

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**Vinícius Gonçalves Valle**

**UMA ABORDAGEM OPERACIONAL CONECTANDO  
TRANSFORMAÇÕES E DINÂMICAS NO ESPAÇO FÍSICO**

Juiz de Fora

2026

Vinícius Gonçalves Valle

UMA ABORDAGEM OPERACIONAL CONECTANDO  
TRANSFORMAÇÕES E DINÂMICAS NO ESPAÇO FÍSICO

Dissertação apresentada ao Programa de pós  
graduação em Física da Universidade Federal  
de Juiz de Fora como requisito parcial à ob-  
tenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Bruno Ferreira Rizzuti

Coorientador: Prof. Dr. Cristhiano Duarte

Juiz de Fora

2026

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Valle, Vinicius Gonçalves.

UMA ABORDAGEM OPERACIONAL CONECTANDO TRANSFORMAÇÕES E DINÂMICAS NO ESPAÇO FÍSICO / Vinicius Gonçalves Valle. – 2026.

67 f. : il.

Orientador: Bruno Ferreira Rizzuti

Coorientador: Cristhiano Duarte

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Departamento de Física, instituto de ciências exatas. Programa de pós graduação em Física, 2026.

1. Abordagem operacional. 2. Esfera de Bloch. 3. Homomorfismo de grupos. 4. coarse-graining. I. Rizzuti, Bruno Ferreira, orient. II. Duarte, Cristhiano, coorient. III. Título.

**Vinícius Gonçalves Valle**

Uma abordagem operacional conectando transformações e dinâmicas no espaço físico

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física. Área de concentração: Física.

Aprovada em 27 de fevereiro de 2026.

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Dr. Bruno Ferreira Rizzuti** - Orientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

**Dr. Cristhiano Andre Gamarano Duarte Carneiro Silva** - Coorientador  
Chapman University (CHAPMAN)

**Prof. Dr. Raphael Campos Drumond**  
Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

**Prof. Dr. Wallon Anderson Tadaiesky Nogueira**  
Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Juiz de Fora, 27/02/2026.



Documento assinado eletronicamente por **Bruno Ferreira Rizzuti, Membro**, em 27/02/2026, às 19:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **RAPHAEL CAMPOS DRUMOND, Usuário Externo**, em 02/03/2026, às 14:48, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Wallon Anderson Tadaiesky Nogueira, Professor(a)**, em 03/03/2026, às 09:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Cristhiano Andre Gamarano Duarte Carneiro Silva, Usuário Externo**, em 04/03/2026, às 09:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf ([www2.ufjf.br/SEI](http://www2.ufjf.br/SEI)) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **2888650** e o código CRC **BC1BE0DA**.

Vinicius Gonçalves Valle

**UMA ABORDAGEM OPERACIONAL CONECTANDO  
TRANSFORMAÇÕES E DINÂMICAS NO ESPAÇO FÍSICO**

Dissertação apresentada ao Programa de pós  
graduação em Física da Universidade Federal  
de Juiz de Fora como requisito parcial à ob-  
tenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em 27 de fevereiro de 2026

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Bruno Ferreira Rizzuti - Orientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Prof. Dr. Cristhiano Duarte - Coorientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Prof. Dr. Raphael Drummond  
Universidade Federal de Minas Gerais

---

Prof. Dr. Wallon Anderson Tadaiesky Nogueira  
Universidade Federal de Juiz de Fora

Dedico este trabalho aos meus pais. É impossível traduzir em palavras a profundidade da gratidão que sinto por tudo o que fizeram e continuam fazendo por mim.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, que desde sempre me apoiaram em cada etapa da minha jornada acadêmica. À minha mãe, Flávia, agradeço pela dedicação incansável e pelo exemplo de competência, caráter e honestidade que sempre me ofereceu. Obrigado por nunca medir esforços quando se trata do meu bem-estar e da minha formação. Ao meu pai, Marcos, ter sido seu aluno anos atrás foi uma experiência única, através de você aprendi os conteúdos das disciplinas e também valores que levo por toda a vida. Seu apoio e suas orientações foram decisivos para que eu chegasse até aqui.

A cada dia que passa, mais minha admiração por vocês dois cresce. Toda conquista que alcancei até agora carrega o amor e o apoio que sempre recebi de vocês. Minha eterna gratidão.

Agradeço também aos meus familiares, que, de diferentes formas, sempre estiveram presentes, oferecendo apoio, incentivo e compreensão. Obrigado por sempre me receber em minhas segundas casas com imenso carinho.

Também estou em dívida com meu orientador, Bruno, e com meu coorientador, Cristhiano. Sou grato pela confiança, pela disponibilidade e pelo constante incentivo. Nos últimos anos, vocês têm sido uma grande inspiração para mim, no meu crescimento acadêmico e pessoal. A vocês, juntamente com meus colegas de área, Thales e Lucas, a quem também devo sinceros agradecimentos, reconheço a contribuição decisiva para a realização deste trabalho. Espero que possamos seguir caminhando juntos em muitos outros projetos.

Meus sinceros agradecimentos também a todos os amigos que fiz durante essa jornada acadêmica, que tornaram esse caminho mais especial. Posso afirmar, com toda a certeza, que os desafios acadêmicos se tornaram mais fáceis com vocês por perto. Não posso deixar de agradecer também aos meus velhos amigos de infância, da minha cidade e de outros lugares, que, apesar da distância, do tempo, dos compromissos e das outras variáveis da vida, continuam por perto de um jeito ou de outro.

É em momentos como este que me dou conta do quanto sou privilegiado por estar cercado de tantas pessoas incríveis.

Finalmente, também agradeço a Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) e ao Programa de Pós-Graduação em Física (PPGF) pelo suporte institucional e pelas condições oferecidas para a realização deste trabalho. Agradeço também às agências financiadoras CAPES, CNPq e FAPEMIG, pelo apoio financeiro por meio das bolsas concedidas, que possibilitaram minha dedicação integral à pesquisa e ao desenvolvimento desta dissertação.

“What we observe is not nature itself but nature exposed to our method of questioning”.  
Werner Heisenberg.

## RESUMO

Este trabalho investiga a conexão operacional entre a preparação, em laboratório, de sistemas quânticos e sua representação como estados em um espaço de Hilbert, bem como o comportamento das transformações à luz dessa correspondência. Utilizando a fibração de Hopf, apresentamos uma descrição operacional explícita da relação entre “variáveis de laboratório” e estados quânticos, ilustrada por meio do experimento de Stern–Gerlach e de um arranjo óptico simples. Nesse contexto, mostramos também como rotações espaciais em três dimensões correspondem naturalmente a transformações unitárias atuando sobre estados quânticos, sob restrições como a preservação da pureza e da reversibilidade, conduzindo a uma reconstrução operacional do homomorfismo dois-para-um entre os grupos  $SU(2)$  e  $SO(3)$ . Além disso, ao estender essa abordagem a espaços de dimensões maiores, contribuímos para a caracterização de dinâmicas emergentes em sistemas de *coarse-graining*. Para além de sua relevância teórica, essa abordagem oferece uma perspectiva concreta e pedagogicamente acessível, tornando experimentalmente tangíveis tanto a relação abstrata entre grupos de simetria e a geometria da esfera de Bloch quanto os mecanismos físicos subjacentes à emergência de dinâmicas efetivas em problemas de *coarse-graining*.

Palavras-chave: Abordagem operacional, Esfera de Bloch, Homomorfismo de grupos, *coarse-graining*.

## ABSTRACT

This work investigates the operational connection between the laboratory preparation of quantum systems and their representation as states in Hilbert space, as well as the behavior of transformations in light of this correspondence. By employing the Hopf fibration, we present an explicit operational description of the relationship between “laboratory variables” and quantum states, illustrated through the Stern–Gerlach experiment and a simple optical setup. Within this framework, we also show how spatial rotations in three dimensions naturally correspond to unitary transformations acting on quantum states, under constraints such as purity preservation and reversibility, leading to an operational reconstruction of the two-to-one homomorphism between the groups  $SU(2)$  and  $SO(3)$ . Moreover, by extending this approach to higher-dimensional spaces, we contribute to the characterization of emergent dynamics in coarse-graining systems. Beyond its theoretical relevance, this approach provides a concrete and pedagogically accessible perspective, rendering experimentally tangible both the abstract relationship between symmetry groups and the geometry of the Bloch sphere and the physical mechanisms underlying the emergence of effective dynamics on coarse-graining problems .

Keywords: Operational approach, Bloch sphere, Group homomorphism, coarse-graining.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	- Experimento de Stern-Gerlach. . . . .	24
Figura 2	- Anteparo do Stern-Gerlach. . . . .	24
Figura 3	- Representação Geométrica da fibração de Hopf. . . . .	26
Figura 4	- Placa de meia-onda. . . . .	28
Figura 5	- Placa de quarto de onda. . . . .	28
Figura 6	- Desenho esquemático do dispositivo universal para óptica de polarização. . . . .	29
Figura 7	- Representação de $ \psi'_{out}\rangle$ e $ \psi''_{out}\rangle$ na esfera de Bloch. . . . .	31
Figura 8	- Diagrama que representa a alegada relação entre $SO(3)$ e $SU(2)$ . . . . .	36
Figura 9	- Relação entre $SU(2)$ e $SO(3)$ por meio da bijeção $su(2) \cong \mathbb{D}$ . . . . .	41
Figura 10	- Diagrama do <i>coarse-graining</i> . . . . .	46
Figura 11	- Diagrama que representa o cenário de <i>coarse-graining</i> com a adição dos mapeamentos relacionados às variáveis do espaço de laboratório. . . . .	48
Figura 12	- Esquema das possíveis imagens concebidas pelo detector borrado e saturado	50
Figura 13	- Esquema das possíveis imagens concebidas por um detector adequado	50

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>PRELIMINARES MATEMÁTICOS</b> . . . . .	<b>14</b>
2.1	MAPEAMENTOS LINEARES NA ÁLGEBRA DE OPERADORES . .	14
2.1.1	Operadores e mapeamentos . . . . .	14
2.1.2	Representação de Kraus . . . . .	15
2.1.3	Mapeamentos CPTP . . . . .	15
2.2	GRUPOS $SO(3)$ E $SU(2)$ . . . . .	15
2.2.1	Definição . . . . .	16
2.2.2	O grupo $SO(3)$ . . . . .	16
2.2.3	O grupo $SU(2)$ . . . . .	18
<b>3</b>	<b>CONEXÃO: ESPAÇO FÍSICO E O ESPAÇO DE HILBERT</b> .	<b>21</b>
3.1	MOTIVAÇÃO: ESPAÇO DE ESTADOS E A ESFERA DE BLOCH . .	21
3.1.1	A relação entre espaço físico e espaço de estados: Fibração de Holpf . .	24
3.1.2	Construindo um dispositivo universal para preparação de estados de polarização . . . . .	27
3.1.3	Preparando um estado polarizado arbitrário em $SU(2)$ . . . . .	30
<b>4</b>	<b>TRANSFORMAÇÕES DE ESTADOS: UMA ANÁLISE OPERACIONAL</b> . . . . .	<b>33</b>
4.1	PROCESSOS QUÂNTICOS E O APARECIMENTO DO HOMOMORFISMO $SU(2) - SO(3)$ . . . . .	33
4.1.1	Do espaço físico para o espaço de estados: $SO(3) \rightarrow SU(2)$ . . . . .	36
4.1.2	Inversão de mapeamentos CPTP . . . . .	39
4.1.3	Do espaço de estados para o espaço físico: $SU(2) \rightarrow SO(3)$ . . . . .	39
<b>5</b>	<b>ANÁLISE DO PROBLEMA COARSE-GRAINING</b> . . . . .	<b>44</b>
5.1	INTRODUÇÃO A COARSE-GRAINING . . . . .	44
5.2	EXEMPLOS DE CENÁRIOS DE COARSE-GRAINING . . . . .	46
5.2.1	Cenário 1: Detector borrado e saturado com o canal SWAP . . . . .	49
5.2.2	Cenário 2: Detector borrado e saturado e o canal de interação $z$ . . . . .	52
5.2.3	Cenário 3: Traço parcial e o canal SWAP . . . . .	54
5.2.4	Cenário 4: Traço parcial e o canal de interação $z$ . . . . .	55
5.2.5	Discussão sobre os cenários abordados . . . . .	56
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>58</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>60</b>
<b>A</b>	<b>Apêndice</b> . . . . .	<b>65</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Neste texto, adotamos o que a literatura denomina de formalismo operacional. Em sua essência, o meio de pensar operacionalista estrutura-se na afirmação de que uma descrição experimental de um conceito é fundamentalmente necessária para que seu significado seja considerado conhecido (1, 2). Sob essa ótica, a compreensão do que é um objeto físico não busca um modelo teórico abstrato, mas fundamenta-se na pergunta: “como este objeto se manifesta através da interação com agentes, ou experimentos?”.

Esse pensamento foi proposto primeiramente pelo físico Percy Williams Bridgman no início do século XX (2). Embora tenha surgido *a priori* como uma reflexão sobre a física daquela época, seus princípios estenderam-se posteriormente a outros ramos da ciência, como a psicologia e a filosofia (3). O foco deste trabalho, no entanto, reside no uso desta mentalidade na compreensão da mecânica quântica. Nesta, o operacionalismo atua como uma ponte entre o formalismo quântico - onde sistemas são representados em espaços de Hilbert - e a realidade observável, descrita por parâmetros que poderiam ser controlados em um laboratório. Neste sentido, estes parâmetros serão chamados, como veremos à frente, de variáveis de laboratório ou *laboratory variables*, na língua inglesa.

Nesse contexto, uma frase que, sem dúvida, representa com precisão este ponto de vista operacional é a do físico Asher Peres (4), que afirma: “*Fenômenos quânticos não ocorrem em um espaço de Hilbert, eles ocorrem no laboratório*”. De fato, essa afirmação nos leva a investigar a possibilidade de descrever nossos experimentos quânticos por meio de variáveis do espaço físico (5), ao invés de recorrermos exclusivamente a construções matemáticas abstratas, visto que tais experimentos são realizados justamente em um laboratório inserido nesse espaço. É precisamente isso que nos propomos a realizar nesse trabalho de mestrado.

Este trabalho segue de perto a linha de pesquisa desenvolvida por (6, 7, 8, 9, 10), na qual os autores buscam reformular e, por vezes, reconstruir objetos matemáticos—que são usualmente aceitos como “dados”—diretamente a partir do mundo físico que nos cerca. Por exemplo, em (8) os autores derivam características da geometria e da topologia de forma totalmente operacional, partindo de pressupostos básicos como pontos e retas em corpos rígidos. Dessa forma, neste trabalho pretendemos começar a preencher a lacuna deixada pelas abordagens usuais de livros-texto em física quântica, que não estabelecem uma ponte entre o espaço físico e o espaço de Hilbert — como se o primeiro fosse apenas um recurso auxiliar para motivar e introduzir o aparato matemático do segundo.

Adotaremos uma construção operacional do espaço físico seguindo a abordagem de (7, 8): o espaço físico é obtido a partir de procedimentos experimentalmente acessíveis (como a marcação de pontos em corpos de referência rígidos, a definição de distâncias com compassos, a formação de classes sob “uniões firmes” de corpos rígidos, etc.), o que resulta

em um sistema de referência (SR) e um espaço afim associado  $\mathcal{E}_{SR}$  juntamente com seu espaço vetorial de deslocamentos  $\mathbb{D}$ . Este ponto de vista operacional enfatiza que pontos, deslocamentos (vetores), direções e estrutura afim são definidos por procedimentos e não assumidos a priori—de maneira operacional, no sentido da referência (1). É oportuno ressaltar também que, neste trabalho, separamos intencionalmente dois usos distintos do símbolo  $\mathbb{R}^3$ : (i) o espaço físico onde os procedimentos de laboratório ocorrem e (ii) o espaço vetorial euclidiano que é usado como um espaço de representação conveniente (por exemplo, o espaço ambiente que contém a esfera de Bloch).

Dito isso, com a intuição de que podemos descrever fenômenos quânticos por meio de variáveis de laboratório, ancorada na frase de Asher Peres, poderíamos nos perguntar o que aconteceria com a nossa interpretação quântica de um certo problema no caso de ajustarmos essas variáveis para valores distintos dos valores iniciais. Em outras palavras, de que maneira se dá a evolução do sistema quântico em função de diferentes ajustes específicos no laboratório? Esta é uma pergunta muito pertinente e anda lado a lado com as investigações abordadas em (5, 8, 11, 12). Veremos, ao longo deste trabalho, que a nossa abordagem operacional servirá de base para obtermos uma resposta satisfatória para essa pergunta.

Utilizaremos como exemplo principal de sistema quântico o sistema de dois níveis, também conhecido em computação quântica como qubit (13, 14), em razão da grande diversidade de sistemas que podem ser descritos por este, tais como o experimento de Stern-Gerlach (15, 16, 17, 18) explorado com detalhes em (10), bem como sistemas de fótons polarizados (19, 20, 21) conforme a abordagem de (5). Entretanto, no decorrer deste trabalho, estenderemos nossa abordagem operacional também a sistemas de dimensões maiores, em particular, o sistema de dois qubits (14, 22). Motivados pela sua interpretação experimental, viabilizada por um mapeamento que reduz a dimensionalidade desse sistema — denominado mapeamento de *coarse-graining* (24, 25) — com o objetivo de caracterizar possíveis dinâmicas que emergem dessa descrição efetiva através de um argumento majoritariamente operacional. Em outras palavras, utilizando uma descrição via *lab space variables*, conseguimos caracterizar condições para a existência de uma dinâmica emergente em um sistema de *coarse-graining*.

Nesse sentido, organizamos este trabalho da seguinte forma. No próximo capítulo, apresentamos uma breve revisão a respeito dos conceitos matemáticos de fundamental importância para o desenvolvimento deste trabalho. Esta revisão servirá não apenas para a fixação da notação, mas também como base para os cálculos apresentados nos capítulos seguintes. No Capítulo 3, motivamos a conexão entre o espaço físico e o espaço de Hilbert por meio do exemplo paradigmático do experimento de Stern-Gerlach. Além disso, iremos desenvolver o aparato matemático denominado dispositivo universal para óptica de polarização, o qual utilizaremos para estabelecer a ponte entre esses dois espaços e argumentar que essa conexão possui um significado físico mais profundo. No

Capítulo 4, expandimos nosso foco, naturalmente, para a interpretação operacional de transformações sobre sistemas de dois níveis. Descobriremos, partindo da abordagem operacional, como uma transformação no espaço quântico (espaço de Hilbert) é interpretada no espaço do laboratório e vice-versa. No Capítulo 5, abordamos o problema de *coarse-graining* mantendo a mesma lógica operacional previamente estabelecida, o que nos permite determinar a existência — ou não — de uma dinâmica emergente nesse contexto. Combinando diferentes *coarse-grainings* com evoluções unitárias, vamos analisar quatro cenários distintos e determinar as restrições e características associadas à dinâmica de cada um deles. Por fim, o último capítulo contém nossas considerações finais.

Finalizamos a introdução destacando que esta dissertação é baseada nos seguintes artigos:

1. **Valle, V. G.**, Brugger, L. L., Rizzuti, B. F., & Duarte, C. (2024). Towards establishing a connection between two-level quantum systems and physical spaces. *Brazilian Journal of Physics*, 54(4), 93.
2. **Valle, V. G.**, & Rizzuti, B. F. (2026). From Rotations to Unitaries: Reversible Quantum Processes and the Emergence of the  $SU(3) - SO(3)$  Homomorphism. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 48, e20250374.
3. Rodrigues T. B. S. F., Brugger, L. L., **Valle, V. G.**, Rizzuti, B. F., & Duarte, C. (Em preparação). Bayesian Inference, Emergent Quantum Dynamics as a Bayesian Inference Problem: A Critical Analysis.

## 2 PRELIMINARES MATEMÁTICOS

Este capítulo tem como objetivo estabelecer os conceitos de mapeamentos lineares na álgebra de operadores e elementos de teoria de grupos, que serão muito utilizados ao longo desse trabalho.

### 2.1 MAPEAMENTOS LINEARES NA ÁLGEBRA DE OPERADORES

Os conceitos que serão abordados nesta seção são de extrema importância quando se trata de informação quântica. Tomamos como objetivo estabelecer a definição de mapeamentos lineares entre espaços vetoriais que em si mesmos são determinados por outros conjuntos de aplicações lineares. Para isso, é necessária a introdução de conceitos como operadores e estados quânticos, bem como a maneira com que esses mapeamentos são representados matematicamente. Para a composição deste texto, foram utilizadas como base as referências (13) e (22).

#### 2.1.1 Operadores e mapeamentos

Dado dois espaços euclidianos complexos  $\mathbb{C}^n$  e  $\mathbb{C}^m$ , chamamos de  $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$  a coleção de todos os mapeamentos lineares da forma

$$A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m. \quad (2.1)$$

O conjunto  $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ , munido de adição e multiplicação por escalar, forma um espaço vetorial, composto por elementos que chamamos de operadores (22). No caso  $n = m$ , denotamos  $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$  simplesmente por  $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ .

Chamamos  $\rho \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$  de operador densidade ou estado quântico quando este for positivo semi-definido com traço igual a 1. Além disso, afirmamos também que este estado é puro quando  $\rho$  pode ser escrito na forma  $\rho = |u\rangle \langle u|$ , com  $|u\rangle \in \mathbb{C}^n$  (23).

Podemos agora definir mapeamentos da forma

$$\Phi : \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^m). \quad (2.2)$$

Denominamos  $T(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$  o conjunto de todos os mapeamentos lineares que assumem este formato.

Mapeamentos tal como em (2.2) levam operadores lineares em outros operadores lineares—daí o nome: super-operadores (23). Um caso particular é quando esses super-operadores levam operadores positivo semi-definidos em operadores positivo semi-definidos. Nesse caso, esses operadores são chamados de positivos. Se, adicionalmente, toda extensão do tipo  $\mathbb{1} \otimes \Phi$  for positiva, dizemos que esse super-operador é um canal quântico (22). Veremos na próxima seção que eles assumem uma forma, ou várias equivalentes, específica.

### 2.1.2 Representação de Kraus

Há diversas maneiras de representar  $\Phi$ , incluindo a representação natural, as representações de Stinespring, de Choi–Jamiołkowski e de Kraus, todas equivalentes entre si (22). Neste trabalho, iremos focar na representação de Kraus.

Dado os espaços euclidianos complexos  $\mathbb{C}^n$  e  $\mathbb{C}^m$  e os operadores  $\{A_a : a \in \Gamma\} \subset \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$  e  $\{B_a : a \in \Gamma\} \subset \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$  podemos representar a atuação de  $\Phi$  em um elemento  $\rho \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$  como

$$\Phi(\rho) = \sum_{a \in \Gamma} A_a \rho B_a^* ; \forall \rho \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n), \quad (2.3)$$

onde  $\Gamma$  é um conjunto finito não vazio de tamanho  $m$ .

Dizemos que a expressão acima é a representação de Kraus do mapeamento  $\Phi$ . A escolha dessa representação está ligada à conexão que pode ser estabelecida desta com a teoria de grupos, abordada no Capítulo 3.

### 2.1.3 Mapeamentos CPTP

Um conceito de suma importância para a informação quântica é o de canais quânticos; estes são caracterizados como mapeamentos na forma (2.2), que estão sujeitos a duas restrições.  $\Phi$  deve preservar o traço e ser completamente positivo (CPTP).

Sendo assim, o mapa (2.2) é CPTP quando  $Tr(\rho) = Tr(\Phi(\rho))$ , para todo  $\rho \in L(\mathbb{C}^n)$  e  $(\Phi \otimes \mathbb{I}_{L(\mathbb{C}^q)})(P) \in Pos(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^p)$  para todo  $P \in Pos(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^q)$  e para todas as escolhas de  $\mathbb{C}^q$ . Como de costume,  $Pos(\mathbb{C}^{\aleph})$  denota o conjunto de operadores positivos semi-definidos em  $\mathbb{C}^{\aleph}$ , para algum inteiro positivo  $\aleph$ .

Dado que nosso objetivo é relacionar mapas CPTP à teoria de grupos, como mencionado anteriormente em 2.1.2, é de nosso interesse utilizarmos a representação de Kraus, dada pela Equação (2.3). Esta representação do nosso mapeamento  $\Phi$ , agora com a devida restrição CPTP, é dada por

$$\Phi(\rho) = \sum_{a \in \Gamma} A_a \rho A_a^*, \quad \rho \in L(\mathbb{C}^n), \quad (2.4)$$

para um conjunto finito e não vazio  $\Gamma$  e  $\{A_a \mid a \in \Gamma\} \subset L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ .

A Equação (2.4) garante que o mapa é completamente positivo (CP) e a condição de preservação do traço (TP) é garantida, de acordo com (22), ao se exigir que

$$\sum_{a \in \Gamma} A_a^* A_a = \mathbb{I}_n. \quad (2.5)$$

## 2.2 GRUPOS $SO(3)$ E $SU(2)$

Nesta seção, serão introduzidos conceitos básicos sobre a teoria de grupos, especialmente sobre os grupos  $SO(3)$  e  $SU(2)$ , que são de extrema importância no decorrer deste

trabalho. Será discutido que ambos os grupos citados acima são compostos por operadores que, por sua vez, possuem representações físicas/geométricas. Para a composição deste texto, foram utilizadas como base as referências (26, 27, 28, 29).

### 2.2.1 Definição

Um grupo é um conjunto de elementos  $\mathbf{G} = \{g_1, g_2, \dots\}$  munido de uma operação que chamamos de multiplicação de grupo

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbf{G} \times \mathbf{G} &\rightarrow \mathbf{G} \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 \cdot g_2 = g_3 \in \mathbf{G}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Esta operação é associativa, isto é, para quaisquer elementos  $g_1, g_2$  e  $g_3$  em  $\mathbf{G}$  temos  $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$ ; além disso, o grupo possui um elemento neutro  $e \in \mathbf{G}$  tal que  $g \cdot e = e \cdot g = g$  e também para qualquer  $g \in \mathbf{G}$  existe o inverso  $g^{-1}$  tal que  $g \cdot g^{-1} = e$ .

### 2.2.2 O grupo $SO(3)$

Embora um grupo seja um conjunto abstrato munido de um produto que satisfaz as propriedades discutidas acima, nos interessa, em particular, grupos cujos elementos são matrizes. Considere então o conjunto de todas as matrizes ortogonais  $3 \times 3$  reais com determinante unitário,

$$SO(3) = \left\{ \mathcal{R} \text{ é uma matriz } 3 \times 3 \text{ real} \mid \det \mathcal{R} = 1, \mathcal{R}^T = \mathcal{R}^{-1} \right\}. \quad (2.7)$$

Este conjunto, munido com produto usual de matrizes forma um grupo. A letra  $S$  vem de *special* (que significa determinante igual a 1) e  $O$  designa matrizes ortogonais.

É possível estabelecer coordenadas para elementos de  $SO(3)$ . Isto é feito por meio da exponencial de uma matriz, definida pela série convergente

$$e^{\mathbf{M}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{M}^n = \mathbb{I} + \mathbf{M} + \frac{1}{2!} \mathbf{M}^2 + \dots \quad (2.8)$$

Assim, dada uma matriz  $\mathcal{R} \in SO(3)$  tentamos escrevê-la como a exponencial de uma matriz  $\mathbf{a}$ ,

$$\mathcal{R} = e^{\mathbf{a}}. \quad (2.9)$$

Como sabemos que, para o caso do grupo  $SO(3)$ , a transposta de  $\mathcal{R}$  é igual à sua inversa, isso implica que

$$\mathcal{R}^T = \mathcal{R}^{-1} \implies (e^{\mathbf{a}})^T = (e^{\mathbf{a}})^{-1} \implies \mathbf{a}^T = -\mathbf{a}, \quad (2.10)$$

pois pode-se verificar que  $(e^{\mathbf{a}})^T = e^{\mathbf{a}^T}$  e  $(e^{\mathbf{a}})^{-1} = e^{-\mathbf{a}}$ .

Ao considerarmos uma matriz qualquer que respeita a condição  $\mathbf{a}^T = -\mathbf{a}$ , temos

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} = -i \sum_{j=1}^3 \alpha_j \tau_j, \quad (2.11)$$

onde  $\alpha_j \in \mathbb{R}^3, \forall j = 1, 2, 3$  e

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Note que vale também que

$$\det e^{\mathbf{a}} = e^{\text{Tr}(\mathbf{a})} = e^0 = 1. \quad (2.13)$$

Perceba que a partir da restrição imposta às matrizes  $\mathbf{a}$  na equação (2.10), em conjunto com a equação (2.11), podemos definir outro conjunto, que tem estrutura de um espaço vetorial. Suas matrizes derivam da própria estrutura do grupo  $SO(3)$  e este espaço vetorial tem base composta por  $\tau_j$  (com  $j = 1, 2, 3$ ). Chamamos este conjunto de matrizes de  $so(3)$  e o definimos como

$$so(3) = \left\{ \mathbf{a} \text{ é uma matriz } 3 \times 3 \mid \mathbf{a}^T = -\mathbf{a} \right\}. \quad (2.14)$$

Note que se  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  pertencem a  $so(3)$ , então o comutador  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  também pertence a esse conjunto, pois  $([\mathbf{a}, \mathbf{b}])^T = -([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$ .

Reforçamos que tanto a soma quanto a multiplicação por escalar real ainda respeitam a condição  $\mathbf{a}^T = -\mathbf{a}$ . Sendo assim, chamamos  $so(3)$  de uma álgebra, no sentido de que, além de ser um espaço vetorial também é dotado de um produto (28). De forma simbólica, escrevemos  $SO(3) = e^{so(3)}$ , e chamaremos tais de álgebras, assim como na referência (27), de Álgebras de Lie. Vamos mostrar que podemos reconstruir o grupo a partir da álgebra correspondente.

Se considerarmos  $\alpha_2, \alpha_3 = 0$  na equação (2.11) e expandirmos a exponencial correspondente, obtemos

$$e^{-i\alpha_1\tau_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_1^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1^3 \\ 0 & -\alpha_1^3 & 0 \end{pmatrix} + \dots, \quad (2.15)$$

Sendo assim, temos a matriz

$$\mathcal{R}_1 = e^{-i\alpha_1\tau_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_1 & -\text{sen} \alpha_1 \\ 0 & \text{sen} \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

que representa uma rotação em  $\mathbb{R}^3$  em torno do eixo  $x$  por um ângulo  $\alpha_1$ . A partir de (2.11) podemos obter também as matrizes  $\mathcal{R}_2$  e  $\mathcal{R}_3$  dadas por

$$\mathcal{R}_2 = e^{-i\alpha_2\tau_2} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_2 & 0 & -\text{sen} \alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen} \alpha_2 & 0 & \cos \alpha_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_3 = e^{-i\alpha_3\tau_3} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_3 & -\text{sen} \alpha_3 & 0 \\ \text{sen} \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

que, por sua vez, são rotações em  $\mathbb{R}^3$  em torno dos eixos  $y$  e  $z$ , respectivamente.

Dado  $\hat{n}$  um vetor unitário na esfera  $S^2$ , vamos construir a matriz  $\mathcal{R}(\hat{n}, \alpha) \in SO(3)$  que denota a rotação por um ângulo  $\alpha$  ao redor do eixo  $\hat{n}$ .

Os exemplos acima indicam casos particulares da exponencial  $e^{-i\alpha\hat{n}\cdot\vec{\tau}}$ , em que  $\hat{n}$  é tomado particularmente como os vetores unitários  $\hat{e}_1, \hat{e}_2$  e  $\hat{e}_3$ , que apontam nas direções  $x, y$  e  $z$ , respectivamente. Assim,

$$\mathcal{R}(\hat{n}, \alpha) = e^{-i\alpha\hat{n}\cdot\vec{\tau}}. \quad (2.18)$$

Ressaltamos que o produto escalar no expoente é uma maneira simbólica de representar a combinação linear das matrizes  $\tau_i$ , conhecidas como os geradores do grupo  $SO(3)$ .

A forma explícita para os elementos da matriz  $\mathcal{R}$  é dada pela fórmula de Rodrigues (29), com  $j, k$  em  $\{1, 2, 3\}$ ,

$$\mathcal{R}_{jk}(\hat{n}, \alpha) = \delta_{jk} \cos \alpha + n_j n_k (1 - \cos \alpha) - \varepsilon_{jkl} n_l \sin \alpha. \quad (2.19)$$

Como

$$\mathcal{R}(\hat{n}, \alpha + 2\pi) = \mathcal{R}(\hat{n}, \alpha) \quad \text{e} \quad \mathcal{R}(\hat{n}, \alpha) = \mathcal{R}(-\hat{n}, 2\pi - \alpha), \quad (2.20)$$

limitamos o valor do ângulo  $\alpha$  para  $[0, \pi]$ , pelo fato de conseguirmos cobrir os ângulos de 0 a  $2\pi$ , executando rotações em torno dos eixos  $\hat{n}$  e  $-\hat{n}$ .

Temos, assim, uma nova definição para o grupo  $SO(3)$ , dada por:

$$SO(3) = \left\{ \mathcal{R}(\hat{n}, \alpha) \mid \hat{n} \in S^2, \alpha \in [0, \pi] \right\}, \quad (2.21)$$

com elementos de matriz  $(\mathcal{R}(\hat{n}, \alpha))_{jk} = \mathcal{R}_{jk}(\hat{n}, \alpha) \in \mathbb{R}$ ,  $j, k = 1, 2, 3$ . Um cálculo direto utilizando a fórmula de Rodrigues, mostra que  $\mathcal{R}^T = \mathcal{R}^{-1}$ . Além disso, uma dedução geométrica desta fórmula, através de vetores rotacionados, nos permite afirmar que  $\det \mathcal{R} = 1$ .

### 2.2.3 O grupo $SU(2)$

Consideramos agora o conjunto de matrizes  $2 \times 2$  unitárias que possuem determinante igual a 1, munido com o produto usual de matrizes. Este é o grupo  $SU(2)$ , formalmente dado por

$$SU(2) = \left\{ \mathbf{U} \text{ é uma matriz } 2 \times 2 \text{ complexa} \mid \det \mathbf{U} = 1, \mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^{-1} \right\}. \quad (2.22)$$

De maneira semelhante ao que fizemos para o grupo  $SO(3)$ , através da Equação (2.8), assumimos que uma matriz  $\mathbf{U} \in SU(2)$  possa ser escrita como a exponencial

$$\mathbf{U} = e^{\mathbf{u}}, \quad (2.23)$$

implicando que

$$\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^{-1} \implies (e^{\mathbf{u}})^\dagger = (e^{\mathbf{u}})^{-1} \implies \mathbf{u}^\dagger = -\mathbf{u}. \quad (2.24)$$

Considerando uma matriz qualquer  $\mathbf{u}$  que respeita a condição  $\mathbf{u}^\dagger = -\mathbf{u}$ , temos que essa é escrita como

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a + ia' & b + ib' \\ c + ic' & d + id' \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} a - ia' & c - ic' \\ b - ib' & d - id' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a - ia' & -b - ib' \\ -c - ic' & -d - id' \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Sendo assim

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} ia' & -b - ib' \\ b - ib' & -id' \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Como  $e^{Tr \mathbf{u}} = \det \mathbf{U} = 1$ , temos que  $Tr \mathbf{u} = 0$  implica na igualdade  $a' = d'$ , deste modo

$$\mathbf{u} = i \begin{pmatrix} a' & b - ib' \\ b + ib' & -a' \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Substituindo as variáveis  $(b, b', a')$  por  $(x, y, z)$  respectivamente, podemos escrever a matriz arbitrária  $\mathbf{u}$  como:

$$\mathbf{u} = i \left[ z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (2.28)$$

Sendo assim, uma matriz arbitrária  $\mathbf{u}$  pode ser escrita como uma combinação linear das matrizes de Pauli, dadas por

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Com isso, através da equação (2.8), chegamos à conclusão de que uma matriz qualquer  $\mathbf{U} \in SU(2)$  pode ser escrita como

$$\mathbf{U}(\hat{n}, \alpha) = e^{\mathbf{u}} = e^{i\hat{n} \cdot \vec{\sigma}} = \cos \frac{\alpha}{2} - i\hat{n} \cdot \vec{\sigma} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (2.30)$$

O produto escalar acima,  $(\hat{n} \cdot \vec{\sigma})$ , é uma expressão simbólica e compacta para denotar a combinação linear das matrizes de Pauli com coeficientes  $x, y$  e  $z$ .

Temos então uma nova definição para o grupo  $SU(2)$  dada por:

$$SU(2) = \left\{ \mathbf{U}(\hat{n}, \alpha) \mid \hat{n} \in S^2, \alpha \in [0, 2\pi] \right\}, \quad (2.31)$$

com elementos de matriz  $(\mathbf{U}(\hat{n}, \alpha))_{jk} = \mathbf{U}_{jk}(\hat{n}, \alpha) \in \mathbb{C}$ ,  $j, k = 1, 2$ . Onde  $\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^{-1}$  e  $\det \mathbf{U} = 1$ .

Semelhante ao desenvolvimento da álgebra de Lie  $so(3)$ , correspondente ao grupo  $SO(3)$ , também podemos definir uma álgebra de Lie para o grupo  $SU(2)$  a partir da equação (2.28) e da restrição imposta sobre as matrizes  $\mathbf{u}$  na equação (2.24). Ou seja, definimos  $su(2)$  como:

$$su(2) = \left\{ \mathbf{u} \text{ é uma matriz } 2 \times 2 \mid \mathbf{u}^\dagger = -\mathbf{u} \right\}. \quad (2.32)$$

Este conjunto admite estrutura de espaço vetorial e é munido do comutador  $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$  com  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in su(2)$ , pois  $([\mathbf{u}, \mathbf{v}])^\dagger = -([\mathbf{u}, \mathbf{v}])$  (27).

Como  $su(2)$  é um espaço tridimensional gerado pelas matrizes de Pauli, cientes de que dois espaços vetoriais com a mesma dimensão são isomorfos (30), podemos obter uma bijeção entre a álgebra de Lie  $su(2)$  do grupo  $SU(2)$  e o espaço físico  $\mathbb{D} \cong \mathbb{R}^3$ . Sendo assim, dado um elemento arbitrário  $u \in su(2)$

$$\mathbf{u} = i\hat{n} \cdot \vec{\sigma}. \quad (2.33)$$

Tornamos explícita a relação um-para-um,  $su(2) \cong \mathbb{D}$ , a partir do mapeamento

$$\begin{aligned} \Psi : su(2) &\rightarrow \mathbb{D} \\ i\hat{n} \cdot \vec{\sigma} &\mapsto \vec{r}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Por fim, vale ressaltar que, a partir das equações (2.19) e (2.30), é possível extrair o famoso homomorfismo de grupo entre  $SU(2)$  e  $SO(3)$

$$\phi = SU(2) \rightarrow SO(3) : \phi(\mathbf{U}(\hat{n}, \alpha)) = \mathcal{R}(\hat{n}, \alpha), \quad (2.35)$$

que será abordado com detalhes no Capítulo 4 e servirá como peça central para os resultados obtidos neste trabalho.

### 3 CONEXÃO: ESPAÇO FÍSICO E O ESPAÇO DE HILBERT

A famosa frase de Asher Peres (4), mencionada no Capítulo 1, destaca-se claramente entre as muitas formas de dissipar equívocos acerca do conteúdo filosófico da mecânica quântica. É certo que não é simples identificar a razão disso: seria pela aparente simplicidade na qual a afirmação é formulada, ou pela profundidade subjacente de sua observação?

Deixando de lado, por ora, a explicação de sua popularidade, o fato que desejamos enfatizar é que a observação de Peres realiza duas tarefas simultaneamente. Ela não apenas traz à tona a ideia de que a teoria quântica pode possuir um caráter descritivo (31), como também dissipa o equívoco comum de identificar tal caráter descritivo com a própria realidade física subjacente que se pretende descrever (32). Em outras palavras, a teoria quântica é, até o momento, o melhor arcabouço disponível para descrever o mundo microscópico — seu poder preditivo é inegável (33). Ainda assim, e aqui reside a ressalva, é fundamental ressaltar que ela consiste em um conjunto normativo de pressupostos e regras concebidos para descrever e lidar com fenômenos que não admitem explicação clássica (13).

Isto é, a menos que se adote uma interpretação realista da mecânica quântica — com suas dificuldades inerentes e que não consegue explicar satisfatoriamente todos os fenômenos quânticos mais marcantes (34) — a mensagem (subjetiva) que se extrai da observação de Peres é que a teoria quântica é uma teoria descritiva, cujo arcabouço matemático apenas formaliza uma descrição probabilística de certos fenômenos que ocorrem no espaço físico — no mesmo espírito das interpretações fortemente subjetivistas da teoria (clássica) da probabilidade (35, 36, 37, 38, 39, 40).

Dito isso, não se pode esquecer que existe uma conexão complexa entre o espaço físico onde, na linguagem de Peres, os fenômenos quânticos acontecem, e o espaço de Hilbert onde reside a nossa descrição (probabilística) desses fenômenos. É exatamente isso que nos propomos a fazer neste capítulo. Utilizando o conceito de um dispositivo universal para experimentos de óptica de polarização em  $SU(2)$  (20), em conjunto com a fibração de Hopf (41), estabeleceremos uma conexão entre vetores de estados indistinguíveis em  $S^3$  e  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ , interpretando essa conexão para além de um mero construto matemático—nos moldes do que foi feito na referência (5).

#### 3.1 MOTIVAÇÃO: ESPAÇO DE ESTADOS E A ESFERA DE BLOCH

Nossa motivação para esta abordagem decorre do fato de que sistemas quânticos puros de dois níveis, qubits, são representados por vetores normalizados  $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$ . Enfatizamos que, para simplificação, ao longo desta seção, consideramos apenas sistemas quânticos descritos por estados puros. Ao fazer isso, dado qualquer vetor  $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$ , este

pode ser escrito como

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad a, b \in \mathbb{C} \text{ onde } |a|^2 + |b|^2 = 1. \quad (3.1)$$

Aqui utilizamos  $\mathcal{B} = \{|0\rangle, |1\rangle\}$ , sendo esta a base canônica do espaço  $\mathbb{C}^2$  sobre o corpo dos complexos que descreve um espaço de estados de dimensão igual a 2.  $|\psi\rangle$  pertence ao espaço de estados de dois níveis e respeita a condição de normalização  $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ .

Um número complexo possui uma parte real e uma parte imaginária. Sendo assim, podemos escrever  $a$  e  $b$  como  $a = x_1 + ix_2$ ,  $b = x_3 + ix_4$ ,  $x_\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\mu = 1, 2, 3, 4$ , que, pela condição de normalização, implica que:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1. \quad (3.2)$$

Percebemos que a equação acima possui a estrutura de uma esfera quadridimensional de raio unitário, ou seja, com 3 graus de liberdade. Podemos assim deduzir que os estados quânticos puros de 2 níveis vivem em uma esfera que mora em  $\mathbb{R}^4$ , a esfera de Bloch (42). Denotamos esta esfera também por  $\mathfrak{S}$  (10), e esta é (topologicamente) identificada com a esfera compacta  $S^3 \subset \mathbb{R}^4$  (43).

Dito isso, como em (23), os estados  $|\psi\rangle$  são geralmente parametrizados por

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle. \quad (3.3)$$

Os parâmetros  $\theta$  e  $\varphi$  são coordenadas esféricas, como de costume:  $\theta \in [0, \pi]$  e  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Esta esfera  $\mathfrak{S}$  fornece uma forma visual, geométrica e intuitiva de analisar qubits: cada ponto na esfera representa um estado puro, os polos norte e sul correspondem a  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , e, de forma mais geral, antípodas representam um par de vetores ortogonais.

Uma forma possível de explorar a conexão geométrica entre  $\mathfrak{S}$  e  $\mathbb{R}^3$  pode ser estabelecida observando para a matriz densidade  $\rho$  construída a partir de (3.3). Um cálculo direto mostra que

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}), \quad (3.4)$$

onde  $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  é o conjunto das matrizes de Pauli, dadas pela equação (2.29).

Além disso,  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$  em (3.4), conhecido como vetor de Bloch, obtido dessa forma, é apenas o vetor unitário apontando em uma direção radial arbitrária,

$$\vec{r} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta). \quad (3.5)$$

Para além dessas construções relativamente abstratas, nos próximos parágrafos iremos nos aprofundar no conteúdo físico da relação entre o espaço físico — onde os fenômenos quânticos ocorrem — e a esfera de Bloch — onde os estados envolvidos nesses experimentos são representados.

Partindo de uma suposição operacional, o que de fato define um estado é sua preparação experimental correspondente (44). Consequentemente, antecipamos que os parâmetros  $\theta$  e  $\varphi$  na Equação (3.3) deveriam possuir significado físico/geométrico em termos de um conjunto de procedimentos realizados em um laboratório.

Sistemas quânticos de qubits não são apenas modelos deliberadamente simplistas ou abstrações matemáticas convenientes pertencentes exclusivamente a livros-texto. Sistemas quânticos de dois níveis são abundantes na natureza e podem ser facilmente criados em laboratório (45, 46, 47), além de serem blocos essenciais em fundamentos de mecânica quântica e em aplicações paradigmáticas de informação quântica para tarefas sem análogo clássico (48, 49, 50, 51, 52), ou que proporcionam ganhos significativos em relação aos seus equivalentes clássicos (53, 54, 55, 56). No entanto, retomando a provocação de Peres, nem sempre é fácil discernir uma interpretação física direta de  $\theta$  e  $\varphi$  — veja Eq. (3.3) — nesses contextos.

Vamos dar um exemplo concreto do que entendemos por estado do nosso ponto de vista. Em um artigo recente (10), para dar uma roupagem moderna ao experimento de Stern-Gerlach (SG), foi utilizado o arranjo tradicional (17) como exemplo padrão de como preparar um qubit, bem como para atribuir um significado físico ao par  $\theta$  e  $\varphi$ . Nesse experimento, temos um feixe de átomos de prata neutros passando por um campo magnético não-homogêneo, apontando em uma direção específica descrita por um vetor  $\vec{r}$ , assim como na Equação (3.5), atingindo um anteparo, como mostrado na Figura 1. Neste, foram detectados dois picos de intensidade, como mostra a Figura 2, surgindo, assim, evidências da quantização do momento angular para as partículas que compõem o feixe que incide sobre a região espacial permeada pelo campo magnético (57).

Baseado no argumento acima, podemos descrever este experimento através da notação de espaços de estado (58), representada pela Equação (3.3), considerando o spin *up* como o estado  $|0\rangle$  e o spin *down* como o estado  $|1\rangle$ , onde os parâmetros  $(\theta, \varphi)$  estão conectados à orientação do campo magnético pelo qual passa o feixe de átomos de prata.

Claramente, a parametrização de estados puros em  $\mathfrak{S}$  não é única. De fato, podemos considerar toda a classe de equivalência de vetores que diferem por um fator de fase global constante, sendo indistinguíveis no sentido de fornecer os mesmos valores esperados para qualquer observável. Podemos reformular isso dizendo que estados puros também podem ser representados por órbitas da ação do grupo  $\mathcal{U}(1)$  sobre  $\mathfrak{S}$ , definidas pela multiplicação usual de vetores por um fator de fase global. Com mais detalhes, as órbitas são classes de equivalência de vetores em  $\mathfrak{S}$  que se diferem por uma fase, digamos,  $e^{i\alpha} \in \mathcal{U}(1)$ . A geometria de estados indistinguíveis é elucidada pela fibração de Hopf (41). Longe de ser apenas uma construção matemática, esta fibração explora a conexão intrínseca entre a dimensão do espaço de Hilbert  $\mathbb{C}^2$ , onde a representação dos qubits reside, e a dimensão do espaço físico  $\mathbb{R}^3$ , onde o sistema é preparado — na ref.(10), os autores

Figura 1 - Experimento de Stern-Gerlach.

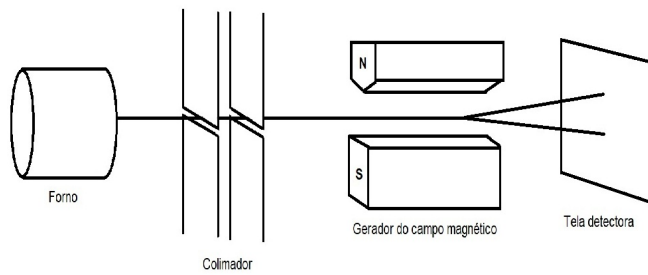
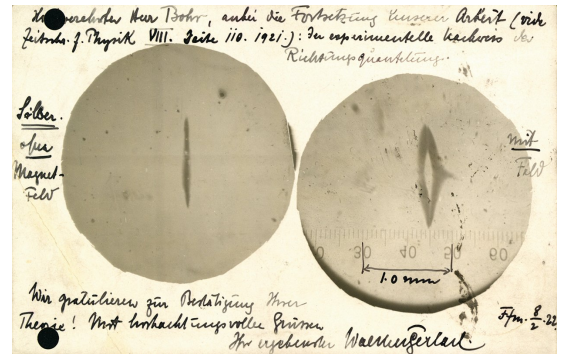


Figura 2 - Anteparo do Stern-Gerlach.



Fonte:

<https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/16260> Fonte: Physics Today 56, 12, 53 (2003).

abordam parcialmente essa relação. Logo abaixo, daremos os detalhes matemáticos dessa construção.

Fortalecendo essa conexão, o objetivo principal deste capítulo é descobrir o significado *operacional* dos parâmetros  $(\theta, \varphi)$  para exemplos concretos. Assim como no exemplo de SG, em que  $(\theta, \phi)$  indicavam a orientação do campo magnético utilizado para preparar o feixe com spin, digamos, na direção *up*. Isso requer encontrar uma prescrição experimental que associe esses parâmetros a um significado físico, especificamente para fótons polarizados.

Para alcançar esse objetivo, precisamos seguir vários passos. Para começar, aprofundamo-nos nos detalhes da fibração de Hopf — este argumento mais matemático abrirá o caminho para o que está por vir. Em seguida, apresentaremos uma espécie de dispositivo universal para óptica de polarização, de forma semelhante ao proposto em (20). Este dispositivo compreende duas placas de meia-onda e duas placas de quarto de onda montadas coaxialmente, permitindo a geração de qualquer transformação de polarização  $SU(2)$ . Em seguida, aplicamos diretamente este dispositivo para obter a parametrização (3.3), fornecendo uma interpretação direta de  $\theta$  e  $\varphi$  em termos de parâmetros ajustáveis nas placas.

### 3.1.1 A relação entre espaço físico e espaço de estados: Fibrção de Hopf

Nosso ponto de partida vem da geometria dos estados indistinguíveis em  $\mathfrak{S}$ . Dois vetores de estado  $|\psi\rangle$  e  $|\psi'\rangle$  que diferem exclusivamente por um fator de fase global

$$|\psi'\rangle = e^{i\alpha} |\psi\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (3.6)$$

são chamados de indistinguíveis. Tal indistingüibilidade decorre do fato de que ambos os estados fornecem os mesmos valores esperados para qualquer observável:

$$\langle \psi' | \mathcal{A} | \psi' \rangle = \langle e^{i\alpha} \psi | \mathcal{A} e^{i\alpha} \psi \rangle = e^{-i\alpha} e^{i\alpha} \langle \psi | \mathcal{A} | \psi \rangle = \langle \psi | \mathcal{A} | \psi \rangle. \quad (3.7)$$

Aqui usamos a notação  $(\cdot, \cdot)$  para representar o produto interno em  $\mathbb{C}^2$ , e  $\mathcal{A}$  denota um operador auto-adjunto que representa um dado observável. Dessa forma, estados (puros) podem ser vistos como classes de equivalência ou órbitas (59) da ação do grupo  $\mathcal{U}(1)$  sobre  $\mathfrak{S}$ , definida por

$$|\psi\rangle \mapsto e^{i\alpha} |\psi\rangle. \quad (3.8)$$

Dado um representante  $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ , rotulamos sua órbita correspondente e única por  $[(a, b)] \subset \mathbb{C}^2/\{(0, 0)\}$ . Cada órbita, por sua vez, pode ser identificada pelo número complexo dado pela razão

$$h : \mathbb{C}^2/\{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{C} \\ [(a, b)] \mapsto h([(a, b)]) = \frac{b}{a}, \quad a \neq 0. \quad (3.9)$$

Claramente,  $h$  é bem definido para classes de equivalência, uma vez que sua ação é independente do representante da classe. De fato, dado qualquer elemento  $[(c, d)] \subset \mathbb{C}^2/\{(0, 0)\}$ , que pertence a mesma classe de equivalência de  $[(a, b)]$ , vale a igualdade  $h([(a, b)]) = h([(c, d)])$  pelo fato de que  $\frac{b}{a} = \frac{e^{i\alpha}d}{e^{i\alpha}c} = \frac{d}{c}$ , com  $a, c \neq 0$ .

Como a aplicação  $h$  toma valores no espaço  $\mathbb{C}$ , que, por sua vez, pode ser mapeado bijetivamente na esfera  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ , temos uma pista para conectar  $S^2$  a  $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ . Primeiro, consideremos a projeção estereográfica equatorial (bijetiva)

$$T : S^2 \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{C} \\ (x_1, x_2, x_3) \longmapsto T(x_1, x_2, x_3) = X + iY = Re^{i\theta}. \quad (3.10)$$

Aqui,  $(x_1, x_2, x_3)$  são as coordenadas de um ponto na esfera  $S^2$ , enquanto  $X$  e  $Y$  são as partes real e imaginária (respectivamente) de um número complexo de magnitude  $R$  e fase  $\theta$ . A aplicação inversa é dada por

$$T^{-1}(z = X + iY) = \left( \frac{2X}{X^2 + Y^2 + 1}, \frac{2Y}{X^2 + Y^2 + 1}, \frac{X^2 + Y^2 - 1}{X^2 + Y^2 + 1} \right). \quad (3.11)$$

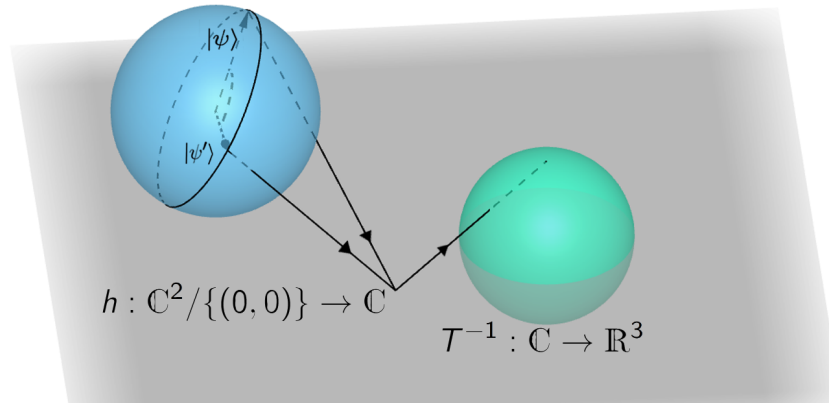
A conexão antecipada entre o espaço de estados e o espaço físico é estabelecida por meio da seguinte composição

$$T^{-1} \circ h : \mathbb{C}^2/\{(0, 0)\} \subset S^3 \rightarrow S^2, \text{ explicitamente dada por} \\ (T^{-1} \circ h)([(a, b)]) = \left( 2\text{Re}(ba^*), 2\text{Im}(ba^*), |b|^2 - |a|^2 \right). \quad (3.12)$$

Enfatizamos que a Equação (3.12) é uma operação consistente para classes de equivalência, pois as três entradas no seu lado direito dependem de combinações do tipo  $ba^*$ , o que a torna independente do fator de fase para diferentes elementos dentro da classe. Os detalhes desse cálculo específico podem ser encontrados em (10).

O trio  $(T^{-1} \circ h, S^3, S^2)$  define a fibração de Hopf (42). Interpretamos a composição  $T^{-1} \circ h$  como uma projeção  $\pi$  de  $S^3$  sobre o espaço base  $S^2$ . Por um lado, estados

Figura 3 - Representação Geométrica da fibração de Hopf.



Fonte: Valle, V. G., et al. “Towards establishing a connection between two-level quantum systems and physical spaces”. *Brazilian Journal of Physics* 54.4 (2024): 93.

indistinguíveis são projetados no mesmo ponto  $P$  em  $S^2$ . Por outro, a imagem inversa  $\pi^{-1}(P)$  contém subconjuntos que correspondem às órbitas resultantes da ação de  $\mathcal{U}(1)$  em  $S^3$ , que são círculos máximos:  $\pi^{-1}(P) \cong S^1$ . Em termos geométricos, resumimos isso como  $S^1 \hookrightarrow S^3 \rightarrow S^2$ . A representação dessa construção é ilustrada na Figura 3. Essa caracterização matemática implica que estados de um qubit em  $\mathfrak{S} \cong S^3 \subset \mathbb{C}^2$  podem ser relacionados com o espaço físico representado por  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ .

Em (10), focando exclusivamente no arranjo experimental de Stern–Gerlach, os autores estabeleceram uma conexão semelhante entre o espaço de estados e o espaço físico. Eles fornecem uma prescrição de como um aparato ideal de Stern–Gerlach pode ser manipulado para preparar o estado genérico de um qubit dado pela Equação (3.3).

Ainda na referência (10), os autores mostraram como inverter o papel de testemunhas de dimensão, de modo que elas pudessem ser usadas para limitar a dimensão do espaço físico — em vez de limitar a dimensão de um sistema quântico alvo. O cerne da análise residiu nas particularidades do experimento de Stern–Gerlach. Nesse sentido, sua abordagem pode deixar margem a críticas por ser aparentemente dependente demais do sistema — voltaremos a esse ponto mais adiante. No presente trabalho, embora a dimensionalidade desempenhe um papel fundamental, não iremos focar em testemunhas de dimensão; em outras palavras, deixaremos de lado quaisquer dados probabilísticos para restaurar a dimensionalidade dos espaços de Hilbert. Assim, a questão central que abordaremos aqui é: que implicações podemos extrair para outros sistemas quânticos? Colocando de outra forma, a fibração de Hopf sugere uma abordagem ‘universal’ para a preparação de estados em  $\mathbb{C}^2$  em um laboratório imerso no espaço físico representado por  $\mathbb{R}^3$ ?

Considere agora outro sistema quântico simples de dois níveis envolvendo um feixe

de luz que atravessa um cristal de turmalina, inspirado no trabalho seminal de Dirac (19). Nesse experimento, observa-se que, quando o feixe é polarizado a um ângulo  $\alpha$  em relação ao eixo óptico do cristal, apenas uma fração,  $\sin^2\alpha$ , atravessa o cristal de acordo com a eletrodinâmica clássica. Em termos de um único fóton, isso implica uma probabilidade  $\sin^2\alpha$  de ele ser encontrado após o cristal, enquanto  $\cos^2\alpha$  representa a probabilidade de absorção. Por mais simplificada que seja essa descrição, o cenário experimental inspirado no estudo de Dirac sugere que fótons podem ser descritos por um vetor de estado em  $\mathbb{C}^2$ , o qual utilizaremos em breve. Isso não é novidade, mas precisávamos de um caso concreto e de fácil assimilação para trabalhar. É exatamente isso que faremos — e veremos que, ao trabalhar com um caso concreto, podemos elaborar um argumento verdadeiramente universal e independente do sistema.

A polarização de uma onda eletromagnética pode ser descrita no laboratório por meio da estrutura vetorial do campo elétrico correspondente (60). Considere o caso mais simples de uma onda monocromática com frequência  $\omega$  propagando-se na direção  $z$ . A descrição completa da polarização pode ser fornecida, entre outras formas, pelo campo elétrico dado por

$$\vec{E}(t) = (E_{0x} \cos(\omega t - \delta_x), E_{0y} \cos(\omega t - \delta_y)). \quad (3.13)$$

Nesse caso, observamos a forma mais geral de polarização elíptica. No entanto, devemos enfatizar que há uma dimensão faltante, no seguinte sentido: se ingenuamente igualarmos os graus de liberdade à dimensão do espaço ambiente, então a preparação do feixe de luz polarizado está confinada a um plano, um espaço bidimensional onde o campo elétrico reside. Embora o feixe possa estar imerso em três dimensões, apenas dois graus de liberdade são necessários para descrever completamente a luz polarizada. Ainda assim, de acordo com a prescrição da fibração de Hopf, seria de se esperar um plano de fundo tridimensional. Como reconciliar essas duas perspectivas? Abordaremos essa questão nas seções seguintes.

### 3.1.2 Construindo um dispositivo universal para preparação de estados de polarização

Expandindo nossa discussão anterior, partimos da suposição de que um feixe de fótons polarizados pode ser representado por um estado em  $\mathfrak{S} \subset \mathbb{C}^2$ . Como buscamos descrever uma preparação de estados que não apenas esteja de acordo com a parametrização da Equação (3.3), mas que também aborde a dimensão ausente no espaço de preparação de estados, apontada ao final da seção anterior, recorreremos a uma ferramenta conhecida como o “dispositivo universal  $SU(2)$  para preparação de estados de polarização” (20).

O dispositivo universal consiste em uma combinação de placas de meia-onda e placas de quarto de onda — Figuras 4 e 5, respectivamente — embora outros arranjos possam ser utilizados, a depender do sistema abordado, veja (61), o arranjo utilizado aqui é precisamente composto por duas placas de meia-onda e duas placas de quarto de

Figura 4 - Placa de meia-onda.

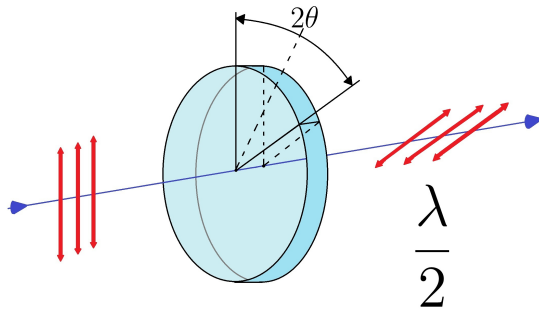
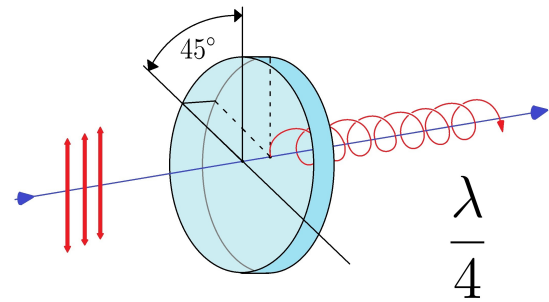


Figura 5 - Placa de quarto de onda.



Fonte: Elaborado pelo autor. (2026).

Nota: Esta placa introduz uma diferença de fase de  $\pi$ . O ângulo de rotação é o dobro do ângulo entre a luz incidente e o eixo da placa.

Fonte: Elaborado pelo autor. (2026).

Nota: Esta placa introduz uma diferença de fase de  $\pi/2$  e converte a luz linearmente polarizada em uma polarização circular.

onda alinhadas coaxialmente — ver a Figura 6. Esse arranjo é capaz de realizar toda e qualquer transformação de polarização pertencente a  $SU(2)$  (20). Esse grupo representa transformações lineares nos componentes do vetor de campo de feixes de luz, preservando a intensidade. Assim,  $SU(2)$  desempenha um papel central na óptica de polarização.

A partir de um ponto de vista operacional, é justo perguntar como tais transformações podem ser realizadas em laboratório? Nesse texto, por motivos de escopo e foco, infelizmente não abordaremos os detalhes técnicos e experimentais inerentes à implementação desse arranjo em laboratórios reais, e voltaremos nossa atenção para a estrutura matemática dessa ferramenta. Podem-se utilizar placas de quarto de onda e de meia-onda, que introduzem (matematicamente) rotações de  $\pi/2$  e  $\pi$ , respectivamente, como casos particulares de elementos de  $SU(2)$ . O dispositivo generaliza essas transformações para qualquer polarização em  $SU(2)$ . Para isso, as placas são rotacionadas em torno do eixo comum, obtendo-se assim qualquer estado de polarização específico em  $SU(2)$ . As posições angulares correspondentes das placas não apenas realizam de forma única a transformação de polarização do grupo, como também permitem a preparação de estados arbitrários, representados por um vetor na esfera de Bloch.

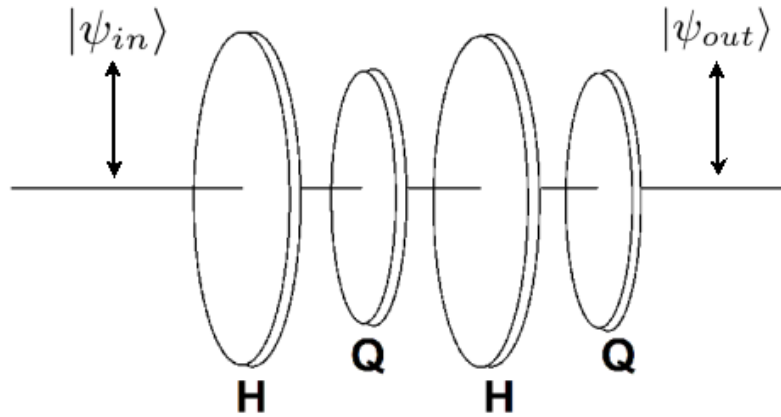
Tanto as placas de meia-onda ( $H_\varphi$ ) quanto as placas de quarto de onda ( $Q_\varphi$ ) são representadas pela conjugação

$$H_\varphi = \vartheta(\varphi) i\sigma_3 \vartheta(\varphi)^{-1}, \quad (3.14)$$

$$Q_\varphi = \vartheta(\varphi) \begin{pmatrix} e^{i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/4} \end{pmatrix} \vartheta(\varphi)^{-1}, \quad (3.15)$$

Onde  $\varphi$  é o ângulo entre o eixo que induz a diferença de fase e um eixo de referência, digamos  $x_1$ , que é usado para construir o sistema de referência para a combinação das

Figura 6 - Desenho esquemático do dispositivo universal para óptica de polarização.



Fonte: <https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/16260>

Nota: Desenho esquemático para a preparação de um estado  $|\psi_{out}\rangle$  a partir de um estado inicial arbitrário  $|\psi_{in}\rangle$ . Note que  $|\psi_{in}\rangle$  e  $|\psi_{out}\rangle$  representam entidades físicas efetivamente preparadas no laboratório.

placas, e  $\vartheta(\varphi)$  é o elemento de  $SU(2)$  dado por

$$\vartheta(\varphi) = e^{-i\varphi\sigma_2} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\text{sen } \varphi \\ \text{sen } \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

O principal resultado da ref. (20), que utilizamos aqui, é que qualquer elemento  $U(\xi, \eta, \zeta)$  que represente uma transformação de polarização arbitrária em  $SU(2)$  pode ser escrito como a composição

$$U(\xi, \eta, \zeta) = Q_{\frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{4}} H_{\frac{\xi}{2} + \frac{\eta}{4} \mp \frac{\pi}{4}} Q_{\frac{\xi}{2} - \frac{\pi}{4}} H_{\frac{\xi - \zeta}{4} \pm \frac{\pi}{4}}. \quad (3.17)$$

Os parâmetros  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$  são os conhecidos ângulos de Euler. Podemos reescrever (3.17) em um formato mais compacto:

$$U(\xi, \eta, \zeta) = e^{-\frac{i}{2}\xi\sigma_2} e^{\frac{i}{2}\eta\sigma_3} e^{-\frac{i}{2}\zeta\sigma_2}. \quad (3.18)$$

De acordo com (20), enquanto  $\xi$  e  $\zeta$  variam em  $[0, 2\pi]$ ,  $\eta$  é restrito ao intervalo  $[0, \pi]$ . Como argumentaremos na próxima seção, essa última restrição terá um forte impacto no funcionamento do nosso dispositivo universal: será necessário introduzir pelo menos dois estados através dele para cobrir toda a esfera de Bloch — além disso, a mesma restrição sobre  $\eta$  refletirá, de maneira inesperada, o fato de que esferas são objetos bidimensionais.

Esses parâmetros são vistos como os valores ajustáveis que um experimentalista pode controlar nas placas para preparar estados de polarização arbitrários em  $SU(2)$ .

O exemplo acima é apenas um substituto concreto de um circuito quântico (20). Nesse contexto, a palavra *universal* significa que qualquer computação quântica em qubits (sejam eles fótons, armadilhas de íons, supercondutores, pontos quânticos, etc.) pode ser gerada por um conjunto finito de portas unitárias. Matematicamente, isso significa decompor um operador de  $SU(2)$  em termos de rotações

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha/2 & -\sin \alpha/2 \\ \sin \alpha/2 & \cos \alpha/2 \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

e rotações em  $\hat{z}$

$$\begin{pmatrix} e^{-i\beta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta/2} \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

juntamente com um deslocamento de fase (global) — veja a eq. (1.17) de (23). Assim, com essa prescrição, podemos obter uma porta lógica quântica arbitrária atuando em qubits individuais. O que o nosso trabalho fornece é um significado operacional para os parâmetros envolvidos no estado de qubit em termos de tarefas realizadas no laboratório, no exemplo específico acima de óptica de polarização.

Na próxima seção, mostraremos como é possível preparar toda a esfera de Bloch como resultado do uso do dispositivo universal quando inserimos nele um conjunto particular de estados.

### 3.1.3 Preparando um estado polarizado arbitrário em $SU(2)$

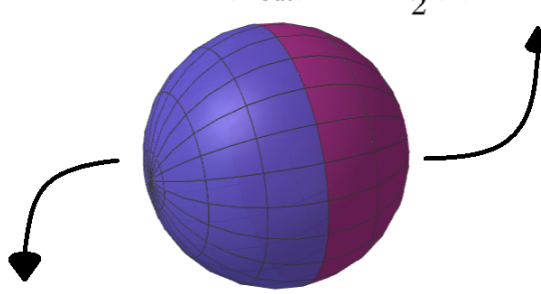
Interpretar os ângulos de Euler como parâmetros acessíveis para a preparação de estados nos permite aplicar  $U(\xi, \eta, \zeta)$  a um estado inicial específico  $|\psi_{in}\rangle$  e examinar o resultado dessa preparação. Expressamos isso da seguinte forma,

$$|\psi_{out}\rangle = U(\xi, \eta, \zeta) |\psi_{in}\rangle. \quad (3.21)$$

Esse ato pode ser visualizado como a passagem do estado incidente através do dispositivo universal, como ilustrado na Figura 6.

Como ponto de partida, escolhemos  $|\psi_{in}\rangle = |0\rangle$ . Também fixamos  $\xi = 0$ . A motivação para essa escolha decorre do fato de que qualquer direção no espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3$  pode ser definida de forma única pelos dois ângulos  $\theta$  e  $\varphi$ . Assim, ao fixar  $\xi = 0$ , restam-nos dois parâmetros,  $\eta$  e  $\zeta$ , a serem identificados, de uma forma ou de outra, com

Figura 7 - Representação de  $|\psi'_{out}\rangle$  e  $|\psi''_{out}\rangle$  na esfera de Bloch.

$$|\psi'_{out}\rangle = \cos \frac{\zeta}{2} |0\rangle + e^{-i\eta} \sin \frac{\zeta}{2} |1\rangle$$


$$|\psi''_{out}\rangle = -\sin \frac{\zeta}{2} |0\rangle + e^{-i\eta} \cos \frac{\zeta}{2} |1\rangle$$

Fonte: Elaborado pelo autor. (2026).

Nota: Esta imagem é uma representação da construção dos hemisférios leste e oeste da esfera de Bloch a partir dos possíveis valores de  $|\psi'_{out}\rangle$  e  $|\psi''_{out}\rangle$ , determinados pelos limites dos ângulos de Euler  $\eta$  e  $\zeta$ .

$\theta$  e  $\varphi$ . Em seguida, calculamos  $|\psi_{out}\rangle$  na representação canônica da base  $|0\rangle, |1\rangle$ :

$$\begin{aligned} |\psi_{out}\rangle &= U(0, \eta, \zeta) |0\rangle = e^{\frac{i}{2}\eta\sigma_3} e^{-\frac{i}{2}\zeta\sigma_2} |0\rangle \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\eta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\eta}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \zeta/2 & -\sin \zeta/2 \\ \sin \zeta/2 & \cos \zeta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\eta}{2}} \cos \zeta/2 \\ e^{-i\frac{\eta}{2}} \sin \zeta/2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Por ser um fator de fase global, podemos desconsiderar  $e^{i\frac{\eta}{2}}$ , resultando no estado equivalente

$$|\psi'_{out}\rangle = \cos \frac{\zeta}{2} |0\rangle + e^{-i\eta} \sin \frac{\zeta}{2} |1\rangle. \quad (3.23)$$

Uma comparação entre as eqs. (3.3) e (3.23) indica que nosso dispositivo universal pode, de fato, gerar qualquer estado no hemisfério ocidental da esfera de Bloch. Estamos a meio caminho da universalidade proposta desse dispositivo, pois ainda precisamos cobrir o hemisfério oriental.

Para isso, selecionamos de forma análoga um segundo estado inicial  $|\psi_{in}\rangle = |1\rangle$  e fixamos  $\xi = 0$ . Com um cálculo análogo, obtemos

$$|\psi''_{out}\rangle = -\sin \frac{\zeta}{2} |0\rangle + e^{-i\eta} \cos \frac{\zeta}{2} |1\rangle. \quad (3.24)$$

Observamos que  $\langle \psi''_{out} | \psi'_{out} \rangle = 0$ , o que nos permite concluir que  $|\psi'_{out}\rangle$  e  $|\psi''_{out}\rangle$  são antípodas em  $\mathfrak{S}$ . Como o primeiro se encontra no hemisfério ocidental, o segundo está, de

fato, no hemisfério oriental, assim como na Figura 7, cobrindo assim todos os pontos da esfera de Bloch.

Para concluir este capítulo, enfatizamos que estivemos mais preocupados com a operacionalização e a preparação de estados no laboratório, em vez de focar em detalhes técnicos, como a interação entre o spin e o campo magnético externo no caso do aparato de Stern–Gerlach (10), ou ainda a interação entre o campo elétrico do fóton e o momento de dipolo elétrico associado às cargas de uma placa de onda. A consistência em manter a estrutura de “preparar e certificar”, presente tanto na combinação sequencial de dois aparatos de Stern–Gerlach quanto no dispositivo universal, nos permitiu formular uma generalização que é aplicável inclusive a circuitos de computação quântica.

## 4 TRANSFORMAÇÕES DE ESTADOS: UMA ANÁLISE OPERACIONAL

No capítulo anterior, atribuímos uma interpretação operacional, em termos de preparação de estado, à fibração de Hopf. Obtivemos como resultado uma conexão intrínseca entre o espaço físico, denotado por  $\mathbb{D} \cong \mathbb{R}^3$ , e qubits em  $\mathbb{C}^2$ . Em outras palavras, afirmamos que qualquer sistema quântico de dois níveis pode, na prática, ser preparado selecionando-se direções apropriadas no espaço físico tridimensional, conforme codificado operacionalmente pela representação de Bloch. Na verdade, qualquer sistema só pode ser preparado no espaço físico, afinal, não temos outro lugar para fazer preparações/experimentos. Queremos dizer que, neste caso simples, parâmetros relacionados ao próprio espaço físico são reconhecidos nos estados ali preparados.

Com isso em mente, torna-se pertinente agora questionar o comportamento de diferentes operações nos espaços  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{C}^2$  em virtude dessa conexão. Por exemplo, o que ocorre com a matriz densidade  $\rho$  na esfera de Bloch, representada pela Equação (3.4), à medida que rotacionamos o seu vetor a ela associado em  $\mathbb{R}^3$ ? Ou, de forma análoga, o que acontece com esse mesmo vetor quando atuamos sobre  $\rho$  com uma transformação unitária?

Sendo assim, para além da conexão estabelecida no Capítulo 3, como uma continuação natural da discussão, neste capítulo redirecionamos nossa atenção para investigar o comportamento dessa conexão mediante transformações intrínsecas relacionadas aos espaços abordados,  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{C}^2$ . Investigar não apenas como os estados estão relacionados ao espaço físico, como fizemos anteriormente, mas também avaliar, se possível, qual conexão podemos estabelecer entre operações na preparação de estados no espaço físico e o que isto implica nos estados quânticos correspondentes.

### 4.1 PROCESSOS QUÂNTICOS E O APARECIMENTO DO HOMOMORFISMO $SU(2)$ – $SO(3)$

Processos físicos na teoria quântica são descritos por mapeamentos completamente positivos que preservam o traço (CPTP). Por processos, pretendemos que este termo seja o mais amplo possível. Exemplos incluem processos de medição por meio de algum instrumento quântico (31), evolução temporal (ir)reversível (62), descrições de *coarse-graining* de detectores borrados e saturados (24), operações locais e protocolos de comunicação clássica compostos por mapas CPTP, aplicados em contextos como a teoria do emaranhamento (63), bem como a modelagem da dinâmica de sistemas quânticos abertos, onde mapas CPTP são utilizados para reproduzir evoluções não unitárias devido à decoerência e possível dissipação (64). Esta lista pode ser estendida indefinidamente, refletindo o papel onipresente de tais mapas na teoria quântica e além — como em teorias de probabilidade generalizadas, por exemplo (65).

Para compreender por que mapas CPTP são de interesse, é útil decompor essa denominação em duas partes. Embora se possa partir do princípio de convexidade, esses mapas podem ser estendidos de modo a transformar estados quânticos em estados quânticos de forma linear em todo o espaço (22). Uma vez que estados quânticos são operadores positivos com traço unitário, é natural impor a condição de preservação do traço (TP), garantindo que o traço unitário permaneça inalterado sob a ação do mapa.

Antes de abordarmos a propriedade de completa positividade (CP), começamos somente com a noção de positividade, que é central para a estrutura física e matemática da teoria quântica. Em particular, operadores positivos são essenciais na descrição de operadores de estado quântico, pois a positividade garante que todas as probabilidades de medições sejam não negativas. Além disso, um operador densidade deve ser positivo semi-definido para assegurar que os valores esperados de todos os observáveis correspondam a probabilidades fisicamente significativas, reais e não negativas.

Indo um pouco mais além, a completa positividade é também um requisito fundamental para qualquer mapa fisicamente admissível. Quando um sistema interage com um ambiente externo, por exemplo, a evolução de ambos é descrita por uma transformação unitária que atua no espaço de Hilbert conjunto. Após a realização do traço parcial sobre o ambiente, a dinâmica reduzida do sistema é representada por um mapa que atua exclusivamente sobre seu espaço de estados. Para garantir que esse mapa reduzido produza um estado quântico válido, não apenas para sistemas isolados, mas também para sistemas emaranhados mais complexos, o mapa deve ser completamente positivo. Na ausência de completa positividade, a ação estendida do canal sobre estados emaranhados poderia gerar operadores densidade não positivos (não físicos), violando a consistência probabilística da teoria quântica. Um exemplo padrão é a operação de transposição, que é positiva, mas não completamente positiva (23). Por essa razão, exige-se também a condição de completa positividade (CP). Juntas, essas duas condições—que definem o que é conhecido como canal quântico (ou mapeamento físico)—aparentam impor fortes restrições à inversibilidade dos mapas CPTP com inversas fisicamente admissíveis. O canal de depolarização serve como um exemplo de um mapa CPTP cuja inversa não é positiva, destacando a raridade—ou mesmo a contingência—de encontrar um mapa CPTP com inversa CPTP (11).

Essa questão já foi estudada em detalhes em (11), onde a caracterização de canais quânticos invertíveis é abordada por meio de sua representação de Kraus. Em essência, um mapa físico admite uma inversa CPTP se, e somente se, a decomposição de Kraus deste contiver exatamente um único operador de Kraus. Sendo um mapa CPTP, exige-se que a representação de Kraus preserve o traço; isso se traduz na condição de que os operadores, digamos  $A_a$ , com  $a$  pertencendo a um conjunto finito, satisfaçam  $\sum_a A_a^* A_a = \mathbb{I}$ . Com apenas um operador na representação, conclui-se que esse operador é, de fato, unitário.

Neste capítulo, levamos essa análise um passo adiante, explorando a conexão

entre mapas CPTP invertíveis com inversas fisicamente admissíveis e teoria de grupos. Notavelmente, o conhecido homomorfismo dois-para-um entre  $SU(2)$  e  $SO(3)$  (27) pode ser recuperado de maneira surpreendentemente simples por meio de um procedimento de preparação envolvendo sistemas quânticos de dois níveis imersos em um espaço físico tridimensional.

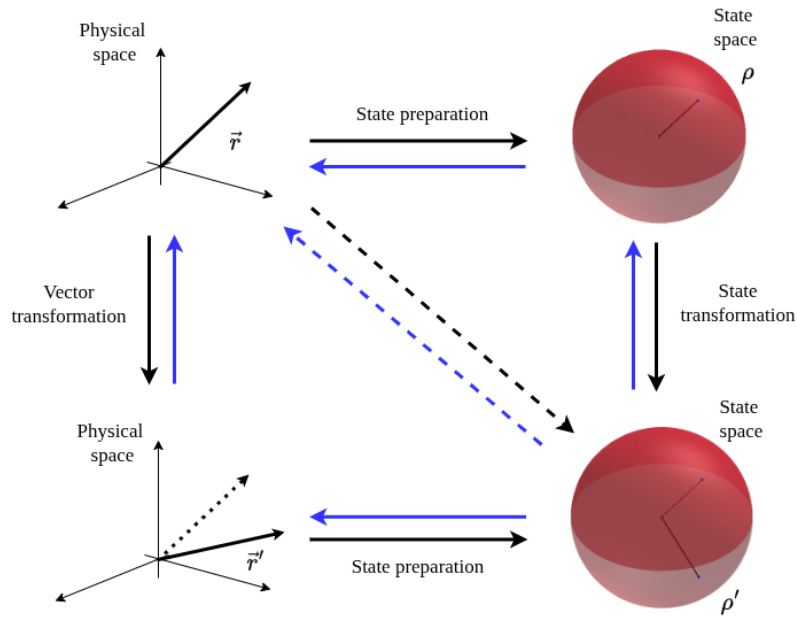
Com essa estrutura operacional estabelecida (7, 8) e cientes da relação entre os vetores de Bloch e o laboratório, abordada no Capítulo 3, sabemos que, quando uma implementação física específica é escolhida, esses vetores adquirem um significado operacional como direções que rotulam os procedimentos de preparação. A receita operacional para obter as coordenadas esféricas  $(\theta, \varphi)$  da Equação (3.5) é, portanto, dependente do aparato, como a orientação do ímã em um experimento de SG ou as configurações dos ângulos de Euler do dispositivo de polarização universal  $SU(2)$ , como visto no Capítulo 3.

Como vimos anteriormente, a fibração de Hopf fornece a ponte matemática; ela garante uma identificação independente do sistema entre a classe de equivalência das preparações e uma direção de Bloch. Partindo disso, investigamos mais a fundo as transformações entre vetores em  $\mathbb{D}$  (que dão origem a estados quânticos no sentido explicado acima) e as possíveis transformações de estado correspondentes no espaço de estados. Espera-se que a sequência dessas transformações faça com que o diagrama na Figura 8 comute.

Por um lado, uma transformação de um vetor no espaço físico é representada por uma rotação, que, por sua vez, induz uma transformação unitária do estado quântico correspondente. Isso dá origem à direção  $SO(3) \rightarrow SU(2)$  no homomorfismo que pretendemos recuperar. Ela corresponde ao caminho representado pelas setas horizontais pretas no diagrama mostrado na Figura 8. Por outro lado, a direção inversa,  $SU(2) \rightarrow SO(3)$ , é obtida exigindo-se uma transformação física reversível de um estado quântico. Como discutido anteriormente, o único processo admissível desse tipo é uma operação unitária, que se traduz em uma rotação no espaço físico. Essa etapa é ilustrada pelas setas azuis no diagrama.

Para construir ambas as direções no diagrama, procedemos da seguinte forma. Na próxima seção, mostramos como uma rotação no espaço físico induz, sem ambiguidade, uma transformação unitária no estado quântico associado ao vetor correspondente. Em seguida, iremos determinar as condições necessárias para a possível inversão dos mapeamentos CPTP's e, na Seção 4.1.3, as utilizaremos como base para reconstruir a rotação associada a partir de uma unitária que representa um processo quântico reversível, recuperando assim o homomorfismo dois-para-um que buscávamos redescobrir.

Figura 8 - Diagrama que representa a alegada relação entre  $SO(3)$  e  $SU(2)$ .



Fonte: Valle, V. G., and B. F. Rizzuti. "From Rotations to Unitaries: Reversible Quantum Processes and the Emergence of the  $SU(2)$ - $SO(3)$  Homomorphism". *Revista Brasileira de Ensino de Física* 48 (2026): e20250374.  
 Nota: Através das setas pretas e azuis, este diagrama cobre, respectivamente, tanto a ida quanto a volta do homomorfismo que buscamos.

#### 4.1.1 Do espaço físico para o espaço de estados: $SO(3) \rightarrow SU(2)$

Nosso ponto de partida é a conexão entre o espaço físico e o espaço dos estados quânticos, já estabelecida no Capítulo 3. A partir daí, começamos a explorar a relação entre as transformações em cada lado—especificamente, a correspondência entre rotações e transformações unitárias.

Já é de nosso conhecimento que os parâmetros  $\theta$  e  $\varphi$  da Equação (3.3) tem uma interpretação física concreta. A título de comparação, na Figura 8, de forma análoga à isometria de  $SU(2)$  e  $SO(3)$ , existe a isometria do espaço projetivo complexo  $\mathbb{C}P^1$ —o espaço de estados puros de um qubit, modulo a fase global—com a esfera de Bloch  $S^2$  (41). Restringiremos nossa análise ao primeiro caso.

O operador de densidade correspondente relacionado a (3.3) é dado pela Equação (3.4). O lado direito da igualdade da Equação (3.4) não está restrito ao exemplo particular de um estado puro. Na verdade, ele representa o operador de densidade mais geral em  $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ , o espaço de operadores lineares sobre  $\mathbb{C}^2$ .

Seja  $\xi$  um operador densidade arbitrário. Sabendo que

1.  $\text{Tr } \xi^2 \leq 1$ ;
2.  $\xi$  é puro se, e somente se  $\text{Tr } \xi^2 = 1$ .

Descobrimos que  $\rho$  na Equação (3.4) é puro se e somente se  $\|\vec{r}\| = 1$  e misto quando  $\|\vec{r}\| < 1$ .

Com esse resultado em mãos, voltando para as transformações no espaço físico que preservam a natureza do estado quântico—seja ele puro ou misto. Tais transformações devem ser isometrias, ou seja, transformações que preservam a norma de um vetor, que podem ser descritas como rotações em torno de um eixo  $\hat{n}$  por um ângulo  $\alpha$ , denotadas por  $\mathcal{R}(\hat{n}, \alpha)$ .

Dado tudo o que foi dito, o próximo teorema evidencia como uma transformação de um vetor no espaço físico induz uma mudança no estado correspondente da esfera de Bloch, esteja este localizado na superfície ou no interior da mesma; veja, por exemplo, (66).

**Teorema 1.** *Dado um elemento geral de rotação  $\mathcal{R}(\hat{n}, \alpha) \in SO(3)$ , e dois estados  $\rho_{\vec{r}}$  e  $\rho_{\vec{r}'}$ , descritos respectivamente por  $\vec{r}$  e  $\vec{r}' = \mathcal{R}(\hat{n}, \alpha)\vec{r}$ . Podemos calcular  $\rho_{\vec{r}'}$  a partir de  $\rho_{\vec{r}}$  da seguinte forma:*

$$\rho_{\vec{r}'} = \mathcal{U}(\hat{n}, \alpha)\rho_{\vec{r}}\mathcal{U}^*(\hat{n}, \alpha), \quad (4.1)$$

onde  $\mathcal{U}(\hat{n}, \alpha) \in SU(2)$ .

*Prova:*

Como vimos previamente, um elemento de rotação de  $SO(3)$  geral é dado pela fórmula de Rodrigues (29)

$$\mathcal{R}_{jk}(\hat{n}, \alpha) = \delta_{jk} \cos \alpha + n_j n_k (1 - \cos \alpha) - \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{jkl} n_l \sin \alpha = \left( e^{-i\alpha \hat{n} \cdot \vec{\tau}} \right)_{jk} \quad (4.2)$$

e os geradores de grupo  $\vec{\tau}$  são dados por  $(\tau_l)_{jk} = -i\varepsilon_{jkl}$  (26). De agora em diante, as letras latinas  $i, j, k, \dots$ , como de costume, assumem os valores 1, 2, 3.

Agora, se  $\vec{r}' = \mathcal{R}(\hat{n}, \alpha)\vec{r}$ , então o vetor rotacionado  $\vec{r}'$  dá origem a um estado  $\rho_{\vec{r}'}$  que buscamos determinar. Temos

$$\begin{aligned} \rho_{\vec{r}'} &= \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \vec{r}' \cdot \vec{\sigma}) = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + (\mathcal{R}\vec{r}) \cdot \vec{\sigma}) \\ &= \frac{1}{2} [\mathbb{I} + \cos \alpha (\vec{r} \cdot \vec{\sigma}) + (1 - \cos \alpha) (\hat{n} \cdot \vec{r}) (\hat{n} \cdot \vec{\sigma}) - \sin \alpha (\vec{r} \times \hat{n}) \cdot \vec{\sigma}]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Para determinarmos a expressão acima, agimos explicitamente com (4.2) no vetor  $\vec{r}$ , ou seja,

$$\vec{r}' = \cos \alpha \vec{r} + (1 - \cos \alpha) (\hat{n} \cdot \vec{r}) \hat{n} - \sin \alpha \vec{r} \times \hat{n}. \quad (4.4)$$

Utilizando as identidades trigonométricas

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \quad \text{e} \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

e encontramos

$$\vec{r}' \cdot \vec{\sigma} = \left( \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) (\vec{r} \cdot \vec{\sigma}) - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} (\vec{r} \times \hat{n}) \cdot \vec{\sigma} + 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} (\hat{n} \cdot \vec{r}) (\hat{n} \cdot \vec{\sigma}). \quad (4.5)$$

Reorganizando os termos, temos:

$$\vec{r}' \cdot \vec{\sigma} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} (\vec{r} \cdot \vec{\sigma}) - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} (\vec{r} \times \hat{n}) \cdot \vec{\sigma} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} (2(\hat{n} \cdot \vec{r})(\vec{r} \cdot \vec{\sigma}) - (\vec{r} \cdot \vec{\sigma})). \quad (4.6)$$

A partir de  $(\vec{r} \cdot \vec{\sigma})(\hat{n} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{r} \cdot \hat{n})\mathbb{I} + i(\vec{r} \times \hat{n}) \cdot \vec{\sigma}$ , a identidade do produto de combinação de matrizes de Pauli, podemos extrair duas identidades,

$$(\hat{n} \cdot \vec{\sigma})(\vec{r} \cdot \vec{\sigma})(\hat{n} \cdot \vec{\sigma}) = 2(\hat{n} \cdot \vec{r})(\vec{r} \cdot \vec{\sigma}) - (\vec{r} \cdot \vec{\sigma});$$

$$(\vec{r} \cdot \vec{\sigma})(\hat{n} \cdot \vec{\sigma}) - (\hat{n} \cdot \vec{\sigma})(\vec{r} \cdot \vec{\sigma}) = 2i(\vec{r} \times \hat{n}) \cdot \vec{\sigma}.$$

Sabendo disso, nosso termo  $\vec{r}' \cdot \vec{\sigma}$  torna-se

$$\begin{aligned} \vec{r}' \cdot \vec{\sigma} &= \cos^2 \frac{\alpha}{2} (\vec{r} \cdot \vec{\sigma}) - i \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} (\hat{n} \cdot \vec{\sigma})(\vec{r} \cdot \vec{\sigma}) + \\ &+ i \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} (\vec{r} \cdot \vec{\sigma})(\hat{n} \cdot \vec{\sigma}) + \sin^2 \frac{\alpha}{2} (\hat{n} \cdot \vec{\sigma})(\vec{r} \cdot \vec{\sigma})(\hat{n} \cdot \vec{\sigma}), \end{aligned}$$

e finalmente, com  $\mathcal{U} = \cos \frac{\alpha}{2} \mathbb{I} - i(\hat{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin \frac{\alpha}{2}$ , podemos reorganizar a expressão acima para

$$\vec{r}' \cdot \vec{\sigma} = \mathcal{U} (\vec{r} \cdot \vec{\sigma}) \mathcal{U}^*. \quad (4.7)$$

A expressão (4.7) nos permite reescrever o nosso  $\rho_{\vec{r}'}$  da Equação (4.3) como

$$\rho_{\vec{r}'} = \mathcal{U}(\hat{n}, \alpha) \rho_{\vec{r}} \mathcal{U}^*(\hat{n}, \alpha), \quad (4.8)$$

onde  $\mathcal{U}(\hat{n}, \alpha)$  é a matriz unitária,

$$\mathcal{U}(\hat{n}, \alpha) = \cos \frac{\alpha}{2} \mathbb{I} - i \sin \frac{\alpha}{2} (\hat{n} \cdot \vec{\sigma}) = e^{-i \frac{\alpha}{2} \hat{n} \cdot \vec{\sigma}}, \quad (4.9)$$

que pertence a  $SU(2)$ , pois  $\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{U}^{-1}$  e  $\det \mathcal{U}(\hat{n}, \alpha) = 1$ , completando assim a prova.  $\square$

O resultado acima mostra que cada rotação  $\vec{r}' = \mathcal{R}(\hat{n}, \alpha) \vec{r}$ , com  $\mathcal{R}(\hat{n}, \alpha) = e^{-i \alpha \hat{n} \cdot \vec{\tau}}$  induz uma transformação de estado  $\rho_{\vec{r}'} = \mathcal{U}(\hat{n}, \alpha) \rho_{\vec{r}} \mathcal{U}^*(\hat{n}, \alpha)$  com  $\mathcal{U}(\hat{n}, \alpha) = e^{-i \frac{\alpha}{2} \hat{n} \cdot \vec{\sigma}}$ . Assim, acabamos de estabelecer o mapeamento  $\phi : SO(3) \rightarrow SU(2)$ , com  $\phi(\mathcal{R}(\hat{n}, \alpha)) = \mathcal{U}(\hat{n}, \alpha)$ . É importante enfatizar uma peculiaridade desse mapeamento. Como em (4.8), o operador unitário  $\mathcal{U}$  e seu conjugado aparecem conjuntamente, os elementos  $\mathcal{U}$  e  $-\mathcal{U}$  produzem o mesmo resultado físico. Portanto, (4.9) não define, estritamente falando, um mapeamento de rotações espaciais para elementos de  $SU(2)$ , mas sim do conjunto de parâmetros  $(\hat{n}, \alpha)$  para  $SU(2)$ . Observações adicionais sobre esse comportamento serão fornecidas nas seções subsequentes, especificando a estrutura de dupla cobertura de  $SU(2)$  sobre  $SO(3)$ .

Nosso próximo passo agora será focado na construção da inversa de  $\phi$ . Para esse fim, na próxima seção, faremos um apanhado geral sobre a inversão de mapas CPTP, abordados anteriormente no Capítulo 2.

### 4.1.2 Inversão de mapeamentos CPTP

A formulação das condições que tornam o mapeamento CPTP  $\Phi$ , da equação (2.4), um mapa inversível já foi estudada (41). Por exemplo, o teorema de Kadison afirma que, se um mapa  $\Phi$  leva operadores densidade de  $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$  em  $\mathcal{D}(\mathbb{C}^m)$  é injetivo, sobrejetivo e preserva a convexidade, então

$$\Phi(\rho) = \mathcal{U}\rho\mathcal{U}^*, \quad (4.10)$$

onde  $\mathcal{U}$  é unitária ou anti-unitária (41). A estrutura de (4.10) é um indício de que um canal quântico bijetivo admite apenas um operador de Kraus. De fato, o Teorema 2.1 de (11) afirma que, sempre que um mapa CPTP admite uma inversa CPTP, sua representação de Kraus deve ser da forma dada em (4.10). Com detalhes precisos,

**Teorema 2.** *Seja  $\Phi : L(\mathbb{C}^n) \rightarrow L(\mathbb{C}^m)$  um mapa CPTP. Suponha que  $\Phi$  admite uma inversa  $\Phi^{-1}$  que também é CPTP. Então existe uma matriz densidade  $\omega \in L(\mathbb{C}^{\lfloor m/n \rfloor})$  e uma unitária  $\mathcal{U}$  em  $\mathbb{C}^m$  tal que  $\Phi(\rho) = \mathcal{U}(\rho \otimes \omega)\mathcal{U}^*$  e  $\Phi^{-1}$  correspondem a aplicar  $\mathcal{U}^*$  seguida do traço parcial sobre a dimensão auxiliar  $\lfloor m/n \rfloor$ . Reciprocamente, se  $\Phi$  é um mapa CPTP cuja representação de Kraus possui apenas um operador, isto é,  $\Phi(\cdot) = \mathcal{U}(\cdot)\mathcal{U}^*$ , então  $\Phi$  é invertível e  $\Phi^{-1}$  também é CPTP.*

Embora um tanto redundante, declaramos e provamos um corolário do teorema acima, deixando nosso texto autoconsistente no caso em que  $\Phi : L(\mathbb{C}^n) \rightarrow L(\mathbb{C}^n)$ . Seguimos as mesmas linhas de raciocínio de (11). Como a prova é de certa forma construtiva, também a apresentamos aqui para fins didáticos — veja o apêndice A.

Este teorema serve como base para a construção de processos físicos invertíveis que exibem uma estrutura de grupo. Ele nos permite obter uma rotação no espaço físico a partir de uma transformação unitária, como veremos na próxima seção.

### 4.1.3 Do espaço de estados para o espaço físico: $SU(2) \rightarrow SO(3)$

Agora, suponha que tenhamos um processo físico invertível que evolui um estado  $\rho$  sobre ou dentro da esfera de Bloch. Devido ao Teorema 2, sua representação de Kraus é dada por

$$\Phi(\rho) = \mathcal{U}\rho\mathcal{U}^*, \quad (4.11)$$

com  $\mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathbb{I}_{\mathbb{C}^2}$ . Essa restrição de unitariedade implica que  $\det \mathcal{U} = e^{i\lambda}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Como estamos interessados no grupo  $SU(2)$ , podemos considerar apenas matrizes unitárias cujo determinante seja igual a um. De fato, se  $\mathcal{U}$  é tal que  $\det \mathcal{U} = e^{i\lambda}$ , define-se

$$\mathcal{W} := \frac{\mathcal{U}}{\sqrt{\det \mathcal{U}}}.$$

Portanto, não apenas  $\det \mathcal{W} = 1$ , mas também  $\mathcal{W}$  define o mesmo canal que  $\mathcal{U}$ ,

$$\mathcal{W}\rho\mathcal{W}^* = \frac{\mathcal{U}}{\sqrt{\det \mathcal{U}}}\rho\frac{\mathcal{U}^*}{\sqrt{\det \mathcal{U}}} = \frac{1}{|\det \mathcal{U}|^2}\mathcal{U}\rho\mathcal{U}^* = \mathcal{U}\rho\mathcal{U}^*.$$

Assim, sem perda de generalidade, é suficiente considerar apenas  $\mathcal{U} \in SU(2)$  e parametrizamos os elementos do grupo de acordo com a Seção 4.1.1:  $\mathcal{U}(\hat{n}, \alpha) = e^{-i\frac{\alpha}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}}$ . A transição de (4.3) para (4.8) pode ser revertida. Isto é, partindo do lado direito de (4.7), todas as identidades trigonométricas podem ser utilizadas na ordem inversa daquelas empregadas nos passos que conduzem de  $SO(3)$  a  $SU(2)$ . Dessa forma,  $\mathcal{U}(\hat{n}, \alpha)$  induz a rotação  $\mathcal{R}(\hat{n}, \alpha)$  dada por (4.2), levando finalmente a  $\phi^{-1}(\mathcal{U}(\hat{n}, \alpha)) = \mathcal{R}(\hat{n}, \alpha)$ .

Note,  $\phi^{-1}$  não é verdadeiramente nosso mapa inverso, pois a relação entre  $SU(2)$  e  $SO(3)$  é de um duplo recobrimento, um resultado bem conhecido da teoria de grupos (28). Em outras palavras, dois elementos de  $SU(2)$  são mapeados em um único elemento de  $SO(3)$ . Isso se torna evidente ao obtermos o elemento de matriz de  $SO(3)$  em termos do elemento unitário de  $SU(2)$ , o que constitui o próximo passo da nossa análise.

Começamos destacando a bijeção entre a álgebra de Lie  $su(2)$  do grupo  $SU(2)$  e o espaço físico  $\mathbb{D}$ . Explorada anteriormente na Seção 2.2.3 no final do Capítulo 2.

Nota-se que, pela equação (2.33), obtemos que  $\det \mathbf{u} = \|\vec{r}\|$ . Como estamos em busca de uma transformação (rotação) que seja uma isometria, propomos definir  $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}' = \mathcal{U}\mathbf{u}\mathcal{U}^*$ , com  $\mathcal{U} \in SU(2)$ . Nesse caso,  $\det \mathbf{u}' = \det \mathbf{u} \Leftrightarrow \|\vec{r}'\| = \|\vec{r}\|$ , induzindo uma transformação no vetor  $\Psi(i\vec{r} \cdot \vec{\sigma}) = \vec{r}'$  que preserva a sua norma. A transformação em  $su(2)$  é somente um homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} T : SU(2) &\rightarrow L(su(2)) \\ \mathcal{U} &\mapsto T_{\mathcal{U}} : su(2) \rightarrow su(2), \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde  $\mathbf{u} \xrightarrow{T_{\mathcal{U}}} \mathcal{U}\mathbf{u}\mathcal{U}^*$ . Observamos que  $T_{\mathcal{U}}$  é linear e para  $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in SU(2)$ ,

$$T_{\mathcal{U}}T_{\mathcal{V}} = T_{\mathcal{U}\mathcal{V}},$$

como esperado para uma representação linear de grupo (67).

Bem, se  $\mathcal{U}$  induz uma transformação em  $su(2)$  que, do ponto de vista do espaço  $\mathbb{D}$ , não altera a norma de um vetor, não há outra possibilidade senão associar  $\mathcal{U}$  a uma rotação em  $SO(3)$ . Denotamos essa rotação por  $\mathcal{R}$ . Assim, temos

$$\mathbf{u}' = T_{\mathcal{U}}\mathbf{u} = \mathcal{U}(i\vec{r} \cdot \vec{\sigma})\mathcal{U}^* = i\vec{r}' \cdot \vec{\sigma} = i(\mathcal{R}\vec{r}) \cdot \vec{\sigma}, \quad (4.13)$$

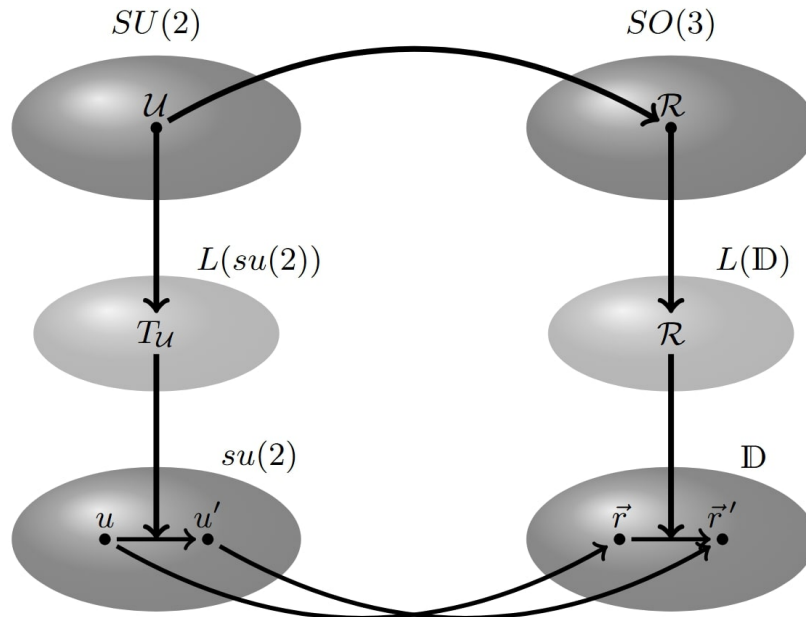
que é equivalente a

$$\sum_j \mathcal{U}x_j\sigma_j\mathcal{U}^* = \sum_{l,j} \mathcal{R}_{lj}x_j\sigma_l. \quad (4.14)$$

A notação  $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$  foi utilizada. Sabendo que  $Tr(\sigma_k\sigma_j) = 2\delta_{kj}$ , multiplicamos ambos os lados de (4.14) por  $\sigma_k$  e aplicamos os traço, encontrando

$$\sum_j Tr(\mathcal{U}\sigma_j\mathcal{U}^*\sigma_k)x_j = 2 \sum_j \mathcal{R}_{kj}x_j, \quad \forall \vec{r}. \quad (4.15)$$

Figura 9 - Relação entre  $SU(2)$  e  $SO(3)$  por meio da bijeção  $su(2) \cong \mathbb{D}$ .



Fonte: Valle, V. G., and B. F. Rizzuti. "From Rotations to Unitaries: Reversible Quantum Processes and the Emergence of the  $SU(2)$ - $SO(3)$  Homomorphism." *Revista Brasileira de Ensino de Física* 48 (2026): e20250374.

Nota: Através desse diagrama, estabelecemos o caminho, possibilitado pela relação  $su(2) \cong \mathbb{D}$ , que relaciona os elementos de  $SU(2)$  com os de  $SO(3)$ .

A arbitrariedade de  $\vec{r}$  implica

$$\mathcal{R}_{kj} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathcal{U} \sigma_j \mathcal{U}^* \sigma_k). \quad (4.16)$$

Todos os cálculos acima são expressos esquematicamente na Figura 9.

A Equação (4.16) mostra que tanto  $\mathcal{U}$  quanto  $-\mathcal{U}$  são mapeados para o mesmo elemento em  $SO(3)$ , resultando em um homomorfismo dois-para-um, conforme afirmado anteriormente.

Os cálculos acima exploram a bijeção entre dois espaços vetoriais (aparentemente) distintos para obter o homomorfismo defendido. É possível, no entanto, chegar ao mesmo resultado adotando apenas um ponto de vista puramente voltado a teoria de grupos. Para ver isso, primeiramente observamos que a Equação (4.9) indica que

$$\begin{aligned} -\mathcal{U}(\hat{n}, \alpha) &= -\cos \frac{\alpha}{2} \mathbb{I} - i \sin \frac{\alpha}{2} (-\hat{n} \cdot \vec{\sigma}) \\ &= \cos \left( \frac{2\pi - \alpha}{2} \right) \mathbb{I} - i \sin \left( \frac{2\pi - \alpha}{2} \right) (-\hat{n} \cdot \vec{\sigma}) \\ &= \mathcal{U}(-\hat{n}, 2\pi - \alpha). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\mathcal{R}(-\hat{n}, 2\pi - \alpha) = \mathcal{R}(\hat{n}, \alpha),$$

pode ser concluído por argumentos geométricos: essas fórmulas mostram que uma rotação em torno do eixo oposto  $-\hat{n}$  produz o mesmo efeito que uma rotação em torno do eixo original  $\hat{n}$ , porém com ângulo  $2\pi - \alpha$ . Essa observação simples também deixa claro que duas unitárias distintas,  $\mathcal{U}$  e  $-\mathcal{U}$  em  $SU(2)$ , são mapeadas para a mesma rotação em  $SO(3)$ .

É instrutivo mostrar que  $\mathcal{R}_{kj}$  é, de fato, uma matriz ortogonal. Para isso, expressamos (4.13) em termos dos elementos da base  $\sigma_i$ ,

$$\mathcal{U}\sigma_j\mathcal{U}^* = \sum_k \mathcal{R}_{kj}\sigma_k. \quad (4.17)$$

Combinando duas expressões desse tipo, obtém-se

$$\mathcal{U}\sigma_j\mathcal{U}^*\mathcal{U}\sigma_l\mathcal{U}^* = \sum_{k,m} \mathcal{R}_{kj}\sigma_k\mathcal{R}_{ml}\sigma_m. \quad (4.18)$$

Sabendo que (i)  $\mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathbb{I}$ ; (ii)  $Tr(AB) = Tr(BA)$ , e, novamente, que (iii)  $Tr(\sigma_i\sigma_j) = 2\delta_{ij}$ , aplicamos o traço de ambos os lados, encontrando

$$\delta_{jl} = \sum_{k,m} \mathcal{R}_{kj}\mathcal{R}_{ml}\delta_{km} = \sum_k \mathcal{R}_{jk}^T\mathcal{R}_{kl}, \quad (4.19)$$

isto é,  $\mathcal{R}^T\mathcal{R} = \mathbb{I}$ .

Em suma, dado uma unitária  $\mathcal{U} \in SU(2)$ , que descreve um canal quântico invertível que leva um estado  $\rho_{\vec{r}}$  em  $\rho_{\vec{r}'}$ , obtemos uma rotação  $\mathcal{R} \in SO(3)$ , de tal modo que ela descreve a transição de  $\vec{r}$  para  $\vec{r}'$ .

Embora se possa argumentar que a correspondência entre unitarias e rotações seja apenas um homomorfismo dois-para-um, a situação é, de fato, uma bijeção quando restringimos nossa discussão a canais quânticos invertíveis atuando sobre um qubit. Como esses mapas são da forma

$$\Phi(\cdot) = \mathcal{U}(\cdot)\mathcal{U}^*,$$

com  $\mathcal{U} \in SU(2)$ , observamos que substituir  $\mathcal{U}$  por  $-\mathcal{U}$  produz o mesmo canal quântico. Portanto, o que emerge é, de fato, um isomorfismo entre o grupo de mapas quânticos reversíveis e as rotações em  $\mathbb{R}^3$ .

Concluimos esta seção com uma rota alternativa que poderia ter sido adotada. Nossa construção poderia, de forma equivalente, começar pela direção  $SU(2) \rightarrow SO(3)$ . Essa rota alternativa é, de fato, bastante natural: o papel das transformações unitárias já é justificado pela discussão de mapas CPTP reversíveis, e tais unitárias induzem rotações na esfera de Bloch de maneira direta. Ainda assim, optamos pela ordem oposta (partindo das transformações do espaço físico e, em seguida, considerando sua ação induzida no espaço de estados), pois nosso tratamento é fundamentado em uma perspectiva operacional. Na prática, primeiro se especifica uma preparação ao selecionar uma direção física, e somente

depois se considera como as transformações atuam devido a essas preparações. Além disso, tanto no espaço físico quanto no espaço dos estados quânticos, o conjunto de isometrias matematicamente admissíveis é maior do que o conjunto de transformações fisicamente implementáveis. Para estabelecer uma conexão significativa, do ponto de vista da teoria de grupos, entre esses dois domínios, torna-se necessário restringir a análise à classe de transformações que correspondem operacionalmente em ambos os lados — sendo essas, rotações em  $\mathbb{R}^3$  e suas contrapartes unitárias em  $SU(2)$ .

Concluimos esta seção fazendo alguns apontamentos. Nossa investigação até o momento sobre sistemas quânticos de dois níveis indica como funciona um mapa físico invertível no espaço físico: o vetor de Bloch é rotacionado. O que acontece no espaço físico quando um mapa CPTP geral atua sobre um estado? Ele não apenas altera a direção do vetor de Bloch correspondente, mas também pode reescalá-lo, seguido de uma translação; ver a Sec. 8.3.2 de (23). Nosso objetivo agora é investigar qual é a ação de um canal quântico arbitrário sobre espaços de estados de dimensões mais altas. Por exemplo, no caso de  $\mathbb{C}^4 \cong \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ , estados gerais são expandidos como

$$\rho = \frac{1}{4} \left( S_{00} + \sum_i r_i S_{i0} + \sum_j s_j S_{0j} + \sum_{i,j} t_{ij} S_{ij} \right), \quad (4.20)$$

onde  $S_{\mu\nu} := \sigma_\mu \otimes \sigma_\nu$ ,  $\mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$  e  $S_{00} = \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}$ .

Claramente, podemos reconhecer dois vetores,  $\vec{r}$  e  $\vec{s}$ , e um tensor de segunda ordem  $t$ , com elementos  $t_{ij}$  — a matriz de correlação (68). No próximo capítulo iremos investigar como um canal quântico atua sobre essas estruturas geométricas que representam um sistema bipartido.

A discussão presente sobre a conexão entre o espaço físico e os espaços de estados de sistemas quânticos de dois níveis que revelamos neste capítulo abriu a possibilidade de utilizarmos intuições geométricas para tratar da divisibilidade de canais quânticos (69), bem como também para explorar os limites da inversão de canais por meio do mapa de recuperação de Petz, considerado o análogo quântico do teorema de Bayes (31, 70). Além disso, esta abordagem contribui para a caracterização de dinâmicas efetivas/emergentes em sistemas com *coarse-graining*, nos quais o mapa de Petz fornece uma ferramenta natural. Veremos no próximo capítulo como os resultados obtidos até agora possibilitam uma interpretação mais concreta e unificada de como a informação é processada e transformada na dinâmica quântica de *coarse-graining*, inclusive em sua contraparte geométrica no espaço físico.

## 5 ANÁLISE DO PROBLEMA COARSE-GRAINING

Neste capítulo, teremos como objetivo utilizar o formalismo operacional desenvolvido nos capítulos anteriores para, além de caracterizar a presença das possíveis dinâmicas emergentes em sistemas de *coarse-graining*, também estabelecer as restrições impostas para o surgimento destas em configurações específicas do problema. Para isso, é preciso primeiramente introduzir brevemente o conceito de *coarse-graining*, bem como as motivações da escolha deste como exemplo principal para nossa abordagem operacional.

### 5.1 INTRODUÇÃO A COARSE-GRAINING

Ao analisarmos um problema físico macroscópico, como, por exemplo, a energia gerada por um motor ou a dilatação do material utilizado neste, causada pelo aumento da temperatura, utilizamos conceitos gerais, ensinados em escolas ou em cursos superiores, como a teoria cinética dos gases e a termodinâmica. Porém, sabemos que, por trás dessas teorias efetivas, existe um conjunto muito mais complexo de interações que ditam as suas leis. No exemplo acima, para fins práticos, não há necessidade de calcular a interação de todas as moléculas desse motor para determinarmos seus efeitos macroscópicos. De fato, escolhemos, de forma pragmática, desconsiderar os conceitos microscópicos em prol de uma descrição efetiva e mais simples, mas que ainda seja instrutiva e resolva o problema.

Ao realizarmos experimentos quânticos em laboratórios, especialmente no caso em que lidamos com estados de dimensões maiores como  $\mathbb{C}^4 \cong \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ , pode ocorrer que nossos aparatos de medição sejam incapazes de realizar uma descrição completa do nosso problema (24). O que presenciamos é uma intrínseca perda de informação, que é aparentemente inevitável, relacionada à extensão da precisão dos nossos aparelhos de medição. Após a medição, ou investigação do sistema, ele passa então a ser descrito por um espaço de estados de dimensão, neste caso, inferior a 4. É daí que vem o conceito de *coarse-graining*. Sendo assim, em resumo, ao tratarmos de mapas de *coarse-graining*, estamos lidando com a ideia de perda de informação de um sistema, podendo esta ser uma perda parcial, total, ou simplesmente um embaralhamento das informações (24, 71).

Já que exploramos extensivamente sistemas de um qubit nos capítulos anteriores, dado que o *coarse-graining* diminui a dimensão do sistema, poderíamos, em tese, analisar um sistema gerado após a atuação de um *coarse-graining* específico em um sistema de dimensão maior—digamos, de dois qubits—se este necessariamente o transforma em um qubit.

Diante do que foi exposto, abaixo formalizaremos o conceito de um mapeamento de *coarse-graining*.

**Definição 1** (Mapa de *coarse-graining*). *Seja  $\mathbb{C}^D$  e  $\mathbb{C}^d$  espaços de Hilbert relacionados,*

respectivamente, a sistemas quânticos de dimensões  $D$  e  $d$ . E também  $\mathcal{L}(\mathbb{C}^D)$  e  $\mathcal{L}(\mathbb{C}^d)$  os conjuntos de operadores lineares que atuam em  $\mathbb{C}^D$  e  $\mathbb{C}^d$ , respectivamente. Definimos um mapa de coarse-graining  $\Lambda_{CG}$  como um mapa CPTP que reduz a dimensionalidade do sistema:

$$\Lambda_{CG} : \mathcal{L}(\mathbb{C}^D) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^d), \quad (5.1)$$

tal que  $D > d$ .

Vale ressaltar que, quando se trata de *coarse-graining*, a aparente perda de informação nem sempre é tão infortuna quanto aparenta ser. Uma descrição macroscópica de um sistema microscópico pode ter um alto valor descritivo tanto para a interpretação da teoria quanto para o entendimento da própria transição quântica para clássica (24, 72). Porém, nas seções subsequentes, estaremos interessados justamente nas consequências da perda de informação, característica deste tipo de mapeamento, para exemplos específicos de *coarse-graining*.

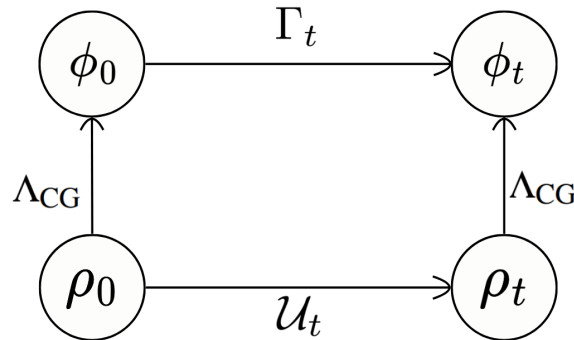
Dito isso, vários aparatos se encaixam nessa descrição. Neste trabalho, vamos focar especificamente em dois exemplos que se encaixam na situação em que  $D = 4$  e  $d = 2$ . O primeiro foi extensivamente detalhado em (24), onde estuda-se um dispositivo — um detector borrado e saturado — que não consegue distinguir entre diferentes sistemas excitados. Ele é descrito pelo mapeamento  $\Lambda_{\text{BNS}} : \mathcal{L}(\mathbb{C}^4) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ , cuja representação de Kraus está dada explicitamente na subseção 5.2.1.

Tendo em mente a especificidade do exemplo anterior e o fato de que  $\mathbb{C}^4 \cong \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ , escolhemos como o segundo exemplo—mais abrangente—de *coarse-graining*, o traço parcial,  $\Lambda_{\text{Tr}} : \mathcal{L}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ , amplamente discutido em experimentos cujo foco é emaranhamento e a separação dos espaços associados ao sistema e ao ambiente (23).  $\Lambda_{\text{Tr}}$  e  $\Lambda_{\text{BNS}}$  serão abordados com mais detalhes nas seções subsequentes.

A questão mais pertinente sobre mapas de *coarse-graining* surge na interpretação da Figura 10. Nesta, além de atuarmos no nosso estado inicial  $\rho_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^D)$  com um *coarse-graining*  $\Lambda_{CG}$ , atuamos também com uma evolução unitária  $\mathcal{U}_t : \mathcal{D}(\mathbb{C}^D) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{C}^D)$ , levando-a a um estado posterior  $\rho_t$ . A chave para o entendimento dessa transição é a existência ou não da dinâmica, representada por  $\Gamma_t : \mathcal{D}(\mathbb{C}^d) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{C}^d)$ , que emerge neste contexto. A descrição dessa dinâmica emergente para diferentes combinações de *coarse-graining* e evoluções unitárias é conhecida como “o problema de *coarse-graining*” (71).

Se, por um lado, o sistema pode passar por um detector descrito pelo canal  $\Lambda_{CG}$ , por outro, ele poderia evoluir de forma unitária — com um mapa que  $\mathcal{U}_t$  — e só então passar por um canal de *coarse-graining*. Ou seja, buscamos um mapa CPTP que satisfaça a seguinte relação de comutação:

$$\Gamma_t \circ \Lambda_{CG} = \Lambda_{CG} \circ \mathcal{U}_t. \quad (5.2)$$

Figura 10 - Diagrama do *coarse-graining*.

Fonte: Elaborado pelo autor. (2026).

Nota: Diagrama do problema do coarse-graining. Dizer que este diagrama comuta é equivalente a encontrar um mapa CPTP,  $\Gamma_t$ , tal que  $\Gamma_t \circ \Lambda_{CG} = \Lambda_{CG} \circ \mathcal{U}_t$ .

Note que, ao considerarmos na Figura 10 apenas os casos em que nossa dinâmica emergente é admissível, obtemos uma transformação consistente que leva um operador densidade a outro no mesmo espaço, que é justamente nossa dinâmica  $\Gamma_t$ . Nessas circunstâncias, podemos recorrer ao mesmo argumento operacional que anteriormente serviu de base para toda a construção do Capítulo 4.

Seguindo por esta lógica, os estados  $\phi_0$  e  $\phi_t$ , pertencentes a  $\mathbb{C}^2$  para ambos os *coarse-graining* de interesse, podem ser descritos, respectivamente, por vetores arbitrários em  $\mathbb{R}^3$ , digamos  $\vec{r}_0$  e  $\vec{r}_t$ , da mesma forma que o estado  $\rho$  na equação (3.4) é descrito pelo vetor  $\vec{r}$ . Isso nos fornece evidências de uma possível estratégia para determinar a dinâmica emergente  $\Gamma_t$  por meio de um argumento puramente operacional.

Em outras palavras, como determinamos no Capítulo 4 que tipo de transformação em  $\mathbb{C}^2$  corresponde a uma rotação em  $\mathbb{R}^3$ . Temos indícios de que poderíamos determinar características da nossa dinâmica emergente por meio das suas variáveis de laboratório correspondentes. O foco principal deste capítulo consiste, então, em utilizar nosso tratamento operacional para discutir uma possível dinâmica emergente  $\Gamma_t$  como indicado na Figura 10. Veremos que é justamente a interpretação operacional que estabelecemos nos capítulos anteriores que torna nossa análise possível.

## 5.2 EXEMPLOS DE CENÁRIOS DE COARSE-GRAINING

Nos cenários que utilizaremos de exemplos, veremos que nem sempre ocorre a existência de uma dinâmica quântica emergente que faça o diagrama da Figura 10 comutar. A situação pode ser ainda mais complexa, como veremos a seguir; pode-se facilmente encontrar uma combinação de *coarse-graining* e dinâmica unitária para a qual nem mesmo

uma função compatível é possível.

Antes de entrar propriamente nisso, começamos apresentando duas dinâmicas unitárias nas quais, ao serem combinadas com os mapas de *coarse-graining*  $\Lambda_{\text{Tr}}$  e  $\Lambda_{\text{BnS}}$  discutidos ao final da Seção 5.1, nos possibilita propor e analisar operacionalmente quatro cenários de *coarse-graining*. Estabelecemos que os cenários de *coarse-graining* nos quais conduziremos nossa análise a seguir partem inicialmente de sistemas de dois qubits, posteriormente transformados para um qubit. Mais especificamente, ainda recorrendo ao diagrama da Figura 10, consideraremos ambas as regiões associadas com  $\rho_o$  e  $\rho_t$ , como  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ , e ambas as regiões associadas com  $\phi_o$  e  $\phi_t$ , como  $\mathbb{C}^2$ .

Com a intenção de aproximar nossos exemplos concretos de alguns modelos de referência da literatura, o primeiro canal unitário que escolhemos agregar nos cenários de *coarse-graining* a seguir é uma versão, em termos de canal quântico, da porta SWAP de dois qubits. O operador SWAP, denotado nesta contribuição em relação à base computacional por

$$U_{\text{swap}} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

é um operador unitário amplamente reconhecido/utilizado na literatura de computação quântica (23). Embora sua ação simplesmente permuta os estados quânticos de um sistema de dois qubits,

$$|00\rangle \rightarrow |00\rangle, \quad |10\rangle \rightarrow |01\rangle, \quad |01\rangle \rightarrow |10\rangle \quad \text{e} \quad |11\rangle \rightarrow |11\rangle, \quad (5.4)$$

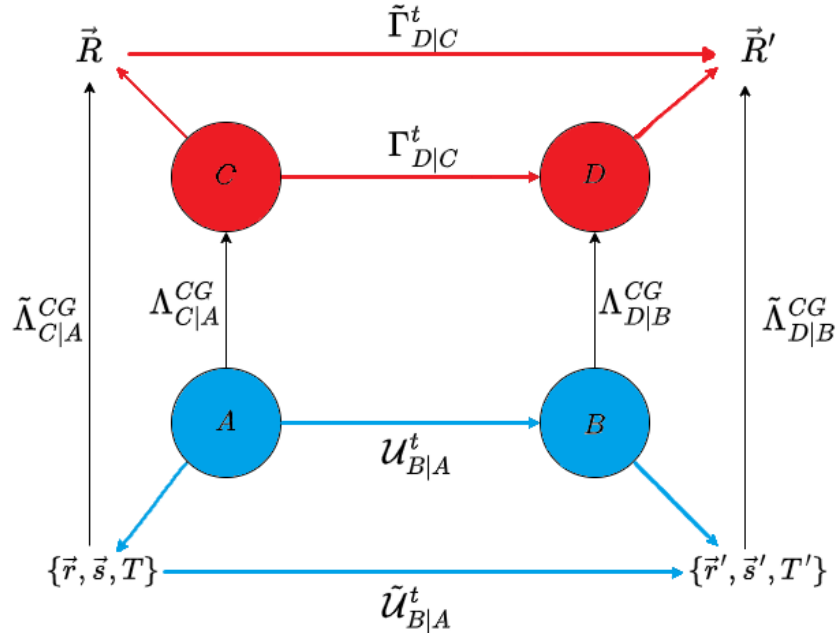
essa porta possui aplicações relevantes; uma delas é seu papel como um dos blocos constituintes do teste SWAP (73), a principal ferramenta em computação quântica utilizada para estimar o quão próximos dois estados quânticos dados estão um do outro (74).

Dado que nossos exemplos concretos estarão restritos a sistemas de dois qubits nos ramos inferiores do diagrama de *coarse-graining*, nosso canal SWAP assumirá, em sua representação de Kraus, a seguinte forma:

$$\mathcal{U}_{B|A}^{\text{swap}}(\cdot) := U_{\text{swap}}(\cdot)U_{\text{swap}}^\dagger. \quad (5.5)$$

O segundo canal unitário adotado aqui é baseado em uma versão adaptada do Hamiltoniano utilizado para modelar interações de spin entre duas partículas vizinhas em um modelo de Ising quântico (75), em uma região onde o campo magnético externo é nulo. Mais especificamente, empregamos o Hamiltoniano  $H = -J\hbar\sigma_z \otimes \sigma_z$  para uma constante de acoplamento  $J$  em unidades de frequência, para modelar a interação entre as partes de um sistema de dois qubits determinada pelo alinhamento (ou anti-alinhamento) de suas projeções de spin ao longo do eixo  $z$ . Uma característica importante desse Hamiltoniano é

Figura 11 - Diagrama que representa o cenário de *coarse-graining* com a adição dos mapeamentos relacionados às variáveis do espaço de laboratório.



Fonte: Elaborado pelo autor. (2026).

Nota: Esse diagrama introduz, com base em princípios operacionais, os mapeamentos  $\tilde{\Gamma}_{D|C}^t$ ,  $\tilde{\Lambda}_{C|A}^{CG}$ ,  $\tilde{\Lambda}_{D|B}^{CG}$  e  $\tilde{U}_{B|A}^t$ , que servirão como ferramentas úteis na descrição de nossas dinâmicas emergentes. As setas azuis e as setas vermelhas surgem a partir da relação operacional entre os estados e suas respectivas variáveis de laboratório  $\{\tilde{r}', \tilde{s}', T'\}$ ,  $\{\tilde{r}, \tilde{s}, T\}$ ,  $\vec{R}$  e  $\vec{R}'$ .

que o operador unitário dele decorrente, denotado nesta contribuição por

$$U_{\sigma_z} := e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} = \begin{pmatrix} e^{itJ} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-itJ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-itJ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{itJ} \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

modela uma dinâmica quântica na qual o emaranhamento é criado (ou aniquilado) entre as duas partes do sistema, dependendo intrinsecamente do valor do parâmetro temporal  $t$ . Assim, com a motivação de introduzir em nossos cenários de *coarse-graining* um canal quântico que aborde aspectos de correlação quântica entre os subsistemas, definimos nossa última dinâmica unitária considerada, denominada canal de interação- $z$ , por

$$\mathcal{U}_{B|A}^{\sigma_z}(\cdot) := U_{\sigma_z}(\cdot) U_{\sigma_z}^\dagger. \quad (5.7)$$

Deixando de lado ambas as evoluções acima, passamos agora a considerar o estado mais geral em  $\mathbb{C}^4(66)$ , descrito anteriormente pela Equação (4.20). Escrevemos nosso  $\rho_0$

como

$$\rho_0 = \frac{1}{4} \left( \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + \sum_{i=1}^3 r_i \sigma_i \otimes \mathbb{I} + \sum_{j=1}^3 \mathbb{I} \otimes s_j \sigma_j + \sum_{i,j=1}^3 T_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right). \quad (5.8)$$

Partindo de uma de uma abordagem operacional (5, 10), denominamos o conjunto ordenado  $\{\vec{r}, \vec{s}, T\}$  espaço de laboratório, correspondendo, respectivamente, às variáveis que descrevem o qubit em uma parte do sistema bipartido considerado ( $\vec{r}$ ), o qubit na outra parte ( $\vec{s}$ ) e as correlações entre eles ( $T$ , com elementos  $T_{ij}$ ).

Inspirados no argumento operacional que fundamentou a comparação entre este capítulo com o Capítulo 4, apontada no início deste capítulo, e levando em consideração a relação do conjunto ordenado  $\{\vec{r}, \vec{s}, T\}$  com o estado  $\rho_0$ , introduzimos um novo diagrama, representado na Figura 11. Nesse diagrama, na parte destacada em vermelho, empregamos o argumento operacional explorado extensivamente nos capítulos anteriores, e na região inferior do diagrama, destacada em azul, como uma construção análoga, empregamos o mesmo argumento, porém agora para nosso estado  $\rho_0$  da Equação (5.8) e para uma transformação unitária  $\mathcal{U}_{B|A}^t$  que atua em dimensões maiores, especificamente em  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ . Nesse contexto, introduzimos também os mapeamentos correspondentes  $\tilde{\Lambda}_{C|A}^{CG}$ ,  $\tilde{\Lambda}_{D|B}^{CG}$ ,  $\tilde{\mathcal{U}}_{B|A}^t$  e  $\tilde{\Gamma}_{D|C}^t$ , os quais serão úteis para descrever sob quais condições uma dinâmica emergente é alcançável e quando a transformação  $\Gamma_{D|C}^t$  é, de fato, bem definida nos diferentes cenários do problema de *coarse-graining* aqui considerados. A motivação para a introdução desses mapeamentos se dá pelo fato de que, se por um lado, estados na região inferior ou na superior do diagrama estão associados às variáveis de laboratório, operacionalmente, poderíamos dizer o mesmo dos mapas correspondentes.

Todas as combinações subsequentes de *coarse-graining* e transformações unitárias que serão exploradas nas subseções seguintes podem ser representadas pelo diagrama da Figura 11.

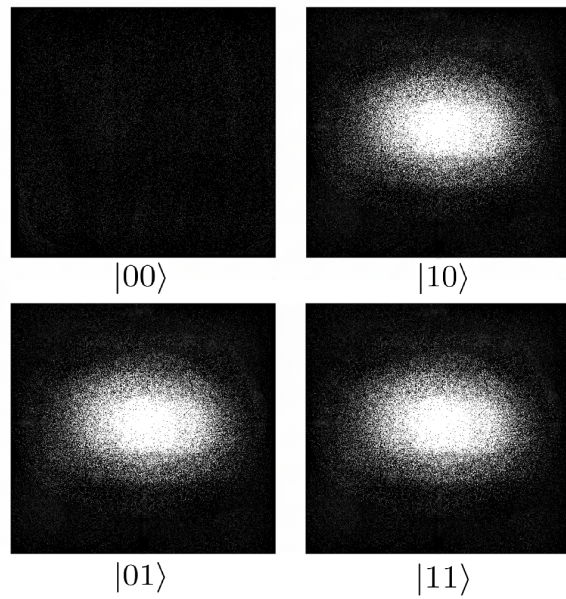
### 5.2.1 Cenário 1: Detector borrado e saturado com o canal SWAP

Considere o caso de um único átomo cujo estado é medido por meio de fluorescência: quando um laser incide sobre ele, associamos o estado  $|1\rangle$  se a luz é espalhada e  $|0\rangle$  caso contrário. Dessa forma, para um sistema composto por dois átomos vizinhos, temos quatro possibilidades: duas excitações,  $|11\rangle$ ; uma única excitação,  $|10\rangle$  ou  $|01\rangle$ , correspondendo ao primeiro ou ao segundo átomo; e, por fim, o caso sem excitações,  $|00\rangle$ .

Obtemos o detector borrado e saturado ao assumir que nosso dispositivo se satura facilmente com a emissão de um único átomo e não consegue distinguir a luz espalhada por cada átomo nos casos  $|10\rangle$  e  $|01\rangle$ , causando, efetivamente, tanto o borramento quanto a saturação da luz espalhada detectada por sua lente. Assim, no nosso caso, as medições  $|11\rangle$ ,  $|01\rangle$  e  $|10\rangle$  produzem todas o mesmo resultado.

Sendo assim, as imagens concebidas pelo nosso detector borrado e saturado, para

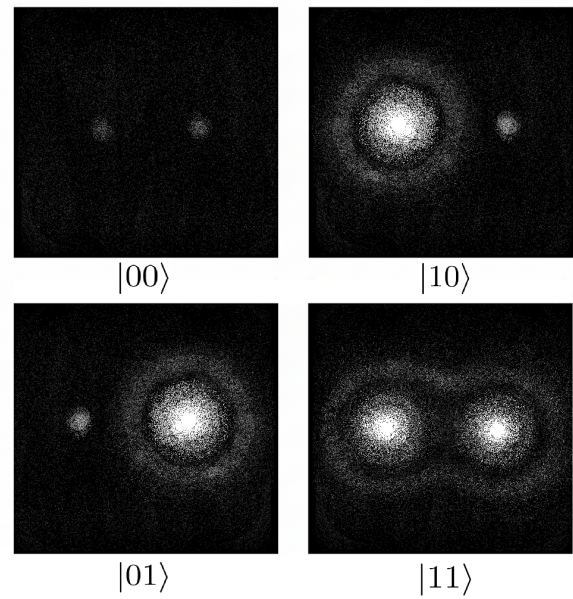
Figura 12 - Esquema das possíveis imagens concebidas pelo detector borrado e saturado



Fonte: Elaborado pelo autor. (2026).

Nota: Para o detector borrado e saturado, as imagens dos estados  $|10\rangle$ ,  $|01\rangle$  e  $|11\rangle$  são indistinguíveis, resultando em uma perda significativa de informação sobre a verdadeira configuração dos átomos nestes casos.

Figura 13 - Esquema das possíveis imagens concebidas por um detector adequado



Fonte: Elaborado pelo autor. (2026).

Nota: O detector adequado registra com precisão a localização e a intensidade de cada átomo individualmente. Isso permite a discriminação unívoca entre os quatro estados possíveis de dois qubits.

todos os estados do sistema de dois átomos, seriam semelhantes a algo como o que observamos na Figura 12. Em comparação com as imagens de um detector que consegue distinguir os estados deste sistema, representado na Figura 13, torna-se evidente a incapacidade que nosso detector borrado e saturado possui em diferenciar os estados  $|11\rangle$ ,  $|01\rangle$  e  $|10\rangle$ .

Dito isso, pela Figura 12, percebemos a existência de somente dois resultados possíveis para o detector borrado e saturado: o caso em que ele não detecta nada, que representaremos por  $|0\rangle$ , o qual descreve  $|00\rangle$  do sistema de dois átomos, e o caso em que este é totalmente saturado, representado por  $|1\rangle$ , que descreve os estados  $|11\rangle$ ,  $|01\rangle$  e  $|10\rangle$  do sistema de dois átomos. Podemos afirmar, então, que este leva um sistema de dois qubits em um sistema de um qubits. Sendo assim, observamos uma perda de informação, característica em mapeamentos de *coarse-graining*, inerente a este detector.

Este, então, representa o nosso mapa de *coarse-graining*,  $\Lambda_{\text{BnS}} : \mathcal{L}(\mathbb{C}^4) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ ,

que atua sobre estados por meio da representação de Kraus, com operadores (24),

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}; \\ K_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}; \\ K_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}; \\ K_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ao aplicar esse *coarse-graining* ao estado geral dado em (5.8), obtemos:

$$\phi_0 = \Lambda_{\text{BnS}}(\rho_0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + R_3 & R_1 - iR_2 \\ R_1 + iR_2 & 1 - R_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \vec{R} \cdot \vec{\sigma}), \quad (5.9)$$

onde

$$R_1 = \frac{r_1 + s_1 + t_{31} + t_{13} + t_{11} - t_{22}}{2\sqrt{3}}; \quad (5.10)$$

$$R_2 = \frac{r_2 + s_2 + t_{32} + t_{23} + t_{12} + t_{21}}{2\sqrt{3}}; \quad (5.11)$$

$$R_3 = \frac{r_3 + s_3 + t_{33} - 1}{2}. \quad (5.12)$$

Os cálculos apresentados acima representam a seta que vai da região quântica  $A$  para a região quântica  $C$  no diagrama da Figura 11. Para prosseguir com o diagrama, resta ainda calcular explicitamente a seta de  $A$  para  $B$ , representada pela ação do operador SWAP sobre o estado dado na Equação (5.8), bem como a seta de  $B$  para  $D$ , que, neste caso, é representada pela ação do *coarse-graining* (o detector borrado e saturado) sobre o estado já modificado pelo SWAP.

Ao atuar sobre o nosso estado  $\rho_0$  com o operador SWAP, obtém-se o resultado correspondente nas variáveis do espaço de laboratório,

$$\{\vec{r}, \vec{s}, T\} \mapsto \{\vec{s}, \vec{r}, T^T\}, \quad (5.13)$$

resultando na troca dos vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{s}$  e na transposição da matriz de correlação.

Em seguida, seguindo a seta de  $B$  para  $D$  em nosso diagrama, ao agir com o *coarse-graining* do detector borrado e saturado sobre o estado evoluído sob a ação do SWAP, obtemos exatamente o mesmo resultado encontrado na Equação (5.9). As expressões (5.10)-(5.12) são invariantes sob a permuta  $\vec{r} \leftrightarrow \vec{s}$ , bem como sob a transposição no setor de correlações. Esse resultado significa que o único mapa emergente  $\Gamma_{\text{Swap}}^{\text{BnS}}$  alcançável conectando as regiões quânticas  $C$  e  $D$  é representado pela identidade em  $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ .

Esse resultado é reforçado à medida que examinamos a atuação do operador SWAP em dois qubits, presente na Equação (5.4), para o caso do detector borrado e saturado. Como não temos distinção entre os estados  $|01\rangle$  e  $|10\rangle$ , e após o operador SWAP, os estados  $|11\rangle$  e  $|00\rangle$  permanecem inalterados, percebemos que a atuação do SWAP em nossos estados não altera o resultado obtido pelo nosso detector borrado e saturado, corroborando com a nossa análise deste cenário.

### 5.2.2 Cenário 2: Detector borrado e saturado e o canal de interação $z$

Focando mais uma vez no detector borrado e saturado, agora sob uma evolução unitária diferente, representada pela Equação (5.7), veremos que, em contraste com a situação analisada anteriormente, é precisamente nesse contexto que o exemplo do detector borrado e saturado revela suas limitações. O problema surge do fato de que, sob certas condições, o mapeamento  $\Gamma$  associado a esse detector pode sequer ser definido de forma consistente. Como a análise posterior indicará, a própria existência desse mapeamento depende de restrições ligadas ao estado inicial  $\rho_0$ . Além disso, a possibilidade de inverter tal mapeamento, caso ele exista, também depende dessas mesmas condições.

Já estamos cientes de como o *coarse-graining* do detector borrado e saturado atua sobre o nosso estado antes da ação da unitária; o que resta agora é aplicar o mapeamento (5.7) ao nosso estado e, em seguida, aplicar o *coarse-graining* mais uma vez.

Sabemos que nosso estado  $\rho_0$  de (5.8) admite a forma matricial

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + r_3 + s_3 + t_{33} & s_1 - is_2 + t_{31} - it_{32} & r_1 - ir_2 + t_{13} - it_{23} & t_{11} - it_{12} - t_{22} - it_{21} \\ s_1 + is_2 + t_{31} + it_{32} & 1 + r_3 - s_3 - t_{33} & t_{11} + it_{12} + t_{22} - it_{21} & r_1 - ir_2 - t_{13} + it_{23} \\ r_1 + ir_2 + t_{13} + it_{23} & t_{11} - it_{12} + t_{22} + it_{21} & 1 - r_3 + s_3 - t_{33} & s_1 - is_2 - t_{31} + it_{32} \\ t_{11} + it_{12} - t_{22} + it_{21} & r_1 + ir_2 - t_{13} - it_{23} & s_1 + is_2 - t_{31} - it_{32} & 1 - r_3 - s_3 + t_{33} \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

dada uma matriz genérica  $4 \times 4$ :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

o canal de interação  $z$  induz a seguinte transformação:

$$U_{\sigma_z} A U_{\sigma_z}^\dagger = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & e^{2it}\alpha_{12} & e^{2it}\alpha_{13} & \alpha_{14} \\ e^{-2it}\alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & e^{-2it}\alpha_{24} \\ e^{-2it}\alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & e^{-2it}\alpha_{34} \\ \alpha_{41} & e^{2it}\alpha_{42} & e^{2it}\alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

Ênfase é dada aos fatores presentes tanto nas primeiras quanto nas últimas linhas e colunas, que surgem de maneira análoga ao atuarmos com esse mesmo canal sobre a

matriz  $4 \times 4$  do nosso estado (5.14), evidenciando uma característica estrutural consistente dessa transformação.

Agora, ao atuar com o nosso *coarse-graining* sobre o estado após a ação da nossa unitária, obtemos

$$\phi'_0 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + r_3 + s_3 + t_{33} & \frac{\beta_1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\beta_2}{\sqrt{3}} & 3 - r_3 - s_3 - t_{33} \end{pmatrix}, \quad (5.17)$$

onde

$$\begin{aligned} \beta_1 = & e^{2it}(r_1 + s_1 + t_{13} + t_{31} - i(r_2 + s_2 + t_{23} + t_{32})) \\ & + t_{11} - t_{22} - i(t_{12} + t_{21}); \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \beta_2 = & e^{-2it}(r_1 + s_1 + t_{13} + t_{31} + i(r_2 + s_2 + t_{23} + t_{32})) \\ & + t_{11} - t_{22} + i(t_{12} + t_{21}). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Para prosseguirmos com nosso raciocínio, precisamos agora analisar ambos os estados  $\phi_0$ , encontrado no cenário anterior, e  $\phi'_0$  presente na Equação (5.17). Para isso, é de nosso interesse decompor o vetor  $\vec{R}$  presente na Equação (5.9) em duas partes,

$$\vec{R} = \vec{R}_a + \vec{R}_b, \quad (5.20)$$

com

$$\begin{aligned} \vec{R}_a = & \frac{1}{2\sqrt{3}}[(r_1 + s_1 + t_{13} + t_{31})\hat{i} + (r_2 + s_2 + t_{23} + t_{32})\hat{j}] + \\ & \frac{1}{2}(r_3 + s_3 + t_{23} - 1)\hat{k} \end{aligned} \quad (5.21)$$

e

$$\vec{R}_b = \frac{1}{2\sqrt{3}}[(t_{11} - t_{22})\hat{i} + (t_{12} + t_{21})\hat{j}]. \quad (5.22)$$

Podemos então dizer que  $\tilde{\Gamma}_{\sigma_z}^{BnS}$  atua no nosso vetor  $\vec{R}$  da seguinte maneira peculiar:

$$\tilde{\Gamma}_{\sigma_z}^{BnS}(\vec{R}) = \mathcal{R}(2t)\vec{R}_a + \vec{R}_b, \quad (5.23)$$

onde

$$\mathcal{R}(2t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t & 0 \\ -\sin 2t & \cos 2t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

Parece que a ação de  $\tilde{\Gamma}_{\sigma_z}^{BnS}$  sobre o nosso vetor  $\vec{R}$  é equivalente à ação de uma matriz de rotação em torno do eixo  $z$ ,  $\mathcal{R}(2t)$ , aplicada a componentes específicas desse vetor. Sendo assim, no caso particular em que  $\vec{R}_b$  é nulo, teremos, então, o surgimento

de uma dinâmica emergente  $\Gamma_{\sigma_z}^{BnS}$ , que, por sua vez, é completamente invertível e pode ser representada operacionalmente por uma única rotação no espaço físico. Contudo, esse cenário ideal não se sustenta em geral, uma vez que os componentes de  $\vec{R}_b$  não são necessariamente nulos.

Conseqüentemente, uma solução que assegure a comutatividade do nosso diagrama não é garantida em todos os casos. A viabilidade de tal solução depende criticamente dos parâmetros  $t_{11}, t_{22}, t_{12}$  e  $t_{21}$ , que são determinados pela matriz que codifica as propriedades de emaranhamento do nosso estado  $\rho_0$ . Assim, esses parâmetros desempenham um papel fundamental em ditar a comutatividade do diagrama que buscamos obter.

O argumento central dessa abordagem operacional, que permite a interpretação da dinâmica emergente neste caso em específico, é o de que a região destacada em vermelho no diagrama da Figura 11, para o cenário aqui abordado, é exatamente o diagrama da Figura 8 quando  $\vec{R}_b = \vec{0}$ . Nesse caso,  $\Gamma_{D|C}^t$  desempenha o papel da transformação em  $\mathbb{C}^2$ , enquanto  $\tilde{\Gamma}_{D|C}^t$  representa a rotação correspondente em  $\mathbb{D}$ .

Sendo assim, podemos escrever a matriz de rotação encontrada (5.24) como

$$\mathcal{R}(2t) = e^{2it\tau_3}, \quad (5.25)$$

onde  $\tau_3$  esta representado na equação (2.12).

Dito isso, a partir da equação (4.9), podemos encontrar o elemento de  $SU(2)$  correspondente a rotação em torno do eixo  $z$ :

$$\mathcal{U}_z(2t) = \cos(t)\mathbb{I} + i \sin(t) \sigma_z = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

Encontrando, assim, nossa dinâmica emergente

$$\Gamma_{\sigma_z}^{BnS}(\cdot) = \mathcal{U}_z(2t) (\cdot) \mathcal{U}_z^*(2t), \quad (5.27)$$

para o caso em que  $\vec{R}_b$  é nulo.

Alguns trabalhos recentes sobre a descrição termodinâmica de cenários de *coarse-graining* estão interessados na reversibilidade das dinâmicas emergentes (25, 76). Curiosamente, a condição  $\vec{R}_b = \vec{0}$ , que garante a própria definição da nossa dinâmica emergente, é também a condição que assegura a invertibilidade de  $\tilde{\Gamma}_{\sigma_z}^{BnS}$ . Esse tema, juntamente com a análise de processos quânticos termodinâmicos por meio do formalismo de estados condicionais, está fora do escopo desta dissertação.

### 5.2.3 Cenário 3: Traço parcial e o canal SWAP

Um dos exemplos mais fundamentais e amplamente estudados de mapas de *coarse-graining* é o traço parcial. Fica claro que sua definição incorpora naturalmente a ideia de desprezar graus de liberdade inacessíveis ou não observados; isto é, quando um sistema

quântico é descrito por um operador densidade  $\rho_{SE}$  no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$ , a operação  $Tr_E(\rho_{SE}) = \rho_S$  descarta efetivamente toda a informação armazenada no subsistema  $E$ . Este é o único mapa que descreve de forma consistente as quantidades observáveis de subsistemas pertencentes a um sistema maior (23).

Do ponto de vista operacional, isso corresponde a uma situação na qual o observador ou detector é incapaz de acessar os graus de liberdade associados a  $E$ . Nesse sentido, o traço parcial constitui um exemplo paradigmático de uma aplicação completamente positiva que preserva o traço (CPTP) que incorpora a essência do procedimento de *coarse-graining*: ele mapeia a descrição microscópica completa do sistema conjunto para uma descrição reduzida, macroscópica (ou acessível), suprimindo, assim, correlações e coerências que se encontram além da resolução da observação.

Seria particularmente interessante examinar como o traço parcial afeta o estado antes e depois da ação das unitárias escolhidas, dado que essa perda de informação é intrinsecamente irreversível, uma vez que o estado completo  $\rho_{SE}$  não pode, em geral, ser reconstruído a partir do estado reduzido  $\rho_S$ .

Começando pelo caso mais simples, representado pelo SWAP, conforme discutido no cenário apresentado em 5.2.1, a sua ação sobre o nosso estado  $\rho_0$  tem, como uma de suas consequências, a troca do vetor  $\vec{r}$  com o vetor  $\vec{s}$  na Equação (5.8). Assim, se realizarmos o traço parcial sobre uma das partes do sistema bipartido antes de aplicar o SWAP, obtemos, a partir de (5.8),

$$\phi = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}).$$

Em contrapartida, ao realizar a mesma operação após a aplicação do SWAP, obtemos

$$\phi' = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \vec{s} \cdot \vec{\sigma}).$$

No caso do mapeamento  $\tilde{\Gamma}_{Swap}^{Tr}$ , a situação torna-se ainda mais restritiva quando comparada aos cenários acima. Uma vez que o traço parcial implica uma perda completa de informação sobre a segunda parte do sistema bipartido, não é possível estabelecer uma definição consistente do mapa  $\tilde{\Gamma}_{Swap}^{Tr}$ , exceto no caso trivial em que os vetores de Bloch locais  $\vec{r}$  e  $\vec{s}$  coincidem. Quando isso ocorre, temos que  $\Gamma_{Swap}^{Tr}$  é igual ao mapa identidade. De fato, para estados iniciais distintos, com  $\{r, s_1, T\}$  e  $\{r, s_2, T\}$ , sequer uma função  $\tilde{\Gamma}_{Swap}^{Tr}$  seria admissível, já que deveríamos ter  $\tilde{\Gamma}_{Swap}^{Tr}(r) = \{s_1\} = \{s_2\}$ . Por fim, ressaltamos que essa linha de raciocínio é totalmente independente da matriz de correlação  $T$ , uma vez que o *coarse-graining* a elimina.

#### 5.2.4 Cenário 4: Traço parcial e o canal de interação $z$

Por fim, em nosso último cenário, como já sabemos como o canal de interação ao longo de  $z$  atua sobre o nosso estado, ver Equação (5.16), basta tomar o traço parcial

sobre  $E$  da matriz  $4 \times 4$  que representa o nosso estado evoluído no tempo  $\rho_t$

Obtemos, então,

$$Tr_E \rho_t = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \vec{r}' \cdot \vec{\sigma}), \quad (5.28)$$

onde

$$\tilde{\Gamma}_{\sigma_z}^{Tr}(\vec{r}) = \vec{r}' = \mathcal{D}(t)\vec{r} + \text{sen } 2t\vec{\tau}. \quad (5.29)$$

Denotamos  $\mathcal{D}(t) := \text{diag}(\cos 2t, \cos 2t, 1)$  e  $\vec{\tau} := (t_{23}, -t_{13}, 0)$ .

Neste cenário particular, a dinâmica é dada por uma transformação linear induzida por  $\mathcal{D}(t)$ , juntamente com um segundo termo não linear e oscilatório em (5.29). Esse segundo termo depende de entradas específicas da matriz de correlação que codificam a estrutura de emaranhamento do estado composto — neste caso, as componentes  $t_{23}$  e  $t_{13}$ ;  $\vec{\tau} = 0 \Leftrightarrow t_{23} = t_{13} = 0$ . Assim, observamos mais uma vez que o mesmo mecanismo subjacente governa ambas as situações — a dependência em  $T$  — reforçando o papel crucial desses parâmetros na determinação da existência de  $\tilde{\Gamma}_{\sigma_z}^{Tr}$  e da reversibilidade.

### 5.2.5 Discussão sobre os cenários abordados

Tendo agora analisado extensivamente os quatro cenários do problema de *coarse-graining*, ao ponto de podermos determinar suas respectivas limitações no que diz respeito ao surgimento da dinâmica emergente, optamos, para fins de clareza, por organizar, na tabela abaixo, cada combinação viável a partir dos *coarse-grainings* e das evoluções unitárias consideradas, com as devidas restrições impostas às suas dinâmicas emergentes.

Tabela 1 - Surgimento da dinâmica emergente para diferentes problemas de *coarse-graining*.

	$\Lambda_{BnS} : \mathcal{L}(\mathbb{C}^4) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$	$\Lambda_{Tr} : \mathcal{L}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$
$\mathcal{U}_{\text{swap}}(\cdot)$	Cenário 1: $\Gamma_{\text{Swap}}^{BnS}$ é representado pela identidade em $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ .	Cenário 3: $\Gamma_{\text{Swap}}^{Tr}$ é representado pela identidade em $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ quando $\vec{r} = \vec{s}$
$\mathcal{U}_{\sigma_z}(\cdot)$	Cenário 2: $\tilde{\Gamma}_{\sigma_z}^{BnS}(\vec{R}) = \mathcal{R}(2t)\vec{R}_a + \vec{R}_b$ e $\Gamma_{\sigma_z}^{BnS}(\phi_0) = \mathcal{U}_z(2t)\phi_0\mathcal{U}_z(2t)$ quando $\vec{R}_b = \vec{0}$	Cenário 4: $\tilde{\Gamma}_{\sigma_z}^{Tr}(\vec{r}) = \vec{r}' = \mathcal{D}(t)\vec{r} + \text{sen } 2t\vec{\tau}$ com $\mathcal{D}(t) := \text{diag}(\cos 2t, \cos 2t, 1)$ e $\vec{\tau} := (t_{23}, -t_{13}, 0)$ .

Fonte: Elaborada pelo autor (2026)

Nota: Esta tabela apresenta os resultados analíticos para cada combinação do problema de *coarse-graining*, permitindo identificar sob quais condições o mapeamento  $\Gamma^t$  emerge, e as semelhanças entre estas para os diferentes cenários.

A partir das análises dos cenários apresentados acima, torna-se claro que a dinâmica emergente do problema de *coarse-graining* em consideração apresenta uma clara e forte dependência do diagrama utilizado, isto é, da combinação específica entre o procedimento de *coarse-graining* e as evoluções unitárias consideradas. Ainda assim, é possível identificar certas similaridades entre esses cenários. Por exemplo, em ambos os casos em que o canal de interação  $z$  é empregado, observa-se uma dependência explícita do estado inicial  $\rho_0$ , mais especificamente das variáveis da matriz  $T$ , que codifica o emaranhamento de  $\rho_0$ .

De forma semelhante, ao analisar os cenários que envolvem o operador SWAP, observamos que, em ambos os casos, a dinâmica emergente resultante corresponde ao mapa identidade em  $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ , embora sob restrições substancialmente diferentes. Enquanto não existem restrições aparentes sobre o estado inicial no caso do detector borrado e saturado, o cenário de traço parcial exige, para a existência da dinâmica emergente, a condição de que  $\vec{r} = \vec{s}$  na Equação (5.8). Perceba aqui uma independência da matriz  $T$  em ambos os casos.

É evidente que a análise aqui apresentada está restrita aos esquemas específicos de *coarse-graining* discutidos nesta seção, e que as similaridades observadas entre esses cenários, por si só, não são de forma alguma suficientes para estabelecer um padrão geral entre diferentes combinações do problema de *coarse-graining*. Dito isso, uma caracterização mais geral desses problemas de *coarse-graining* será objeto de investigações futuras sobre o tema.

## 6 CONCLUSÃO

Neste trabalho, adotamos uma proposta para descrever e investigar sistemas quânticos de interesse na literatura por meio de argumentos baseados inteiramente em princípios operacionais.

Primeiramente, investigamos uma possível relação entre o espaço de estados de sistemas quânticos de dois níveis e o espaço físico no qual esses sistemas são preparados. Tal conexão surge quando adotamos o caráter universal da fibração de Hopf no seguinte sentido. Por um lado, a construção matemática indica que qualquer sistema quântico de dois níveis pode ser preparado em um espaço físico tridimensional. Por outro lado, parece haver uma dimensão ausente quando pensamos na luz polarizada como outro exemplo de qubit, uma vez que ela é descrita por um plano bidimensional — e não tridimensional — no qual seu campo elétrico oscila. Em mais detalhes: utilizando a fibração de Hopf, estabelecemos uma conexão entre estados puros indistinguíveis em  $S^3$  e  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Nossa interpretação demonstra que essa conexão é mais do que uma mera construção matemática. Em vez disso, entendemos a fibração como uma descrição de como os estados são preparados, na qual parâmetros ajustáveis no laboratório definem o vetor de Bloch (3.5). A imagem inversa correspondente conduz aos estados parametrizados por (3.3).

Como a fibração não discrimina entre sistemas quânticos específicos de dois níveis, nos concentramos também em um exemplo ilustrativo: a luz polarizada. Inicialmente, pode-se pensar que o plano de oscilação do campo elétrico especifica completamente a polarização. No entanto, essa noção contradiz a estrutura revelada pela fibração, que implica um espaço tridimensional de fundo para a preparação. Para reconciliar essa aparente contradição, empregamos um dispositivo universal para óptica de polarização  $SU(2)$ . Nossa investigação demonstrou que os parâmetros ajustáveis desse dispositivo definem um estado na esfera de Bloch. Consequentemente, atribuímos com sucesso uma interpretação prática e operacional à parametrização (3.3), em consonância com nossos objetivos.

Exploramos também um sistema físico concreto para reconstruir operacionalmente o conhecido homomorfismo dois-para-um entre os grupos  $SU(2)$  e  $SO(3)$ . Em vez de tratar essa correspondência como um artefato puramente matemático, nós a construímos a partir de princípios básicos, utilizando procedimentos físicos como a preparação de estados, evoluções quânticas reversíveis e a estrutura de mapas CPTP. Isso nos permitiu realizar o homomorfismo por meio de uma sequência de etapas experimentalmente motivadas e fisicamente significativas, firmemente enraizadas na geometria da esfera de Bloch e na álgebra das operações quânticas. Nossa construção não apenas reforça a profunda interação entre a teoria de grupos e a mecânica quântica, como também oferece um ponto de vista operacional claro a partir do qual essas conexões emergem. Ao ancorar o homomorfismo

abstrato em transformações que podem ser implementadas na prática — rotações no espaço físico e unitárias no espaço de Hilbert — fornecemos uma interpretação concreta que enriquece a apresentação formal usual.

Mostramos também que o problema de *coarse-graining* está precisamente relacionado à conexão estabelecida. Nesse sentido, lidamos com uma dinâmica efetiva e acessível, que poderia, em princípio, ser observada em laboratório. Isso se apoia em uma descrição operacional, seguindo o esquema de (8, 5, 12), na qual tanto os cenários de preparação e medição quanto a evolução dos estados possuem um correspondente no espaço físico. A análise de diferentes cenários do problema de *coarse-graining*, por meio da abordagem operacional estabelecida, nos possibilitou identificar as condições necessárias para o surgimento da dinâmica emergente macroscópica  $\Gamma_{D|C}^t$  e determinar as restrições impostas nos componentes da matriz que representa o estado inicial  $\rho_0$  em quatro cenários paradigmáticos—ver Tabela 1.

Em suma, no decorrer deste trabalho, ficou evidente que a abordagem operacional não só detém um grande poder descritivo, como foi averiguado nos casos em que interpretamos estruturas matemáticas como operações no laboratório. Mas também possui um caráter de prospecção, servindo como método de investigação, como visto posteriormente na análise de sistemas de *coarse-graining*.

## REFERÊNCIAS

- 1 NEURATH, Otto. Operationalism. **The Stanford encyclopedia of philosophy**, 2009.
- 2 BRIDGMAN, Percy Williams. **The logic of modern physics**. Macmillan, 1927.
- 3 FEEST, Uljana. **Operationism in psychology: What the debate is about, what the debate should be about**. *Journal of the History of the Behavioral Sciences*, v. 41, n. 2, p. 131-149, 2005.
- 4 PERES, Asher (Ed.). **Quantum theory: concepts and methods**. Dordrecht: Springer Netherlands, 2002.
- 5 VALLE, V. G. et al. **Towards establishing a connection between two-level quantum systems and physical spaces**. *Brazilian Journal of Physics*, v. 54, n. 4, p. 93, 2024.
- 6 VASCONCELOS JÚNIOR, G. F.; COSTA, R. P. S.; RIZZUTI, B. F. **Grandezas físicas unidimensionais**. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 40, p. e3304, 2018.
- 7 GAIO, L. M.; BARROS, D. R. T. de; RIZZUTI, B. F. **Grandezas físicas multidimensionais**. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 41, n. 3, p. e20180295, 2019.
- 8 RIZZUTI, B. F.; GAIO, L. M.; DUARTE, C. **Operational approach to the topological structure of the physical space**. *Foundations of Science*, v. 25, n. 3, p. 711-735, 2020.
- 9 RIZZUTI, Bruno F.; GAIO, Luca M.; CARDOSO, Lucas T. **Is time the real line?**. *Foundations of Physics*, v. 52, n. 5, p. 105, 2022.
- 10 GROSSI, R. et al. One hundred years later: Stern-Gerlach experiment and dimension witnesses. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 45, p. e20220227, 2023.
- 11 NAYAK, Ashwin; SEN, Pranab. **Invertible quantum operations and perfect encryption of quantum states**. arXiv preprint quant-ph/0605041, 2006.
- 12 VALLE, V. G.; RIZZUTI, B. F. **From Rotations to Unitaries: Reversible Quantum Processes and the Emergence of the SU(2) SO(3) Homomorphism**. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 48, p. e20250374, 2026.
- 13 AMARAL, Bárbara; BARAVIERA, Alexandre T.; CUNHA, MO Terra. *Mecânica quântica para matemáticos em formação*. **Impa-28th Colóquio Brasileiro de Matemática**, 2011.
- 14 COHEN-TANNOUDJI, Claude; DIU, Bernard; LALOË, Franck. **Quantum mechanics, volume 3: fermions, bosons, photons, correlations, and entanglement**. John Wiley & Sons, 2019.
- 15 STERN, Otto. **Ein weg zur experimentellen prüfung der richtungsquantelung im magnetfeld**. *Zeitschrift für Physik*, v. 7, n. 1, p. 249-253, 1921.

- 16 GERLACH, Walther; STERN, Otto. **Der experimentelle Nachweis des magnetischen Moments des Silberatoms**. Zeitschrift für Physik, v. 8, n. 1, p. 110-111, 1921.
- 17 GERLACH, Walther; STERN, Otto. **Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld**. Zeitschrift für Physik, v. 9, n. 1, p. 349-352, 1922.
- 18 GERLACH, Walther; STERN, Otto. **Das magnetische moment des silberatoms**. Zeitschrift für Physik, v. 9, n. 1, p. 353-355, 1922.
- 19 DIRAC, Paul Adrien Maurice. **The principles of quantum mechanics**. Oxford university press, 1981.
- 20 SIMON, R.; MUKUNDA, N. **Universal SU (2) gadget for polarization optics**. Physics Letters A, v. 138, n. 9, p. 474-480, 1989.
- 21 Englert, B. G., Kurtsiefer, C., & Weinfurter, H. (2001). **Universal unitary gate for single-photon two-qubit states**. Physical Review A, 63(3), 032303.
- 22 WATROUS, John. **The theory of quantum information**. Cambridge university press, 2018.
- 23 NIELSEN, Michael A.; CHUANG, Isaac L. **Quantum computation and quantum information**. Phys. Today, v. 54, n. 2, p. 60, 2001.
- 24 DUARTE, Cristhiano et al. **Emerging dynamics arising from coarse-grained quantum systems** Physical Review A, v. 96, n. 3, p. 032113, 2017.
- 25 SILVA CORREIA, Pedro et al. **Macro-to-micro quantum mapping and the emergence of nonlinearity**. arXiv e-prints, p. arXiv: 2007.14370, 2020.
- 26 TUNG, Wu-Ki. **Group theory in physics**. World Scientific, 1985.
- 27 CORNWELL, John F. **Group theory in physics: An introduction**. Academic press, 1997.
- 28 HALL, Brian C. **Lie groups, Lie algebras, and representations**. In: Quantum Theory for Mathematicians. New York, NY: Springer New York, 2013. p. 333-366.
- 29 MUKUNDA, N.; CHATURVEDI, S.; SIMON, R. **Hamilton's theory of turns revisited**. Pramana, v. 74, n. 1, p. 1-10, 2010.
- 30 HOFFMAN, Kenneth et al. **Álgebra lineal**. Prentice-Hall Internacional, 1973.
- 31 LEIFER, Matthew S.; SPEKKENS, Robert W. **Towards a formulation of quantum theory as a causally neutral theory of Bayesian inference**. Phys. Rev. A, v. 88, n. 5, p. 38, 2013.
- 32 LEIFER, Matthew Saul. **Is the quantum state real? an extended review of  $\psi$ -ontology theorems**. Quanta, v. 3, n. 1, p. 67-155, 2014.
- 33 COLBECK, Roger; RENNER, Renato. **No extension of quantum theory can have improved predictive power** Nature communications, v. 2, n. 1, p. 411, 2011.

- 34 YAKIR et al. **Quantum cheshire cats** New Journal of Physics, v. 15, n. 11, p. 113015, 2013.
- 35 INEBERG, Susan. **Dutch book arguments**. 2011.
- 36 KEMENY, John G. **Fair bets and inductive probabilities**<sup>1</sup>. The Journal of Symbolic Logic, v. 20, n. 3, p. 263-273, 1955.
- 37 ANSCOMBE, Francis J.; AUMANN, Robert J. **A definition of subjective probability**. The annals of mathematical statistics, v. 34, n. 1, p. 199-205, 1963.
- 38 SAVAGE, Leonard J. **The foundations of statistics**. Courier Corporation, 2012.
- 39 DE FINETTI, Bruno. **Theory of probability: A critical introductory treatment**. John Wiley and Sons, 2017.
- 40 VON NEUMANN, John; MORGENSTERN, Oskar. Theory of games and economic behavior: 60th anniversary commemorative edition. In: **Theory of games and economic behavior**. Princeton university press, 2007.
- 41 BENGTTSSON, Ingemar; ŻYCZKOWSKI, Karol. **Geometry of quantum states: an introduction to quantum entanglement**. Cambridge university press, 2017.
- 42 CARVALHO, André Salles de; SIEJAKOWSKI, Rafal Marian. **Topologia e geometria de 3-variedades: uma agradável introdução**. 2022.
- 43 MUNKRES; JAMES, R. **Topology; a first course**. Prentice-Hall, 1974.
- 44 JAUCH, Josef Maria. **Foundations of quantum mechanics**. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1968.
- 45 CHILDS, Andrew M.; CHUANG, Isaac L. **Universal quantum computation with two-level trapped ions**. Physical Review A, v. 63, n. 1, p. 012306, 2000.
- 46 HARVEY, Shannon. **Quantum Dots/Spin Qubits**. Oxford University Press, 2022.
- 47 UNRAU, Waldemar; BIMBERG, Dieter. **Flying qubits and entangled photons**. Laser and Photonics Reviews, v. 8, n. 2, p. 276-290, 2014.
- 48 HENSEN, Bas et al. **Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres**. Nature, v. 526, n. 7575, p. 682-686, 2015.
- 49 BENNETT, Charles H. et al. **Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels**. Physical review letters, v. 70, n. 13, p. 1895, 1993.
- 50 WALBORN, Stephen P. et al. **Spatial correlations in parametric down-conversion**. Physics Reports, v. 495, n. 4-5, p. 87-139, 2010.
- 51 BENNETT, Charles H.; BRASSARD, Gilles. **Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing**. Theoretical computer science, v. 560, p. 7-11, 2014.
- 52 EKERT, Artur K. **Quantum cryptography based on Bell's theorem**. Physical review letters, v. 67, n. 6, p. 661, 1991.

- 53 ARUTE, Frank et al. **Quantum supremacy using a programmable superconducting processor**. *Nature*, v. 574, n. 7779, p. 505-510, 2019.
- 54 ACÍN, Antonio; MASANES, Lluís. **Certified randomness in quantum physics**. *Nature*, v. 540, n. 7632, p. 213-219, 2016.
- 55 SOMMA, Rolando D. et al. **Quantum simulations of classical annealing processes**. *Physical review letters*, v. 101, n. 13, p. 130504, 2008.
- 56 BRANDAO, Fernando GSL; SVORE, Krysta M. **Quantum speed-ups for solving semidefinite programs**. In: 2017 IEEE 58th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS). IEEE, 2017. p. 415-426.
- 57 GRIFFITHS, David J.; SCHROETER, Darrell F. **Introduction to quantum mechanics**. Cambridge university press, 2018.
- 58 WU, Tsung-Yao et al. **Stern–Gerlach detection of neutral-atom qubits in a state-dependent optical lattice**. *Nature Physics*, v. 15, n. 6, p. 538-542, 2019.
- 59 NAKAHARA, Mikio. **Geometry, topology and physics**. CRC press, 2018.
- 60 GRIFFITHS, David J. **Introduction to electrodynamics**. Cambridge University Press, 2023.
- 61 REDDY, Salla Gangi et al. **Polarization state transformation using two quarter wave plates: application to Mueller polarimetry**. *Applied Optics*, v. 55, n. 12, p. B14-B19, 2016.
- 62 WOLF, Michael M. **Quantum channels and operations-guided tour**. 2012.
- 63 HORODECKI, Ryszard et al. **Quantum entanglement**. *Reviews of modern physics*, v. 81, n. 2, p. 865-942, 2009.
- 64 MARQUARDT, Florian; PÜTTMANN, Annett. **Introduction to dissipation and decoherence in quantum systems**. arXiv preprint arXiv:0809.4403, 2008.
- 65 PLÁVALA, Martín. **General probabilistic theories: An introduction**. *Physics Reports*, v. 1033, p. 1-64, 2023.
- 66 GAMEL, Omar. **Entangled Bloch spheres: Bloch matrix and two-qubit state space**. *Physical Review A*, v. 93, n. 6, p. 062320, 2016.
- 67 Rocha, A.N. and Rizzuti, B.F. and Mota, D.S. **Transformações de Galileu e de Lorentz: um estudo via teoria de grupos** *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 35, n. 4, 2013.
- 68 Marcelo de O. Terra Cunha **Emaranhamento: caracterização, manipulação e consequências** Tese de doutorado - UFMG, 2005
- 69 DUARTE, Cristhiano; CATANI, Lorenzo; DRUMOND, Raphael C. **Relating compatibility and divisibility of quantum channels**. *International Journal of Theoretical Physics*, v. 61, n. 7, p. 189, 2022.

- 70 PETZ, Dénes. **Sufficient subalgebras and the relative entropy of states of a von Neumann algebra**. *Communications in mathematical physics*, v. 105, n. 1, p. 123-131, 1986.
- 71 DUARTE, Cristhiano et al. **Investigating coarse-grainings and emergent quantum dynamics with four mathematical perspectives**. arXiv preprint arXiv:2011.10349, 2020.
- 72 CASTIGLIONE, Patrizia et al. **Chaos and coarse graining in statistical mechanics**. Cambridge University Press, 1945.
- 73 BARENCO, Adriano et al. **Stabilization of quantum computations by symmetrization**. *SIAM Journal on Computing*, v. 26, n. 5, p. 1541-1557, 1997.
- 74 NISHIMURA, Harumichi. **A Survey: SWAP Test and Its Applications to Quantum Complexity Theory**. In: *Algorithmic Foundations for Social Advancement: Recent Progress on Theory and Practice*. Singapore: Springer Nature Singapore, 2025. p. 243-261.
- 75 SACHDEV, Subir. **Quantum phase transitions**. *Physics world*, v. 12, n. 4, p. 33, 1999.
- 76 VALLEJOS, Raúl O. et al. **Quantum state inference from coarse-grained descriptions: Analysis and an application to quantum thermodynamics**. *Physical Review A*, v. 106, n. 1, p. 012219, 2022.

## A Apêndice

Aqui enunciamos e provamos o corolário do Teorema 3. Este é exatamente o resultado que utilizamos para conectar mapas CPTP invertíveis (cujo inverso também é CPTP) com uma estrutura de grupo.

**Teorema 3.** *Seja  $\Phi : L(\mathbb{C}^n) \rightarrow L(\mathbb{C}^n)$  um mapa CPTP. Supondo que  $\Phi$  admite uma inversa  $\Phi^{-1}$  que também é CPTP. Então existe uma unitária  $\mathcal{U}$  em  $\mathbb{C}^n$  tal que  $\Phi(\cdot) = \mathcal{U}(\cdot)\mathcal{U}^*$  e  $\Phi^{-1}(\cdot) = \mathcal{U}^*(\cdot)\mathcal{U}$ . Inversamente, se  $\Phi$  é um mapa CPTP cuja representação de Kraus possui um único operador, dado por  $\Phi(\cdot) = \mathcal{U}(\cdot)\mathcal{U}^*$ , então  $\Phi$  é invertível,  $\Phi^{-1}(\cdot) = \mathcal{U}^*(\cdot)\mathcal{U}$  e  $\Phi^{-1}$  is também é CPTP.*

*Prova:*

Uma vez que  $\Phi$  e  $\Phi^{-1}$  são mapas CPTP, ambos podem ser representados por meio da representação de Kraus—conforme dado na Equação (2.4)—utilizando os conjuntos de operadores de Kraus  $\{A_a \mid a \in \mathcal{I}\}$ ,  $\{B_b \mid b \in \mathcal{I}\} \subset L(\mathbb{C}^n)$ :

$$\begin{aligned}\Phi(\cdot) &= \sum_a A_a(\cdot)A_a^* ; \\ \Phi^{-1}(\cdot) &= \sum_b B_b(\cdot)B_b^* .\end{aligned}\tag{A.1}$$

A quantidade de elementos nos dois conjuntos de operadores de Kraus é uma consequência direta do fato de que a cardinalidade de  $\mathcal{I}$  está vinculada ao rank da representação de Choi-Jamiołkowski do mesmo mapa  $\Phi$  (22), isto é,  $|\mathcal{I}| = \text{rank}(J(\Phi))$ , combinada com o fato de que  $\Phi$  é invertível, o que implica que  $a, b \in \mathcal{I}$  correspondem a conjuntos com o mesmo número de elementos.

Temos então

$$\Phi^{-1}(\Phi(\cdot)) = \sum_{a,b} B_b A_a(\cdot) A_a^* B_b^*,\tag{A.2}$$

que define outro mapa CPTP, o mapa identidade. A Equação (A.2) é outra representação da identidade. Então, ao definir  $B_b A_a = \alpha_{ba} \mathbb{I}_n$ , os coeficientes complexos  $a, b \in \mathcal{I}$  satisfazem  $\sum_{a,b} |\alpha_{ba}|^2 = 1$ , devido à equivalência unitária entre representações de Kraus (23).<sup>1</sup> De fato,

<sup>1</sup> Se dois conjuntos de operadores de Kraus, digamos  $\{A_a\}$  and  $\{B_i\}$ , para alguns índices  $a$  e  $i$ , estão conectados pelos coeficientes de uma matriz unitária  $U$ ,  $A_a = \sum_i U_{ia} B_i$ , como  $(UU^*)_{ij} = \delta_{ij}$ , então eles descrevem a mesma operação sobre o estado  $\rho$ :

$$\begin{aligned}\sum_a A_a \rho A_a^* &= \sum_{a,i,j} U_{ia} B_i \rho \bar{U}_{ja} B_j = \sum_{i,j} (UU^*)_{ij} B_j \rho B_j^* \\ &= \sum_i B_i \rho B_i^*\end{aligned}$$

para qualquer  $\rho \in L(\mathbb{C}^n)$  temos

$$\begin{aligned} \sum_{a,b} B_b A_a \rho A_a^* B_b^* &= \sum_{a,b} \alpha_{ba} \mathbb{I}_n \rho \bar{\alpha}_{ba} \mathbb{I}_n \\ &= \sum_{a,b} |\alpha_{ba}|^2 \rho = \rho. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Por conveniência, podemos escrever

$$\sum_b A_a^* B_b^* B_b A_a = \beta_{a'a} \mathbb{I}_n; \quad \forall a', a \in \mathcal{I}, \quad (\text{A.4})$$

onde  $\beta_{a'a} = \sum_b \bar{\alpha}_{ba'} \alpha_{ba}$ .

Pela restrição da representação de Kraus  $\sum_b B_b^* B_b = \mathbb{I}_n$ , segue que

$$A_{a'}^* A_a = \beta_{a'a} \mathbb{I}_n; \quad \forall a', a \in \mathcal{I}. \quad (\text{A.5})$$

Podemos considerar  $\beta_{a'a}$  como os elementos de uma matriz  $\mathcal{M}$  de dimensão  $a' \times a$ , que satisfaz  $\text{Tr}(\mathcal{M}) = \sum_a \beta_{aa} = \sum_{ab} |\alpha_{ba}|^2 = 1$ , e que é semidefinida positiva devido ao fato de que, para toda escolha de  $u$ ,  $u^* \mathcal{M} u = \sum_b (\sum_{a'} \bar{u}_{a'} \bar{\alpha}_{ba'}) (\sum_a u_a \alpha_{ba}) \geq 0$ .

Observando a Equação (A.5), notamos que os operadores de Kraus associados a  $\Phi$  incorporam elementos de  $\mathbb{C}^n$  em  $\mathbb{C}^n$  por meio de um escalonamento; em outras palavras, eles não necessariamente incorporam  $\mathbb{C}^n$  em subespaços ortogonais de  $\mathbb{C}^n$ , uma vez que a matriz  $\mathcal{M}$  não é, em geral, diagonal. Sabe-se que a matriz  $\mathcal{M}$  é semidefinida positiva e, como tal, também é auto-adjunta, o que permite uma decomposição via o teorema espectral, isto é,  $\mathcal{M}$  pode ser diagonalizada. Portanto, para construir uma representação equivalente de  $\Phi$  na qual as imagens pertençam a subespaços ortogonais, devemos primeiro diagonalizar a matriz  $\mathcal{M}$ .

Dado uma matriz unitária  $\mathcal{V}$  que diagonaliza  $\mathcal{M}$ , onde  $\Gamma = \mathcal{V}^* \mathcal{M} \mathcal{V}$  e a matriz diagonal resultante, com  $\gamma_a = \Gamma_{aa} \geq 0$ ;  $\forall a \in \mathcal{I}$  e  $\sum_a \gamma_a = \sum_a \beta_{aa} = 1$ .

Temos agora um novo operador de Kraus, que denotaremos por  $C_c$  (o qual também representa o mapa  $\Phi$ ), definido por meio da equivalência unitária entre representações de Kraus como  $C_c = \sum_a v_{ac} A_a$ , onde  $v_{ac}$  são os elementos de matriz de  $\mathcal{V}$ .

Para todo  $c$  e  $c'$  em  $\mathcal{I}$  nos temos

$$\begin{aligned} C_{c'}^* C_c &= \left( \sum_{a'} \bar{v}_{c'a'} A_{a'}^* \right) \left( \sum_a v_{ca} A_a \right) \\ &= \sum_{a',a} \bar{v}_{c'a'} v_{ca} (A_{a'}^* A_a). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Pela Equação (A.5), segue que

$$\begin{aligned} C_{c'}^* C_c &= \sum_{a',a} \bar{v}_{c'a'} v_{ca} (\beta_{a'a} \mathbb{I}_n) = \left( \sum_{a',a} \bar{v}_{c'a'} \beta_{a'a} v_{ca} \right) \mathbb{I}_n \\ &= \Gamma_{c'c} \mathbb{I}_n = \delta_{c'c} \gamma_c \mathbb{I}_n. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Definindo  $\mathcal{J} = \{c \in \mathcal{I} \mid \gamma_c \neq 0\}$  temos agora uma matriz diagonal; portanto, os operadores de Kraus  $\{C_c \mid \forall c \in \mathcal{J}\}$  se incorporam em subespaços ortogonais de  $\mathbb{C}^n$  e, pela decomposição em valores singulares,  $C_c$  assume a forma:

$$C_c = \sum_{i \in [n]} \sqrt{\gamma_c} |y_{ci}\rangle \langle u_i^{(c)}|. \quad (\text{A.8})$$

onde  $\{|y_{ci}\rangle\}_{c \in \mathcal{J}, i \in [n]}$  é um conjunto ortonormal de vetores em  $\mathbb{C}^n$  e  $\{|u_i^{(c)}\rangle\}_{i \in [n]}$  é uma base ortonormal de  $\mathbb{C}^n$  para cada  $c \in \mathcal{J}$ .

Portanto, agora temos uma transformação unitária  $\mathcal{U}$  que, para cada  $c \in \mathcal{J}$ , leva a base ortonormal  $\{|u_i^{(c)}\rangle\}_{i \in [n]}$  de  $\mathbb{C}^n$  a um conjunto ortonormal de vetores  $\{|y_{ci}\rangle\}_{c \in \mathcal{J}, i \in [n]}$  e  $\mathbb{C}^n$  i.e.  $\mathcal{U} : |u_i^{(c)}\rangle \mapsto |y_{ci}\rangle$ , uma vez que  $C_c = \sqrt{\gamma_c} \mathcal{U}$  em virtude da equivalência unitária entre representações de Kraus.

Assim, temos

$$\begin{aligned} \Phi(\rho) &= \sum_c C_c \rho C_c^* \\ &= \sum_c \gamma_c \mathcal{U} \rho \mathcal{U} = \mathcal{U} \rho \mathcal{U}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

A matriz unitária  $\mathcal{U}$  representa a ação de todos os operadores de Kraus  $C_c$  sobre  $\rho$ , para todo  $c \in \mathcal{J}$ , reduzindo a representação de Kraus de  $\Phi$  a um único elemento. Isso nos permite escrever  $\Phi$  como  $\Phi(\cdot) = \mathcal{U}(\cdot)\mathcal{U}^*$ , e como  $\Phi^{-1}(\Phi(\cdot))$  representa o mapa identidade, segue que  $\Phi^{-1}(\cdot) = \mathcal{U}^*(\cdot)\mathcal{U}$ . Assim, completa-se a primeira parte da prova.

A parte inversa deste teorema segue de uma sequência direta de passos. Um mapa é dito invertível se existe outro mapa  $\Phi^{-1}$  tal que a aplicação de  $\Phi^{-1}$  seguida de  $\Phi$  (ou vice-versa) resulte no mapa identidade. Considere o mapa definido por  $\Phi^{-1}(\cdot) = \mathcal{U}^*(\cdot)\mathcal{U}$ . Esse mapa efetivamente desfaz a ação de  $\Phi$ .

Como  $\mathcal{U}$  é unitária, dado um estado arbitrário  $\sigma$

$$\Phi^{-1}(\Phi(\sigma)) = \mathcal{U}^* \mathcal{U} \sigma \mathcal{U} \mathcal{U} = \sigma \Rightarrow \Phi^{-1} \circ \Phi = \mathbb{I}_n. \quad (\text{A.10})$$

Como mostrado nas equações (2.4) e (2.5),  $\Phi^{-1}$  possui estrutura de um mapa CPTP. Então  $\Phi$  admite um inverso que também é CPTP, completando a prova inversa.  $\square$