{v}^2}{v^2} - \frac{1}{\mathcal{N}^2} \frac{\dot{u}\dot{v}}{uv} + \frac{2}{v} \right),
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

onde R é um fator de normalização que vem da integração de $\int dr$ e para fins de simplificação dos cálculos o tomaremos como unitário $R = 1$. Portanto, a lagrangiana será dada por,

$$L_g = \frac{\mathcal{N}}{4} \sqrt{uv^2} \left(-\frac{1}{2\mathcal{N}^2} \frac{\dot{v}^2}{v^2} - \frac{1}{\mathcal{N}^2} \frac{\dot{u}\dot{v}}{uv} + \frac{2}{v} \right). \tag{5.31}$$

Os momentos canônicos serão,

$$P_u = \frac{\partial L_g}{\partial \dot{u}} = -\frac{\sqrt{uv^2}}{4\mathcal{N}} \frac{\dot{v}}{uv} \quad \text{e} \quad P_v = -\frac{\sqrt{uv^2}}{4\mathcal{N}} \left(\frac{\dot{v}}{v^2} + \frac{\dot{u}}{uv} \right), \tag{5.32}$$

e a hamiltoniana,

$$H_g = P_u \dot{u} + P_v \dot{v} - L_g. \quad (5.33)$$

Precisamos escrever as "velocidades" em termos dos momentos, então,

$$P_u = -\frac{\sqrt{uv^2}}{4\mathcal{N}} \dot{v} \Rightarrow \dot{v} = -\frac{4\mathcal{N}uv}{\sqrt{uv^2}} P_u, \quad (5.34)$$

e também,

$$P_v = -\frac{\sqrt{uv^2}}{4\mathcal{N}} \left(\frac{\dot{v}}{v} + \frac{\dot{u}}{uv} \right) = -\frac{\sqrt{uv}}{4\mathcal{N}} \left(-\frac{4\mathcal{N}uv}{v^2 \sqrt{uv^2}} P_u + \frac{\dot{u}}{uv} \right) \quad (5.35)$$

$$-\frac{4\mathcal{N}}{\sqrt{uv^2}} P_v = -\frac{4\mathcal{N}u}{v\sqrt{uv^2}} P_u + \frac{\dot{u}}{uv} \Rightarrow -\frac{4\mathcal{N}}{\sqrt{uv^2}} P_v + \frac{4\mathcal{N}u}{v\sqrt{uv^2}} P_u = \frac{\dot{u}}{uv} \quad (5.36)$$

portanto,

$$\dot{u} = -\frac{4\mathcal{N}uv}{\sqrt{uv^2}} P_v + \frac{4\mathcal{N}u^2}{\sqrt{uv^2}} P_u. \quad (5.37)$$

Voltando à hamiltoniana,

$$H_g = P_u \dot{u} + P_v \dot{v} - L_g, \quad (5.38)$$

começemos a desenvolver o primeiro termo usando (5.37),

$$P_u \dot{u} = P_u \left(-\frac{4\mathcal{N}uv}{\sqrt{uv^2}} P_v + \frac{4\mathcal{N}u^2}{\sqrt{uv^2}} P_u \right) = -\frac{4\mathcal{N}uv}{\sqrt{uv^2}} P_u P_v + \frac{4\mathcal{N}u^2}{\sqrt{uv^2}} P_u^2, \quad (5.39)$$

e agora trabalhando o segundo termo usando (5.34),

$$P_v \dot{v} = P_v \left(-\frac{4\mathcal{N}uv}{\sqrt{uv^2}} P_u \right) = -\frac{4\mathcal{N}uv}{\sqrt{uv^2}} P_u P_v, \quad (5.40)$$

e por fim, o terceiro termo pode ser explicitado usando (5.31), (5.34) e (5.37),

$$\begin{aligned} L_g &= \frac{\mathcal{N}}{4} \sqrt{uv^2} \left(-\frac{1}{2\mathcal{N}^2} \frac{\dot{v}^2}{v^2} - \frac{1}{\mathcal{N}^2} \frac{\dot{u}\dot{v}}{uv} + \frac{2}{v} \right) \\ &= \frac{\mathcal{N}}{4} \left[-\frac{1}{2\mathcal{N}^2} \frac{1}{v^2} \left(-\frac{4\mathcal{N}uv}{\sqrt{uv^2}} P_u \right)^2 - \frac{1}{\mathcal{N}^2} \frac{1}{uv^2} \left(-\frac{4\mathcal{N}uv}{\sqrt{uv^2}} P_v + \frac{4\mathcal{N}u^2}{\sqrt{uv^2}} P_u \right) \left(-\frac{4\mathcal{N}uv}{\sqrt{uv^2}} P_u \right) + \frac{2}{v} \right] \\ &= \frac{\mathcal{N}\sqrt{uv^2}}{4} \left(-\frac{8u^2}{uv^2} P_u^2 - \frac{16uv}{uv^2} P_u P_v + \frac{16u^2}{uv^2} P_u^2 + \frac{2}{v} \right) \\ &= \frac{\mathcal{N}\sqrt{uv^2}}{4} \left(\frac{8u^2}{uv^2} P_u^2 - \frac{16uv}{uv^2} P_u P_v + \frac{2}{v} \right) \\ &= \frac{2\mathcal{N}u^2}{\sqrt{uv^2}} P_u^2 - \frac{4\mathcal{N}uv}{\sqrt{uv}} P_u P_v + \frac{\mathcal{N}\sqrt{uv^2}}{2v}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Com isso, chegamos na hamiltoniana usando (5.39), (5.40) e (5.41), logo,

$$\begin{aligned}
H_g &= P_u \dot{u} + P_v \dot{v} - L_g \\
&= -\frac{4\mathcal{N}uv}{\sqrt{uv^2}} P_u P_v + \frac{4\mathcal{N}u^2 P_u^2}{\sqrt{uv^2}} - \frac{4\mathcal{N}uv}{\sqrt{uv^2}} P_u P_v - \frac{2\mathcal{N}u^2}{\sqrt{uv^2}} P_u^2 + \frac{4\mathcal{N}uv}{\sqrt{uv^2}} P_u P_v - \frac{\mathcal{N}\sqrt{uv^2}}{2v} \\
&= -\frac{4\mathcal{N}uv}{\sqrt{uv^2}} P_u P_v + \frac{2\mathcal{N}u^2}{\sqrt{uv^2}} P_u^2 - \frac{\mathcal{N}\sqrt{uv^2}}{2v} \\
&= \frac{4\mathcal{N}}{\sqrt{uv^2}} \left[-uv P_u P_v + \frac{1}{2} (u P_u)^2 - \frac{1}{8} uv \right],
\end{aligned} \tag{5.42}$$

onde as variáveis do espaço de fase no minisuperespaço são (u, v, P_u, P_v) .

Outra característica que gostaríamos de evidenciar no buraco negro é a sua natureza quântica. Em princípio isso pode ser feito por meio da introdução de um campo escalar, como foi feito no capítulo 4. Nele também discutimos os desdobramentos que surgem quando quantizamos a relatividade geral canonicamente e dentre as consequências, a mais crítica certamente é o desaparecimento do tempo. Para lidar com essa situação inoportuna iremos pegar carona em um método utilizado pelos físicos que consiste em usar a matéria como um relógio, isto é, a partir do hamiltoniano de um campo escalar, por exemplo, é possível realizar uma transformação canônica de forma que este passa a ser uma variável de tempo. Esse é um método comum em cosmologia quântica e vale a pena citar os artigos [13, 14] uma vez que são também uma fonte importante para essa dissertação.

Dado isso, consideremos portanto um campo escalar sem massa em um espaço curvo, cuja ação é dada por,

$$S_\Phi = \int_{\mathcal{M}} d^4x \mathcal{L}_\Phi, \tag{5.43}$$

onde a densidade lagrangiana,

$$\mathcal{L}_\Phi = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi. \tag{5.44}$$

Sendo a métrica do modelo $g^{\mu\nu} = \text{diag}(-1/\mathcal{N}^2, 1/u, 1/v, 1/v \sin^2 \theta)$, então a densidade lagrangiana pode ser expandida,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\Phi &= -\frac{1}{2} \mathcal{N} \sqrt{h} \left[g^{tt} \dot{\Phi}^2 + g^{rr} (\partial_r \Phi)^2 + g^{\theta\theta} (\partial_\theta \Phi)^2 + g^{\phi\phi} (\partial_\phi \Phi)^2 \right] \\
&= -\frac{1}{2} \mathcal{N} \sqrt{uv^2 \sin^2 \theta} \left(-\frac{1}{\mathcal{N}} \dot{\Phi}^2 \right) \\
&= \frac{\sqrt{uv^2 \sin^2 \theta}}{2\mathcal{N}} \dot{\Phi}^2,
\end{aligned} \tag{5.45}$$

onde consideramos que $\Phi = \Phi(t)$ por simplicidade e em concordância com o modelo de minisuperespaço. Agora, de posse da densidade lagrangiana, calculemos a lagrangiana

do campo escalar,

$$\begin{aligned}
 L_\Phi &= \int_{\Sigma_t} d^3y \mathcal{L}_\Phi \\
 &= \frac{\sqrt{uv^2}}{2\mathcal{N}} \dot{\Phi}^2 \int dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \\
 &= 4\pi R \frac{\sqrt{uv^2}}{2\mathcal{N}} \dot{\Phi}^2 \\
 &= \frac{2\pi R}{\mathcal{N}} \sqrt{uv^2} \dot{\Phi}^2,
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

onde iremos suprimir a constante $R = 1$ novamente. Daí, então,

$$L_\Phi = \frac{2\pi}{\mathcal{N}} \sqrt{uv^2} \dot{\Phi}^2. \tag{5.47}$$

O momento canonicamente conjugado ao campo escalar será,

$$P_\Phi = \frac{\partial L_\Phi}{\partial \dot{\Phi}} = \frac{4\pi}{\mathcal{N}} \sqrt{uv^2} \dot{\Phi}, \tag{5.48}$$

de modo que,

$$\dot{\Phi} = \frac{\mathcal{N} P_\Phi}{4\pi \sqrt{uv^2}}. \tag{5.49}$$

E portanto, obtemos a hamiltoniana do campo escalar,

$$\begin{aligned}
 H_\Phi &= P_\Phi \dot{\Phi} - L_\Phi \\
 &= P_\Phi \frac{\mathcal{N} P_\Phi}{4\pi \sqrt{uv^2}} - \frac{2\pi}{\mathcal{N}} \sqrt{uv^2} \left(\frac{\mathcal{N} P_\Phi}{4\pi \sqrt{uv^2}} \right)^2 \\
 &= \frac{\mathcal{N}}{4\pi \sqrt{uv^2}} P_\Phi^2 - \frac{\mathcal{N}}{8\pi \sqrt{uv^2}} P_\Phi^2 \\
 &= \frac{\mathcal{N}}{8\pi} \frac{P_\Phi^2}{\sqrt{uv^2}}.
 \end{aligned} \tag{5.50}$$

O tempo no regime quântico irá emergir ao fazermos a seguinte transformação canônica,

$$F_2(\Phi, P_T) = \Phi \sqrt{2P_T}, \tag{5.51}$$

onde a notação da função geradora F_2 se deve a [29]. Portanto,

$$\begin{cases} P_\Phi = \frac{\partial F_2}{\partial \Phi} = \sqrt{2P_T}, \\ T = \frac{\partial F_2}{\partial P_T} = \frac{\Phi}{\sqrt{2P_T}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_T = \frac{P_\Phi^2}{2}, \\ T = \frac{\Phi}{P_\Phi}. \end{cases} \tag{5.52}$$

Dessa forma, a hamiltoniana do campo escalar toma a forma,

$$H_\Phi = \frac{\mathcal{N}}{8\pi} \frac{P_\Phi^2}{\sqrt{uv^2}} = \frac{\mathcal{N}}{8\pi} \frac{(\sqrt{2P_T})^2}{\sqrt{uv^2}}, \tag{5.53}$$

logo,

$$H_T = \frac{\mathcal{N}}{4\pi} \frac{P_T}{\sqrt{uv^2}}. \tag{5.54}$$

De tal forma que a hamiltoniana total será,

$$\begin{aligned}
 H &= H_g + H_T \\
 &= \frac{4\mathcal{N}}{\sqrt{uv^2}} \left[-uvP_uP_v + \frac{1}{2}(uP_u)^2 - \frac{1}{8}uv \right] + \frac{\mathcal{N}}{4\pi} \frac{P_T}{\sqrt{uv^2}} \\
 &= \frac{4\mathcal{N}}{\sqrt{uv^2}} \left[-uvP_uP_v + \frac{1}{2}(uP_u)^2 - \frac{1}{8}uv + \frac{P_T}{16\pi} \right],
 \end{aligned} \tag{5.55}$$

cujas variáveis canônicas nesse contexto serão (u, v, P_u, P_v, T, P_T) .

5.2 Quantização Canônica do Buraco Negro de Schwarzschild

A quantização será expressa aqui na representação de Schrodinger promovendo as variáveis canônicas do modelo a operadores sem levarmos em conta o ordenamento. Então,

$$\begin{cases} u \rightarrow \hat{u} & \text{e} & P_u \rightarrow -i\frac{\partial}{\partial u}, \\ v \rightarrow \hat{v} & \text{e} & P_v \rightarrow -i\frac{\partial}{\partial v}, \\ T \rightarrow \hat{T} & \text{e} & P_T \rightarrow -i\frac{\partial}{\partial T}. \end{cases} \tag{5.56}$$

Sendo a hamiltoniana total,

$$H = \frac{4\mathcal{N}}{\sqrt{uv^2}} \left[-uvP_uP_v + \frac{1}{2}(uP_u)^2 - \frac{1}{8}uv + \frac{P_T}{16\pi} \right], \tag{5.57}$$

iremos reescrever cada termo na forma de operadores, então,

$$\begin{cases} \hat{u}\hat{v}\hat{P}_u\hat{P}_v = -iuv\frac{\partial}{\partial u} \left(-i\frac{\partial}{\partial v} \right) = -uv\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}, \\ (\hat{u}\hat{P}_u)^2 = \hat{u}\hat{P}_u(\hat{v}\hat{P}_v) = -iu\frac{\partial}{\partial u} \left(-iu\frac{\partial}{\partial u} \right) = -u \left(\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial^2}{\partial u^2} \right) = -u\frac{\partial}{\partial u} - u^2\frac{\partial^2}{\partial u^2}, \end{cases} \tag{5.58}$$

levando esses resultados na hamiltoniana total, construímos o operador hamiltoniano,

$$\hat{H} = \frac{4\mathcal{N}}{\sqrt{uv^2}} \left(uv\frac{\partial^2}{\partial u\partial v} - \frac{1}{2}u\frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{2}u^2\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{1}{8}uv - i\frac{1}{16\pi}\frac{\partial}{\partial T} \right) = \mathcal{N}\hat{\mathcal{H}}, \tag{5.59}$$

onde $\mathcal{H} = 0$ é o vínculo hamiltoniano para o buraco negro. O próximo passo é aplicarmos o operador hamiltoniano no auto estado $\Psi = \Psi(u, v, T)$ para obtermos a equação de Wheeler-DeWitt,

$$\hat{\mathcal{H}}\Psi(u, v, T) = 0, \tag{5.60}$$

$$\left(uv\frac{\partial^2}{\partial u\partial v} - \frac{1}{2}u\frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{2}u^2\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{1}{8}uv - i\frac{1}{16\pi}\frac{\partial}{\partial T} \right) \Psi = 0, \tag{5.61}$$

$$\frac{i}{16\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial T} = \left(uv\frac{\partial^2}{\partial u\partial v} - \frac{1}{2}u^2\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{1}{2}u\frac{\partial}{\partial u} \right) \Psi - \frac{1}{8}uv\Psi, \tag{5.62}$$

e assim vemos que conseguimos contornar o problema do tempo chegando numa equação tipo-Schrodinger. Esse fato nos motiva ainda mais a encarar T como uma variável de tempo a partir daqui, de modo interpretarmos os resultados em função dele.

5.3 Solução da Equação de Wheeler-DeWitt

Sendo,

$$\frac{i}{16\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial T} = \left(uv \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2} u^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \Psi - \frac{1}{8} uv \Psi, \quad (5.63)$$

vemos que há um termo incômodo que acomoda derivadas mistas, o que dificulta muito a resolução dessa equação diferencial. A fim de resolver esse impasse, iremos empregar a seguinte transformação de coordenadas [36],

$$x = \sqrt{uv} \quad \text{e} \quad y = u, \quad (5.64)$$

de tal modo que,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{v}{2\sqrt{uv}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} = \frac{x}{2y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{u}{2\sqrt{uv}} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{y}{2x} \frac{\partial}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) = \frac{y}{2x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{2y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{y}{2x} \left(\frac{1}{2y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{2y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \right) \\ = \frac{1}{4x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{y}{2x} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}, \\ \frac{\partial^2}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) = \frac{x}{2y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{2y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{2y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ = \frac{x}{2y} \left(\frac{1}{2y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{2y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) + \frac{x}{2y^2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{x}{2y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ = -\frac{x}{4y^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x^2}{4y^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{x}{y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \end{array} \right. \quad (5.65)$$

Substituindo esses resultados em (5.63),

$$\begin{aligned} \frac{i}{16\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial T} &= x^2 \left(\frac{1}{4x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{y}{2x} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \right) - y^2 \left(-\frac{x}{4y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x^2}{4y^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{x}{y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \\ &\quad - \frac{y}{2} \left(\frac{x}{2y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \Psi - \frac{1}{8} x^2 \Psi, \end{aligned} \quad (5.66)$$

$$\frac{i}{16\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial T} = \left(\frac{x^2}{8} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{x}{8} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi - \frac{1}{8} x^2 \Psi - \left(\frac{y^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial y} \right) \Psi, \quad (5.67)$$

$$\frac{i}{16\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial T} = \frac{1}{8} x \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) - \frac{1}{8} x^2 \Psi - \frac{1}{2} y \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right), \quad (5.68)$$

e assim a equação de Wheeler-DeWitt com as derivadas desacopladas toma uma forma mais amigável.

Como o objetivo é aplicar a interpretação de de Broglie-Bohm da mecânica quântica, então será necessário escrever a função de onda na forma,

$$\Psi(x, y, T) = A(x, y, T) e^{iS(x, y, T)}, \quad (5.69)$$

onde $A(x, y, T)$ e $S(x, y, T)$ são a amplitude e a fase, respectivamente. Ao substituir (5.69) em (5.68), teremos que calcular as seguintes derivadas,

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} A e^{iS} = \left(\frac{\partial A}{\partial T} + iA \frac{\partial S}{\partial T} \right) e^{iS}, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} A e^{iS} = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + iA \frac{\partial S}{\partial x} \right) e^{iS}, \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} A e^{iS} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial x} + iA \frac{\partial S}{\partial x} \right) e^{iS} \right] \\ = \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + i \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} + iA \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right) e^{iS} + \left(\frac{\partial A}{\partial x} + iA \frac{\partial S}{\partial x} \right) i \frac{\partial S}{\partial x} e^{iS} \\ = \left[\frac{\partial A}{\partial x} + 2i \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} - A \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + iA \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right] e^{iS} \end{cases} \quad (5.70)$$

onde as derivadas para y são análogas as de x . Substituindo esses cálculos em (5.68),

$$\begin{aligned} \frac{i}{16\pi} \left(\frac{\partial A}{\partial T} + iA \frac{\partial S}{\partial T} \right) e^{iS} &= \frac{x^2}{8} \left[\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + 2i \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} - A \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + iA \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right] e^{iS} \\ &\quad + \frac{x}{8} \left(\frac{\partial A}{\partial x} + iA \frac{\partial S}{\partial x} \right) e^{iS} - \frac{x^2}{8} A e^{iS} \\ &\quad - \frac{y^2}{2} \left[\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + 2i \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial S}{\partial y} - A \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + iA \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right] e^{iS} \\ &\quad - \frac{y}{2} \left(\frac{\partial A}{\partial y} + iA \frac{\partial S}{\partial y} \right) e^{iS}. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Olhando para a parte real dessa equação, temos que,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{16\pi} A \frac{\partial S}{\partial T} &= \frac{x^2}{8} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{x^2}{8} A \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{x^2}{8} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{x^2}{8} A \\ &\quad - \frac{y^2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{y^2}{2} A \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 - \frac{y}{2} \frac{\partial A}{\partial y}, \end{aligned} \quad (5.72)$$

$$\frac{1}{16\pi} \frac{\partial S}{\partial T} - \frac{x^2}{8} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{y^2}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{A} \left(\frac{x^2}{8} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{y^2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{x}{8} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial A}{\partial y} \right) = 0, \quad (5.73)$$

$$\frac{1}{16\pi} \frac{\partial S}{\partial T} - \frac{x^2}{8} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{y^2}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{A} \left[\frac{x}{8} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial A}{\partial x} \right) - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right] = 0, \quad (5.74)$$

onde reconhecemos o potencial quântico,

$$Q = \frac{1}{A} \left[\frac{x}{8} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial A}{\partial x} \right) - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right]. \quad (5.75)$$

Olhando agora para a parte imaginária de (5.71), temos que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{16\pi} \frac{\partial A}{\partial T} &= \frac{x^2}{4} \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{x^2}{8} A \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{x}{8} A \frac{\partial S}{\partial x} \\ &\quad - \frac{y^2}{2} A \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial S}{\partial y} - \frac{y^2}{2} A \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - \frac{y}{2} A \frac{\partial S}{\partial y} \end{aligned} \quad (5.76)$$

$$\frac{1}{32\pi} \frac{1}{A} \frac{\partial A^2}{\partial T} = \frac{1}{2A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^2 A^2}{8} \frac{\partial S}{\partial x} \right) - \frac{1}{2A} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y^2 A^2}{2} \frac{\partial S}{\partial y} \right), \quad (5.77)$$

definindo $\rho \equiv A^2 = |\Psi|^2$, então,

$$\frac{1}{16\pi} \frac{\partial \rho}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \rho \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(y^2 \rho \frac{\partial S}{\partial y} \right) = 0, \quad (5.78)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial x} \left(16\pi x^2 \rho \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(16\pi y^2 \rho \frac{\partial S}{\partial y} \right) = 0, \quad (5.79)$$

se definirmos agora,

$$\dot{x} = -16\pi x^2 \frac{\partial S}{\partial x} \quad \text{e} \quad \dot{y} = 16\pi y^2 \frac{\partial S}{\partial y}, \quad (5.80)$$

chegamos em,

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \dot{x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \dot{y}) = 0, \quad (5.81)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial T} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0, \quad (5.82)$$

onde,

$$\vec{J} = \rho \vec{v} \quad \text{e} \quad \vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}) = \left(-16\pi x^2 \frac{\partial S}{\partial x}, 16\pi y^2 \frac{\partial S}{\partial y} \right). \quad (5.83)$$

A parte imaginária da equação de Wheeler-DeWitt (5.71) nos levou a uma equação análoga a uma equação de conservação de probabilidade, onde as equações acima podem ser pensadas como "velocidades". Na realidade elas são as equações guia, cujas soluções serão as trajetórias bohmianas para o buraco negro.

Para obtermos tais trajetórias, assim como o potencial quântico é necessário termos em mãos a função de onda do buraco negro. Portanto, retornando à equação de Wheeler-DeWitt (5.68),

$$\frac{i}{16\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial T} = \frac{1}{8} x \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) - \frac{1}{8} x^2 \Psi - \frac{1}{2} y \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right). \quad (5.84)$$

Essa equação permite uma simplificação vinda da seguinte transformação de coordenadas,

$$X = \ln x \quad \text{e} \quad Y = \ln y, \quad (5.85)$$

onde,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial}{\partial X} = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial X} \Rightarrow x \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2}{\partial X^2}, \quad (5.86)$$

sendo análogo à y . Portanto, a equação (5.68) toma a forma,

$$\frac{1}{16\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial T} = \frac{1}{8} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} - \frac{1}{8} e^{2X} \Psi. \quad (5.87)$$

Da mesma forma, as equações guias serão transformadas, pois,

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial T} = \frac{\partial X}{\partial T} \frac{\partial x}{\partial X} = \dot{X} e^X, \quad (5.88)$$

logo,

$$\dot{x} = -16\pi x^2 \frac{\partial S}{\partial x} \Rightarrow e^X \dot{X} = -16\pi x^2 \frac{1}{x} \frac{\partial S}{\partial X}, \quad (5.89)$$

$$e^X \dot{X} = -16\pi e^X \frac{\partial S}{\partial X} \Rightarrow \dot{X} = -16\pi \frac{\partial S}{\partial X}, \quad (5.90)$$

novamente, sendo análogo para y , isto é,

$$\dot{Y} = 16\pi \frac{\partial S}{\partial Y}. \quad (5.91)$$

Retornando à equação (5.87),

$$\frac{i}{16\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial T} = \frac{1}{8} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} - \frac{1}{8} e^{2X} \Psi, \quad (5.92)$$

e notando que ela emula, em certo sentido, uma equação de Schrödinger bidimensional sujeita a um potencial de forma exponencial atuando somente em uma dimensão. Há algumas maneiras formais de atacar esse problema e, dentre as mais simples, aquela na qual iremos nos concentrar consiste em explorar essa semelhança, considerando o seguinte *ansatz*,

$$\Psi(X, Y, T) = e^{-i\omega T} \psi(X, Y), \quad (5.93)$$

destacando, portanto, as variáveis que irão desempenhar um papel mais relevante na dinâmica do problema, sobretudo ao levarmos em conta o potencial com a dependência em X .

Façamos então a substituição do *ansatz* (5.93) em (5.92),

$$\frac{i}{16\pi} \frac{\partial}{\partial T} (e^{-i\omega T} \psi) = \frac{1}{8} \frac{\partial^2}{\partial X^2} (e^{-i\omega T} \psi) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} (e^{-i\omega T} \psi) - \frac{1}{8} e^{2X_0} e^{-i\omega T} \psi, \quad (5.94)$$

$$\frac{i}{16\pi} (-i\omega) e^{-i\omega T} \psi = \frac{1}{8} e^{-i\omega T} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} - \frac{1}{2} e^{-i\omega T} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} - \frac{1}{8} e^{2X_0} e^{-i\omega T} \psi, \quad (5.95)$$

dividindo por $e^{-i\omega T} \psi$ e multiplicando por 8,

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} - 4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} - e^{2X}. \quad (5.96)$$

Essa equação diferencial parcial pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis. Seja, portanto,

$$\psi(X, Y) = f(X)g(Y), \quad (5.97)$$

substituindo (5.97) em (5.96),

$$\frac{\omega}{2\pi} = g \frac{d^2 f}{dX^2} - 4f \frac{d^2 g}{dY^2} - e^{2X}, \quad (5.98)$$

$$\frac{4}{g} \frac{d^2 g}{dY^2} = \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dX^2} - e^{2X} - \frac{\omega}{2\pi} = -\lambda^2. \quad (5.99)$$

O sinal negativo na constante de separação λ se deve ao fato de que não há um termo de potencial com dependência em Y , de modo que devemos esperar que as soluções associadas a tal variável serão ondas planas.

De (5.99) seguem duas equações diferenciais ordinárias:

- $$\frac{4}{g} \frac{d^2 g}{dY^2} = -\lambda^2 \Rightarrow \frac{d^2 g}{dY^2} + \frac{\lambda^2}{4} g = 0, \quad (5.100)$$

cuja solução é:

$$g(Y) = C_1 e^{-i\lambda Y/2} + C_2 e^{i\lambda Y/2}; \quad (5.101)$$

- $$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dX^2} - e^{2X} - \frac{\omega}{2\pi} = -\lambda^2 \Rightarrow \frac{d^2 f}{dX^2} - e^{2X} f + \left(\lambda^2 - \frac{\omega}{2\pi} \right) f = 0. \quad (5.102)$$

Definindo,

$$\nu^2 = \lambda^2 - \frac{\omega}{2\pi}, \quad (5.103)$$

de modo que,

$$\frac{d^2 f}{dX^2} - e^{2X} f + \nu^2 f = 0. \quad (5.104)$$

Ao fazermos a transformação,

$$z = e^X \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dX} = \frac{dz}{dX} \frac{d}{dz} = e^X \frac{d}{dz} = z \frac{d}{dz}, \\ \frac{d^2}{dX^2} = \frac{d}{dX} \left(\frac{d}{dX} \right) = z \frac{d}{dz} \left(z \frac{d}{dz} \right), \end{cases} \quad (5.105)$$

com isso chegamos na equação de Bessel modificada,

$$z \frac{d}{dz} \left(z \frac{df}{dz} \right) - z^2 f + \nu^2 f = 0, \quad (5.106)$$

cuja solução é dada pelas as funções de Bessel modificadas de ordem imaginária [1, 3, 8, 20],

$$f(X) = C_3 I_{i\nu}(e^X) + C_4 K_{i\nu}(e^X). \quad (5.107)$$

Juntando os resultados (5.101, 5.107) e levando em (5.93), obtemos a função de onda completa,

$$\Psi(X, Y, T) = e^{-i\omega T} (C_1 e^{-i\lambda Y/2} + C_2 e^{i\lambda Y/2}) (C_3 I_{i\nu}(e^X) + C_4 K_{i\nu}(e^X)), \quad (5.108)$$

5.3.1 Trajetória bohmiana

As trajetórias bohmianas são obtidas por meio das equações,

$$\dot{X} = -16\pi \frac{\partial S}{\partial X} \quad \text{e} \quad \dot{Y} = 16\pi \frac{\partial S}{\partial Y}, \quad (5.109)$$

de modo que devemos analisar as soluções que irão seleccionar o sinal correto das ondas planas. Com esse objetivo, podemos iniciar considerando o caso $C_1 = 0$, no qual,

$$\Psi_1 = e^{-i\omega T} e^{i\lambda Y/2} (\bar{C}_1 I_{iv} + \bar{C}_2 K_{iv}), \quad (5.110)$$

onde $\bar{C}_1 = C_2 C_3$ e $\bar{C}_2 = C_2 C_4$. A fase associada a essa função de onda é dada por,

$$S_1(X, Y, T) = -\omega T + \frac{\lambda}{2} Y + h(X), \quad (5.111)$$

onde $h(X)$ é uma função que dá a contribuição devido às funções de Bessel modificadas.

Podemos calcular uma das trajetórias bohmianas, então,

$$\frac{dY}{dT} = 16\pi \frac{\partial S}{\partial Y} \Rightarrow \frac{dY}{dT} = 16\pi \frac{\lambda}{2}, \quad (5.112)$$

integrando,

$$\int dY = 8\pi\lambda \int dT \Rightarrow Y = 8\pi\lambda T + Y_0, \quad (5.113)$$

onde Y_0 é uma constante de integração. Das transformações (5.64) e (5.85), temos que,

$$Y = \ln y = \ln u \Rightarrow \ln u = 8\pi\lambda T + Y_0, \quad (5.114)$$

e assim chegamos na solução,

$$u = e^{Y_0 + 8\pi\lambda T} = u_0 e^{8\pi\lambda T}, \quad (5.115)$$

onde $e^{Y_0} = u_0$.

E agora, consideremos o segundo caso $C_2 = 0$, de modo que,

$$\Psi_2 = e^{-i\omega T} e^{-i\lambda Y/2} (\bar{C}_1 I_{iv} + \bar{C}_2 K_{iv}), \quad (5.116)$$

onde $\bar{C}_1 = C_1 C_3$ e $\bar{C}_2 = C_1 C_4$. Novamente, a fase será dada por,

$$S_2(X, Y, T) = -\omega T - \frac{\lambda}{2} Y + h(X). \quad (5.117)$$

Sendo,

$$\frac{dY}{dT} = 16\pi \frac{\partial S}{\partial Y} \Rightarrow \frac{dY}{dT} = -16\pi \frac{\lambda}{2}, \quad (5.118)$$

integrando, segue que,

$$Y = -8\pi\lambda T + Y_0 \Rightarrow u = u_0 e^{-8\pi\lambda T}, \quad (5.119)$$

onde as constantes u_0 e Y_0 possuem as mesmas definições anteriores. Ao compararmos com a solução clássica,

$$u_c = \frac{2M}{t} - 1, \quad (5.120)$$

identificamos que há uma transição suave entre os regimes clássico e quântico para o caso $C_2 = 0$. Portanto, concluímos que a função de onda terá a forma,

$$\Psi = e^{-i\omega T} e^{-iKY} (\bar{C}_1 I_{iv} + \bar{C}_2 K_{iv}), \quad (5.121)$$

onde,

$$K = \frac{\lambda}{2}. \quad (5.122)$$

Para obter a segunda trajetória bohmiana, é necessário investigar qual é a contribuição oriunda das funções de Bessel modificadas. Quanto a isso, levemos em conta que K_{iv} é real e também possui zeros [1, 3, 8, 20]. Essa característica não é interessante para modelar um buraco negro, uma vez que a função de onda pode ser nula em algum ponto, indicando que ele não existiria nesse ponto em específico, o que não teria sentido. Quanto a função I_{iv} , esta é complexa e não possui zeros [1, 3, 8, 20]. A conclusão final é que $\bar{C}_2 = 0$, portanto,

$$\Psi(X, Y, T) = C e^{-i\omega T} e^{-iKY} I_{iv}(e^X), \quad (5.123)$$

onde $C = \bar{C}_1$. A fase completa virá ao considerarmos a forma explícita da função de Bessel modificada. Considerando a forma em expansão em série [1, 3, 8, 20],

$$I_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \Gamma(n + \alpha + 1)} \left(\frac{z}{\alpha}\right)^{2n+\alpha}, \quad (5.124)$$

onde $\Gamma(n + \alpha + 1)$ é a função Gama. Considerando $\alpha = iv$,

$$I_{iv}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \Gamma(n + 1 + iv)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+iv}, \quad (5.125)$$

$$I_{iv}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{iv} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \Gamma(n + 1 + iv)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}, \quad (5.126)$$

$$I_{iv}(z) = e^{iv \ln(z/2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \Gamma(n + 1 + iv)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}, \quad (5.127)$$

e tomando $z = e^X$,

$$I_{iv}(e^X) = e^{iv \ln(e^X/2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \Gamma(n + 1 + iv)} \left(\frac{e^X}{2}\right)^{2n}. \quad (5.128)$$

E assim a função de onda toma a forma,

$$\Psi(X, Y, T) = C e^{-i\omega T} e^{-iKY} e^{iv \ln(e^X/2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \Gamma(n + 1 + iv)} \left(\frac{e^X}{2}\right)^{2n}. \quad (5.129)$$

A fase será,

$$S(X, Y, T) = -\omega T - KY + v \ln\left(\frac{e^X}{2}\right) = -\omega T - KY + vX - v \ln 2, \quad (5.130)$$

e sendo a equação,

$$\frac{dX}{dT} = -16\pi \frac{\partial S}{\partial X} \Rightarrow \frac{dX}{dT} = -16\pi\nu, \quad (5.131)$$

integrando,

$$\int dX = -16\pi\nu \int dT \Rightarrow X = -16\pi\nu T + X_0, \quad (5.132)$$

onde X_0 é uma constante de integração. Das transformações (5.64) e (5.85),

$$X = \ln x = \ln(uv) \Rightarrow \ln(uv) = -16\pi\nu T + X_0 \Rightarrow uv = e^{-16\pi\nu T + X_0}, \quad (5.133)$$

e sabendo que $u = u_0 e^{-8\pi\lambda T} = u_0 e^{-16\pi K T}$, então,

$$u_0 e^{-16\pi K T} v = e^{-16\pi\nu T + X_0} \Rightarrow v = \frac{1}{u_0} e^{16\pi K T} e^{-16\pi\nu T + X_0} \quad (5.134)$$

de modo que,

$$v = \frac{e^{X_0}}{u_0} e^{16\pi(K-\nu)T} = v_0 e^{16\pi(K-\nu)T}, \quad (5.135)$$

onde,

$$v_0 = \frac{e^{X_0}}{u_0}. \quad (5.136)$$

Novamente, ao compararmos com a solução clássica,

$$v_c = t^2, \quad (5.137)$$

vemos que há uma transição suave entre os regimes clássico e quântico desde que as constantes satisfaçam $K - \nu > 0$. De modo geral, as trajetórias bohmianas são,

$$\begin{cases} u = u_0 e^{-8\pi K T}, \\ v = v_0 e^{16\pi(K-\nu)T}. \end{cases} \quad (5.138)$$

Esses resultados estão livres de qualquer patologia advinda de singularidades. Ao considerarmos o sistema nas vizinhanças de $T = 0$, vemos que,

$$T \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} u \rightarrow u_0, \\ v \rightarrow v_0. \end{cases} \quad (5.139)$$

Devemos encarar essas soluções como um "amortecimento" promovido pelas exponenciais através da transição dos regimes clássico e quântico que ocorre com o buraco negro quando levamos em conta justamente a informação de origem quântica. Apesar de interessante, ainda nos resta investigar o comportamento do potencial quântico para sabermos se ele dará suporte a esse resultado.

5.3.2 Potencial Quântico

A expressão do potencial quântico é dada por (5.75),

$$Q = \frac{1}{A} \left[\frac{x}{8} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial A}{\partial x} \right) - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right], \quad (5.140)$$

considerando a transformação (5.85),

$$X = \ln x \quad \text{e} \quad Y = \ln y, \quad (5.141)$$

podemos simplificar a expressão do Q . Seja, então,

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial X} = \frac{1}{x} \frac{\partial A}{\partial X} \Rightarrow x \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial A}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 A}{\partial X^2}, \quad (5.142)$$

sendo análogo para Y e y . Portanto, o potencial quântico pode ser reescrito na forma,

$$Q = \frac{1}{A} \left(\frac{1}{8} \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial Y^2} \right), \quad (5.143)$$

e da função de onda (5.129), vemos que a amplitude possui dependência apenas em X , de modo que,

$$Q(X) = \frac{1}{8A} \frac{d^2 A}{dX^2}. \quad (5.144)$$

Ainda sobre a função de onda, uma possibilidade para obtermos a função $Q(X)$ seria por meio da expansão em série, o que de certa forma não renderia uma expressão muito apreciável do ponto de vista interpretativo. Dito isso, há outra forma de obter uma expressão fechada para o potencial quântico que consiste em simplesmente utilizarmos a equação de Bessel modificada (5.104),

$$\frac{d^2 A}{dX^2} - e^{2X} A + \nu^2 A = 0 \Rightarrow \frac{1}{A} \frac{d^2 A}{dX^2} = e^{2X} - \nu^2, \quad (5.145)$$

comparando essa última expressão com (5.144), chegamos em,

$$Q(X) = \frac{1}{8} (e^{2X} - \nu^2). \quad (5.146)$$

Para compreendermos o comportamento do potencial, precisamos utilizar a trajetória bohmiana de X na forma (5.132),

$$X = -16\pi\nu T + X_0, \quad (5.147)$$

logo,

$$Q(T) = \frac{1}{8} (e^{-32\pi\nu T + 2X_0} - \nu^2). \quad (5.148)$$

Para interpretarmos essa função como um potencial repulsivo de maneira adequada, é necessário analisarmos as condições que devem ser satisfeitas pelas constantes X_0 e ν . Consideremos, portanto alguns casos que são fisicamente realizáveis,

- $Q(0) = \frac{e^{2X_0} - \nu^2}{8}$

Para que o potencial possua um comportamento repulsivo, é razoável exigir que,

$$Q(0) > 0, \quad (5.149)$$

e conseqüentemente,

$$e^{2X_0} > \nu^2 \Rightarrow 2X_0 > \ln \nu^2 = 2 \ln \nu \Rightarrow X_0 > \ln \nu, \quad (5.150)$$

e portanto,

$$X_0 > \ln \left(\lambda^2 - \frac{\omega}{2\pi} \right), \quad (5.151)$$

onde usamos (5.103). Essa restrição é importante, pois o hamiltoniano que descreve o buraco negro é nulo, isto é, a energia do sistema é nula, de tal sorte que qualquer efeito de repulsão só pode ocorrer se este for positivo.

- $\lim_{T \rightarrow \infty} Q(T) = \frac{-\nu^2}{8}$

Nesse regime o potencial quântico não possui mais validade, pois estamos na descrição clássica.

- $Q(T_\star) = 0$

Nesse caso,

$$\frac{1}{8}(e^{-32\pi\nu T_\star + 2X_0} - \nu^2) = 0, \quad (5.152)$$

ou seja,

$$e^{-32\pi\nu T_\star + 2X_0} = \nu^2 \Rightarrow -32\pi\nu T_\star + 2X_0 = \ln \nu^2 \Rightarrow -16\pi\nu T_\star + X_0 = \ln \nu, \quad (5.153)$$

portanto,

$$T_\star = \frac{X_0 - \ln \nu}{16\pi\nu}, \quad (5.154)$$

Esse ponto marca a transição entre os regimes clássico e quântico, isto é, a partir dele o potencial quântico se torna relevante.

A partir da análise acima, podemos concluir que de fato, o potencial quântico (ver a figura 5.3.2) dá sustentação aos resultados acerca das trajetórias bohmianas, tendo um comportamento repulsivo, isto é, a partir de um certo ponto $T_\star$ nas vizinhas da singularidade passa a valer efeitos puramente quântico que têm como objetivo impedir que o sistema alcance a singularidade.

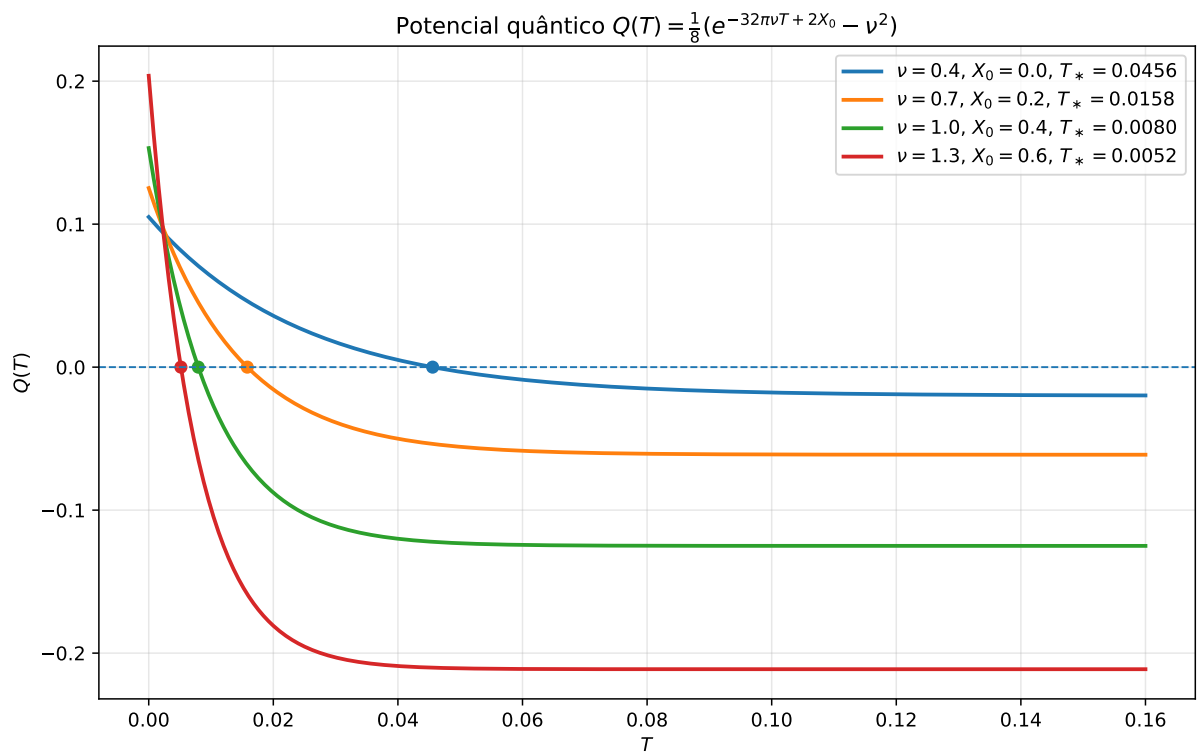


Figura 3 – Comportamento do potencial quântico $Q(T)$ para diferentes valores de ν e X_0 . Os pontos destacados indicam os valores T_* nos quais $Q(T_*) = 0$, marcando a transição entre o regime em que o potencial quântico é relevante e o regime clássico.

6 CONCLUSÃO

Este estudo, inspirado em modelos análogos de Cosmologia Quântica [14, 13, 33], lança luz sobre aspectos ainda pouco explorados acerca de buracos negros, em especial o problema da singularidade. Os resultados indicam que as singularidades são suprimidas no regime quântico. Além disso, verifica-se que, se as constantes que aparecem nas trajetórias bohmianas satisfazem,

$$K > \nu \quad \text{ou} \quad \frac{\lambda}{2} > \nu$$

então ocorre uma transição suave do regime quântico para o clássico, pois $u(t)$ é decrescente em t e $v(t)$ é crescente em t . O mecanismo físico associado a essa passagem é a *decoerência*[18]; sua modelagem detalhada no presente contexto ainda requer investigação adicional, embora seja um tema amplamente estudado em informação quântica.

Essas conclusões são reforçadas pelo comportamento repulsivo do potencial quântico, que emerge quando,

$$X_0 > \ln \left(\lambda^2 - \frac{\omega}{2\pi} \right) .$$

Nessa situação, o potencial atua impedindo que o sistema alcance a singularidade.

Como próximos passos, propõe-se investigar as modificações decorrentes de diferentes ordenamentos dos operadores quânticos e analisar os efeitos da substituição do campo escalar por um campo espinorial.

REFERÊNCIAS

- 1 Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, editors. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, volume 55 of *National Bureau of Standards Applied Mathematics Series*. U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1964. Tenth printing, December 1972, with corrections.
- 2 Carla R. Almeida. A pré-história dos buracos negros. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 42:e20200197, 2020. doi: 10.1590/1806-9126-RBEF-2020-0197.
- 3 George B. Arfken and Hans J. Weber. *Física Matemática: Métodos Matemáticos para Engenharia e Física*. Elsevier, Rio de Janeiro, 2007. ISBN 978-85-352-2050-6.
- 4 João Barcelos Neto. *Teoria de Campos e a Natureza: Parte Quântica*. Livraria da Física, São Paulo, 2017.
- 5 João Barcelos Neto. *Matemática para físicos com aplicações: Volume 1, Vetores, Tensores e Spinores*. Livraria da Física, São Paulo, 2023.
- 6 Matthias Blau. Lecture notes on general relativity, 2025. URL <http://www.blau.itp.unibe.ch/GRlecturenotes.html>.
- 7 Martin Bojowald. *Canonical Gravity and Applications: Cosmology, Black Holes, and Quantum Gravity*. Cambridge University Press, Cambridge, 2011. ISBN 978-0-521-19575-1.
- 8 Yury A. Brychkov. *Handbook of Special Functions: Derivatives, Integrals, Series and Other Formulas*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2008. ISBN 978-1-58488-956-4.
- 9 Leonardo Castellani. Symmetries in constrained hamiltonian systems. *Annals of Physics*, 143(2):357–371, 1982. doi: 10.1016/0003-4916(82)90031-8. URL [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(82\)90031-8](https://doi.org/10.1016/0003-4916(82)90031-8). Acesso em: 10 jan. 2026.
- 10 Michael Cooke. An introduction to quantum cosmology. Master’s thesis, Imperial College London, London, United Kingdom, September 2010. MSc thesis (Quantum Fields and Fundamental Forces), submitted September 24, 2010.
- 11 Sílvia R. Dahmen. Relatividade geral: Teoria e aplicações. Notas de aula, November 2022.
- 12 Ashok Das. *Lectures on Quantum Field Theory*. World Scientific, Singapore, 2008.
- 13 P. C. M. Delgado and N. Pinto-Neto. Cosmological models with asymmetric quantum bounces. 2021. arXiv:2003.04928v2.
- 14 Paola C. M. Delgado. Introdução à cosmologia quântica. *Cadernos de Astronomia*, 4 (2), 2023. doi: 10.47456/Cad.Astro.v4n2.41563.
- 15 Bryce S. DeWitt. Quantum theory of gravity. i. the canonical theory. *Physical Review*, 160(5):1113–1148, August 1967. doi: 10.1103/PhysRev.160.1113.
- 16 Fay Dowker. Black holes. Lecture notes, MSc in Quantum Fields and Fundamental Forces. Acesso em: 23 fev. 2026.

- 17 F. Farassat. Introduction to generalized functions with applications in aerodynamics and aeroacoustics. NASA Technical Paper 3428, NASA Langley Research Center, May 1994.
- 18 Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, and Matthew Sands. *The Feynman Lectures on Physics, Volume III: Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1965.
- 19 Éricourgoulhon. 3+1 formalism and bases of numerical relativity. Lecture notes, March 2007. URL <https://arxiv.org/abs/gr-qc/0703035>.
- 20 I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press/Elsevier, Amsterdam, 7 edition, 2007. ISBN 978-0-12-373637-6.
- 21 M. Hashemi, S. Jalalzadeh, and A. H. Ziaie. Collapse and dispersal of a homogeneous spin fluid in einstein-cartan theory. *European Physical Journal C*, 75(2): 53, 2015. doi: 10.1140/epjc/s10052-015-3284-2.
- 22 Marc Henneaux and Claudio Teitelboim. *Quantization of Gauge Systems*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1992.
- 23 C. J. Isham. Canonical quantum gravity and the problem of time, October 1992. URL <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9210011>.
- 24 Rishabh Jha. Introduction to hamiltonian formulation of general relativity and homogeneous cosmologies. SciPost Physics Lecture Notes, n. 73, 2023. URL <https://scipost.org/SciPostPhysLectNotes.73>. Acesso em: 10 jan. 2026.
- 25 Nahomi Kan, Takuma Aoyama, and Kiyoshi Shiraishi. Spinorial wheeler–dewitt wave functions inside black hole horizons. 2023. URL <https://arxiv.org/abs/2209.14527v7>.
- 26 R. Kantowski and R. K. Sachs. Some spatially homogeneous anisotropic relativistic cosmological models. *Journal of Mathematical Physics*, 7(3):443–446, March 1966. doi: 10.1063/1.1704952. URL <https://doi.org/10.1063/1.1704952>. Acesso em: 27 fev. 2026.
- 27 Masakatsu Kenmoku, Hiroto Kubotani, Eiichi Takasugi, and Yuki Yamazaki. de broglie–bohm interpretation for the wave function of quantum black holes. *Physical Review D*, 57(8):4925–4934, 1998. doi: 10.1103/PhysRevD.57.4925.
- 28 Claus Kiefer. *Quantum Gravity*, volume 136 of *International Series of Monographs on Physics*. Oxford University Press, Oxford, 2 edition, 2007. ISBN 978-0-19-921252-1.
- 29 Nivaldo A. Lemos. *Mecânica analítica*. Livraria da Física, São Paulo, 2 edition, 2013. ISBN 978-85-88325-24-1.
- 30 Gil de Oliveira Neto and Germano Amaral Monerat. *Efeitos quânticos no universo*. [s.n.], [S.l.], 1 edition, 2015.
- 31 Sachin Pandey. *Aspects of Quantum Cosmology*. PhD thesis, Indian Institute of Science Education and Research Kolkata, Mohanpur, West Bengal, India, December 2020. PhD thesis, December 2020. Also available as arXiv:2101.12659v1 (gr-qc), 29 Jan 2021.

- 32 Nelson Pinto-Neto. The bohm interpretation of quantum cosmology, 2004. URL <https://arxiv.org/abs/gr-qc/0410117>. Acesso em: 20 fev. 2026.
- 33 Nelson Pinto-Neto. The de broglie–bohm quantum theory and its application to quantum cosmology. *Universe*, 2021. doi: 10.3390/universe1010000. URL <https://arxiv.org/abs/2111.03057>. Acesso em: 20 fev. 2026.
- 34 Eric Poisson. *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004. ISBN 978-0-521-83091-1.
- 35 Carlos M. Reyes, César Riquelme, and Marco Schreck. The abc of the adm formulation in gravity, November 2024. Lecture notes. Acesso em: 03 fev. 2026.
- 36 Harpreet Singh and Malay K. Nandy. Black hole singularity resolution in wheeler–dewitt quantum gravity. *Annals of Physics*, 468:169719, 2024. doi: 10.1016/j.aop.2024.169719. URL <https://doi.org/10.1016/j.aop.2024.169719>. Acesso em: 27 fev. 2026.
- 37 P. K. Townsend. Black holes. Lecture notes (Part III, Cambridge University Mathematical Tripos), July 1997. URL <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9707012>. Acesso em: 23 fev. 2026.
- 38 Robert M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, Chicago, 1984.
- 39 Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, New York, 1972. ISBN 978-0-471-92567-5. Acesso em: 23 fev. 2026.
- 40 Dong-han Yeom. Speculation about the black hole final state: resolving singularity by quantum gravity, 2021. Andromeda Proceedings.

A Demonstração da Álgebra de Deformação das Hipersuperfícies

Todo o desenvolvimento dos cálculos apresentados abaixo foi baseado em [35], servindo, portanto, como uma segunda fonte de consulta.

A ideia aqui é demonstrar a álgebra na forma dos geradores e, com esse objetivo, será necessário calcular a variação dos vínculos de momento e hamiltoniano.

A.1 Variação do Vínculo de Momento

O vínculo de momento possui a forma

$$\mathcal{H}^b = -2\bar{\nabla}_a \Pi^{ab} \Rightarrow \mathcal{H}_b = -2\bar{\nabla}_a \Pi^a_b = -2(\bar{\nabla}_a \Pi^{ac})h_{bc}, \quad (\text{A.1})$$

e, usando o fato de que $\bar{\nabla}_a h_{bc} = 0$, obtemos

$$\mathcal{H}_b = -2\sqrt{h} \bar{\nabla}_a \left(\frac{\Pi^{ac}}{\sqrt{h}} \right) h_{bc}. \quad (\text{A.2})$$

Tomando a variação da expressão acima,

$$\delta \mathcal{H}_c = -2(\delta\sqrt{h}) \bar{\nabla}_a \left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) h_{bc} - 2\sqrt{h} \delta \left[\bar{\nabla}_a \left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) \right] h_{bc} - 2\sqrt{h} \bar{\nabla}_a \left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) \delta h_{bc}. \quad (\text{A.3})$$

O primeiro termo pode ser calculado usando a fórmula de Jacobi (ver [5]),

$$\delta\sqrt{h} = \frac{1}{2}\sqrt{h} h^{ab} \delta h_{ab}. \quad (\text{A.4})$$

logo,

$$\begin{aligned} -2(\delta\sqrt{h}) \bar{\nabla}_a \left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) h_{bc} &= -2 \left(\frac{1}{2}\sqrt{h} h^{de} \delta h_{de} \right) \bar{\nabla}_a \left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) h_{bc} \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{H}_c h^{de} \delta h_{de}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

onde usamos (A.2). Substituindo (A.5) em (A.3),

$$\delta \mathcal{H}_c = \frac{1}{2} \mathcal{H}_c h^{ab} \delta h_{ab} - 2\sqrt{h} \delta \left[\bar{\nabla}_a \left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) \right] h_{bc} + \mathcal{H}^b \delta h_{bc}, \quad (\text{A.6})$$

onde usamos (A.2) novamente.

Para o segundo termo, notamos que $T^{ab} \equiv \Pi^{ab} / \sqrt{h}$ é um tensor contravariante de rank 2, logo,

$$\bar{\nabla}_a T^{ab} = \partial_a (T^{ab}) + \bar{\Gamma}_{ca}^a T^{cb} + \bar{\Gamma}_{ca}^b T^{ac}, \quad (\text{A.7})$$

cujas variação é

$$\begin{aligned} \delta(\bar{\nabla}_a T^{ab}) &= \partial_a (\delta T^{ab}) + (\delta \bar{\Gamma}_{ca}^a) T^{cb} + \bar{\Gamma}_{ca}^a \delta T^{cb} + (\delta \bar{\Gamma}_{ca}^b) T^{ac} + \bar{\Gamma}_{ca}^b \delta T^{ac} \\ &= \bar{\nabla}_a (\delta T^{ab}) + (\delta \bar{\Gamma}_{ca}^a) T^{cb} + (\delta \bar{\Gamma}_{ca}^b) T^{ac}, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

e, sendo a variação do símbolo de Christoffel (ver [6] e [24]),

$$\delta \bar{\Gamma}_{ac}^b = \frac{1}{2} h^{bd} (\bar{\nabla}_a \delta h_{dc} + \bar{\nabla}_c \delta h_{da} - \bar{\nabla}_d \delta h_{ac}) \quad \text{e} \quad \delta \bar{\Gamma}_{ca}^a = \frac{1}{2} h^{ad} \bar{\nabla}_c (\delta h_{da}). \quad (\text{A.9})$$

Substituindo esses resultados em $\delta(\bar{\nabla}_a T^{ab})$,

$$\delta(\bar{\nabla}_a T^{ab}) = \bar{\nabla}_a (\delta T^{ab}) + \frac{1}{2} h^{ad} \bar{\nabla}_c (\delta h_{da}) T^{cb} + \frac{1}{2} h^{bd} [\bar{\nabla}_a (\delta h_{dc}) + \bar{\nabla}_c (\delta h_{da}) - \bar{\nabla}_d (\delta h_{ac})] T^{ac}, \quad (\text{A.10})$$

ou seja,

$$\delta(\bar{\nabla}_a T^{ab}) = \bar{\nabla}_a (\delta T^{ab}) + \frac{1}{2} (2h^{bd} T^{ac} + h^{cd} T^{ab} - h^{ab} T^{cd}) \bar{\nabla}_a (\delta h_{dc}). \quad (\text{A.11})$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \delta \left[\bar{\nabla}_a \left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) \right] &= \bar{\nabla}_a \left[\delta \left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[2h^{bd} \left(\frac{\Pi^{ac}}{\sqrt{h}} \right) + h^{cd} \left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) - h^{ab} \left(\frac{\Pi^{cd}}{\sqrt{h}} \right) \right] \bar{\nabla}_a (\delta h_{cd}). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Substituindo esse resultado em (A.6),

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{H}_c &= \frac{1}{2} \mathcal{H}_c h^{ab} \delta h_{ab} + \mathcal{H}^b \delta h_{bc} \\ &- 2\sqrt{h} \left\{ \bar{\nabla}_a \left[\delta \left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) \right] + \frac{1}{2} \left[2h^{bd} \left(\frac{\Pi^{ac}}{\sqrt{h}} \right) + h^{cd} \left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) - h^{ab} \left(\frac{\Pi^{cd}}{\sqrt{h}} \right) \right] \bar{\nabla}_a (\delta h_{cd}) \right\} h_{bc}. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Calculando a variação,

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) &= \frac{\delta \Pi^{ab}}{\sqrt{h}} - \Pi^{ab} \delta(h^{-1/2}) \\ &= \frac{\delta \Pi^{ab}}{\sqrt{h}} - \Pi^{ab} \left(-\frac{1}{2} h^{-3/2} \delta h \right) \\ &= \frac{\delta \Pi^{ab} - \frac{1}{2} \Pi^{ab} h^{cd} \delta h_{cd}}{\sqrt{h}}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Substituindo esse resultado em $\delta \mathcal{H}_c$,

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{H}_c &= \frac{1}{2} \mathcal{H}_c h^{ab} \delta h_{ab} + \mathcal{H}^b \delta h_{bc} \\ &- 2\sqrt{h} \left\{ \bar{\nabla}_a \left[\frac{\delta \Pi^{ab} - \frac{1}{2} \Pi^{ab} h^{ef} \delta h_{ef}}{\sqrt{h}} \right] h_{bc} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left[2h^{bd} \left(\frac{\Pi^{ae}}{\sqrt{h}} \right) + h^{ed} \left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) - h^{ab} \left(\frac{\Pi^{ed}}{\sqrt{h}} \right) \right] \bar{\nabla}_a (\delta h_{ed}) h_{bc} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{H}_c = & \frac{1}{2}\mathcal{H}_c h^{ab}\delta h_{ab} + \mathcal{H}^b\delta h_{bc} \\
& - 2\sqrt{h}\left\{\bar{\nabla}_a\left(\frac{\delta\Pi^{ab}}{\sqrt{h}}\right)h_{bc} - \frac{1}{2}\bar{\nabla}_a\left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}}\right)h_{bc}h^{ef}\delta h_{ef}\right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2}\left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}}\right)h_{bc}h^{ef}\bar{\nabla}_a(\delta h_{ef})\right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2}\left[2h^{bd}\left(\frac{\Pi^{ae}}{\sqrt{h}}\right) + h^{ed}\left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}}\right) - h^{ab}\left(\frac{\Pi^{ed}}{\sqrt{h}}\right)\right]\bar{\nabla}_a(\delta h_{ed})h_{bc}\right\}.
\end{aligned} \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{H}_c = & \frac{1}{2}\mathcal{H}_c h^{ab}\delta h_{ab} + \mathcal{H}^b\delta h_{bc} - \frac{1}{2}\mathcal{H}_c h^{ef}\delta h_{ef} \\
& - 2\sqrt{h}\left\{\bar{\nabla}_a\left(\frac{\delta\Pi^{ab}}{\sqrt{h}}\right)h_{bc} + \frac{1}{2}\left[2\left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}}\right)\bar{\nabla}_a(\delta h_{bc}) - \left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}}\right)\bar{\nabla}_c(\delta h_{ab})\right]\right\},
\end{aligned} \tag{A.17}$$

$$\delta\mathcal{H}_c = \mathcal{H}^b\delta h_{bc} - 2\sqrt{h}\left\{\bar{\nabla}_a\left(\frac{\delta\Pi^{ab}}{\sqrt{h}}\right)h_{bc} + \frac{1}{2}\left[2\left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}}\right)\bar{\nabla}_a(\delta h_{bc}) - \left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}}\right)\bar{\nabla}_c(\delta h_{ab})\right]\right\}. \tag{A.18}$$

Considerando agora

$$\delta(N^c\mathcal{H}_c) = \mathcal{H}_c\delta N^c + N^c\delta\mathcal{H}_c, \tag{A.19}$$

temos

$$\begin{aligned}
\delta(N^c\mathcal{H}_c) = & \mathcal{H}_c\delta N^c + N^c\left\{\mathcal{H}^b\delta h_{bc} - 2\sqrt{h}\left[\bar{\nabla}_a\left(\frac{\delta\Pi^{ab}}{\sqrt{h}}\right)h_{bc}\right.\right. \\
& \quad \left.\left. + \frac{1}{2}\left(2\left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}}\right)\bar{\nabla}_a(\delta h_{bc}) - \left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}}\right)\bar{\nabla}_c(\delta h_{ab})\right)\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{A.20}$$

$$\begin{aligned}
\delta(N^c\mathcal{H}_c) = & \mathcal{H}_c\delta N^c + N^c\mathcal{H}^b\delta h_{bc} - 2\sqrt{h}\left\{N^c\bar{\nabla}_a\left(\frac{\delta\Pi^{ab}}{\sqrt{h}}\right)h_{bc}\right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2}\left[2N^c\left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}}\right)\bar{\nabla}_a(\delta h_{bc}) - N^c\left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}}\right)\bar{\nabla}_c(\delta h_{ab})\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{A.21}$$

Reescrevendo na forma

$$\begin{aligned} \delta(N^c \mathcal{H}_c) = & \mathcal{H}_c \delta N^c + N^c \mathcal{H}^b \delta h_{bc} - 2\sqrt{h} \left\{ \bar{\nabla}_a \left(N_b \frac{\delta \Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) - (\bar{\nabla}_a N_b) \frac{\delta \Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right. \\ & + \frac{1}{2} \left[\bar{\nabla}_a \left(2N^c \frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \delta h_{bc} \right) - 2\bar{\nabla}_a \left(N^c \frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) \delta h_{bc} \right. \\ & \left. \left. - \bar{\nabla}_c \left(N^c \frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \delta h_{ab} \right) + \bar{\nabla}_c \left(N^c \frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) \delta h_{ab} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

e, ignorando os termos de contorno,

$$\begin{aligned} \delta(N^c \mathcal{H}_c) = & \mathcal{H}_c \delta N^c + N^c \mathcal{H}^b \delta h_{bc} + 2\sqrt{h} \left[(\bar{\nabla}_a N_b) \frac{\delta \Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right. \\ & \left. + \bar{\nabla}_a \left(N^c \frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) \delta h_{bc} - \frac{1}{2} \bar{\nabla}_c \left(N^c \frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) \delta h_{ab} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} \delta(N^c \mathcal{H}_c) = & \mathcal{H}_c \delta N^c - 2N^c \sqrt{h} \bar{\nabla}_a \left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) \delta h_{bc} + 2\sqrt{h} \left[(\bar{\nabla}_a N_b) \frac{\delta \Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right. \\ & \left. + \bar{\nabla}_a \left(N^c \frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) \delta h_{bc} - \frac{1}{2} \bar{\nabla}_c \left(N^c \frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) \delta h_{ab} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} \delta(N^c \mathcal{H}_c) = & \mathcal{H}_c \delta N^c - 2\sqrt{h} N^c \bar{\nabla}_a \left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) \delta h_{bc} + 2\sqrt{h} N^c \bar{\nabla}_a \left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) \delta h_{bc} \\ & + 2\sqrt{h} \left[(\bar{\nabla}_a N_b) \frac{\delta \Pi^{ab}}{\sqrt{h}} + (\bar{\nabla}_a N^c) \frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \delta h_{bc} - \frac{1}{2} \bar{\nabla}_c \left(N^c \frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) \delta h_{ab} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

$$\delta(N^c \mathcal{H}_c) = \mathcal{H}_c \delta N^c + 2(\bar{\nabla}_a N_b) \delta \Pi^{ab} + \sqrt{h} \left[2\bar{\nabla}_c N^a \frac{\Pi^{bc}}{\sqrt{h}} - \bar{\nabla}_c \left(N^c \frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) \right] \delta h_{ab}. \quad (\text{A.26})$$

Sendo o gerador do vínculo de momento

$$\mathbb{P}[N^c] = \int d^3x N^c \mathcal{H}_c, \quad (\text{A.27})$$

concluimos que

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbb{P}[N^c]}{\delta h_{ab}} &= 2\bar{\nabla}_c N^a \Pi^{bc} - \bar{\nabla}_c (N^c \Pi^{ab}) \\ &= \bar{\nabla}_c N^a \Pi^{bc} + \bar{\nabla}_c N^b \Pi^{ac} - (\bar{\nabla}_c N^c) \Pi^{ab} - N^c \bar{\nabla}_c \Pi^{ab} \\ &= -\mathcal{L}_{\vec{N}} \Pi^{ab}, \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

e também

$$\begin{aligned}\frac{\delta \mathbb{P}[N^c]}{\delta \Pi^{ab}} &= 2\bar{\nabla}_a N_b \\ &= \bar{\nabla}_a N_b + \bar{\nabla}_b N_a \\ &= 2\bar{\nabla}_{(a} N_{b)} = \mathcal{L}_{\vec{N}} h_{ab}.\end{aligned}\tag{A.29}$$

A.2 Variação do Vínculo Hamiltoniano

Sendo o vínculo de momento,

$$\mathcal{H} = G_{abcd}\Pi^{ab}\Pi^{cd} - \sqrt{h}\mathcal{R},\tag{A.30}$$

onde,

$$G_{abcd} = \frac{1}{2\sqrt{h}}(h_{ac}h_{bd} + h_{ad}h_{bc} - h_{ab}h_{cd}),\tag{A.31}$$

é a métrica de DeWitt. Então,

$$\mathcal{H} = (h_{ac}h_{bd} + h_{ad}h_{bc} - h_{ab}h_{cd})\Pi^{ab}\Pi^{cd} - \sqrt{h}\mathcal{R},\tag{A.32}$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\sqrt{h}}(\Pi_c{}^b\Pi_b{}^c + \Pi_d{}^b\Pi_b{}^d - \Pi^2) - \sqrt{h}\mathcal{R},\tag{A.33}$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\sqrt{h}}(2\Pi_a{}^b\Pi_a{}^b) - \sqrt{h}\mathcal{R},\tag{A.34}$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\sqrt{h}}(\Pi^{ab}\Pi_{ab} - \frac{1}{2}\Pi^2) - \sqrt{h}\mathcal{R},\tag{A.35}$$

onde $\Pi = h_{ab}\Pi^{ab}$. Reescrevendo na forma,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\sqrt{h}}(h_{ac}h_{bd} - \frac{1}{2}h_{ab}h_{cd})\Pi^{ab}\Pi^{cd} - \sqrt{h}\mathcal{R},\tag{A.36}$$

e tomando a variação,

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{H} &= \delta \left(\frac{1}{\sqrt{h}} \right) (h_{ac}h_{bd} - \frac{1}{2}h_{ab}h_{cd})\Pi^{ab}\Pi^{cd} + \frac{1}{\sqrt{h}} \left[(\delta h_{ac})h_{db} + h_{ac}(\delta h_{bd}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}(\delta h_{ab})h_{cd} - \frac{1}{2}h_{ab}\delta h_{cd} \right] \Pi^{ab}\Pi^{cd} + \frac{1}{\sqrt{h}} \left(h_{ac}h_{bd} - \frac{1}{2}h_{ab}h_{cd} \right) \times \\ &\quad \times ((\delta \Pi^{ab})\Pi^{cd} + \Pi^{ab}\delta \Pi^{cd}) - (\delta \sqrt{h})\mathcal{R} - \sqrt{h}\delta \mathcal{R},\end{aligned}\tag{A.37}$$

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{H} &= \frac{1}{2}\sqrt{h}h^{ef}\delta h_{ef} \left(h_{ac}h_{bd} - \frac{1}{2}h_{ab}h_{cd} \right) \Pi^{ab}\Pi^{cd} + \frac{1}{\sqrt{h}}[2\delta h_{ac}h_{bd} \\ &\quad - (\delta h_{ab})h_{cd}] \Pi^{ab}\Pi^{cd} + \frac{1}{\sqrt{h}} \left(h_{ac}h_{bd} - \frac{1}{2}h_{ab}h_{cd} \right) (2\delta \Pi^{ab}\Pi^{cd}) \\ &\quad - (\delta \sqrt{h})\mathcal{R} - \sqrt{h}\delta \mathcal{R},\end{aligned}\tag{A.38}$$

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{H} = & \frac{1}{\sqrt{h}}(2h_{ac}\Pi^{cd}h_{bd} - h_{ab}\Pi)\delta\Pi^{ab} + \frac{1}{2}\sqrt{h}h^{ef}\delta h_{ef}\left(\Pi^{ab}\Pi_{ab} - \frac{1}{2}\Pi^2\right) \\ & + \frac{1}{\sqrt{h}}[2(\delta h_{ab})h_{cd}\Pi^{ac}\Pi^{bd} - (\delta h_{ab})h_{cd}\Pi^{ab}\Pi^{cd}] - \frac{1}{2}\sqrt{h}h^{ab}\delta h_{ab}\mathcal{R} - \sqrt{h}\delta\mathcal{R}\end{aligned}\quad (\text{A.39})$$

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{H} = & \frac{1}{\sqrt{h}}(2h_{ac}\Pi^{cd}h_{db} - h_{ab}\Pi)\delta\Pi^{ab} + \left\{\frac{1}{\sqrt{h}}(2\Pi^{ac}h_{cd}\Pi^{db} - \Pi\Pi^{ab})\right. \\ & \left.- \frac{1}{2}h^{ab}\left[\frac{1}{\sqrt{h}}\left(\Pi^{cd}\Pi_{cd} + \frac{1}{2}\Pi^2\right)\right] + \sqrt{h}\mathcal{R}\right\} - \sqrt{h}\delta\mathcal{R}.\end{aligned}\quad (\text{A.40})$$

A variação do escalar de Ricci é dada por (ver [6] e [24]),

$$\delta\mathcal{R} = -\mathcal{R}^{ab}\delta h_{ab} + \bar{\nabla}^a(\bar{\nabla}^b\delta h_{ab} - h^{bc}\bar{\nabla}_a\delta h_{bc}), \quad (\text{A.41})$$

dessa forma,

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{H} = & \frac{1}{\sqrt{h}}(h_{ac}\Pi^{cd}h_{db} + h_{bc}\Pi^{cd}h_{da} - h_{ab}\Pi)\delta\Pi^{ab} + \frac{1}{\sqrt{h}}\left[\Pi^{ac}h_{cd}\Pi^{db} + \Pi^{bc}h_{cd}\Pi^{da} - \Pi\Pi^{ab}\right. \\ & \left.- \frac{1}{2}\left(\Pi^{cd}\Pi_{cd} - \frac{1}{2}\Pi^2\right)h^{ab} + \sqrt{h}h^{ab}\mathcal{R}\right]\delta h_{ab} + \sqrt{h}\mathcal{R}^{ab}\delta h_{ab} - \sqrt{h}\bar{\nabla}^a(\bar{\nabla}^b\delta h_{ab} \\ & - h^{bc}\bar{\nabla}_a\delta h_{bc}),\end{aligned}\quad (\text{A.42})$$

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{H} = & \frac{1}{\sqrt{h}}(h_{ac}\Pi^{cd}h_{db} + h_{bc}\Pi^{cd}h_{da} - h_{da}\Pi)\delta\Pi^{ab} + \frac{1}{\sqrt{h}}\left[\Pi^{ac}h_{cd}\Pi^{db} + \Pi^{bc}h_{cd}\Pi^{da} - \Pi\Pi^{ab}\right. \\ & \left.- \frac{1}{2}\left(\Pi^{cd}\Pi_{cd} - \frac{1}{2}\Pi^2\right)h^{ab} + \sqrt{h}\left(\mathcal{R}^{ab} - \frac{1}{2}h^{ab}\mathcal{R}\right)\right]\delta h_{ab} - \sqrt{h}(\bar{\nabla}^a\bar{\nabla}^b\delta h_{ab} \\ & - h^{ab}\bar{\nabla}_c\bar{\nabla}^c\delta h_{ab}),\end{aligned}\quad (\text{A.43})$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{H} = & \frac{1}{\sqrt{h}}(h_{ac}\Pi^{cd}h_{db} + h_{bd}\Pi^{cd}h_{da} - h_{ab}\Pi)\delta\Pi^{ab} + \frac{1}{\sqrt{h}}(\Pi^{ac}h_{cd}\Pi^{db} + \Pi^{bc}h_{cd}\Pi^{da} - \Pi\Pi^{ab}) \\ & - \frac{1}{2}\left(\Pi^{cd}\Pi_{cd} - \frac{1}{2}\Pi^2\right)h^{ab} + \sqrt{h}G^{ab}\delta h_{ab} - \sqrt{h}(\bar{\nabla}^a\bar{\nabla}^b - h^{ab}\bar{\nabla}_c\bar{\nabla}^c)\delta h_{ab},\end{aligned}\quad (\text{A.44})$$

onde,

$$G^{ab} = \mathcal{R}^{ab} - \frac{1}{2}h^{ab}\mathcal{R}, \quad (\text{A.45})$$

é o tensor de Einstein 3D. Calculando agora,

$$\delta(\mathcal{N}\mathcal{H}) = (\delta\mathcal{N})\mathcal{H} + \mathcal{N}\delta\mathcal{H}, \quad (\text{A.46})$$

$$\begin{aligned}
\delta(\mathcal{N}\mathcal{H}) &= (\delta\mathcal{N})\mathcal{H} + \frac{1}{\sqrt{h}}\mathcal{N}(h_{ac}\Pi^{cd}h_{db} + h_{bc}\Pi^{cd}h_{da})\delta\Pi^{ab} + \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{h}}\left[\Pi^{ac}h_{cd}\Pi^{db}\right. \\
&\quad \left.+ \Pi^{bc}h_{cd}\Pi^{da} - \Pi\Pi^{ab} - \frac{1}{2}\left(\Pi^{cd}\Pi_{cd} - \frac{1}{2}\Pi^2\right)\Pi^{ab} + \sqrt{h}G^{ab}\right]\delta h_{ab} \\
&\quad - \sqrt{h}\mathcal{N}(\bar{\nabla}^a\bar{\nabla}^b - h^{ab}\bar{\nabla}_c\bar{\nabla}^c)\delta h_{ab},
\end{aligned} \tag{A.47}$$

integrando por partes e ignorando os termos de contorno,

$$\begin{aligned}
\delta(\mathcal{N}\mathcal{H}) &= (\delta\mathcal{N})\mathcal{H} + \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{h}}(h_{ac}\Pi^{cd}h_{db} + h_{bc}\Pi^{cd}h_{da} - h_{ab}\Pi)\delta\Pi^{ab} \\
&\quad + \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{h}}\left[\Pi^{ac}h_{cd}\Pi^{db} + \Pi^{bc}h_{cd}\Pi^{da} - \Pi\Pi^{ab} - \frac{1}{2}\left(\Pi^{cd}\Pi_{cd} - \frac{1}{2}\Pi^2\right)h^{ab} + \right. \\
&\quad \left. \sqrt{h}G^{ab}\right]\delta h_{ab} - \sqrt{h}(\bar{\nabla}^a\bar{\nabla}^b\mathcal{N} - h^{ab}\bar{\nabla}_c\bar{\nabla}^c\mathcal{N})\delta h_{ab}.
\end{aligned} \tag{A.48}$$

Do resultado acima, concluímos que,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\mathbb{H}[\mathcal{N}]}{\delta h_{ab}} &= \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{h}}\left[\Pi^{ac}h_{cd}\Pi^{db} + \Pi^{bc}h_{cd}\Pi^{da} - \Pi\Pi^{ab} - \frac{1}{2}\left(\Pi^{cd}\Pi_{cd} - \frac{1}{2}\Pi^2\right) + \sqrt{h}G^{ab}\right] \\
&\quad + \sqrt{h}(h^{ab}\bar{\nabla}_c\bar{\nabla}^c\mathcal{N} - \bar{\nabla}^a\bar{\nabla}^b\mathcal{N}),
\end{aligned} \tag{A.49}$$

e também,

$$\frac{\delta\mathbb{H}[\mathcal{N}]}{\delta\Pi^{ab}} = \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{h}}(h_{ac}\Pi^{cd}h_{db} + h_{bd}\Pi^{cd}h_{da} - h_{ab}\Pi). \tag{A.50}$$

A.3 Álgebra do Vínculo Hamiltoniano

Sendo o parênteses de Poisson,

$$\{\mathbb{H}[\mathcal{N}_1], \mathbb{H}[\mathcal{N}_2]\} = \int d^3z \left(\frac{\delta\mathbb{H}[\mathcal{N}_1(\vec{x})]}{\delta h_{ab}(\vec{z})} \frac{\delta\mathbb{H}[\mathcal{N}_2(\vec{y})]}{\delta\Pi^{ab}(\vec{z})} - \frac{\delta\mathbb{H}[\mathcal{N}_1(\vec{x})]}{\delta\Pi^{ab}(\vec{z})} \frac{\delta\mathbb{H}[\mathcal{N}_2(\vec{y})]}{\delta h_{ab}(\vec{z})} \right), \tag{A.51}$$

então de (A.5) e (A.6), podemos escrever,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\mathbb{H}[\mathcal{N}_1]}{\delta h_{ab}} \frac{\delta\mathbb{H}[\mathcal{N}_2]}{\delta\Pi^{ab}} &= \frac{\mathcal{N}_1\mathcal{N}_2}{\sqrt{h}}\left[(\Pi^{ac}h_{cd}\Pi^{db} + \Pi^{bc}h_{cd}\Pi^{da} - \Pi\Pi^{ab} - \frac{1}{2}\left(\Pi^{cd}\Pi_{cd} - \frac{1}{2}h_{ab}\Pi^2\right)h^{ab}\right. \\
&\quad \left.+ \sqrt{h}G^{ab}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{h}}(h_{ac}\Pi^{cd}h_{db} + h_{bc}\Pi^{cd}h_{da} - h_{ab}\Pi) + \mathcal{N}_2(h_{ab}\bar{\nabla}_c\bar{\nabla}^c\mathcal{N}_1\right. \\
&\quad \left.- \bar{\nabla}^a\bar{\nabla}^b\mathcal{N}_1)(h_{ac}\Pi^{cd}h_{db} + h_{bc}\Pi^{cd}h_{da} - h_{ab}\Pi),
\end{aligned} \tag{A.52}$$

e também,

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}_1]}{\delta \Pi^{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}_2]}{\delta h_{ab}} &= \frac{\mathcal{N}_1 \mathcal{N}_2}{\sqrt{h}} \left[(\Pi^{ac} h_{cd} \Pi^{db} + \Pi^{bc} h_{cd} \Pi^{da} - \frac{1}{2} (\Pi^{cd} \Pi_{cd} - \frac{1}{2} \Pi^2) h^{ab} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{h} G^{ab} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{h}} (h_{ac} \Pi^{cd} h_{db} + h_{bc} \Pi^{cd} h_{da} - h_{ab} \Pi) \right] + \mathcal{N}_1 (h^{ab} \bar{\nabla}^c \bar{\nabla}_c \mathcal{N}_2 \\ &\quad - \bar{\nabla}^a \bar{\nabla}^b \mathcal{N}_2) (h_{ac} \Pi^{cd} h_{db} + h_{bc} \Pi^{cd} h_{da} - h_{ab} \Pi). \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

Subtraindo as duas últimas expressões,

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}_1]}{\delta h_{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}_2]}{\delta \Pi^{ab}} - \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}_1]}{\delta \Pi^{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}_2]}{\delta h_{ab}} &= [\mathcal{N}_2 (h^{ab} \bar{\nabla}_c \bar{\nabla}^c \mathcal{N}_1 - \bar{\nabla}^a \bar{\nabla}^b \mathcal{N}_1) \\ &\quad - \mathcal{N}_1 (h^{ab} \bar{\nabla}_c \bar{\nabla}^c \mathcal{N}_2 - \bar{\nabla}^a \bar{\nabla}^b \mathcal{N}_2)] \times \\ &\quad \times (h_{ac} \Pi^{cd} h_{db} + h_{bc} \Pi^{cd} h_{da} - h_{ab} \Pi), \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}_1]}{\delta h_{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}_2]}{\delta \Pi^{ab}} - \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}_1]}{\delta \Pi^{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}_2]}{\delta h_{ab}} &= \mathcal{N}_2 (\delta_c^b \Pi^{cd} h_{db} \bar{\nabla}_e \bar{\nabla}^e \mathcal{N}_1 - \Pi^{cd} \bar{\nabla}_e \bar{\nabla}_d \mathcal{N}_1) \\ &\quad - \mathcal{N}_1 (\delta_c^b \Pi^{cd} h_{db} \bar{\nabla}_e \bar{\nabla}^e \mathcal{N}_1 - \Pi^{cd} \bar{\nabla}_c \bar{\nabla}_d \mathcal{N}_1) \\ &\quad + \mathcal{N}_2 (\delta_c^a \Pi^{cd} h_{da} \bar{\nabla}_e \bar{\nabla}^e \mathcal{N}_1 - \Pi^{cd} \bar{\nabla}_e \bar{\nabla}_e \mathcal{N}_1) \\ &\quad - \mathcal{N}_1 (\delta_c^a \Pi^{cd} h_{da} \bar{\nabla}_e \bar{\nabla}^e \mathcal{N}_1 - \Pi^{cd} \bar{\nabla}_d \bar{\nabla}_c \mathcal{N}_1) \\ &\quad - \mathcal{N}_2 (3 \Pi \bar{\nabla}_e \bar{\nabla}^e \mathcal{N}_1 - \Pi \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}^a \mathcal{N}_1) \\ &\quad + \mathcal{N}_1 (3 \Pi \bar{\nabla}_e \bar{\nabla}^e \mathcal{N}_1 - \Pi \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}^a \mathcal{N}_2), \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

$$\frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}_1]}{\delta h_{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}_2]}{\delta \Pi^{ab}} - \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}_1]}{\delta \Pi^{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}_2]}{\delta h_{ab}} = 2 (\mathcal{N}_2 \Pi^{ab} \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b \mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_1 \Pi^{ab} \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b \mathcal{N}_2). \quad (\text{A.56})$$

Integrando por partes e ignorando os termos de contorno,

$$\frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}_1]}{\delta h_{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}_2]}{\delta \Pi^{ab}} - \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}_1]}{\delta \Pi^{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}_2]}{\delta h_{ab}} = -2 [-\bar{\nabla}_a (\mathcal{N}_2 \Pi^a) \bar{\nabla}_b \mathcal{N}_1 + \bar{\nabla}_a (\mathcal{N}_1 \Pi^{ab}) \bar{\nabla}_b \mathcal{N}_2], \quad (\text{A.57})$$

$$\frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}_1]}{\delta h_{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}_2]}{\delta \Pi^{ab}} - \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}_1]}{\delta \Pi^{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}_2]}{\delta h_{ab}} = -2 (-\mathcal{N}_2 \bar{\nabla}_a \Pi^{ab} \bar{\nabla}_b \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_1 \bar{\nabla}_a \Pi^{ab} \bar{\nabla}_b \mathcal{N}_2), \quad (\text{A.58})$$

$$\frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}_1]}{\delta h_{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}_2]}{\delta \Pi^{ab}} - \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}_1]}{\delta \Pi^{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}_2]}{\delta h_{ab}} = -2 (\mathcal{N}_1 \bar{\nabla}^c \mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_2 \bar{\nabla}^c \mathcal{N}_1) \bar{\nabla}_a (\Pi^{ab} h_{bc}), \quad (\text{A.59})$$

$$\frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}_1]}{\delta h_{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}_2]}{\delta \Pi^{ab}} - \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}_1]}{\delta \Pi^{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}_2]}{\delta h_{ab}} = (\mathcal{N}_1 \bar{\nabla}^c \mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_2 \bar{\nabla}^c \mathcal{N}_1) \mathcal{H}_c \quad (\text{A.60})$$

Portanto,

$$\{\mathbb{H}[\mathcal{N}_1], \mathbb{H}[\mathcal{N}_2]\} = \int d^3z (\mathcal{N}_1 \bar{\nabla}^a \mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_2 \bar{\nabla}^a \mathcal{N}_1) \mathcal{H}_a, \quad (\text{A.61})$$

na forma dos geradores,

$$\{\mathbb{H}[\mathcal{N}_1], \mathbb{H}[\mathcal{N}_2]\} = \mathbb{P}[\mathcal{N}_1 \bar{\nabla}^a \mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_2 \bar{\nabla}^a \mathcal{N}_1]. \quad (\text{A.62})$$

A.4 Álgebra Mista dos Vínculos

Sendo o parênteses de Poisson,

$$\{\mathbb{P}[N^a], \mathbb{H}[\mathcal{N}]\} = \int d^3z \left(\frac{\delta \mathbb{P}[N^a(\vec{x})]}{\delta h_{ab}(\vec{z})} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}(\vec{y})]}{\delta \Pi^{ab}(\vec{z})} - \frac{\delta \mathbb{P}[N^a(\vec{x})]}{\delta \Pi^{ab}(\vec{z})} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}(\vec{y})]}{\delta h_{ab}(\vec{z})} \right), \quad (\text{A.63})$$

então de (A.28), (A.29), (A.49) e (A.50), podemos escrever,

$$\frac{\delta \mathbb{P}[N^a]}{\delta h_{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}]}{\delta \Pi^{ab}} = \mathcal{N} [2\bar{\nabla}_c \mathcal{N}^a \Pi^{bc} - (\bar{\nabla}_c N^c) \Pi^{ab} - N^c \bar{\nabla}_c \Pi^{ab}] \left[\frac{1}{\sqrt{h}} (2\Pi_{ab} - h_{ab} \Pi) \right], \quad (\text{A.64})$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbb{P}[N^a]}{\delta h_{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}]}{\delta \Pi^{ab}} = \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{h}} & \left[2(\bar{\nabla}_c N^a) \Pi^{bc} (2\Pi_{ab} - h_{ab} \Pi) - (\bar{\nabla}_c N^c) \Pi^{ab} (2\Pi_{ab} - h_{ab} \Pi) \right. \\ & \left. - N^c \bar{\nabla}_c \Pi^{ab} (2\Pi_{ab} - h_{ab} \Pi) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbb{P}[N^a]}{\delta h_{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}]}{\delta \Pi^{ab}} = \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{h}} & \{ [4(\bar{\nabla}_c N^a) \Pi^{bc} \Pi_{ab} - 2(\bar{\nabla}_c N^a) \Pi^{bc} h_{ab} \Pi] - [2(\bar{\nabla}_c N^c) \Pi^{ab} \Pi_{ab} \\ & - (\bar{\nabla}_c N^c) \Pi^2] - [2N^c (\bar{\nabla}_c \Pi^{ab}) \Pi_{ab} - N^c (\bar{\nabla}_a \Pi^{ab}) \Pi h_{ab}] \}, \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbb{P}[N^a]}{\delta h_{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}]}{\delta \Pi^{ab}} = \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{h}} & \left[4(\bar{\nabla}_a N_b) \Pi^{da} h_{cd} \Pi^{db} - 2(\bar{\nabla}_a N_b) \Pi \Pi^{ab} - 2(\bar{\nabla}_a N_b) \times \right. \\ & \times \left(\Pi^{cd} \Pi_{cd} - \frac{1}{2} \Pi^2 \right) h^{ab} - 2 \frac{\bar{\nabla}_c}{2} (N^c \Pi_{ab} \Pi^{ab}) \\ & \left. + \Pi^{ab} \Pi_{ab} \bar{\nabla}_c N^c - \frac{\bar{\nabla}_c}{2} (N^c \Pi^2) + \Pi^2 \bar{\nabla}_c N^c \right] \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbb{P}[N^a]}{\delta h_{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}]}{\delta \Pi^{ab}} = 2\mathcal{N}(\bar{\nabla}_a N_b) & \left\{ \frac{1}{\sqrt{h}} \left[2\Pi^{ac} h_{cd} \Pi^{db} - \Pi \Pi^{ab} - \frac{1}{2} \left(\Pi^{ab} \Pi_{ab} - \frac{1}{2} \Pi^2 \right) \Pi^{ab} \right] \right\} \\ & - \mathcal{N} \bar{\nabla}_c \left[\frac{1}{\sqrt{h}} \left(\Pi^{ab} \Pi_{ab} - \frac{1}{2} \Pi^2 \right) N^c \right], \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

e também,

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbb{P}[N^a]}{\delta \Pi^{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}]}{\delta h_{ab}} = 2\mathcal{N}(\bar{\nabla}_a N_b) & \left\{ \frac{1}{\sqrt{h}} \left[2\Pi^{ac} h_{cd} \Pi^{db} - \Pi \Pi^{ab} - \frac{1}{2} \left(\Pi^{cd} \Pi_{cd} - \frac{1}{2} \Pi^2 \right) h^{ab} \right] \right\} \\ & + (\bar{\nabla}_a N_b) \sqrt{h} [\mathcal{N} G^{ab} + (h^{ab} \bar{\nabla}_c \bar{\nabla}^c - \bar{\nabla}^a \bar{\nabla}^b) \mathcal{N}]. \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

De posse das duas expressões acima, temos que,

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbb{P}[N^a]}{\delta h_{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}]}{\delta \Pi^{ab}} - \frac{\delta \mathbb{P}[N^a]}{\delta \Pi^{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}]}{\delta h_{ab}} = -\mathcal{N} \bar{\nabla}_c & \left[\frac{1}{\sqrt{h}} \left(\Pi^{ab} \Pi_{ab} - \frac{1}{2} \Pi^2 \right) N^c \right] \\ & - (\bar{\nabla}_a N_b) \sqrt{h} [\mathcal{N} G^{ab} + (h^{ab} \bar{\nabla}_c \bar{\nabla}^c \mathcal{N} - \bar{\nabla}^a \bar{\nabla}^b \mathcal{N})] \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

integrando por partes e ignorando os termos de contorno,

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbb{P}[N^a]}{\delta h_{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}]}{\delta \Pi^{ab}} - \frac{\delta \mathbb{P}[N^a]}{\delta \Pi^{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}]}{\delta h_{ab}} &= (N^c \bar{\nabla}_c \mathcal{N}) \left[\frac{1}{\sqrt{h}} \left(\Pi^{ab} \Pi_{ab} - \frac{1}{2} \Pi^2 \right) \right] \\ &\quad + N_b \sqrt{h} \bar{\nabla}_a \left[\mathcal{N} G^{ab} + (h^{ab} \bar{\nabla}_c \bar{\nabla}^c \mathcal{N} - \bar{\nabla}^a \bar{\nabla}^b \mathcal{N}) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.71})$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbb{P}[N^a]}{\delta h_{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}]}{\delta \Pi^{ab}} - \frac{\delta \mathbb{P}[N^a]}{\delta \Pi^{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}]}{\delta h_{ab}} &= (N^c \bar{\nabla}_c \mathcal{N}) \left[\frac{1}{\sqrt{h}} \left(\Pi^{ab} \Pi_{ab} - \frac{1}{2} \Pi^2 \right) \right] \\ &\quad + N_b \sqrt{h} [(\bar{\nabla}_a \mathcal{N}) G^{ab} + \mathcal{N} \bar{\nabla}_a G^{ab} \\ &\quad + (h^{ab} \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_c \bar{\nabla}^c \mathcal{N} - \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}^a \bar{\nabla}^b \mathcal{N})]. \end{aligned} \quad (\text{A.72})$$

Sabendo que $\bar{\nabla}_a G^{ab} = 0$, logo,

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbb{P}[N^a]}{\delta h_{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}]}{\delta \Pi^{ab}} - \frac{\delta \mathbb{P}[N^a]}{\delta \Pi^{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}]}{\delta h_{ab}} &= (N^c \bar{\nabla}_c \mathcal{N}) \left[\frac{1}{\sqrt{h}} \left(\Pi^{ab} \Pi_{ab} - \frac{1}{2} \Pi^2 \right) \right] \\ &\quad + N_b \sqrt{h} \left[(\bar{\nabla}_a \mathcal{N}) \left(\mathcal{R}^{ab} - \frac{1}{2} h^{ab} \mathcal{R} \right) \right. \\ &\quad \left. + (h^{ab} \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_c \bar{\nabla}^c \mathcal{N} - \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}^a \bar{\nabla}^b \mathcal{N}) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbb{P}[N^a]}{\delta h_{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}]}{\delta \Pi^{ab}} - \frac{\delta \mathbb{P}[N^a]}{\delta \Pi^{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}]}{\delta h_{ab}} &= (N^c \bar{\nabla}_c \mathcal{N}) \left[\frac{1}{\sqrt{h}} \left(\Pi^{ab} \Pi_{ab} - \frac{1}{2} \Pi^2 \right) - \sqrt{h} \mathcal{R} \right] \\ &\quad + N_b \sqrt{h} [(\bar{\nabla}_a \mathcal{N}) R^{ab} + h^{cb} \bar{\nabla}_c \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}^a \mathcal{N} \\ &\quad - \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}^a \bar{\nabla}^b \mathcal{N}]. \end{aligned} \quad (\text{A.74})$$

Vemos que,

$$\begin{aligned} (h^{cb} \bar{\nabla}_c \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}^a - \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}^a \bar{\nabla}^b) \mathcal{N} &= (h^{bc} \bar{\nabla}_c \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}^a - h^{bc} \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}^a \bar{\nabla}_c) \mathcal{N} \\ &= h^{bc} [\bar{\nabla}_c, \bar{\nabla}_a] \bar{\nabla}^a \mathcal{N} \\ &= h^{bc} \mathcal{R}^a_{dac} \bar{\nabla}^d \mathcal{N} \\ &= h^{bc} \mathcal{R}_{dc} \bar{\nabla}^d \mathcal{N}, \end{aligned} \quad (\text{A.75})$$

onde R^a_{dac} é o tensor de Riemann 3D. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbb{P}[N^a]}{\delta h_{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}]}{\delta \Pi^{ab}} - \frac{\delta \mathbb{P}[N^a]}{\delta \Pi^{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}]}{\delta h_{ab}} &= (N^c \bar{\nabla}_c \mathcal{N}) \left[\frac{1}{\sqrt{h}} \left(\Pi^{ab} \Pi_{ab} - \frac{1}{2} \Pi^2 \right) - \sqrt{h} \mathcal{R} \right] \\ &\quad + N_b \sqrt{h} [(\bar{\nabla}_a \mathcal{N}) \mathcal{R}^{ab} - h^{bc} \mathcal{R}_{dc} \bar{\nabla}^d \mathcal{N}]. \end{aligned} \quad (\text{A.76})$$

O último termo se anula,

$$\frac{\delta \mathbb{P}[N^a]}{\delta h_{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}]}{\delta \Pi^{ab}} - \frac{\delta \mathbb{P}[N^a]}{\delta \Pi^{ab}} \frac{\delta \mathbb{H}[\mathcal{N}]}{\delta h_{ab}} = (N^c \bar{\nabla}_c \mathcal{N}) \left[\frac{1}{\sqrt{h}} \left(\Pi^{ab} \Pi_{ab} - \frac{1}{2} \Pi^2 \right) - \sqrt{h} \mathcal{R} \right]. \quad (\text{A.77})$$

Portanto,

$$\{\mathbb{P}[N^a], \mathbb{H}[\mathcal{N}]\} = \int d^3 \left\{ (\bar{\nabla}^c N_c \mathcal{N}) \left[\frac{1}{\sqrt{h}} \left(\Pi^{ab} \Pi_{ab} - \frac{1}{2} \Pi^2 \right) - \sqrt{h} \mathcal{R} \right] \right\}, \quad (\text{A.78})$$

$$\{\mathbb{P}[N^a], \mathbb{H}[\mathcal{N}]\} = \int d^3 z (N^c \bar{\nabla}_c \mathcal{N}) \mathcal{H}, \quad (\text{A.79})$$

ou na forma dos geradores,

$$\{\mathbb{P}[N^a], \mathbb{H}[\mathcal{N}]\} = \mathbb{H}[N^c \bar{\nabla}_c \mathcal{N}] = \mathbb{H}[\mathcal{L}_{\vec{N}} \mathcal{N}]. \quad (\text{A.80})$$

A.5 Álgebra do Vínculo de Momento

Sendo o parênteses de Poisson,

$$\{\mathbb{P}[N_1^a], \mathbb{P}[N_2^b]\} = \int d^3 z \left(\frac{\delta \mathbb{P}[N_1^a(\vec{x})]}{\delta h_{ab}(\vec{z})} \frac{\delta \mathbb{P}[N_2^b(\vec{y})]}{\delta \Pi^{ab}(\vec{z})} - \frac{\delta \mathbb{P}[N_1^a(\vec{x})]}{\delta \Pi^{ab}(\vec{z})} \frac{\delta \mathbb{P}[N_2^b(\vec{y})]}{\delta h_{ab}(\vec{z})} \right), \quad (\text{A.81})$$

então de (A.28) e (A.29), podemos escrever,

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbb{P}[N_1^a]}{\delta h_{ab}} \frac{\delta \mathbb{P}[N_2^b]}{\delta \Pi^{ab}} &= 2 \bar{\nabla}_a N_b^2 (\bar{\nabla}_c N_d^1 h^{ad} \Pi^{bc} + \bar{\nabla}_c N_d^1 h^{db} \Pi^{ac}) \\ &\quad - 2 \bar{\nabla}_a N_b^2 \sqrt{h} \bar{\nabla}_c (N_1^c \Pi^{ab}), \end{aligned} \quad (\text{A.82})$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbb{P}[N_1^a]}{\delta h_{ab}} \frac{\delta \mathbb{P}[N_2^b]}{\delta \Pi^{ab}} &= 2 \bar{\nabla}_c N_d^1 (h^{db} \Pi^{ac} + h^{ad} \Pi^{bc}) \bar{\nabla}_a N_b^2 \\ &\quad - 2 \sqrt{h} \bar{\nabla}_c \left[N_1^c \left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.83})$$

e também,

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbb{P}[N_1^a]}{\delta \Pi^{ab}} \frac{\delta \mathbb{P}[N_2^b]}{\delta h_{ab}} &= 2 \bar{\nabla}_c N_d^1 (\bar{\nabla}_a N_b^2 h^{bc} \Pi^{da} + \bar{\nabla}_a N_b^2 h^{bd} \Pi^{ac}) \\ &\quad - 2 \bar{\nabla}_a N_b^1 \bar{\nabla}_c (N_2^c \Pi^{ab}), \end{aligned} \quad (\text{A.84})$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbb{P}[N_1^a]}{\delta \Pi^{ab}} \frac{\delta \mathbb{P}[N_2^b]}{\delta h_{ab}} &= 2 \bar{\nabla}_c N_d^1 (\bar{\nabla}_a N_b^2 h^{bc} \Pi^{da} + \bar{\nabla}_a N_b^2 h^{bd} \Pi^{ac}) \\ &\quad - 2 \bar{\nabla}_a N_b^1 \sqrt{h} \bar{\nabla}_c \left[N_2^c \left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.85})$$

de modo que,

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbb{P}[N_1^a]}{\delta h_{ab}} \frac{\delta \mathbb{P}[N_2^b]}{\delta \Pi^{ab}} - \frac{\delta \mathbb{P}[N_1^a]}{\delta \Pi^{ab}} \frac{\delta \mathbb{P}[N_2^b]}{\delta h_{ab}} &= 2 \bar{\nabla}_a N_b^2 (\bar{\nabla}_c N_d^1 h^{ad} \Pi^{bc} + \bar{\nabla}_c N_d^1 h^{db} \Pi^{ac}) \\ &\quad - 2 \bar{\nabla}_c N_d^1 (\bar{\nabla}_a N_b^2 h^{bc} \Pi^{da} + \bar{\nabla}_a N_b^2 h^{bd} \Pi^{ac}) \\ &\quad - 2 \sqrt{h} \bar{\nabla}_c \left[N_1^c \left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) \right] \\ &\quad + 2 \bar{\nabla}_a N_b^1 \sqrt{h} \bar{\nabla}_c \left[N_2^c \left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.86})$$

Desenvolvendo a expressão,

$$\begin{aligned}
& 2\bar{\nabla}_a N_b^2 (\bar{\nabla}_c N_d^1 h^{ad} \Pi^{bc} + \bar{\nabla}_c N_d^1 h^{db} \Pi^{ac}) - 2\bar{\nabla}_c N_d^1 (\bar{\nabla}_a N_b^2 h^{bc} \Pi^{da} + \bar{\nabla}_a N_b^2 h^{bd} \Pi^{ac}) = \\
& = 2\bar{\nabla}_c N_1^b \Pi^{ac} \bar{\nabla}_a N_b^2 + 2\bar{\nabla}_c N_1^a \Pi^{bc} \bar{\nabla}_a N_b^2 - 2\bar{\nabla}^b N_d^1 \Pi^{da} \bar{\nabla}_a N_b^2 - 2\bar{\nabla}_c N_1^b \Pi^{ac} \bar{\nabla}_a N_b^2 = \\
& = 2\bar{\nabla}_c N_1^a \Pi^{bc} \bar{\nabla}_a N_b^2 - 2\bar{\nabla}^b N_d^1 \Pi^{da} \bar{\nabla}_a N_b^2
\end{aligned} \tag{A.87}$$

portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathbb{P}[N_1^a]}{\delta h_{ab}} \frac{\delta \mathbb{P}[N_2^b]}{\delta \Pi^{ab}} - \frac{\delta \mathbb{P}[N_1^a]}{\delta \Pi^{ab}} \frac{\delta \mathbb{P}[N_2^b]}{\delta h_{ab}} &= 2\bar{\nabla}_c N_1^a \Pi^{bc} \bar{\nabla}_a N_b^2 - 2\bar{\nabla}^b N_d^1 \Pi^{da} \bar{\nabla}_a N_b^2 \\
&\quad - 2\sqrt{h} \bar{\nabla}_c \left[N_1^c \left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) \right] \\
&\quad + 2\bar{\nabla}_a N_b^1 \sqrt{h} \bar{\nabla}_c \left[N_2^c \left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) \right],
\end{aligned} \tag{A.88}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathbb{P}[N_1^a]}{\delta h_{ab}} \frac{\delta \mathbb{P}[N_2^b]}{\delta \Pi^{ab}} - \frac{\delta \mathbb{P}[N_1^a]}{\delta \Pi^{ab}} \frac{\delta \mathbb{P}[N_2^b]}{\delta h_{ab}} &= 2\bar{\nabla}_c N_1^a \Pi^{bc} \bar{\nabla}_a N_b^2 - 2\bar{\nabla}^b N_d^1 \Pi^{da} \bar{\nabla}_a N_b^2 \\
&\quad - 2\Pi^{ab} \bar{\nabla}_c N_1^c \bar{\nabla}_a N_b^2 - 2\sqrt{h} \bar{\nabla}_c \left(\frac{\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} \right) \bar{\nabla}_a N_b^2 \\
&\quad + 2\Pi^{ab} \bar{\nabla}_c N_2^c \bar{\nabla}_a N_b^1,
\end{aligned} \tag{A.89}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathbb{P}[N_1^a]}{\delta h_{ab}} \frac{\delta \mathbb{P}[N_2^b]}{\delta \Pi^{ab}} - \frac{\delta \mathbb{P}[N_1^a]}{\delta \Pi^{ab}} \frac{\delta \mathbb{P}[N_2^b]}{\delta h_{ab}} &= 2\bar{\nabla}_c (N_1^a \Pi^{bc} \bar{\nabla}_a N_b^2) - 2N_1^a \bar{\nabla}_a N_b^2 \bar{\nabla}_c \Pi^{cb} \\
&\quad - 2N_1^a \Pi^{cb} \bar{\nabla}_c \bar{\nabla}_a N_b^1 - 2\bar{\nabla}_a (N_b^2 \Pi^{ac} \bar{\nabla}^b N_c^1) \\
&\quad + 2N_b^2 \bar{\nabla}^b N_c^1 \bar{\nabla}_a \Pi^{ac} + 2N_b^2 \Pi^{ac} \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}^b N_c^1 \\
&\quad - 2\bar{\nabla}_c (N_1^c \Pi^{ab}) \bar{\nabla}_a N_b^2 + 2\bar{\nabla}_c (N_2^c \Pi^{ab}) \bar{\nabla}_a N_b^1,
\end{aligned} \tag{A.90}$$

Reconhecendo o vínculo de momento,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathbb{P}[N_1^a]}{\delta h_{ab}} \frac{\delta \mathbb{P}[N_2^b]}{\delta \Pi^{ab}} - \frac{\delta \mathbb{P}[N_1^a]}{\delta \Pi^{ab}} \frac{\delta \mathbb{P}[N_2^b]}{\delta h_{ab}} &= N_1^a \mathcal{H}^b \bar{\nabla}_a N_b^2 - 2N_1^a \Pi^{cb} \bar{\nabla}_c \bar{\nabla}_a N_b^2 \\
&\quad - N_2^b \bar{\nabla}^b N_c^1 \mathcal{H}^c + 2N_b^2 \Pi^{ac} \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}^b N_c^1 \\
&\quad - 2\bar{\nabla}_c (N_1^c \Pi^{ab} \bar{\nabla}_a N_b^2) + 2N_1^c \Pi^{ab} \bar{\nabla}_c \bar{\nabla}_a N_b^2 \\
&\quad + 2\bar{\nabla}_c (N_2^c \Pi^{ab} \bar{\nabla}_a N_b^1) - 2N_2^c \Pi^{ab} \bar{\nabla}_c \bar{\nabla}_a N_b^1,
\end{aligned} \tag{A.91}$$

ignorando os termos de contorno,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathbb{P}[N_1^a]}{\delta h_{ab}} \frac{\delta \mathbb{P}[N_2^b]}{\delta \Pi^{ab}} - \frac{\delta \mathbb{P}[N_1^a]}{\delta \Pi^{ab}} \frac{\delta \mathbb{P}[N_2^b]}{\delta h_{ab}} &= (N_1^a \bar{\nabla}_a N_2^b - N_2^a \bar{\nabla}_a N_1^b) \mathcal{H}_b \\
&\quad + 2\Pi^{ab} h_{db} N_1^c \bar{\nabla}_c \bar{\nabla}_a N_2^d - 2\Pi^{ab} h_{db} N_1^c \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_c N_2^d \\
&\quad - 2\Pi^{ab} h_{db} N_2^c \bar{\nabla}_c \bar{\nabla}_a N_1^d + 2\Pi^{ab} h_{db} N_2^c \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_c N_1^d,
\end{aligned} \tag{A.92}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbb{P}[N_1^a]}{\delta h_{ab}} \frac{\delta \mathbb{P}[N_2^b]}{\delta \Pi^{ab}} - \frac{\delta \mathbb{P}[N_1^a]}{\delta \Pi^{ab}} \frac{\delta \mathbb{P}[N_2^b]}{\delta h_{ab}} &= (N_1^a \bar{\nabla}_a N_2^b - N_2^a \bar{\nabla}_a N_1^b) \mathcal{H}_b \\ &+ 2\Pi^{ab} h_{bd} (N_1^c [\bar{\nabla}_c, \bar{\nabla}_a] N_2^d - N_2^c [\bar{\nabla}_c, \bar{\nabla}_a] N_1^d). \end{aligned} \quad (\text{A.93})$$

Em termos do tensor de Riemann,

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbb{P}[N_1^a]}{\delta h_{ab}} \frac{\delta \mathbb{P}[N_2^b]}{\delta \Pi^{ab}} - \frac{\delta \mathbb{P}[N_1^a]}{\delta \Pi^{ab}} \frac{\delta \mathbb{P}[N_2^b]}{\delta h_{ab}} &= (N_1^a \bar{\nabla}_a N_2^b - N_2^a \bar{\nabla}_a N_1^b) \mathcal{H}_b \\ &+ 2\Pi^{ab} h_{bd} (N_1^c \mathcal{R}_{eca}^d N_2^e - N_2^c \mathcal{R}_{eca}^d N_1^e), \end{aligned} \quad (\text{A.94})$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbb{P}[N_1^a]}{\delta h_{ab}} \frac{\delta \mathbb{P}[N_2^b]}{\delta \Pi^{ab}} - \frac{\delta \mathbb{P}[N_1^a]}{\delta \Pi^{ab}} \frac{\delta \mathbb{P}[N_2^b]}{\delta h_{ab}} &= (N_1^a \bar{\nabla}_a N_2^b - N_2^a \bar{\nabla}_a N_1^b) \mathcal{H}_b \\ &+ 2\Pi^{ab} (N_1^c \mathcal{R}_{bdca} N_2^d - N_2^c \mathcal{R}_{bdca} N_1^d). \end{aligned} \quad (\text{A.95})$$

Sendo,

$$\begin{aligned} \Pi^{ab} (N_1^c \mathcal{R}_{bdca} N_2^d - N_2^c \mathcal{R}_{bdca} N_1^d) &= \Pi^{ab} (N_1^c \mathcal{R}_{bdca} N_2^d - N_2^d \mathcal{R}_{bcd a} N_1^c) \\ &= \Pi^{ab} (N_1^c \mathcal{R}_{bdca} N_2^d - N_2^d \mathcal{R}_{dabc} N_1^c) \\ &= \Pi^{ab} (N_1^c \mathcal{R}_{bdca} N_2^d - N_2^d \mathcal{R}_{dbac} N_1^c) \\ &= \Pi^{ab} (N_1^c \mathcal{R}_{bdca} N_2^d - N_2^d \mathcal{R}_{bdca} N_1^c) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.96})$$

portanto,

$$\frac{\delta \mathbb{P}[N_1^a]}{\delta h_{ab}} \frac{\delta \mathbb{P}[N_2^b]}{\delta \Pi^{ab}} - \frac{\delta \mathbb{P}[N_1^a]}{\delta \Pi^{ab}} \frac{\delta \mathbb{P}[N_2^b]}{\delta h_{ab}} = (N_1^a \bar{\nabla}_a N_2^b - N_2^a \bar{\nabla}_a N_1^b) \mathcal{H}_b, \quad (\text{A.97})$$

e com isso,

$$\{\mathbb{P}[N_1^a], \mathbb{P}[N_2^b]\} = \int d^3z [(N_1^a \bar{\nabla}_a N_2^b - N_2^a \bar{\nabla}_a N_1^b) \mathcal{H}_b], \quad (\text{A.98})$$

na forma dos geradores,

$$\{\mathbb{P}[N_1^a], \mathbb{P}[N_2^b]\} = \mathbb{P}[N_1^a \bar{\nabla}_a N_2^b - N_2^a \bar{\nabla}_a N_1^b]. \quad (\text{A.99})$$