

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Thomas de Moura Sangy

Limite Newtoniano em gravitação não-local e correções quânticas

Juiz de Fora

2026

Thomas de Moura Sangy

Limite Newtoniano em gravitação não-local e correções quânticas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física. Área de concentração: Física.

Orientador: Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro

Coorientador: Prof. Dr. Tibério de Paula Netto

Juiz de Fora

2026

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Sangy, Thomas de Moura.

Limite Newtoniano em gravitação não-local e correções quânticas /
Thomas de Moura Sangy. – 2026.

69 f. : il.

Orientador: Ilya Lvovich Shapiro

Coorientador: Tibério de Paula Netto

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto
de Ciências Exatas. Programa de Pós-graduação em Física, 2026.

1. Gravitação não-local. 2. Limite Newtoniano. 3. Fontes efetivas. 4.
Correções quânticas. I. Shapiro, Ilya Lvovich, orient. II. Netto, Tibério de
Paula, coorient. III. Título.

Thomas de Moura Sangy

Limite Newtoniano em gravitação não-local e correções quânticas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física. Área de concentração: Física.

Aprovada em 09 de abril de 2026.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Prof. Dr. Tibério de Paula Netto
Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto
Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Prof. Dr. Alexander Belyaev
University of Southampton

Prof. Dr. Júlio César Fabris
Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)

Prof. Dr. Gustavo Pazzini de Brito
Universidade Estadual Paulista (UNESP)

Dr. Wagno Cesar e Silva
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF)

Juiz de Fora, 12/04/2026.



Documento assinado eletronicamente por **Júlio César Fabris, Usuário Externo**, em 12/04/2026, às 15:16, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Wagno Cesar e Silva, Usuário Externo**, em 12/04/2026, às 15:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Alexander Belyaev, Usuário Externo**, em 12/04/2026, às 16:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gustavo Pazzini de Brito, Usuário Externo**, em 12/04/2026, às 21:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ilya Chapiro, Professor(a)**, em 12/04/2026, às 22:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Tibério de Paula Netto, Professor(a)**, em 13/04/2026, às 10:24, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gil de Oliveira Neto, Membro**, em 13/04/2026, às 18:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Uffj (www2.uffj.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **2944612** e o código CRC **ECCCD75B**.

Dedico este trabalho aos meus pais, James Dean Sangy
e Claudia Ferreira de Moura Sangy.

AGRADECIMENTOS

- i. Ao professor Ilya Shapiro pela orientação desde a iniciação científica; pelas várias disciplinas ministradas, que foram fundamentais para a minha formação; pelos problemas sugeridos; pela disponibilidade irrestrita; pelas discussões científicas; pelos conselhos.
- ii. Ao professor Tibério de Paula Netto pela co-orientação; pela sugestão do problema desta dissertação; pelas discussões científicas; pelos inúmeros ensinamentos.
- iii. Aos meus pais pelo apoio incondicional e pela presença diária, apesar da distância.
- iv. À Cristiane pelo amor e pela companhia.
- v. Ao professor Iosif L. Buchbinder, ao Dr. Nicolló Burzillá e ao Dr. Breno L. Giacchini pela valiosa colaboração.
- vi. Ao corpo docente da UFJF, em especial aos professores José Paulo Rodrigues Furtado de Mendonça, Maikel Ballester e Virgílio de Carvalho dos Anjos pelas disciplinas teóricas ministradas na pós-graduação.
- vii. Ao programa de pós-graduação e ao seu secretário Sr. Gustavo Cordeiro Vieira.
- viii. Aos meus amigos e aos colegas da UFJF e do grupo de Teoria Quântica de Campos, Gravitação e Cosmologia pelas conversas de corredor e pelas risadas compartilhadas.
- ix. Às agências de fomento à pesquisa FAPEMIG, pelo suporte financeiro durante o mestrado, e ao CNPq pelas bolsas de iniciação científica durante a graduação.
- x. Aos membros da banca examinadora professores Alexander Belyaev, Gil de Oliveira Neto, Júlio Cesar Fábris, Gustavo Pazzini de Brito e Dr. Wagno Cesar e Silva, bem como aos membros suplentes professores Davi Cabral Rodrigues, Jorge Ananias Neto e José Abdalla Helayël-Neto pela disponibilidade e pelas relevantes observações.

LISTA DE PUBLICAÇÕES

Durante o período de mestrado, originaram-se os seguintes trabalhos:

- i. T. M. Sangy, T. de P. Netto e I. L. Shapiro, *On the total derivative divergence for a nonminimal vector operator*, arXiv:2505.00214. [Submetido para a publicação];
- ii. I. L. Buchbinder, T. M. Sangy e I. L. Shapiro, *Renormalizable quantum field theory in curved spacetime with external two-form field*, Phys. Lett. B **872**, 140017 (2026), arXiv:2509.06916;
- iii. T. M. Sangy, N. Burzillà, B. L. Giacchini e T. de P. Netto, *Effective delta sources and Newtonian limit in nonlocal gravity*, Phys. Rev. D – Aceito em 01 de Abril de 2026, arXiv:2512.05061.

Esta dissertação baseia-se no trabalho [iii].

RESUMO

Nesta dissertação, investiga-se o limite Newtoniano de uma classe de modelos não-locais caracterizados pelos fatores de forma $f_s(\square) = \exp[-\square/\mu_s^2]^{N_s}$ por meio do formalismo das fontes efetivas. Nas considerações aqui apresentadas, supõe-se que N_s é um número real positivo, não necessariamente inteiro. Como resultado, são obtidas diversas representações para a fonte efetiva, para a função massa e para o potencial Newtoniano, bem como aproximações que evidenciam a dependência dessas quantidades nos parâmetros N_s e μ_s e que podem ser utilizadas na fenomenologia do regime de campo fraco da gravitação não-local. Ademais, explica-se o motivo pelo qual as oscilações do potencial Newtoniano se manifestam apenas quando $N_s > 1$ e demonstra-se que, apesar da presença de tais oscilações, a função massa efetiva é positiva para todo $N_s > 0$. Também verifica-se que as soluções das equações de movimento linearizadas são regulares, isto é, não exibem singularidades nos invariantes de curvatura. Por fim, são calculadas as correções quânticas logarítmicas ao potencial Newtoniano, à fonte efetiva e à função massa.

Palavras-chave: gravitação não-local; limite Newtoniano; fontes efetivas; correções quânticas.

ABSTRACT

In this work, the Newtonian limit of a class of nonlocal models characterized by the form factors $f_s(\square) = \exp[-\square/\mu_s^2]^{N_s}$ is investigated using the effective sources formalism. In the considerations presented here, it is assumed that N_s is a positive real number, not necessarily an integer. As a result, several representations for the effective source, for the mass function, and for the Newtonian potential are obtained, as well as approximations that highlight the dependence of these quantities on the parameters N_s and μ_s and that can be employed in the phenomenology of the weak-field regime of nonlocal gravity. Furthermore, the reason why Newtonian potential oscillations arise only when $N_s > 1$ is explained, and it is shown that, despite the presence of such oscillations, the effective mass function is positive for all $N_s > 0$. It is also verified that the solutions of the linearized equations of motion are regular, that is, they do not exhibit curvature singularities. Finally, logarithmic quantum corrections to the Newtonian potential, to the effective source, and to the mass function are calculated.

Keywords: nonlocal gravity; Newtonian limit; effective sources; quantum corrections.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

- Figura 1 – Gráfico da fonte $\rho_s(r)/(M\mu_s^3)$ em função de $\mu_s r$ para diferentes valores de N_s . As oscilações aparecem somente quando $N_s > 1$. Os valores de $\rho_s(0)$ crescem rapidamente à medida que $N_s \rightarrow 0$ 21
- Figura 2 – Gráfico da função massa normalizada $M_s(r)/M$ em função de $\mu_s r$ para diferentes valores de N_s . As oscilações aparecem somente quando $N_s > 1$. Para todo N_s pode-se observar os comportamentos assintóticos: para $\mu_s r \ll 1$, $M_s(r) \sim r^3$, ao passo que para $\mu_s r \gg 1$, $M_s(r) \sim M$ 24
- Figura 3 – Gráfico da função massa normalizada (2.51) para a gravitação de Lee–Wick, $M_s^{\text{LW}}(r)/M$, em função de $b_s r$ para diferentes valores de $q_s = b_s/a_s$. $M_s^{\text{LW}}(r)$ assume valores negativos para $q_s > 2,67$ 25
- Figura 4 – Gráfico de $\chi_s(r)/(GM\mu_s)$ em função de $\mu_s r$ para diferentes valores de N_s . As oscilações estão presentes apenas para $N_s > 1$. Note que, para qualquer $N_s > 0$, tem-se $\chi'_s(0) = 0$ 28
- Figura 5 – **(a)** $M_s^\infty(r)/M$ em função de $\mu_s r$, As linhas horizontais tracejadas correspondem aos valores $(1 \pm 2/\pi) = (0,363; 1,637)$. **(b)** Gráfico do valor do campo gravitacional $g_s^\infty(r)/GM$ em função de $\mu_s r$. As linhas tracejadas correspondem ao campo gravitacional $-1/r^2$. Embora a função massa $M_s^\infty(r)$ não possua um limite bem definido quando $r \gg 1/\mu_s$, o campo gravitacional $g_s^\infty(r) \rightarrow 0$ devido ao fator de amortecimento r^{-2} na Eq. (2.16). Além disso, a singularidade Newtoniana usual em $r = 0$ não está presente. . . 32
- Figura 6 – Comparação entre $\chi_s^\infty(r)$ e $\chi_s(r)$ para $N_s \in \{10, 20, 30\}$ 33
- Figura 7 – Gráfico de $\rho_s(0)/(M\mu_s^3)$ e $\chi_s(0)/(GM\mu_s)$ em função de N_s . Os pontos representam $N_s = 1/2$ e valores inteiros de N_s . As linhas horizontais tracejadas correspondem aos valores $\rho_s^\infty(0)/(M\mu_s^3) = 1/(6\pi^2) = 0,0168$ e $\chi_s^\infty(0)/(GM\mu_s) = -2/\pi = -0,636$, que representam, respectivamente, um limite superior para $N_s \geq 3/2$ e um limite inferior para $N_s \geq 1/2$ 33
- Figura 8 – Máximo absoluto da função massa normalizada $M_s(r)/M$ para $N_s > 1$. Os eixos horizontais representam a posição do primeiro pico da função massa nas coordenadas $\mu_s r_{\text{max}}$, ao passo que o eixo vertical é $M_s(r_{\text{max}})/M$. As cores indicam os valores de N_s . Note que $\mu_s r_{\text{max}}$ aumenta para $1,505 < N_s < 3,766$ e diminui fora desse intervalo. 34
- Figura 9 – **(a)** Gráfico da aproximação (3.15) para $\bar{f}_s(r)$ e da solução exata dada pela Eq. (3.16) (quadrados azuis). **(b)** Erro relativo entre (3.15) e (3.16). . . 34
- Figura 10 – Gráfico de $\chi_s^\infty(r)$. Linha vermelha: solução aproximada, Eq. (3.14). Quadrados azuis: solução exata, Eq. (3.12). 35

Figura 11 – Erro relativo de $\chi'_s(r)$ obtido por meio da derivada de (3.12) (expressão exata) e de (3.14) (aproximação). O erro é de 100% para $0 \leq \mu_s r < 1$, pois $\chi'_s = 0$ na aproximação nesse intervalo. A descontinuidade em $\mu_s r = 1$ ocorre porque a aproximação não é suave nesse ponto. A amplitude da variação do erro relativo apresenta picos de cerca de 40%, que não parecem diminuir mesmo para $\mu_s r \gg 1$	36
Figura 12 – Gráfico do erro relativo obtido ao comparar a solução exata, Eq. (3.12), com a nova aproximação, Eq. (3.20). (a) Erro relativo para o potencial $\chi_s^\infty(r)$. (b) Erro relativo para a derivada do potencial $\chi_s'^\infty(r)$. Em ambos os casos, a amplitude dos erros relativos tende a zero para $\mu_s r \gg 1$	37
Figura 13 – Gráfico do valor do invariante de Kretschmann adimensional $K(0)/(G^2 M^2 \mu^6)$ em $r = 0$ em função de N , no caso particular em que $\mu_2 = \mu_0 \equiv \mu$ e $N_2 = N_0 \equiv N$. A linha tracejada corresponde ao valor no limite $N \rightarrow \infty$, $K^\infty(0)$, que serve como um limite superior para valores elevados de N . Os pontos representam os valores inteiros de N . Note que quando $N = 3/2$, $K(0) = K^\infty(0)$	40
Figura 14 – $\rho_s^{(1)}(r)/(\beta_s M \mu_s^5)$ em função de $\mu_s r$. Gráfico à esquerda: $\mu_R = 1, 2\mu_s$. Gráfico à direita: $\mu_R = 0, 6\mu_s$	44
Figura 15 – $M_s^{(1)}(r)/(\beta_s M \mu_s^2)$ em função de $\mu_s r$. Gráfico à esquerda: $\mu_R = 1, 2\mu_s$. Gráfico à direita: $\mu_R = 0, 6\mu_s$	44
Figura 16 – $\chi_s^{(1)}(r)/(\beta_s G M \mu_s^3)$ em função de $\mu_s r$. Gráfico à esquerda: $\mu_R = 1, 2\mu_s$. Gráfico à direita: $\mu_R = 0, 6\mu_s$	45
Figura 18 – Gráfico de $\lim_{N_s \rightarrow \infty} M_s^{(1)}(r)/(\beta_s M \mu_s^2)$ em função de $\mu_s r$. As linhas horizontais correspondem a $\pm 4 \log(\mu_s/\mu_R)/\pi$. Gráfico à esquerda: $\mu_R = 1, 2\mu_s$, $\pm 4 \log(\mu_s/\mu_R)/\pi = \pm 0, 232$. Gráfico à direita: $\mu_R = 0, 6\mu_s$, $\pm 4 \log(\mu_s/\mu_R)/\pi = \pm 0, 650$	49
Figura 19 – Gráfico de $\lim_{N_s \rightarrow \infty} \chi_s^{(1)}(r)/(\beta_s G M \mu_s^3)$ em função de $\mu_s r$. Gráfico à esquerda: $\mu_R = 1, 2\mu_s$. Gráfico à direita: $\mu_R = 0, 6\mu_s$	49
Figura 17 – Gráfico de $\lim_{N_s \rightarrow \infty} \rho_s^{(1)}(r)/(\beta_s M \mu_s^5)$ em função de $\mu_s r$. Gráfico à esquerda: $\mu_R = 1, 2\mu_s$. Gráfico à direita: $\mu_R = 0, 6\mu_s$	49
Figura 20 – Comparação entre a função massa exata (D.2) (linha tracejada laranja) e a aproximação (E.6) (linha azul contínua) para $N_s = 2$ (superior esquerdo), $N_s = 4$ (superior direito), $N_s = 10$ (inferior esquerdo) e $N_s = 20$ (inferior direito). As curvas vermelhas representam as funções envoltórias do pacote de ondas $1 \pm \delta$, onde δ é dado por (E.12). A linha preta tracejada corresponde à forma assintótica da função massa para $r \rightarrow 0$, Eq. (2.53).	68
Figura 21 – Solução numérica para o fator multiplicativo Y em função do erro relativo $\delta = 1 - M_s(r)/M $ (em porcentagem), em escala log-linear.	69

NOTAÇÕES E CONVENÇÕES

Nesta dissertação, adotam-se as seguintes convenções:

- i. As unidades são tais que $c = \hbar = 1$;
- ii. A assinatura da métrica é $(+, -, -, -)$;
- iii. O tensor de Riemann é definido como

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} \Gamma^\lambda_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\nu} \Gamma^\lambda_{\beta\mu};$$

- iv. O tensor de Ricci e a curvatura escalar são dados, respectivamente, pelas contrações $R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}$ e $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$;

- v. O tensor de Weyl em 4 dimensões é definido por

$$C_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{1}{2}(g_{\beta\mu} R_{\alpha\nu} - g_{\alpha\mu} R_{\beta\nu} + g_{\alpha\nu} R_{\beta\mu} - g_{\beta\nu} R_{\alpha\mu}) + \frac{1}{6}R(g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu});$$

- vi. O operador de D'Alembert é definido por $\square = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	GRAVITAÇÃO NÃO-LOCAL	12
2	O LIMITE NEWTONIANO	16
2.1	EQUAÇÕES DE MOVIMENTO LINEARIZADAS	16
2.2	O FORMALISMO DAS FONTES EFETIVAS	18
2.2.1	Fonte delta efetiva	18
2.2.2	Função massa	23
2.2.3	Potencial Newtoniano	27
3	O LIMITE $N_s \rightarrow \infty$	30
3.1	FONTE EFETIVA PARA $N_s \rightarrow \infty$	30
3.2	FUNÇÃO MASSA PARA $N_s \rightarrow \infty$	31
3.3	POTENCIAL NEWTONIANO PARA $N_s \rightarrow \infty$	31
3.4	PROPRIEDADES ADICIONAIS DAS SOLUÇÕES	32
3.5	COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS ANALÍTICOS COM APROXIMAÇÕES DA LITERATURA	34
4	REGULARIDADE DOS INVARIANTES DE CURVATURA	38
4.1	CASO $N_s \geq 1/2$	38
4.2	CASO $0 < N_s < 1/2$	39
4.3	ULTRAVIOLETA VERSUS INFRAVERMELHO	39
5	CORREÇÕES QUÂNTICAS LOGARÍTMICAS A UM LAÇO AO LIMITE NEWTONIANO	41
5.1	CONSIDERAÇÕES GERAIS	41
5.2	CASO $N_s > 1/2$	43
5.3	CASO $N_s = 1/2$	47
5.4	O LIMITE $N_s \rightarrow \infty$	48
5.5	REGULARIDADE DOS INVARIANTES DE CURVATURA	49
6	CONCLUSÃO	51
	REFERÊNCIAS	54
	APÊNDICE A – Soluções em termos de funções hipergeométricas generalizadas	59
	APÊNDICE B – Soluções em termos da função G de Meijer	62
	APÊNDICE C – Análise de convergência da série (2.25)	65
	APÊNDICE D – Representações integrais úteis e demonstração do Teorema 2	66
	APÊNDICE E – Oscilações da função massa	67

1 INTRODUÇÃO

A relatividade geral, proposta por Albert Einstein em 1916, é capaz de descrever fenômenos gravitacionais clássicos em um amplo espectro de energias, fato corroborado por inúmeros testes de alta precisão [1]. Não obstante, ainda perduram problemas que carecem de descrições satisfatórias. Com efeito, no regime ultravioleta, as soluções mais relevantes da relatividade geral, tais como a solução homogênea e isotrópica, que fornece uma aproximação de ordem zero para a dinâmica do universo, exibem singularidades. Isso posto, não se pode esperar que a relatividade geral, enquanto teoria clássica da gravitação, permaneça válida em todas as escalas de energia, sobretudo na vizinhança de singularidades, onde a curvatura do espaço-tempo inevitavelmente atinge a escala de Planck $l_{\text{P}}^{-2} \sim M_{\text{P}}^2 \approx 10^{19} \text{ GeV}$ e a descrição clássica da gravitação supostamente é violada.

Do ponto de vista quântico, uma vez que a relatividade geral não é renormalizável [2, 3, 4, 5], sua previsibilidade é comprometida no regime de altas energias. Um modo de melhorar o comportamento do propagador da teoria no regime ultravioleta e a convergência das integrais de laço consiste em acrescentar à ação de Einstein-Hilbert termos com derivadas superiores, tais como $RF_0(\square)R$ e $C_{\mu\nu\alpha\beta}F_2(\square)C^{\mu\nu\alpha\beta}$, em que $F_{0,2}(\square)$ são funções analíticas avaliadas no operador de D'Alembert. No caso particular em que $F_{0,2}$ são funções constantes, obtém-se o modelo com quatro derivadas, também conhecido como gravitação de Stelle, o qual é renormalizável [6]. Em vez disso, se $F_{0,2}(\square)$ são funções polinomiais, o modelo pode ser superrenormalizável [7]. Além disso, é válido mencionar que, mesmo no cenário da gravitação semiclássica, a consistência do procedimento de renormalização de campos de matéria quânticos no espaço-tempo curvo requer a inclusão de termos quadráticos na curvatura na ação clássica [8].

Entretanto, modelos locais com derivadas superiores tipicamente exibem polos massivos do tipo fantasma no propagador [6, 7], o que leva, no nível quântico, à violação da unitariedade e pode estar associado às instabilidades de Ostrogradsky na teoria clássica.

1.1 GRAVITAÇÃO NÃO-LOCAL

Nas últimas décadas, houve várias tentativas de se conciliar renormalizabilidade e unitariedade [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15]. Uma dessas abordagens consiste na construção de ações não-locais, isto é, não-polinomiais nas derivadas dos campos, as quais permitem melhorar o comportamento do propagador no regime ultravioleta sem, contudo, introduzir modos patológicos, como os fantasmas, no espectro físico. Isso posto, torna-se possível a formulação de modelos de gravitação sem fantasmas no nível de árvore e que podem ser (super)renormalizáveis [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22]. A desvantagem, todavia, diz respeito à presença de operadores diferenciais não-polinomiais na ação, o que torna o estudo das soluções clássicas dificultoso.

No que se segue, considerar-se-á a seguinte ação não-local

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ (R - 2\Lambda) + \frac{1}{2} C_{\mu\nu\alpha\beta} F_2(\square) C^{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{1}{6} R F_0(\square) R \right\} + O(R^3), \quad (1.1)$$

em que G é a constante de Newton, Λ é a constante cosmológica e $O(R^3)$ denota os termos pelo menos cúbicos na curvatura. Ademais,

$$F_s(\square) = \frac{f_s(\square) - 1}{\square}, \quad f_s(\square) = e^{H_s(\square)}, \quad s \in \{0, 2\} \quad (1.2)$$

são fatores de forma não-locais, isto é, funções não-polinomiais do operador de D'Alembert e $H_s(z)$ é uma função inteira. Uma vez que $H_s(z)$ é inteira, as funções $e^{\pm H_s(z)}$ também são inteiras e, portanto, não possuem polos no plano complexo finito¹. Além disso, uma vez que tais funções são recíprocas, isto é, $e^{H_s(z)} e^{-H_s(z)} = 1$, conclui-se que elas também não possuem zeros no plano complexo finito. Os operadores exponenciais presentes na ação gravitacional são introduzidos de modo que o comportamento ultravioleta da parte independente de calibre do propagador ao nível de árvore, isto é,

$$G_{\mu\nu,\alpha\beta}(k) = \frac{1}{k^2} \left[\frac{P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(2)}}{f_2(-k^2)} - \frac{1}{2} \frac{P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(0-s)}}{f_0(-k^2)} \right], \quad (1.3)$$

seja modificado sem a introdução de fantasmas. Isso decorre do fato de que $f_s(-k^2) = e^{H_s(-k^2)}$ não possui zeros no plano complexo a distâncias finitas da origem. Na equação acima, $P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(2,0-s)}$ são os projetores de Barnes–Rivers [23, 24].

O problema das singularidades na versão linearizada da classe de modelos descritos pela ação (1.1) tem sido amplamente estudado nos últimos 15 anos.² Com efeito, mostrou-se que, no caso de modelos não-locais caracterizados pelos fatores de forma exponenciais

$$f_s(\square) = e^{-\square/\mu_s^2}, \quad (1.4)$$

em que $\mu_{0,2}$ são parâmetros massivos que definem a escala dos efeitos de não-localidade $l_s = 1/\mu_s$, o seu limite Newtoniano da solução linearizada é regular [20, 21, 26, 27]. Aliás, todos os invariantes de curvatura linearizados que são polinomiais no tensor de Riemann, em suas derivadas e em suas contrações são finitos. Isso é um resultado da observação de que $f_s(-k^2) = \exp(k^2/\mu_s^2)$ cresce mais rapidamente que qualquer polinômio para valores suficientemente grandes de k^2 [28]. Esta observação constitui um exemplo particular de um resultado mais geral acerca da regularidade das soluções no limite Newtoniano em modelos com derivadas superiores e em modelos não-locais (veja, por exemplo, [29] para uma revisão). Além do mais, no caso do fator de forma (1.4), o modelo admite soluções

¹ Isso não é verdade no plano complexo estendido, uma vez que a equação $e^z = 0$ possui a solução exótica $z = -\infty + i0$.

² Não obstante, carecem resultados para o caso não linear — veja, por exemplo, [25] e suas referências.

cosmológicas não-singulares com ricochete [19], o que, em princípio, fornece também uma possível resolução da singularidade do Big Bang.

Nesta dissertação, o foco recai sobre uma família mais geral de modelos não-locais caracterizados pelos fatores de forma

$$f_s(\square) = e^{(-\square/\mu_s^2)^{N_s}}, \quad (1.5)$$

os quais podem ser considerados uma generalização de (1.4) e do fator de forma de Krasnikov ($N_s = 2$) [16]. Modelos desse tipo foram estudados mais frequentemente no caso particular em que $N_0 = N_2 = N$ e $\mu_0 = \mu_2 = \mu$. Tais modelos são às vezes chamados GF_N (do inglês *ghost-free theory of type N*) [30]. As soluções no limite Newtoniano dos modelos GF_N foram analisadas em [31], onde uma expressão para o potencial Newtoniano foi obtida na forma de série de potência para $N \in \mathbb{Z}$, e a solução numérica revelou um comportamento oscilatório do potencial para $N > 1$ (veja também [32, 33, 34]). Uma aproximação numérica para o potencial em grandes valores de N foi obtida em [34] e em [30] mostrou-se que o potencial e a métrica no limite Newtoniano são regulares em $r = 0$ (veja também [31, 35]). Todavia, ainda é difícil analisar detalhadamente as consequências físicas do valor de N (ou, de forma mais geral de N_0 e N_2) nas soluções.

Neste trabalho, revisita-se o limite Newtoniano em modelos com o fator de forma (1.5), com o objetivo de apresentar representações alternativas para as soluções e quantidades relacionadas, que podem ser úteis para a compreensão de seus aspectos físicos, bem como obter uma nova aproximação para o caso de grandes valores de N_s . Isso pode ser feito com base em resultados recentes sobre a descrição do limite Newtoniano da gravitação não-local em termos de fontes efetivas [28, 29, 35] e nos desenvolvimentos de [36] acerca do *heat kernel* de operadores diferenciais de ordem superior. Além disso, também se considera a extensão de (1.5) para valores não necessariamente inteiros de N_s . As motivações para isso são três: primeiro, isso corresponde a casos da gravitação fractal, que têm atraído certa atenção nos últimos anos (veja, por exemplo, [37, 38]). Segundo, muitos dos resultados aqui obtidos usando o formalismo de fonte efetiva podem ser aplicados diretamente a cenários de teorias com comprimento mínimo, como na geometria não-comutativa, em que valores não inteiros de N_s são frequentemente considerados. E, por fim, do ponto de vista acadêmico, trata-se de um exercício matemático válido.

Por último, mas não menos importante, analisa-se em total generalidade o efeito das correções quânticas logarítmicas a um laço nas soluções do limite Newtoniano nesses modelos, revelando as principais diferenças entre as soluções clássicas e aquelas com correções a um laço.

ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

No capítulo 2, considera-se o limite Newtoniano e obtém-se várias representações para a fonte efetiva, para a função massa e para o potencial Newtoniano. Em particular, demonstra-se que a fonte efetiva é positiva se, e somente se, $0 < N_s \leq 1$ e que a função massa é positiva para todo $N_s > 0$. No capítulo 3, considera-se o limite $N_s \rightarrow \infty$ das soluções, que fornece uma aproximação analítica simples para o potencial para grandes valores de N_s . No capítulo 4, comenta-se sobre a regularidade dos invariantes de curvatura. No capítulo 5, obtém-se expressões analíticas para as correções quânticas para a fonte, para a função massa e para os potenciais Newtonianos. Por fim, o capítulo 6 contém os resultados e as conclusões deste trabalho.

2 O LIMITE NEWTONIANO

Na primeira seção deste capítulo, obtém-se as equações de movimento linearizadas no limite Newtoniano. Em seguida, introduz-se brevemente o formalismo das fontes efetivas para a sua subsequente aplicação ao modelo não-local de interesse deste trabalho. A fonte efetiva, a função massa e o potencial newtoniano obtidos têm suas propriedades discutidas e alguns teoremas gerais são demonstrados.

2.1 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO LINEARIZADAS

No limite Newtoniano, supõe-se o regime de campo fraco e são consideradas flutuações lineares da métrica em torno do espaço-tempo de Minkowski,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (2.1)$$

A matéria é, por hipótese, não-relativística e é descrita pelo tensor de energia-momento

$$T_{\mu\nu} = \delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 \rho, \quad (2.2)$$

em que ρ é a densidade de massa. As equações de movimento são dadas por

$$\varepsilon^{\mu\nu} \equiv \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = \left. \frac{\delta S}{\delta h_{\mu\nu}} \right|_{h=0} + \left. \frac{\delta^2 S}{\delta h_{\mu\nu} \delta h_{\rho\sigma}} \right|_{h=0} h_{\rho\sigma} + O(h^2). \quad (2.3)$$

No limite Newtoniano, a constante cosmológica Λ pode ser desprezada. Nessas condições, a contribuição do primeiro termo do lado direito de (2.3) também pode ser negligenciada. Portanto, para obter as equações de movimento linearizadas é suficiente considerar apenas os termos de segunda ordem na perturbação $h_{\mu\nu}$ presentes na ação, tendo em vista que os termos $O(R^3)$ não contribuem no regime linear. A parte bilinear da ação (1.1) exibe a forma

$$S^{(2)} = \frac{1}{32\pi G} \int d^4x \left\{ h_{\mu\nu} f_2(\square) \square h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \left[\frac{f_2(\square) + 2f_0(\square)}{3} \right] \square h - h^{\mu\nu} f_2(\square) \partial_{\mu} \partial_{\lambda} h_{\nu}^{\lambda} \right. \\ \left. + h^{\mu\nu} \left[\frac{f_2(\square) + 2f_0(\square)}{3} \right] \partial_{\mu} \partial_{\nu} h + h^{\mu\nu} \left[\frac{f_2(\square) - f_0(\square)}{3} \right] \frac{\partial_{\mu} \partial_{\nu} \partial_{\alpha} \partial_{\beta}}{\square} h^{\alpha\beta} \right\}. \quad (2.4)$$

A interação com a matéria é introduzida pela ação

$$S_m = \frac{1}{2} \int d^4x T^{\mu\nu} h_{\mu\nu}. \quad (2.5)$$

Então, o princípio da mínima ação fornece

$$\varepsilon^{\mu\nu} = f_2(\square) \left(\square h^{\mu\nu} - \partial^{\mu} \partial^{\lambda} h_{\lambda}^{\nu} - \partial^{\nu} \partial^{\lambda} h_{\lambda}^{\mu} \right) + \left[\frac{f_2(\square) + 2f_0(\square)}{3} \right] \left[\eta^{\mu\nu} \left(\partial^{\alpha} \partial^{\beta} h_{\alpha\beta} - \square h \right) \right. \\ \left. + \partial^{\mu} \partial^{\nu} h \right] + 2 \left[\frac{f_2(\square) - f_0(\square)}{3} \right] \frac{\partial^{\mu} \partial^{\nu} \partial^{\alpha} \partial^{\beta}}{\square} h_{\alpha\beta} = -16\pi G T^{\mu\nu}. \quad (2.6)$$

Uma vez que o princípio de superposição é válido no limite Newtoniano, é suficiente considerar o campo gerado por uma massa puntiforme localizada em $r = 0$,

$$\rho = M\delta(\vec{r}), \quad (2.7)$$

a partir do qual soluções mais complicadas podem ser construídas (veja, por exemplo, [39, 40, 41, 42], para alguns exemplos). A métrica estática e esfericamente simétrica no regime de campo fraco pode ser escrita como

$$ds^2 = -[1 + 2\varphi(r)]dt^2 + [1 - 2\psi(r)](dr^2 + r^2d\Omega^2), \quad |\varphi|, |\psi| \ll 1, \quad (2.8)$$

em que $d\Omega^2$ é a métrica da esfera unitária S^2 e $\varphi(r)$, $\psi(r)$ são os potenciais Newtonianos.

No caso de uma fonte puntiforme estática, os potenciais Newtonianos φ e ψ podem ser determinados a partir da componente ε^{00} e do traço $\varepsilon^\mu{}_\mu$, uma vez que a métrica (2.8) está escrita em forma isotrópica. Substituindo (2.8) nas equações de movimento (2.6) e calculando ε^{00} e $\varepsilon^\mu{}_\mu$, segue-se que os potenciais satisfazem

$$f_2(\Delta) \Delta(\varphi + \psi) + f_0(\Delta) \Delta(2\psi - \varphi) = 12\pi G\rho, \quad (2.9a)$$

$$f_0(\Delta) \Delta(2\psi - \varphi) = 4\pi G\rho. \quad (2.9b)$$

O sistema de equações diferenciais acima pode ser desacoplado por meio da introdução dos potenciais de spin- s [41]

$$\chi_2 = \frac{\varphi + \psi}{2} \quad \text{e} \quad \chi_0 = 2\psi - \varphi, \quad (2.10)$$

que são definidos de tal forma que o sistema (2.9) se torna

$$f_s(\Delta) \Delta \chi_s = 4\pi G\rho, \quad s \in \{0, 2\}. \quad (2.11)$$

Em outras palavras, os potenciais de spin- s separam as contribuições para a solução advindas dos setores de spin-0 e de spin-2 do propagador (1.3).

Na literatura, os potenciais Newtonianos são, em geral, calculados no caso particular em que $f_2(z) = f_0(z) \equiv f(z)$ (veja, por exemplo, [20, 21, 30, 31, 33]), o que possui a vantagem de reduzir o sistema de equações diferenciais acopladas (2.9) às equações de Poisson generalizadas $f(\Delta) \Delta \varphi = f(\Delta) \Delta \psi = 4\pi\rho$. Entretanto, com a utilização dos potenciais de spin- s , também é possível obter as equações de Poisson generalizadas sem impor restrições adicionais na teoria em consideração. Uma vez que as soluções para χ_s sejam obtidas, os potenciais originais φ e ψ podem ser recuperados por meio da transformação

$$\varphi = \frac{4}{3}\chi_2 - \frac{1}{3}\chi_0, \quad \psi = \frac{2}{3}\chi_2 + \frac{1}{3}\chi_0. \quad (2.12)$$

Isso posto, os potenciais de spin- s podem ser empregados sem perda de generalidade. Por esse motivo, no que se segue, com abuso de linguagem, chamar-se-á $\chi_s(r)$ simplesmente de potencial Newtoniano.

2.2 O FORMALISMO DAS FONTES EFETIVAS

A Eq. (2.11) pode ser reescrita de forma equivalente invertendo-se o operador $f_s(\Delta)$

$$\Delta \chi_s = 4\pi G \rho_s, \quad (2.13)$$

em que ρ_s é uma fonte delta efetiva espalhada, definida por $\rho = f_s(\Delta)\rho_s$. As condições que o fator de forma $f_s(z)$ deve satisfazer para a existência da fonte efetiva ρ_s são discutidas em detalhes em [29]. Tais condições são satisfeitas por (1.5). Utilizando a representação integral de Fourier da função delta, a fonte delta efetiva pode ser expressa como

$$\rho_s = M \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{f_s(-k^2)}, \quad (2.14)$$

em que $k = |\vec{k}|$. Integrando sobre as coordenadas angulares, obtém-se

$$\rho_s(r) = \frac{M}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k \operatorname{sen}(kr)}{r f_s(-k^2)}. \quad (2.15)$$

Segue da Lei de Gauss aplicada à Eq. (2.13) que a contribuição do setor de spin- s para o campo gravitacional é dada por

$$g_s(r) = -\frac{G M_s(r)}{r^2}, \quad (2.16)$$

em que

$$M_s(r) = 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho_s(r') \quad (2.17)$$

é chamada de função massa efetiva. A partir de (2.16), pode-se escrever a solução da Eq. (2.13) como

$$\chi_s(r) = -\int_\infty^r dr' g_s(r'). \quad (2.18)$$

Nas próximas seções, as quantidades definidas nas Eqs. (2.16), (2.17) e (2.18) serão estudadas com maiores detalhes para os modelos não-locais caracterizados pelo fator de forma (1.5).

2.2.1 Fonte delta efetiva

Para o fator de forma (1.5) a fonte delta efetiva (2.15) pode ser escrita como

$$\rho_s(r) = \frac{M\mu_s^3}{2\pi^2} I_{N_s}(\mu_s r), \quad (2.19)$$

em que

$$I_N(r) = \int_0^\infty dk e^{-k^{2N}} \frac{k \operatorname{sen}(kr)}{r} \quad (2.20)$$

é a integral básica a ser calculada.

Existem dois casos para os quais soluções fechadas de (2.19) são conhecidas: para $N_s = 1$ a fonte efetiva exibe um perfil Gaussiano,

$$\rho_s(r) = \frac{M\mu_s^3}{8\pi^{3/2}} e^{-\frac{\mu_s^2 r^2}{4}}, \quad (2.21)$$

ao passo que para $N_s = 1/2$, a fonte efetiva possui a forma

$$\rho_s(r) = \frac{M\mu_s^3}{\pi^2} \frac{1}{(1 + \mu_s^2 r^2)^2}. \quad (2.22)$$

Os casos acima são frequentemente utilizados para modelar efeitos de não-comutatividade do espaço-tempo (veja, por exemplo, [43, 44, 45, 46]), por meio da correspondência $\mu_s \rightarrow 1/\sqrt{\theta}$ entre o parâmetro de não-localidade e o parâmetro de não-comutatividade θ . Com efeito, o escopo das considerações aqui apresentadas se estende além da gravitação não-local, e pode ser usado para estudar novos efeitos de geometria não-comutativa.

Agora, considere (2.20) com N arbitrário. Empregando a mudança de variável de integração $k = t^{1/(2N)}$, obtém-se

$$I_N(r) = \frac{1}{2Nr} \int_0^\infty dt e^{-t} t^{\frac{1}{N}-1} \text{sen}(t^{\frac{1}{2N}} r). \quad (2.23)$$

Se $N > 1/2$ a integral admite uma representação em série de potências. Com efeito, utilizando a série de Taylor da função seno, segue-se que

$$I_N(r) = \frac{1}{2N} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} r^{2\ell} \int_0^\infty dt e^{-t} t^{\frac{2\ell+3}{2N}-1}, \quad (2.24)$$

uma vez que a integração e a série comutam para $N > 1/2$. A integral acima pode ser calculada por meio da função Gama, $\Gamma(z) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{z-1}$. Consequentemente,

$$I_N(r) = \frac{1}{2N} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} \Gamma\left(\frac{2\ell+3}{2N}\right) r^{2\ell}. \quad (2.25)$$

A série (2.25) pode ser reescrita em termos de diferentes funções especiais. Por exemplo, mostrou-se que para $N_s \in \{2, 3\}$ a fonte efetiva é equivalente a uma soma finita de funções hipergeométricas generalizadas [33]. Mais geralmente, quando $N_s \in \mathbb{N}$, a fonte efetiva pode ser expressa em termos de uma única função G de Meijer. Os detalhes dessas representações complicadas podem ser encontrados nos Apêndices e , respectivamente. Neste capítulo, não obstante, serão obtidas representações mais compactas e mais úteis. Com isso em mente, é conveniente empregar a função exponencial generalizada (GEF, do inglês *generalized exponential function*)

$$\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(z) = \frac{1}{\nu} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\ell+\alpha}{\nu}\right)}{\Gamma(\ell+\alpha)} \frac{z^\ell}{\ell!}, \quad (2.26)$$

como definida em [36]. Note que $\mathcal{E}_{1,\alpha}(z) = \exp(z)$. Para $\nu > 1/2$, a série de potências (2.26) é absolutamente convergente para todo $z \in \mathbb{C}$, ao passo que se $\nu < \frac{1}{2}$, ela diverge para todo

$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ [36]. Ademais, se $\nu = \frac{1}{2}$, a série (2.26) converge para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < \frac{1}{4}$, e pode ser somada analiticamente [36]:

$$\mathcal{E}_{\frac{1}{2},\alpha}(z) = \frac{4^\alpha}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2} + m\right) \frac{(4z)^m}{m!} = \frac{4^\alpha \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} (1 - 4z)^{-\alpha - \frac{1}{2}}. \quad (2.27)$$

Comparando (2.26) com (2.25), não é difícil ver que

$$I_N(r) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \mathcal{E}_{N,\frac{3}{2}}\left(-\frac{r^2}{4}\right). \quad (2.28)$$

Essa relação também é válida para o valor crítico $N = 1/2$, o que pode ser explicitamente verificado por meio da comparação entre as Eqs. (2.19), (2.22) e (2.27) (com $\alpha = 3/2$ e $z = -r^2/4$). Em particular, $\mathcal{E}_{\frac{1}{2},\frac{3}{2}}(z)$ está bem definida para $z < 0$, que é o domínio de interesse. Para fins de completude, no Apêndice podem ser encontrados os detalhes sobre a convergência de (2.25).

De forma geral, a solução (2.28) em termos da GEF é válida mesmo para $0 < N < 1/2$; a principal diferença é que, nesse caso, a GEF é não-analítica, sendo definida por meio da representação integral [36]

$$\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(z) = \frac{1}{\nu} \int_0^{\infty} d\mu \mu^{\alpha/\nu-1} e^{-\mu} \mathcal{C}_{\alpha-1}(z\mu^{1/\nu}), \quad (2.29)$$

em que $\mathcal{C}_n(z)$ é a função de Bessel–Clifford. Com efeito, para $\alpha = 3/2$ e $z = -r^2/4$, e utilizando as identidades

$$\mathcal{C}_n(z) = z^{-\frac{n}{2}} \mathcal{I}_n(2\sqrt{z}), \quad \mathcal{I}_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sinh z, \quad (2.30)$$

em que $\mathcal{I}_n(z)$ é a função de Bessel modificada de primeira espécie, obtém-se

$$\mathcal{E}_{N,\frac{3}{2}}\left(-\frac{r^2}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}Nr} \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{\frac{1}{N}-1} \operatorname{sen}(t^{\frac{1}{N}}r). \quad (2.31)$$

Logo, a comparação da equação acima com (2.23) mostra que a Eq. (2.28) é válida mesmo para $0 < N < 1/2$.

Portanto, a partir de (2.19) decorre que

$$\rho_s(r) = \frac{M\mu_s^3}{8\pi^{3/2}} \mathcal{E}_{N_s,\frac{3}{2}}\left(-\frac{\mu_s^2 r^2}{4}\right). \quad (2.32)$$

Isto é, para todo $N_s > 0$ a fonte efetiva é dada por uma “função Gaussiana generalizada”, que fornece uma extensão da fonte para valores de N_s não necessariamente inteiros. Em princípio, modelos com $N < 0$ também pode ser estudados no formalismo das fontes efetivas partindo da Eq. (2.20). Entretanto, neste caso o fator de forma (1.5) é uma constante no ultravioleta e se anula no infravermelho, o que corresponde a uma modificação

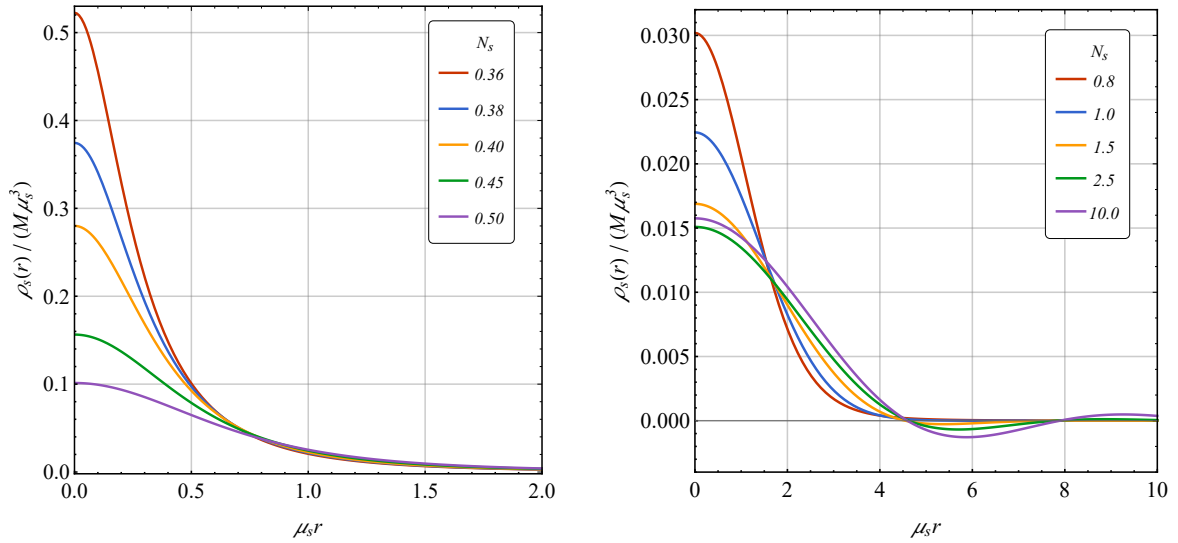


Figura 1 – Gráfico da fonte $\rho_s(r)/(M\mu_s^3)$ em função de $\mu_s r$ para diferentes valores de N_s . As oscilações aparecem somente quando $N_s > 1$. Os valores de $\rho_s(0)$ crescem rapidamente à medida que $N_s \rightarrow 0$.

infravermelha da relatividade geral ao invés de um aprimoramento do comportamento no regime ultravioleta. Nesse cenário, a fonte efetiva, função massa, e potenciais possivelmente apresentam um comportamento muito diferente em relação aos modelos com $N > 0$. O caso $N < 0$ não será discutido aqui, com exceção de alguns comentários no capítulo 4.

Para $N_s \geq 1/2$ a fonte efetiva admite a representação em série de potências

$$\rho_s(r) = \frac{M\mu_s^3}{4\pi^2 N_s} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} \Gamma\left(\frac{2\ell+3}{2N_s}\right) (\mu_s r)^{2\ell}. \quad (2.33)$$

Além disso, vale ressaltar que, para $\nu > 1/2$ a GEF constitui um caso particular da função Ψ de Fox–Wright [36]

$$\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(z) = \frac{1}{\nu} \Psi_1 \left[\left(\frac{\alpha}{\nu}, \frac{1}{\nu} \right); (\alpha, 1); z \right], \quad (2.34)$$

a qual, por sua vez, pode ser escrita em termos da função H de Fox [47],

$$\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(z) = \frac{1}{\nu} H_{1,2}^{1,1} \left[\begin{matrix} \left(1 - \frac{\alpha}{\nu}, \frac{1}{\nu} \right) \\ (0, 1), (1 - \alpha, 1) \end{matrix} \middle| -z \right]. \quad (2.35)$$

Portanto, para $N_s > 1/2$, a fonte efetiva também pode ser expressa como

$$\rho_s(r) = \frac{M\mu_s^3}{8\pi^{3/2} N_s} H_{1,2}^{1,1} \left[\begin{matrix} \left(\frac{2N_s-3}{2N_s}, \frac{1}{N_s} \right) \\ (0, 1), \left(-\frac{1}{2}, 1 \right) \end{matrix} \middle| \frac{\mu_s^2 r^2}{4} \right]. \quad (2.36)$$

Na Fig. 1, apresenta-se o comportamento de $\rho_s(r)$ para alguns valores de N_s , a fim de ilustrar algumas características importantes das fontes delta efetivas. Note que, para todo $N_s > 0$,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \rho_s(r) = \max[\rho_s(r)] = \frac{M\mu_s^3}{4\pi^2 N_s} \Gamma\left(\frac{3}{2N_s}\right) \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \rho_s(r) = 0. \quad (2.37)$$

Demonstrou-se em [35] (veja também [29]), que a fonte efetiva atinge seu valor máximo em $r = 0$ sempre que o fator de forma satisfaz $f_s(-k^2) \sim k^4$ (ou cresce ainda mais rapidamente) para k^2 suficientemente grande; o valor do máximo (primeira igualdade) segue da (2.32). Por outro lado, a segunda propriedade decorre do fato de que o fator de forma é analítico e tal que $f_s(0) = 1$. Note ainda que $\max[\rho_s(r)] \rightarrow \infty$ quando $N_s \rightarrow 0$, uma vez que neste caso $f_s \rightarrow e$ e a fonte tende a uma função delta de Dirac.¹

Em segundo lugar, para $N_s > 1$ a fonte delta efetiva exhibe oscilações espaciais e pode assumir valores negativos. Tais oscilações são similares às presentes nas teorias de Lee–Wick para a gravitação [51, 52, 53] e implicam em oscilações correspondentes no potencial gravitacional, as quais têm aplicações interessantes, como discutido em [33, 34, 41, 51, 54, 55, 56, 57]. Matematicamente, a ausência de oscilações da fonte delta efetiva para $0 < N_s \leq 1$ pode ser explicada pelo fato que ρ_s é dada em termos da transformada de Fourier γ_q da função $\exp(-|z|^{2q})$, que é positiva somente quando $0 < q \leq 1$ [58]. Assim, obtém-se o seguinte teorema.

Teorema 1. A fonte delta efetiva espalhada $\rho_s(r)$ é estritamente positiva para $0 < N_s \leq 1$.

Demonstração. Para $N_s = 1$, a forma explícita da fonte efetiva, a saber a Eq. (2.21), pode ser obtida, a qual é claramente positiva. Para $0 < N_s < 1$ e $z \in [0, \infty)$, note que a função $\exp(-z^{2N_s})$ é positiva e completamente monótona, isto é, é infinitamente derivável em $(0, \infty)$, com primeira derivada negativa e sinais das derivadas subsequentes alternantes. Nessas condições, o teorema de Bernstein garante que para todo $z \in [0, \infty)$, tal função pode ser representada como uma transformada de Laplace de uma medida positiva \mathcal{M}_{N_s} , ou seja,

$$e^{-(k/\mu_s)^{2N_s}} = e^{-[(k/\mu_s)^2]^{N_s}} = \int_0^\infty dt \mathcal{M}_{N_s}(t) e^{-t(k/\mu_s)^2}. \quad (2.38)$$

Utilizando (2.38), a fonte efetiva pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \rho_s(r) &= \frac{M}{2\pi^2 r} \int_0^\infty dk k \operatorname{sen}(kr) e^{-(k/\mu_s)^{2N_s}} = \frac{M}{2\pi^2 r} \int_0^\infty dt \mathcal{M}_{N_s}(t) \int_0^\infty dk k \operatorname{sen}(kr) e^{-t(k/\mu_s)^2} \\ &= \frac{M\mu_s^3}{8\pi^{3/2}} \int_0^\infty dt \mathcal{M}_{N_s}(t) t^{-3/2} e^{-\frac{\mu_s^2 r^2}{4t}}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Portanto, uma vez que $\mathcal{M}_{N_s}(t)$ é uma medida positiva e o restante do integrando é estritamente positivo, segue que $\rho_s(r) > 0$ para todo $r > 0$. \square

A demonstração acima não se aplica quando $N_s > 1$ pois a função $\exp(-z^{2N_s})$ não é completamente monótona. Com efeito, no ponto $z = \left(1 - \frac{1}{2N_s}\right)^{1/(2N_s)}$ a segunda derivada muda de sinal.

¹ Este limite corresponde ao fator de forma $F_s(\square) = \frac{e-1}{\square}$, que fornece uma modificação da GR no regime IR, conforme considerado em [48, 49, 50].

2.2.2 Função massa

No caso particular em que $N_s = 1$ e $N_s = 1/2$, pode-se integrar (2.17) diretamente utilizando as expressões para as fontes (2.21) e (2.22), obtendo-se [29, 44, 45, 46],

$$M_s(r) = M \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\mu_s r}{2} \right) - \frac{\mu_s r}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\mu_s^2 r^2}{4}} \right] \quad (2.40)$$

para $N_s = 1$, em que

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt e^{-t^2} \quad (2.41)$$

é a função erro, e

$$M_s(r) = \frac{2M}{\pi} \left[\arctan(\mu_s r) - \frac{\mu_s r}{1 + \mu_s^2 r^2} \right], \quad (2.42)$$

para $N_s = 1/2$.

É possível obter uma expressão compacta para a função massa, válida para todo $N_s > 0$, utilizando a GEF (2.26). Para isso, basta inserir (2.32) na definição da função massa (2.17) e empregar o truque de Feynman para eliminar o fator r^2 presente no integrando de (2.17). Mais precisamente, utilizando a fórmula da derivada da GEF,

$$\frac{d}{dz} \mathcal{E}_{\nu, \alpha}(z) = \mathcal{E}_{\nu, \alpha+1}(z), \quad (2.43)$$

o integrando de (2.17) com (2.32) pode ser reescrito na forma

$$r^2 \rho_s(r) = -\frac{M \mu_s^3}{8\pi^{3/2}} \frac{\partial}{\partial \lambda_s} \left[\mathcal{E}_{N_s, 1/2}(-\lambda_s r^2) \right], \quad (2.44)$$

em que se definiu o parâmetro de Feynmann $\lambda_s = \mu_s^2/4$. Definindo então a “função erro generalizada”,

$$\mathcal{Erf}_{\nu, \alpha}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt \mathcal{E}_{\nu, \alpha}(-t^2), \quad (2.45)$$

segue que

$$\begin{aligned} M_s(r) &= -\frac{M \mu_s^3}{4} \frac{\partial}{\partial \lambda_s} \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda_s}} \mathcal{Erf}_{N_s, 1/2}(\sqrt{\lambda_s} r) \right]_{\lambda_s = \mu_s^2/4} \\ &= M \left[\mathcal{Erf}_{N_s, 1/2} \left(\frac{\mu_s r}{2} \right) - \frac{\mu_s r}{\sqrt{\pi}} \mathcal{E}_{N_s, 1/2} \left(-\frac{\mu_s^2 r^2}{4} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.46)$$

a qual generaliza (2.40) para $N_s > 0$.

Para $N_s \geq 1/2$ é possível obter uma representação em série de potências para a função massa por meio da integração termo a termo de (2.33). O resultado é

$$M_s(r) = \frac{M}{\pi N_s} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} \Gamma \left(\frac{2\ell+3}{2N_s} \right) \frac{(\mu_s r)^{2\ell+3}}{2\ell+3}. \quad (2.47)$$

Uma outra representação útil, válida para $1/2 < N_s < \infty$, é dada em termos da função H de Fox. Com efeito, as identidades [47]

$$\int_0^t dx x^{\rho-1} (t-x)^{\sigma-1} H_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (a_p, A_p) \\ (b_q, B_q) \end{matrix} \middle| bx^k \right] = t^{\rho+\sigma-1} \Gamma(\sigma) H_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left[\begin{matrix} (1-\rho, k), (a_p, A_p) \\ (b_q, B_q), (1-\rho-\sigma, k) \end{matrix} \middle| bt^k \right], \quad (2.48)$$

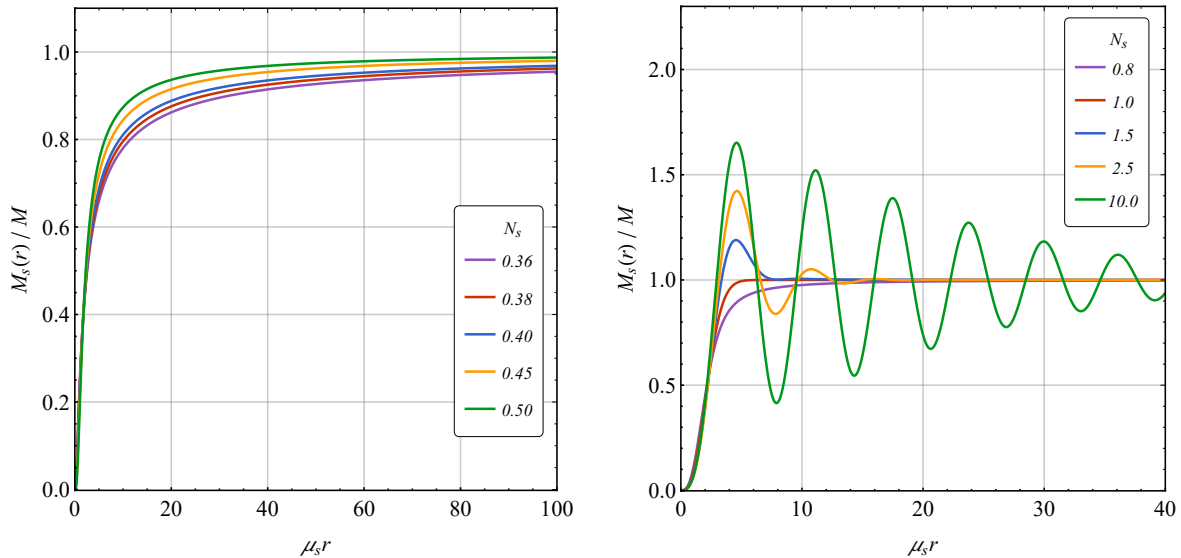


Figura 2 – Gráfico da função massa normalizada $M_s(r)/M$ em função de $\mu_s r$ para diferentes valores de N_s . As oscilações aparecem somente quando $N_s > 1$. Para todo N_s pode-se observar os comportamentos assintóticos: para $\mu_s r \ll 1$, $M_s(r) \sim r^3$, ao passo que para $\mu_s r \gg 1$, $M_s(r) \sim M$.

e

$$z^\sigma H_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (a_p, A_p) \\ (b_q, B_q) \end{matrix} \middle| z \right] = H_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (a_p + \sigma A_p, A_p) \\ (b_q + \sigma B_q, B_q) \end{matrix} \middle| z \right], \quad z \in \mathbb{C}, \quad (2.49)$$

combinadas com as Eqs. (2.17) e (2.36) fornecem

$$M_s(r) = \frac{4M}{\sqrt{\pi} N_s} H_{2,3}^{1,2} \left[\begin{matrix} (1, 2), \left(1, \frac{1}{N_s}\right) \\ \left(\frac{3}{2}, 1\right), (1, 1), (0, 2) \end{matrix} \middle| \frac{\mu_s^2 r^2}{4} \right]. \quad (2.50)$$

A Fig. 2 exibe os gráficos da função massa para valores selecionados de N_s . Os gráficos ilustram as seguintes propriedades gerais da função $M_s(r)$:

1. *Positividade.* Embora a fonte efetiva $\rho_s(r)$ possa assumir valores negativos, tem-se o seguinte resultado:

Teorema 2. A função massa efetiva $M_s(r)$ é positiva para todo $N_s > 0$.

A demonstração pode ser encontrada no Apêndice , e consiste em representar $M_s(r)$ como uma integral de uma função positiva.

Fisicamente, o Teorema 2 pode ser considerado uma consequência do fato de que o modelo não possui polos massivos com comportamento taquiônico no propagador, os quais poderiam gerar uma força gravitacional de spin- s resultante repulsiva. Com efeito, uma vez que $M_s(r) \geq 0$, sobre uma partícula teste de massa m atua a componente de spin- s da força gravitacional dada por $mg_s(r) = -mM_s(r)/r^2$ que é sempre atrativa. É claro que quando as contribuições dos setores de spin-0 e spin-2 são combinadas por

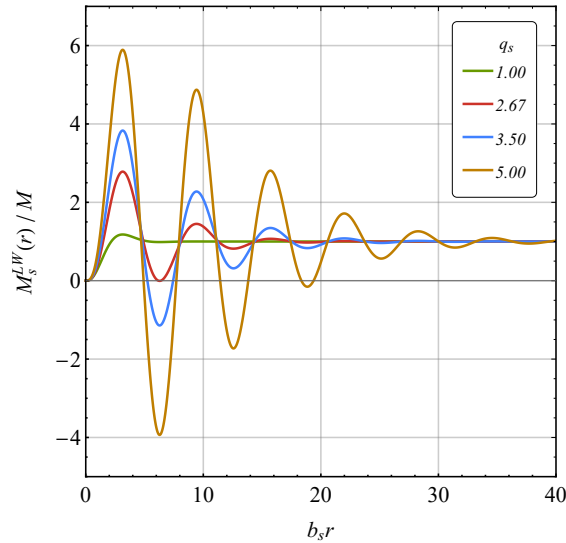


Figura 3 – Gráfico da função massa normalizada (2.51) para a gravitação de Lee–Wick, $M_s^{\text{LW}}(r)/M$, em função de $b_s r$ para diferentes valores de $q_s = b_s/a_s$. $M_s^{\text{LW}}(r)$ assume valores negativos para $q_s > 2,67$.

meio de (2.12), pode acontecer que existam regiões nas quais a força resultante $-\vec{\nabla}\varphi$ seja repulsiva, a depender dos valores específicos de $N_{0,2}$ e $\mu_{0,2}$, como ocorre em todos modelos com derivadas superiores. Entretanto, no caso dos modelos GF_N , é possível garantir que a força é sempre atrativa, uma vez que $\varphi = \chi_2 = \chi_0$ e a função massa efetiva combinada $M(r) = M_0(r) = M_2(r)$ é positiva. Tal conclusão não se sustenta, por exemplo, na gravitação de Lee–Wick, na qual a parte imaginária do polo massivo apresenta caráter taquiônico. Caso essa contribuição seja dominante, a função massa pode assumir valores negativos. Por exemplo, a função massa efetiva no modelo local de Lee–Wick com seis derivadas e com massa $\mu_s = a_s + ib_s$ é dada por [53]

$$M_s^{\text{LW}}(r) = M - \frac{M}{2a_s b_s} e^{-a_s r} \left\{ b_s [2a_s + (a_s^2 + b_s^2)r] \cos(b_s r) + [a_s^2 - b_s^2 + a_s(a_s^2 + b_s^2)r] \text{sen}(b_s r) \right\}, \quad (2.51)$$

em que a_s e b_s são parâmetros que dependem do modelo. Existem regiões em que $M_s^{\text{LW}}(r) < 0$, se $q_s \equiv b_s/a_s > 2,67$ (veja Fig. 3), o que demonstra a preponderância da força repulsiva oriunda da parte taquiônica.

2. Comportamento assintótico. O comportamento assintótico da função massa efetiva é dado, para valores pequenos e grandes de r por

$$\lim_{r \rightarrow 0} M_s(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} M_s(r) = M. \quad (2.52)$$

A primeira propriedade segue do fato de que a massa total M encontra-se efetivamente espalhada, em vez de concentrada no ponto $r = 0$. Assim sendo, a massa efetiva no interior de uma esfera de raio nulo é necessariamente nula. Mais precisamente, pode-se mostrar que $\lim_{r \rightarrow 0} \rho_s(r) = \max[\rho_s(r)]$, o que, aplicado à definição (2.17), fornece

$$M_s(r) \underset{\mu_s r \ll 1}{\sim} \frac{4\pi}{3} \max[\rho_s(r)] r^3. \quad (2.53)$$

Já a segunda expressão em (2.52) se deve à supressão do fator de forma no infravermelho. Uma vez que $f_s(0) = 1$, a massa total M é recuperada no limite $r \rightarrow \infty$. De fato, para um fator de forma contínuo que satisfaz $f_s(0) \neq 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} M_s(r) &= M \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}'}}{f_s(-k^2)} \\ &= M \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{f_s(-k^2)} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}'} \\ &= M \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{f_s(-k^2)} \delta(\vec{k}) = \frac{M}{f_s(0)}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Fisicamente, isso expressa que, para $r \gg 1/\mu_s$, recupera-se o limite da relatividade geral linearizada.

3. Oscilações e máximos locais. Para $N_s > 1$, a função massa apresenta regiões em que $M_s(r) > M$. Esse comportamento decorre do fato que existem regiões em que $\rho_s(r) < 0$. Combinado com o resultado da Eq. (2.52), conclui-se que a função massa possui caráter oscilatório e exibe máximos locais. Os máximos locais de $M_s(r)$ constituem uma sequência positiva e monotonicamente decrescente, ao passo que a sequência dos mínimos locais é monótona crescente. Ademais, a abscissa do primeiro pico cresce com N_s . O comportamento assintótico de $M_s(r)$ para valores de $\mu_s r$ grandes é fornecido pela Eq. (E.6) do Apêndice , a qual mostra explicitamente com a função massa oscila nesse regime.

Uma questão que se coloca é em qual escala as oscilações são suprimidas e a função massa se torna suficientemente próxima de M . Esse problema pode ser formulado matematicamente da seguinte maneira: dado $\delta > 0$ arbitrariamente pequeno, encontre o valor r_* tal que

$$r > r_* \quad \implies \quad \left| \frac{M_s(r)}{M} - 1 \right| < \delta. \quad (2.55)$$

A Figura 2 sugere que, dado um $\delta > 0$, r_* aumenta linearmente com N_s , o que motiva a seguinte suposição

$$r_* = Y(\delta) \frac{N_s}{\mu_s}, \quad (2.56)$$

em que δ pode ser considerado como a máxima diferença em relação ao valor assintótico M e $Y(\delta)$ é uma função que reproduz a dependência em δ . Com efeito, ao fixar Y e calcular numericamente $M_s(r_*)$ usando a representação integral (D.2) para vários valores de N_s no intervalo $[1, 1000]$, verifica-se que (2.56) é de fato uma boa aproximação para $N_s \geq 2$ (com algumas pequenas discrepâncias no intervalo $1 < N_s < 2$). Além disso, no Apêndice é fornecida uma explicação alternativa da relação linear (2.56), obtendo uma função que descreve o amortecimento das oscilações da função massa. Na Tabela 1 são listados alguns valores do par (δ, Y) . Esses valores foram obtidos usando a Eq. (E.12) e verificados por integração numérica de (D.2). Por exemplo, para $Y = 6$ segue-se que, se $r > 6N_s/\mu_s$, a

$Y(\delta)$	6	7	8	9	10
δ	$2,48 \times 10^{-2}$	$1,22 \times 10^{-2}$	$5,96 \times 10^{-3}$	$2,88 \times 10^{-3}$	$1,38 \times 10^{-3}$

Tabela 1 – Alguns valores do fator multiplicativo na Eq. (2.56) e os correspondentes desvios δ da função massa efetiva com relação ao valor assintótico M . Isto é, se $r > Y(\delta)N_s/\mu_s$, então $|M_s(r)/M - 1| < \delta$.

máxima diferença relativa de $M_s(r)$ em relação a M é 2,48%, enquanto para $Y = 10$, se $r > 10N_s/\mu_s$, ela é 0,138%.

Do ponto de vista físico, r_* fornece a escala a partir da qual os efeitos não-locais sobre a força gravitacional se tornam desprezíveis (conforme definido por δ). De fato, uma vez que $M(r) \approx M$ para $r > r_*$, uma partícula teste de massa m a uma distância $r > r_*$ experimenta uma força gravitacional de magnitude (veja (2.16))

$$|mg_s(r > r_*)| \sim \frac{GmM}{r^2}. \quad (2.57)$$

O fato de que o alcance da interação não-local cresce com N_s e não é apenas $1/\mu_s$ é uma propriedade interessante dos modelos com fator de forma (1.5).

2.2.3 Potencial Newtoniano

A fonte delta efetiva para $N_s = 1$ é uma gaussiana (2.21), ao passo que para outros valores de N_s , $\rho_s(r)$ pode ser expressa em termos de “funções gaussianas generalizadas”. O potencial newtoniano para $N_s = 1$ é bem conhecido e foi obtido pela primeira vez por Tseytlin [26] no contexto da teoria de cordas (veja também [19, 20, 21], no contexto de gravitação não-local), e é em termos da função erro,

$$\chi_s(r) = -\frac{GM}{r} \operatorname{erf}\left(\frac{\mu_s r}{2}\right). \quad (2.58)$$

De modo semelhante ao caso da fonte efetiva, para N_s geral o potencial de spin- s é dado em termos de “funções erro generalizadas”.

Para mostrar isso, note que as Eqs. (2.43) e (2.46) conduzem à identidade

$$\frac{M_s(r)}{r^2} = \frac{d}{dr} \left[-\frac{M}{r} \mathcal{Erf}_{N_s, 1/2} \left(\frac{\mu_s r}{2} \right) \right]. \quad (2.59)$$

Portanto, o resultado da integral (2.18) é simplesmente

$$\chi_s(r) = -\frac{GM}{r} \mathcal{Erf}_{N_s, 1/2} \left(\frac{\mu_s r}{2} \right), \quad (2.60)$$

o que generaliza a solução para o potencial (2.58) para qualquer $N_s > 0$. Isso também implica que o potencial é par em r e finito em $r = 0$; de fato,

$$\chi_s(0) = -\frac{GM\mu_s}{\pi N_s} \Gamma\left(\frac{1}{2N_s}\right). \quad (2.61)$$

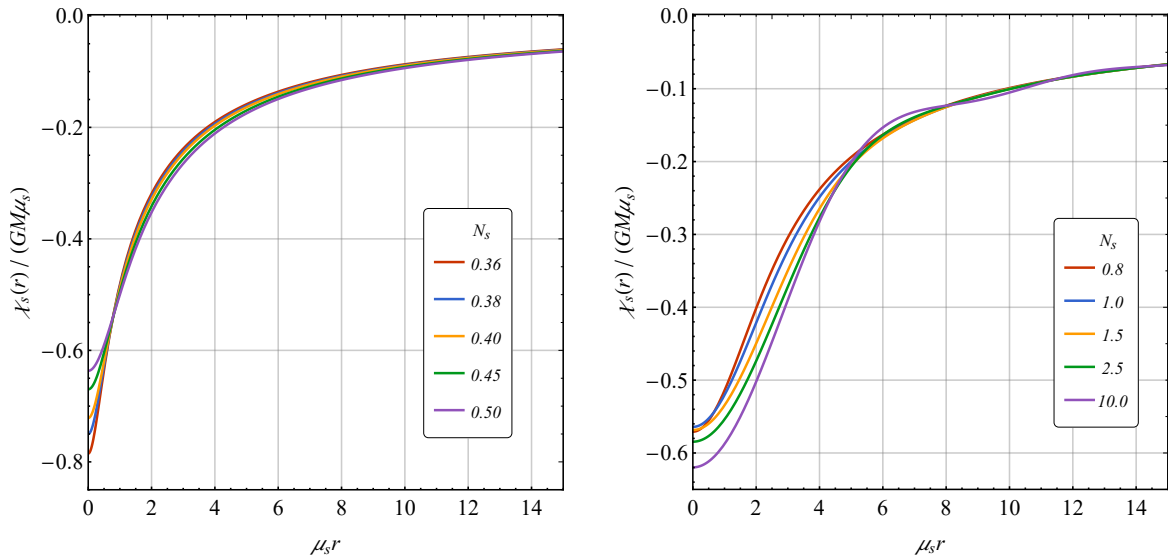


Figura 4 – Gráfico de $\chi_s(r)/(GM\mu_s)$ em função de $\mu_s r$ para diferentes valores de N_s . As oscilações estão presentes apenas para $N_s > 1$. Note que, para qualquer $N_s > 0$, tem-se $\chi'_s(0) = 0$.

Como esperado, o potencial diverge no limite $N_s \rightarrow 0$, caso em que o fator de forma f_s torna-se constante e seu efeito global é redefinir a constante de Newton G .

Além disso, usando a representação em série de potências da GEF (2.26) e a definição da função erro generalizada (2.45) para $N_s \geq 1/2$, obtém-se a solução em série de potências para o potencial:

$$\chi_s(r) = -\frac{GM\mu_s}{\pi N_s} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} \Gamma\left(\frac{2\ell+1}{2N_s}\right) (\mu_s r)^{2\ell}. \quad (2.62)$$

Essa expressão reproduz a solução encontrada em [31] para o potencial no caso particular em que $\varphi = \psi = \chi_2 = \chi_0$.

Na Fig. 4 apresentamos o gráfico de (2.60) para vários valores de N_s . As seguintes propriedades podem ser observadas: para $N_s > 1$ o potencial oscila, $\chi_s(r) \sim -1/r$ para grandes valores de r , e é regular em $r = 0$. Além disso, $\chi'_s(0) = 0$. Como será discutido no capítulo 4, esta última propriedade está intimamente relacionada à regularização dos invariantes de curvatura linearizados em $r = 0$.

Finalmente, alguns comentários gerais sobre o potencial:

1) A solução para o potencial em termos da função H de Fox, válida para $N_s > 1/2$,

$$\chi_s(r) = -\frac{2GM}{\sqrt{\pi r}} H_{2,3}^{1,2} \left[\begin{matrix} (1, 2), \left(1, \frac{1}{N_s}\right) \\ (1/2, 1), (1, 1), (0, 2) \end{matrix} \middle| \frac{\mu_s^2 r^2}{4} \right], \quad (2.63)$$

pode ser obtida diretamente usando as Eqs. (2.18), (2.48), (2.49) e (2.50). Além disso, para $N_s = 1/2$ o potencial pode ser escrito em forma fechada:

$$\chi_s(r) = -\frac{2GM}{\pi r} \arctan(\mu_s r). \quad (2.64)$$

2) A representação em série de potências (2.62) também é facilmente obtida sem o uso do formalismo das fontes efetivas, mas aplicando diretamente o método da transformada de Fourier. Especificamente, partindo da solução de (2.11) na forma

$$\chi_s(r) = -\frac{2GM}{\pi r} \int_0^\infty dk \frac{\text{sen}(kr)}{k f_s(-k^2)} \quad (2.65)$$

e então aplicando um procedimento semelhante ao utilizado no início da Sec. **2.2.1**.

3) O potencial $\chi_s(r)$ também pode ser obtido utilizando o método do *heat kernel* (núcleo de calor) [39, 40] (veja também [42]). De fato, a fonte efetiva $\rho_s(r)$ está intimamente relacionada ao *heat kernel* do operador $(-\Delta)^N$. Como mostrado em [36], esse *heat kernel* em um espaço-tempo plano D -dimensional é dado pela GEF,

$$\langle \vec{r} | e^{-s(-\Delta)^N} | \vec{r}' \rangle = K_{N,D}(|\vec{r} - \vec{r}'|, s) = \frac{1}{(4\pi s^{1/N})^{D/2}} \mathcal{E}_{N,D/2} \left(-\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}{4s^{1/N}} \right). \quad (2.66)$$

A comparação entre (2.66) e (2.32) revela que

$$\rho_s(r) = MK_{N_s,3} \left(r, 1/\mu_s^{2N_s} \right), \quad (2.67)$$

de modo que a representação do potencial em termos do *heat kernel* é dada por

$$\chi_s(r) = -\frac{GM}{N_s} \int_0^\infty \frac{ds'}{s'} \theta \left(s' - \frac{1}{\mu_s^{2N_s}} \right) K_{N_s,1}(r, s'), \quad (2.68)$$

em que $\theta(x)$ é a função de Heaviside. A equação acima é uma generalização da fórmula para $N_s = 1$ obtida em [39]. A mudança da variável de integração para $t = r^2/4s'^{1/N_s}$ em (2.68) resulta na função erro generalizada definida em (2.45), levando a (2.60). Uma vantagem das Eqs. (2.67) e (2.68) é que elas podem ser generalizadas imediatamente para o caso D -dimensional:

$$\rho_s(r) = MK_{N_s,D-1} \left(r, 1/\mu_s^{2N_s} \right), \quad (2.69)$$

$$\chi_s(r) = -\frac{GM}{N_s} \int_0^\infty \frac{ds'}{s'} \theta \left(s' - \frac{1}{\mu_s^{2N_s}} \right) K_{N_s,D-3}(r, s'), \quad (2.70)$$

reproduzindo os resultados de [39] quando $N_s = 1$.

3 O LIMITE $N_s \rightarrow \infty$

No capítulo anterior, foram obtidas diversas expressões para a fonte efetiva, para a função massa e para o potencial Newtoniano. Neste capítulo, estuda-se tais quantidades no limite $N_s \rightarrow \infty$. No caso do potencial Newtoniano, esse limite formal, porém útil, foi considerado numericamente em [34] (veja também [32]), resultando em uma aproximação analítica. Os resultados a seguir conduzem a uma melhor compreensão de tal limite.

3.1 FONTE EFETIVA PARA $N_s \rightarrow \infty$

Note que, no limite $N_s \rightarrow \infty$ o fator de forma (1.5) converge pontualmente para a função retangular [32]:

$$\lim_{N_s \rightarrow \infty} f_s(-k^2) = \lim_{N_s \rightarrow \infty} e^{-(k^2/\mu_s^2)^{N_s}} = \text{rect}(k^2/\mu_s^2), \quad (3.1)$$

que é definida por

$$\text{rect}\left(\frac{k^2}{\mu_s^2}\right) = \begin{cases} 1, & \text{se } \frac{k^2}{\mu_s^2} < 1, \\ 0, & \text{se } \frac{k^2}{\mu_s^2} > 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Uma vez que o limite (3.1) é descontínuo (em $k^2 = \mu_s^2$), a convergência não é uniforme. Sendo assim, a mera substituição de (3.1) nas representações por integral de Fourier, tais como (2.15) e (2.65), pode ser arriscada. Alternativamente, o limite $N_s \rightarrow \infty$ pode ser estudado a partir das representações em série de potências obtidas no capítulo anterior.

Utilizando a propriedade $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ da função gama, a fonte efetiva (2.33) pode ser reescrita como

$$\rho_s(r) = \frac{M\mu_s^3}{2\pi^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+3)(2\ell+1)!} \Gamma\left(1 + \frac{2\ell+3}{2N_s}\right) (\mu_s r)^{2\ell}, \quad (3.3)$$

que no limite $N_s \rightarrow \infty$ fornece

$$\rho_s^\infty(r) \equiv \lim_{N_s \rightarrow \infty} \rho_s(r) = \frac{M\mu_s^3}{2\pi^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \frac{1}{(2\ell+3)(2\ell+1)!} (\mu_s r)^{2\ell}. \quad (3.4)$$

A expressão acima pode ser reescrita como

$$\rho_s^\infty(r) = \frac{M}{2\pi^2 r^3} \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} (\mu_s r)^{2\ell+1} - (\mu_s r) \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} (\mu_s r)^{2\ell} \right], \quad (3.5)$$

utilizando a identidade

$$\frac{1}{(2\ell+3)(2\ell+1)!} = \frac{(2\ell+3)! - (2\ell+2)!}{(2\ell+3)!(2\ell+2)!} = \frac{1}{(2\ell+2)!} - \frac{1}{(2\ell+3)!}, \quad (3.6)$$

bem como uma redefinição dos índices da soma. As séries presentes na (3.5) correspondem, respectivamente, às funções seno e cosseno, de modo que

$$\rho_s^\infty(r) = \frac{M}{2\pi^2 r^3} [\text{sen}(\mu_s r) - \mu_s r \text{cos}(\mu_s r)]. \quad (3.7)$$

Essa solução em forma fechada também pode ser obtida diretamente a partir da representação da fonte (2.32) em termos da GEF, uma vez que [36]

$$\mathcal{E}_{\infty,\alpha}(z) \equiv \lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\nu,\alpha}(z) = \mathcal{C}_\alpha(z), \quad (3.8)$$

em que $\mathcal{C}_\alpha(z)$ é a função de Bessel–Clifford, a qual se relaciona com a função de Bessel de primeira espécie $\mathcal{J}_\alpha(z)$ por meio de

$$\mathcal{J}_\alpha(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\alpha \mathcal{C}_\alpha\left(-\frac{z^2}{4}\right), \quad \mathcal{J}_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\sin z - \frac{\cos z}{z}\right). \quad (3.9)$$

Portanto, dada a (3.8), pode-se dizer que as soluções previamente obtidas em termos da GEF permanecem válidas no limite $N_s \rightarrow \infty$.

3.2 FUNÇÃO MASSA PARA $N_s \rightarrow \infty$

No limite $N_s \rightarrow \infty$, a função massa efetiva pode ser obtida por meio da substituição de (3.7) em (2.17), o que fornece

$$M_s^\infty(r) = \frac{2M}{\pi} [\text{Si}(\mu_s r) - \sin(\mu_s r)], \quad (3.10)$$

em que

$$\text{Si}(z) = \int_0^z dt \frac{\sin t}{t} \quad (3.11)$$

é a função seno integral. A função (3.10) exibe uma propriedade interessante: a violação da relação $\lim_{r \rightarrow \infty} M_s(r) = M$, válida para valores finitos de N_s . Com efeito, uma vez que $\lim_{z \rightarrow \infty} \text{Si}(z) = \pi/2$, a imagem da função massa normalizada $M_s^\infty(r)/M$ oscila no intervalo $[1 - 2/\pi, 1 + 2/\pi]$ para valores suficientemente grandes de $\mu_s r$ (veja a Fig. 5a). Como discutido anteriormente, para valores finitos de N_s , dado $\delta > 0$ existe r_* – tanto maior quanto maior for N_s – tal que $r > r_*$ implica $|M_s(r)/M - 1| < \delta$. Portanto, $M_s(r) \approx M$ é inatingível no limite $N_s \rightarrow \infty$, uma vez que r_* diverge. Do ponto de vista matemático, esse comportamento pode ser compreendido pelo fato de que uma das hipóteses envolvidas na demonstração de (2.54) é violada, pois a função (3.1) é descontínua.

3.3 POTENCIAL NEWTONIANO PARA $N_s \rightarrow \infty$

Embora $M_s^\infty(r)$ não tenha um limite bem definido quando $r \rightarrow \infty$, tanto o campo gravitacional $g_s(r)$ na Eq. (2.16) (ver Fig. 5b) quanto o potencial $\chi_s(s)$ possuem o limite correto mesmo quando $N_s \rightarrow \infty$, aproximando-se do comportamento usual da gravitação Newtoniana nesse limite. Com efeito, ao substituir (3.10) em (2.18), segue que

$$\chi_s^\infty(r) = -\frac{2GM}{\pi r} \text{Si}(\mu_s r). \quad (3.12)$$

Portanto,

$$\chi_s^\infty(0) = -\frac{2GM\mu_s}{\pi}, \quad \chi_s^\infty(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{GM}{r}. \quad (3.13)$$

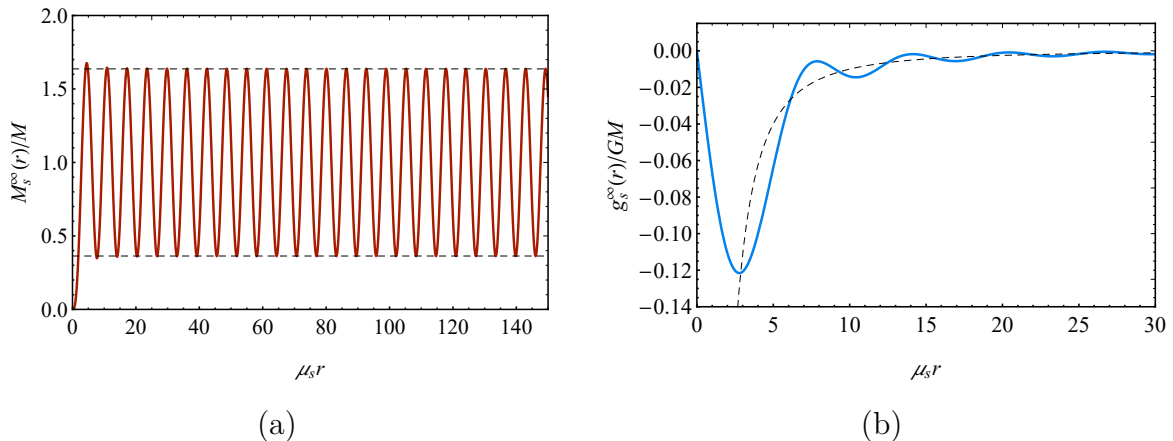


Figura 5 – **(a)** $M_s^\infty(r)/M$ em função de $\mu_s r$. As linhas horizontais tracejadas correspondem aos valores $(1 \pm 2/\pi) = (0,363; 1,637)$. **(b)** Gráfico do valor do campo gravitacional $g_s^\infty(r)/GM$ em função de $\mu_s r$. As linhas tracejadas correspondem ao campo gravitacional $-1/r^2$. Embora a função massa $M_s^\infty(r)$ não possua um limite bem definido quando $r \gg 1/\mu_s$, o campo gravitacional $g_s^\infty(r) \rightarrow 0$ devido ao fator de amortecimento r^{-2} na Eq. (2.16). Além disso, a singularidade Newtoniana usual em $r = 0$ não está presente.

A Fig. 6 exibe a comparação das Eqs. (3.12) e (2.60) para alguns valores de N_s , sugerindo que aumentar N_s além de $N_s = 10$ não modifica significativamente (especialmente para grandes valores de $\mu_s r$) o comportamento do potencial, que se aproxima de χ_s^∞ .

3.4 PROPRIEDADES ADICIONAIS DAS SOLUÇÕES

Na Fig. 7, apresenta-se o valor do máximo $\max[\rho_s(r)] = \rho_s(0)$ [Eq. (2.37)] da fonte delta efetiva e o valor de $\chi_s(0)$ [Eq. (2.61)] para diferentes valores de N_s , comparados com $\rho_s^\infty(0)$ e $\chi_s^\infty(0)$, respectivamente. Os pontos em que as curvas sólidas cruzam as linhas horizontais tracejadas correspondem a $N_s = 3/2$ para a fonte efetiva e a $N_s = 1/2$ para o potencial newtoniano. Portanto, $\rho_s^\infty(0)$ é, de fato, o limite superior para as fontes delta efetivas para $N_s \geq 3/2$, enquanto $\chi_s^\infty(0)$ é um limite inferior para o potencial para $N_s \geq 1/2$.

Ademais, na Fig. 8 mostra-se o primeiro pico da função de massa (seu máximo global) em função de sua posição. O valor $\max, [M_s^\infty(r)/M] = 1,675$ ocorre na posição $\mu_s r_{\max} = 4,493$ (ver também Fig. 5a) e representa um limite superior para os modelos com $N_s > 1$ (lembre-se de que, para $N_s \leq 1$, a função de massa não oscila e não possui máximo global, mas tende ao supremo M quando $r \rightarrow \infty$). Para $N_s > 3,766$, a posição do primeiro pico diminui à medida que N_s aumenta.

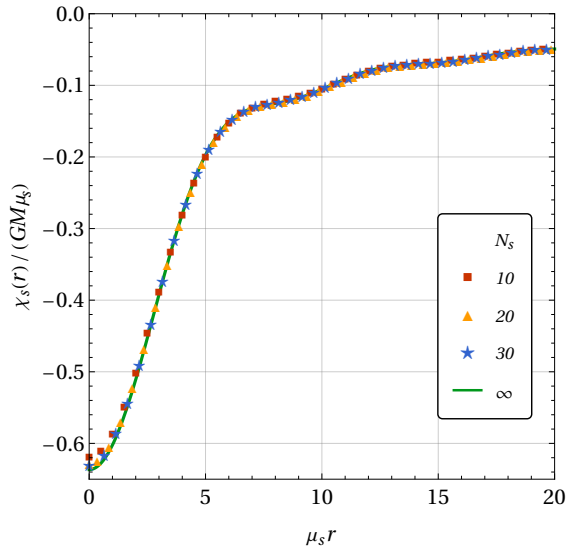


Figura 6 – Comparação entre $\chi_s^\infty(r)$ e $\chi_s(r)$ para $N_s \in \{10, 20, 30\}$.

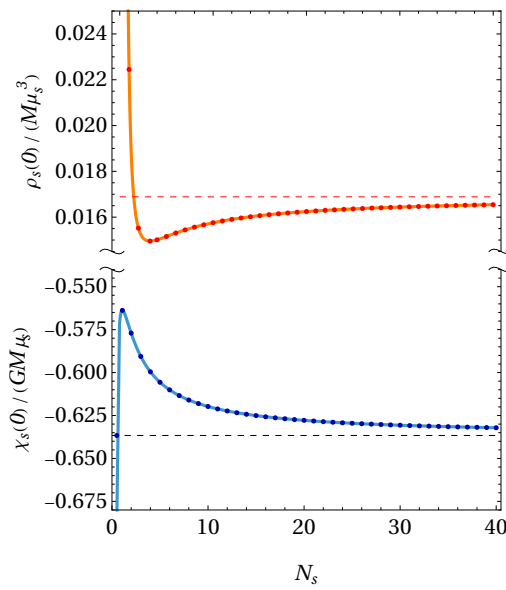


Figura 7 – Gráfico de $\rho_s(0)/(M\mu_s^3)$ e $\chi_s(0)/(GM\mu_s)$ em função de N_s . Os pontos representam $N_s = 1/2$ e valores inteiros de N_s . As linhas horizontais tracejadas correspondem aos valores $\rho_s^\infty(0)/(M\mu_s^3) = 1/(6\pi^2) = 0,0168$ e $\chi_s^\infty(0)/(GM\mu_s) = -2/\pi = -0,636$, que representam, respectivamente, um limite superior para $N_s \geq 3/2$ e um limite inferior para $N_s \geq 1/2$.

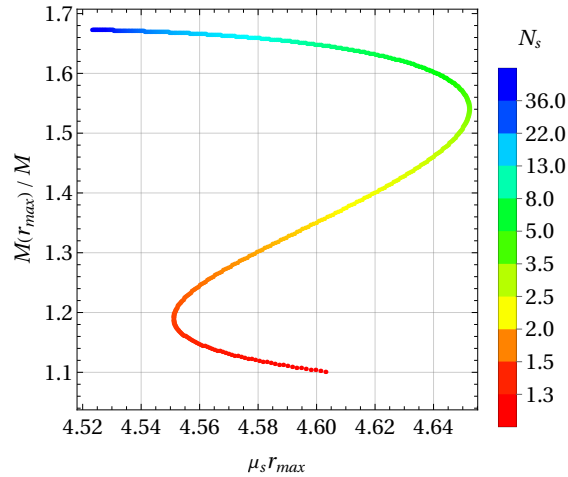


Figura 8 – Máximo absoluto da função massa normalizada $M_s(r)/M$ para $N_s > 1$. Os eixos horizontais representam a posição do primeiro pico da função massa nas coordenadas $\mu_s r_{\max}$, ao passo que o eixo vertical é $M_s(r_{\max})/M$. As cores indicam os valores de N_s . Note que $\mu_s r_{\max}$ aumenta para $1,505 < N_s < 3,766$ e diminui fora desse intervalo.

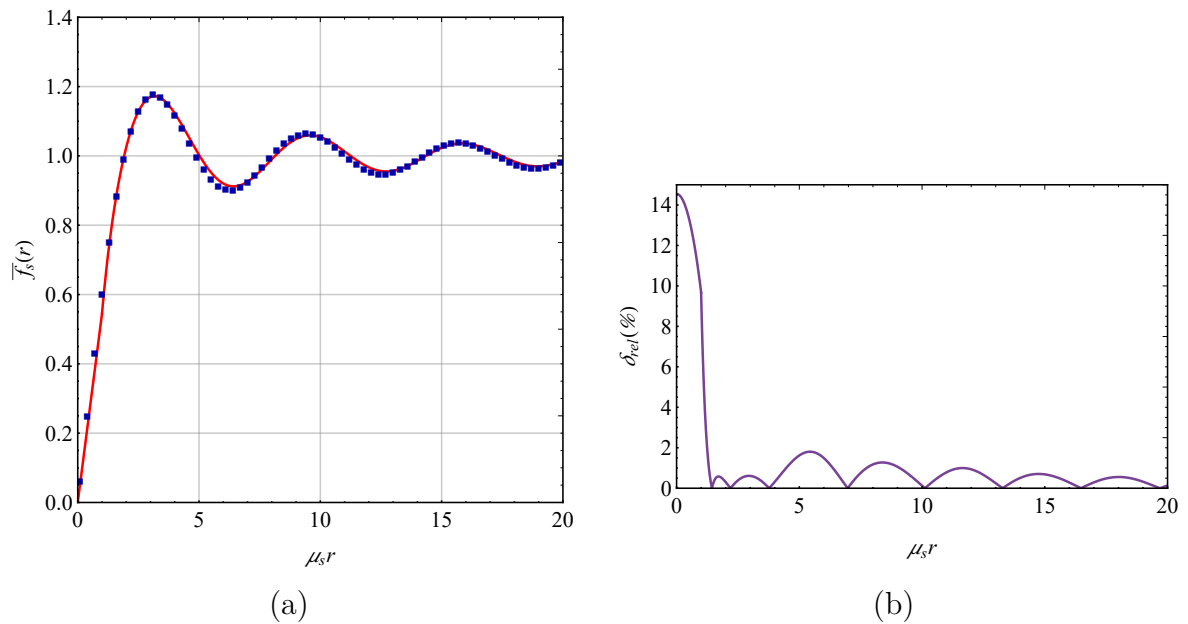


Figura 9 – (a) Gráfico da aproximação (3.15) para $\bar{f}_s(r)$ e da solução exata dada pela Eq. (3.16) (quadrados azuis). (b) Erro relativo entre (3.15) e (3.16).

3.5 COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS ANALÍTICOS COM APROXIMAÇÕES DA LITERATURA

Vale a pena comparar os resultados deste capítulo com a aproximação para grandes N_s proposta em [34] que é dada por

$$\chi_s^\infty(r) = -\frac{GM}{r} \bar{f}_s(r), \quad (3.14)$$

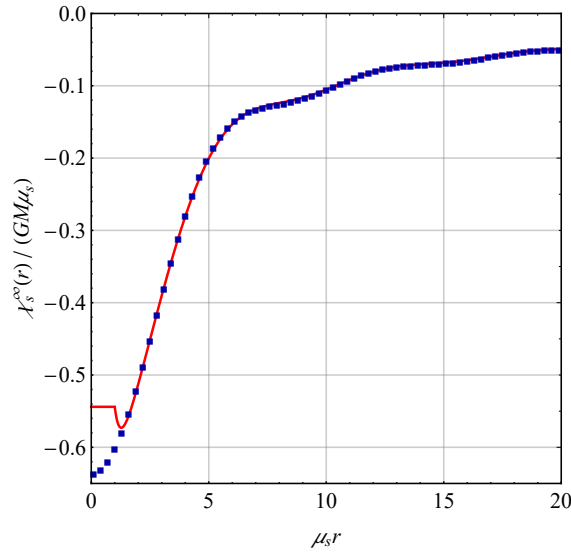


Figura 10 – Gráfico de $\chi_s^\infty(r)$. Linha vermelha: solução aproximada, Eq. (3.14). Quadrados azuis: solução exata, Eq. (3.12).

em que a função $\bar{f}_s(r)$ possui a forma

$$\bar{f}_s(r) \approx \begin{cases} \alpha_1 \mu_s r, & \text{se } 0 < \mu_s r < 1, \\ 1 + \alpha_2 \frac{\cos(\theta_0 \mu_s r + \theta_1)}{\mu_s r}, & \text{se } 1 < \mu_s r, \end{cases} \quad (3.15)$$

com parâmetros $\alpha_1 = 0,544$, $\alpha_2 = 0,572$, $\theta_0 = 1,000$ e $\theta_1 = 0,885\pi$. Essa expressão foi obtida a partir do *ansatz* (3.15), com a escolha dos parâmetros α_2 , θ_0 e θ_1 de modo a fornecer o melhor ajuste à solução numérica do potencial para $N_s = 20$ no intervalo $1 \leq \mu_s r \leq 20$, bem como por meio de uma aproximação linear no regime $0 \leq \mu_s r \leq 1$. Embora essa aproximação pareça funcionar com um erro relativo¹ menor que 0,6% para $\mu_s r > 15$ em relação à função exata

$$\bar{f}_s(r) = \frac{2 \text{Si}(\mu_s r)}{\pi}, \quad (3.16)$$

os erros para valores pequenos r , onde a aproximação é linear, podem chegar a 14%, conforme indica a Fig. 9. Além disso, a Fig. 10 mostra a comparação entre a aproximação para $\chi_s^\infty(r)$ dada pela Eq. (3.15) com sua solução exata (3.12). Observa-se uma clara discrepância para $\mu_s r < 1$, devido ao fato de que a aproximação linear de $\bar{f}_s(r)$ nesse intervalo faz com que o potencial se torne constante. Os erros relativos de $\chi_s^\infty(r)$ e $\bar{f}_s(r)$ são basicamente os mesmos, com um erro relativo máximo de 14,55% para o potencial em $r = 0$.

As diferenças tornam-se mais marcantes quando se leva a aproximação além da estimativa do valor do potencial e se verifica se ela é capaz de reproduzir outras características, como as oscilações características e seus pontos de inflexão. Por exemplo, os erros

¹ O erro relativo δ_{rel} entre uma função aproximada $\Phi_{\text{ap.}}$ e a função exata é definido como $\delta_{\text{rel}} = |\Phi_{\text{exato}} - \Phi_{\text{ap.}}| / \Phi_{\text{exato}}$.

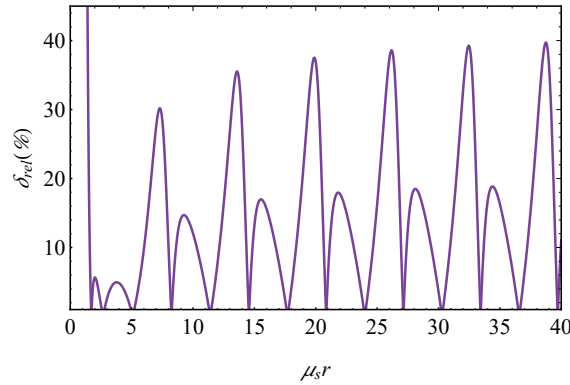


Figura 11 – Erro relativo de $\chi'_s(r)$ obtido por meio da derivada de (3.12) (expressão exata) e de (3.14) (aproximação). O erro é de 100% para $0 \leq \mu_s r < 1$, pois $\chi'_s = 0$ na aproximação nesse intervalo. A descontinuidade em $\mu_s r = 1$ ocorre porque a aproximação não é suave nesse ponto. A amplitude da variação do erro relativo apresenta picos de cerca de 40%, que não parecem diminuir mesmo para $\mu_s r \gg 1$.

relativos de χ'_s derivados de (3.15) parecem oscilar no intervalo de 0%–40% (veja Fig. 11) com um erro relativo médio de cerca de 17%, que permanece aproximadamente constante. Essa aproximação também pode ser muito sensível aos valores de seus parâmetros. Por exemplo, se o parâmetro θ_0 for aumentado em 0.010, o erro relativo de χ'_s pode chegar a 300% mesmo para valores grandes de $\mu_s r$, pois as oscilações na derivada de (3.12) e (3.14) ficam completamente fora de fase.² Como a derivada do potencial está relacionada à força gravitacional, a modelagem de experimentos de laboratório da lei de Newton (por exemplo, com balanças de torção) pode ser significativamente afetada por tais erros.

a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3
$-4,543 \times 10^{-2}$	$1,154 \times 10^{-3}$	$-1,410 \times 10^{-5}$	$9,432 \times 10^{-8}$	$1,011 \times 10^{-2}$	$4,991 \times 10^{-5}$	$1,565 \times 10^{-7}$

Tabela 2 – Valores dos coeficientes do aproximante de Padé [61].

De posse da solução exata, pode-se derivar aproximações mais precisas para o potencial Newtoniano, as quais podem ser úteis em aplicações fenomenológicas. Por exemplo, no regime $\mu_s r \gg 1$ pode-se utilizar [60]

$$\text{Si}(z) = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos z}{z} \left[1 + O(z^{-2})\right] - \frac{\text{sen } z}{z^2} \left[1 + O(z^{-2})\right], \quad z \rightarrow \infty. \quad (3.17)$$

O truncamento envolvendo apenas os termos explicitamente escritos em (3.17), a saber,

$$\chi_s^\infty(r) \approx -\frac{GM}{r} \left[1 - \frac{2 \cos(\mu_s r)}{\pi \mu_s r} - \frac{2 \text{sen}(\mu_s r)}{\pi (\mu_s r)^2}\right], \quad \mu_s r \gg 1, \quad (3.18)$$

fornece um erro relativo menor que 2% do potencial exato já para $\mu_s r > 2,1$, e menor que 0,5% para $\mu_s r > 4,68$. Uma aproximação para pequenos valores de $\mu_s r$ pode ser obtida a

² Essa observação não é acidental, pois o número $\theta_0 = 1,010$ foi de fato considerado em [34] como o melhor ajuste não arredondado para o potencial com $N_s = 20$.

partir da série de Taylor de $\text{Si}(z)$ ou, de forma ainda melhor, por meio de um aproximante de Padè. Por exemplo,

$$\text{Si}(z) \approx z \frac{1 + \sum_{i=1}^4 a_i z^{2i}}{1 + \sum_{i=1}^3 b_i z^{2i}} \quad (3.19)$$

(com coeficientes a_i e b_i apresentados na Tabela 2) fornece uma aproximação para o potencial com erro relativo inferior a 1% para $\mu_s r < 5,3$. Combinando essas duas aproximações, obtém-se

$$\chi_s^\infty(r) \approx -\frac{GM}{r} \times \begin{cases} \frac{2\mu_s r}{\pi} \frac{1+a_1(\mu_s r)^2+a_2(\mu_s r)^4+a_3(\mu_s r)^6+a_4(\mu_s r)^8}{1+b_1(\mu_s r)^2+b_2(\mu_s r)^4+b_3(\mu_s r)^6}, & \text{se } 0 < \mu_s r < 4,7, \\ 1 - \frac{2 \cos(\mu_s r)}{\pi \mu_s r} - \frac{2 \text{sen}(\mu_s r)}{\pi (\mu_s r)^2}, & \text{se } \mu_s r > 4,7, \end{cases} \quad (3.20)$$

com erro relativo inferior a 0,5% para todos os valores de r . Além disso, a aproximação (3.20) reproduz χ'_s com erro relativo máximo de 6,5% (para $\mu_s r = 7,6$), que diminui para menos de 1% quando $\mu_s r > 14,7$; embora o erro oscile, sua amplitude tende a zero (veja Fig. 12).

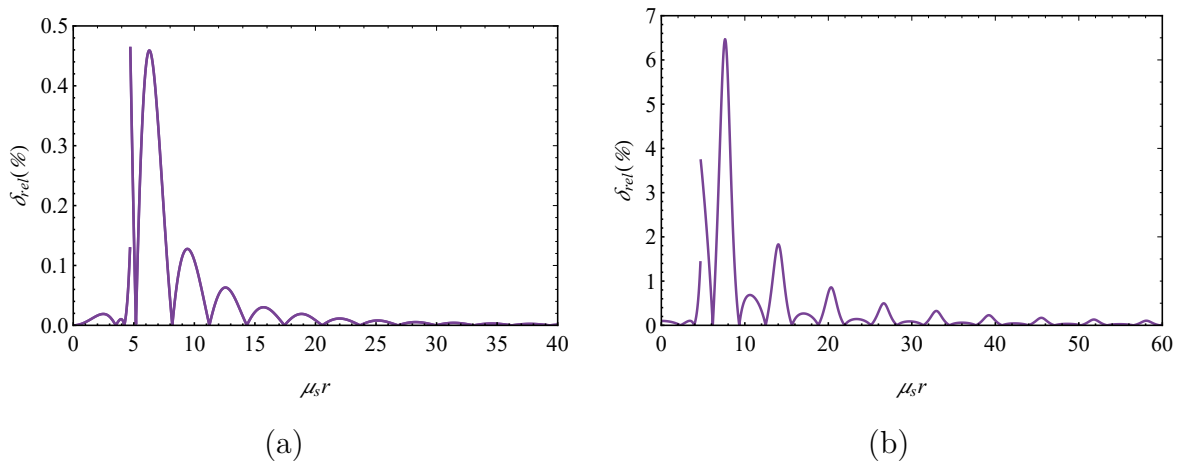


Figura 12 – Gráfico do erro relativo obtido ao comparar a solução exata, Eq. (3.12), com a nova aproximação, Eq. (3.20). **(a)** Erro relativo para o potencial $\chi_s^\infty(r)$. **(b)** Erro relativo para a derivada do potencial $\chi_s'^\infty(r)$. Em ambos os casos, a amplitude dos erros relativos tende a zero para $\mu_s r \gg 1$.

4 REGULARIDADE DOS INVARIANTES DE CURVATURA

Um dos aspectos do estudo das soluções no limite Newtoniano de modelos com derivadas superiores e de modelos não-locais diz respeito à resolução da singularidade em $r = 0$ (veja, por exemplo, [29] e suas referências). Em particular, uma vez que para $N_s > 0$ o fator de forma (1.5) cresce mais rapidamente que qualquer polinômio, existem teoremas gerais que garantem que o potencial Newtoniano, bem como todos os invariantes de curvatura polinomiais construídos a partir do tensor de Riemann e de suas derivadas, são funções limitadas [28]. Neste capítulo, revisita-se o tema da resolução da singularidades, que foi considerado pela primeira vez no contexto dos modelos GF_N com $N \in \mathbb{N}$ nos trabalhos [30, 31, 35].

4.1 CASO $N_s \geq 1/2$

A regularidade dos invariantes de curvatura polinomiais no tensor de Riemann pode ser estudada de uma forma eficiente baseada na observação de que tais invariantes podem ser escritos como contrações das componentes $R^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}$ do tensor de Riemann com os tensores de Kronecker, em vez de envolver explicitamente a métrica e sua inversa [62]. Para a métrica (2.8), $R^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}$ possui 4 componentes independentes, a saber

$$K_1 \equiv R^{tr}{}_{tr} = \varphi''(r) = \frac{4}{3}\chi_2''(r) - \frac{1}{3}\chi_0''(r), \quad (4.1a)$$

$$K_2 \equiv R^{t\theta}{}_{t\theta} = \frac{\varphi'(r)}{r} = \frac{4}{3}\frac{\chi_2'(r)}{r} - \frac{1}{3}\frac{\chi_0'(r)}{r}, \quad (4.1b)$$

$$K_3 \equiv R^{r\theta}{}_{r\theta} = -\psi''(r) - \frac{\psi'(r)}{r} = -\frac{2}{3}\left[\chi_2''(r) + \frac{\chi_2'(r)}{r}\right] - \frac{1}{3}\left[\chi_0''(r) + \frac{\chi_0'(r)}{r}\right], \quad (4.1c)$$

$$K_4 \equiv R^{\theta\phi}{}_{\theta\phi} = -\frac{\psi'(r)}{r} = -\frac{2}{3}\frac{\chi_2'(r)}{r} - \frac{1}{3}\frac{\chi_0'(r)}{r}. \quad (4.1d)$$

À guisa de ilustração, o escalar de Kretschmann linearizado pode ser escrito como

$$K \equiv R_{\alpha\beta\lambda\tau}R^{\alpha\beta\lambda\tau} = 4(K_1^2 + 2K_2^2 + 2K_3^2 + K_4^2). \quad (4.2)$$

Se K_i é regular para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, então todos os invariantes de curvatura polinomiais no tensor de Riemann são limitados.

Uma vez que o potencial $\chi_s(r)$ é uma função analítica, limitada e par, segue de (2.62) e do teorema de Taylor que

$$\left.\frac{d^{2\ell-1}}{dr^{2\ell-1}}\chi_s(r)\right|_{r=0} = 0, \quad \left.\frac{d^{2\ell}}{dr^{2\ell}}\chi_s(r)\right|_{r=0} = -\frac{GM\mu_s^{2\ell+1}}{\pi N_s} \frac{(-1)^\ell}{2\ell+1} \Gamma\left(\frac{2\ell+1}{2N_s}\right). \quad (4.3)$$

Portanto, todos os $K_{1,\dots,4}$ são funções pares e limitadas. Ademais, de acordo com o teorema geral demonstrado em [28], os invariantes construídos a partir de derivadas covariantes dos tensores de curvatura, tais como $\square^\ell R$, $(\nabla_\alpha \nabla_\beta \nabla_\gamma \nabla_\delta R_{\mu\nu\rho\sigma})^2$, $R_{\mu\nu\alpha\beta} \square^\ell R^{\mu\nu\alpha\beta}$ ($\ell \in \mathbb{N}$), são regulares. Isso ocorre porque as derivadas de ordem ímpar de $\chi_s(r)$ se anulam $r = 0$, enquanto as derivadas de ordem par são finitas em $r = 0$.

4.2 CASO $0 < N_s < 1/2$

Uma vez que o potencial (2.60) não é analítico para $0 < N_s < 1/2$, o estudo da regularidade dos invariantes de curvatura nesse regime é mais delicado [28, 64]. Nesse caso, o potencial admite a representação integral (D.3), na qual a GEF é definida por (2.31). Essa expressão pode ser utilizada para o cálculo das derivadas no limite $r \rightarrow 0$, uma vez que a suavidade da fonte efetiva permite a passagem do limite sob o sinal da integral, resultando em

$$\frac{d^{2l-1}\chi_s(r)}{dr^{2l-1}} = -\frac{2GM}{\pi} \int_0^\infty dt e^{-t} \sum_{k=l+1}^\infty (-1)^{k-1} \frac{(\mu_s t^{\frac{1}{2N_s}})^{2k-1}}{(2k-1)(2k-1)!} (2k-2)_{2l-1} r^{2k-2l-1} \quad (4.4)$$

e

$$\frac{d^{2l}\chi_s(r)}{dr^{2l}} = -\frac{2GM}{\pi} \int_0^\infty dt e^{-t} \sum_{k=l+1}^\infty (-1)^{k-1} \frac{(\mu_s t^{\frac{1}{2N_s}})^{2k-1}}{(2k-1)(2k-1)!} (2k-2)_{2l} r^{2k-2l-2} \quad (4.5)$$

para todo $l \in \mathbb{N}$. O limite $r \rightarrow 0$ das expressões acima mostra que a Eq. (4.3) permanece válida também nesse caso. Esse resultado pode ser entendido notando-se que a série (2.25) converge em $r = 0$ mesmo quando $0 < N_s < 1/2$. Uma discussão detalhada sobre a convergência da série pode ser encontrada no Apêndice . Portanto, para todo $N_s > 0$ o modelo não-local com fator de forma (1.5) regulariza completamente as singularidades newtonianas. Como discutido em [28, 29], esse comportamento é explicado pelo fato de que no regime ultravioleta o propagador (1.3) é suprimido mais rapidamente que qualquer polinômio.

Como um exemplo explícito, considere o invariante de Kretschmann em $r = 0$ do modelo GF_N com $\mu_2 = \mu_0 \equiv \mu$ e $N_2 = N_0 \equiv N$ e, conseqüentemente, $\varphi = \psi = \chi_2 = \chi_0$. Utilizando (4.2) e (4.3) obtém-se

$$\frac{K(0)}{G^2 M^2 \mu^6} = \frac{16}{3\pi^2 N^2} \Gamma\left(\frac{3}{2N}\right)^2, \quad N > 0, \quad (4.6)$$

ao passo que, no limite $N \rightarrow \infty$, tem-se

$$\frac{K^\infty(0)}{G^2 M^2 \mu^6} = \frac{64}{27\pi^2}. \quad (4.7)$$

A Fig. 13 exhibe o valor do escalar de Kretschmann em $r = 0$ em função de N . O gráfico mostra que $K^\infty(0)$ funciona como um limite superior para tal escalar em todos os modelos com $N \geq 3/2$; para $N_s = 3/2$, as Eqs. (4.6) e (4.7) fornecem exatamente o mesmo valor.

4.3 ULTRAVIOLETA VERSUS INFRAVERMELHO

Finalmente, para destacar a diferença entre modificações não-locais no ultravioleta e no infravermelho, considere o cenário exótico com $N_s < 0$. Nesse caso, o fator de forma (1.5) torna-se

$$f_s(-k^2) = e^{(\mu_s^2/k^2)^{|N_s|}}, \quad (4.8)$$

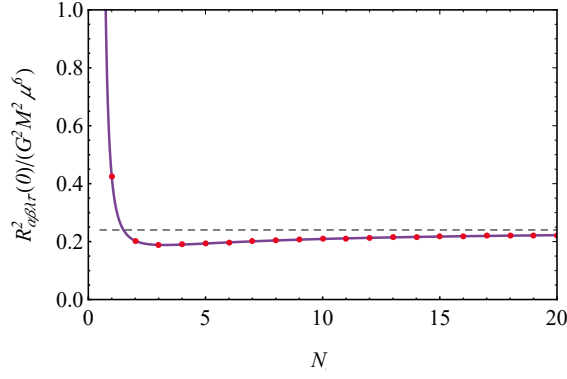


Figura 13 – Gráfico do valor do invariante de Kretschmann adimensional $K(0)/(G^2 M^2 \mu^6)$ em $r = 0$ em função de N , no caso particular em que $\mu_2 = \mu_0 \equiv \mu$ e $N_2 = N_0 \equiv N$. A linha tracejada corresponde ao valor no limite $N \rightarrow \infty$, $K^\infty(0)$, que serve como um limite superior para valores elevados de N . Os pontos representam os valores inteiros de N . Note que quando $N = 3/2$, $K(0) = K^\infty(0)$.

o qual tende a uma constante quando $k \rightarrow \infty$. Portanto, o comportamento ultravioleta do propagador (1.3) não é melhorado (em comparação com a relatividade geral), o que significa, de acordo com os teoremas de [28], que podem existir singularidades de curvatura. Como um exemplo explícito, consideremos o caso de $N_s = -1$, que foi proposto em [65]. A integração direta de (2.65) então resulta em

$$\begin{aligned} \chi_s(r) &= -\frac{2GM}{\pi r} \left[\frac{\pi}{2} {}_0F_2 \left(-; \frac{1}{2}, 1; \frac{\mu_s^2 r^2}{4} \right) - \sqrt{\pi} \mu_s r {}_0F_2 \left(-; \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \frac{\mu_s^2 r^2}{4} \right) \right] \\ &= -\frac{GM}{r} + \frac{2GM\mu_s}{\sqrt{\pi}} - \frac{GM\mu_s^2}{2} r + O(r^2). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Assim, o potencial não é limitado para $N_s = -1$, os termos em (4.1) divergem, e há uma singularidade de curvatura em $r = 0$.

5 CORREÇÕES QUÂNTICAS LOGARÍTMICAS A UM LAÇO AO LIMITE NEWTONIANO

Neste capítulo, investiga-se as propriedades gerais das correções quânticas a um laço ao propagador do gráviton no limite Newtoniano da gravitação não-local. Tais correções apresentam uma estrutura universal tanto no regime ultravioleta (UV) quanto no infravermelho (IR) na forma de logaritmos [66]

$$\Gamma^{(1)} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ (R - 2\Lambda) + \frac{1}{2} C_{\mu\nu\alpha\beta} F_2(\square) C^{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{1}{6} R F_0(\square) R - \frac{\beta_2}{2} C_{\mu\nu\alpha\beta} \log(-\square / \mu_R^2) C^{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{\beta_0}{6} R \log(-\square / \mu_R^2) R \right\} + O(R^3), \quad (5.1)$$

em que μ_R é uma escala massiva. Os valores de $\beta_{2,0}$ podem mudar nos limites UV e IR graças ao teorema de desacoplamento de Appelquist–Carazzone [67]. Em escalas intermediárias, as correções quânticas de um laço são dadas por fatores de forma complicados que dependem da massa dos campos de matéria [48, 68, 69, 70]. Ainda assim, as contribuições dos campos massivos são suprimidas no regime IR, de sorte que apenas contribuições logarítmicas de campos sem massa dominam nesse regime. Entretanto, para fins de generalidade, nas considerações a seguir os coeficientes $\beta_{0,2}$ são tratados como parâmetros arbitrários.

5.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Para derivar as equações de campo clássicas no limite newtoniano a partir da ação (5.1), pode-se aplicar o mesmo procedimento da Sec. 2.1, mas agora com a substituição $f_s(\square) \rightarrow f_s(\square) - \beta_s \log(-\square / \mu_R^2) \square$. O resultado é que, para a ação (5.1), as equações para os potenciais de spin- s possuem a forma

$$f_s(\Delta) \Delta \chi_s - \beta_s \log(-\Delta / \mu_R^2) \Delta^2 \chi_s = 4\pi G \rho, \quad s = 0, 2. \quad (5.2)$$

A equação acima pode ser resolvida perturbativamente por meio de uma expansão em laços do potencial, isto é,

$$\chi_s = \chi_s^{(0)} + \chi_s^{(1)} + O(\hbar^2), \quad (5.3)$$

em que $\chi_s^{(l)}$ é da ordem $O(\hbar^l)$. Uma vez que $\beta_s = O(\hbar)$, as equações de ordem zero e de primeira ordem em \hbar são dadas por

$$f_s(\Delta) \Delta \chi_s^{(0)} = 4\pi G \rho, \quad (5.4)$$

$$f_s(\Delta) \Delta \chi_s^{(1)} = \beta_s \log(-\Delta / \mu_R^2) \Delta^2 \chi_s^{(0)}. \quad (5.5)$$

A equação (5.4) define a parte clássica do potencial e já foi resolvida na seção 2.1. Por outro lado, a Eq. (5.5) representa a correção quântica a um laço ao potencial, que é um dos objetos de interesse deste capítulo.

O sistema (5.4), (5.5) pode ser resolvido por meio do método de Fourier[28]. Esse procedimento fornece a seguinte solução para a correção quântica de um laço ao potencial

$$\chi_s^{(1)}(r) = \frac{2\beta_s GM}{\pi r} \int_0^\infty dk \frac{k \operatorname{sen}(kr) \log(k^2/\mu_R^2)}{[f_s(-k^2)]^2}. \quad (5.6)$$

Alternativamente, pode-se estudar o problema utilizando o formalismo das fontes efetivas descrito na Sec. 2.1. Com efeito, a Eq. (5.5) pode ser reescrita como

$$\Delta \chi_s^{(1)} = 4\pi G \rho_s^{(1)}, \quad (5.7)$$

em que

$$\rho_s^{(1)}(r) = -\frac{\beta_s M}{2\pi^2 r} \int_0^\infty dk \frac{k^3 \operatorname{sen}(kr) \log(k^2/\mu_R^2)}{[f_s(-k^2)]^2} \quad (5.8)$$

é a correção quântica a um laço à fonte efetiva. A correção quântica a um laço à função massa pode então ser obtida a partir de (5.8) por meio da relação

$$M_s^{(1)}(r) = 4\pi \int_0^r dx x^2 \rho_s^{(1)}(x) \quad (5.9)$$

ou, utilizando (5.6),

$$M_s^{(1)}(r) = \frac{r^2}{G} \frac{d}{dr} \chi_s^{(1)}(r). \quad (5.10)$$

Uma vez que as integrais em (5.6) e (5.8) são muito semelhantes, é conveniente definir uma integral mestra por

$$I_{N,\mu}^{(1)}(r, n) = \int_0^\infty dk k^n e^{-2(k/\mu)^{2N}} \operatorname{sen}(kr) \log(k/\mu_R). \quad n \in \mathbb{N} \quad (5.11)$$

A comparação direta de (5.11) com (5.6), (5.8) e (5.10) mostra que as correções quânticas a um laço à fonte efetiva, à função massa e ao potencial podem ser expressas, respectivamente, em termos de $I_{N,\mu}^{(1)}$ por

$$\rho_s^{(1)}(r) = -\frac{\beta_s M}{\pi^2 r} I_{N_s, \mu_s}^{(1)}(r, 3), \quad (5.12)$$

$$M_s^{(1)}(r) = \frac{4\beta_s M}{\pi} \left[r \frac{d}{dr} I_{N_s, \mu_s}^{(1)}(r, 1) - I_{N_s, \mu_s}^{(1)}(r, 1) \right], \quad (5.13)$$

$$\chi_s^{(1)}(r) = \frac{4\beta_s GM}{\pi r} I_{N_s, \mu_s}^{(1)}(r, 1). \quad (5.14)$$

Para obter uma solução para (5.11), emprega-se novamente o truque de Feynman a fim de eliminar o logaritmo presente no integrando da Eq. (5.11). Seja

$$J(r, \alpha) \equiv \int_0^\infty dk \left(\frac{\mu k}{\mu_R} \right)^{2\alpha-1} e^{-2k^{2N}} \operatorname{sen}(kr). \quad (5.15)$$

Nessas condições,

$$I_{N,\mu}^{(1)}(r, n) = \frac{\mu \mu_R^n}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} J(\mu r, \alpha) \Big|_{\alpha=\frac{n+1}{2}}. \quad (5.16)$$

Utilizando a representação em série de potências da função seno, pode-se avaliar $J(r, \alpha)$ de maneira análoga a (2.20). Dessa forma, obtém-se

$$J(r, \alpha) = \left(\frac{\mu}{\mu_R} \right)^{2\alpha-1} \frac{1}{2^{\frac{\alpha}{N}}} \frac{\sqrt{\pi} r}{2^{\frac{1}{2N}+2} N} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{2l+2\alpha+1}{2N}\right)}{\Gamma\left(\frac{2l+3}{2}\right)} \frac{1}{l!} \left(-\frac{r^2}{2^{\frac{1}{N}+2}} \right)^l, \quad (5.17)$$

em que a identidade $(2l+1)! = 2^{2l+1} l! \Gamma(l+3/2) / \sqrt{\pi}$ foi utilizada para simplificar o fatorial $(2l+1)!$ na série de Taylor da função seno.

5.2 CASO $N_s > 1/2$

Quando $N_s > 1/2$, a fórmula (5.17) pode ser escrita de forma compacta em termos da função Ψ de Fox–Wright [71],

$${}_p\Psi_q[(a, A); (b, B); z] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j + A_j k)}{\prod_{i=1}^q \Gamma(b_i + B_i k)} \frac{z^k}{k!}, \quad (5.18)$$

resultando em

$$J(r, \alpha) = \left(\frac{\mu}{\mu_R} \right)^{2\alpha-1} \frac{1}{2^{\frac{\alpha}{N}}} \frac{\sqrt{\pi} r}{2^{\frac{1}{2N}+2} N} {}_1\Psi_1 \left[\left(\frac{2\alpha+1}{2N}, \frac{1}{N} \right); \left(\frac{3}{2}, 1 \right); -\frac{r^2}{2^{\frac{1}{N}+2}} \right]. \quad (5.19)$$

Finalmente, calculando a derivada em relação ao parâmetro α e utilizando a Eq. (5.16), obtém-se

$$I_{N,\mu}^{(1)}(r, n) = \frac{\sqrt{\pi} \mu^{n+2} r}{2^{\frac{n+2}{2N}+3} N^2} \left\{ \left[N \log \left(\frac{\mu^2}{\mu_R^2} \right) - \log 2 \right] {}_1\Psi_1 \left[\left(\frac{n+2}{2N}, \frac{1}{N} \right); \left(\frac{3}{2}, 1 \right); -\frac{\mu^2 r^2}{2^{\frac{1}{N}+2}} \right] \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial a} {}_1\Psi_1 \left[\left(a, \frac{1}{N} \right); \left(\frac{3}{2}, 1 \right); -\frac{\mu^2 r^2}{2^{\frac{1}{N}+2}} \right] \Big|_{a=\frac{n+2}{2N}} \right\}. \quad (5.20)$$

Na equação acima, a derivada de ${}_1\Psi_1$ em relação ao parâmetro a é definida por meio da série de Taylor,

$$\frac{\partial}{\partial a} {}_1\Psi_1[(a, A); (b, B); z] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a + Ak) \psi(a + Ak)}{\Gamma(b + Bk)} \frac{z^k}{k!}, \quad (5.21)$$

em que $\psi(z) = d \ln \Gamma(z) / dz = \Gamma'(z) / \Gamma(z)$ é a função digama.

De posse da solução para a integral (5.11), pode-se obter as correções quânticas para a fonte efetiva, para a função massa e para o potencial por meio das Eqs. (5.12), (5.13) e (5.14). Os resultados são

$$\rho_s^{(1)}(r) = -\frac{\beta_s M \mu_s^5}{2^{\frac{5}{2N_s}+3} N_s^2 \pi^{3/2}} \left\{ \left[N_s \log \left(\frac{\mu_s^2}{\mu_R^2} \right) - \log 2 \right] {}_1\Psi_1 \left[\left(\frac{5}{2N_s}, \frac{1}{N_s} \right); \left(\frac{3}{2}, 1 \right); -\frac{\mu_s^2 r^2}{2^{\frac{1}{N_s}+2}} \right] \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial a} {}_1\Psi_1 \left[\left(a, \frac{1}{N_s} \right); \left(\frac{3}{2}, 1 \right); -\frac{\mu_s^2 r^2}{2^{\frac{1}{N_s}+2}} \right] \Big|_{a=\frac{5}{2N_s}} \right\}, \quad (5.22)$$

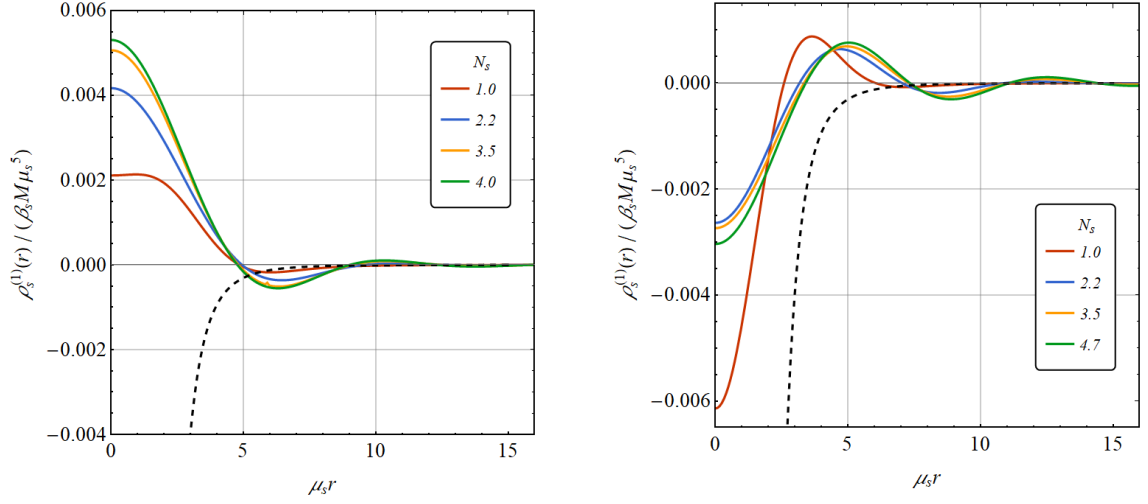


Figura 14 – $\rho_s^{(1)}(r)/(\beta_s M \mu_s^5)$ em função de $\mu_s r$. Gráfico à esquerda: $\mu_R = 1, 2\mu_s$. Gráfico à direita: $\mu_R = 0, 6\mu_s$.

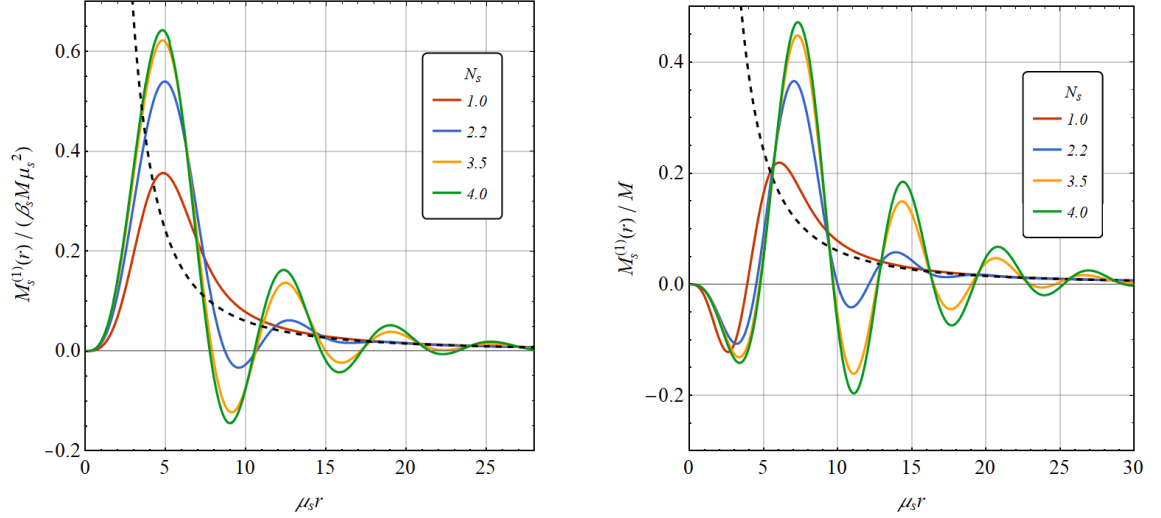


Figura 15 – $M_s^{(1)}(r)/(\beta_s M \mu_s^2)$ em função de $\mu_s r$. Gráfico à esquerda: $\mu_R = 1, 2\mu_s$. Gráfico à direita: $\mu_R = 0, 6\mu_s$.

$$M_s^{(1)}(r) = -\frac{\beta_s M \mu_s^5 r^3}{2^{2N_s+2} N_s^2 \sqrt{\pi}} \left\{ \left[N_s \log \left(\frac{\mu_s^2}{\mu_R^2} \right) - \log 2 \right] {}_1\Psi_1 \left[\left(\frac{5}{2N_s}, \frac{1}{N_s} \right); \left(\frac{5}{2}, 1 \right); -\frac{\mu_s^2 r^2}{2^{\frac{1}{N_s}+2}} \right] + \frac{\partial}{\partial a} {}_1\Psi_1 \left[\left(a, \frac{1}{N_s} \right); \left(\frac{5}{2}, 1 \right); -\frac{\mu_s^2 r^2}{2^{\frac{1}{N_s}+2}} \right] \Big|_{a=\frac{5}{2N_s}} \right\}, \quad (5.23)$$

e

$$\chi_s^{(1)}(r) = \frac{\beta_s G M \mu_s^3}{2^{\frac{3}{2N_s}+1} N_s^2 \sqrt{\pi}} \left\{ \left[N_s \log \left(\frac{\mu_s^2}{\mu_R^2} \right) - \log 2 \right] {}_1\Psi_1 \left[\left(\frac{3}{2N_s}, \frac{1}{N_s} \right); \left(\frac{3}{2}, 1 \right); -\frac{\mu_s^2 r^2}{2^{\frac{1}{N_s}+2}} \right] + \frac{\partial}{\partial a} {}_1\Psi_1 \left[\left(a, \frac{1}{N_s} \right); \left(\frac{3}{2}, 1 \right); -\frac{\mu_s^2 r^2}{2^{\frac{1}{N_s}+2}} \right] \Big|_{a=\frac{3}{2N_s}} \right\}. \quad (5.24)$$

As Figs. 14, 15 e 16 apresentam, respectivamente, as soluções (5.22), (5.23) e (5.24)

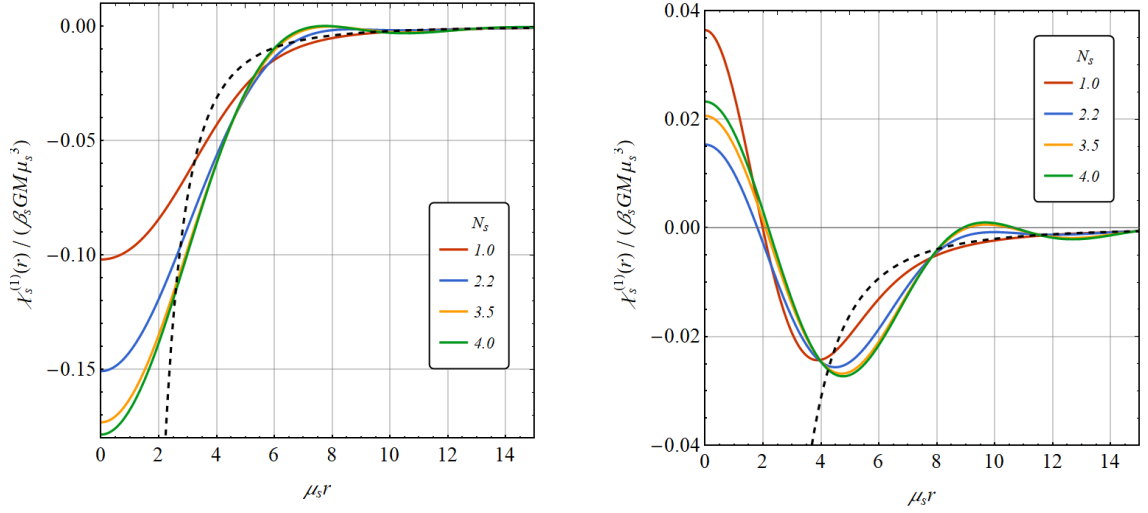


Figura 16 – $\chi_s^{(1)}(r)/(\beta_s GM \mu_s^3)$ em função de $\mu_s r$. Gráfico à esquerda: $\mu_R = 1, 2\mu_s$. Gráfico à direita: $\mu_R = 0, 6\mu_s$.

para alguns valores finitos de N_s . As linhas pretas tracejadas representam o comportamento no infravermelho profundo ($\mu_s r \gg 1$) das funções,

$$\rho_s^{(1)}(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{3\beta_s M}{\pi r^5}, \quad M_s^{(1)}(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{6\beta_s M}{r^2}, \quad \chi_s^{(1)}(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{2\beta_s GM}{r^3}, \quad (5.25)$$

que estão de acordo com o entendimento usual das teorias de campo efetivas. Note que esses comportamentos assintóticos são universais no sentido de que não dependem do modelo não-local em consideração, isto é, (5.25) é independente de N_s , μ_s e μ_R .¹

Os gráficos ilustram que o sinal das correções quânticas a um laço para valores pequenos de $\mu_s r$ pode mudar dependendo da razão μ_s/μ_R entre as escalas de renormalização e de não-localidade. Essa mudança de sinal ocorre aproximadamente para $\mu_s \approx \mu_R$, onde $\log(\mu_s^2/\mu_R^2)$ muda de sinal. Mais precisamente, para $\mu_s r \ll 1$ temos que

$$\begin{aligned} \rho_s^{(1)}(r) &= -\frac{\beta_s M \mu_s^5}{2^{\frac{5}{2N_s}+2} N_s^2 \pi^2} \Gamma\left(\frac{5}{2N_s}\right) \left[N_s \log\left(\frac{\mu_s^2}{\mu_R^2}\right) - \log 2 + \psi\left(\frac{5}{2N_s}\right) \right] + O(\mu_s^2 r^2), \quad (5.26) \\ M_s^{(1)}(r) &= -\frac{3\beta_s M \mu_s^2}{2^{\frac{5}{2N_s}} N_s^2 \pi} \Gamma\left(\frac{5}{2N_s}\right) \left[N_s \log\left(\frac{\mu_s^2}{\mu_R^2}\right) - \log 2 + \psi\left(\frac{5}{2N_s}\right) \right] (\mu_s r)^3 + O(\mu_s^5 r^5) \end{aligned} \quad (5.27)$$

e

$$\chi_s^{(1)}(r) = \frac{\beta_s GM \mu_s^3}{2^{\frac{3}{2N_s}} N_s^2 \pi} \Gamma\left(\frac{3}{2N_s}\right) \left[N_s \log\left(\frac{\mu_s^2}{\mu_R^2}\right) - \log 2 + \psi\left(\frac{3}{2N_s}\right) \right] + O(\mu_s^2 r^2). \quad (5.28)$$

¹ Para obter as expressões em (5.25), basta realizar a mudança de variáveis $k = q/r$ na integral (5.11) e observar que $e^{-2(q/\mu r)^{2N}} \rightarrow 1$ para $\mu r \gg 1$. Além disso, o termo proporcional a $\log(\mu_R)$ não contribui nesse limite, uma vez que o resultado da integral correspondente é uma função delta que se anula para $r \neq 0$. Para mais detalhes, veja, por exemplo, [28] e as referências ali contidas.

Portanto, as correções quânticas de um laço à fonte e à função de massa são negativas nas proximidades de $r = 0$ se

$$\log \left(\frac{\mu_s^2}{\mu_R^2} \right) > \frac{1}{N_s} \left[\log 2 - \psi \left(\frac{5}{2N_s} \right) \right], \quad (5.29)$$

enquanto a correção quântica ao potencial é positiva quando

$$\log \left(\frac{\mu_s^2}{\mu_R^2} \right) > \frac{1}{N_s} \left[\log 2 - \psi \left(\frac{3}{2N_s} \right) \right]. \quad (5.30)$$

Além disso, o gráfico da Fig. 15 revela um novo efeito interessante: embora a função massa clássica, dada pela Eq. (2.46), seja positiva de acordo com o Teorema 2 da Sec. **2.2.2**, a sua correção quântica a um laço muda de sinal um número finito de vezes. Os gráficos sugerem que, ao menos para pequenos valores inteiros de N_s , o número de mínimos locais negativos em $M_s^{(1)}(r)$ é igual a N_s quando a condição (5.29) é satisfeita, e igual a $N_s - 1$ caso contrário.

Como um teste de consistência, pode-se conferir se os resultados gerais obtidos aqui reproduzem $\chi_s^{(1)}(r)$ calculado em [28] para o caso particular $N_s = 1$. Primeiro, observe que [72]

$${}_1\Psi_1 [(a, 1); (b, 1); z] = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)} {}_1F_1(a; b; z), \quad (5.31)$$

em que ${}_1F_1(a; b; z) = M(a, b, z)$ é a função hipergeométrica confluyente de Kummer. Então,

$$\begin{aligned} {}_1\Psi_1 \left[\left(\frac{5}{2}, 1 \right); \left(\frac{3}{2}, 1 \right); -\frac{\mu_s^2 r^2}{8} \right] &= \frac{3}{2} {}_1F_1 \left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{\mu_s^2 r^2}{8} \right) = \frac{3}{2} e^{-\frac{\mu_s^2 r^2}{8}} {}_1F_1 \left(-1; \frac{3}{2}; \frac{\mu_s^2 r^2}{8} \right) \\ &= \frac{3}{2} e^{-\frac{\mu_s^2 r^2}{8}} \left(1 - \frac{\mu_s^2 r^2}{12} \right), \end{aligned} \quad (5.32)$$

$${}_1\Psi_1 \left[\left(\frac{5}{2}, 1 \right); \left(\frac{5}{2}, 1 \right); -\frac{\mu_s^2 r^2}{8} \right] = {}_1F_1 \left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; -\frac{\mu_s^2 r^2}{8} \right) = e^{-\frac{\mu_s^2 r^2}{8}}, \quad (5.33)$$

$${}_1\Psi_1 \left[\left(\frac{3}{2}, 1 \right); \left(\frac{3}{2}, 1 \right); -\frac{\mu_s^2 r^2}{8} \right] = {}_1F_1 \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{\mu_s^2 r^2}{8} \right) = e^{-\frac{\mu_s^2 r^2}{8}}. \quad (5.34)$$

Utilizando as identidades para as derivadas da função Ψ , obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} {}_1\Psi_1 \left[(a, 1); \left(\frac{3}{2}, 1 \right); -\frac{\mu_s^2 r^2}{8} \right] \Big|_{a=\frac{5}{2}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{5}{2} + k) \psi(\frac{5}{2} + k)}{\Gamma(\frac{3}{2} + k)} \frac{1}{k!} \left(-\frac{\mu_s^2 r^2}{8} \right)^k \\ &= \frac{3}{2} \left[e^{-\frac{\mu_s^2 r^2}{8}} \left(\frac{8}{3} - \gamma - 2 \log 2 \right) \left(1 - \frac{\mu_s^2 r^2}{12} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial a} {}_1F_1 \left(a, \frac{3}{2}, -\frac{\mu_s^2 r^2}{8} \right) \Big|_{a=\frac{5}{2}} \right], \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a} {}_1\Psi_1 \left[(a, 1); \left(\frac{5}{2}, 1 \right); -\frac{\mu_s^2 r^2}{8} \right] \Big|_{a=\frac{5}{2}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{5}{2} + k) \psi(\frac{5}{2} + k)}{\Gamma(\frac{5}{2} + k)} \frac{1}{k!} \left(-\frac{\mu_s^2 r^2}{8} \right)^k \\
&= -e^{-\frac{\mu_s^2 r^2}{8}} \left[\gamma - \frac{8}{3} + 2 \log 2 + \frac{\partial}{\partial a} {}_1F_1 \left(a; \frac{5}{2}; \frac{\mu_s^2 r^2}{8} \right) \Big|_{a=0} \right],
\end{aligned} \tag{5.36}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a} {}_1\Psi_1 \left[(a, 1); \left(\frac{3}{2}, 1 \right); -\frac{\mu_s^2 r^2}{8} \right] \Big|_{a=\frac{3}{2}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{3}{2} + k) \psi(\frac{3}{2} + k)}{\Gamma(\frac{3}{2} + k)} \frac{1}{k!} \left(-\frac{\mu_s^2 r^2}{8} \right)^k \\
&= -e^{-\frac{\mu_s^2 r^2}{8}} \left[\gamma - 2 + 2 \log 2 + \frac{\partial}{\partial a} {}_1F_1 \left(a; \frac{3}{2}; \frac{\mu_s^2 r^2}{8} \right) \Big|_{a=0} \right].
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Portanto, a substituição em (5.22), (5.23), e (5.24) fornece para $N_s = 1$

$$\begin{aligned}
\rho_s^{(1)}(r) &= -\frac{3\beta_s \mu_s^5}{32(2\pi)^{3/2}} \left\{ e^{-\frac{\mu_s^2 r^2}{8}} \left(1 - \frac{\mu_s^2 r^2}{12} \right) \left[\log \left(\frac{\mu_s^2}{\mu_R^2} \right) - 3 \log 2 + \frac{8}{3} - \gamma \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial a} {}_1F_1 \left(a; \frac{3}{2}; -\frac{\mu_s^2 r^2}{8} \right) \Big|_{a=\frac{5}{2}} \right\},
\end{aligned} \tag{5.38}$$

$$M_s^{(1)}(r) = -\frac{M\beta_s \mu_s^5 r^3}{16\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu_s^2 r^2}{8}} \left\{ \log \left(\frac{\mu_s^2}{\mu_R^2} \right) - 3 \log 2 + \frac{8}{3} - \gamma - \frac{\partial}{\partial a} {}_1F_1 \left(a, \frac{5}{2}, \frac{\mu_s^2 r^2}{8} \right) \Big|_{a=0} \right\}, \tag{5.39}$$

$$\chi_s^{(1)}(r) = \frac{\beta_s G M \mu_s^3}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu_s^2 r^2}{8}} \left\{ \log \left(\frac{\mu_s^2}{8\mu_R^2} \right) + 2 - \gamma - \frac{\partial}{\partial a} {}_1F_1 \left(a, \frac{3}{2}, \frac{\mu_s^2 r^2}{8} \right) \Big|_{a=0} \right\}. \tag{5.40}$$

A solução para a correção a um laço ao potencial concorda parcialmente com o resultado de [28], sendo a única diferença um fator multiplicativo no argumento do logaritmo. De fato, há um erro tipográfico na Eq. (100) de [28] e o resultado correto é dado por (5.40).

5.3 CASO $N_s = 1/2$

Tendo em vista o domínio de validade da função Ψ de Fox–Wright, as soluções (5.22), (5.23) e (5.24) são válidas apenas para $N_s > 1/2$. Para obter a solução no caso $N_s = 1/2$, basta substituir diretamente esse valor em (5.17), obtendo

$$\begin{aligned}
J(r, \alpha) &= \left(\frac{\mu}{\mu_R} \right)^{2\alpha-1} \frac{\sqrt{\pi} r}{2^{2\alpha+2}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2l + 2\alpha + 1)}{\Gamma(\frac{2l+3}{2})} \frac{1}{l!} \left(-\frac{r^2}{16} \right)^l \\
&= \frac{1}{2^{2\alpha+1} \alpha} \left(\frac{\mu}{\mu_R} \right)^{2\alpha-1} \left(1 + \frac{r^2}{4} \right)^{-\alpha} \Gamma(2\alpha + 1) \operatorname{sen} \left[2\alpha \arctan \left(\frac{r}{2} \right) \right].
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\rho_s^{(1)}(r) &= -\frac{2\beta_s M \mu_s^4}{\pi^2 (\mu_s^2 r^2 + 4)^4 r} \left\{ 4\mu_s r (\mu_s^2 r^2 - 4) \left[6\gamma - 11 - 3 \log \left(\frac{\mu_s^2}{\mu_R^2} \right) + 3 \log (\mu_s^2 r^2 + 4) \right] \right. \\
&\quad \left. + 3(\mu_s^4 r^4 - 24\mu_s^2 r^2 + 16) \arctan \left(\frac{\mu_s r}{2} \right) \right\},
\end{aligned} \tag{5.42}$$

$$M_s^{(1)}(r) = \frac{4\beta_s M \mu_s^2}{\pi(\mu_s^2 r^2 + 4)^3} \left\{ 2\mu_s r \left[(8\gamma - 11)\mu_s^2 r^2 - 4\mu_s^2 r^2 \log\left(\frac{\mu_s^2}{\mu_R^2}\right) \right. \right. \\ \left. \left. + 4\mu_s^2 r^2 \log(\mu_s^2 r^2 + 4) + 4 \right] + (3\mu_s^4 r^4 - 24\mu_s^2 r^2 - 16) \arctan\left(\frac{\mu_s r}{2}\right) \right\}, \quad (5.43)$$

$$\chi_s^{(1)}(r) = \frac{4\beta_s G M \mu_s^3}{\pi(\mu_s^2 r^2 + 4)^2} \left[4 - 4\gamma + 2 \log\left(\frac{\mu_s^2}{\mu_R^2}\right) - 2 \log(\mu_s^2 r^2 + 4) - \frac{(\mu_s^2 r^2 - 4)}{\mu_s r} \arctan\left(\frac{\mu_s r}{2}\right) \right], \quad (5.44)$$

em que $\gamma = 0,57721\dots$ é a constante de Euler–Mascheroni.

5.4 O LIMITE $N_s \rightarrow \infty$

Outro caso de interesse é o limite $N_s \rightarrow \infty$. Nesse limite, obtém-se

$$\lim_{N_s \rightarrow \infty} I_{N,\mu}(r, n) = \int_0^\mu dk k^n \text{sen}(kr) \log(k/\mu_R), \quad (5.45)$$

que pode ser avaliado diretamente para $n \in \{1, 3\}$, resultando em

$$\lim_{N_s \rightarrow \infty} \rho_s^{(1)}(r) = -\frac{\beta_s M}{\pi^2 r^5} \left\{ 6 \text{Si}(\mu_s r) + \left[\mu_s^2 r^2 + 3(\mu_s^2 r^2 - 2) \log\left(\frac{\mu_s}{\mu_R}\right) - 11 \right] \text{sen}(\mu_s r) \right. \\ \left. - \left[(\mu_s^2 r^2 - 6) \log\left(\frac{\mu_s}{\mu_R}\right) - 5 \right] \mu_s r \cos(\mu_s r) \right\}, \quad (5.46)$$

$$\lim_{N_s \rightarrow \infty} M_s^{(1)}(r) = \frac{4M\beta_s}{\pi r^2} \left\{ 3 \text{Si}(\mu_s r) + \left[3\mu_s r \cos(\mu_s r) - 3 \text{sen}(\mu_s r) + \mu_s^2 r^2 \text{sen}(\mu_s r) \right] \log\left(\frac{\mu_s}{\mu_R}\right) \right. \\ \left. + \mu_s r \cos(\mu_s r) - 4 \text{sen}(\mu_s r) \right\}, \quad (5.47)$$

$$\lim_{N_s \rightarrow \infty} \chi_s^{(1)}(r) = \frac{4\beta_s G M}{\pi r^3} \left\{ \text{sen}(\mu_s r) - \text{Si}(\mu_s r) - \left[\mu_s r \cos(\mu_s r) - \text{sen}(\mu_s r) \right] \log\left(\frac{\mu_s}{\mu_R}\right) \right\}. \quad (5.48)$$

As Figuras 17, 18 e 19 exibem (5.46), (5.47) e (5.48), respectivamente. O comportamento assintótico (5.25) é violado apenas para a função massa; a situação é muito semelhante à de seu análogo clássico, conforme discutido na Sec. **2.2.2**. De fato, para $\mu_s r \gg 1$ tem-se

$$\lim_{N_s \rightarrow \infty} M_s^{(1)}(r) \sim \frac{4\beta_s M \mu_s^2}{\pi} \log\left(\frac{\mu_s}{\mu_R}\right) \text{sen}(\mu_s r), \quad (5.49)$$

mostrando que o número de mudanças de sinal da função massa tende ao infinito quando $N_s \rightarrow \infty$.

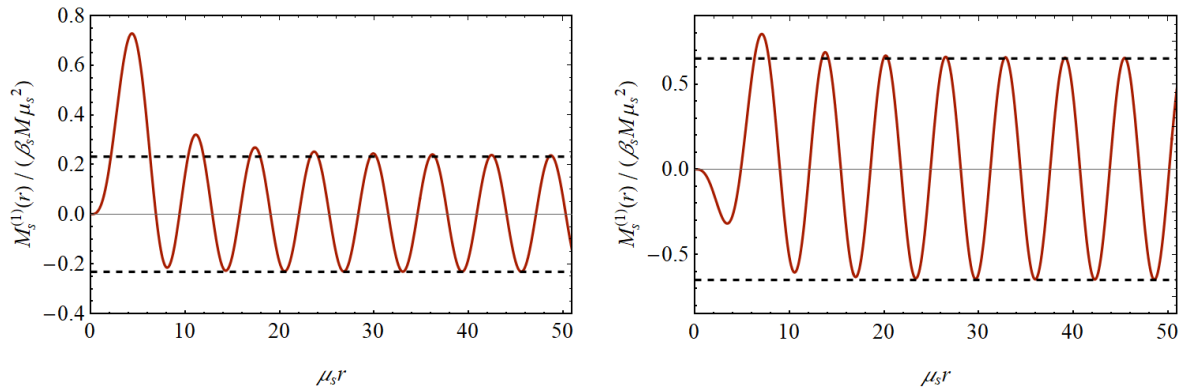


Figura 18 – Gráfico de $\lim_{N_s \rightarrow \infty} M_s^{(1)}(r) / (\beta_s M \mu_s^2)$ em função de $\mu_s r$. As linhas horizontais correspondem a $\pm 4 \log(\mu_s / \mu_R) / \pi$. Gráfico à esquerda: $\mu_R = 1, 2\mu_s$, $\pm 4 \log(\mu_s / \mu_R) / \pi = \pm 0, 232$. Gráfico à direita: $\mu_R = 0, 6\mu_s$, $\pm 4 \log(\mu_s / \mu_R) / \pi = \pm 0, 650$.

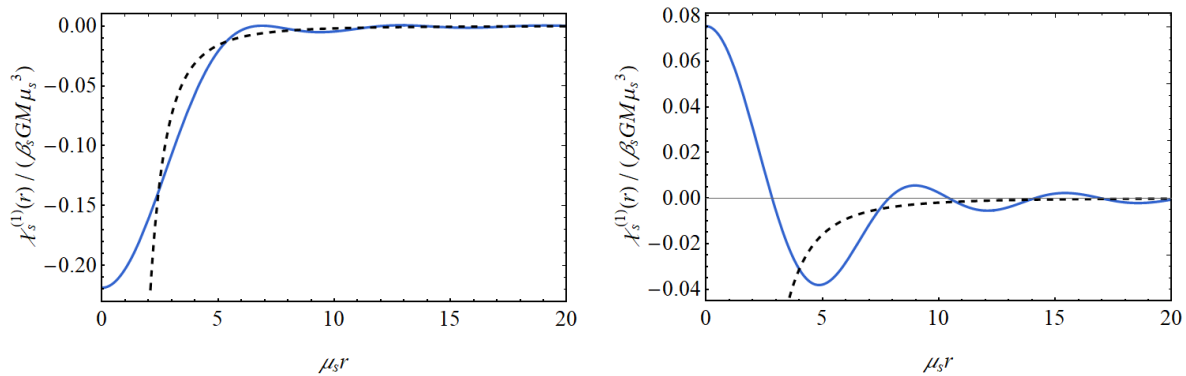


Figura 19 – Gráfico de $\lim_{N_s \rightarrow \infty} \chi_s^{(1)}(r) / (\beta_s G M \mu_s^3)$ em função de $\mu_s r$. Gráfico à esquerda: $\mu_R = 1, 2\mu_s$. Gráfico à direita: $\mu_R = 0, 6\mu_s$.

5.5 REGULARIDADE DOS INVARIANTES DE CURVATURA

Finalmente, uma vez que as correções a um laço para o potencial são funções pares de r , assim como seu análogo clássico, elas não comprometem a regularidade dos invariantes de curvatura em $r = 0$, discutida na Sec. 4. Isso ocorre porque a integral (5.6), que define as correções quânticas ao potencial, é semelhante à fonte efetiva clássica (2.15),

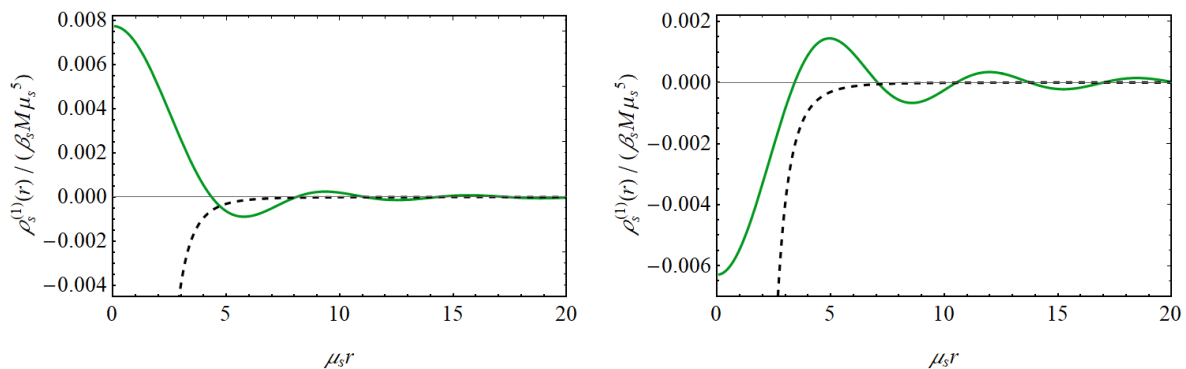


Figura 17 – Gráfico de $\lim_{N_s \rightarrow \infty} \rho_s^{(1)}(r) / (\beta_s M \mu_s^5)$ em função de $\mu_s r$. Gráfico à esquerda: $\mu_R = 1, 2\mu_s$. Gráfico à direita: $\mu_R = 0, 6\mu_s$.

mas com o fator de forma efetivo

$$\tilde{f}_s(k^2) = \frac{[f_s(-k^2)]^2}{\log(k^2/\mu_R^2)}. \quad (5.50)$$

Embora esse fator de forma efetivo não satisfaça $\tilde{f}_s(0) = 1$, ele cresce mais rápido que qualquer polinômio, garantindo que mesmo quando as correções quânticas logarítmicas a um laço são levadas em conta, o potencial Newtoniano permanece limitado, assim como todos os invariantes de curvatura que são polinomiais no tensor de Riemann e em suas derivadas [28].

6 CONCLUSÃO

Nos últimos anos, diversos modelos de gravitação não-local foram propostos, e os seus aspectos foram estudados sob diferentes perspectivas. Por exemplo, os trabalhos [28, 35] investigaram a questão da regularidade das soluções linearizadas. Nesta dissertação, os principais resultados dizem respeito ao comportamento das soluções no limite Newtoniano, com possíveis aplicações à fenomenologia do regime de campo fraco desses modelos.

Notou-se há algum tempo que o potencial Newtoniano modificado pode oscilar se os fatores de forma forem do tipo $f_s(\square) = \exp(-\square/\mu_s^2)^{N_s}$ com $N_s = 2, 3, \dots$ [31, 32, 33, 34], mas a explicação do motivo pelo qual isso não ocorre para $N_s = 1$, bem como uma análise comparativa detalhada dessas oscilações para diferentes valores de N_s ainda permaneciam em aberto. Tais questões também foram abordadas nesta dissertação, juntamente com as seguintes generalizações.

Primeiramente, as considerações aqui apresentadas não se restringiram apenas a valores inteiros de N_s , podendo este assumir qualquer valor real positivo. À primeira vista, tais fatores de forma não-polinomiais combinados com operadores fracionários podem parecer artificiais do ponto de vista de extensões da relatividade geral. Não obstante, eles permitem incorporar outras formulações da fenomenologia da gravitação quântica. À título de exemplo, modelos efetivos oriundos da geometria não-comutativa frequentemente utilizam fontes delta espalhadas com $N_s = 1/2$ [44, 45, 46], o que corresponde ao fator de forma $f_s(\square) = \exp\sqrt{-\square/\mu_s^2}$. Nesse sentido, os resultados advindos do formalismo das fontes efetivas e com valores genéricos de $N_s > 0$ podem encontrar aplicações além do escopo tradicional da gravitação não-local.

Além disso, foram obtidas diversas representações para a fonte efetiva $\rho_s(r)$, para a função massa $M_s(r)$ e para o potencial $\chi_s(r)$ em termos de integrais, de diversas de funções especiais e de séries de potências. Nos casos particulares em que $N_s \in \{1/2, 1\}$ e no limite $N_s \rightarrow \infty$, tais quantidades são conhecidas em forma compacta ou mesmo fechada. Desenvolvimentos matemáticos recentes da Ref. [36] também permitiram expressar as soluções para $N_s > 0$ genérico em formas extremamente compactas, elegantes e mais simples do que as representações anteriormente conhecidas em termos de funções hipergeométricas [30, 33, 73]. A principal consequência é que as fórmulas usuais para $N_s = 1$ podem ser diretamente estendidas para um $N_s > 0$ arbitrário simplesmente substituindo funções exponenciais tradicionais por funções exponenciais generalizadas, isto é, $\exp(z) \rightarrow \mathcal{E}_{N_s, \alpha}(z)$, em que $\alpha = 1$ para a função massa e para o potencial e $\alpha = 3$ no caso da fonte efetiva.

Com todas essas representações disponíveis, pôde-se obter diversos resultados, por exemplo:

- i. A fonte efetiva para os potenciais Newtonianos é estritamente positiva para $0 <$

$N_s \leq 1$ (Teorema 1). Isso explica a ausência de oscilações espaciais do potencial nesses modelos.

- ii. Embora a fonte efetiva oscile e assuma valores negativos se $N_s > 1$, a função massa efetiva M_s é sempre positiva (Teorema 2). Nessas condições, as oscilações das soluções no regime de campo fraco nesses modelos de gravitação não-local são muito diferentes daquelas da gravitação de Lee–Wick [51, 53], conforme discutido na Sec. 2.2.2. Como consequência física, a força gravitacional em qualquer modelo GF_N é sempre atrativa. Além disso, na seção supracitada foi obtida uma estimativa para a distância radial r_* a partir da qual as oscilações da força gravitacional são suprimidas, mostrando que ela cresce aproximadamente de forma linear com N_s .
- iii. Também foram obtidas aproximações para a função massa efetiva (Eq. (E.6)) e para o potencial Newtoniano (Eq. (3.20)), as quais podem ser utilizadas em aplicações fenomenológicas de modo mais eficiente do que as expressões exatas. Em particular, dispondo de expressões exatas e aproximações analíticas, no capítulo 3 discutiu-se a aproximação numérica proposta em [34], que foi utilizada para modelar experimentos de laboratório destinados a detectar oscilações na força gravitacional.
- iv. Verificou-se que todos os modelos com $N_s > 0$ possuem um limite Newtoniano completamente regular, sem singularidades de curvatura. Isso ocorre porque o fator de forma cresce mais rapidamente do que qualquer polinômio. Assim, não apenas os invariantes de curvatura linearizados, mas também aqueles que envolvem derivadas covariantes das curvaturas são limitados. Isso difere do limite Newtoniano de qualquer modelo local de gravitação com derivadas superiores e de modelos não-locais que apresentam comportamento polinomial no ultravioleta, pois nesses casos sempre existirão invariantes envolvendo derivadas da curvatura que são singulares [28].
- v. Por fim, mas não menos importante, aplicou-se o formalismo de fonte efetiva para calcular os efeitos das correções quânticas logarítmicas a um laço no limite Newtoniano das soluções. Verificou-se que elas reproduzem o comportamento previsto pela abordagem efetiva da gravitação quântica no limite $\mu_s r \gg 1$ e mostrou-se como elas podem se manifestar em escalas intermediárias. Por exemplo, a correção quântica para a fonte efetiva, a função de massa e o potencial tipicamente oscila e pode mudar de sinal para valores pequenos de $\mu_s r$, a depender da razão μ_s/μ_R . Ademais, embora a função massa efetiva clássica $M_s^{(0)}(r)$ seja sempre positiva, sua correção quântica de um laço $M_s^{(1)}(r)$ pode mudar de sinal um número finito de vezes em valores intermediários de $\mu_s r$. A interpretação física desse resultado interessante pode estar relacionada à manifestação de graus de liberdade do tipo fantasma gerados por correções quânticas [22], que podem assumir um comportamento taquiónico dependendo do valor de N_s .

Os resultados obtidos aqui, e em particular as aproximações para a função massa efetiva e para o potencial, podem ser utilizados para explorar a fenomenologia do regime de campo fraco da gravitação não-local. Evidentemente, também seria interessante investigar se e como as oscilações das soluções no limite Newtoniano se manifestam no regime totalmente não-linear, e se as singularidades de buracos negros podem realmente ser evitadas nesses modelos. No entanto, é extremamente difícil ir além da aproximação linear em modelos não-locais.

REFERÊNCIAS

- [1] C. M. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics*, 1993.
- [2] G. 't Hooft e M. J. G. Veltman, *One-loop divergencies in the theory of gravitation*, Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor. A **20**, 69 (1974).
- [3] S. Deser e P. van Nieuwenhuizen, *One Loop Divergences of Quantized Einstein-Maxwell Fields*, Phys. Rev. D **10**, 401 (1974).
- [4] S. Deser, H. S. Tsao e P. van Nieuwenhuizen, *One Loop Divergences of the Einstein Yang-Mills System*, Phys. Rev. D **10**, 3337 (1974).
- [5] M. H. Goroff e A. Sagnotti, *The Ultraviolet Behavior of Einstein Gravity*, Nucl. Phys. B **266**, 709 (1986).
- [6] K. S. Stelle, *Renormalization of Higher Derivative Quantum Gravity*, Phys. Rev. D **16**, 953 (1977).
- [7] M. Asorey, J. L. López e I. L. Shapiro, *Some remarks on high derivative quantum gravity*, Int. J. Mod. Phys. A **12**, 5711 (1997), arXiv:hep-th/9610006.
- [8] R. Utiyama e B. S. DeWitt, *Renormalization of a classical gravitational field interacting with quantized matter fields*, J. Math. Phys. **3**, 608 (1962).
- [9] C. M. Bender e P. D. Mannheim, *No-ghost theorem for the fourth-order derivative Pais-Uhlenbeck oscillator model*, Phys. Rev. Lett. **100**, 110402 (2008), arXiv:0706.0207.
- [10] C. M. Bender e P. D. Mannheim, *Exactly solvable PT-symmetric Hamiltonian having no Hermitian counterpart*, Phys. Rev. D **78**, 025022 (2008), arXiv:0804.4190.
- [11] A. Salvio e A. Strumia, *Quantum mechanics of 4-derivative theories*, Eur. Phys. J. C **76**, 227 (2016), arXiv:1512.01237.
- [12] D. Anselmi, *On the quantum field theory of the gravitational interactions*, J. High Energy Phys. **06**, 086 (2017), arXiv:1704.07728.
- [13] J. F. Donoghue e G. Menezes, *Unitarity, stability and loops of unstable ghosts*, Phys. Rev. D **100**, 105006 (2019), arXiv:1908.02416.
- [14] L. Modesto e I. L. Shapiro, *Superrenormalizable quantum gravity with complex ghosts*, Phys. Lett. B **755**, 279 (2016), arXiv:1512.07600.
- [15] L. Modesto, *Super-renormalizable or finite Lee-Wick quantum gravity*, Nucl. Phys. B **909**, 584 (2016), arXiv:1602.02421.
- [16] N. V. Krasnikov, *Nonlocal Gauge Theories*, Theor. Math. Phys. **73**, 1184 (1987) [Teor. Mat. Fiz. **73**, 235 (1987)].
- [17] Yu. V. Kuz'min, *Finite nonlocal gravity*, Sov. J. Nucl. Phys. **50**, 1011 (1989) [Yad. Fiz. **50**, 1630 (1989)].

- [18] E. T. Tomboulis, *Superrenormalizable gauge and gravitational theories*, arXiv:hep-th/9702146.
- [19] T. Biswas, A. Mazumdar e W. Siegel, *Bouncing universes in string-inspired gravity*, J. Cosmol. Astropart. Phys. **03**, 009 (2006), arXiv:hep-th/0508194.
- [20] L. Modesto, *Super-renormalizable quantum gravity*, Phys. Rev. D **86**, 044005 (2012), arXiv:1107.2403.
- [21] T. Biswas, E. Gerwick, T. Koivisto e A. Mazumdar, *Towards singularity and ghost free theories of gravity*, Phys. Rev. Lett. **108**, 031101 (2012), arXiv:1110.5249.
- [22] I. L. Shapiro, *Counting ghosts in the “ghost-free” non-local gravity*, Phys. Lett. B **744**, 67 (2015), arXiv:1502.00106.
- [23] K. J. Barnes, *Lagrangian Theory for the Second-Rank Tensor Field*, J. Math. Phys. **6**, 788 (1965).
- [24] R. J. Rivers, *Lagrangian theory for neutral massive spin-2 fields*, Nuovo Cimento **34**, 386 (1964).
- [25] I. Kolář e T. Málek, *Infinite derivative gravity resolves nonscalar curvature singularities*, Phys. Rev. D **108**, L081502 (2023), arXiv:2307.07285.
- [26] A. A. Tseytlin, *On singularities of spherically symmetric backgrounds in string theory*, Phys. Lett. B **363**, 223 (1995), arXiv:hep-th/9509050.
- [27] W. Siegel, *Stringy gravity at short distances*, arXiv:hep-th/0309093.
- [28] N. Burzillà, B. L. Giacchini, T. de P. Netto e L. Modesto, *Higher-order regularity in local and nonlocal quantum gravity*, Eur. Phys. J. C **81**, 462 (2021), arXiv:2012.11829.
- [29] B. L. Giacchini e T. de P. Netto, *Regular Black Holes from Higher-Derivative Effective Delta Sources*, in: *Regular Black Holes: Towards a New Paradigm of Gravitational Collapse*, edited by C. Bambi (Springer, Singapore, 2023), arXiv:2307.12357.
- [30] V. P. Frolov e A. Zelnikov, *Head-on collision of ultrarelativistic particles in ghost-free theories of gravity*, Phys. Rev. D **93**, 064048 (2016), arXiv:1509.03336.
- [31] J. Edholm, A. S. Koshelev e A. Mazumdar, *Behavior of the Newtonian potential for ghost-free gravity and singularity-free gravity*, Phys. Rev. D **94**, 104033 (2016), arXiv:1604.01989.
- [32] J. Edholm e A. Conroy, *Newtonian Potential and Geodesic Completeness in Infinite Derivative Gravity*, Phys. Rev. D **96**, 044012 (2017), arXiv:1705.02382.
- [33] J. Boos, *Gravitational Friedel oscillations in higher-derivative and infinite-derivative gravity?*, Int. J. Mod. Phys. D **27**, 1847022 (2018), arXiv:1804.00225.
- [34] L. Perivolaropoulos, *Submillimeter spatial oscillations of Newton’s constant: Theoretical models and laboratory tests*, Phys. Rev. D **95**, 084050 (2017), arXiv:1611.07293.

- [35] B. L. Giacchini e T. de P. Netto, *Effective delta sources and regularity in higher-derivative and ghost-free gravity*, J. Cosmol. Astropart. Phys. **1907**, 013 (2019), arXiv:1809.05907.
- [36] A. O. Barvinsky, P. I. Pronin e W. Wachowski, *Heat kernel for higher-order differential operators and generalized exponential functions*, Phys. Rev. D **100**, 105004 (2019), arXiv:1908.02161.
- [37] G. Calcagni, *Classical and quantum gravity with fractional operators*, Class. Quant. Grav. **38**, 165005 (2021) [erratum: Class. Quant. Grav. **38**, 169601 (2021)], arXiv:2106.15430.
- [38] A. Giusti, *MOND-like Fractional Laplacian Theory*, Phys. Rev. D **101**, 124029 (2020), arXiv:2002.07133.
- [39] V. P. Frolov, A. Zelnikov e T. de P. Netto, *Spherical collapse of small masses in the ghost-free gravity*, J. High Energy Phys. **1506**, 107 (2015), arXiv:1504.00412.
- [40] V. P. Frolov, *Mass-gap for black hole formation in higher derivative and ghost free gravity*, Phys. Rev. Lett. **115**, 051102 (2015), arXiv:1505.00492.
- [41] B. L. Giacchini e T. de P. Netto, *Weak-field limit and regular solutions in polynomial higher-derivative gravities*, Eur. Phys. J. C **79**, 217 (2019), arXiv:1806.05664.
- [42] L. Buoninfante, B. L. Giacchini e T. de P. Netto, *Black Holes in Non-local Gravity*, in: *Handbook of Quantum Gravity*, edited by C. Bambi, L. Modesto and I. L. Shapiro, (Springer, Singapore, 2024), arXiv:2211.03497.
- [43] P. Nicolini, A. Smailagic e E. Spallucci, *Noncommutative geometry inspired Schwarzschild black hole*, Phys. Lett. B **632**, 547 (2006), arXiv:gr-qc/0510112.
- [44] K. Nozari e S. H. Mehdipour, *Hawking Radiation as Quantum Tunneling from Noncommutative Schwarzschild Black Hole*, Class. Quant. Grav. **25**, 175015 (2008), arXiv:0801.4074.
- [45] J. Liang e B. Liu, *Thermodynamics of noncommutative geometry inspired BTZ black hole based on Lorentzian smeared mass distribution*, EPL **100**, 30001 (2012).
- [46] P. K. F. Kuhfittig, *Macroscopic traversable wormholes with zero tidal forces inspired by noncommutative geometry*, Int. J. Mod. Phys. D **24**, 1550023 (2015), arXiv:1412.4267.
- [47] A. Mathai, R. Saxena, H. Haubold, *The H-Function: Theory and Applications*, (Springer, New York, 2009).
- [48] E. V. Gorbar e I. L. Shapiro, *Renormalization group and decoupling in curved space*, J. High Energy Phys. **02**, 021 (2003), arXiv:hep-ph/0210388.
- [49] S. Deser e R. P. Woodard, *Nonlocal Cosmology*, Phys. Rev. Lett. **99**, 111301 (2007), arXiv:0706.2151.
- [50] P. G. Ferreira e A. L. Maroto, *A few cosmological implications of tensor nonlocalities*, Phys. Rev. D **88**, 123502 (2013), arXiv:1310.1238.

- [51] A. Accioly, B. L. Giacchini e I. L. Shapiro, *Low-energy effects in a higher-derivative gravity model with real and complex massive poles*, Phys. Rev. D **96**, 104004 (2017), arXiv:1610.05260.
- [52] B. L. Giacchini, *On the cancellation of Newtonian singularities in higher-derivative gravity*, Phys. Lett. B **766**, 306 (2017), arXiv:1609.05432.
- [53] N. Burzillà, B. L. Giacchini, T. de P. Netto e L. Modesto, *Regular multi-horizon Lee-Wick black holes*, J. Cosmol. Astropart. Phys. **11**, 067 (2023), arXiv:2308.12810.
- [54] A. Accioly, B. L. Giacchini e I. L. Shapiro, *On the gravitational seesaw in higher-derivative gravity*, Eur. Phys. J. C **77**, 540 (2017), arXiv:1604.07348.
- [55] L. Buoninfante e B. L. Giacchini, *Light bending by a slowly rotating source in quadratic theories of gravity*, Phys. Rev. D **102**, 024020 (2020), arXiv:2005.05355.
- [56] I. Antoniou e L. Perivolaropoulos, *Constraints on spatially oscillating sub-mm forces from the Stanford Optically Levitated Microsphere Experiment data*, Phys. Rev. D **96**, 104002 (2017), arXiv:1708.02117.
- [57] A. Krishak e S. Desai, *Model comparison tests of modified gravity from the Eöt-Wash experiment*, J. Cosmol. Astropart. Phys. **2020**, 006 (2020), arXiv:2003.10127.
- [58] A. Koldobsky, *Fourier Analysis in Convex Geometry*, (Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, 2005).
- [59] T. de P. Netto, B. L. Giacchini, N. Burzillà e L. Modesto, *On effective models of regular black holes inspired by higher-derivative and nonlocal gravity*, Nucl. Phys. B **1007**, 116674 (2024), arXiv:2308.12251.
- [60] *The NIST Handbook of Mathematical Functions*, edited by F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert e C. W. Clark (Cambridge University Press, New York, 2010).
- [61] B. Rowe, M. Jarvis, R. Mandelbaum, G. M. Bernstein, J. Bosch, *et al.*, *GalSim: The modular galaxy image simulation toolkit*, Astronomy and Computing **10**, 121 (2015), arXiv:1407.7676.
- [62] K. A. Bronnikov e S. G. Rubin, *Black Holes, Cosmology, and Extra Dimensions* (World Scientific, Singapore, 2012).
- [63] T. Antonelli e M. Sebastianutti, *Singularity and differentiability at the origin of regular black holes*, arXiv:2509.15477.
- [64] N. Burzillà, B. L. Giacchini, T. de P. Netto e L. Modesto, *Newtonian potential in higher-derivative quantum gravity*, Phys. Rev. D **103**, 064080 (2021), arXiv:2012.06254.
- [65] A. Conroy, T. Koivisto, A. Mazumdar e A. Teimouri, *Generalized quadratic curvature, non-local infrared modifications of gravity and Newtonian potentials*, Class. Quant. Grav. **32**, 015024 (2015), arXiv:1406.4998.
- [66] T. de P. Netto, L. Modesto e I. L. Shapiro, *Universal leading quantum correction to the Newton potential*, Eur. Phys. J. C **82**, 160 (2022), arXiv:2110.14263.

- [67] T. Appelquist e J. Carazzone, *Infrared Singularities and Massive Fields*, Phys. Rev. D **11**, 2856 (1975).
- [68] E. V. Gorbar e I. L. Shapiro, *Renormalization group and decoupling in curved space. 2. The Standard model and beyond*, J. High Energy Phys. **06**, 004 (2003), arXiv:hep-ph/0303124.
- [69] S. A. Franchino-Viñas, T. de P. Netto, I. L. Shapiro e O. Zanusso, *Form factors and decoupling of matter fields in four-dimensional gravity*, Phys. Lett. B **790**, 229 (2019), arXiv:1812.00460.
- [70] S. A. Franchino-Viñas, T. de P. Netto e O. Zanusso, *Vacuum effective actions and mass-dependent renormalization in curved space*, Universe **5**, 67 (2019), arXiv:1902.03167.
- [71] W. Wachowski e P. I. Pronin, *Heat kernel for higher-order differential operators in Euclidean space*, arXiv:1812.11399.
- [72] A. R. Miller, I. S. Moskowitz, *Reduction of a class of Fox-Wright psi functions for certain rational parameters*, Computers Math. Applic. **30**, 73 (1995).
- [73] Z. Mo, T. de P. Netto, N. Burzillà e L. Modesto, *Stringballs and Planckballs for dark matter*, J. High Energy Phys. **07**, 131 (2022), arXiv:2202.04540.
- [74] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, *Tables of integrals, series and products*, 7th ed., edited by A. Jeffrey and D. Zwillinger (Academic Press, San Diego, 2007).
- [75] N. C. Sagias, G. K. Karagiannidis, D. A. Zogas, P. T. Mathiopoulos e G. S. Tombras, *Performance Analysis of Dual Selection Diversity in Correlated Weibull Fading Channels*, IEEE Transactions on Communications **52**, 1063 (2004).
- [76] V. S. Adamchik e O. I. Marichev, *The algorithm for calculating integrals of hypergeometric type functions and its realization in REDUCE system*, in Proc. Int. Conf. Symbolic and Algebraic Computation, Tokyo, Japan, 1990, Eq. (21) pp. 212.
- [77] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev, *Integrals and Series. Vol. 3: More special functions*, (Gordon and Breach Sci. Publ., New York, 1989), pp. 346.

APÊNDICE A – Soluções em termos de funções hipergeométricas generalizadas

Os trabalhos prévios sobre modelos GF_N que analisaram suas soluções no limite Newtoniano para $N > 1$ resumem-se da seguinte forma: em [33] a fonte efetiva foi obtida para $N \in \{2, 3\}$ e o potencial Newtoniano foi calculado para $N \in \{2, 4\}$ em [30] e para $N = 2$ em [73]. Nesses trabalhos, as expressões para essas quantidades envolveram uma soma finita de funções hipergeométricas generalizadas, as quais se tornam mais complicadas à medida que o valor de N aumenta.¹ Neste apêndice mostra-se que para $N_s \in \mathbb{N}$ as soluções obtidas no capítulo 4 podem ser expressas em termos de funções hipergeométricas generalizadas.

A tarefa básica é demonstrar que a expressão em série de potências para a integral $I_N(r)$, isto é,

$$I_N(r) = \frac{1}{2N} \sum_{p=0}^{\infty} C_p, \quad C_p = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} \Gamma\left(\frac{2p+3}{2N}\right) r^{2p}, \quad (\text{A.1})$$

tem como resultado uma soma finita de funções hipergeométricas generalizadas para $N \in \mathbb{N}$. Utilizando a identidade

$$(2p)! = 2^{2p} p! \frac{\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}, \quad (\text{A.2})$$

pode-se expressar o fator $(2p+1)!$ em (A.1) na forma

$$(2p+1)! = (2p+1)(2p)! = 2^{2p} p! \left(\frac{p + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) \frac{\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 2^{2p} p! \frac{\Gamma\left(p + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}, \quad (\text{A.3})$$

o qual pode ser reescrito como

$$(2p+1)! = 2^{2p} (1)_{(p)} \left(\frac{3}{2}\right)_{(p)}, \quad (\text{A.4})$$

em que $(a)_{(n)} = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ denota o fatorial ascendente ou símbolo de Pochhammer. Uma vez que

$$\sum_{p=0}^{\infty} C_p = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{N-1} C_{Nq+\ell}, \quad (\text{A.5})$$

para qualquer série convergente, obtém-se para (A.1)

$$I_N(r) = \frac{1}{2N} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{N-1} C_{Nq+\ell}, \quad (\text{A.6})$$

em que

$$C_{Nq+\ell} = \frac{1}{(1)_{(Nq+\ell)} \left(\frac{3}{2}\right)_{(Nq+\ell)}} \Gamma\left(q + \frac{3+2\ell}{2N}\right) (-1)^{Nq+\ell} \left(\frac{r}{2}\right)^{2Nq+2\ell}. \quad (\text{A.7})$$

¹ A representação em série de potências para o potencial foi obtida em [31].

O próximo passo consiste em utilizar as propriedades do fatorial ascendente

$$(a)_{(n+k)} = (a)_{(k)}(a+k)_{(n)}, \quad (\text{A.8})$$

$$(a)_{(kn)} = k^{kn} \times \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{a+j}{k} \right)_{(n)}, \quad (\text{A.9})$$

para obter

$$(1)_{(Nq+\ell)} \left(\frac{3}{2} \right)_{(Nq+\ell)} = (1)_{(\ell)} \left(\frac{3}{2} \right)_{(\ell)} (N)^{2Nq} \prod_{j=2}^{2N+1} \left(\frac{2\ell+j}{2N} \right)_{(q)}. \quad (\text{A.10})$$

A identidade acima combinada com

$$\Gamma \left(q + \frac{3+2\ell}{2N} \right) = \left(\frac{3+2\ell}{2N} \right)_{(q)} \Gamma \left(\frac{3+2\ell}{2N} \right), \quad (\text{A.11})$$

fornece o resultado para (A.7):

$$C_{Nq+\ell} = \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} \Gamma \left(\frac{3+2\ell}{2N} \right) r^{2\ell} \frac{1}{\prod_{\substack{j=2 \\ j \neq 3}}^{2N+1} \left(\frac{2\ell+j}{2N} \right)_{(q)}} (-1)^{Nq} \left(\frac{r}{2N} \right)^{2Nq}, \quad (\text{A.12})$$

em que se utilizou (A.4) novamente. Portanto,

$$I_N(r) = \frac{1}{2N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} \Gamma \left(\frac{3+2\ell}{2N} \right) r^{2\ell} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{\prod_{\substack{j=2 \\ j \neq 3 \\ j \neq 2(l-N)}}^{2N+1} \left(\frac{2\ell+j}{2N} \right)_{(q)}} \frac{(-1)^{Nq}}{q!} \left(\frac{r}{2N} \right)^{2Nq}. \quad (\text{A.13})$$

Uma vez que a função hipergeométrica generalizada ${}_pF_q$ é definida por

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^p (a_i)_{(n)}}{\prod_{j=1}^q (b_j)_{(n)}} \frac{z^n}{n!}, \quad (\text{A.14})$$

encontra-se que

$$I_N(r) = \frac{1}{2N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} \Gamma \left(\frac{2\ell+3}{2N} \right) r^{2\ell} \times \\ \times {}_0F_{2N-2} \left(-; \frac{\ell+1}{N}, \frac{\ell+2}{N}, \dots, \frac{\ell+N}{N}, \frac{2\ell+5}{2N}, \frac{2\ell+7}{2N}, \dots, \frac{2\ell+2N+1}{2N}; \left(-\frac{r^2}{4N} \right)^N \right)^*, \quad (\text{A.15})$$

em que, seguindo a notação padrão [74], o asterisco indica a omissão do termo que corresponde a $j = 2l - 2N$.

Portanto, a Eq. (2.19) implica

$$\rho_s(r) = \frac{M\mu_s^3}{4\pi^2 N_s} \sum_{\ell=0}^{N_s-1} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} \Gamma \left(\frac{2\ell+3}{2N_s} \right) (\mu_s r)^{2\ell} \times \\ \times {}_0F_{2N_s-2} \left(-; \frac{\ell+1}{N_s}, \frac{\ell+2}{N_s}, \dots, \frac{\ell+N_s}{N_s}, \frac{2\ell+5}{2N_s}, \frac{2\ell+7}{2N_s}, \dots, \frac{2\ell+2N_s+1}{2N_s}; \left(-\frac{\mu_s^2 r^2}{4N_s} \right)^{N_s} \right)^*. \quad (\text{A.16})$$

A partir da fonte efetiva, pode-se obter a função massa e o potencial Newtoniano utilizando (2.17) e (2.18) bem como a fórmula de integração [74]

$$\int_0^y dx x^{\alpha-1} {}_pF_q(a_p; b_q; \omega x^n) = \frac{y^\alpha}{\alpha} {}_{p+1}F_{q+1}\left(a_p, \frac{\alpha}{n}; b_q, \frac{\alpha}{n} + 1; \omega y^n\right). \quad (\text{A.17})$$

Os resultados são, respectivamente,

$$\begin{aligned} M_s(r) &= \frac{M}{\pi N_s} \sum_{\ell=0}^{N_s-1} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} \Gamma\left(\frac{2\ell+3}{2N_s}\right) \frac{(\mu_s r)^{2\ell+3}}{2\ell+3} \times \\ &\times {}_1F_{2N-1}\left(\frac{2\ell+3}{2N_s}; \frac{\ell+1}{N_s}, \frac{\ell+2}{N_s}, \dots, \frac{\ell+N_s}{N_s}, \frac{2\ell+5}{2N_s}, \frac{2\ell+7}{2N_s}, \dots, \frac{2\ell+2N_s+3}{2N_s}; \left(-\frac{\mu_s^2 r^2}{4N_s}\right)^{N_s}\right)^* \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

e

$$\begin{aligned} \chi_s(r) &= -\frac{GM\mu_s}{\pi N_s} \sum_{\ell=0}^{N_s-1} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} \Gamma\left(\frac{2\ell+1}{2N_s}\right) (\mu_s r)^{2\ell} \times \\ &\times {}_1F_{2N-1}\left(\frac{2\ell+1}{2N_s}; \frac{2\ell+2}{2N_s}, \frac{2\ell+3}{2N_s}, \dots, \frac{2\ell+2N_s}{2N_s}, \frac{2\ell+2N_s+1}{2N_s}; \left(-\frac{\mu_s^2 r^2}{4N_s}\right)^{N_s}\right)^*. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

APÊNDICE B – Soluções em termos da função G de Meijer

A função $f_\beta(t) = \exp(-t^\beta)$, que corresponde ao fator de forma (1.5), é por vezes denominada função exponencial esticada e possui aplicações em contextos distintos. Por exemplo, ela é tipicamente empregada em descrições fenomenológicas de relaxação mecânica em sistemas desordenados, bem como na estatística da distribuição cumulativa complementar de Weibull. Por essas razões, existe uma vasta literatura dedicada ao estudo de integrais que envolvem a função exponencial esticada. Uma das técnicas para tratar integrais que contém $f_\beta(t)$ (veja, por exemplo, [75] e referências ali citadas) consiste em expressar as funções não-polinomiais presentes no integrando em termos da função G de Meijer

$$G_{p,q}^{m,n} \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \middle| x \right)$$

e aplicar a fórmula de integração para

$$\int_0^\infty dx x^{\alpha-1} G_{u,v}^{s,t} \left(\begin{matrix} c_1, \dots, c_u \\ d_1, \dots, d_v \end{matrix} \middle| \sigma x \right) G_{p,q}^{m,n} \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \middle| \omega x^{l/k} \right), \quad (\text{B.1})$$

a qual pode ser encontrada, por exemplo, nas Refs. [76, 77].

A fim de aplicar as prescrições supracitadas para a integral (2.20) (considerando $N \in \mathbb{N}$), utiliza-se

$$e^{-f(x)} = G_{0,1}^{1,0} \left(\begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix} \middle| f(x) \right) \quad \text{e} \quad \text{sen}(x) = \sqrt{\pi} G_{0,2}^{1,0} \left(\begin{matrix} - \\ \frac{1}{2}, 0 \end{matrix} \middle| \frac{x^2}{4} \right), \quad (\text{B.2})$$

de modo que

$$\begin{aligned} I_N(r) &= \frac{\sqrt{\pi}}{r} \int_0^\infty dk k G_{0,2}^{1,0} \left(\begin{matrix} - \\ \frac{1}{2}, 0 \end{matrix} \middle| \frac{r^4 k^2}{4} \right) G_{0,1}^{1,0} \left(\begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix} \middle| k^{2N} \right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \int_0^\infty dx G_{0,2}^{1,0} \left(\begin{matrix} - \\ \frac{1}{2}, 0 \end{matrix} \middle| \frac{r^4 x}{4} \right) G_{0,1}^{1,0} \left(\begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix} \middle| x^N \right). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Logo, a integral relevante é da forma (B.1) com a seguinte identificação: $\alpha = 1$, $s = 1$, $t = 0$, $u = 0$, $v = 2$, $m = 1$, $n = 0$, $p = 0$, $q = 1$, $\omega = 1$, $l = N$, $k = 1$, $d_1 = 1/2$, $d_2 = 0$, $b_1 = 0$, e $\sigma = r^2/4$ (os termos a_p - e c_u são ausentes). Logo, utilizando a fórmula que pode ser encontrada em [76, 77], o resultado para (B.3) é

$$I_N(r) = \frac{2N^{3/2} \sqrt{\pi}}{r^3} G_{2N,1}^{1,N} \left(\begin{matrix} -\frac{1}{2N}, \frac{1}{2N}, \dots, \frac{2N-3}{2N}, 0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{N-1}{N} \\ 0 \end{matrix} \middle| \left(\frac{2N}{r} \right)^{2N} \right). \quad (\text{B.4})$$

A fórmula acima pode ser simplificada utilizando identidades tais como [74]

$$G_{pq}^{mn} \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_{q-1}, a_1 \end{matrix} \middle| z \right) = G_{p-1, q-1}^{m-1, n} \left(\begin{matrix} a_2, \dots, a_p \\ b_1, b_2, \dots, b_{q-1} \end{matrix} \middle| z \right), \quad n, p, q \geq 1, \quad (\text{B.5})$$

$$z^\alpha G_{pq}^{mn} \left(\begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix} \middle| z \right) = G_{pq}^{mn} \left(\begin{matrix} a_q + \alpha \\ b_p + \alpha \end{matrix} \middle| z \right), \quad (\text{B.6})$$

e

$$G_{pq}^{mn} \left(\begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix} \middle| z \right) = G_{qp}^{mm} \left(\begin{matrix} 1 - b_q \\ 1 - a_p \end{matrix} \middle| \frac{1}{z} \right), \quad (\text{B.7})$$

que fornecem

$$I_N(r) = \frac{\sqrt{\pi}}{4N^{3/2}} G_{0,2N-1}^{N,0} \left(\begin{matrix} - \\ 0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}, -\frac{1}{2N}, \frac{1}{2N}, \dots, \frac{2N-3}{2N} \end{matrix} \middle| \left(\frac{r}{2N} \right)^{2N} \right). \quad (\text{B.8})$$

Esta expressão corresponde à fonte efetiva, ao passo que a função massa e o potencial podem ser obtidos por meio da fórmula de integração

$$\int_0^y dx x^{\alpha-1} G_{pq}^{mn} \left(\begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix} \middle| \omega x \right) = y^\alpha G_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_n, 1 - \alpha; a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m; \alpha, b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \middle| \omega y \right). \quad (\text{B.9})$$

Os resultados explícitos são

$$\rho_s(r) = \frac{M\mu_s^3}{(4\pi N_s)^{3/2}} G_{0,2N_s-1}^{N_s,0} \left(\begin{matrix} - \\ 0, \frac{1}{N_s}, \frac{2}{N_s}, \dots, \frac{N_s-1}{N_s}; -\frac{1}{2N_s}, \frac{1}{2N_s}, \dots, \frac{2N_s-3}{2N_s} \end{matrix} \middle| \left(\frac{\mu_s r}{2N_s} \right)^{2N_s} \right), \quad (\text{B.10})$$

$$M_s(r) = 2M \sqrt{\frac{N_s}{\pi}} G_{1,2N_s}^{N_s,1} \left(\begin{matrix} 1 \\ \frac{3}{2N_s}, \frac{5}{2N_s}, \dots, \frac{2N_s+1}{2N_s}; 0, \frac{1}{N_s}, \frac{2}{N_s}, \dots, \frac{N_s-1}{N_s} \end{matrix} \middle| \left(\frac{\mu_s r}{2N_s} \right)^{2N_s} \right), \quad (\text{B.11})$$

$$\chi_s(r) = -\frac{GM\mu_s}{2\sqrt{\pi}N_s^{3/2}} G_{1,2N_s}^{N_s,1} \left(\begin{matrix} \frac{2N_s-1}{2N_s} \\ 0, \frac{1}{N_s}, \frac{2}{N_s}, \dots, \frac{N_s-1}{N_s}; -\frac{1}{2N_s}, \frac{1}{2N_s}, \dots, \frac{2N_s-3}{2N_s} \end{matrix} \middle| \left(\frac{\mu_s r}{2N_s} \right)^{2N_s} \right). \quad (\text{B.12})$$

Por fim, vale destacar que as expressões acima são equivalentes àquelas obtidas no Apêndice , tendo em vista que [74]

$$G_{p,q}^{m,n} \left(\begin{matrix} a_q \\ b_q \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{h=1}^m \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - b_h)^* \prod_{j=1}^n \Gamma(1 + b_h - a_j)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 + b_h - b_j) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - b_h)} z^{b_h} \times \\ \times {}_pF_{q-1} \left(1 + b_h - a_p; (1 + b_h - b_q)^*; (-1)^{p-m-n} z \right). \quad (\text{B.13})$$

Ademais, há um aspecto curioso sobre essas equações: embora o argumento das expressões (B.10)–(B.12) seja $(\mu_s r / 2N_s)^{2N_s}$, isso não implica que tais expressões sejam funções pares de r . Com efeito, como se observa no lado esquerdo de (B.13), a paridade da função G é determinada pela sequência b_q (cujos elementos aparecem nos fatores z^{b_h}), tendo em vista que, neste caso, ${}_pF_q$ é uma função par. Sendo assim, os coeficientes presentes nas Eqs. (B.10)–(B.12) podem ser escritos na forma

$$b_q = \left(\frac{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_m}{2N_s}; \frac{\tilde{b}_{m+1}, \dots, \tilde{b}_q}{2N_s} \right) \quad (\text{B.14})$$

de modo que

$$z^{b_h} = \left(\frac{\mu_s r}{2N_s} \right)^{\tilde{b}_h}, \quad \text{em que} \quad 1 \leq h \leq m. \quad (\text{B.15})$$

Portanto, se $(\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_m)$ é uma sequência de números pares (ímpares), o objeto correspondente é uma função par (ímpar) de r . Isso posto, a fonte efetiva e o potencial são funções pares, ao passo que a função massa é ímpar, como deve ser em modelos cujo fator de forma $f_s(-k^2)$ cresce mais rapidamente que qualquer polinômio [28, 29].

APÊNDICE C – Análise de convergência da série (2.25)

Neste apêndice, analisa-se a convergência da série (2.25). Seja

$$a_\ell = \frac{(-1)^\ell}{(2\ell + 1)!} \Gamma\left(\frac{2\ell + 3}{2N}\right) \quad (\text{C.1})$$

para todo $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Utilizando a propriedade $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$, a equação acima pode ser reescrita como

$$a_\ell = \frac{(-1)^\ell}{(2\ell + 1)!} \frac{2N}{2\ell + 3} \Gamma\left(1 + \frac{2\ell + 3}{2N}\right), \quad (\text{C.2})$$

de sorte que

$$\left|\frac{a_{\ell+1}}{a_\ell}\right| = \frac{1}{(2\ell + 2)(2\ell + 5)} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2\ell+5}{2N}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{2\ell+3}{2N}\right)}. \quad (\text{C.3})$$

Da fórmula de Stirling para a função gama, válida para z suficientemente grande, segue que

$$\Gamma(1 + z) \sim \sqrt{2\pi z} \left(\frac{z}{e}\right)^z, \quad (\text{C.4})$$

o que implica

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \left|\frac{a_{\ell+1} r^{2(\ell+1)}}{a_\ell r^{2\ell}}\right| \sim \frac{r^2}{4N^{\frac{1}{N}}} \ell^{\frac{1}{N}-2}. \quad (\text{C.5})$$

Conseqüentemente, pelo teste da razão, a série converge absolutamente em \mathbb{R} para $N > 1/2$. Ademais, como toda série de potências converge uniformemente em qualquer intervalo compacto contido em seu raio de convergência, conclui-se que a série (2.24) converge uniformemente em $[0, L]$, para todo $L > 0$, sempre que $N > 1/2$. Por outro lado, se $N < 1/2$, a série converge somente em $r = 0$. No caso crítico $N = 1/2$, embora a série convirja para $|r| < 1$, ela pode ser somada analiticamente, resultado na expressão fechada [*viz.* Eq (2.22)],

$$I_{1/2}(r) = \frac{2}{(1 + r^2)^2}; \quad (\text{C.6})$$

veja também a Eq. (2.27) e a discussão ali apresentada.

APÊNDICE D – Representações integrais úteis e demonstração do Teorema 2

Partindo-se das Eqs. (2.28) e (2.29) é possível construir representações integrais alternativas para a fonte efetiva, função massa e potencial Newtoniano, dadas por

$$\rho_s(r) = \frac{M}{2\pi^2 r^3} \int_0^\infty dt \left[\text{sen}(\mu_s r t^{\frac{1}{2N_s}}) - (\mu_s r t^{\frac{1}{2N_s}}) \cos(\mu_s r t^{\frac{1}{2N_s}}) \right] e^{-t}, \quad (\text{D.1})$$

$$M_s(r) = \frac{2M}{\pi} \int_0^\infty dt \left[\text{Si}(\mu_s r t^{\frac{1}{2N_s}}) - \text{sen}(\mu_s r t^{\frac{1}{2N_s}}) \right] e^{-t}, \quad (\text{D.2})$$

$$\chi_s(r) = -\frac{2GM}{\pi r} \int_0^\infty dt \text{Si}(\mu_s r t^{\frac{1}{2N_s}}) e^{-t}, \quad (\text{D.3})$$

em que $\text{Si}(z)$ é a função seno integral (3.11). As representações acima são válidas para todo $N_s > 0$, e são úteis tanto na demonstração de algumas propriedades gerais (como a positividade da função massa) quanto na realização de cálculos numéricos. Notadamente, o limite $N_s \rightarrow \infty$ pode ser avaliado diretamente, o que resulta nas Eqs. (3.7), (3.10), e (3.12). Esse fato torna o cálculo numérico de (D.1)–(D.3) estável e eficiente mesmo para valores grandes de N_s , o que permite extrapolar algumas considerações da Sec. 2.2.2 até $N_s = 1000$.

De posse da representação integral (D.2), a demonstração do Teorema 2 da Sec. 2.2.2 é imediata. Com efeito, é suficiente mostrar que o integrando da Eq. (D.2) é positivo, isto é,

$$g(x) \equiv \text{Si}(x) - \text{sen}(x) > 0, \quad x > 0. \quad (\text{D.4})$$

Para esse fim, considere separadamente os intervalos $0 < x < \pi$ e $x > \pi$. No primeiro caso, note que $g(0) = 0$ e $g'(x) = \frac{\text{sen } x}{x} - \cos x > 0$ para $x \in (0, \pi)$, o que implica $g(x) > 0$ nesse intervalo. Para $x > \pi$ a desigualdade

$$x > 0 \quad \implies \quad \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} \leq \text{Si}(x) \leq \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}, \quad (\text{D.5})$$

fornece

$$g(x) \geq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} - 1 \geq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi} - 1 > 0. \quad (\text{D.6})$$

Isso demonstra a desigualdade (D.4) e, por conseguinte, a positividade da função massa efetiva.

APÊNDICE E – Oscilações da função massa

Outra aplicação útil da representação integral (D.2) para a função massa é estimar o ponto $r_* \gg 1/\mu_s$, no qual as oscilações são suprimidas e além do qual $M_s(r) \approx M$ (veja a discussão na Sec. 2.2.2). Primeiramente, note-se que, para $\mu_s r \gg 1$, a integral do primeiro termo em (D.2) tende a $\pi/2$,

$$\int_0^\infty dt \operatorname{Si}(\mu_s r t^{\frac{1}{2N_s}}) e^{-t} \underset{\mu_s r \gg 1}{\sim} \int_0^\infty dt \frac{\pi}{2} e^{-t} = \frac{\pi}{2}, \quad (\text{E.1})$$

como pode ser demonstrado usando a desigualdade (D.5). Uma vez que a função massa oscila apenas para $N_s > 1$, emprega-se a expansão

$$t^{\frac{1}{2N_s}} = e^{\frac{1}{2N_s} \log t} = 1 + \frac{\log t}{2N_s} + O(N_s^{-2}), \quad (\text{E.2})$$

para o segundo termo na integral (D.2), de modo que, para $N_s \gg 1$, tem-se

$$\int_0^\infty dt \operatorname{sen}(\mu_s r t^{\frac{1}{2N_s}}) e^{-t} \approx \int_0^\infty dt \operatorname{sen}\left(\mu_s r + \frac{\mu_s r}{2N_s} \log t\right) e^{-t}. \quad (\text{E.3})$$

A integral acima possui a forma geral

$$\int_0^\infty dz \operatorname{sen}(\alpha + \beta \log z) e^{-z} = -\operatorname{Im} [e^{-i\alpha} \Gamma(1 - i\beta)], \quad \alpha, \beta > 0. \quad (\text{E.4})$$

Assim, escrevendo a função gama (complexa) como $\Gamma(1 - i\beta) = a + ib$, obtém-se

$$\int_0^\infty dz \operatorname{sen}(\alpha + \beta \log z) e^{-z} = a \operatorname{sen} \alpha - b \cos \alpha. \quad (\text{E.5})$$

Portanto, as Eqs. (D.2), (E.1), (E.3) e (E.5) fornecem a aproximação $M_s(r) \approx M_s^{\text{ap}}(r)$, em que

$$\frac{M_s^{\text{ap}}(r)}{M} \equiv 1 - \frac{2}{\pi} \left\{ \operatorname{Re} \left[\Gamma \left(1 - i \frac{\mu_s r}{2N_s} \right) \right] \operatorname{sen}(\mu_s r) - \operatorname{Im} \left[\Gamma \left(1 - i \frac{\mu_s r}{2N_s} \right) \right] \cos(\mu_s r) \right\}. \quad (\text{E.6})$$

A equação acima fornece a forma segundo a qual a função massa oscila para $\mu_s r \gg 1$ e $N_s \gg 1$. A comparação de (E.6) com o resultado exato para $M_s(r)$ mostra que a aproximação parece ser razoável mesmo para valores relativamente pequenos de N_s e de $\mu_s r$ (veja a Fig. 20). A razão para isso é dupla: primeiro, a integral seno (E.1) converge rapidamente para seu valor assintótico $\pi/2$ e, em segundo lugar, o termo (E.2) tende rapidamente a 1 à medida que o parâmetro N_s aumenta.

O próximo passo é encontrar a função que descreve a atenuação das oscilações da Eq. (E.6). Para isso, emprega-se novamente (E.4). Agora, é conveniente escrever a função gama complexa na forma polar $\Gamma(1 - i\beta) = \rho e^{i\theta}$, de modo que

$$\int_0^\infty dz \operatorname{sen}(\alpha + \beta \log z) e^{-z} = \rho \operatorname{sen}(\alpha - \theta). \quad (\text{E.7})$$

Uma vez que a função seno é limitada, tem-se

$$-\rho \leq \int_0^\infty dz \operatorname{sen}(\alpha + \beta \log z) e^{-z} \leq \rho, \quad (\text{E.8})$$

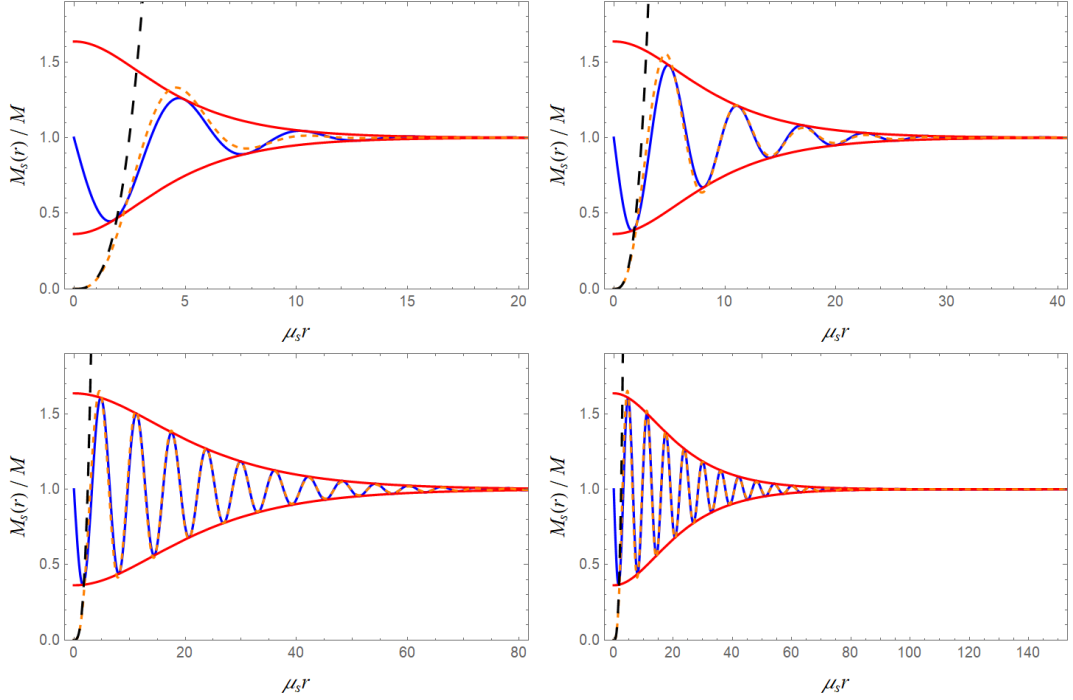


Figura 20 – Comparação entre a função massa exata (D.2) (linha tracejada laranja) e a aproximação (E.6) (linha azul contínua) para $N_s = 2$ (superior esquerdo), $N_s = 4$ (superior direito), $N_s = 10$ (inferior esquerdo) e $N_s = 20$ (inferior direito). As curvas vermelhas representam as funções envoltórias do pacote de ondas $1 \pm \delta$, onde δ é dado por (E.12). A linha preta tracejada corresponde à forma assintótica da função massa para $r \rightarrow 0$, Eq. (2.53).

o que, juntamente com (E.1), resulta em

$$1 - \delta \leq \frac{M_s^{\text{ap}}(r)}{M} \leq 1 + \delta, \quad (\text{E.9})$$

em que

$$\delta = \frac{\pi}{2} \left| \Gamma \left(1 - i \frac{\mu_s r}{2N_s} \right) \right|. \quad (\text{E.10})$$

A função envoltória das oscilações, $1 \pm \delta(\mu_s r, N_s)$, pode ser escrita em uma forma mais útil utilizando

$$|\Gamma(1 \pm i\beta)|^2 = \frac{\pi\beta}{\sinh(\pi\beta)}, \quad (\text{E.11})$$

o que fornece

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{\mu_s r}{N_s} \operatorname{csch} \left(\frac{\pi}{2} \frac{\mu_s r}{N_s} \right)}. \quad (\text{E.12})$$

Note que $\delta \rightarrow 0$ quando $\mu_s r \rightarrow \infty$. A Fig. 20 exibe uma comparação entre a integração numérica de (D.2) com (E.6) e (E.9) para vários valores de N_s ; note que, embora tecnicamente derivada para valores grandes de N_s e $\mu_s r$, a aproximação funciona relativamente bem mesmo quando esses valores não são tão grandes.

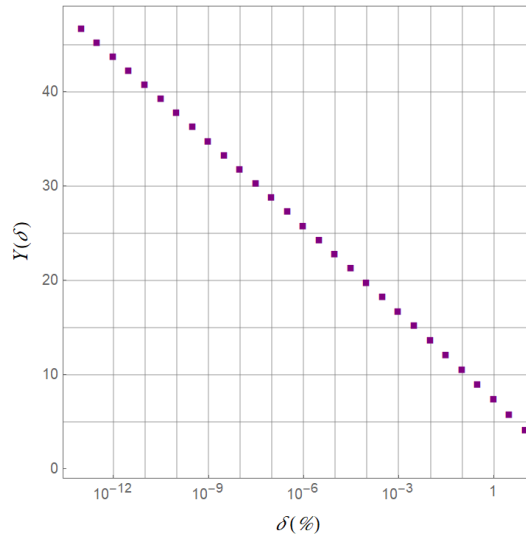


Figura 21 – Solução numérica para o fator multiplicativo Y em função do erro relativo $\delta = |1 - M_s(r)/M|$ (em porcentagem), em escala log-linear.

Dado um δ arbitrariamente pequeno, a equação (E.12) pode ser invertida para fornecer o valor de r_* tal que $r > r_*$ implica $|M_s(r)/M| < 1 + \delta$. Formalmente,

$$\frac{\mu_s r_*}{N_s} = Y(\delta). \quad (\text{E.13})$$

Como (E.12) depende da combinação $\mu_s r/N_s$, é claro que $\mu_s r_*$ escala linearmente com N_s , como foi suposto em (2.56). A Fig. 21 representa a função $Y(\delta)$ obtida pela solução numérica da equação transcendental (E.12). Como o gráfico revela, a dependência de Y em relação a δ , em escala semi-logarítmica, é quase linear. Portanto, é possível encontrar uma aproximação para $Y(\delta)$ usando uma regressão linear. Para obter resultados mais precisos, é conveniente particionar os valores de Y em dois domínios, a saber, $6 \leq Y \leq 10$ e $10 < Y \leq 50$. Então, usando os dados numéricos mostrados na Fig. 21, o método dos mínimos quadrados fornece

$$Y(\delta) \approx \begin{cases} (-1,385 \pm 0,005) \log(100\delta) + (7,272 \pm 0,006), & \text{for } 6 \leq Y \leq 10, \\ (-1,314 \pm 0,002) \log(100\delta) + (7,41 \pm 0,04), & \text{for } 10 < Y \leq 50. \end{cases} \quad (\text{E.14})$$

Essas relações podem ser usadas para estimar o ponto além do qual as correções não-locais à função massa são suprimidas, como na Sec. **2.2.2**. Por exemplo, para que $M_s(r) \approx M$ dentro de 1%, é necessário que $r > r_* \approx 7,3 N_s/\mu_s$, enquanto que, para um desvio de 0,0001%, precisamos de $r > r_* \approx 20 N_s/\mu_s$.