UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Maria Eduarda Alvim Pedrosa

PENSAMENTO PROPORCIONAL NA MATEMÁTICA ESCOLAR: UM ESTUDO SOBRE PROPORÇÕES

Juiz de Fora

2025

Maria Eduarda Alvim Pedrosa

PENSAMENTO PROPORCIONAL NA MATEMÁTICA ESCOLAR: UM ESTUDO SOBRE PROPORÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.
Área de concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Amarildo Melchiades da Silva

Juiz de Fora
2025

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração
automática da Biblioteca Universitária da UFJF,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Pedrosa, Maria Eduarda Alvim.
Pensamento proporcional na Matemática escolar: : Um estudo sobre proporções / Maria Eduarda Alvim Pedrosa. -- 2025.
146 f. : il.

Orientador: Amarildo Melchiades da Silva
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2025.

1. Educação Matemática. 2. Modelo dos Campos Semânticos. 3. Ensino e Aprendizagem. 4. Noção de proporção. 5. Matemática Escolar. I. Silva, Amarildo Melchiades da , orient. II. Título.

Maria Eduarda Alvim Pedrosa

PENSAMENTO PROPORCIONAL NA MATEMÁTICA ESCOLAR: UM ESTUDO SOBRE PROPORÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.
Área de concentração: Educação Matemática.

Aprovada em 25 de julho de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado eletronicamente por **Amarildo Melchiades da Silva**, **Professor(a)**, em 25/07/2025, às 14:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Prof. Dr. Amarildo Melchiades da Silva - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

Documento assinado eletronicamente por **Dora Soraia Kindel**, **Usuário Externo**, em 25/09/2025, às 17:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Profa. Dra. Dora Soraia Kindel - Membro externo

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Documento assinado eletronicamente por **Rosana de Oliveira**, **Usuário Externo**, em 25/07/2025, às 21:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Profa. Dra. Rosana de Oliveira - Membro interno

Universidade Federal de Juiz de Fora

Dedico este trabalho à memória de minha avó:
Maria José dos Santos Alvim.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter guiado meus passos, mesmo quando eu não sabia para onde ir, por ter colocado luz nas minhas dúvidas e força nos meus dias mais cansados.

Aos meus pais, Rita e Paulo, que, mesmo diante de muitas trilhas difíceis, prepararam o caminho para que eu pudesse seguir com segurança e menos pedras. Obrigada por me mostrarem, por meio do exemplo, que tudo se torna mais fácil quando há amor, carinho e acolhimento. Eu escolheria vocês em todas as minhas vidas.

Aos meus irmãos, Ana Paula, Luana, Nelson Henrique, e à minha sobrinha Bárbara, que, cada um à sua maneira, são abrigo firme, cumplicidade e força. Ter vocês é sempre ter onde ancorar, independentemente de quão longe eu navegue.

Ao meu companheiro Ítalo, aquele com quem hoje divido a vida e os sonhos, obrigada por me envolver com carinho nos dias em que a ansiedade me tira o chão. Ter você comigo é uma das certezas mais bonitas que carrego no coração.

Ao meu cunhado Peter, que, além de me apresentar o mar, esteve presente em muitas das manobras por trás da minha formação.

Ao meu querido professor Amarildo, que, além de orientador, foi um grande amigo e incentivador. Obrigada pela confiança, pelas oportunidades, pelas trocas e por toda a orientação ao longo deste tempo.

Aos meus professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora e a todos os outros com os quais tive o privilégio de aprender: vocês foram cruciais durante todo o percurso até aqui.

Aos integrantes do grupo de pesquisa NIDEEM – Núcleo de Investigação, Divulgação e Estudos em Educação Matemática –, em especial à Taynara e à Sinai, pelos diversos dias de muita troca, conhecimento, experiências e risadas.

Aos meus queridos amigos: se tudo o que vivi até aqui fez sentido, foi porque vocês estavam lá — nos bastidores, nos abraços, nas palavras e nos silêncios. Obrigada por serem minha parte mais forte.

Por fim, a todos que caminharam ao meu lado, mesmo em silêncio, meu mais sincero obrigado. Cada gesto, palavra e presença fez diferença. Levo comigo um pedacinho de cada um.

RESUMO

O presente trabalho teve como objetivo investigar a produção de um conjunto de tarefas, fundamentadas teórica e metodologicamente, para o ensino da noção de proporção para estudantes do Ensino Fundamental, como parte do processo de desenvolvimento do pensamento proporcional inserido no projeto de educá-los matematicamente. A pesquisa caracteriza-se como uma abordagem qualitativa de investigação, a ser desenvolvida uma pesquisa de campo. Os pressupostos teóricos que orientam o processo de investigação e desenvolvimento estão ancorados no Modelo dos Campos Semânticos. Como produto educacional, foi elaborado um conjunto de tarefas destinado ao uso nas salas de aula de matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática. Modelo dos Campos Semânticos. Ensino e Aprendizagem. Noção de proporção. Matemática Escolar.

ABSTRACT

This study aims to investigate the production of a set of tasks, theoretically and methodologically referenced grounded, for teaching the notion of proportion to Elementary School students, as part of the process of developing proportional thinking within the project to educate them mathematically. The research is characterized as a qualitative research approach,carried out through field research. The theoretical assumptions guiding the process of investigation and development are anchored in the Semantic Fields Model.As an educational product, a set os tasks intended for use in mathematics classrooms was developed. .

Keywords: Mathematics Education. Semantic Fields Model. Teaching and learning. Notion of proportion. School mathematics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1- Introduzindo a noção de razão.	22
Figura 2- Razão como escala	22
Figura 3- Maneiras de expressar uma razão.	23
Figura 4- Proporção.	24
Figura 5- Extremos e meios de uma proporção.	25
Figura 6- Propriedade fundamental das proporções.	26
Figura 7- Atividades sobre proporção.	27
Figura 8- Relações entre grandezas.	28
Figura 9- Tarefas “informais”.	34
Figura 10- Tarefas “informais” - Perda de peso.	35
Figura 11- Resposta da Paula	49
Figura 12- Resposta do Davi	50
Figura 13- Tarefa da limonada.	51
Figura 14- Registro do Paulo (Tarefa 1a)	67
Figura 15- Registro da Rita (Tarefa 1a)	68
Figura 16- Registro do Paulo (Tarefa 1b)	70
Figura 17- Registro do Paulo (Tarefa 1c)	70
Figura 18- Registro da Rita (Tarefa 1b)	71
Figura 19- Registro da Rita (Tarefa 1c)	71
Figura 20- Registro do Paulo (Tarefa 2)	73
Figura 21- Registro da Rita (Tarefa 2)	74
Figura 22- Registro do Paulo (Tarefa 3a)	77
Figura 23- Registro da Rita (Tarefa 3a)	78
Figura 24- Registro do Paulo (Tarefa 3b)	82
Figura 25- Registro do Paulo (Tarefa 3c)	83
Figura 26- Registro da Rita (Tarefa 3b)	84
Figura 27- Registro da Rita (Tarefa 3c)	85
Figura 28- Registro do Paulo (Tarefa 4)	87
Figura 29- Registro da Rita (Tarefa 4)	88
Figura 30- Registro do Paulo (Tarefa 5)	93
Figura 31- Registro da Rita (Tarefa 5)	94
Figura 32- Registro do Paulo (Tarefa 6 - Problema 1)	97

Figura 33- Registro do Paulo (Tarefa 6 - Problema 2) 97
Figura 34- Registro do Paulo (Tarefa 6 - Problema 3) 98
Figura 35- Registro do Paulo (Tarefa 6 - Problema 4) 99
Figura 36- Registro do Paulo (Tarefa 6 - Problema 5) 100
Figura 37- Registro do Paulo (Tarefa 6 - Problema 6) 101
Figura 38- Registro da Rita (Tarefa 6 - Problema 1) 102
Figura 39- Registro da Rita (Tarefa 6 - Problema 2) 103
Figura 40- Registro da Rita (Tarefa 6 - Problema 3) 104
Figura 41- Registro da Rita (Tarefa 6 - Problema 4) 104
Figura 42- Registro da Rita (Tarefa 6 - Problema 5) 105
Figura 43- Registro da Rita (Tarefa 6 - Problema 6) 106
Figura 44- Registro do Paulo (Tarefa 7) 108
Figura 45- Registro da Rita (Tarefa 7) 108
Figura 46- Propriedade fundamental das proporções 109

LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Desenvolvimento do Pensamento Proporcional 30

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ETV	Ensino Tradicional Vigente
GEPEM	Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática
MCS	Modelo dos Campos Semânticos
NIDEEM	Núcleo de Investigação, Divulgação e Estudos em Educação Matemática
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 13
2 O PENSAMENTO PROPORCIONAL E A NOÇÃO DE PROPORÇÃO 15
2.1 CONCEPÇÕES DE PENSAMENTO PROPORCIONAL – ALGUMAS PERSPECTIVAS 15
2.2 A NOÇÃO DE PROPORÇÃO 18
2.3 O PENSAMENTO PROPORCIONAL NO LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA. 19
3 REVISÃO DA LITERATURA 28
4 REFERENCIAL TEÓRICO 35
4.1 O MODELO DOS CAMPOS SEMÂNTICOS 35
4.2 O PROBLEMA DE PESQUISA 39
5 METODOLOGIA DA PESQUISA 40
5.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA 40
5.2 O PROCESSO DE PRODUÇÃO DAS TAREFAS 42
6 ANÁLISE DA PRODUÇÃO DE SIGNIFICADOS DOS ESTUDANTES 63
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS 106
REFERÊNCIAS 108
APÊNDICE A- TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIMENTO.. 110
APÊNDICE B- CONJUNTO DE TAREFAS 111
APÊNDICE C- TRANSCRIÇÃO DAS APLICAÇÕES 129

1 INTRODUÇÃO

A presente pesquisa é um dos subprojetos do macroprojeto de pesquisa intitulado *Educação Matemática Escolar no Século XXI: a formação de estudantes e professores da Educação Básica,* desenvolvido no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora e no Núcleo de Investigação, Divulgação e Estudos em Educação Matemática/NIDEEM, que compõe um programa interinstitucional denominado *Programa Linsiano de Investigação* em homenagem ao educador matemático Romulo Campos Lins (1955-2017).

Duas são as questões orientadoras que nortearão os projetos de pesquisa a serem desenvolvidos: (i) Como formar um(a) estudante educado(a) matematicamente ao longo da Educação Básica no século XXI?; (ii) Como deve ser a formação inicial de professores(as) no interior das licenciaturas em Matemática e Pedagogia para educar matematicamente os(as) estudantes da Educação Básica neste século? (Silva, Oliveira e Bastos, 2024, p. 95).

A presente pesquisa está inserida na primeira pergunta orientadora deste programa, tendo como frente de investigação, nesta primeira fase, a apuração de uma estrutura curricular para a matemática no Ensino Fundamental referenciada em modos de produção de significados. Neste projeto, o currículo é construído a partir de modos de pensar, compreendendo o pensamento matemático como um conjunto de pensamentos, a saber: pensamento aritmético, algébrico, geométrico, estatístico, pensamento proporcional, pensamento lógico e pensamento financeiro (Silva, Oliveira e Bastos, 2024, p. 99).

No contexto dos estudos voltados ao desenvolvimento do pensamento proporcional de estudantes do Ensino Fundamental, nosso objeto de pesquisa é a noção de proporção. Observa-se que, na Educação Básica, tal noção é comumente introduzida nos anos finais do Ensino Fundamental, apresentada por uma definição, e praticada por exercícios baseados em regras e fórmulas prontas.

Neste trabalho, apresentaremos algumas características que acreditamos compor uma pessoa que pensa proporcionalmente. Sendo assim, buscaremos romper a apresentação trazida pelos livros didáticos, propondo algumas tarefas e, consequentemente, desenvolver o raciocínio proporcional nos estudantes.

Esta dissertação está organizada em sete capítulos que se seguem a esta introdução. Os capítulos iniciais dedicam-se a estabelecer as bases teóricas e contextuais da pesquisa. A segunda seção aborda algumas concepções de pensamento proporcional a partir de pesquisadores nacionais e internacionais da área de Educação Matemática, apresentando suas contribuições para o entendimento deste modo de pensar. Na sequência, analisaremos um livro didático com o objetivo de entender a estrutura que os autores de livros didáticos propõem para o ensino do pensamento proporcional e, em particular, a noção de proporção. Essa decisão metodológica justifica-se pela premissa de que tais materiais do Ensino Fundamental II tendem a compartilhar estruturas análogas e, conforme aponta Lins (1994, p.03): "Os livros didáticos são os grandes delimitadores daquilo que os alunos dizem que é Matemática".

A terceira seção apresenta uma revisão da literatura, composta por estudos e pesquisas sobre pensamento proporcional e o ensino de proporção. A seção seguinte expõe o referencial teórico e metodológico no qual este trabalho se sustenta. O Modelo dos Campos Semânticos (MCS) orienta e fundamenta toda a pesquisa realizada. Além do referencial, apresentaremos também o problema de pesquisa e seus principais objetivos.

A quinta seção, por sua vez, concentra-se na metodologia, descrevendo como se dá a produção das tarefas que compõem o produto educacional e evidenciando a distinção entre a abordagem proposta e as práticas vigentes nas escolas.

As seções finais são dedicadas à apresentação dos dados e à conclusão do trabalho. Assim, a seção seis expõe a análise dos significados produzidos pelos estudantes participantes. Finalmente, a sétima seção oferece as considerações finais, sintetizando os resultados da investigação e discutindo suas implicações, a partir da aplicação das tarefas e da análise realizada. O trabalho é complementado pela seção de referências e pelos apêndices.

2 O PENSAMENTO PROPORCIONAL E A NOÇÃO DE PROPORÇÃO

O presente capítulo dedica-se à apresentação das concepções de pensamento proporcional, apresentadas por pesquisadores da área de Educação Matemática que buscaram caracterizar este modo de pensar. O objetivo é oferecer ao leitor uma introdução fundamentada nesta temática.

O capítulo se divide em três seções; na primeira seção, são listadas e analisadas as concepções sobre raciocínio e pensamento proporcional presentes na literatura em Educação Matemática, discutindo e destacando as perspectivas de diferentes pesquisadores.

Observaremos que não existe um consenso para o termo utilizado - raciocínio ou pensamento -, podendo variar de acordo com cada pesquisador. Como buscamos construir um currículo baseado em modos de pensar, optamos pelo termo pensamento proporcional.

A segunda seção expõe alguns pontos importantes a respeito na nossa proposta sobre o ensino de proporção, tema específico de nossa investigação.

Na terceira seção analisa-se como a noção de proporção é apresentada frequentemente nos livros didáticos, como forma de ilustrar a perspectiva recorrente nessas obras.

2.1 CONCEPÇÕES DE PENSAMENTO PROPORCIONAL – ALGUMAS PERSPECTIVAS

A primeira concepção que apresentaremos é a do pesquisador estadunidense John A. Van de Walle. Em sua obra *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (Matemática do Ensino Fundamental e Médio: Ensinando em Termos de Desenvolvimento), Van de Waller (2019) alinha-se ao pensamento de Susan Lamon,. Nele, o autor dedica um capítulo - o capítulo 19 - para apresentar suas concepções, tarefas e discussões sobre o raciocínio proporcional.

Van de Walle (2009) sugere que os pensadores proporcionais dispões das seguintes características: possuem um senso de covariação; reconhecem relações proporcionais como distintas de relações não-proporcionais em contextos do mundo real; desenvolvem uma ampla variedade de estratégias para resolver proporções ou comparar razões e compreendem razões como entidades distintas representando uma relação diferente das quantidades que elas comparam.

Lamon (2012) comenta sobre o termo raciocínio proporcional:

> O termo raciocínio proporcional tem sido um termo genérico, uma frase abrangente que se refere a uma certa facilidade com conceitos e contextos de números racionais. O termo é mal definido e os pesquisadores têm sido melhores em determinar quando um estudante ou um adulto não raciocina proporcionalmente em vez de definir as características de quem o faz.” (Lamon, 2012, p.3, tradução nossa)[1]

Além disso, a autora apresenta como podemos preparar as crianças no desenvolvimento do raciocínio proporcional:

> Parte da preparação para o raciocínio proporcional é ajudar as crianças a desenvolver a capacidade de olhar para uma situação, discernir as características quantificáveis importantes, e observar se as quantidades estão ou não mudando nessa situação e, se estiverem, observar as direções de mudança em relação umas às outras. (Lamon, 2012, p.70, tradução nossa)[2].

Ainda em seu livro, Van de Walle (2009) apresenta algumas informações relevantes ao mencionar sobre a população adulta estadunidense:

> Estima-se que mais da metade da população adulta não pode ser considerada um pensador proporcional. Isso significa que não adquirimos os hábitos e habilidades de raciocínio proporcional simplesmente crescendo. Por outro lado, as pesquisas de Lamon e de outros indicam que o ensino pode ter um efeito positivo, especialmente se as regras e algoritmos formais para o cálculo de frações, para comparar razões e para resolver proporções forem retardadas [para o momento certo]. Os estudantes podem precisar em torno de três anos valiosos de oportunidades para raciocinar em situações multiplicativas de modo a desenvolver adequadamente as habilidades de raciocínio proporcional. (Van de Walle, 2009, p.384)

Ressalta-se que a estimativa apresentada pela autora sobre a quantidade de pessoas adultas que pensam proporcionalmente é, possivelmente, baseada no lugar onde reside (Estados Unidos). Entretanto, essa afirmação nos faz questionar sobre o que acontece nos outros lugares, como no Brasil e, mais especificamente, na cidade de Juiz de Fora. Diante disso, emergem as seguintes problematizações que norteiam a pesquisa: os adultos brasileiros, e além deles, os alunos da Educação Básica podem ser considerados pensadores

---

[1] No original: “For too long, proportional reasoning has been an umbrella term, a catch-all phrase that refers to a certain facility with rational number concepts and contexts. The term is illdefined and researchers have been better at determining when a student or an adult does not reason proportionally rather than defining the characteristics of one who does.”

[2] No original: “Part of the preparation for later proportional reasoning is helping children to develop the ability to look at a situation, to discern the important quantifiable characteristics, to note whether or not quantities are changing in that situation, and if they are, to note the directions of change with respect to each other.”

proporcionais? O que a escola apresenta aos estudantes para que possam desenvolver esse tipo de pensamento? Tais questões serão discutidas nas próximas seções.

Uma outra caracterização de pensamento proporcional é apresentada por Lins e Gimenez (1997):

> Chamamos pensamento proporcional aquele que corresponde a uma estrutura de comparação entre partes ou entre todos, ou entre as partes e um todo, ou como um esquema instrumental que resolve algumas situações especiais de comparação em forma multiplicativa e não aditiva. (Lins; Gimenez, 1997, p.52)

Não obstante, os pesquisadores Post, Behr e Lesh (1995) comentam:

> O raciocínio com proporções é uma forma de raciocínio matemático. Ele envolve um senso de covariação, comparações múltiplas e a capacidade de armazenar e processar mentalmente várias informações. O raciocínio com proporções está muito ligado à inferência e à predição e envolve métodos de pensamento qualitativos e quantitativos (Post; Behr; Lesh, 1995, p. 90)

De forma semelhante às concepções apresentadas acima, a pesquisadora brasileira Alina Galvão Spinillo (1997, p.41), em seu texto "Proporções nas séries iniciais do primeiro grau" declara que "o pensamento proporcional refere-se basicamente à habilidade em estabelecer relações.". A autora parece associar o pensamento proporcional à noção de proporção ao afirmar que "Dois tipos de relações estão envolvidas na resolução de tarefas e problemas de proporção: relações de primeira ordem e relações de segunda ordem." (Spinillo, 1997, p.41).

Para a pesquisadora, as relações de primeira ordem são divididas em dois tipos: relações do tipo parte-parte e relações do tipo parte-todo.

> As relações parte-parte (razão) são estabelecidas entre partes diretamente comparáveis (e.g., a parte de um retângulo pintada em branco com a parte pintada em azul; espaço com água e espaço vazio em um recipiente), enquanto que nas relações parte-todo (fração), a parte e o todo não são diretamente comparáveis, embora tenham que ser simultaneamente considerados (e.g., parte pintada em azul com a área total do retângulo; espaço com água e o volume total do recipiente). (Spinillo, 1997, p.41)

Já a relação de segunda ordem consiste em comparar as relações para verificar se são equivalentes ou não, isto é, relações entre relações de primeira ordem. Em seguida, Spinillo (1997) destaca a importância dessas relações para o pensamento proporcional:

> A importância das relações de segunda ordem para o pensamento proporcional é amplamente reconhecida e apontada como a causa das dificuldades das crianças. Entretanto, raramente tem-se atentado para a importância do ponto

> de partida desta relação - as relações de primeira ordem, que alguns estudiosos consideram como uma das possíveis causas destas dificuldades. (Spinillo, 1997, p.43)

Sendo assim, até o momento, o desenvolvimento deste trabalho acontecerá a partir das caracterizações expressas por Van De Walle (2009) e Lins e Gimenez (1997). Nos próximos capítulos, a noção de proporção será discutida e serão apresentadas algumas tarefas que irão nos ajudar a desenvolver nos alunos as características de pensadores proporcionais.

2.2 A NOÇÃO DE PROPORÇÃO

A proporcionalidade se faz importante e presente no nosso cotidiano, por isso, vem sendo objeto de estudo na Educação Matemática. Para Schliemann e Carraher (1997):

> Razão e proporção são conceitos extremamente ricos que surgem nos mais diversos contextos da vida: na compra e venda, na construção civil, no desenho gráfico, em todos os ramos de atividade da ciência e tecnologia. Entretanto, como ensinadas na escola, razão e proporção parecem ser extremamente limitados. (Schliemann; Carraher, 1997, p. 15)

Essa limitação se dá pelo fato de que, no caso da noção de proporção, ela é apresentada apenas como a "igualdade entre duas razões". Essa definição reduz a experiência dos alunos a uma aplicação mecânica de regras e símbolos desprovidos de significados, levando-os a negligenciar a habilidade de raciocinar proporcionalmente. Como consequência, a atividade é frequentemente transformada em um problema de frações equivalentes (conteúdo trabalhado de forma semelhante). Essa associação cria diversas barreiras no desenvolvimento do pensamento proporcional.

Sendo assim, nosso objetivo não se limita a ensinar os alunos a estudarem proporções pela definição, encontrar o quarto termo faltante em uma proporção, assim como fazem os livros didáticos, usando a regra de três como método de cálculo. Busca-se, em vez disso, que os estudantes possam partir da identificação de relações que são e não são proporcionais ao comparar as grandezas envolvidas no problema. Essa perspectiva é corroborada por Van de Walle (2012, p.384), "muitas das atividades mais valiosas para o desenvolvimento do raciocínio proporcional não envolvem resolver proporções de todo, mas em vez disso, comparar razões em situações semelhantes, mas não proporcionais".

Apresentaremos nos capítulos posteriores, algumas tarefas com potencial para o processo de desenvolvimento do raciocínio proporcional no estudo de proporções. Nelas, compreenderemos a diferença entre nosso projeto atual e as propostas dos livros didáticos que estão presentes nas salas de aula. Antes, porém, passa-se à análise de um livro didático, como forma de ilustrar a perspectiva presente nas obras destinadas ao Ensino Fundamental II.

2.3 O PENSAMENTO PROPORCIONAL NO LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA

No Ensino Tradicional Vigente (ETV[3]), o livro didático ocupa uma posição central no que é ensinado de matemática nas escolas. Esse material é adquirido pelos alunos da escola particular pela lista de materiais que recebem no início do ano letivo e, nas escolas públicas, os governos municipais, estaduais e federais obtêm as coleções para serem entregues aos estudantes gratuitamente de acordo com a escolha dos professores. Com isso, eles acabam determinando quais conteúdos matemáticos serão ensinados e como serão ensinados.

Por este motivo, a análise do livro didático é importante para entendermos como ocorre o ensino de temas que constituem o pensamento proporcional.

Porém, como sabemos, estas coleções diferem muito pouco em sua estrutura, uma vez que sua aprovação demanda certa padronização. Com isso em mente, faremos a análise de um único livro que expressa, a nosso ver, a proposta de todos eles. A escolha está diretamente ligada com sua adoção na escola em que trabalhei, juntamente com a existência de tópicos importantes para a análise desta pesquisa.

Na coleção de quatro volumes intitulado *Panoramas: Matemática (2019)*, o autor Joamir Roberto de Souza inicia os temas que discutem o pensamento proporcional no 7º ano. Na unidade 6, denominada “Proporcionalidade e Simetria”, a seção sobre proporcionalidade aborda os seguintes tópicos, descritos no sumário:

I. Razão
II. Proporção
III. Relação entre grandezas

A “discussão” sobre o primeiro item inicia a partir da observação sobre a escala de um mapa. Observe:

---

[3] Termo apresentado por Baldino (1995).

Figura 1- Introduzindo a noção de razão.

Fonte: Souza, J. R., 2019, p. 164.

Na sequência, uma explicação é apresentada:

Figura 2- Razão como escala

Podemos dizer que esse mapa foi produzido na **razão** de 1 cm para 7 000 000 cm, o que pode ser representado por **1 : 7 000 000** ou $\frac{1}{7\,000\,000}$.

Para calcular a distância real aproximada em linha reta entre Londrina e Curitiba, que no mapa é de cerca de 4,3 cm, podemos usar como base essa escala. Nesse caso, temos:

4,3 · 7 000 000 = 30 100 000, ou seja, 30 100 000 cm.

Convertendo essa distância em quilômetros, temos:

30 100 000 : 100 000 = 301, ou seja, 301 km.

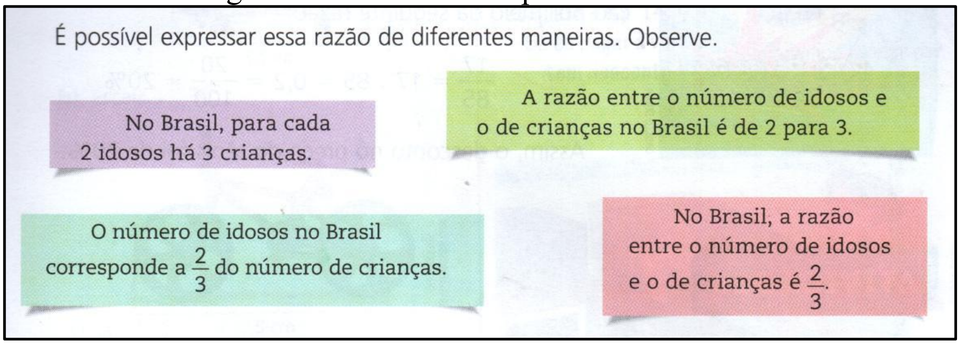
Assim, a distância aproximada em linha reta entre Londrina e Curitiba é de 301 km.

Fonte: Souza, J. R., 2019, p. 164.

Observe que, no primeiro exemplo, o autor antecipa a resolução para um possível questionamento: como calcular a distância em linha reta entre duas cidades localizadas no mapa?. Dessa forma, o aluno não é instigado a refletir sobre o problema ou a elaborar uma resposta, sendo o objetivo aparente a mera reprodução do que foi exposto.

Logo depois, através de uma notícia, temos as diferentes maneiras de representar uma fração. Veja:

Figura 3- Maneiras de expressar uma razão.



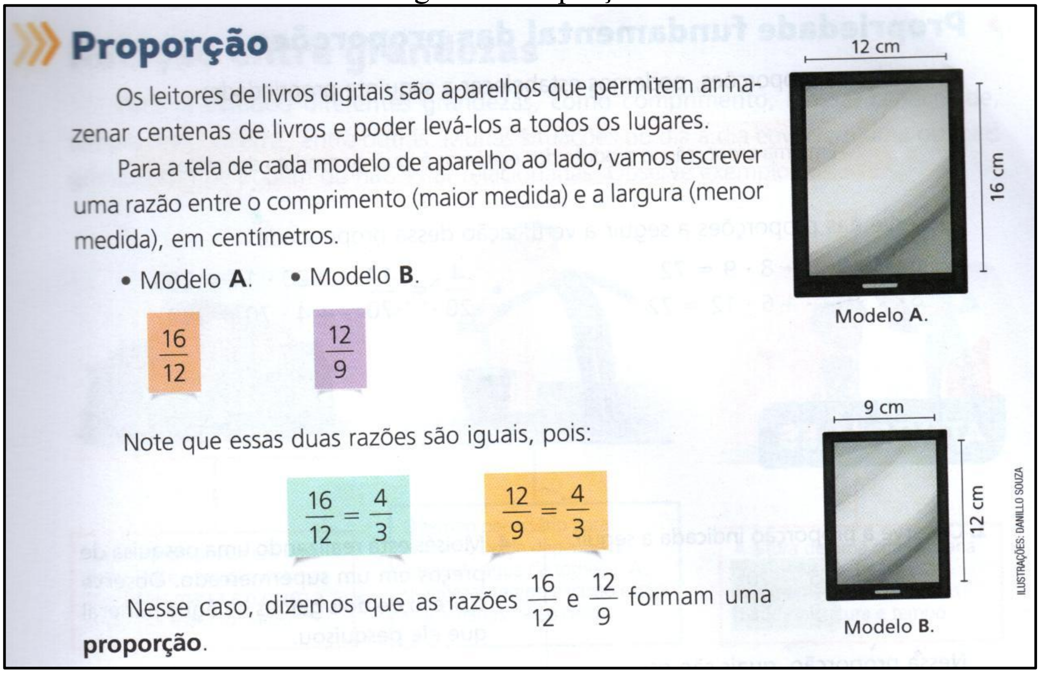
Fonte: Souza, J. R., 2019, p. 165.

Seguido disso, a seguinte definição de razão é apresentada: "Considere dois números **x** e **y**, com y ≠ 0. A **razão** entre esses dois números, nessa ordem, corresponde ao quociente **x: y**, que também pode ser indicado por $\frac{x}{y}$." (Souza, 2019, p.165, grifos do autor)

Podemos questionar sobre o objetivo do autor ao definir a razão como um quociente. Ao efetuar esse quociente, que informação obtemos? Além disso, podemos obter o quociente em qualquer razão, inclusive em uma que representa parte-parte? O que esse resultado nos informaria? Através desses questionamentos, nota-se que a definição apresentada mais se aproxima de número racional do que da real noção de razão.

O livro segue com um tópico - que não chega a ocupar uma folha - sobre "Porcentagem e razão". O autor parece demonstrar que, dois exemplos resolvidos por ele, parecem ser suficientes para deixar claro a relação entre razão e proporção. Logo após, 10 atividades são propostas aos alunos. Ao iniciar a parte de proporção, o livro apresenta uma comparação entre as medidas de duas telas digitais:

Figura 4- Proporção.



Proporção

Os leitores de livros digitais são aparelhos que permitem armazenar centenas de livros e poder levá-los a todos os lugares.

Para a tela de cada modelo de aparelho ao lado, vamos escrever uma razão entre o comprimento (maior medida) e a largura (menor medida), em centímetros.

- Modelo **A**. $\frac{16}{12}$
- Modelo **B**. $\frac{12}{9}$

Note que essas duas razões são iguais, pois:

$\frac{16}{12} = \frac{4}{3}$ $\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

Nesse caso, dizemos que as razões $\frac{16}{12}$ e $\frac{12}{9}$ formam uma **proporção**.

Fonte: Souza, J. R., 2019, p. 169.

Na sequência, temos a seguinte definição:

> Quando a razão entre os números **a** e **b**, nessa ordem, e a razão **c** e **d**, nessa ordem, são iguais, elas formam uma proporção. Nesse caso, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ é uma **proporção** que pode ser lida da seguinte maneira: **a** está para **b** assim como **c** está para **d**.
>
> Dizemos que os números **a**, **b**, **c**, e **d** são os termos da proporção. Além disso, os números **a** e **d** (primeiro e último termos) são os extremos da proporção. Já os números **b** e **c** (segundo e terceiro termos) são os **meios** da proporção. (Souza, 2019, p.169, grifos do autor)

Através dessa descrição e da apresentação exibida anteriormente, podemos perceber que o autor, mais uma vez, se preocupa mais com os termos matemáticos, do que com a noção de proporção.

Schliemann e Carraher (1997) comentam sobre essa abordagem:

> É, portanto, desaconselhável ensinar os conceitos como se fossem redutíveis a cadeias de símbolos desprovidos de significado. É igualmente irreal esperar que o significado dos conceitos possa ser descoberto através do estudo das representações formais de razão e proporção. Acontece com frequência, no ensino da Matemática, que os alunos aprendem a manipular representações simbólicas sem compreensão. (Schliemann; Carraher, 1997, p.16)

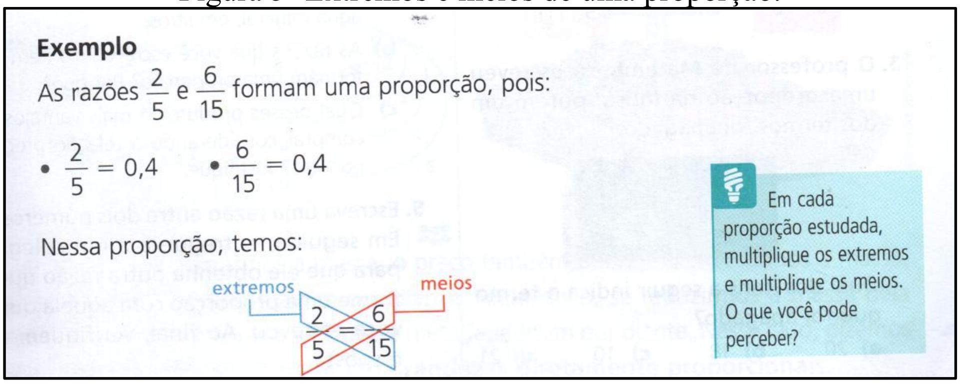
Nesse sentido, os autores acrescentam que “o ponto de partida para a compreensão de razões e proporções são os diversos contextos ou situações da vida em que várias quantidades físicas estão em proporção direta com outras quantidades” (Schliemann; Carraher, 1997, p.16), uma vez que muitos aspectos do nosso mundo funcionam de acordo com regras de proporcionalidade, fazendo com que a faculdade de raciocinar com proporções seja extremamente útil na interpretação dos fenômenos do mundo real (Post; Beher; Lesh, 1995, p.90).

Essa representação simbólica de razão e proporção pode vir a se confundir com a noção de fração, uma vez que os alunos já possuíram contato com esse conteúdo no início do Ensino Fundamental I. Isso pode levá-los a interpretar primariamente a forma fracionária como uma relação parte-todo.

O exemplo que compara a razão entre o comprimento e a largura das telas se parece mais com uma tarefa de frações equivalentes - buscando a irredutível - do que com uma de proporção. Note que os alunos não são levados a pensar no que é apresentado, já que a resolução logo se faz presente. Esse ponto evidencia um dos diferenciais da presente pesquisa: evitar a exposição de definições formais antes que os alunos tenham a oportunidade de explorar e construir conceitos por si mesmos.

Depois da definição, é lançado um exemplo:

Figura 5- Extremos e meios de uma proporção.



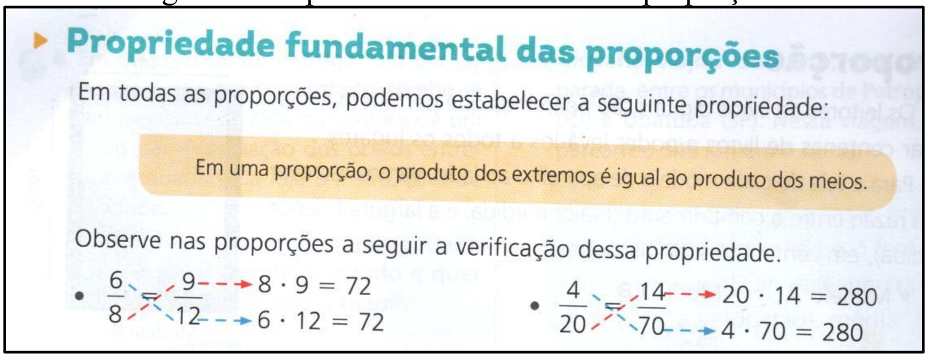
Fonte: Souza, J. R., 2019, p. 169.

Note que é apresentada uma razão apenas entre números, e não grandezas. Com isso, a representação em forma de fração confunde-se com esse tema e os números racionais (valor encontrado). Surge, por exemplo, a questão sobre o que o valor 0,4 representa no contexto da proporção, um questionamento para o qual o material didático não oferece resposta.

Mesmo com a relação entre porcentagem e razão sendo feita um pouco antes, é preciso considerar que não faz sentido falar de porcentagens em razões parte-parte. Com isso, vemos mais uma vez, que o livro não está interessado em desenvolver o pensamento proporcional, mas na capacitação dos alunos para operar matematicamente os números postos em forma de fração.

Essa visão se intensifica na pergunta que está à direita (Ver Figura 5). Através dela, podemos nos questionar mais uma vez: o que essa multiplicação quer dizer sobre a proporção? Por que ela é importante? Para o autor, a importância está na propriedade que é apresentada logo a seguir:

Figura 6- Propriedade fundamental das proporções.



Propriedade fundamental das proporções

Em todas as proporções, podemos estabelecer a seguinte propriedade:

Em uma proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Observe nas proporções a seguir a verificação dessa propriedade.

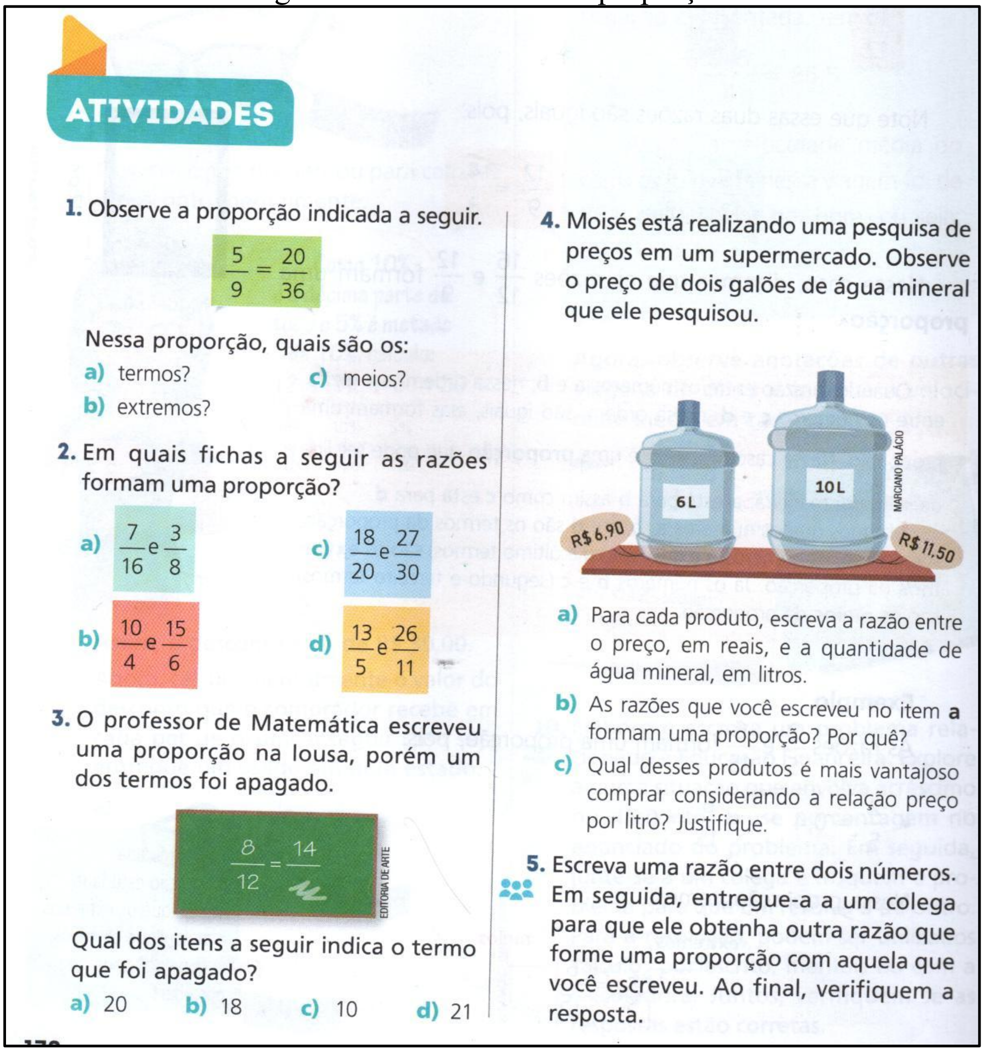
- $\frac{6}{8} = \frac{9}{12}$ → $8 \cdot 9 = 72$; → $6 \cdot 12 = 72$
- $\frac{4}{20} = \frac{14}{70}$ → $20 \cdot 14 = 280$; → $4 \cdot 70 = 280$

Fonte: Souza, J. R., 2019, p. 170.

Mais uma vez, encontramos apenas manipulações algébricas, deixando as grandezas e o pensamento proporcional de lado.

Essa estrutura se repete nas atividades propostas:

Figura 7- Atividades sobre proporção.



ATIVIDADES

1. Observe a proporção indicada a seguir.

$$\frac{5}{9} = \frac{20}{36}$$

Nessa proporção, quais são os:

a) termos?

b) extremos?

c) meios?

2. Em quais fichas a seguir as razões formam uma proporção?

a) $\frac{7}{16}$ e $\frac{3}{8}$

b) $\frac{10}{4}$ e $\frac{15}{6}$

c) $\frac{18}{20}$ e $\frac{27}{30}$

d) $\frac{13}{5}$ e $\frac{26}{11}$

3. O professor de Matemática escreveu uma proporção na lousa, porém um dos termos foi apagado.

$$\frac{8}{12} = \frac{14}{\ }$$

Qual dos itens a seguir indica o termo que foi apagado?

a) 20 b) 18 c) 10 d) 21

4. Moisés está realizando uma pesquisa de preços em um supermercado. Observe o preço de dois galões de água mineral que ele pesquisou.

a) Para cada produto, escreva a razão entre o preço, em reais, e a quantidade de água mineral, em litros.

b) As razões que você escreveu no item **a** formam uma proporção? Por quê?

c) Qual desses produtos é mais vantajoso comprar considerando a relação preço por litro? Justifique.

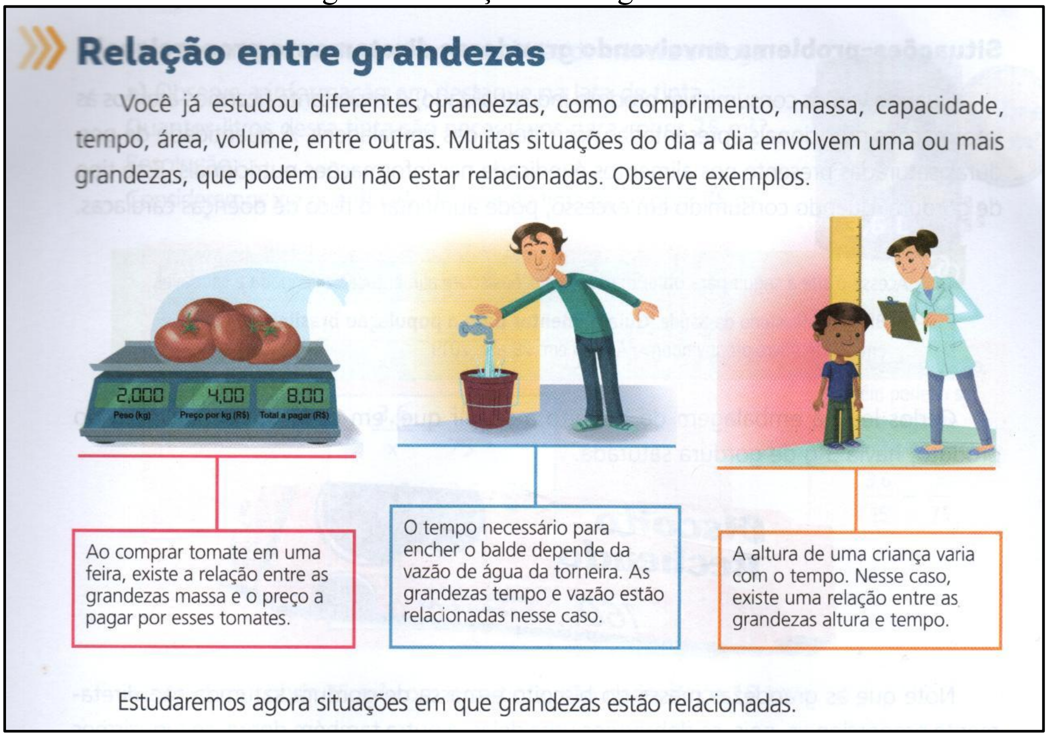
5. Escreva uma razão entre dois números. Em seguida, entregue-a a um colega para que ele obtenha outra razão que forme uma proporção com aquela que você escreveu. Ao final, verifiquem a resposta.

Fonte: Souza, J. R., 2019, p. 170.

Da análise das cinco questões, apenas a quarta envolve grandezas. A letra "c" desta questão traz um importante questionamento, que pode gerar dúvida nos alunos, uma vez que até agora só trabalhamos com números de nada. Observa-se também que as outras tarefas poderiam facilmente, mais uma vez, fazerem parte de uma unidade sobre frações equivalentes.

O próximo tópico - grandezas diretamente e inversamente proporcionais - se desenvolve da mesma forma que os outros apresentados anteriormente. Um fato curioso que aparece nesse item, está no terceiro exemplo apresentado abaixo:

Figura 8- Relações entre grandezas.



Fonte: Souza, J. R., 2019, p. 171.

Esses três exemplos são seguidos de duas subseções: grandezas diretamente proporcionais (o exemplo do tomate) e grandezas inversamente proporcionais (o exemplo da vazão da torneira). Posto isso e as atividades subsequentes, logo se inicia a noção de simetria. Com isso, o último exemplo que abordava a relação entre a altura e a idade de uma criança é descartado. Desperdiça-se, assim, uma valiosa oportunidade de aprofundar o raciocínio dos alunos por meio do contraste entre relações proporcionais e não proporcionais.

Toda essa parte da unidade é desenvolvida em 18 páginas seguindo a mesma estrutura. Fora a unidade 6, o autor não volta aos assuntos acima, de modo a aprofundá-los ou rediscuti-los em outras unidades e nem nos livros dos anos seguintes. Com isso, a oportunidade de aprender essas noções fica restrita a este momento. Ao final da unidade, o autor considera que a ideia de proporcionalidade está entendida pelos estudantes e dá-se como sabido estas noções. O professor que segue esta proposta também se conforma com a estrutura vigente e reproduz este tipo de ensino, uma vez que pode ser a única ferramenta à sua disposição em um cenário marcado pela falta de tempo que muitos professores sofrem atualmente.

Mesmo a análise sendo realizada em apenas um livro didático, podemos dizer que esse modelo se assemelha com grande parte dos outros materiais que estão nas escolas e nas salas de aula, não só para o ensino de razão e proporção, mas também para os mais diversos conteúdos.

3 REVISÃO DA LITERATURA

O presente capítulo apresenta algumas pesquisas desenvolvidas sobre o ensino de proporção, a fim de obter informações relevantes para o desenvolvimento do nosso trabalho. No entanto, nossa busca não será aleatória, partiremos de algumas tomadas de decisão de cunho metodológico que são assim descritas:

(i) Nossa busca será desenvolvida considerando nosso referencial teórico – o Modelo dos Campos Semânticos e a sua relação com a Teoria Histórico-Cultural.

(ii) Não delimitamos um período específico para a busca de pesquisas desenvolvidas sobre o tema de interesse;

(iii) Focamos nosso interesse em dissertações e teses das áreas de Educação Matemática, tanto em programas profissionais da área de Ensino, quanto acadêmicos; e também em livros em que identificamos como sendo resultados de pesquisas sobre o tema, incluindo alguns ligados a Psicologia Cognitiva;

(iv) Nosso interesse estava na discussão do pensamento proporcional no que ele tem de "interseção" com o pensamento aritmético. Com isto, queremos sugerir que embora o pensamento proporcional também encontre sua interseção com o pensamento geométrico e estatístico, por exemplo, tais interfaces não farão parte de nosso interesse de investigação.

(v) As palavras-chave para a nossa busca foram: "ensino e aprendizagem", "proporção" e "matemática escolar no ensino fundamental".

Dada a natureza do nosso projeto, que envolve pesquisa e desenvolvimento de um produto educacional, a busca incluiu não só pesquisas que nos apresente informações teóricas, mas também a proposição de sequências didáticas que pudessem nos orientar na produção de novas tarefas para a sala de aula.

Tais buscas foram realizadas em alguns repositórios e revistas: Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), Periódicos da CAPES, Comunidade Acadêmica Federal (CAFe), Boletim GEPEM, ZETETIKÉ, Bolema, Scielo e Repositório de Dissertações UFJF.

Como resultado desse procedimento de pesquisa, não foram encontrados trabalhos que se alinhassem com nossos pressupostos teóricos. Embora existam diversas teses, dissertações e pesquisas sobre o objeto proporção, observou-se que as análises e propostas, em geral, pouco ou nada se diferem das apresentadas atualmente.

Sendo assim, apresentaremos abaixo uma tabela com os trabalhos sobre o pensamento proporcional que estão sendo desenvolvidos em conjunto no Grupo de Pesquisa NIDEEM.

Tabela 1- Desenvolvimento do Pensamento Proporcional

Etapa	Ano Escolar	Título	Pesquisador	Situação
Ensino Fundamental	1º ao 5º ano	Pensamento Proporcional nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental	Letícia Freitas Fernandes	Concluído
	6º ano	Pensamento Proporcional na Matemática Escolar: o Ensino da Noção de Razão	Kaio Cruz e Silva	Concluído
	7º ano	Pensamento Proporcional na Matemática Escolar: o Ensino da Noção de Taxa	Maria Eduarda Alvim Pedrosa	Concluído
	8º ano	Pensamento Proporcional na Matemática Escolar: o Ensino da Noção de Proporção	Taynara Schincariol Alves	Concluído
	9º ano	Pensamento Proporcional na Matemática Escolar: o Ensino da Noção de Grandezas Diretamente e Inversamente Proporcionais	Sinai Elizabeth Ferreira dos Santos	Concluído

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como vimos anteriormente, a ideia de proporção é lançada aos alunos através de definições e fórmulas que para eles, nesse momento inicial, não fazem sentido. Mesmo tendo apresentado aqui apenas um desses modelos, pensa-se que o modelo pedagógico ali presente é representativo de uma abordagem amplamente difundida em outras obras. Tal contatação levanta a hipótese de que essa metodologia de ensino possa ser um dos fatores que contribuem para a dificuldade do pensamento proporcional em adultos, uma problemática já apresentada por Lamon (2012) no contexto estadunidense.

Levando em consideração que alguns aspectos do nosso mundo funcionam de acordo com as regras de proporcionalidade, podemos pensar nesses aspectos como ponto de partida para a compreensão dessas noções. Um exemplo disso é a relação com o dinheiro. Por mais que esse uso se dê, na maioria das vezes, com os adultos, as crianças, já possuem conhecimento do valor de alguns produtos e quanto precisam para adquirir o que desejam, sendo este um tema trabalhado tanto no ambiente escolar quanto familiar. Schliemann e Carraher (1997) apresentam esse uso com o desenvolvimento do pensamento proporcional:

> Os cálculos para determinar a quantidade de dinheiro necessária para adquirir uma certa quantidade de itens parecem constituir uma boa oportunidade para o desenvolvimento da compreensão adequada das relações proporcionais diretas. Mesmo crianças não vendedoras, desde muito pequenas, lidam com moedas e preços de produtos como bombons ou figurinhas e podem começar a resolver problemas de proporcionalidade sem qualquer instrução escolar. (Schliemann; Carraher, 1997, p.21)

Essas observações servem para ficarmos atentos em como a proporção está presente no nosso dia a dia e a forma como o tema é frequentemente apresentado aos alunos através de fórmulas, juntamente com problemas desconexos de uma realidade tão rica nessa noção.

Quando trabalhamos com a ideia de dinheiro, por exemplo, é difícil pensarmos em uma relação que não seja multiplicativa, principalmente quando estamos no universo das compras. Sendo assim, outros contextos devem ser apresentados aos alunos para que eles possam identificar e diferenciar as situações proporcionais das aditivas (não proporcionais).

Schliemann e Carraher (1997) analisaram uma investigação de Magalhães (1990), realizada com 60 cozinheiras que faziam parte de um curso de alfabetização de adultos. Nessa pesquisa, ao resolverem problemas de proporcionalidade em diferentes contextos: receitas de cozinha, compra e venda de mercadorias e de fórmulas de medicamentos, concluíram que:

> O estudo de Magalhães (1990) mostra como a compreensão que o indivíduo desenvolve sobre a proporcionalidade não se transfere imediatamente para outros conteúdos, principalmente se esses são desconhecidos. Mas, na escola tradicional, o que vemos é uma crença implícita na transferência automática dos modelos matemáticos para todo e qualquer conteúdo, sem que se dê oportunidade à criança para discutir a adequação de um determinado modelo

> ou procedimento a determinado tipo de dados. Estes resultados mostram a importância do contexto específico ao qual o raciocínio parece inicialmente desenvolver-se em uma gama limitada de contextos e conteúdos. Entretanto, dadas condições adequadas, a similaridade entre as relações pode ser detectada, servindo então de ponte para a transferência dos procedimentos de resolução para outros contextos. Parece-nos imprescindível então que, na escola, sejam discutidas as relações entre variáveis em diferentes contextos para que a criança descubra se se tratam de variáveis proporcionalmente relacionadas ou não" (Schliemann; Carraher, 1997, p.24)

Nesse contexto, vemos a importância de apresentarmos ao aluno uma "boa-tarefa", termo utilizado por Silva (2022) para tarefas que são familiares - onde seja possível falar sobre ela - e não-usuais - demandando certo esforço cognitivo para sua resolução. Sendo assim, é necessário compreendermos que o contexto apresentado ao aluno é muito importante em uma abordagem que visa transcender a mera aplicação de fórmulas e as famosas setas que vão para cima e para baixo no ensino de proporção.

Sobre o ensino através de regras e mecanismos de reprodução, Schliemann e Carraher (1997) comentam:

> "As práticas pedagógicas tradicionais são prejudiciais à aprendizagem pois transmitem aos alunos a falsa impressão de que a matemática consiste em uma série de receitinhas a serem cegamente seguidas. Nas aulas mais tradicionais não há lugar para interpretar, para discutir representações alternativas, para explorar significados. Se o aluno está acertando os problemas, pouco importa se ele está entendendo. Se ele está errando, manda que ele pratique mais até acertar." (Schliemann; Carraher, 1997, p.34)

E continuam:

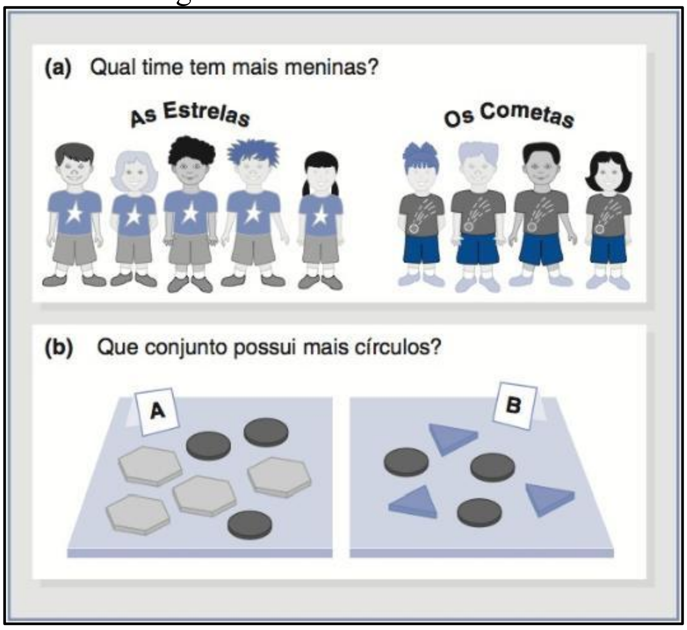
> "Em nome da continuidade e flexibilidade, é necessário admitir e discutir maneiras alternativas para representar e resolver os problemas. Vimos, por exemplo, que muitos alunos tendem a resolver problemas de razão e proporção escalarmente, inclusive com estratégias que substituem a multiplicação pela adição, ou até por uma mistura de adição e multiplicação. Se estas estratégias são significativas para os alunos, elas precisam ser discutidas, porque o ensino precisa apelar para a compreensão e reflexão do aluno sempre e onde for possível. O conhecimento atual do aluno não está completo e acabado, mas certamente constitui o ponto de partida para sua aprendizagem." (Schliemann; Carraher, 1997, p.35)

Esse é um grande problema que os professores vêm enfrentando na sala de aula. A obrigatoriedade do cumprimento de um absurdo número de conteúdos faz com que os alunos não tenham tempo para discutirem e produzirem seus próprios significados. Como consequência, a aprendizagem fica restrita apenas ao que lhe é apresentado pelo professor. Por sua vez, o docente, sob a pressão de atender às demandas curriculares, frequentemente recorre a abordagens de ensino mais tradicionais.

O pesquisador Van de Walle (2009, p.386) apresenta algumas tarefas, denominadas por ele como tarefas informais. O autor justifica a importância dessas atividades ao afirmar que "não são diretamente planejadas para produzir habilidades ou procedimentos algorítmicos". Porém, é essencial que os estudantes dediquem um tempo amplo a essas atividades ou semelhantes para desenvolver corretamente o raciocínio proporcional."

Observe um exemplo dessas tarefas:

Figura 9- Tarefas "informais".



Fonte: Van de Walle, J. A., 2009, p.386.

O estudante, quando apresentado a essa tarefa, produzirá seus mais diversos significados. Espera-se que, dentre eles, surjam análises de natureza aditiva ou multiplicativa, tudo isso sem que seja necessário apresentar essas relações para ele. Por esse motivo, Van de Walle (2009) apresenta a tarefa como "ambígua":

> As situações podem ser interpretadas ou aditivamente ou multiplicativamente. A ambiguidade é a chave: Se os alunos reconhecem e compreendem a diferença entre a abordagem aditiva e a multiplicativa, essa é uma indicação de raciocínio proporcional. [...] ambas as interpretações são corretas. Você está procurando por uma *consciência* [dos estudantes] de que existe um modo

> diferente de considerar a situação. (Van de Walle, 2009, p. 386, grifos do autor)

Essa noção de "ambiguidade" nada mais é do que as diferentes produções de significados que o leitor poderá produzir. Nesse sentido, Lins e Gimenez (1997, p.52) falam da importância desse tipo de tarefa: "Independentemente da forma de raciocínio utilizada, é evidente que o pensamento se põe em movimento perante perguntas, com o que o trabalho escolar se torna efetivo e gera raciocínio quanto mais abertas elas forem.".

Vejamos outra tarefa:

Figura 10- Tarefas "informais" - Perda de peso.

Atividade 19.2

Perda de peso

Mostre os dados aos alunos no seguinte quadro (em libras*):

Semana	Max	Moe	Minnie
0	210	158	113
2	202	154	108
4	196	150	105

Max, Moe e Minnie estão de regime e registraram seu peso no começo de sua dieta e em intervalos de duas semanas. Após quatro semanas, qual pessoa teve mais sucesso na dieta?

A tarefa é elaborar três argumentos diferentes – um que favoreça cada um deles.

Fonte: Van de Walle, J. A., 2009, p.387.

Observe que a forma como a tarefa é apresentada aos alunos faz com que venha a acontecer uma vasta discussão sobre o assunto, já que eles são levados a considerar diferentes argumentos para o sucesso na dieta - quem perdeu a mais peso (aditivamente ou proporcionalmente) e até mesmo quem teve mais constância.

Tarefas dessa natureza evidenciam a importância das diferentes produções de significados discutidas na sala de aula, rompendo com a ideia de que quando estamos estudando a noção de proporção, precisamos resolver exercícios que envolvem situações proporcionais. Sendo assim, enfatizamos, novamente, a importância de desenvolver nos alunos a habilidade de diferenciar esses distintos tipos de situações.

No próximo capítulo, apresentaremos as bases do referencial teórico que sustenta e fundamenta a atual pesquisa. A partir dele, compreenderemos alguns aspectos importantes para este trabalho.

4 REFERENCIAL TEÓRICO

O presente capítulo divide-se em duas seções nas quais apresentaremos os nossos posicionamentos teóricos. A primeira seção dedica-se ao Modelo dos Campos Semânticos, que será a nossa base teórica e metodológica. É pautada nas noções do MCS que toda essa pesquisa é desenvolvida.

A segunda seção apresenta nosso problema da pesquisa e o produto educacional a ele associado.

4.1 O MODELO DOS CAMPOS SEMÂNTICOS

A presente pesquisa fundamenta-se no Modelo dos Campos Semânticos (MCS), referencial teórico produzido pelo educador matemático brasileiro Romulo Campos Lins (1955-2017) e que compartilha ideias com outros pesquisadores, como os psicólogos russos Lev Semionovitch Vigotski e Aleksei Nikolaievitch Leontiev.

O MCS é caracterizado como um modelo epistemológico que possibilita aos professores pesquisadores compreenderem a partir de que lugar seus alunos estão falando, para assim poder auxiliá-los em seu processo de aprendizagem.

Para Lins (1993, p.77), “Epistemologia é a atividade humana que estuda as seguintes questões: (i) o que é conhecimento?; (ii) como é que o conhecimento é produzido?; e (iii) como é que conhecemos o que conhecemos?” Sendo assim, para o autor, ao buscarmos responder essas questões estamos tomando posições epistemológicas.

Não atendendo aos pressupostos do Modelo dos Campos Semânticos, as concepções de conhecimento provenientes da Epistemologia foram descartadas pelo autor, que propôs uma nova caracterização:

> Conhecimento é entendido como uma crença - algo que o sujeito acredita e expressa, e que caracteriza-se, portanto, como uma afirmação - junto com o que o sujeito considera ser uma justificação para sua crença-afirmação. (Lins, 1993, p.86).

Dessa forma, podemos dizer que os três aspectos chave para conhecimento, segundo o MCS, são: a crença, a afirmação e a justificação. Lins os esclarece da seguinte forma:

> Primeiro, a pessoa deve acreditar em algo para constituir parte de um conhecimento que ela/ele produz, e isso implica que ela/ele está ciente de

> manter essa crença. Segundo, a única maneira de termos certeza dessa conscientização é se a pessoa afirma, e aqui estou usando o termo 'afirma' livremente, significando alguma forma de comunicação aceita por um interlocutor; não precisa ser de forma linguística. Terceiro, não é suficiente considerar o que a pessoa acredita e afirma, pois diferentes justificações com a mesma crença-afirmação correspondem a conhecimentos diferentes. Além disso, as justificativas estão relacionadas ao que pode ser feito com os objetos que um conhecimento tem a ver; no caso da criança dizer que '2+ 3 = 5', por exemplo, '2 + 3' é o mesmo que '3 + 2', uma vez que o arranjo dos dedos não faz diferença. Do ponto de vista de uma justificativa baseada na teoria dos conjuntos, arranjos espaciais não têm nada a ver com '2' e '3' ou com sua adição. As justificações, portanto, desempenham um papel duplo em relação ao conhecimento. Primeiro, eles estão realmente relacionados à concessão do direito de conhecer, e essa concessão é sempre feita por um interlocutor para quem esse conhecimento está sendo enunciado. Segundo eles estão relacionados à constituição de objetos. (Lins, 2001, p.42)

Sendo assim, Lins (2001) considera que a produção de conhecimento ocorre quando um sujeito possui uma crença, a expressa em uma afirmação e apresenta uma justificação que, a seu ver, o autoriza a enunciá-la.

Um outro termo que tem papel central na teorização do Modelo dos Campos Semânticos é significado. Para Lins (2012, p.28) “Significado de um objeto é aquilo que efetivamente se diz a respeito de um objeto, no interior de uma atividade. Objeto é aquilo para que se produz significado.”. Uma importante consideração sobre a noção de significado:

> [...] produzir significados não se refere a tudo o que o sujeito poderia ou deveria dizer de um objeto numa dada situação e, sim, o que ele efetivamente diz sobre aquele objeto no interior daquela atividade. Assim, os objetos são constituídos enquanto tais a partir do que o sujeito diz que eles são. (Lins, 1996 apud Silva, 2022, p.90)

Ressalta-se ainda que, ao se referir à atividade, Lins (2001) adota a concepção de Aleksei Nikolaievitch Leontiev. Nessa caracterização, Silva (2022), resume a noção atividade, no sentido proposto por Leontiev, como:

> [...] um processo psicológico consciente do sujeito e, portanto, é uma atividade interna em que as seguintes condições devem ser satisfeitas:
> (i) Surge de uma necessidade.
> (ii) Existe por parte do sujeito, um objetivo preciso que o estimula a executar a atividade para satisfazer uma necessidade determinada, denominada o motivo da atividade.
> (iii) Existe, para o sujeito, uma direção concreta determinada, um fim; denominado o objeto da atividade.
> (iv) Motivo e fim devem coincidir na atividade. (Silva, 2022, p.77)

À vista disso, sempre que houver menções ao termo "atividade", estaremos falando da caracterização apresentada acima.

A noção de comunicação também ocupa importante e central papel no Modelo dos Campos Semânticos. Ao ser introduzida a questão "é possível a comunicação no sentido da transmissão de uma mensagem de uma pessoa para outra?", a resposta é apresentada por Lins (2002) a partir da sua construção do processo comunicativo, o qual possui três elementos constitutivos: autor, texto e leitor. Silva (2022) esclarece esses componentes:

> O autor é aquele que, no processo, produz a enunciação: um professor em uma aula expositivo-explicativa, um artista plástico expondo seus trabalhos ou um escritor apresentando sua obra. O leitor é aquele que, no processo, se propõe a produzir significados para o resíduo das enunciações como, por exemplo, o aluno que, assistindo a uma aula expositiva e explicativa, busca entender o que o professor diz; um crítico de arte, que analisa a obra de um artista plástico; ou uma pessoa que, lendo um romance, busca entender a história do autor. Já o texto, é entendido como qualquer resíduo de enunciação para o qual o leitor produza algum significado. (Silva, 2022, p.93)

Para nós, tudo que é colocado na sociedade pelo humano vem como resíduo de enunciação. Este, por sua vez, pode ser transformado em texto pelo leitor quando produz significado para aquele resíduo.

Para Lins (2001, p.59), o texto não precisa necessariamente ser um texto escrito, ele pode ser sons, diagramas, desenhos, gestos e qualquer tipo de sinal corporal; "O que faz do texto o que ele é, é a crença do leitor de que ele é". Sendo assim, "dizemos que textos não possuem essências; e portanto, não há o que muitos chamam de interpretações para um texto - há, sim, diferentes significados produzidos para um mesmo resíduo de enunciação" (Oliveira, 2002 apud Silva, 2022, p.94).

Ao olhar o processo comunicativo pela perspectiva do autor, temos:

> Quando o autor fala, ele sempre fala para alguém. Porém, por mais que um autor esteja diante de uma plateia, este alguém não corresponde a indivíduos, pessoas nessa plateia e, sim, ao leitor que o autor constitui: é para este 'um leitor' que 'o autor' fala. (Lins, 1999, p.81)

Esse "um leitor" é chamado por Lins (1999) de interlocutor, não como sendo uma pessoa, mas uma direção na qual o autor fala. "Quando falo na direção de um interlocutor é porque acredito que este interlocutor diria o que estou dizendo e aceitaria/adotaria a justificação que me autoriza a dizer o que estou dizendo." (Lins, 2012, p.19).

Sendo assim, nesse processo, não ocorre a transmissão de uma mensagem; o que acontece para que entendamos aos outros é dado por Lins (1999):

> A convergência se estabelece apenas na medida em que [autor e leitor] compartilham interlocutores, na medida em que dizem coisas que o outro diria e com autoridade que o outro aceita. É isto que estabelece um espaço comunicativo: não é necessário a transmissão para que se evite a divergência. Lins (1999, p.82)

Nesse sentido, o autor observa a alteração na noção da comunicação tradicional e apresenta através do modelo:

> No MCS a noção de comunicação é substituída pela noção de espaço comunicativo, que é um processo de interação no qual (dizer isto no MCS é redundante) interlocutores são compartilhados. Numa inversão conceitual, "comunicação" não corresponde mais a algo do tipo "duas pessoas falando uma para outra" e sim a "dois sujeitos cognitivos falando da direção de um mesmo interlocutor". (Lins, 2012, p.24)

Seguindo a apresentação do Modelo dos Campos Semânticos, finalmente chegamos à noção de Campo Semântico - nossa unidade de análise - que é "um processo de produção de significado, em relação a um núcleo, no interior de uma atividade" (Lins, 2012, p.17). Sendo um processo, o Campo Semântico também não é estático.

> O fato de que houve e há muitas pessoas que ao entrarem em contato com o modelo, em particular com a noção de campo semântico, o concebem de forma estática, como se fosse um "campo" cheio de coisas, "na cabeça" da pessoa, e que quando ela for resolver um problema pode "chamar", "invocar", são, eu penso, um sintoma importante de uma inclinação forte do senso comum para se fundar em noções realidades objetivas e de essências. Ou, posto de outro modo, de uma resistência do senso comum a toda forma de relativismo que não seja pálido, que não seja apenas uma referência a "aparências" a "interpretações" ou a idiossincrasias, mas sempre com referência direta ou indireta a alguma essência da qual elas são aparências, interpretações ou particularidades mais ou menos relevantes. (Lins, 2002 apud Silva, 2022, p.105)

Através de todas as principais noções apresentadas acima e também de outras que compõem o Modelo dos Campos Semânticos, é que essa pesquisa será desenvolvida.

4.2 O PROBLEMA DE PESQUISA

O objetivo central desta pesquisa é investigar a produção de tarefas, fundamentadas teoricamente pelo Modelo dos Campos Semânticos, para o ensino de proporção no Ensino Fundamental II, com o objetivo de estimular e potencializar o desenvolvimento do pensamento proporcional.

Este conjunto de tarefas, junto com as tarefas produzidas pelos outros membros do grupo, irá compor o pensamento proporcional no currículo construído a partir de modos de pensar.

Dessa forma, a pesquisa caracteriza-se como um projeto de desenvolvimento, cujo produto educacional é uma sequência didática para o ensino de proporção no Ensino Fundamental.

5 METODOLOGIA DA PESQUISA

Este capítulo, dividido em duas seções, expõe a metodologia que norteou esta investigação. Posteriormente, há a apresentação de algumas tarefas desenvolvidas durante nossa pesquisa.

5.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

Esta pesquisa é de cunho qualitativo e, pautado em Bogdan e Biklen (2013), podemos classificar as pesquisas qualitativas como:

> 1) Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal. 2) A investigação qualitativa é descritiva. Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números. 3) Os investigadores interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos. 4) Os investigadores tendem a analisar os seus dados de forma indutiva. Não recolhem dados ou provas com o objetivo de confirmar ou infirmar hipóteses construídas previamente. 5) O significado é de importância vital na abordagem qualitativa. Os investigadores que fazem uso deste tipo de abordagem estão interessados no modo como diferentes pessoas dão sentido às suas vidas. (Bogdan & Biklen, 2013, p. 47-51).

Através da abordagem qualitativa, abandonamos a perspectiva quantitativa, uma vez que não é nosso foco saber a quantidade de pessoas ou de respostas que tivemos. Quando nos propomos a trabalhar com significados, nos interessa o que de fato ocorre com o indivíduo, seus gestos, justificativas e, por isso "tudo tem potencial para constituir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo" (Bogdan & Biklen, 2013, p. 49).

O Modelo dos Campos Semânticos, empregado como referencial teórico neste trabalho, é utilizado também como procedimento de análise da pesquisa, auxiliando o professor-pesquisador na sala de aula e na leitura de seus informantes.

A coleta de dados é uma parte importante, podendo ser feita por meio de um caderno de pesquisa, fotos, áudios e até vídeos. Este último pode trazer uma maior coleção de informações, uma vez que conseguiremos analisar também as expressões faciais dos alunos, além da possibilidade de coletar e observar novos elementos.

É significativo, nas análises através da perspectiva do Modelo dos Campos Semânticos, que os estudantes estejam interessados e dispostos a produzir significados para o problema proposto. Sendo assim, a introdução de uma atividade desencadeia um processo que, conforme Silva (2022), envolve as seguintes noções-categorias: a constituição de objetos; a constituição e a transformação de um núcleo; a produção de conhecimento; a fala na direção de um interlocutor; e as legitimidades. É através da produção de significados do estudante em conjunto com esses elementos - não existindo uma ordem nem sequência - que faremos o que Lins (1997) chama de análise/leitura epistemológica.

O termo "núcleo" é caracterizado por um conjunto de estipulações locais. Estas, por sua vez, são verdades absolutas, isto é, afirmações absolutamente válidas que - para a pessoa - não requerem, localmente, justificações. O termo "localmente" significa que estamos falando dentro de uma atividade, ou seja, pode haver situações em que aquela estipulação local necessite de uma justificação para ser dita.

Lins (1997) busca elucidar a noção de núcleo:

> Um núcleo pode ser constituído por um diagrama, por um desenho, por uma balança, por um conjunto de princípios (axiomas, por exemplo), por uma situação "realista" ou ficcional. O que importa é que em relação aos objetos do núcleo que vai ser produzido significado, seja para que texto for. Núcleos não se referem especificamente a 'conteúdos' ou 'áreas de conhecimento': em relação ao mesmo núcleo de balança de dois pratos, é possível produzir significado para uma equação, para a noção de justiça ou para fenômenos físicos diversos. (Lins, 1997, p.144)

É fundamental ter em mente que o núcleo é um "processo que se constitui no interior de uma atividade", não sendo algo estático. Sendo assim, um novo núcleo se constitui em uma nova atividade

Com a leitura da produção de significados, é possível identificar as dificuldades dos estudantes. No MCS a noção de "dificuldade" é teorizada a partir de: um limite epistemológico e um obstáculo epistemológico. No limite epistemológico o aluno fica impossibilitado e sem condições de produzir significado; isso pode se dar através da forma como ele opera naquele problema, sendo necessário fazer uma alteração nesse processo. Já o obstáculo epistemológico, é quando ele possui condições de produzir significados, mas não o faz. Silva (2022) deixa claro que

> [...] o limite epistemológico ou o obstáculo epistemológico para o aluno ou para o participante de uma pesquisa não existe, pois é algo que o professor/pesquisador observa de fora a partir do que é dito ou não pelo

> sujeito. Quando o sujeito não produz significado para um certo texto é o professor/pesquisador que está frente a um limite/obstáculo epistemológico. (Silva, 2022, p.136)

Existe também o que chamamos de “impermeabilização”, que descreve a situação na qual o aprendiz não muda sua maneira de operar. Tal fenômeno pode acontecer porque ele acredita na legitimidade do que diz ou por simplesmente não querer; o fator psicológico também pode vir a interferir.

Diante de todas as noções-categorias e as teorizações apresentadas, usamos as tarefas como instrumento para a demanda de produção de significados. Uma tarefa é “qualquer situação problema apresentada como demanda à produção de significados” (Silva, 2022), podendo ser um texto escrito, uma questão para discussão, um problema matemático.

Para o nosso objetivo, necessitamos de uma “boa” tarefa, a qual Silva (2022), apresenta da seguinte forma:

> Uma “boa” tarefa para a finalidade à qual se destina precisa ter potencialidade para que o pesquisador possa observar a maneira de operar dos sujeitos. Ela é um elemento mediador entre o pesquisador e o informante. De experiências anteriores de Lins e dos pesquisadores de seu grupo de pesquisa, duas características já foram identificadas como promissoras em uma tarefa para a observação da produção de significados de uma pessoa que se propõe a falar a partir daquele enunciado, quais sejam: ser familiar e não-usual. Familiar, no sentido de permitir que as pessoas falem a partir daquele texto, e não-usual, no sentido de que a pessoa tenha que desprender um certo esforço cognitivo na direção de resolvê-la. (Lins, 2022, p.137)

A partir disso, nossa pesquisa foi realizada com dois participantes voluntários, ambos de uma escola particular da cidade. Nesse momento foram realizadas as seguintes orientações metodológicas: dar voz aos participantes, estimular a produção de significados dos estudantes, desenvolver uma escuta ativa e realizar uma leitura plausível e/ou positiva. Por fim, em consonância com os preceitos do MCS, optou-se por “apresentar os participantes de uma pesquisa por nomes (na verdade, por seus pseudônimos), em vez de indicá-los por quaisquer outras notações.” (Silva, 2022, p.138). Tal procedimento se dá com objetivo de indicar que ali existe um sujeito.

5.2 O PROCESSO DE PRODUÇÃO DAS TAREFAS

Esta seção dedica-se a detalhar o processo de elaboração das tarefas que constituem este trabalho. Agora, conseguiremos ver melhor nossa proposta e o que a difere do ETV.

As tarefas, que versam sobre a noção de proporção, foram elaboradas pensando em aplicá-las numa turma do 8º ano do Ensino Fundamental II. O objetivo é dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento proporcional no Ensino Fundamental I, iniciado com a pesquisa de Fernandes (2024). A presente investigação se insere, portanto, em uma progressão que contempla a proposta de Cruz (2024), com a noção de razão, seguido de Schincariol (2024), sobre a noção de taxa e, posteriormente, a nossa proposta de tarefas noção de proporção, sendo complementado pela pesquisa de Santos (2024) – sobre grandezas diretamente e inversamente proporcionais – finalizando no 9º ano.

No conjunto destas pesquisas, nossa proposta diverge daquelas que constam nos livros didáticos, que iniciam a discussão do tema razão através de um exemplo introdutório, seguido de uma definição matemática. A partir dessa definição, os autores de livros didáticos apresentam uma lista variada de exercícios para treino e fixação das ideias. Em sentido contrário a essa perspectiva de ensino, nossa proposta parte de um conjunto de tarefas elaborado com o intuito de auxiliar no processo de produção de significados para razão. O foco reside na observação e reflexão dos alunos sobre as relações existentes entre as grandezas envolvidas, visando o desenvolvimento do pensamento proporcional.

O conjunto de tarefas foi desenvolvida em nosso grupo de pesquisa, NIDEEM, sob a coordenação do Prof. Dr. Amarildo Melchiades da Silva, cujas potencialidades foram avaliadas, em testes pilotos na disciplina “Pensamento Comparativo em Matemática”, com professores, mestrandos e doutorandos, antes de serem levadas para as entrevistas com estudantes.

As produções de significados que serão apresentadas nas tarefas abaixo são respostas que pensamos que possam vir a aparecer - servindo de auxílio para o professor -, não excluindo, de forma alguma, novos modos de operar.

Em nosso primeiro procedimento metodológico, na construção do conjunto de tarefas, optou-se por organizá-las em grupos com objetivos específicos, que discutiremos a seguir. O primeiro grupo, foi denominado “tarefas disparadoras”, no sentido de que se espera que elas iniciem o processo de produção de significados dos alunos para o que eles constituirão, no final, como o objeto proporção.

A primeira tarefa do **Grupo 1**, tem o seguinte enunciado:

Tarefa 1a

Um agricultor plantou uma muda de laranja e outra de pêssego. Duas semanas atrás foram medidas suas alturas, a laranjeira tinha 8 cm e o pessegueiro tinha 12 cm. Hoje a laranjeira está com 11 cm e o pessegueiro está com 15 cm de altura. Quem cresceu mais, a laranjeira ou o pessegueiro?

A tarefa foi adaptada de Van de Walle (2009, p.384) por possuir características muito importantes, relacionadas ao nosso interesse em observar a produção de significados dos alunos e identificar se estão operando de maneira "aditiva" ou "multiplicativa", sendo este último o que conduz ao pensamento proporcional.

Uma das características desta tarefa é que ela apresenta uma problemática aberta, que permite ao aluno iniciar o processo de comparar, correlacionar as grandezas envolvidas. Caso essa abordagem não surja espontaneamente, abre-se a possibilidade para que o professor introduza a discussão a ideia de covariação entre as grandezas. A segunda característica, que anunciamos anteriormente, é permitir ao professor e/ou pesquisador observar a maneira de operar e a lógica das operações utilizadas pelo aluno, nesse caso, se ele está operando segundo uma lógica aditiva ou multiplicativa.

Para esclarecer este ponto, vamos imaginar dois estudantes que apresentam as seguintes respostas quando apresentados à 1ª tarefa:

Nelson: Eu pensei assim, a duas semanas atrás a laranjeira tinha 8 cm e hoje ela tem 11 cm, então ela cresceu 3 cm. E o pessegueiro tinha 12 cm de altura e hoje tem 15 cm, então ele também cresceu 3 cm. Eu, então concluí que as duas árvores frutíferas cresceram o mesmo tanto: 3 cm.

Esta é uma resposta correta pois, de fato, as duas plantas cresceram 3 cm. A maneira de operar deste aluno, segundo o MCS, sugere que ele levou em consideração apenas o quanto cada planta cresceu, analisando separadamente cada uma. A operação consistiu em verificar quanto a planta cresceu em relação à sua altura original.

Van de Walle (2009, p. 384) considera que esta resposta está baseada, no que chamou de *raciocínio aditivo*; e explica da seguinte maneira: "Isto é, uma quantidade única foi adicionada às medidas, resultando em duas novas medidas." Nós optamos por analisar tal produção de significados a partir da maneira de operar, segundo uma lógica específica.

Por outro lado, a aluna Bárbara opera de maneira diferente. Vamos observar sua enunciação:

Bárbara: Eu comparei a quantidade de crescimento em relação à altura original da laranjeira e do pessegueiro. Então, fazendo as contas ficou assim:

Laranjeira: $\frac{crescimento\ (*)}{altura\ original} = \frac{3\ cm}{8\ cm}$

(*) quantidade de crescimento em relação à altura original da laranjeira

Pessegueiro: $\frac{crescimento\ (*)}{altura\ original} = \frac{3\ cm}{12\ cm}$

(*) quantidade de crescimento em relação à altura original do pessegueiro

Isto quer dizer para mim que a laranjeira cresceu $\frac{3}{8}$ da sua altura, enquanto o pessegueiro cresceu $\frac{3}{12}$. E como, $\frac{3}{12} < \frac{3}{8}$, a laranjeira cresceu mais.

O pesquisador Van de Walle (2009) comenta sobre a resolução da aluna Bárbara:

> Um segundo caminho para encarar o problema é comparar a quantidade de crescimento à altura original da flor [no nosso caso árvores frutíferas]. A primeira flor cresceu $\frac{3}{8}$ da sua altura enquanto a segunda cresceu $\frac{3}{12}$. Baseado nessa visão multiplicativa ($\frac{3}{8}$ vezes tanto mais), a primeira flor cresceu mais. Essa é uma *visão multiplicativa* dessa situação de mudança. (Van de Walle, 2009, p. 304)

Na continuação, ele observa:

> Aqui, ambos os raciocínios aditivo e multiplicativo produzem respostas válidas, embora diferentes. O valor em comparações deste tipo é que a discussão enfocará a natureza da comparação e, deste modo, destacará a distinção entre comparações aditivas e multiplicativas. Uma habilidade de compreender a diferença entre essas situações é uma indicação de raciocínio proporcional. (ibid)

A terceira característica, que faz destas tarefas uma boa tarefa - em nossa concepção - é que ela rompe com o ensino tradicional de matemática. Tal perspectiva pode levar os alunos a considerarem em sua formação, que existe apenas uma solução correta a ser encontrada, consequência de um ensino baseado em exercícios repetitivos.

A tarefa 1b seguinte tem dois objetivos. O primeiro é apresentar ao aluno uma situação análoga à anterior, só que agora, a proporcionalidade acontece. E o segundo objetivo é observar se o estudante vai operar de maneira aditiva ou multiplicativa, depois de toda a discussão que ele teve com o(a) professor(a) na tarefa anterior.

Tarefa 1b:

Um biólogo simulou no computador uma situação desejável de crescimento de dois tipos de eucaliptos para serem vendidos como madeira para a construção civil. A simulação começa com o primeiro tipo de eucalipto tendo 10 cm de comprimento e o segundo tipo tendo 12 cm de comprimento. Ao final do primeiro mês o primeiro tipo estaria com 15 cm de comprimento e o segundo tipo com 18 cm. Comparando os dois tipos de eucaliptos, o que você pode dizer sobre seus crescimentos?

O objetivo da terceira tarefa 1c é iniciar o processo de fazer os estudantes olharem para situações em que há proporcionalidade e situações não proporcionais e saber diferenciá-las.

Tarefa 1c:

Compare as duas tarefas anteriores e observe como as grandezas estão relacionadas no crescimento das plantas indicando o que você observa de diferente em cada caso.

A vagueza desta tarefa é proposital, para que os alunos apresentem todas as diferenças encontradas. Neste momento, o professor pode dar pistas dos que eles devem olhar, auxiliando-os para o desejado.

Vamos agora para a 2ª tarefa:

Tarefa 2

Duas turmas de uma escola estavam reunidas para fazer um trabalho para a feira de ciências. Para a hora do lanche, a turma A encomendou 2 pizzas para cada 3 membros do grupo e a turma B encomendou 3 pizzas para cada 5 membros do grupo. Em qual das duas turmas, seus membros têm mais pizza para comer?

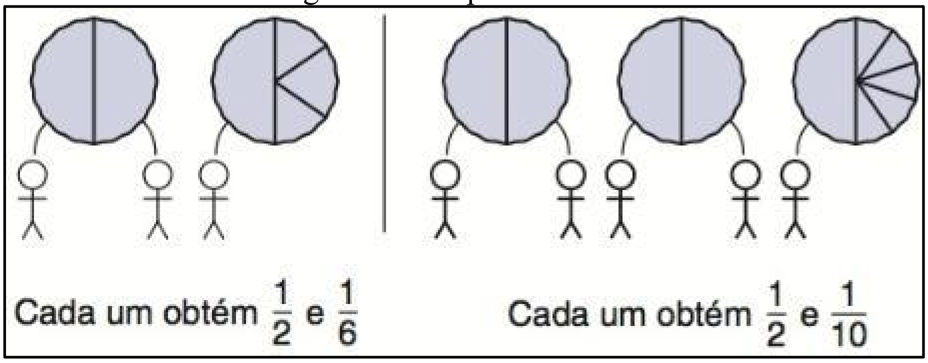
Esta tarefa, também adaptada de Van de Walle (2009, p.389), tem como expectativa que os alunos operem buscando a taxa unitária - pizzas por pessoa, o que facilitaria a comparação entre as turmas. Sendo assim, analisaremos duas possíveis resoluções apresentadas por Van de Walle (2009), em que suporemos suas alunas como sujeito da enunciação: Paula e Davi.

Paula: Como no primeiro caso temos 2 pizzas para cada 3 estudantes e no segundo caso são 3 pizzas para cada 5 estudantes, eu procurei saber em cada caso o quanto come de pizza cada estudante:

$$\frac{quantidade\ de\ pizza}{1\ estudante}$$

A maneira de operar de Paula é fatiar as pizzas em partes fracionárias para saber quanto come cada estudantes e comparar a quantidade de cada um nos dois casos:

Figura 11- Resposta da Paula



Fonte: Van de Walle, J. A., 2009, p.389.

Turma A: $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ $(\frac{1}{3} de \ \frac{1}{2})$

Turma B: $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$ $(\frac{1}{5} de \ \frac{1}{2})$

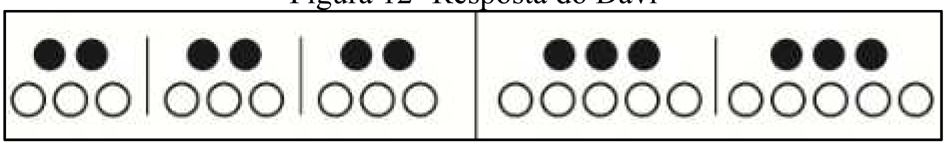
Como $\frac{1}{10} < \frac{1}{6}$,

Então os estudantes da turma A comeram mais pizza

Davi: Eu pensei assim: Se terá 2 pizzas para cada 3 estudantes da turma A e 3 pizzas para cada 5 estudantes da turma B e o problema não diz que na turma A e B só tem 3 e 5 campistas então quaisquer múltiplos de 2 pizzas e 3 estudantes e de 3 pizzas e 5 estudantes podem ser usados para fazer a comparação apropriada. Então considerei o número fixo de 6 pizzas para as duas turmas, daí pelo enunciado do problema na turma A comem 9 estudantes e na turma B comem 10 estudantes.

Essa maneira de operar equivale a obter o mesmo numerador comum e assim poder compará-los:

Figura 12- Resposta do Davi



Fonte: Van de Walle, J. A., 2009, p.389.

6 pizzas para 9 estudantes | 6 pizzas para 10 estudantes

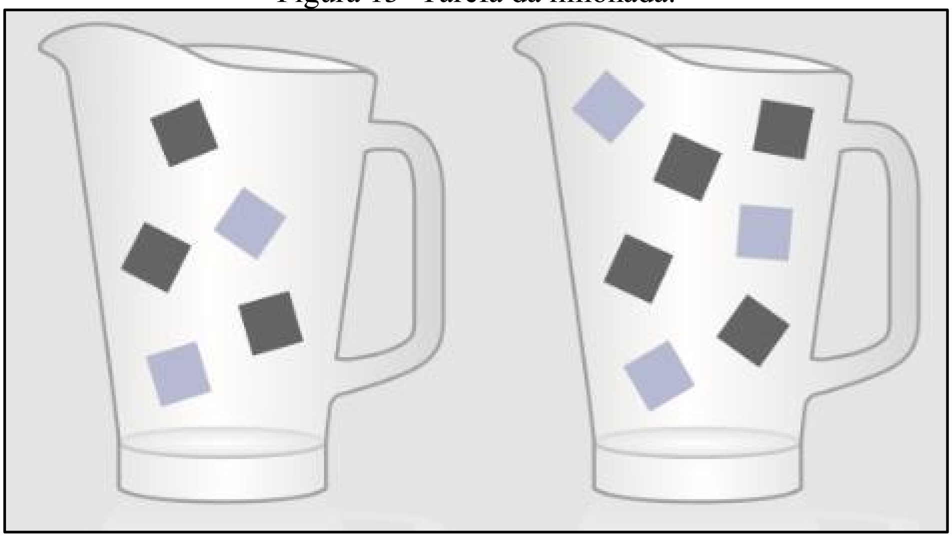
$$\frac{6\ pizzas}{9\ estudantes} \qquad \frac{6\ pizzas}{10\ estudantes}$$

Logo, como existe mais estudantes na Turma B, existe menos pizza para cada estudante. Portanto a turma A come mais pizza.

Tarefa 3a

Numa festa duas mães fizeram jarras com a mesma quantidade de limonada para as crianças com diferentes quantidades de limão. Considere, na figura abaixo, que os quadrados indicam a receita usada em cada jarra do seguinte modo: um quadrado escuro representa uma xícara de limonada concentrada e o quadrado branco representa uma xícara de água. A primeira mãe usou 3 xícaras de suco de limão concentrado e duas de água. A segunda mãe usou 4 xícaras de suco de limão concentrado e 3 xícaras de água.
Qual das duas jarras tem o sabor de limão mais forte? Ou eles terão o mesmo sabor?
[Explicações são exigidas]

Figura 13- Tarefa da limonada.



Fonte: Van de Walle, J. A., 2009, p.389.

Resolução 1: Análise

1ª Jarra | 2ª Jarra

água + limão | água + limão

água + limão | água + limão

limão | Água + limão

limão

2) Comparar a limonada com as xícaras de água:

Jarra 1: $\dfrac{xícaras\ de\ água}{xícaras\ de\ limão} = \dfrac{2}{3} = \dfrac{2.3}{3.3} = \dfrac{6}{9}$

Jarra 2: $\dfrac{xícaras\ de\ água}{xícaras\ de\ limão} = \dfrac{3}{4} = \dfrac{3.2}{4..2} = \dfrac{6}{8}$ e $\dfrac{6}{9} < \dfrac{6}{8}$

3) Comparar a limonada com as xícaras de água:

Jarra 1: $\dfrac{xícaras\ de\ água}{limonada} = \dfrac{2}{5}$

Jarra 2: $\dfrac{xícaras\ de\ água}{limonada} = \dfrac{3}{7}$

4) Comparar as xícaras de limão com a limonada:

Jarra 1: $\dfrac{xícaras\ de\ limão}{limonada} = \dfrac{3}{5}$

Jarra 2: $\dfrac{xícaras\ de\ limão}{limonada} = \dfrac{4}{7}$

5) Vamos supor que cada xícara possui 100 mL. Isso quer dizer que a primeira jarra tem 300mL de limão e 200mL de água, dando um total de 500mL. Já a segunda jarra tem 400mL de limão e 300mL de água, totalizando 700mL. Como as jarras possuem a mesma quantidade de limonada, podemos supor que elas possuem 3500mL. Sendo assim a primeira jarra possui 300 x 7 = 2100mL de limão e 1400mL de água, e a segunda jarra possui 400 x 5 = 2000 mL de limão e 1500mL de água. Ou seja, a primeira jarra tem o sabor mais forte.

6) **1ª jarra:** 3 xícaras de limões e 2 xícaras de água

Temos, nessa jarra, 1,5 xícaras de limão para cada xícara de água.

2ª jarra: 4 (3+1) xícaras de limões e 3 (2+1) xícaras de água

A diferença entre essa jarra e a 1ª é que temos uma xícara de limão e uma de água a mais, ou seja, 1 xícara de limão para 1 xícara de água. Sendo assim, essa jarra possui o sabor mais forte.

Tarefa 3b

Numa festa duas mães fizeram jarras com a mesma quantidade de limonada para as crianças com diferentes quantidades de limão. A primeira mãe usou 2 xícaras de suco de limão concentrado e 4 xícaras de água. A segunda mãe usou 4 xícaras de suco de limão concentrado e 8 xícaras de água.

Qual das duas jarras tem o sabor de limão mais forte? Ou eles terão o mesmo sabor? [Explicações são exigidas]

Tarefa 3c:

Compare as duas tarefas anteriores e observe como as grandezas estão relacionadas na quantidade de suco e de água e o que você observa de diferente em cada caso.

No segundo grupo de tarefas, nosso objetivo é reforçar a noção de situações que são proporcionais através da inserção da noção de constante de proporcionalidade.

Grupo 2

Tarefa 1

O time de futebol da escola está disputando um torneio em um clube fora da cidade e você, como representante dos estudantes, foi designado(a) para organizar a saída das Vans que levarão os atletas, a comissão técnica e a torcida para o clube, num total de 264 pessoas. A informação que recebeu da direção da escola é que a empresa contratada para fazer o transporte disponibilizou Vans, todas com capacidade de 12 passageiros, e que só partirão para o destino com a sua capacidade máxima de lotação. No dia do jogo, você foi informado(a), ao chegar na escola, que às 6h da manhã partiram 3 vans com 36 passageiros levando os atletas e a comissão técnica do time e que as próximas Vans sairão com capacidade máxima de acordo com a seguinte tabela:

Horários	Nº de Vans	Nº total de passageiros
7h	5	
7h30	4	
8h	10	

(a) Complete a tabela com o número total de passageiros que partirão nos horários determinados.
(b) Qual a relação que podemos observar quando comparamos o número de passageiros pelo número de Vans em cada horário de partida das Vans?

No terceiro grupo de tarefas o objetivo foi discutir os problemas envolvendo proporções. Neste momento, acontece o pensamento proporcional e a inserção do elemento desconhecido, em que são dadas três informações sobre a proporção e o aluno deve encontrar a quarta, que é dada por uma incógnita.

Grupo 3

Tarefa 1

Texto para leitura e discussão

Neste grupo, estudaremos problemas que serão resolvidos a partir da ideia de proporção que discutimos anteriormente. A análise concentra-se nas grandezas envolvidas e na natureza da relação entre elas, investigando se o crescimento ou decrescimento de uma delas leva ao crescimento ou decrescimento da outra. Uma boa estratégia é fazer uma simulação com as grandezas para saber como a mudança em uma delas implica na mudança da outra grandeza. Considere o seguinte exemplo:

A turma do 9º está produzindo os convites para a festa de primavera na escola. Eles esqueceram de mandar fazer a impressão dos convites que precisam ser entregues até o final das aulas daquela manhã. O pessoal da gráfica da escola informou que todas as cópias do convite utilizando 4 impressoras levarão 60 minutos para serem impressas, mas que seria possível usar 6 impressoras iguais para fazer os convites, mas o custo seria maior. Como eles estão com pressa, tentaram calcular com as informações que tinham qual o tempo que seis impressoras levarão para produzir os convites?

Neste problema, as duas grandezas envolvidas são “número de impressoras” e o “tempo (em minutos) gasto para a impressão dos convites”. Uma boa estratégia de simulação que podemos utilizar é dobrar (ou triplicar ou dividir pela metade) uma grandeza a fim de verificar o que acontece com a outra grandeza. Nossa opção neste exemplo é dobrar o número de impressoras e verificar o que acontece com o tempo de impressão. Uma boa ideia é fazer isso utilizando uma tabela para visualizar:

N° de impressoras	Tempo (m)
4	60
8	**30**

A tabela mostra que, ao dobrar o número de impressoras, o tempo de impressão é reduzido à metade.

Nos problemas que estudaremos a seguir **três** situações que podem acontecer:

1ª) O crescimento de uma grandeza tem como consequência o crescimento da outra grandeza; ou, o decrescimento de uma grandeza tem como consequência o decrescimento da outra grandeza;

2ª) O crescimento de uma grandeza tem como consequência o decrescimento da outra grandeza (caso que analisamos no problema acima); ou decrescimento de uma grandeza tem como consequência o crescimento da outra grandeza;

3ª) Não ocorre nenhuma das duas situações anteriores ou não é possível, pelo enunciado do problema, garantir que nenhuma delas pode ocorrer.

Quando ocorre a primeira situação, as grandezas são classificadas como *grandezas diretamente proporcionais* ou, simplesmente, *proporcionais*. Quando ocorrer a segunda situação, são *grandezas inversamente proporcionais*. Caso não ocorra nenhuma das duas situações anteriores, as *grandezas não são proporcionais*.

A proposta desta tarefa é que o professor possa introduzir os alunos na discussão que seguirá nas tarefas posteriores e dessa maneira eles tenham uma melhor compreensão do que fazer nas tarefas seguintes.

Tarefa 2

Os seis problemas seguintes envolvem situações diferentes entre si para você analisar. A proposta é que você:

(a) Identifique quais são as grandezas envolvidas em cada problema;

(b) Faça uma simulação que permita identificar como será a relação entre as grandezas envolvidas com respeito ao crescimento e decrescimento das grandezas; [sugestão: fixe sua simulação em dobrar ou dividir pela metade uma das grandezas e observe o que ocorre com a outra. Monte a tabela com os dados obtidos]

(c) Determine em cada caso se (i) as grandezas são diretamente proporcionais; ou (ii) se são inversamente proporcionais, ou (iii) se não são proporcionais, apresentando os argumentos de maneira bem explicada no seu texto escrito.

Importante: O objetivo da tarefa, ainda, **não é resolver o problema**.

Problema 1:

Um professor lê aproximadamente 30 páginas de um livro em duas horas. Mantendo esse ritmo, de quanto tempo ele precisa para ler um livro de 225 páginas?

Problema 2:

Um veterinário cuida, em sua clínica, de filhotes de gatos abandonados na rua. Ele tem 4 gatos e o saco de ração que ele compra para alimentá-los, cada um deles, com a mesma quantidade de ração, dura 3 dias. Ao terminar mais um saco de ração, 2 gatos foram adotados e foram embora com seus novos donos. Agora, com esse novo número de gatos, quantos dias vai durar o saco de ração?

Problema 3:

Em um supermercado, o preço do pacote de açúcar de 1 kg da marca "Mais Doce" custa R$ 2,50 quanto custará o preço de um pacote de 5kg de açúcar da mesma marca?

Problema 4:

Os pais de Camila, registraram sua altura aos 5 e aos 10 anos como mostra a tabela abaixo e querem saber quanto será sua altura quando tiver 15 anos. O que você pode dizer a eles?

Idade (em anos)	5	10	15
Altura (em metros)	1,12	1,60	?

Problema 5:

Um motorista dirigindo seu carro a uma velocidade média de 60 km por hora leva cinco horas para ir de uma cidade a outra. Qual deveria ser sua velocidade média para ele fazer essa viagem na metade do tempo?

Problema 6:

Um pesquisador, preocupado com o gasto de água no período da seca, concluiu que uma torneira gotejando desperdiça 92 litros de água em dois dias. Suponha que em uma casa tem uma torneira gotejando, gastando a mesma quantidade de água observada pelo pesquisador. Sabendo que a família que mora nessa casa saiu de férias, quantos litros de água foram desperdiçados pela torneira nos 30 dias em que estiveram fora?

As resoluções desejáveis na perspectiva do professor e do pesquisador para cada problema é apresentada a seguir:

Problema 1:

(a) As duas grandezas envolvidas são "número de páginas" e o "tempo gasto na leitura".

(b) Consideremos dobrar o número de páginas para ver o que acontece com o tempo gasto na leitura. A tabela abaixo, representa a simulação:

Nº de páginas	tempo
30	2
60	**4**

Notamos que, se o número de páginas dobra, o tempo de leitura também dobra. Assim, o crescimento de uma grandeza implica no crescimento da outra.

(c) Logo, as grandezas são diretamente proporcionais.

Obs.: Observe que se triplicarmos o número de páginas para ver o que acontece, concluiremos que o tempo de leitura também triplicará. Reforçando a análise anterior que fizemos ao dobrar o número de páginas. A tabela abaixo, representa a simulação:

Nº de páginas	tempo
30	2
90	**6**

Problema 2:

(a) As duas grandezas envolvidas são "número de gatos" e "número de dias da ração".

(b) O que queremos verificar é a duração do saco de ração em dias. A questão que precisamos checar é: se 4 gatos comem um saco de ração em três dias, o que acontece quando só 2 gatos comem a mesma quantidade de ração. Faremos a simulação considerando 2 gatos, ou seja, simulando para a metade de gatos. A tabela abaixo, representa a simulação:

Nº de gatos	dias
4	3
2	**6**

Notamos que, quando o número de gatos cai para a metade, o número de dias da ração dobra. Assim, a diminuição de uma grandeza implica no crescimento da outra.

(c) As grandezas são inversamente proporcionais.

Obs. Se fizermos a simulação para um gato, isto é, a quarta parte de gatos em relação ao número inicial de gatos, o número de dias da ração quadruplica. Veja a tabela:

Nº de gatos	dias
4	3
1	**12**

O que esta observação e a anterior indicam é que basta fazer uma única simulação para checar o que está ocorrendo.

Problema 3:

(a) As duas grandezas envolvidas são "quilogramas de açúcar" (massa) e "preço de compra".

(b) Uma resolução inicial poderia assumir: se um quilo de açúcar custa R$ 2,50, um pacote de 5 quilos de açúcar da mesma marca seria 5 vezes o preço do quilo, gerando a seguinte tabela:

Kg de açúcar	Preço
1	2,50
5	**12,50**

Nossa discussão com os alunos seria no seguinte sentido:

Matematicamente, as contas não estariam erradas e a resposta estaria correta. Porém pensar assim sugere que estamos considerando que as grandezas envolvidas são proporcionais. Mas, na verdade, não temos essa informação e na prática o comércio não opera assim. Em situações que envolvem produtos e preço os comerciantes não praticam a proporcionalidade das grandezas. No dia a dia eles optam, para tentar vender a maior quantidade do produto usando como estratégia manter o preço mais barato de o consumidor levar maior quantidade do produto em relação ao preço unitário. Assim, o preço por cinco quilos de açúcar poderia ser vendido, por exemplo, por R$10,00, ao invés de R$12,50, e estimular o comprador a levar maior quantidade do produto.

(c) Com base na letra (b) vamos propor à turma, a resolver esta questão assumindo que as grandezas quilos de açúcar e preço não são proporcionais.

Problema 4:

(a) As duas grandezas envolvidas são "idade" (em anos) e "altura" (em metros). O que observamos analisando a tabela é que quando a idade dobra de 5 para 10 anos, a altura não dobra (de 1,12m para 2,24m), nem fica pela metade (de 1,12m para 0,56m). Logo, não há como prever a altura de Camila aos 15 anos.

Situação 5 – simulação:

As duas grandezas envolvidas são "velocidade" (em km/h) e "tempo" (em horas).

Façamos a simulação para verificar o que acontece se dobrarmos a velocidade o que acontece com o tempo de viagem, como mostra a tabela:

Velocidade (km/h	Tempo (h)
60	5
120	**2,5**

Note que se dobramos a velocidade o tempo de viagem cai para a metade. Vejamos agora o que acontece se a velocidade cair pela metade:

Velocidade (km/h	Tempo (h)
60	5
30	**10**

Observamos que se o motorista alterar sua velocidade para 30 km/h o tempo de viagem será o dobro. Assim, aumentando a velocidade, o tempo de viagem diminui. Em ambos os cenários, o crescimento de uma grandeza implica o decrescimento proporcional da outra.

Situação 6 – simulação:

As duas grandezas envolvidas são "litros de água desperdiçados" e o "tempo gasto de desperdício" (em dias).

Façamos a simulação para verificar o que acontece se dobrarmos e triplicarmos o tempo da água gotejando, como mostra a tabela:

Tempo (dias)	Água desperdiçada (litros)
2	92
4 (dobro)	184
6 (triplo)	276

A tabela indica que a quantidade de água desperdiçada varia de acordo com o tempo em que a torneira ficou gotejando, de modo que, duplicando o tempo, a quantidade de água desperdiçada dobra; triplicando o tempo, a quantidade de água desperdiçada também triplicará.

Tarefa 3

Nos seis problemas anteriores desconsidere aquelas situações em que as grandezas não são proporcionais e reúna as que sobrarem em grupos de grandezas diretamente proporcionais e em grandezas inversamente proporcionais.

Tente descobrir **duas importantes propriedades que podem ser observadas**, uma em cada caso, que vai indicar como elas se distinguem.

As resoluções desejáveis na perspectiva do professor e do pesquisador para cada problema é apresentada a seguir. Além disso, não sabemos se o(a) aluno(a)s chegaram a exibir as propriedades, mas, neste caso, estaremos preparados para fazer nossa inserção na direção de discutir o que foi proposto.

Resolução:

Nos problemas 1 e 6 as grandezas são diretamente proporcionais. No problema 1, dobrando os valores das grandezas, a tabela encontrada foi:

Nº de páginas	tempo
30	2
60	**4**

Notamos que, se as grandezas são diretamente proporcionais, os valores correspondentes da tabela formam a seguinte proporção:

$$\frac{30}{2} = \frac{60}{4} \quad [= 15\,]$$

No problema 6, a tabela encontrada foi:

Água desperdiçada (litros)	Tempo (dias)
92	2
46	1

Os valores da tabela indicam também a proporção:

$$\frac{92}{2} = \frac{46}{1} \quad [= 46\,]$$

Estes dois casos particulares são exemplos da propriedade geral: se as grandezas a, b, c e d **são diretamente proporcionais então formam uma proporção**:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

A partir dessa relação, podemos aplicar a **propriedade fundamental das proporções**:

Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ então a.d = b.c. (I)

Nos problemas 2 e 5 verificamos que as grandezas envolvidas são inversamente proporcionais. No problema 2 a tabela produzida foi:

Nº de gatos	dias
4	3
2	**6**

Note que se tentarmos repetir o que fizemos para grandezas proporcionais encontramos:

$$\frac{4}{2} \# \frac{3}{6}$$

Porque a primeira razão é igual a 2 e a segunda é igual a $\frac{1}{2}$.

Porém, podemos escrever a proporção

$$\frac{4}{2} = \frac{6}{3}$$

ou

$$\frac{4}{2} = \frac{1}{3/6}$$

Isto é, a razão entre dois valores da primeira grandeza é igual a razão inversa dos valores correspondentes da outra.

Assim, aplicando a propriedade fundamental das proporções à proporção anterior, obtemos:

$$4 \cdot 3 = 2 \cdot 6$$

Note, observando a tabela, que os *fatores dos produtos* são os pares de valores correspondentes das duas grandezas. Esse exemplo particular sugere que, na prática, quando as grandezas forem inversamente proporcionais, os produtos dos pares de valores correspondentes são iguais.

De maneira análoga, no problema 5, se dobramos a velocidade o tempo de viagem cai para a metade como mostra a tabela:

Velocidade (km/h	Tempo (h)
60	5
30	**10**

Temos então que:

$$\frac{60}{30} \# \frac{5}{10}$$

Porque a primeira razão é igual a 2 e a segunda é igual a $\frac{1}{2}$.

Porém, podemos escrever a proporção

$$\frac{60}{30} = \frac{10}{5}$$

Isto é, tomamos o inverso da segunda razão, isto é.,

$$\frac{60}{30} = \frac{1}{5/10}$$

Isto é, a razão entre dois valores da primeira grandeza é igual a razão inversa dos valores correspondentes da outra.

Assim, aplicando a propriedade fundamental das proporções à proporção anterior, obtemos:

$$60 \cdot 5 = 10 \cdot 30$$

Note, observando a tabela, que os *fatores dos produtos* são os pares de valores correspondentes das duas grandezas.

Esse exemplo particular sugere que, na prática, quando as grandezas forem inversamente proporcionais, os produtos dos pares de valores correspondentes são iguais.

Estes dois casos particulares são exemplos de uma propriedade geral: se as grandezas a, b, c e d são *inversamente proporcionais* e

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Então, a propriedade fundamental é **o produto das grandezas correspondente são iguais**, isto é,

$$a \cdot c = b \cdot d \qquad \text{(II)}$$

CONCLUSÃO: Em problemas que envolvem situações que relacionam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, **os valores desconhecidos podem ser determinados** a partir das propriedades (I) ou (II).

Em resumo, na resolução dos problemas 1 a 6, na tarefa seguinte a estratégia é:

(a) verificar as grandezas envolvidas no problema;

(b) Simular para um caso particular para verificar se as grandezas são diretamente, inversamente proporcionais ou se não são proporcionais;

(c) Resolver o problema utilizando as propriedades (I) ou (II).

Tanto no caso das grandezas diretamente quanto inversamente proporcionais, a fração irredutível encontrada como simplificação das grandezas envolvidas é chamada de **constante de proporcionalidade**.

<u>Tarefa 4</u>

Resolva os seis problemas propostos com base nas informações obtidas nas tarefas 1 e 2.

Agora os alunos encontram-se, potencialmente, em condições de resolver os problemas com as informações anteriores. Com esta tarefa, nosso objetivo é verificar se eles efetivamente conseguirão resolver os problemas.

A solução do professor (ou do pesquisador) é apresentada a seguir:

Problema 1:

Na tarefa 1 constatamos que as grandezas são número de páginas e o tempo gasto na leitura são diretamente proporcionais. Assim, para resolver o problema, montamos novamente a tabela com os valores conhecidos atribuindo ao valor desconhecido ou procurado uma letra (que chamamos em matemática de *incógnita)* da seguinte maneira:

Nº de páginas	tempo
30	2
225	**x**

Como as grandezas são diretamente proporcionais, podemos montar a proporção dos valores correspondentes:

$$\frac{30}{2} = \frac{225}{x}$$

E da *propriedade fundamental das proporções*, podemos escrever:

$$30 \cdot x = 225 \cdot 2$$

Daí, para isolar x e encontrar o resultado, dividimos ambos os membros da igualdade por 30:

$$\frac{30.x}{30} = \frac{225.2}{30}$$

Simplificando obtemos x = 15.

Assim, o professor levará 15 horas para ler o livro de 225 páginas, caso consiga manter o ritmo de leitura.

Problema 2:

Na tarefa 1, constatamos que as grandezas número de gatos e número de dias da ração são inversamente proporcionais. Assim, para resolver o nosso problema, montamos a tabela:

Nº de gatos	dias
4	3
2	**x**

Como as grandezas são inversamente proporcionais, sabemos que o produto das grandezas correspondentes é igual, isto é,

$$4 \cdot 3 = 2 \cdot x$$

Fazendo as contas, encontramos x = 6, como havíamos encontrado na simulação. Portanto, o saco de ração vai durar 6 dias.

Problema 3:

Da tarefa 1, sabemos as grandezas quilogramas de açúcar (massa) e preço de compra, se o supermercado adotar essa maneira de vender o açúcar, serão diretamente proporcionais. Daí a tabela fica:

Kg de açúcar	Preço
1	2,50
5	**x**

Logo, como as grandezas envolvidas são proporcionais, podemos escrever a proporção:

$$\frac{1}{2{,}50} = \frac{5}{x}$$

Aplicando a propriedade fundamental das proporções, podemos escrever:

$$x = 5 \cdot 2{,}50 = 12{,}50$$

Portanto, o valor de 5 kg de açúcar é R$12,50.

Problema 4:

Neste caso, as grandezas idade (em anos) e altura (em metros) não são proporcionais.

Situação 5 – simulação:

Na tarefa 1, constatamos que as grandezas velocidade (em km/h) e tempo (em horas) são inversamente proporcionais. Assim, montando a tabela anotamos:

Velocidade (km/h	Tempo (h)
60	5
x	2,5

Como as grandezas são inversamente proporcionais, o produto das grandezas correspondentes é igual, isto é,

$$x \cdot 2{,}5 = 60 \cdot 5 \text{ ou } x = 120$$

Portanto, a velocidade média do motorista deveria ser de 120 Km.

Situação 6

Na tarefa 1, constatamos que as duas grandezas litros de água desperdiçados e o tempo gasto de desperdício (em dias) são diretamente proporcionais.

Assim, montando a tabela com os dados do problema:

Água desperdiçada (litros)	Tempo (dias)
92	2
x	30

E como as grandezas são diretamente proporcionais, podemos escrever a seguinte proporção:

$$\frac{92}{2} = \frac{x}{30}$$

Pela propriedade das proporções, obtemos:

$$2 \cdot x = 92 \cdot 30$$

Fazendo as contas, obtemos x = 1380.

O conjunto destes grupos de tarefas compõem o produto educacional, que possui as fichas com as tarefas e a parte comentada para o professor. Espera-se que, ao final de toda a discussão, os próprios alunos cheguem em uma caracterização para a noção de razão, construída por eles durante todo o percurso.

6 ANÁLISE DA PRODUÇÃO DE SIGNIFICADOS DOS ESTUDANTES

O presente capítulo dedica-se à análise da produção de significados de dois estudantes diante de um conjunto de tarefas sobre a noção de proporção. Os dois participantes, aqui designados pelos pseudônimos de Rita e Paulo, são, respectivamente, alunos do 8º e 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede particular da cidade de Juiz de Fora.

Para essa aplicação, os seguintes procedimentos metodológicos foram seguidos: a pesquisadora poderia fazer algumas intervenções durante o processo de aplicação das tarefas. Adicionalmente, os estudantes foram orientados a não apagarem os registros feitos nas fichas de trabalho, mesmo aqueles que segundo eles pudessem estar incorretos.

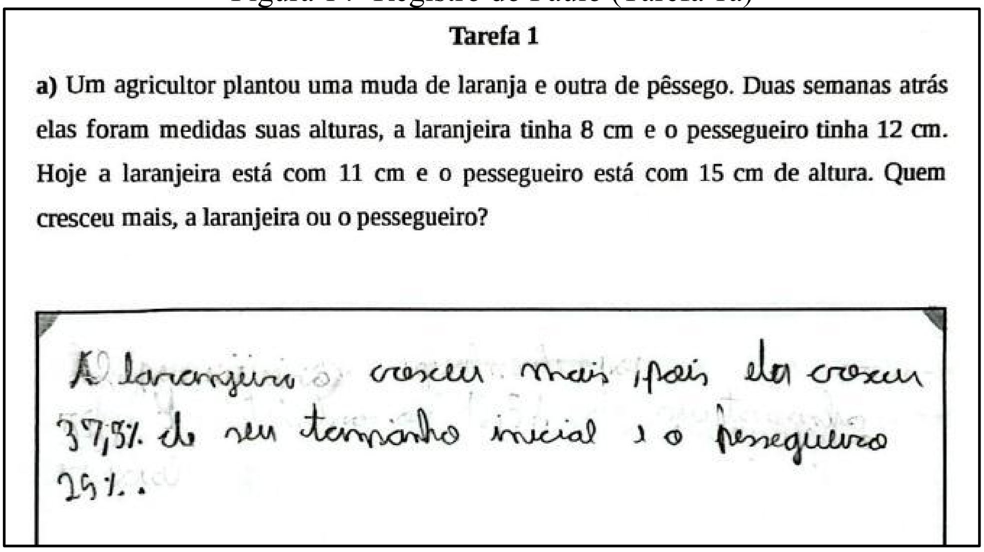
A tarefa 1 buscou deflagrar o processo de produção de significados dos estudantes para a noção de proporção, além de possibilitar à pesquisadora analisar os modos de operar dos participantes da pesquisa.

Tarefa 1a

Um agricultor plantou uma muda de laranja e outra de pêssego. Duas semanas atrás, foram medidas suas alturas: a laranjeira tinha 8 cm e o pessegueiro tinha 12 cm. Hoje a laranjeira está com 11 cm e o pessegueiro está com 15 cm de altura. Quem cresceu mais, a laranjeira ou o pessegueiro?

Paulo apresentou o seguinte registro escrito:

Figura 14- Registro do Paulo (Tarefa 1a)



Tarefa 1

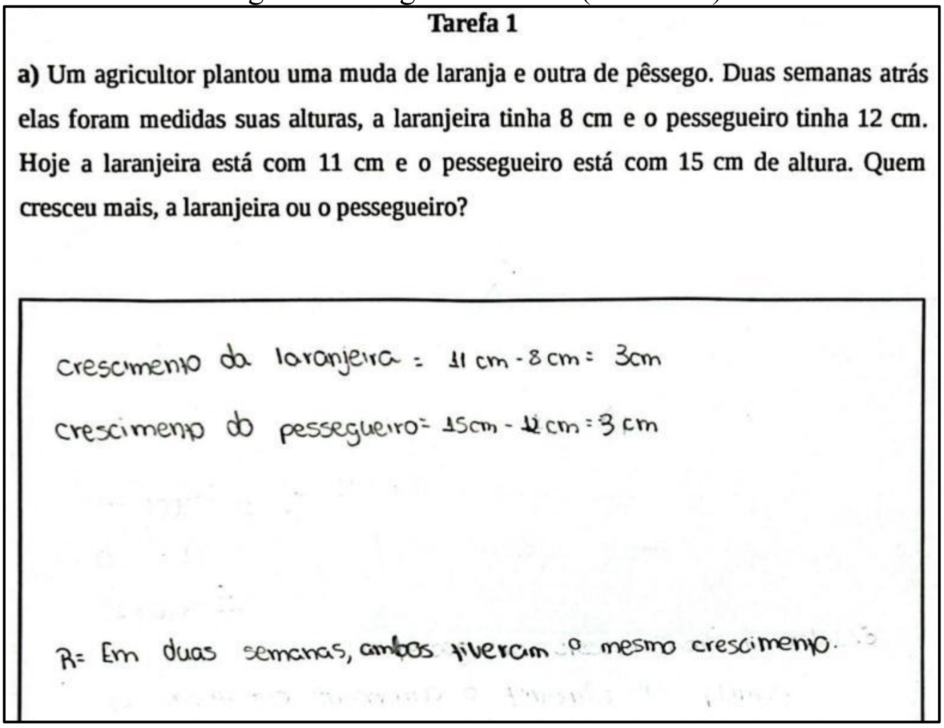
a) Um agricultor plantou uma muda de laranja e outra de pêssego. Duas semanas atrás elas foram medidas suas alturas, a laranjeira tinha 8 cm e o pessegueiro tinha 12 cm. Hoje a laranjeira está com 11 cm e o pessegueiro está com 15 cm de altura. Quem cresceu mais, a laranjeira ou o pessegueiro?

A laranjeira cresceu mais, pois ela cresceu 37,5% do seu tamanho inicial e o pessegueiro 25%.

Compilação do autor (2024)

Rita apresentou o seguinte registro escrito:

Figura 15- Registro da Rita (Tarefa 1a)



Tarefa 1

a) Um agricultor plantou uma muda de laranja e outra de pêssego. Duas semanas atrás elas foram medidas suas alturas, a laranjeira tinha 8 cm e o pessegueiro tinha 12 cm. Hoje a laranjeira está com 11 cm e o pessegueiro está com 15 cm de altura. Quem cresceu mais, a laranjeira ou o pessegueiro?

crescimento da laranjeira = 11 cm - 8 cm = 3cm

crescimento do pessegueiro = 15cm - 12 cm = 3 cm

R= Em duas semanas, ambos tiveram o mesmo crescimento.

Compilação do autor (2024)

A partir desta tarefa, nosso desejo era identificar se os alunos estavam operando de maneira aditiva ou multiplicativa. As seguintes enunciações orais foram apresentadas:

Paulo: “Eu pensei muita coisa. Primeiro eu pensei que eles tinham crescido igualmente, porque ambos cresceram 3 centímetros, só que o pessegueiro era maior. Só que depois, quando você bota em porcentagem, você vê que a laranjeira cresceu mais, porque ela cresceu 37,5% do seu tamanho inicial e o pessegueiro 25.”

Pesquisadora: “Paulo, como você chegou nessa porcentagem?”

Paulo: “Eu pensei, 4 é igual a 50%, né?! A laranjeira tinha 8 centímetros, 4 centímetros é igual a 50%. Aí eu peguei 50 e dividi por 4, aí deu 12,5. Depois multipliquei por 3, que é o total de crescimento.”

Pesquisadora: “E você, Rita? Como você fez?”

Rita: “Eu fiz o básico mesmo. Só subtraí e analisei o crescimento.”

Pesquisadora: “Então quem cresceu mais, a laranjeira ou o pessegueiro?”

Rita: “Todos cresceram 3 cm, ou seja, os centímetros foram iguais. Mas em relação ao tamanho, são proporções diferentes.”

Pesquisadora: “Ok, mas quem cresceu mais?”

Rita: “Elas cresceram os mesmos 3 cm.”

Paulo: “Eu acho que eu sei o que ela quer falar, porque eu ia falar isso também, mas eu deixei pra lá. Em relação ao tamanho inicial, a laranjeira cresceu mais. Mas em questão de somente centímetros, elas cresceram igualmente.”

Os resíduos de enunciações dos alunos permitem inferir distintas abordagens. Os registros de Rita sugerem um raciocínio aditivo, mesmo ao dizer que “em relação ao tamanho, são proporções diferentes”. Podemos questionar se o uso do termo proporções foi induzido devido ao título do encontro (A noção de proporção).

Já Paulo, apresenta em suas enunciações, o modo multiplicativo em sua forma de operar, consequência da operação de porcentagem realizada pelo aluno. Em sua fala final, ele mostra saber fazer as duas comparações: do processo aditivo e multiplicativo.

A próxima tarefa os colocou frente à uma situação semelhante à anterior, no entanto, a proporcionalidade acontecia. Nela, buscamos observar novamente sua maneira de operar e a lógica dessa operação a partir da discussão anterior.

Tarefa 1b

Um biólogo simulou no computador uma situação desejável de crescimento de dois tipos de eucaliptos para serem vendidos como madeira para a construção civil. A simulação começa com o primeiro tipo de eucalipto tendo 10 cm de comprimento e o segundo tipo tendo 12 cm de comprimento. Ao final do primeiro mês o primeiro tipo estaria com 15 cm de comprimento e o segundo tipo com 18 cm. Comparando os dois tipos de eucaliptos, o que você pode dizer sobre seus crescimentos?

Tarefa 1c

Compare as duas tarefas anteriores e observe como as grandezas estão relacionadas no crescimento das plantas indicando o que você observa de diferente em cada caso. Observe as duas tarefas anteriores e analise o que você observou de diferente em cada caso.

Paulo apresentou os seguintes registros escritos:

Figura 16- Registro do Paulo (Tarefa 1b)

b) Um biólogo simulou no computador uma situação desejável de crescimento de dois tipos de eucaliptos para serem vendidos como madeira para a construção civil. A simulação começa com o primeiro tipo de eucalipto tendo 10 cm de comprimento e o segundo tipo tendo 12 cm de comprimento. Ao final do primeiro mês o primeiro tipo estaria com 15 cm de comprimento e o segundo tipo com 18 cm. Comparando os dois tipos de eucaliptos, o que você pode dizer sobre seus crescimentos?

Pode se dizer que ambos eucalipitos cresceram proporcionalmente em relação a seu tamanho inicial.

O 1º cresceu 50% e o 2º 50%.

Compilação do autor (2024)

Figura 17- Registro do Paulo (Tarefa 1c)

c) Compare as duas tarefas anteriores e observe como as grandezas estão relacionadas no crescimento das plantas indicando o que você observa de diferente em cada caso. Observe as duas tarefas anteriores e analise o que você observou de diferente em cada caso.

No 1º caso mesmo o tamanho inicial e o final sendo diferentes ambos frutíferos aumentaram 3 cm, mas o laranjeiro cresceu mais em relação ao seu tamanho inicial

No 2º caso os eucalipitos começaram com tamanhos diferentes e terminaram com tamanhos diferentes. O 1º eucalipto foi de 10 cm para 15 cm e o 2º foi de 12 cm para 18 cm. Ambos crescendo 50% de seu tamanho inicial.

Compilação do autor (2024)

Rita apresentou os seguintes registros escritos:

Figura 18- Registro da Rita (Tarefa 1b)

b) Um biólogo simulou no computador uma situação desejável de crescimento de dois tipos de eucaliptos para serem vendidos como madeira para a construção civil. A simulação começa com o primeiro tipo de eucalipto tendo 10 cm de comprimento e o segundo tipo tendo 12 cm de comprimento. Ao final do primeiro mês o primeiro tipo estaria com 15 cm de comprimento e o segundo tipo com 18 cm. Comparando os dois tipos de eucaliptos, o que você pode dizer sobre seus crescimentos?

Eucalipito 1= 15cm - 10 cm = 5cm

10 = 100%

5 = 50% → crescimento

Eucalipito 2 = 18 cm - 12 cm = 6 cm

12 = 100%

6 = 50% → crescimento

R= Comparando-os separadamente, podemos dizer que ambos cresceram 50% do seu tamanho inicial.

Comparando-os simultaneamente, dizemos que o Ecalipito2 é maior.

Compilação do autor (2024)

Figura 19- Registro da Rita (Tarefa 1c)

c) Compare as duas tarefas anteriores e observe como as grandezas estão relacionadas no crescimento das plantas indicando o que você observa de diferente em cada caso. Observe as duas tarefas anteriores e analise o que você observou de diferente em cada caso.

Na 1ª tarefa, as plantas cresceram de proporções diferentes.

Já na 2ª tarefas ambas atigiram o crescimento de 50% de seu tamanho anterior.

Compilação do autor (2024)

Sobre as tarefas 1b e 1c, foram registradas as seguintes enunciações:

Rita: "Na b, o eucalipto 1 tinha 10 cm e foi pra 15 cm, então ele cresceu 5 cm que é 50% do tamanho inicial; e o eucalipto 2 tinha 12 cm e foi pra 18 cm, ou seja, cresceu 6cm, que também é 50% do seu tamanho inicial. Aí eu coloquei assim como resposta: comparando separadamente, podemos dizer que ambos cresceram 50% do seu tamanho inicial. Comparando simultaneamente a questão de altura, podemos dizer que o eucalipto 2 é maior."

Paulo: "Pode-se dizer que ambos eucaliptos cresceram proporcionalmente em relação ao seu tamanho inicial, o primeiro cresceu 50% e o segundo também."

Sobre a letra c, os alunos fizeram as seguintes enunciações:

Rita: "Na primeira tarefa as plantas cresceram em proporções diferentes do seu tamanho inicial e na segunda tarefa ambas atingiram o crescimento de 50% do seu tamanho anterior, ou seja, inicial."

Paulo: "No primeiro caso, mesmo o tamanho inicial e final sendo diferentes, ambas aumentaram 3 cm, mas a laranjeira cresceu mais em relação ao seu tamanho inicial. No segundo caso os eucaliptos começaram com tamanhos diferentes e terminaram com tamanhos diferentes. O primeiro eucalipto foi de 10 cm para 15cm e o segundo foi de 12cm para 18cm, ambos cresceram 50% do seu tamanho inicial."

Pesquisadora: "É exatamente isso que vocês falaram. Na letra a, quando a gente fala que ambos cresceram 3cm, estamos pensando de forma aditiva, porque foi adicionado 3 cm aos 8 cm da laranjeira e aos 12cm do pessegueiro. Então aditivamente, somando, a gente pode falar que as duas cresceram a mesma quantidade. Só que se pensarmos de forma multiplicativa, ou seja, de forma proporcional, que é essa comparação com o tamanho inicial, a gente chega que a laranjeira cresceu mais."

Depois, a pesquisadora se dirige ao quadro para apresentar uma possível notação para esses casos.

Nesta tarefa, podemos observar que os alunos conseguem operar das duas formas, aditiva e multiplicativa. Ambos trazem as duas produções de significados e apresentam suas diferenças, de forma verbal e escrita.

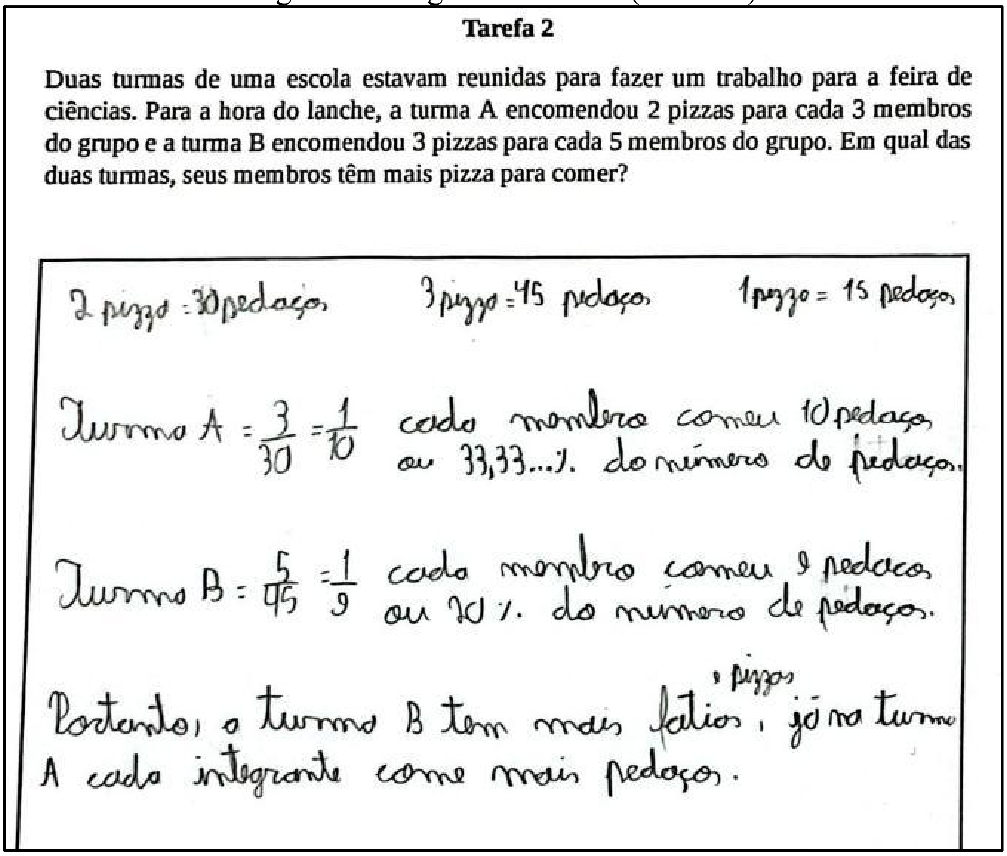
Sob a perspectiva do MCS, podemos dizer que Rita e Paulo estão falando na mesma direção e, consequentemente, compartilhando interlocutores. Além disso, ambos operam constituindo porcentagem em objeto, nos fazendo questionar de que maneira esta noção que fora apresentada a eles anteriormente pode ter influenciado suas produções de significados. Essa mesma associação acontece em algumas das tarefas posteriores.

Tarefa 2

Duas turmas de uma escola estavam reunidas para fazer um trabalho para a feira de ciências. Para a hora do lanche, a turma A encomendou 2 pizzas para cada 3 membros do grupo e a turma B encomendou 3 pizzas para cada 5 membros do grupo. Em qual das duas turmas, seus membros têm mais pizza para comer?

Os seguintes registros escritos foram apresentados por Paulo:

Figura 20- Registro do Paulo (Tarefa 2)



Tarefa 2

Duas turmas de uma escola estavam reunidas para fazer um trabalho para a feira de ciências. Para a hora do lanche, a turma A encomendou 2 pizzas para cada 3 membros do grupo e a turma B encomendou 3 pizzas para cada 5 membros do grupo. Em qual das duas turmas, seus membros têm mais pizza para comer?

2 pizza = 30 pedaços   3 pizza = 45 pedaços   1 pizza = 15 pedaços

Turma A = $\frac{3}{30} = \frac{1}{10}$ cada membro comeu 10 pedaços ou 33,33...% do número de pedaços.

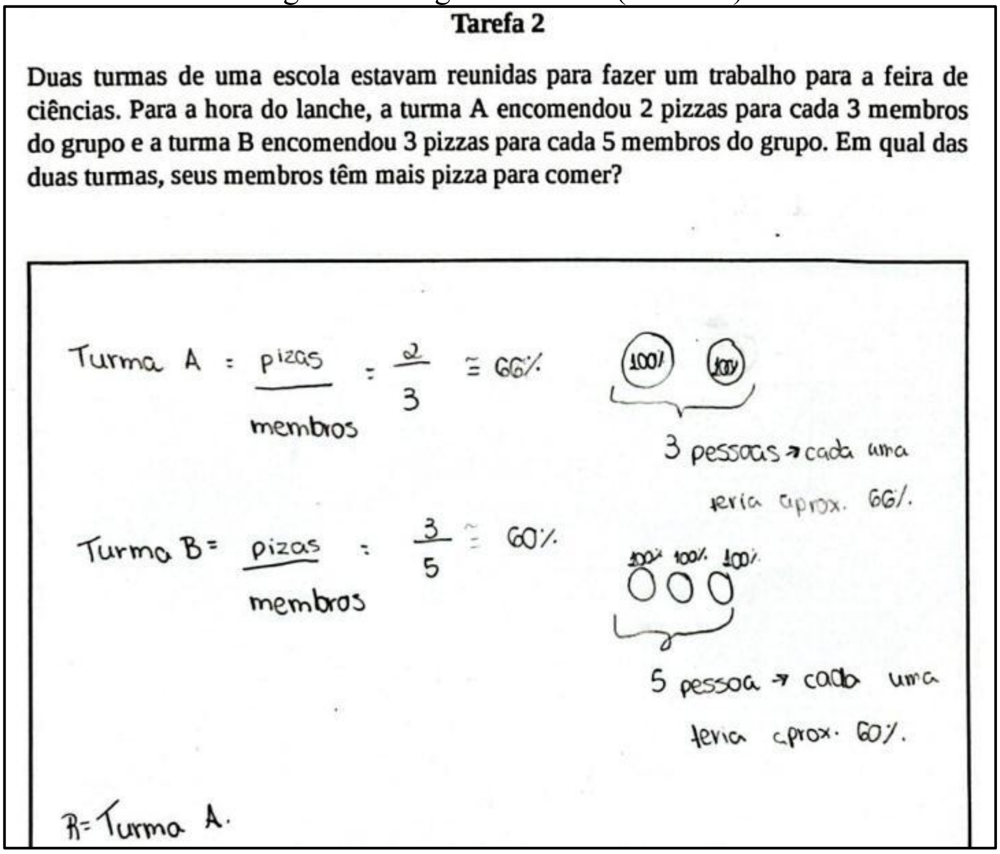
Turma B = $\frac{5}{45} = \frac{1}{9}$ cada membro comeu 9 pedaços ou 20 %. do número de pedaços.

Portanto, a turma B tem mais fatias, pizzas, já na turma A cada integrante come mais pedaços.

Compilação do autor (2024)

A seguir, os registros escritos de Rita:

Figura 21- Registro da Rita (Tarefa 2)



Tarefa 2

Duas turmas de uma escola estavam reunidas para fazer um trabalho para a feira de ciências. Para a hora do lanche, a turma A encomendou 2 pizzas para cada 3 membros do grupo e a turma B encomendou 3 pizzas para cada 5 membros do grupo. Em qual das duas turmas, seus membros têm mais pizza para comer?

Turma A : $\frac{\text{pizas}}{\text{membros}} = \frac{2}{3} \cong 66\%$

100% 100%

3 pessoas → cada uma seria aprox. 66%.

Turma B = $\frac{\text{pizas}}{\text{membros}} = \frac{3}{5} \cong 60\%$

100% 100% 100%

5 pessoa → cada uma seria aprox. 60%.

R= Turma A.

Compilação do autor (2024)

A partir destes registros, tivemos as seguintes enunciações orais:

Rita: "A gente tem 2 pizzas, vamos pensar que cada pizza tem 100%, o total da pizza é 100%. Aí a gente tem 2 pizzas e a gente junta, da 200%. É como se a gente fosse dividir esses 200% para 3 pessoas. Você entende isso? Aí cada pessoa comeria 66% da pizza, todas juntas."

Pesquisadora: "Qual a diferença de comer 66% de uma e 66% de duas?"

Rita: "Porque são 2 pizzas para 3 membros."

Pesquisadora: "Mas se de 1 pizza uma pessoa come 66% daquela pizza. Agora eu tenho 2 pizzas e essa pessoa come 66% das duas."

Rita: "Talvez dê um resultado diferente. Você tá me complicando."

Pesquisadora: "Quanto que é 50% das duas pizzas?"

Rita: "Das duas juntas? 100. 1 pizza."

Pesquisadora: "Se ela tá comendo 66% quer dizer que ela comeu mais de uma pizza inteira?"

Rita: "Não… porque… (risadas)."

Pesquisadora: "Tá… como você fez a B?"

Rita: “Eu fiz do mesmo jeito. Eu coloquei aqui as pizzas e os membros, aí deu ⅗. Aí deu que comeram 60% das 3 juntas.”

Pesquisadora: “E aí qual você acha que comeu mais?”

Rita: “Na A.”

Pesquisadora: “E você, Paulo?”

Paulo: “Eu fiz um pouco diferente. Tipo, cada pizza tem x valores de fatias. Eu coloquei que uma pizza tem 15 pedaços, então duas tem 30, 3 tem 45. Na turma A são 3 pessoas para 2 pizzas então é 3 sobre 30, porque 2 pizzas são 30 pedaços. Que é igual a um décimo, porque eu simplifiquei. Aí deu que cada membro comeu 10 pedaços ou 33,33% do número de pedaços. Na turma B eu coloquei 5 sobre 45, ok? Que é igual a um nono. Aí eu coloquei que cada membro comeu 9 pedaços ou 20% do número de pedaços. Portanto, a turma B tem mais fatias e pizzas, porém, já na turma A, cada integrante come mais pedaços.”

Paulo: “Mas quando pergunta assim: em qual das duas turmas seus membros têm mais pizza para comer? Seria a B porque eles têm mais pizzas. Quando você fala pizza no geral é a B, mas, quando você transforma em pedaços, é a A.”

Pesquisadora: “Temos que ver que não necessariamente o grupo tem 5 membros. Por exemplo, vamos supor que o grupo B tem 5 membros e 3 pizzas. Mas se o grupo A tiver 6 membros. Quantas pizzas eles vão ter?”

Paulo: “2”

Pesquisadora: “Lê o enunciado novamente.”

Paulo: “Ah, vão ter 4.”

Pesquisadora: “Isso. Quando ele pergunta quem tem mais pizza para comer, é ‘em qual grupo cada membro vai comer mais pizza?’”

Podemos perceber, mais uma vez, que os estudantes utilizam a noção de porcentagem, possivelmente estudada no colégio em momentos anteriores. Nas enunciações de Rita, podemos observar que, embora ela articule um cálculo para chegar a uma resposta que entenda como correta, encontra dificuldade em explicar seu raciocínio. Os valores que ela encontra, equivalem à porcentagem de uma pizza, e não de todas elas.

Já Paulo, utiliza outro modo de operar: ele supõe uma quantidade de pedaços para cada pizza e, a partir daí, faz uma comparação que o leva à mesma conclusão que Rita. Além disso, Paulo disse que optou por um número de pedaços que fosse múltiplo comum de 3 e 5 - para não ter que trabalhar com vírgula -, ou seja, conseguiu fazer uma associação com um conteúdo já estudado.

Sobre esse método, ele fez a seguinte enunciação:

Paulo: “Então, primeiro eu tentei com 8. Aí eu coloquei 2 vezes 8 dividido por 3, que daria 6. Só que se eu faço 3 vezes 8 da 24, aí não é divisível por 5. Aí eu fui fazendo até achar um número que também fosse divisível por 5.”

Ao ouvir o cochicho dos alunos enquanto resolviam e discutiam a questão, Rita disse que pensava que Paulo não poderia “fazer aquilo” (escolher pedaços para a pizza). Paulo concordou, dizendo que também achava que não, mas fez assim mesmo. A partir desse diálogo, acreditamos que a noção de proporção ainda não está bem efetivada para os participantes.

A próxima tarefa gerou uma grande discussão, motivo pelo qual ela foi trabalhada em momentos diferentes. A atividade foi apresentada aos alunos em dias anteriores e, diante da dificuldade inicial observada, foi retomada em um encontro posterior para um desenvolvimento.

Tarefa 3

Numa festa duas mães fizeram jarras com a mesma quantidade de limonada para as crianças com diferentes quantidades de limão. Considere, na figura abaixo, que os quadrados indicam a receita usada em cada jarra do seguinte modo: um quadrado escuro representa uma xícara de limonada concentrada e o quadrado branco representa uma xícara de água. A primeira mãe usou 3 xícaras de suco de limão concentrado e duas de água. A segunda mãe usou 4 xícaras de suco de limão concentrado e 3 xícaras de água.

Qual das duas jarras tem o sabor de limão mais forte? Ou eles terão o mesmo sabor? [Explicações são exigidas]

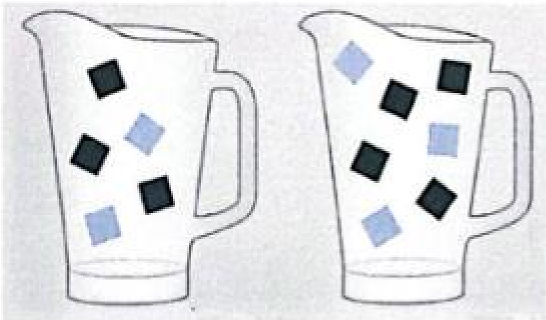
Paulo apresentou os seguintes registros escritos:

Figura 22- Registro do Paulo (Tarefa 3a)

Tarefa 3

a) Numa festa duas mães fizeram jarras com a mesma quantidade de limonada para as crianças com diferentes quantidades de limão. Considere, na figura abaixo, que os quadrados indicam a receita usada em cada jarra do seguinte modo: um quadrado escuro representa uma xícara de limonada concentrada e o quadrado branco representa uma xícara de água. A primeira mãe usou 3 xícaras de suco de limão concentrado e duas de água. A segunda mãe usou 4 xícaras de suco de limão concentrado e 3 xícaras de água.

Qual das duas jarras tem o sabor de limão mais forte? Ou eles terão o mesmo sabor?



1 xícara = 250 ml

Mãe 1: $\frac{3}{2}$ = $\frac{\text{750 ml de limão}}{\text{500 ml de água}}$ =

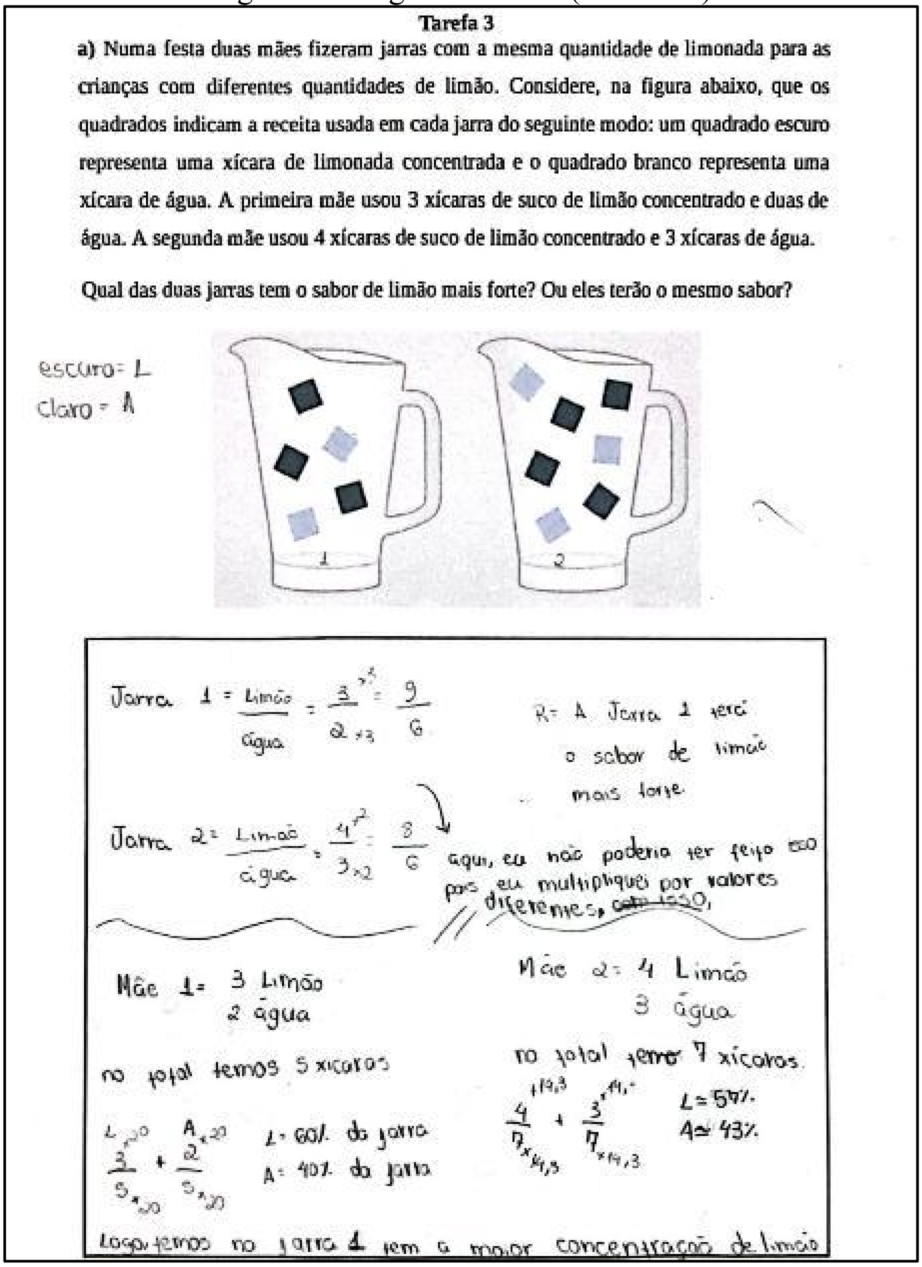
Mãe 2: $\frac{4}{3}$ $\frac{\text{1000 ml de limão}}{\text{750 ml de água}}$

Ambas terão o mesmo sabor

Compilação do autor (2024)

Rita apresentou os seguintes registros escritos:

Figura 23- Registro da Rita (Tarefa 3a)



Compilação do autor (2024)

As imagens apresentam os modos de operar evidenciados antes e depois da primeira discussão sobre a tarefa. As estratégias iniciais e individuais de Rita e Paulo foram registradas em suas folhas de atividades, enquanto as enunciações colaborativas, formuladas após o debate, encontram-se na parte inferior da folha de Rita.

A seguir, temos os seguintes resíduos de enunciações:

Paulo: “Eu coloquei que cada xícara tem 250ml, tanto de limão quanto de água. Aí eu coloquei que a mãe 1 tem 750ml de limão para 500ml de água. Já a mãe 2 tem 1000mL de limão pra 750mL de água. Nos dois casos, tem 250mL de limão que não se anulam. Você entende? Porque

1mL de água com 1mL de limão, tem o mesmo gosto entre os dois. Aí eu coloquei que ambas terão o mesmo sabor, por conta disso, sobra 250mL nas duas.”

Rita: “Eu só achei uma fração com denominador igual e deu que a primeira era mais forte.”

Pesquisadora: “Mas como você fez isso?”

Rita: “Igualei os denominadores.”

Pesquisadora: “Qual é o seu denominador?”

Rita: “Da primeira é 2 e da segunda é 3, aí eu cheguei em 6. Daí a primeira ficou 9/6 e a segunda 8/6.”

Pesquisadora: “Tá, mas o que é esse 9/6? Porque lembra que nós não estamos falando de números? Estamos falando de grandezas. O que é o 9 e o que é o 6?”

Rita: “Não sei explicar não, mas é como se… eu meio que igualei a quantidade de água…”

Pesquisadora: “O que vocês acham da resposta um do outro?”

Pesquisadora auxiliar: “Você acha que o que ele fez foi a mesma coisa que você fez?”

Podemos observar nos resíduos acima, que os participantes apresentam diferentes modos de operar. Ao considerar o volume da xícara, Paulo parece esquecer da informação que as duas jarras possuem a mesma quantidade de limonada, o que faz com que ele conclua que ambas possuem o mesmo sabor.

Já Rita, ao igualar os denominadores, faz uma comparação entre a quantidade de água e de limão em cada jarra, concluindo que a jarra 1 terá o sabor mais forte de limão. Os questionamentos feitos a ela tiveram como objetivo observar se ela conseguiu internalizar o conceito de grandeza, e poder ver se ela sabia o significado da operação feita.

Mais uma vez, podemos observar um caso em que o aluno opera, chega a uma conclusão, mas não sabe nem porquê nem como. Vejo que isso é muito comum nas salas de aula, onde os alunos apenas pensam “com o que eu já vi até aqui, o que posso fazer nessa parte?”. A falta de questionamentos e tempo para pensar e discutir faz com que isso se torne recorrente e comum.

Faço essa observação pelo fato de que, desde o início das aplicações, Rita demonstrou muita preocupação em “não saber fazer” e “errar”. Mesmo tendo sido devidamente explicado nossos objetivos, ela apresentou, em diversos momentos, uma insegurança. Imagino que isso a levou, naquele momento, a um obstáculo epistemológico: embora sua maneira de operar pudesse, potencialmente, levá-la à solução do problema, ela não prosseguiu. Esse obstáculo parece ter sido seguido de um processo de impermeabilização, no qual ela expressou não querer continuar, por acreditar não ser capaz.

Diante dessa situação, a aplicação continuou em um outro dia.

Rita: "Antes a gente tava tentando fazer de um jeito, mas como acabou naquele dia, a gente acabou se perdendo e acabamos formando outro raciocínio. Fomos voltando nas coisas que a gente tinha aprendido sobre razão e taxa e vimos que poderíamos fazer igual estávamos fazendo, com uma parte e o todo. Aí o que a gente pensou?! Na jarra 1 a gente teria 5 elementos. Aí, a gente pensou em fazer a porcentagem da quantidade de limão e de água que tem na jarra 1 e comparar as duas para descobrir qual tem mais. Na primeira jarra a gente sabe que foram 3 de limão e 5 no total."

Paulo: "Aqui a gente usou a parte e o todo."

Rita: "Isso, ⅗. Aí a gente pensou qual número multiplicado por 5 daria 100, pra gente descobrir a porcentagem. Aí a gente descobriu que é 20. Ou seja, 3 por 20 daria 60, ou seja, 60% da jarra tem limão. Aí de água, a gente tem 2/5, ou seja, 2 vezes 20 é 40, 40% de água da jarra. Aí a gente passou pra jarra 2, a jarra 2 já é meio difícil porque daria número quebrado."

Paulo: "Aí tem outra coisa também. Quando a gente fez a primeira porcentagem deu um número, aí quando a gente fez a segunda não bateu. Daí tivemos que arredondar. Por exemplo, dava 57,42% faltava 1% ali."

Rita: "A gente chegou no resultado que na jarra 2, como tem 4 de limão e 7 elementos no total, que aí deu aproximadamente 57% de limão. E a água que é 3/7 vezes 14,3 daria aproximadamente 43%."

Podemos observar que, mais uma vez, o objeto porcentagem aparece como auxílio nos modos de operar. Com as enunciações atuais, os alunos pareceram ignorar o que foi feito anteriormente, constituindo novas estipulações locais. Quanto a isso, se justificaram:

Paulo: "Você pediu para a gente tentar fazer da minha forma ou da forma da Rita. A gente notou que a dela estava errada, porque ela multiplicou por 2 em uma fração e na outra por 3, então multiplicou por dois números diferentes."

Rita: "É como se eu tivesse colocado uma quantidade em uma e na outra não."

Paulo: "E a minha a gente achou que não se anularia os gostos."

A partir desse momento, consideramos haver a oportunidade de retomar as enunciações dos alunos , atuando na Zona de Desenvolvimento Proximal, de Vygotsky. Como Lins (2012) esclarece:

> A Zona de Desenvolvimento Proximal, de Vygotsky, por exemplo, pode ser explicada, nos termos do MCS: o *processo* no qual a pessoa passa de ser capaz de fazer algo com ajuda/presença de uma pessoa mais 'experiente', para ser capaz de fazer aquele algo 'sozinho', é o processo no qual a pessoa passa de 'precisar *emprestar a legitimidade de um terceiro para poder dizer o que diz*

> *naquele lugar e momento',* para 'fazer de maneira autônoma, *por ter internalizado interlocutores, legitimidades'* (é melhor ainda dizer 'por ter sido internalizado por interlocutores, legitimidades') (Lins 2012, p.32, grifos do autor)

E continua:

> Na ZPD, segundo o MCS, o que se internaliza não é o conteúdo, não são os conceitos, e sim legitimidades: *a pessoa já era capaz de fazer, mas não sabia que nesta ou naquela situação aquele modo de produção de significado era legítimo* (Lins, 2012, p. 32).

Podemos observar, por exemplo, que quando Rita encontra os denominadores iguais e Paulo supõe 250 ml para cada xícara, eles são capazes de apresentar uma resolução, mas não encontram legitimidade naquilo.

Diante desse cenário, a pesquisadora busca fazer as intervenções:

Pesquisadora: "A dificuldade que você teve anteriormente, era que as duas jarras tinham 250ml a mais, né? E você conseguiu enxergar aí? Ainda acha que elas têm o mesmo gosto?"

Paulo: "Não, quando você para pra pensar que o gosto não se anula, essa daqui tem mais porque ela tem mais limão que a outra."

Pesquisadora: "Ela tem mais limão, mas também tem mais quantidade no total, né?"

Paulo: "Não, mas qual teria o gosto mais concentrado de limão?! É a que tem mais limão."

Pesquisadora: "Mas pensa que você tem duas jarras. Em uma você tem 10 elementos no total, sendo que 2 são de limão, e na outra você tem 2 no total com apenas um de limão. Qual é mais forte?"

Paulo: "Uai, depende. Nada me garante que os gostos se anulam."

Rita: "A mais forte é a que tem 1 limão."

Pesquisadora: "Isso. A gente precisa olhar a relação da água com o limão em um todo. Por exemplo, se eu tenho um copo e uma jarra de suco. Peguei o suco dessa jarra e enchi o copo. O suco tem o mesmo gosto, já que ele vem da jarra? Concordam? Tanto a jarra quanto o copo possuem o mesmo sabor."

Rita e Paulo: "Aham."

Pesquisadora: "Agora, eu espremi um limão na jarra e um limão no copo."

Paulo: "O copo vai estar mais forte."

Pesquisadora: "Sim, o copo vai estar mais forte, mas concorda que eu tenho um limão a mais nos dois, tanto no copo quanto na jarra? Antes, a justificativa de vocês era que nos exercícios as jarras possuíam o mesmo gosto, já que ambas tinham um limão a mais, só que agora eu to falando de uma jarra e um copo.”

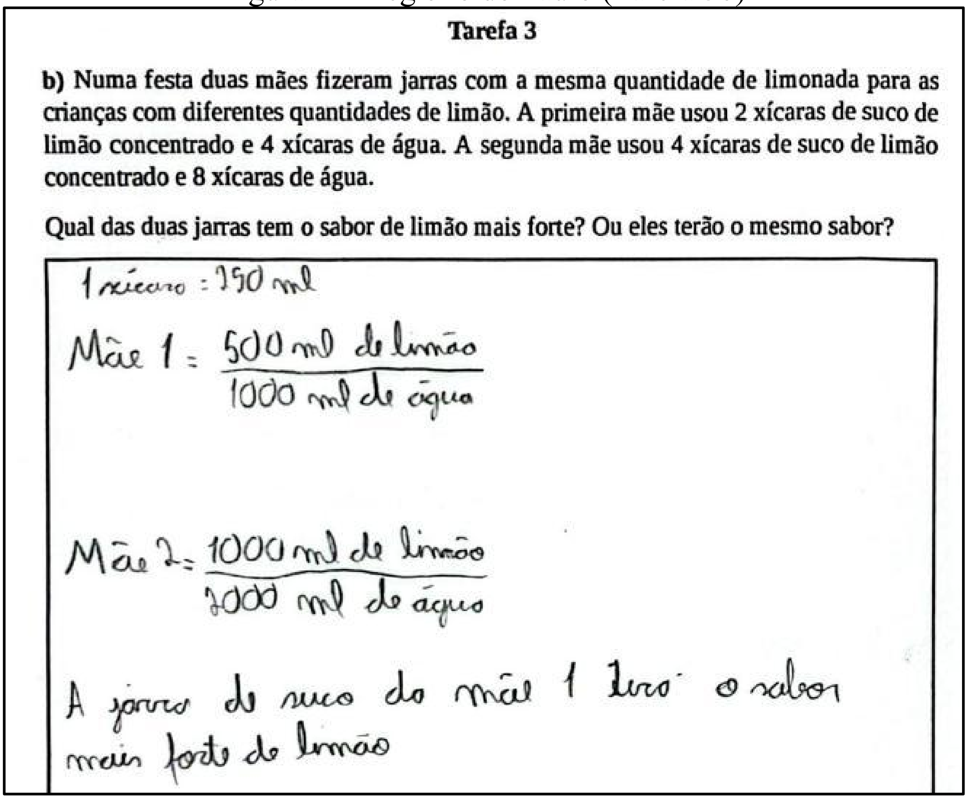
Rita: “Entendi, mas posso usar a porcentagem igual eu fiz? Acho mais fácil de enxergar.”

Pesquisadora: “Sim, é mais uma forma de conseguir ver.”

Paulo: “Na b e na c nós fizemos a mesma coisa, só que dessa vez eu não escrevi, fizemos tudo na folha da Rita.”

Abaixo temos os registros da segunda e terceira parte da tarefa 3, escritos de Paulo - feitos antes da discussão acima.

Figura 24- Registro do Paulo (Tarefa 3b)



Tarefa 3

b) Numa festa duas mães fizeram jarras com a mesma quantidade de limonada para as crianças com diferentes quantidades de limão. A primeira mãe usou 2 xícaras de suco de limão concentrado e 4 xícaras de água. A segunda mãe usou 4 xícaras de suco de limão concentrado e 8 xícaras de água.

Qual das duas jarras tem o sabor de limão mais forte? Ou eles terão o mesmo sabor?

1 xícara = 250 ml

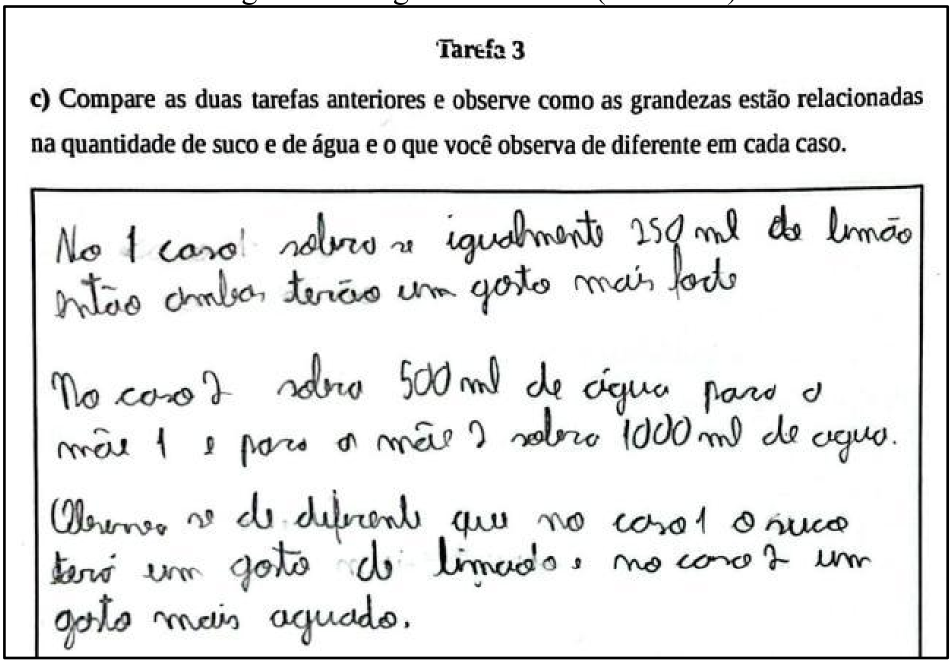
Mãe 1 = $\frac{\text{500 ml de limão}}{\text{1000 ml de água}}$

Mãe 2 = $\frac{\text{1000 ml de limão}}{\text{2000 ml de água}}$

A jarra do suco da mãe 1 terá o sabor mais forte de limão

Compilação do autor (2024)

Figura 25- Registro do Paulo (Tarefa 3c)



Tarefa 3

c) Compare as duas tarefas anteriores e observe como as grandezas estão relacionadas na quantidade de suco e de água e o que você observa de diferente em cada caso.

No 1 caso sobro se igualmente 250 ml de limão então ambas terão um gosto mais forte

No caso 2 sobra 500 ml de água para a mãe 1 e para a mãe 2 sobra 1000 ml de água.

Observamos se de diferente que no caso 1 o suco terá um gosto de limão e no caso 2 um gosto mais aguado.

Compilação do autor (2024)

As folhas da tarefa de Rita apresentam os registros escritos feitos antes e após a discussão da primeira parte.

Figura 26- Registro da Rita (Tarefa 3b)

Tarefa 3

b) Numa festa duas mães fizeram jarras com a mesma quantidade de limonada para as crianças com diferentes quantidades de limão. A primeira mãe usou 2 xícaras de suco de limão concentrado e 4 xícaras de água. A segunda mãe usou 4 xícaras de suco de limão concentrado e 8 xícaras de água.

Qual das duas jarras tem o sabor de limão mais forte? Ou eles terão o mesmo sabor?

Jarra 1 = $\frac{\text{limão}}{\text{água}} = \frac{2^{\div 2}}{4_{\div 2}} = \frac{1}{2}$ R- Terão o mesmo sabor.

Jarra 2 = $\frac{\text{limão}}{\text{água}} = \frac{4^{\div 4}}{8_{\div 4}} = \frac{1}{2}$

nova conta

Jarra 1 = 2L
4A

$\frac{2^{\times 16,5}}{6_{\times 16,5}} + \frac{4^{\times 16,5}}{6_{\times 16,5}} =$ $L \simeq 33\%$
$A \simeq 67\%$

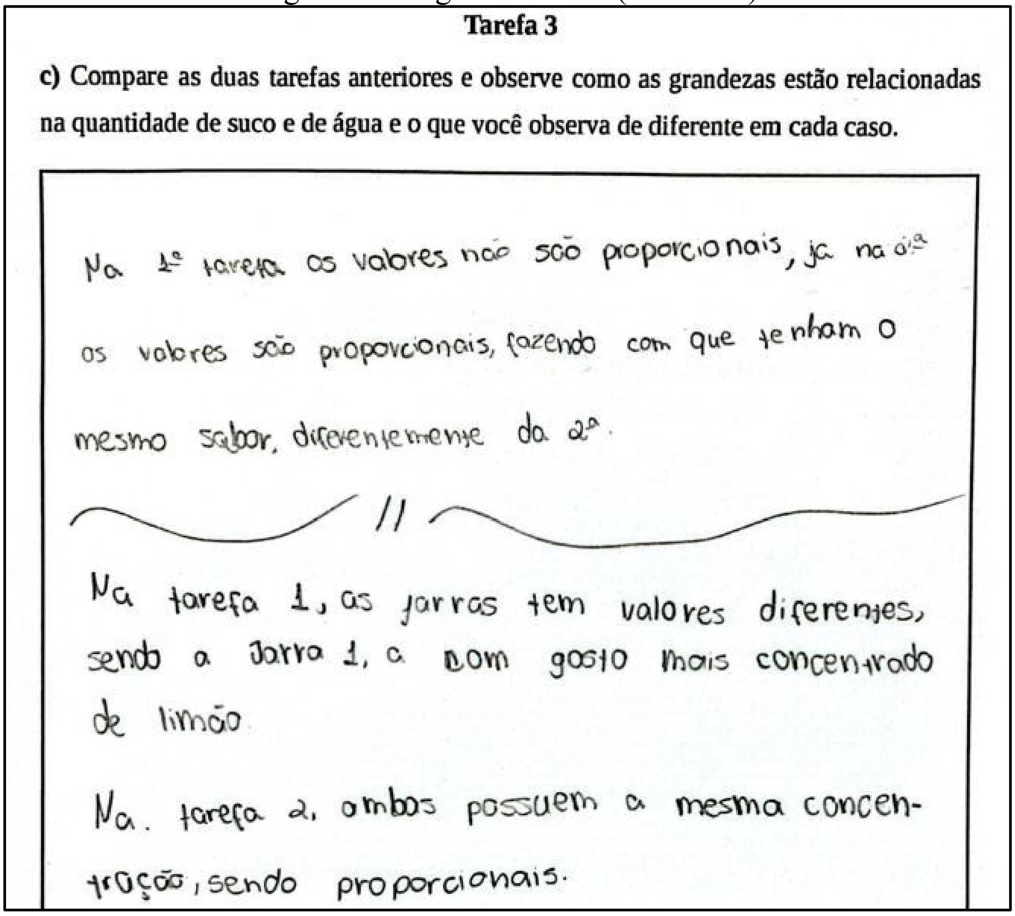
Jarra 2 = 4L
8A

$\frac{4}{12} + \frac{8}{12} =$ $L \simeq 33\%$
$A \simeq 67\%$

mesmo sabor

Compilação do autor (2024)

Figura 27- Registro da Rita (Tarefa 3c)



Tarefa 3

c) Compare as duas tarefas anteriores e observe como as grandezas estão relacionadas na quantidade de suco e de água e o que você observa de diferente em cada caso.

Na 1ª tarefa os valores não são proporcionais, já na 2ª os valores são proporcionais, fazendo com que tenham o mesmo sabor, diferentemente da 2ª.

//

Na tarefa 1, as jarras tem valores diferentes, sendo a Jarra 1, a com gosto mais concentrado de limão.

Na tarefa 2, ambos possuem a mesma concentração, sendo proporcionais.

Compilação do autor (2024)

Neste momento, buscávamos, mais uma vez, analisar a compreensão dos participantes diante de situações proporcionais e não proporcionais.

Rita: “Essa a gente chegou na conclusão, pela conta da porcentagem, que elas tinham o mesmo sabor. Ambas tinham 33% de limão e 67% de água.”

Pesquisadora: “Vocês viram pela porcentagem, mas qual a relação entre essas duas coisas?”

Paulo: “Se simplificar, elas ficam irredutíveis.”

Rita: “Elas são equivalentes.”

Pesquisadora: “Isso. Em uma eu tenho 4 de água e metade de limão, na outra eu tenho 8 de água e metade de limão também.”

Paulo: “Aí se a gente usa aquele mesmo exemplo que você deu, de espremer o limão aqui e ali, dá a mesma coisa?”

Pesquisadora: “Sim, isso.”

Rita: “Aí na letra c eu não concluí muita coisa não, só o óbvio mesmo.”

Pesquisadora: “E o que é o óbvio?”

Rita: “Que na letra a, as jarras têm valores diferentes, sendo a jarra 1 com o gosto mais concentrado de limão. E, na tarefa 2, elas eram proporcionais e ambas possuem a mesma concentração.”

Pesquisadora: “Na sua fala, você diz que ambas são proporcionais. Então, o que isso quer dizer?”

Rita: “Que elas têm a mesma proporção de água para suco e de suco para água. Como se fosse a mesma receita com medidas diferentes. É como se você fosse fazer um brigadeiro e dividisse a receita.”

Paulo: “Isso, se você for fazer pra uma pessoa é de um jeito, pra duas é só dobrar a receita.”

A próxima tarefa buscou iniciar com os participantes uma análise de como as grandezas envolvidas se relacionam.

Tarefa 4

O time de futebol da escola está disputando um torneio em um clube fora da cidade e você, como representante dos estudantes, foi designado(a) para organizar a saída das Vans que levarão os atletas, a comissão técnica e a torcida para o clube, num total de 264 pessoas. A informação que recebeu da direção da escola é que a empresa contratada para fazer o transporte disponibilizou Vans, todas com capacidade de 12 passageiros, e que só partirão para o destino com a sua capacidade máxima de lotação. No dia do jogo, você foi informado(a), ao chegar na escola, que às 6h da manhã partiram 3 vans com 36 passageiros levando os atletas e a comissão técnica do time e que as próximas Vans sairão com capacidade máxima de acordo com a seguinte tabela:

Horários	Nº de Vans	Nº total de passageiros
7h	5	
7h30	4	
8h	10	

a) Complete a tabela com o número total de passageiros que partirão nos horários determinados.

b) Qual a relação que podemos observar quando comparamos o número de passageiros pelo número de Vans em cada horário de partida das Vans?

Os seguintes registros escritos foram apresentados por Paulo:

Figura 28- Registro do Paulo (Tarefa 4)

Tarefa 4

O time de futebol da escola está disputando um torneio em um clube fora da cidade e você, como representante dos estudantes, foi designado(a) para organizar a saída das Vans que levarão os atletas, a comissão técnica e a torcida para o clube, num total de 264 pessoas. A informação que recebeu da direção da escola é que a empresa contratada para fazer o transporte disponibilizou Vans, todas com capacidade de 12 passageiros, e que só partirão para o destino com a sua capacidade máxima de lotação. No dia do jogo, você foi informado(a), ao chegar na escola, que às 6h da manhã partiram 3 vans com 36 passageiros levando os atletas e a comissão técnica do time e que as próximas Vans sairão com capacidade máxima de acordo com a seguinte tabela:

Horários	Nº de Vans	Nº total de passageiros
7h	5	60
7h30	4	48
8h	10	120

a) Complete a tabela com o número total de passageiros que partirão nos horários determinados.

b) Qual a relação que podemos observar quando comparamos o número de passageiros pelo número de Vans em cada horário de partida das Vans?

A relação que podemos observar é que cada van comporta 12 pessoas.

Compilação do autor (2024)

Rita apresentou os seguintes registros escritos:

Figura 29- Registro da Rita (Tarefa 4)

Horários	Nº de Vans	Nº total de passageiros
7h	5	60
7h30	4	48
8h	10	120

a) Complete a tabela com o número total de passageiros que partirão nos horários determinados.

b) Qual a relação que podemos observar quando comparamos o número de passageiros pelo número de Vans em cada horário de partida das Vans?

6h = 36 P / 264 P — 264 - 100% ; 36 x — x: 13,6% — 3v / 22 — 22 - 100% ; 3 - x — 22x . 300 — x: 13,6%

7h. 60 P / 264 P — 264 - 100 ; 60 x — 264x 6000 — x: 22,7 — 5v / 22 — 22 - 100% ; 5 - x — 22x : 500 — x: 22,7%

7.30h 48 P / 264 — 264 - 100 ; 48 x — 264x : 4800 — x: 18,18% — 4 / 22 — 22 - 100% ; 4 - x: 18,18% — 22x : 400

8h 120 P / 264 — 264 - 100 ; 120 - x — 264x : 12000 — x: 45,45% — 10 / 22 — 22 - 100% ; 10 x — 22x : 1000 — x: 45,45%

Compilação do autor (2024)

Para esta tarefa, os participantes fizeram as seguintes enunciações orais:

Rita: "Primeiro, eu circulei as informações principais, então 264 pessoas, 12 passageiros (que seria uma van), 3 vans e 36 passageiros. Aí eu fui multiplicando o número de vans pelo total de passageiros em cada van que seria 12."

Paulo: "Aí deu 60 a primeira, 48 a segunda e 120 a última. Aí na letra (b), no início eu não pensei nada não, mas depois eu analisei uma coisa. Se a gente analisar o horário, a gente pode ver que tem 30 minutos de diferença em cada um, então, da pra meio que concluir que, na primeira, a cada 6 minutos, sai uma van com 12 passageiros. Na segunda, de 7h30 à 8h, podemos dizer que a cada 7,5 minutos sai uma van com 12 pessoas."

Rita: "Eu acho que eu não concordo muito com ele não, porque não fala nada dessa informação."

Pesquisadora: “Mas qual foi a relação que você observou?”

Rita: “Pede a relação entre o número de passageiros e o número de vans. Certo? A gente sabe que na van de 6h… Primeiro vamos ver os passageiros. Tem 264 pessoas no total e nessa van nesse horário saíram 36 pessoas. Aí ficaria 36, que é a parte e 264 que é o todo. Aí eu fiz a mesma coisa, só que dessa vez eu fiz por regra de 3, porque achei mais fácil. A gente sabe então que saíram 13,6% do total de pessoas nesse primeiro horário. Aí a gente vai analisar as vans. A gente sabe que saíram 3 vans de 22 no total. Eu só somei os números de vans. Aí fiz regra de 3 de novo e deu 13,6% das vans. Aí fui fazendo isso em todas. Aí na de 7h, que é 60 pessoas, deu 22,7% do total de pessoas. As vans que são 5, deu 22,7%. Na de 7h30 que é 48, deu 18,18% de pessoas e 18,18% de vans. E de 8h deu 45,45% de pessoas e 45,45% de vans. Ou seja, a gente conclui que a cada horário sai a mesma porcentagem de pessoas e a mesma porcentagem de vans, quando comparado com o total.”

Pesquisadora: “E se a pergunta fosse assim: Qual a relação que podemos observar quando comparamos o número de passageiros e o número de vans?”

Rita: “Como assim?”

Pesquisadora: “Por exemplo, 7h, não precisa saber o horário, só vou colocar para identificar. Em algum horário saíram 5 vans com 60 passageiros. Em outro horário saíram 4 vans com 48 passageiros. Em outro horário 10 vans com 120 passageiros.”

Paulo: “A relação entre o número de pessoas e de vans seria que ambas apresentam a mesma porcentagem que seu todo.”

Rita: “Uai, mas foi isso que eu falei.”

Paulo: “É verdade, é a mesma coisa.”

Pesquisadora: “Mas sem comparar o todo, por exemplo, se saíram 5 vans e 60 passageiros. 4 vans e 48 passageiros. 10 vans e 120 passageiros. O que está acontecendo aí?”

Paulo: “Que a cada 1 van, tem 12 passageiros.”

Pesquisadora: “Eu posso dizer que quanto mais vans, mais passageiros? É uma relação, não é?”

Paulo: “Sim.”

Rita: “Sim.”

Paulo: “Ou ao contrário também.”

Pesquisadora: “Vocês acham que o número de vans e o número de passageiros são proporcionais?”

Paulo: “Sim.”

Rita: “Pera aí. Porque 36 é proporcional a 3. 60 por 5. 48 por 4. (pensando)
É, são.”

Pesquisadora: “Nessa que acabamos de fazer, quais são as grandezas? Vocês já conseguiram identificar o que é uma grandeza?”

Rita e Paulo: “Seria o número de passageiros e o número de vans.”

Pesquisadora: “Então agora, é muito importante que a gente identifique as grandezas e as relações entre elas.”

Ao entregar a ficha com a tarefa 4, os participantes comentaram que a questão estava “estranha”, pois era “fácil demais”. Acredito que a estranheza diante da facilidade da questão fez com que os alunos procurassem uma *pegadinha* escondida no enunciado. Essa percepção se deve ao fato de que as enunciações apresentadas expõem cálculos e observações mais elaboradas do que o necessário. Por exemplo, Paulo tentou achar alguma informação com base no horário de saída de cada van, e Rita procurou relacionar o número de vans que saíram com o número de pessoas. Ao encontrar a porcentagem de cada grandeza, podemos observar que ela chega, por um caminho distinto do de Paulo, à conclusão de que, quanto maior o número de vans, maior o número de pessoas.

A partir da próxima tarefa, o objetivo era analisar as grandezas envolvidas e como elas se relacionavam no que diz respeito ao crescimento ou decrescimento de cada uma.

Tarefa 5

A turma do 9º está produzindo os convites para a festa de primavera na escola. Eles esqueceram de mandar fazer a impressão dos convites que precisam ser entregues até o final das aulas daquela manhã. O pessoal da gráfica da escola informou que todas as cópias do convite utilizando 4 impressoras levarão 60 minutos para serem impressas, mas que seria possível usar 6 impressoras iguais para fazer os convites, mas o custo seria maior. Como eles estão com pressa, tentaram calcular com as informações que tinham qual o tempo que seis impressoras levarão para produzir os convites. Ajude-os a calcular esse tempo.

O seguinte diálogo aconteceu enquanto os participantes tentavam resolver a tarefa:

Rita: “Mas quando é … inversa a gente só multiplica cruzado né?”

Paulo: “É, aí deu o que o teu? Não isso aqui ta errado é 90.”

Rita: “Mas 90?”

Paulo: “É. 4 vezes 90 é 360. Só que tá errado. Aí eu inverti, coloquei o x em cima e o 60 embaixo.”

Rita: “Mas não pode.”

Paulo: “Mas esse aí tá errado. 90 não pode ser também.”

Rita: “Mas quando é inversamente proporcional, só multiplica cruzado.”

Paulo: “É, eu também acho que tem que colocar o 60 em cima e o x embaixo. Mas quando eu fiz não deu, aí eu mudei.”

Paulo: “Ou também eu poderia mudar aqui, porque com a gente olhou quanto mais, a setinha ta pra cima, 6 em cima, 4 embaixo, 6 é maior.”

Rita: “Não, mas aí você viajou.”

Paulo: “Mas tinha que ter dado menos. Não pode dar 90. Não bate.”

Rita: “Professora, você tem certeza que essa questão tá certa?”

Pesquisadora: “Sim.”

Rita: “Não, Paulo. Mas eu tenho certeza que quando é inversamente proporcional…”

Paulo: “Mas não dá, eu também fiz assim e não deu. Não bate o 90.”

Paulo: “Será que esse negócio que fala sobre o custo ser maior…”

Rita: “Não, tem nada a ver.”

Paulo: “É aleatório.”

Paulo: “É, porque aí seria o 4 sobre o 6 e o 60 sobre o x. Por que a gente tem o 4 pro 60 e o 6 pra x.”

Rita: “Então, uai.”

Paulo: “Aí dá 90, não pode.”

Paulo: “Quanto mais impressoras, menos tempo. Quanto mais tempo, menos…”

Rita: “Tem que ser em menos tempo, tá certo. Mas a ordem das setas não importa.”

Paulo: “Não importa, vai multiplicar cruzado da mesma forma.”

Rita: “Professora, isso tá errado. Tem certeza que isso tá certo mesmo?”

Pesquisadora: “Sim.”

Rita: “Então eu vou deixar assim.”

Paulo: “Bota o 90 aí.”

Rita: “Ô Paulo, mas é a mesma coisa se eu multiplicar reto aqui, né?”

Paulo: “É inversamente.”

Rita: “Mas se é inversamente, multiplico reto, não?”

Paulo: “Inversamente multiplica cruzado.”

Pesquisadora: “Por que vocês não tentam mudar a forma de pensar? Ao invés de seta para cima e seta pra baixo.”

Paulo: “Tá. Se 4 leva 60, 1 leva 15.”

Rita: “Mas eu acho que… Não, não pode tá certo.”

Paulo: “E se a gente botar o número total de convites?”

Rita: “Não, Paulo.”

Paulo: “Mas assim dá.”

Rita: “Pra que você vai fazer isso?”

Paulo: “Tem que fazer isso.”

Depois de uma pausa na discussão, voltaram a pensar e continuaram:

Paulo: “Eu acho que eu entendi aqui, pera aí.”

Rita: “Paulo, a gente só fez errado mesmo. Eu tenho certeza que quando é inversamente, a gente troca para multiplicar cruzado. Porque quando é normal, a gente multiplica reto. Não… a gente já multiplica cruzado. É… Ah, era só a gente multiplicar reto.”

Rita: “A gente não podia ter feito esse cálculo de 6 impressoras, porque a gente desconsidera que aqui vai mais rápido. Porque a gente pega o tempo que cada uma trabalha aqui, só que a gente não sabe quanto tempo a outra trabalha. Você entendeu o que eu quis dizer?”

Paulo: “Aí é x (tempo que a outra trabalha).”

Rita: “Sim, eu to falando porque a gente só tinha multiplicado aqui por 15. Você lembra disso?”

Pesquisadora: “Sim, se elas têm a mesma eficiência.”

Rita: “Sim, mas depois elas vão mais rápido. A gente não pode fazer isso que a gente fez.”

O diálogo acima deixa claro que os participantes da pesquisa já haviam tido contato com a busca do valor desconhecido em grandezas diretamente e inversamente proporcionais. As trocas entre eles indicam que aprenderam a resolver esse tipo de tarefa usando o “método das setas”, método esse que está presente em grande parte dos livros didáticos utilizados nas salas de aulas.

No entanto, através da discussão, também podemos observar que tanto Rita quanto Paulo encontram um resultado que não lhes fazia sentido (90). Isso nos leva a supor que, ao aprender esse conteúdo na escola, eles memorizaram que se usa “multiplicação cruzada quando é diretamente proporcional e multiplicação reta quando é inversamente”. Ainda assim, mesmo recordando o procedimento, eles não conseguiram realizar a tarefa.

Diante disso, podemos nos questionar o tipo de ensino que privilegia o uso apenas de técnicas como aquele presente no que chamamos de ensino tradicional vigente. Nesse modelo, nossos alunos decoram métodos resolutivos que, embora possam ser úteis para resolver exercícios logo após a explicação, perdem sua aplicabilidade a longo prazo. O procedimento, uma vez desvinculado do seu significado, acaba sendo esquecido.

Nos registros escritos desta tarefa, Paulo apresenta as seguintes enunciações:

Figura 30- Registro do Paulo (Tarefa 5)

Tarefa 5

A turma do 9º está produzindo os convites para a festa de primavera na escola. Eles esqueceram de mandar fazer a impressão dos convites que precisam ser entregues até o final das aulas daquela manhã. O pessoal da gráfica da escola informou que todas as cópias do convite utilizando 4 impressoras levarão 60 minutos para serem impressas, mas que seria possível usar 6 impressoras iguais para fazer os convites, mas o custo seria maior. Como eles estão com pressa, tentaram calcular com as informações que tinham qual o tempo que seis impressoras levarão para produzir os convites. Ajude-os a calcular esse tempo.

IM	MIN
4	x
6	60

$6x = 240$

$x = \frac{240}{6}$ $\quad x = 40$

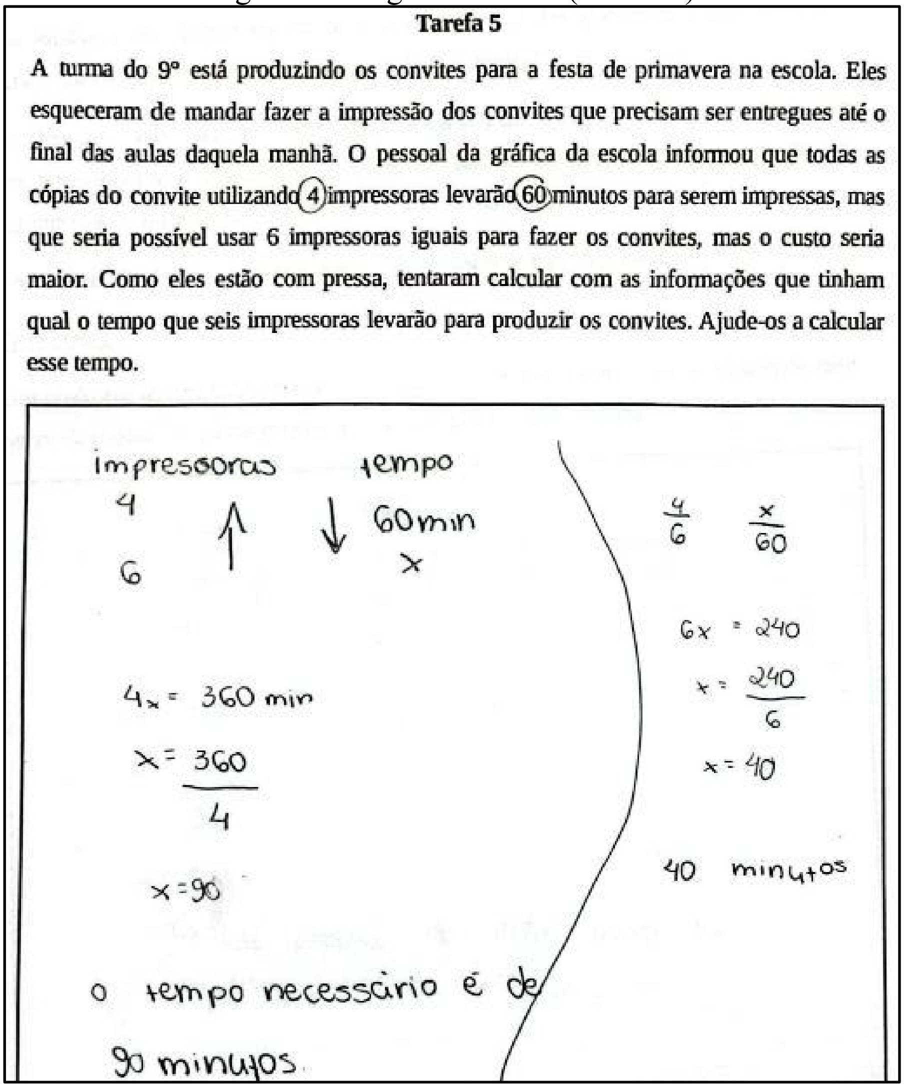
1 impressora leva 15 minutos para imprimir 3 convites.

1 impressoras leva 10 minutos para imprimir 2 convite.

Compilação do autor (2024)

Abaixo, temos os registros escritos de Rita:

Figura 31- Registro da Rita (Tarefa 5)



Tarefa 5

A turma do 9º está produzindo os convites para a festa de primavera na escola. Eles esqueceram de mandar fazer a impressão dos convites que precisam ser entregues até o final das aulas daquela manhã. O pessoal da gráfica da escola informou que todas as cópias do convite utilizando 4 impressoras levarão 60 minutos para serem impressas, mas que seria possível usar 6 impressoras iguais para fazer os convites, mas o custo seria maior. Como eles estão com pressa, tentaram calcular com as informações que tinham qual o tempo que seis impressoras levarão para produzir os convites. Ajude-os a calcular esse tempo.

Compilação do autor (2024)

Após algum tempo buscando soluções, as seguintes enunciações orais foram apresentadas pelos participantes:

Rita: “Primeiro, eu coloquei as grandezas, ou seja, impressoras e o tempo. É como se 4 demorasse 60 e 6 a gente não sabe o tempo certo. Aí a gente percebe que quanto mais impressoras a gente tiver, menor vai ser o tempo de produção. Até porque esse é o objetivo. Aí, a gente observa que elas são inversamente proporcionais, porque quanto maior, menor o tempo. Aí, depois da gente debater muito, a gente chegou à conclusão que quando é inversamente proporcional, a gente troca uma das e multiplica cruzado. Né? Aí multiplicando cruzado ficaria 6x = 240, x=240/6, x=40. Ou seja, demoraria 40 minutos.”

Paulo: “Fiz isso também, só que eu fiz de outra forma. Coloquei que são 12 convites no total pra imprimir. Aí uma impressora leva 15 minutos pra imprimir 3. Durante esses 15 minutos a gente pode considerar que a cada 5 minutos 1 convite é feito. Aí na 2ª eu escrevi: uma impressora leva x minutos para imprimir 2 convites. Se as impressoras têm a mesma eficiência e na 1ª ela demora 3 pra 15, só que na outra ela demora 2, então o que eu pensei… Se aqui ela faz 1 a cada 5, aqui ela vai fazer 2 a cada 10, porque a eficiência é a mesma. Aí eu coloquei que uma impressora leva 10 minutos para imprimir 2 convites."

Pesquisadora: "Mas ele está perguntando quanto tempo elas levam para produzir todos os convites."

Paulo: "Então… na 1ª eram 4 impressoras, a gente vai multiplicar tudo por 4, aí vai dar 4, 60 e 12. Nessa daqui, era 6, vai dar 6, 60 e 12. Deu a mesma coisa. Deu 60 minutos."

Pesquisadora: "Então ficou diferente do que ela fez?"

Paulo: "Da outra forma que eu fiz deu 40, mas dessa deu 60."

Rita: "Ah, eu acho que ele não pode fazer isso não, porque ele tá dificultando um negócio que era pra ser fácil. Ele não sabe a quantidade de convites, para que que ele ta fazendo isso?"

Paulo: "Uai, eu tenho que botar um número."

Pesquisadora: "Olha aqui, vou fazer de outro jeito… Mas sem seta para cima e para baixo."

Neste momento, a pesquisadora faz uma intervenção, buscando apresentar um modo de operar que não dependa de setas, mas apenas da interpretação da tarefa.

Pesquisadora: "Eu coloquei uma tabela com o número de impressoras e o tempo. 4 impressoras gastam 60 minutos. A gente quer descobrir 6 impressoras. De cara assim fica difícil, então vou analisar outras coisas. Por exemplo, se eu tiver 8 impressoras…"

Paulo: "120."

Pesquisadora: "Por quê?"

Paulo: "Porque é o dobro."

Rita: "Não. Paulo, sabe por que você tá fazendo isso? Porque você tá achando que cada impressora vai imprimir a mesma… Tipo assim, essas 4 vão imprimir a mesma quantidade que essas 8."

Pesquisadora: "Então seria 30."

Rita: "Exatamente."

Pesquisadora: "Então olha só, quanto mais impressoras eu tiver, menos tempo eu vou gastar. O que aconteceu do 4 pro 8?"

Paulo: "Você multiplicou por 2."

Pesquisadora: "Isso mesmo, eu dobrei. Certo?"

Paulo: "Sim"

Pesquisadora: “E o que acontece do 60 pro 30?”

Paulo: “Você divide por 2.”

Pesquisadora: “Eu divido por 2. Concorda que do 30 pro 60, voltando aqui, eu multipliquei por 2?”

Paulo: “Sim, entendi.”

Pesquisadora. “Só que eu quero chegar nas 6 impressoras. Como eu posso fazer isso?”

Paulo: “Aqui você pode multiplicar por 1,5.”

Pesquisadora: “Ok, mas vamos tentar usar número natural?”

Paulo: “Eu posso triplicar e dividir por 2.”

Pesquisadora: “Se eu triplicar o número de impressoras eu vou ter 12 impressoras. E aí quanto tempo eu vou ter?”

Paulo: “20, divido por 3.”

Pesquisadora: “E agora se eu coloco pela metade o número de impressoras, o meu tempo…”

Paulo: “Dobra, vai dar 40.”

Pesquisadora: “Tudo bem com a ideia da tabela?”

Paulo: “Sim.”

Pesquisadora: “Então, quanto mais impressoras, menos tempo. Quanto menos impressoras, mais tempo. É o que vocês já falaram, elas são inversamente proporcionais, porque enquanto uma cresce, a outra decresce. Numa mesma proporção.”

Paulo: “Então, aqui eu to errado porque eu deveria ter subtraído o 20 né?”

Pesquisadora: “Aí tá errado porque você supôs um valor. Se supor outro, vai encontrar outro número.”

Após essa discussão, os participantes pareceram compreender melhor a questão e comentaram ser mais fácil do que usar as setas. Depois dessa tarefa, um pequeno texto apresentando os tipos de situações que podem ocorrer foi apresentado aos alunos.

A próxima tarefa apresentava seis problemas para serem analisados: quais eram as grandezas e identificar se elas eram diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou se não havia proporcionalidade. Neste momento, o objetivo ainda não era resolver os problemas, mesmo assim, eles o fizeram.

As imagens abaixo apresentam os registros de Paulo e Rita para os 6 problemas.

Figura 32- Registro do Paulo (Tarefa 6 - Problema 1)

Problema 1:

Um professor lê aproximadamente 30 páginas de um livro em duas horas. Mantendo esse ritmo, de quanto tempo ele precisa para ler um livro de 225 páginas?

a) as grandezas são horas e páginas

b)

Horas	Páginas
2	30
15	225

×7,5 ×7,5

c) são diretamente proporcionais

Compilação do autor (2024)

Figura 33- Registro do Paulo (Tarefa 6 - Problema 2)

Problema 2:

Um veterinário cuida, em sua clínica, de filhotes de gatos abandonados na rua. Ele tem 4 gatos e o saco de ração que ele compra para alimentá-los, cada um deles, com a mesma quantidade de ração, dura 3 dias. Ao terminar mais um saco de ração, 2 gatos foram adotados e foram embora com seus novos donos. Agora, com esse novo número de gatos, quantos dias vai durar o saco de ração?

a) as grandezas são gatos e dias

b)

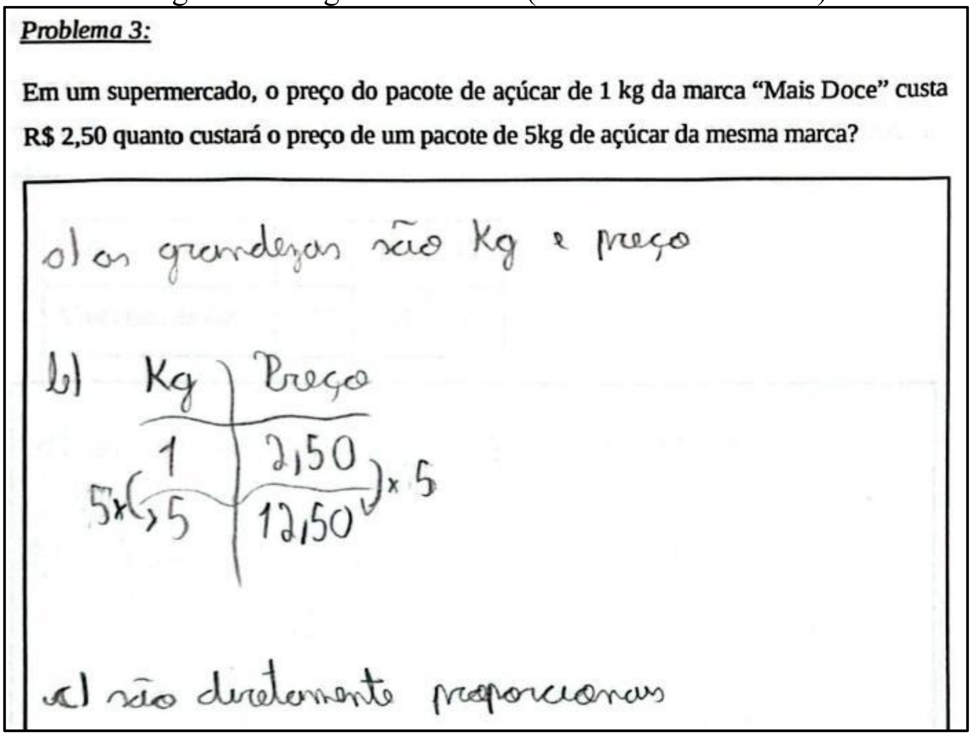
Gatos	Dias
4	3
2	6

2÷ ×2

c) são inversamente proporcionais

Compilação do autor (2024)

Figura 34- Registro do Paulo (Tarefa 6 - Problema 3)



Problema 3:

Em um supermercado, o preço do pacote de açúcar de 1 kg da marca "Mais Doce" custa R$ 2,50 quanto custará o preço de um pacote de 5kg de açúcar da mesma marca?

a) as grandezas são Kg e preço

b)

Kg	Preço
1	2,50
5	12,50

5x) x 5

c) são diretamente proporcionais

Compilação do autor (2024)

Figura 35- Registro do Paulo (Tarefa 6 - Problema 4)

Problema 4:

Os pais de Camila, registraram sua altura aos 5 e aos 10 anos como mostra a tabela abaixo e querem saber quanto será sua altura quando tiver 15 anos. O que você pode dizer a eles?

Idade (em anos)	5	10	15
Altura (em metros)	1,12	1,60	?

a) as grandezas são altura e anos

b)

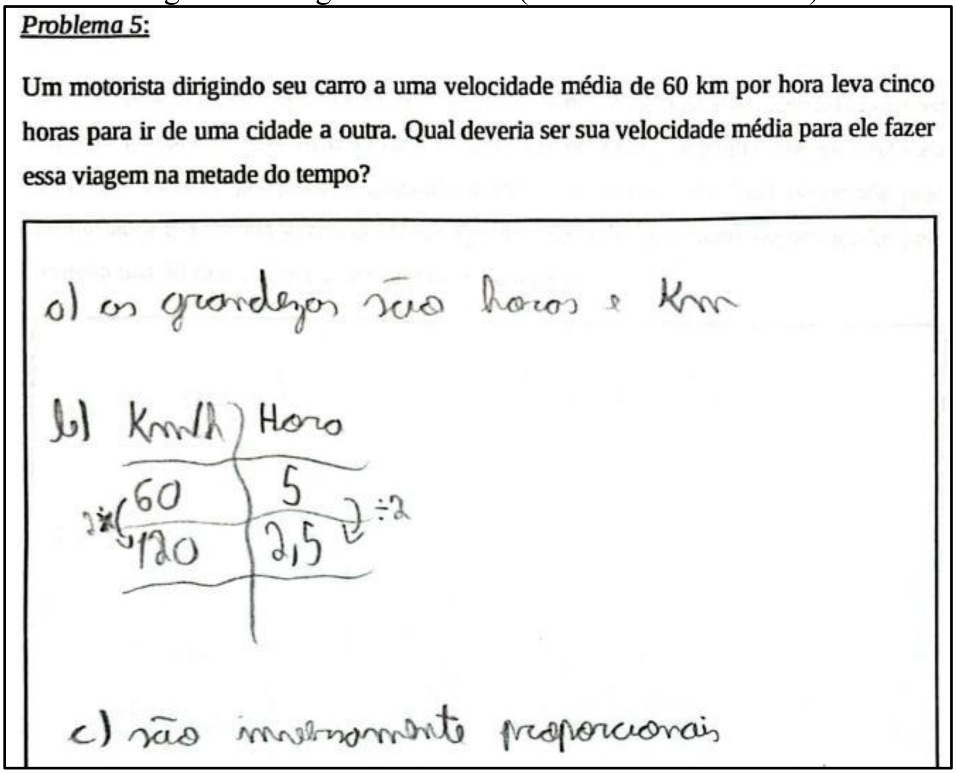
Anos	Altura
5	1,12
10	1,60
15	x

x ~> não se pode atribuir um valor exato, pois a pessoa pode crescer mais ou menos que o esperado

c) não é nem diretamente nem inversamente

Compilação do autor (2024)

Figura 36- Registro do Paulo (Tarefa 6 - Problema 5)



Problema 5:

Um motorista dirigindo seu carro a uma velocidade média de 60 km por hora leva cinco horas para ir de uma cidade a outra. Qual deveria ser sua velocidade média para ele fazer essa viagem na metade do tempo?

a) os grandezas são horas e Km

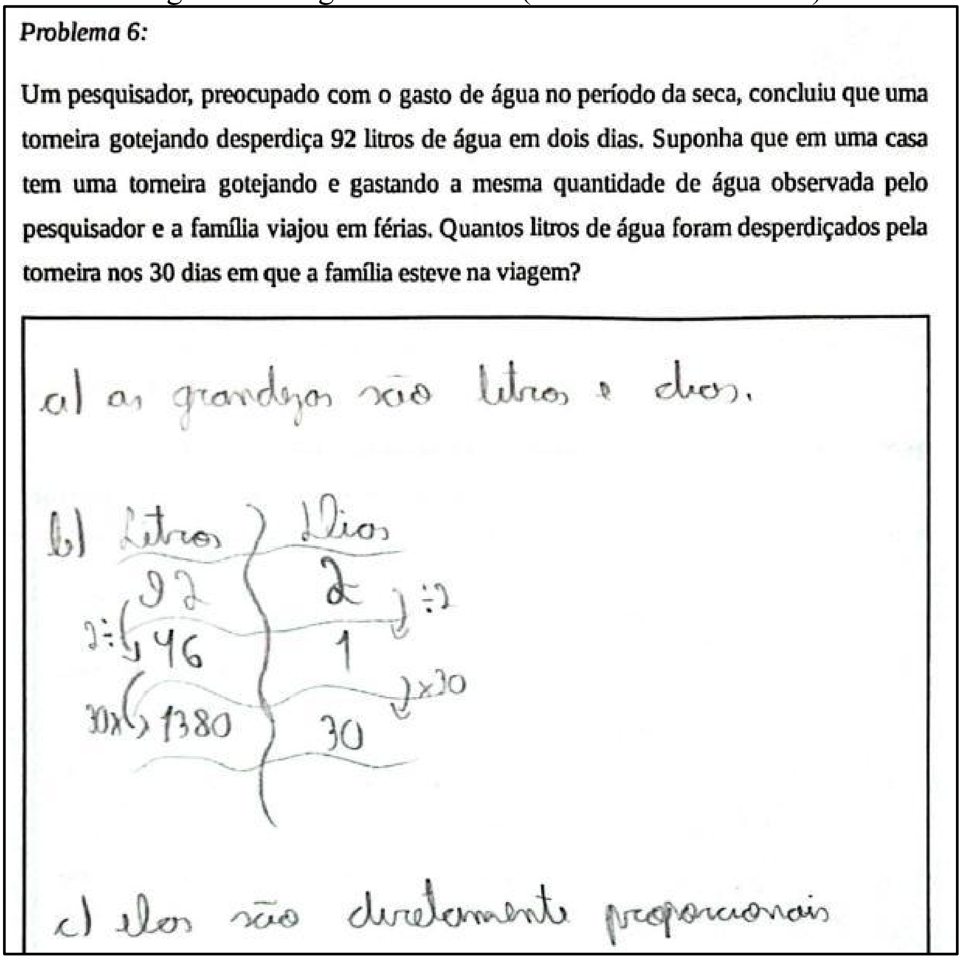
b)

	Km/h	Hora	
×2	60	5	÷2
	120	2,5	

c) são inversamente proporcionais

Compilação do autor (2024)

Figura 37- Registro do Paulo (Tarefa 6 - Problema 6)



Problema 6:

Um pesquisador, preocupado com o gasto de água no período da seca, concluiu que uma torneira gotejando desperdiça 92 litros de água em dois dias. Suponha que em uma casa tem uma torneira gotejando e gastando a mesma quantidade de água observada pelo pesquisador e a família viajou em férias. Quantos litros de água foram desperdiçados pela torneira nos 30 dias em que a família esteve na viagem?

a) as grandezas são litros e dias.

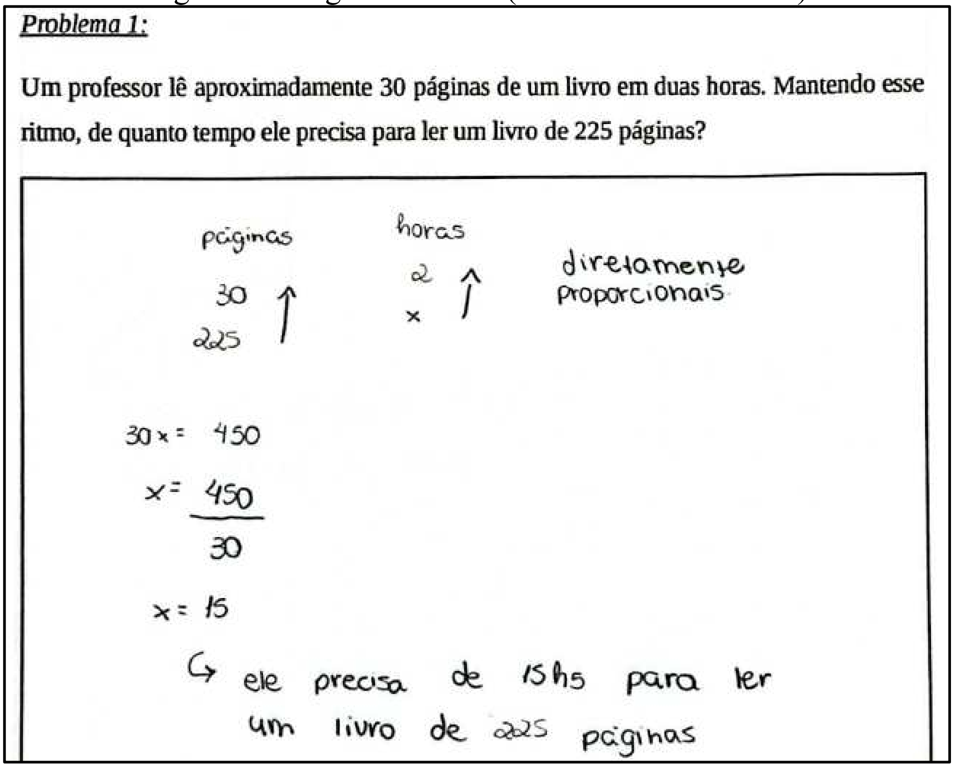
b)

	Litros	Dias	
	92	2	
2÷	46	1	÷2
30x	1380	30	x30

c) elas são diretamente proporcionais

Compilação do autor (2024)

Figura 38- Registro da Rita (Tarefa 6 - Problema 1)



Problema 1:

Um professor lê aproximadamente 30 páginas de um livro em duas horas. Mantendo esse ritmo, de quanto tempo ele precisa para ler um livro de 225 páginas?

páginas	horas
30	2
225	x

diretamente proporcionais

$30x = 450$

$x = \frac{450}{30}$

$x = 15$

ele precisa de 15hs para ler um livro de 225 páginas

Compilação do autor (2024)

Figura 39- Registro da Rita (Tarefa 6 - Problema 2)

Problema 2:

Um veterinário cuida, em sua clínica, de filhotes de gatos abandonados na rua. Ele tem 4 gatos e o saco de ração que ele compra para alimentá-los, cada um deles, com a mesma quantidade de ração, dura 3 dias. Ao terminar mais um saco de ração, 2 gatos foram adotados e foram embora com seus novos donos. Agora, com esse novo número de gatos, quantos dias vai durar o saco de ração?

gatos	dias
4	3
2	x

(ii)

$$\frac{4}{2} \cdot \frac{x}{3}$$

$$2x = 12$$

$$x = \frac{12}{2}$$

$$x = 6$$

com 2 gatos, a ração vai durar 6 dias

Compilação do autor (2024)

Figura 40- Registro da Rita (Tarefa 6 - Problema 3)

Problema 3:

Em um supermercado, o preço do pacote de açúcar de 1 kg da marca "Mais Doce" custa R$ 2,50 quanto custará o preço de um pacote de 5kg de açúcar da mesma marca?

kg	preço	
1	2,50	(i)
5	x	

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{2,50}{x}$$

$1x = 12,50$

um pacote com 5kg custará R$12,50

Compilação do autor (2024)

Figura 41- Registro da Rita (Tarefa 6 - Problema 4)

Problema 4:

Os pais de Camila, registraram sua altura aos 5 e aos 10 anos como mostra a tabela abaixo e querem saber quanto será sua altura quando tiver 15 anos. O que você pode dizer a eles?

Idade (em anos)	5	10	15
Altura (em metros)	1,12	1,60	?

Podemos dizer que idade e altura não são grandezas proporcionais.

Compilação do autor (2024)

Figura 42- Registro da Rita (Tarefa 6 - Problema 5)

Problema 5:

Um motorista dirigindo seu carro a uma velocidade média de 60 km por hora leva cinco horas para ir de uma cidade a outra. Qual deveria ser sua velocidade média para ele fazer essa viagem na metade do tempo?

velocidade		tempo		
60	↑	5	↓	(ii)
x		2,5		

$$\frac{x}{60} \cdot \frac{5}{2,5}$$

$$2,5x = 300$$

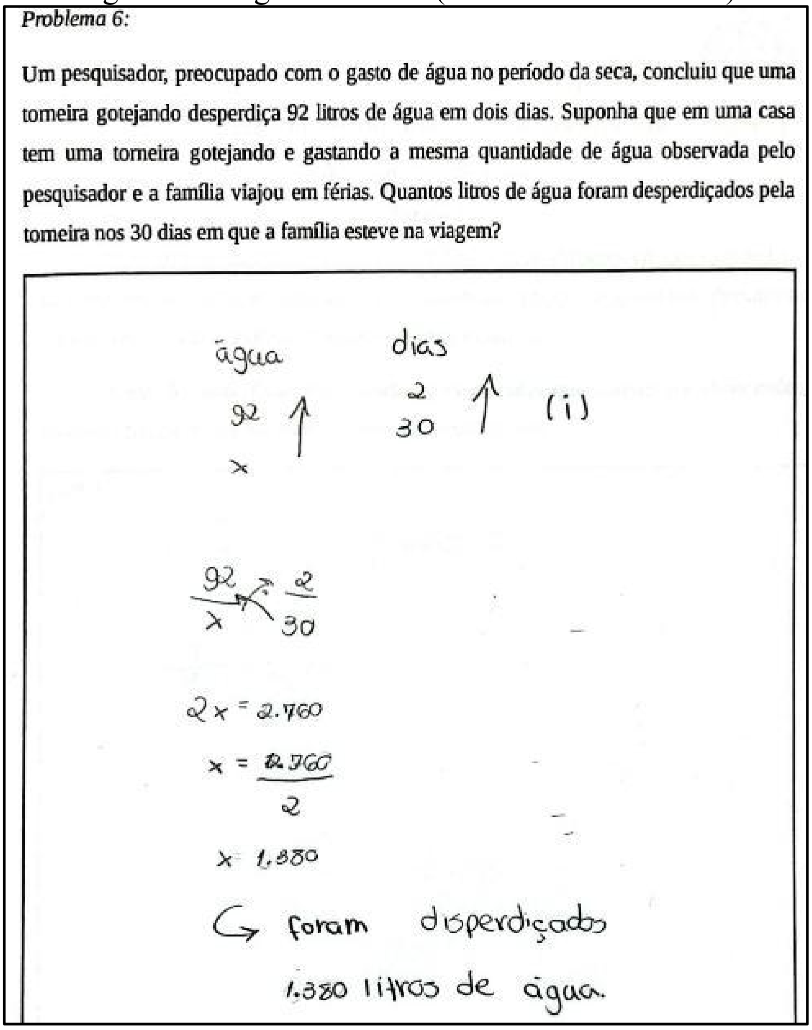
$$x = \frac{300}{2,5}$$

$$x = 120 \text{ Km/h}$$

↳ para faze a viagem na metade do tempo, ele deverá andaa a 120 Km/h

Compilação do autor (2024)

Figura 43- Registro da Rita (Tarefa 6 - Problema 6)



Problema 6:

Um pesquisador, preocupado com o gasto de água no período da seca, concluiu que uma torneira gotejando desperdiça 92 litros de água em dois dias. Suponha que em uma casa tem uma torneira gotejando e gastando a mesma quantidade de água observada pelo pesquisador e a família viajou em férias. Quantos litros de água foram desperdiçados pela torneira nos 30 dias em que a família esteve na viagem?

água ↑ dias ↑ (i)

92 2

x 30

$\frac{92}{x} = \frac{2}{30}$

$2x = 2.760$

$x = \frac{2.760}{2}$

$x = 1.380$

foram disperdiçados 1.380 litros de água.

Compilação do autor (2024)

Podemos observar nas imagens acima que Paulo passa a operar da forma que foi lhe apresentado anteriormente, enquanto Rita prefere utilizar o método das setas. Imagino que, após a conversa, ela conseguiu sanar as dúvidas desse método, que anteriormente não estava dando o resultado esperado.

No problema 3, houve o seguinte diálogo:

Rita: “Nas grandezas eu coloquei o quilo e o preço. Aí eu escrevi que 1kg é igual a R$2,50. Aí quer saber quanto custaria o de 5kg. Aí, eu percebi que quanto maior a quantidade, mais caro vai ser. Ou seja, elas são diretamente proporcionais. Aí eu multipliquei cruzado e achei que o pacote com 5 kg custaria R$12,50.”

Paulo: “Eu também.”

Pesquisadora: “No mercado, vocês acham que o pacote seria R$12,50?”

Paulo: “Por conta da promoção?! Por exemplo, se eu for no mercado agora vai ter um pacote de 1kg que vai custar R$2,50. Só que tem aquelas promoções de compre 3 e pague tanto.”

Pesquisadora: “Nesse caso elas são proporcionais?”

Paulo: “Não.”

Rita: “Não.”

Pesquisadora: “Por que não?”

Rita: “Porque elas não crescem a mesma quantidade.”

Pesquisadora: “Mas quanto maior o quilo, maior o preço. Isso não garante a proporcionalidade?”

Rita: “Não.”

Paulo: “Não.”

Rita: “Se fosse proporcional, iria crescer na mesma proporção. Igual aqui, que ta crescendo de 2,50 em 2,50.”

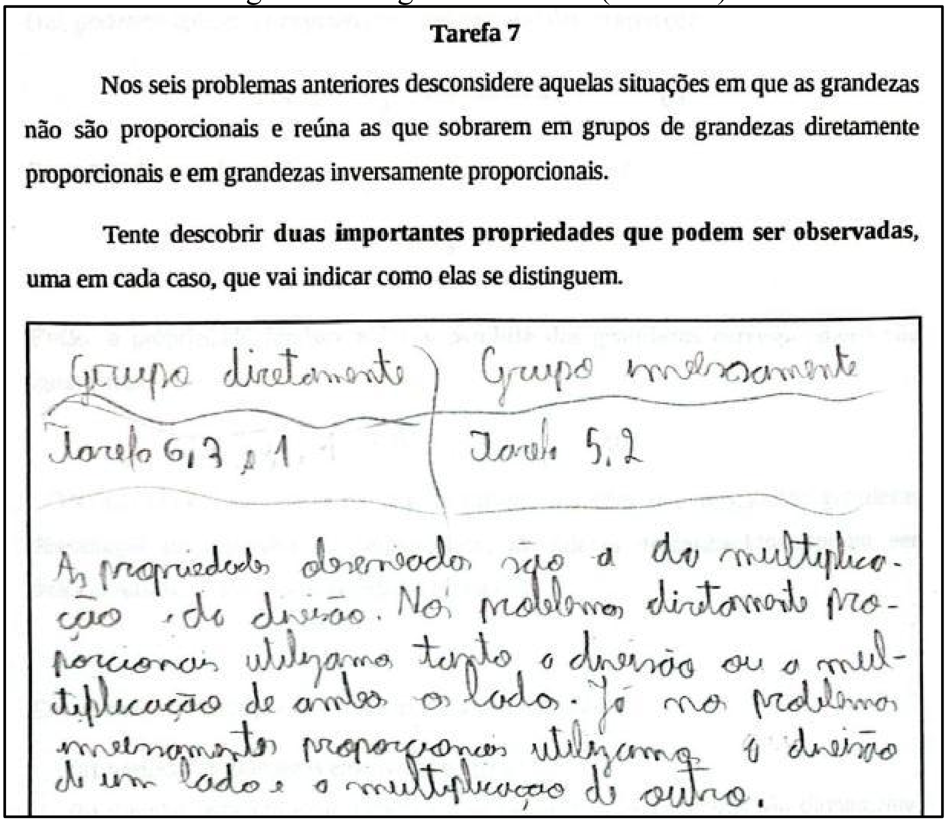
Paulo: “Aqui a gente multiplicou por 5 e deu isso aqui. Se a gente multiplicar por 5, o valor não dá o correto que daria.”

Pesquisadora: “Isso mesmo. Então uma coisa pra ter atenção é: não é só porque as grandezas estão crescendo ou decrescendo que elas são proporcionais.”

A partir desses problemas, adicionamos uma última tarefa, que buscava analisar a compreensão dos alunos quanto às propriedades da proporcionalidade.

Paulo apresentou o seguinte registro escrito:

Figura 44- Registro do Paulo (Tarefa 7)



Tarefa 7

Nos seis problemas anteriores desconsidere aquelas situações em que as grandezas não são proporcionais e reúna as que sobrarem em grupos de grandezas diretamente proporcionais e em grandezas inversamente proporcionais.

Tente descobrir **duas importantes propriedades que podem ser observadas,** uma em cada caso, que vai indicar como elas se distinguem.

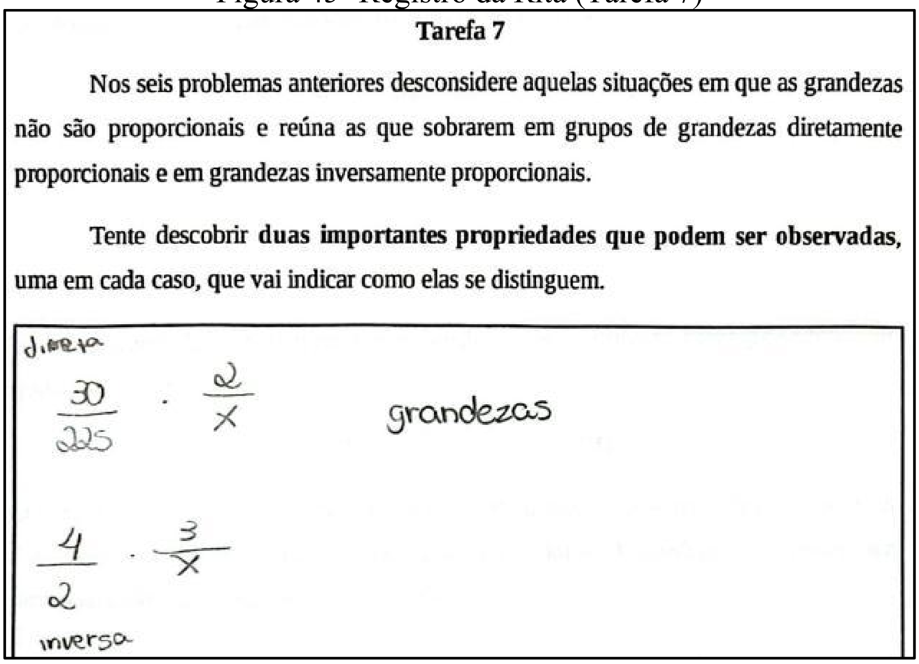
Grupo diretamente	Grupo inversamente
Tarefa 6, 3 e 1	Tarefa 5, 2

As propriedades observadas são a da multiplicação e da divisão. Nos problemas diretamente proporcionais utilizamos tanto a divisão ou a multiplicação de ambos os lados. Já nos problemas inversamente proporcionais utilizamos a divisão de um lado e a multiplicação do outro.

Compilação do autor (2024)

Já a participante Rita, apresentou o registro escrito abaixo:

Figura 45- Registro da Rita (Tarefa 7)



Tarefa 7

Nos seis problemas anteriores desconsidere aquelas situações em que as grandezas não são proporcionais e reúna as que sobrarem em grupos de grandezas diretamente proporcionais e em grandezas inversamente proporcionais.

Tente descobrir **duas importantes propriedades que podem ser observadas,** uma em cada caso, que vai indicar como elas se distinguem.

direta

$\frac{30}{225} \cdot \frac{2}{x}$ grandezas

$\frac{4}{2} \cdot \frac{3}{x}$

inversa

Compilação do autor (2024)

Nesta última tarefa, os alunos tiveram dificuldades em entender o que era uma "propriedade" e identificá-la. Sendo assim, através de uma intervenção, foram apresentados à descrição abaixo:

Figura 46- Propriedade fundamental das proporções

Se as grandezas a, b, c e d **são diretamente proporcionais então formam uma proporção**:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Daí, podemos aplicar a **propriedade fundamental das proporções**:

$$\text{Se } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ então } a.d = b.c. \qquad \textbf{(I)}$$

Se as grandezas a, b, c e d são *inversamente proporcionais* e

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Então, a propriedade fundamental é **o produto das grandezas correspondente são iguais**, isto é,

$$a.c = b.d. \qquad \textbf{(II)}$$

CONCLUSÃO: Em problemas que envolvem situações que relacionam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, **os valores desconhecidos podem ser determinados** a partir das propriedades (I) ou (II).

Compilação do autor (2024)

A enunciação apresentada acima não gerou discussões.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo investigar a produção de um conjunto de tarefas para o ensino da noção de proporção a estudantes do Ensino Fundamental. A produção deste material foi referenciada teórica e metodologicamente nas premissas do MCS, contribuindo para o processo de desenvolvimento do pensamento proporcional como parte de um projeto mais amplo de educação matemática.

Diante de diversos cenários e das mais diversas salas de aula existentes, é comum nos depararmos com um contexto semelhante: a grande dificuldade de parte dos alunos com a Matemática. As exaustivas aulas expositivas e o excesso de conteúdo em um pequeno intervalo de tempo para a aprendizagem levam à frustração de grande parte dos discentes, que terminam a etapa escolar com a sensação de ter aprendido muito pouco do que lhes foi ensinado.

A partir disso, o grupo de pesquisa no qual estou inserida - Núcleo de Investigação, Divulgação e Estudos em Educação Matemática/NIDEEM - vem buscando investigar uma estrutura curricular para a Matemática no Ensino Fundamental, referenciada em modos de produção de significados. Um dos eixos que compõem o currículo é o pensamento proporcional, composto das noções de razão, taxa, proporção e grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Todas essas noções foram investigadas de modo a elaborar um conjunto de tarefas para o ensino ao longo do Ensino Fundamental.

Neste trabalho, trouxemos a noção de proporção e as tarefas que foram produzidas para a aplicação em campo/sala de aula. A ideia inicial era aplicá-las em uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental. No entanto, diante de um cenário de greve, as tarefas foram aplicadas para dois alunos que se voluntariaram em participar. Esses discentes, no momento da aplicação, estavam inseridos em uma escola da rede particular da cidade de Juiz de Fora, no 8º e 9º anos do Ensino Fundamental.

Antes da aplicação das tarefas, buscamos orientar os alunos, esclarecendo nossos objetivos e solicitando que eles não apagassem os registros. Além disso, também buscamos destacar a importância de não se preocuparem com erros, uma vez que não estavam sendo avaliados como na escola.

Podemos perceber que houve uma certa dificuldade inicial dos estudantes na hora de apresentar seus registros de forma oral, como se no papel soubessem fazer, mas não conseguiam explicar o que foi realizado. No entanto, com a prática e o desaparecimento do medo de errar, eles conseguiram estar mais ativos no desenvolvimento das tarefas.

No decorrer da aplicação, notamos que os alunos já haviam tido contato com o tema, possivelmente a partir de uma abordagem diferente da nossa. Um fato que nos chamou a atenção foi que, além da noção de proporção, eles utilizaram amplamente o conceito de porcentagem. Isso despertou nossa curiosidade sobre quais seriam as resoluções de um aluno que ainda não tivesse tido contato com esse conteúdo, uma vez que ele não era um pré-requisito para as tarefas propostas.

Essa observação, considerando que o grupo de pesquisa vem construindo um currículo para o Ensino Fundamental, nos deixou reflexivos sobre o momento ideal para a introdução da noção de porcentagem. Talvez seja importante uma outra aplicação dessas tarefas, em alunos mais novos - 6º ou 7º ano - para podermos analisar as diferentes possibilidades.

Mesmo assim, consideramos que as tarefas aplicadas atingiram nossos objetivos. Os estudantes demonstraram compreender efetivamente a proporção, dando sentido para o que já haviam visto anteriormente. Em particular, a “tarefa do suco” os desafiou e trouxe uma discussão muito enriquecedora.

O produto educacional, composto pelo conjunto de tarefas utilizadas neste trabalho, ficará disponível, podendo ser utilizado pelos professores interessados, além de haver a possibilidade de adaptação para a realidade inserida. Esperamos que este material os auxilie e seja de grande valor em sua sala de aula.

REFERÊNCIAS

BALDINO, R. R. **Assimilação Solidária**. Rio Claro, SP: Notas do Grupo de Pesquisa-Ação em Educação Matemática – GPA, IGCE – Departamento de Matemática, 1995.

BOGDAN, R; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em Educação Matemática:** Uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 2013.

CRUZ, K. S. **Pensamento proporcional na matemática escolar: a noção de razão.** 2024. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)– Faculdade de Educação, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2024.

FERNANDES, L. F. **Pensamento proporcional nos anos iniciais do Ensino Fundamental.** 2024. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2024.

LAMON, S. J. **Teaching Fractions and Rations for Understanding.** 3ed. Nova Iorque: Routledge, 2012.

LINS, R. C. Epistemologia, História e Educação Matemática**:** tornando mais sólidas as bases da pesquisa. **Revista em Educação Matemática**. SBEM - São Paulo, Campinas, SP, Ano 1, n 1, p.75-91, set., 1993.

LINS, R. C. Epistemologia e Matemática. **Bolema**. Rio Claro, S.P.,Unesp/RC. Ano 9,Especial 3, p.35 - 46,1994.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI.** Campinas: Papirus, 1997.

LINS, R. C. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções & perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 75-94. (Seminários DEBATES Unesp).

LINS, R. C. The production of meaning for algebra: a perspective based on a theorical model of semantic fields. In.: SURTHERLAND, R.; ROJANO, T.; BELL, A.; LINS, R. C. (Eds.). **Perspectives on school algebra**. London: Kluwer Academic Publishers, p.37-60, 2001.

LINS, R. C. O Modelo dos Campos Semânticos: estabelecimento e notas de teorizações. In: ANGELO, Claudia Laus et al (org.). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática**: 20 anos de história. São Paulo: Midiograf, 2012. p.11-30.

POST, T. R., BEHER, M. J. e LESH, R. A Proporcionalidade o Desenvolvimento de Noções Pré-Álgebra. Coxford, Arthur F. e Schulte, Albert P. (org.). **As Idéias da Álgebra**, 89-103, Atual Ed., São Paulo, 1995.

SANTOS, S.. E. F. **Pensamento proporcional na matemática escolar: o ensino da noção de grandezas diretamente e inversamente proporcionais.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora. 2025.

SCHINCARIOL, T. A. **Pensamento proporcional na matemática escolar: o ensino da noção de taxa.** 2025. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2025.

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W. Razões e proporções na vida diária e na escola. In: SCHLIEMANN, A.D.; CARRAHER, D. W., et al. **Estudos em Psicologia da Educação Matemática**. 2 ed. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 1997.

SILVA, A. M. **O Modelo dos Campos Semânticos:** Um modelo epistemológico em Educação Matemática. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2022.

SILVA, A. M; OLIVEIRA, V. C. A.; ALMEIDA, V. R. O Modelo dos Campos Semânticos: teorização e desdobramentos para a pesquisa e para o ensino. In: **Processos cognitivos e Linguísticos na Educação Matemática**. Orgs. Sandra Maria Pinto Magina, Sintria Labres Lautert, Alina Galvão Spinillo. Brasília, DF: SBEM Nacional, 2022.

SILVA, A. M.; BASTOS, R. R.; OLIVEIRA, R. Educação Matemática Escolar no século XXI: a formação de estudantes e professores da educação básica. In: **Programa de Pós-graduação em Educação Matemática**: perspectiva de pesquisa e implicações no ensino e na aprendizagem de matemática. Silva, A.M.; Rodrigues, C.K; Cruz, W.J. (orgs.). Juiz de Fora: Editora da UFJF, p. 92-109, 2024.

SOUZA, J. R. **Panoramas Matemática** 7. 1. ed. - São Paulo: FDT, 2019.

SPINILLO, A. G. Proporções nas séries iniciais do primeiro grau**.** In: SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W., et al. **Estudos em Psicologia da Educação Matemática.** 2a ed. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 1997.

VAN DE WALLE, J. A. V. **Matemática no Ensino Fundamental:** Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula. 6 ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

APÊNDICE A- TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIMENTO

Termo de Consentimento Livre e Esclarecimento

Pais e/ou responsáveis,

A proposta desta pesquisa é investigar a produção de significados dos estudantes do sexto, sétimo, oitavo e nono ano do ensino fundamental através de um conjunto de tarefas sobre Pensamento Proporcional e situações relacionadas a ele. A participação dos alunos participantes desta pesquisa é voluntária e as ações pedagógicas serão desenvolvidas através de encontros presenciais. Durante a aplicação das tarefas da pesquisa, os encontros serão gravados, a fim de que seus dados sejam processados posteriormente pelos pesquisadores e devidamente arquivados, respeitando o sigilo dos participantes, que também utilizarão nomes fictícios. Os participantes poderão pedir o esclarecimento que desejarem e/ou deixar a pesquisa a qualquer momento, retirando seu consentimento sem quaisquer consequências, penalizações ou prejuízos. Ao publicar os resultados da pesquisa, é garantido o sigilo. Quaisquer dúvidas em relação à pesquisa poderão ser sanadas pelo telefone (32) 99979-5294 ou e-mail mariaalvimpedrosa@gmail.com.

Maria Eduarda Alvim Pedrosa

(   ) Autorizo a participação do estudante ___________________________________

(   ) Não autorizo a participação do estudante ________________________________

Assinatura do responsável: ___________________________________

APÊNDICE B- CONJUNTO DE TAREFAS

A Noção de Proporção

Tarefa 1

a) Um agricultor plantou uma muda de laranja e outra de pêssego. Duas semanas atrás foram medidas suas alturas, a laranjeira tinha 8 cm e o pessegueiro tinha 12 cm. Hoje a laranjeira está com 11 cm e o pessegueiro está com 15 cm de altura. Quem cresceu mais, a laranjeira ou o pessegueiro?

b) Um biólogo simulou no computador uma situação desejável de crescimento de dois tipos de eucaliptos para serem vendidos como madeira para a construção civil. A simulação começa com o primeiro tipo de eucalipto tendo 10 cm de comprimento e o segundo tipo tendo 12 cm de comprimento. Ao final do primeiro mês o primeiro tipo estaria com 15 cm de comprimento e o segundo tipo com 18 cm. Comparando os dois tipos de eucaliptos, o que você pode dizer sobre seus crescimentos?

c) Compare as duas tarefas anteriores e observe como as grandezas estão relacionadas no crescimento das plantas indicando o que você observa de diferente em cada caso. Observe as duas tarefas anteriores e analise o que você observou de diferente em cada caso.

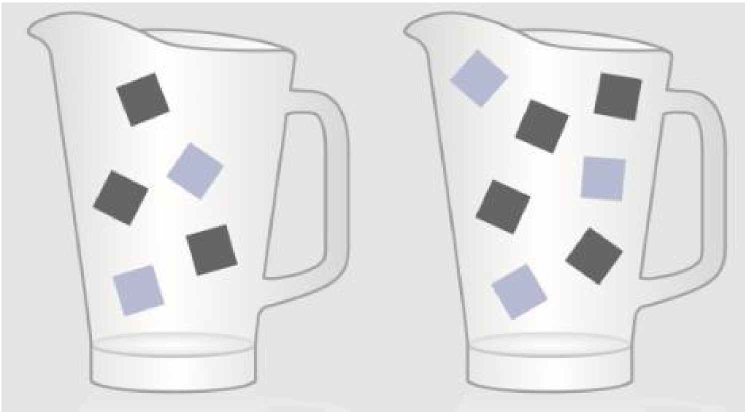
Tarefa 2

Duas turmas de uma escola estavam reunidas para fazer um trabalho para a feira de ciências. Para a hora do lanche, a turma A encomendou 2 pizzas para cada 3 membros do grupo e a turma B encomendou 3 pizzas para cada 5 membros do grupo. Em qual das duas turmas, seus membros têm mais pizza para comer?

Tarefa 3

a) Numa festa duas mães fizeram jarras com a mesma quantidade de limonada para as crianças com diferentes quantidades de limão. Considere, na figura abaixo, que os quadrados indicam a receita usada em cada jarra do seguinte modo: um quadrado escuro representa uma xícara de limonada concentrada e o quadrado branco representa uma xícara de água. A primeira mãe usou 3 xícaras de suco de limão concentrado e duas de água. A segunda mãe usou 4 xícaras de suco de limão concentrado e 3 xícaras de água.

Qual das duas jarras tem o sabor de limão mais forte? Ou eles terão o mesmo sabor?



Tarefa 3

b) Numa festa duas mães fizeram jarras com a mesma quantidade de limonada para as crianças com diferentes quantidades de limão. A primeira mãe usou 2 xícaras de suco de limão concentrado e 4 xícaras de água. A segunda mãe usou 4 xícaras de suco de limão concentrado e 8 xícaras de água.

Qual das duas jarras tem o sabor de limão mais forte? Ou eles terão o mesmo sabor?

Tarefa 3

c) Compare as duas tarefas anteriores e observe como as grandezas estão relacionadas na quantidade de suco e de água e o que você observa de diferente em cada caso.

Tarefa 4

O time de futebol da escola está disputando um torneio em um clube fora da cidade e você, como representante dos estudantes, foi designado(a) para organizar a saída das Vans que levarão os atletas, a comissão técnica e a torcida para o clube, num total de 264 pessoas. A informação que recebeu da direção da escola é que a empresa contratada para fazer o transporte disponibilizou Vans, todas com capacidade de 12 passageiros, e que só partirão para o destino com a sua capacidade máxima de lotação. No dia do jogo, você foi informado(a), ao chegar na escola, que às 6h da manhã partiram 3 vans com 36 passageiros levando os atletas e a comissão técnica do time e que as próximas Vans sairão com capacidade máxima de acordo com a seguinte tabela:

Horários	Nº de Vans	Nº total de passageiros
7h	5	
7h30	4	
8h	10	

a) Complete a tabela com o número total de passageiros que partirão nos horários determinados.

b) Qual a relação que podemos observar quando comparamos o número de passageiros pelo número de Vans em cada horário de partida das Vans?

Tarefa 5

A turma do 9º está produzindo os convites para a festa de primavera na escola. Eles esqueceram de mandar fazer a impressão dos convites que precisam ser entregues até o final das aulas daquela manhã. O pessoal da gráfica da escola informou que todas as cópias do convite utilizando 4 impressoras levarão 60 minutos para serem impressas, mas que seria possível usar 6 impressoras iguais para fazer os convites, mas o custo seria maior. Como eles estão com pressa, tentaram calcular com as informações que tinham qual o tempo que seis impressoras levarão para produzir os convites. Ajude-os a calcular esse tempo.

Nos problemas que estudaremos a seguir **três** situações que podem acontecer:

1ª) O crescimento de uma grandeza tem como consequência o crescimento da outra grandeza; ou, o decrescimento de uma grandeza tem como consequência o decrescimento da outra grandeza;

2ª) O crescimento de uma grandeza tem como consequência o decrescimento da outra grandeza (caso que analisamos no problema acima); ou decrescimento de uma grandeza tem como consequência o crescimento da outra grandeza;

3ª) Não ocorre nenhuma das duas situações anteriores ou não é possível, pelo enunciado do problema, garantir que nenhuma delas pode ocorrer.

Quando ocorrer a primeira situação diremos que as *grandezas* são *diretamente proporcionais* ou, simplesmente, *proporcionais*. Quando ocorrer a segunda situação diremos que as *grandezas* são *inversamente proporcionais* (O porquê dessa diferenciação ficará clara mais adiante). Caso não ocorra nenhuma das duas situações anteriores, diremos que as *grandezas não são proporcionais*.

Tarefa 6

Os seis problemas seguintes envolvem situações diferentes entre si para você analisar. A proposta é que você:

(a) Identifique quais são as grandezas envolvidas em cada problema;

(b) Faça uma simulação que permita identificar como será a relação entre as grandezas envolvidas com respeito ao crescimento e decrescimento das grandezas; [sugestão: fixe sua simulação em dobrar ou dividir pela metade uma das grandezas e observe o que ocorre com a outra. Monte a tabela com os dados obtidos]

(c) Determine em cada caso se (i) as grandezas são diretamente proporcionais; ou (ii) se são inversamente proporcionais, ou (iii) se não são proporcionais, apresentando os argumentos de maneira bem explicada no seu texto escrito.

Importante: O objetivo da tarefa, ainda, **não é resolver o problema**.

Problema 1:

Um professor lê aproximadamente 30 páginas de um livro em duas horas. Mantendo esse ritmo, de quanto tempo ele precisa para ler um livro de 225 páginas?

<u>*Problema 2*</u>:

Um veterinário cuida, em sua clínica, de filhotes de gatos abandonados na rua. Ele tem 4 gatos e o saco de ração que ele compra para alimentá-los, cada um deles, com a mesma quantidade de ração, dura 3 dias. Ao terminar mais um saco de ração, 2 gatos foram adotados e foram embora com seus novos donos. Agora, com esse novo número de gatos, quantos dias vai durar o saco de ração?

Problema 3:

Em um supermercado, o preço do pacote de açúcar de 1 kg da marca “Mais Doce” custa R$ 2,50 quanto custará o preço de um pacote de 5kg de açúcar da mesma marca?

Problema 4:

Os pais de Camila, registraram sua altura aos 5 e aos 10 anos como mostra a tabela abaixo e querem saber quanto será sua altura quando tiver 15 anos. O que você pode dizer a eles?

Idade (em anos)	5	10	15
Altura (em metros)	1,12	1,60	?

Problema 5:

Um motorista dirigindo seu carro a uma velocidade média de 60 km por hora leva cinco horas para ir de uma cidade a outra. Qual deveria ser sua velocidade média para ele fazer essa viagem na metade do tempo?

Problema 6:

Um pesquisador, preocupado com o gasto de água no período da seca, concluiu que uma torneira gotejando desperdiça 92 litros de água em dois dias. Suponha que em uma casa tem uma torneira gotejando e gastando a mesma quantidade de água observada pelo pesquisador e a família viajou em férias. Quantos litros de água foram desperdiçados pela torneira nos 30 dias em que a família esteve na viagem?

Tarefa 7

Nos seis problemas anteriores desconsidere aquelas situações em que as grandezas não são proporcionais e reúna as que sobrarem em grupos de grandezas diretamente proporcionais e em grandezas inversamente proporcionais.

Tente descobrir **duas importantes propriedades que podem ser observadas**, uma em cada caso, que vai indicar como elas se distinguem.

Se as grandezas a, b, c e d **são diretamente proporcionais então formam uma proporção**:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Daí, podemos aplicar a **propriedade fundamental das proporções**:

$$\text{Se } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ então } a.d = b.c. \qquad \textbf{(I)}$$

Se as grandezas a, b, c e d são *inversamente proporcionais* e

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Então, a propriedade fundamental é **o produto das grandezas correspondente são iguais**, isto é,

$$a.c = b.d. \qquad \textbf{(II)}$$

CONCLUSÃO: Em problemas que envolvem situações que relacionam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, **os valores desconhecidos podem ser determinados** a partir das propriedades (I) ou (II).

Em resumo, na resolução dos problemas 1 a 6, a estratégia é:

(a) verificar as grandezas envolvidas no problema;
(b) Simular para um caso particular para verificar se as grandezas são diretamente, inversamente proporcionais ou se não são proporcionais;
(c) Resolver o problema utilizando as propriedades (I) ou (II).

TENTE!!

APÊNDICE C- TRANSCRIÇÃO DAS APLICAÇÕES

3 de outubro de 2024

Tarefa 1a

Paulo: Eu pensei muita coisa. Primeiro, eu pensei que eles tinham crescido igualmente, porque ambos cresceram 3 centímetros, só que o pessegueiro era maior. Só que depois, quando você bota em porcentagem, você vê que a laranjeira cresceu mais, porque ela cresceu 37,5% do seu tamanho inicial e o pessegueiro 25.

Pesquisadora: Paulo, como você chegou nessa porcentagem?

Paulo: Eu pensei, 4 é igual a 50%, né?! A laranjeira tinha 8 centímetros, 4 centímetros é igual a 50%. Aí eu peguei 50 e dividi por 4, aí deu 12,5. Depois multipliquei por 3, que é o total de crescimento.

Pesquisadora: E você, Rita? Como você fez?

Rita: Eu fiz o básico mesmo. Só subtraí e….?

Pesquisadora: Quem cresceu mais, a laranjeira ou o pessegueiro?

Rita: Todos cresceram 3 cm, ou seja, os centímetros foram iguais. Mas em relação ao tamanho, são PROPORÇÕES diferentes.

Pesquisadora: Ok, mas quem cresceu mais?

Rita: Elas cresceram os mesmos 3 cm.

Paulo: Eu acho que eu sei o que ela quer falar, porque eu ia falar isso também, mas eu deixei pra lá. Em relação ao tamanho inicial, a laranjeira cresceu mais. Mas em questão de somente em centímetros, elas cresceram igualmente.

Tarefa 1b

Rita: Na b o eucalipto 1 tinha 10 cm e foi pra 15 cm, então ele cresceu 5 cm que é 50% do tamanho inicial; e o eucalipto 2 tinha 12 cm e foi pra 18 cm, ou seja, cresceu 6cm, que também é 50% do seu tamanho inicial. Aí eu coloquei assim como resposta: comparando separadamente, podemos dizer que ambos cresceram 50% do seu tamanho inicial. Comparando simultâneamente a questão de altura, podemos dizer que o eucalipto 2 é maior.

Paulo: Pode-se dizer que ambos eucaliptos cresceram proporcionalmente em relação ao seu tamanho inicial, o primeiro cresceu 50% e o segundo também.

Tarefa 1c

Rita: Na primeira tarefa, as plantas cresceram em proporções diferentes do seu tamanho inicial e, na segunda tarefa, ambas atingiram o crescimento de 50% do seu tamanho anterior, ou seja, inicial.

Paulo: No primeiro caso, mesmo o tamanho inicial e final sendo diferentes, ambas aumentaram 3 cm, mas a laranjeira cresceu mais em relação ao seu tamanho inicial. No segundo caso, os eucaliptos começaram com tamanhos diferentes e terminaram com tamanhos diferentes. O primeiro eucalipto foi de 10 cm para 15cm e o segundo foi de 12cm para 18cm, ambos cresceram 50% do seu tamanho inicial.

Pesquisadora: É exatamente isso que vocês falaram. Na letra a, quando a gente fala que ambos cresceram 3cm, estamos pensando de forma aditiva, porque foi adicionado 3cm aos 8 cm da laranjeira e aos 12cm do pessegueiro. Então, aditivamente, somando, a gente pode falar que as duas cresceram a mesma quantidade. Só que, se pensarmos de forma multiplicativa, ou seja, de forma proporcional, que é essa comparação com o tamanho inicial, a gente chega que a laranjeira cresceu mais.

Tarefa 2

Rita: Eu fui pensando assim… Eu coloquei aqui ó: a turma A (FALAS MOSTRANDO A IMAGEM). A gente tem 2 pizzas, vamos pensar que cada pizza tem 100%, o total da pizza é 100%. Aí a gente tem 2 pizzas e a gente junta, da 200%. É como se a gente fosse dividir esses 200% para 3 pessoas. Você entende isso? Aí cada pessoa comeria 66% da pizza, todas juntas.

Pesquisadora: Qual a diferença de comer 66% de uma e 66% de duas?

Rita: Porque é cada 2 pizzas para 3 membros.

Pesquisadora: Mas se de 1 pizza uma pessoa come 66% daquela pizza. Agora eu tenho 2 pizzas e essa pessoa come 66% das duas.

Rita: Talvez dê um resultado diferente. Você tá me complicando.

Pesquisadora: Quanto que é 50% das duas pizzas?

Rita: Das duas juntas? 100. 1 pizza.

Pesquisadora: Se ela ta comendo 66% quer dizer que ela comeu mais de uma pizza inteira?

Rita: Não… porque… (risadas).

Pesquisadora: Tá… como você fez a B?

Rita: Eu fiz do mesmo jeito. Eu coloquei aqui as pizzas e os membros, aí deu $\frac{3}{5}$. Aí deu que comeram 60% das 3 juntas.

Pesquisadora: E aí qual você acha que comeu mais?

Rita: Na A.

Pesquisadora: E você, Paulo?

Paulo: Eu fiz um pouco diferente. Tipo, cada pizza tem x valores de fatias. Eu coloquei que uma pizza tem 15 pedaços, então, duas tem 30, três tem 45. Na turma A, são 3 pessoas para 2 pizzas, então, é 3 sobre 30, porque 2 pizzas é 30 pedaços. Que é igual a um décimo, porque eu simplifiquei. Aí deu que cada membro comeu 10 pedaços ou 33,33% do número de pedaços. Na turma B, eu coloquei 5 sobre 45, ok? Que é igual a um nono. Aí eu coloquei que cada membro comeu 9 pedaços ou 20% do número de pedaços. Portanto, a turma B tem mais fatias e pizzas, porém, já na turma A, cada integrante come mais pedaços.

Paulo: Mas quando pergunta assim: em qual das duas turmas seus membros têm mais pizza para comer? Seria a B porque eles têm mais pizzas. Quando você fala pizza no geral é a B, mas quando você transforma em pedaços é a A.

Pesquisadora: Temos que ver que não necessariamente o grupo tem 5 membros. Por exemplo, vamos supor que o grupo B tem 5 membros e 3 pizzas. Mas se o grupo A tiver 6 membros. Quantas pizzas eles vão ter?

Paulo: 2

Pesquisadora: Lê o enunciado novamente.

Paulo: Ah, vão ter 4.

Pesquisadora: Isso. Quando ele pergunta quem tem mais pizza para comer, é em qual grupo cada membro vai comer mais pizza?

Pesquisadora: Agora, uma pergunta para os dois. Ouvindo os cochichos de vocês, vocês disseram que achavam que o Paulo não podia ter feito o que fez (supor pedaços para as pizzas). E se nós dividirmos as pizzas em outros valores. Porque o Paulo dividiu em 15 pedaços. Por que você escolheu 15?

Paulo: Porque eu tinha que achar um número que fosse divisível por 3 e por 5.

Pesquisadora: E se fosse uma pizza de 8 pedaços?

Paulo: Então, primeiro eu tentei com 8. Aí eu coloquei 2 vezes 8 dividido por 3, que daria 6. Só que se eu faço 3 vezes 8 da 24, aí não é divisível por 5. Aí eu fui fazendo até achar um número que também fosse divisível por 5.

Pesquisadora: Mas não dá certo com esse número?

Paulo: Ah, mas aí dá vírgula né.

Tarefa 3

Paulo: Eu coloquei que cada xícara tem 250ml, tanto de limão quanto de água. Aí eu coloquei que a mãe 1 tem 750ml de limão para 500ml de água. Já a mãe 2 tem 1000mL de limão pra

750mL de água. Nos dois casos, tem 250mL de limão que não se anulam. Você entende? Porque 1mL de água com 1mL de limão, tem o mesmo gosto entre os dois. Aí eu coloquei que ambas terão o mesmo sabor, por conta disso, sobra 250mL nas duas.

Rita: Eu só achei uma fração com denominador igual.

Pesquisadora: Mas como você fez isso?

Rita: Igualei os denominadores.

Pesquisadora: Qual é o seu denominador?

Rita: Da primeira é 2 e da segunda é 3, aí eu cheguei em 6. Daí a primeira ficou 9/6 e a segunda 8/6.

Pesquisadora: Tá, mas o que é esse 9/6? Porque lembra que nós não estamos falando de números? Estamos falando de grandezas. O que é o 9 e o que é o 6?

Rita: Não sei explicar não, mas é como se… eu meio que igualei a quantidade de água e (falas indistintas).

…

Pesquisadora: O que vocês acham da resposta um do outro?

Pesquisadora auxiliar: Você acha que o que ele fez foi a mesma coisa que você fez?

Rita: Eu já não estou entendendo mais nada.

<u>29 de outubro de 2024</u>

Rita: Fomos voltando nas coisas que a gente tinha aprendido sobre razão e taxa e vimos que poderíamos fazer igual estávamos fazendo, com uma parte e o todo. Aí o que a gente pensou?! Na jarra 1, a gente teria 5 elementos. Aí, a gente pensou em fazer a porcentagem da quantidade de limão e água que tem na jarra 1 e comparar as duas para descobrir qual tem mais.

Na primeira jarra, a gente sabe que foram 3 de limão e 5 no total.

Paulo: Aqui a gente usou a parte e o todo.

Rita: Isso, ⅗. Aí a gente pensou qual número multiplicado por 5 daria 100, pra gente descobrir a porcentagem. Aí a gente descobriu que é 20. Ou seja, 3 por 20 daria 60, ou seja, 60% da jarra tem limão. Aí de água, a gente tem 2/5, ou seja, 2 vezes 20 é 40, 40% de água da jarra. Aí a gente passou pra jarra 2, a jarra 2 já é meio difícil porque daria número quebrado.

Paulo: Aí tem outra coisa também. Quando a gente fez a primeira porcentagem, deu um número, aí quando a gente fez a segunda não bateu. Daí tivemos que arredondar. Por exemplo, dava 57,42% faltava 1% ali.

Rita: A gente chegou no resultado que na jarra 2, como tem 4 de limão e 7 elementos no total, que aí deu aproximadamente 57% de limão. E a água que é 3/7 vezes 14,3 daria aproximadamente 43%.

Tarefa 4

Rita: Primeiro, eu circulei as informações principais, então 264 pessoas, 12 passageiros (que seria uma van), 3 vans e 36 passageiros. Aí eu fui multiplicando o número de vans pelo total de passageiros em cada van que seria 12.

Paulo: Aí deu 60 a primeira, 48 a segunda e 120 a última. Aí na letra (b), no início eu não pensei nada não, mas depois eu analisei uma coisa. Se a gente analisar o horário, a gente pode ver que tem 30 minutos de diferença em cada um, então, da pra meio que concluir que, na primeira, a cada 6 minutos sai uma van com 12 passageiros. Na segunda, de 7h30 à 8h, podemos dizer que a cada 7,5 minutos sai uma van com 12 pessoas.

Rita: Eu acho que eu não concordo muito com ele não, porque não fala nada dessa informação.

Pesquisadora: Mas qual foi a relação que você observou?

Rita: Pede a relação entre o número de passageiros e o número de vans. Certo? A gente sabe que na van de 6h… Primeiro vamos ver os passageiros. Tem 264 pessoas no total e nessa van nesse horário saíram 36 pessoas. Aí ficaria 36, que é a parte e 264 que é o todo. Aí eu fiz a mesma coisa, só que dessa vez eu fiz por regra de 3, porque achei mais fácil.

A gente sabe então que saíram 13,6% do total de pessoas nesse primeiro horário. Aí a gente vai analisar as vans. A gente sabe que saíram 3 vans de 22 no total. Eu só somei os números de vans. Aí fiz regra de 3 de novo e deu 13,6% das vans. Aí fui fazendo isso em todas. Aí na de 7h, que é 60 pessoas, deu 22,7% do total de pessoas. As vans que são 5, deu 22,7%. Na de 7h30 que é 48, deu 18,18% de pessoas e 18,18% de vans. E de 8h deu 45,45% de pessoas e 45,45% de vans. Ou seja, a gente conclui que a cada horário sai a mesma porcentagem de pessoas e a mesma porcentagem de vans, quando comparado com o total.

Pesquisadora: E se a pergunta fosse assim: Qual a relação que podemos observar quando comparamos o número de passageiros e o número de vans?

Rita: Como assim?

Pesquisadora: Por exemplo, 7h, não precisa saber o horário só vou colocar para identificar. Em algum horário saíram 5 vans com 60 passageiros. Em outro horário saíram 4 vans com 48 passageiros. Em outro horário 10 vans com 120 passageiros.

Paulo: A relação entre o número de pessoas e de vans seria que ambas apresentam a mesma porcentagem que seu todo.

Rita: Uai, mas foi isso que eu falei.

Paulo: É verdade, é a mesma coisa.

Pesquisadora: Mas sem comparar o todo, por exemplo, se saíram 5 vans e 60 passageiros. 4 vans e 48 passageiros. 10 vans e 120 passageiros. O que está acontecendo aí?

Paulo: Que a cada 1 van, tem 12 passageiros.

Pesquisadora: Eu posso dizer que quanto mais vans, mais passageiros? É uma relação não é?

Paulo: Sim

Rita: Sim

Paulo: Ou ao contrário também.

Pesquisadora: Vocês acham que o número de vans e o número de passageiros são proporcionais?

Paulo: Sim

Rita: Pera aí. Porque 36 é proporcional a 3. 60 por 5. 48 por 4. (pensando)
É, são.

Pesquisadora: Nessa que acabamos de fazer, quais são as grandezas? Vocês já conseguiram identificar o que é uma grandeza?

Rita e Paulo: Seria o número de passageiros e o número de vans.

Pesquisadora: Então agora, é muito importante que a gente identifique as grandezas e as relações entre elas.

Tarefa 5

Rita: Mas quando é… inversa a gente só multiplica cruzado né?

Paulo: É. Aí deu o quê o teu? Não, isso aqui tá errado, é 90.

Rita: Mas 90?

Paulo: É. 4 vezes 90 é 360. Só que tá errado. Aí eu inverti, coloquei o x em cima e o 60 embaixo.

Rita: Mas não pode.

Paulo: Mas esse aí tá errado. 90 não pode ser também.

Rita: Mas quando é inversamente proporcional, só multiplica cruzado.

Paulo: É, eu também acho que tem que colocar o 60 em cima e o x embaixo. Mas quando eu fiz não deu, aí eu mudei.

Paulo: Ou também eu poderia mudar aqui, porque quando a gente olhou, quanto mais a setinha tá pra cima… 6 em cima, 4 embaixo, 6 é maior.

Rita: Não, mas aí você viajou.

Paulo: Mas tinha que ter dado menos. Não pode dar 90. Não bate.

Rita: Tia, você tem certeza que essa conta tá certa?

Pesquisadora: Sim.

Rita: Não, Paulo. Mas eu tenho certeza que quando é inversamente proporcional…

Paulo: Mas não dá. Eu também fiz assim e não deu. Não bate o 90.

Paulo: Será que esse negócio que fala sobre o custo ser maior…

Rita: Não, tem nada a ver.

Paulo: É aleatório.

Paulo: É, porque aí seria o 4 sobre o 6 e o 60 sobre o x. Porque a gente tem o 4 pro 60 e o 6 pra x.

Rita: Então uai.

Paulo: Aí dá 90. Não pode.

Paulo: Quanto mais impressoras, menos tempo. Quanto mais tempo, menos…

Rita: Tem que ser em menos tempo, tá certo. Mas a ordem das setas não importa.

Paulo: Não importa, vai multiplicar cruzado da mesma forma.

Rita: Tia, isso tá errado. Tem certeza que isso tá certo mesmo?

Pesquisadora: Sim.

Rita: Então eu vou deixar assim.

Paulo: Bota o 90 aí.

Rita: Ô Paulo, mas é a mesma coisa se eu multiplicar reto aqui, né?

Paulo: É inversamente.

Rita: Mas se é inversamente, multiplico reto, não?

Paulo: Inversamente multiplica cruzado.

Pesquisadora: Por que vocês não tentam mudar a forma de pensar? Ao invés de seta pra cima e seta pra baixo.

Paulo: Tá. Se 4 leva 60, 1 leva 15.

Rita: Mas eu acho que… não, não pode tá certo.

Paulo: E se a gente botar o número total de convites?

Rita: Não, Paulo.

Paulo: Mas assim dá.

Rita: Pra que você vai fazer isso?

Paulo: Tem que fazer isso.

Voltam a pensar…

Paulo: Eu acho que eu entendi aqui, pera aí.

Rita: Paulo, a gente só fez errado mesmo. Eu tenho certeza que quando é inversamente a gente troca pra multiplicar cruzado. Porque quando é normal a gente multiplica reto. Não… a gente já multiplica cruzado. É… Ah, era só a gente multiplicar reto.

Rita: A gente não podia ter feito esse cálculo de 6 impressoras, porque a gente desconsidera que aqui vai mais rápido. Porque a gente pega o tempo que cada uma trabalha aqui, só que a gente não sabe quanto tempo a outra trabalha. Você entendeu o que eu quis dizer?

Paulo: Aí é x (tempo que a outra trabalha).

Rita: Sim, eu tô falando porque a gente só tinha multiplicado aqui por 15. Você lembra disso?

Paulo: Sim, se elas têm a mesma eficiência.

Rita: Sim, mas depois elas vão mais rápido. A gente não pode fazer isso que a gente fez.

Outras tentativas…

Rita: Primeiro eu coloquei as grandezas, ou seja, impressoras e o tempo. É como se 4 demorasse 60 e 6 a gente não sabe o tempo certo. Aí a gente percebe que quanto mais impressoras a gente tiver, menor vai ser o tempo de produzir. Até porque esse é o objetivo. Aí a gente observa que elas são inversamente proporcionais, porque quanto maior, menor o tempo. Aí depois de a gente debater muito, a gente chegou à conclusão de que quando é inversamente proporcional, a gente troca uma das grandezas e multiplica cruzado. Né? Aí, multiplicando cruzado, ficaria: $6x = 240 \rightarrow x = 240/6 \rightarrow x = 40$. Ou seja, demoraria 40 minutos.

Paulo: Fiz isso também, só que eu fiz de outra forma. Coloquei que são 12 convites no total pra imprimir. Aí uma impressora leva 15 minutos pra imprimir 3. Durante esses 15 minutos, a gente pode considerar que a cada 5 minutos 1 convite é feito. Aí na 2ª eu escrevi: uma impressora leva x minutos para imprimir 2 convites. Se as impressoras têm a mesma eficiência e na 1ª ela demora 3 pra 15, só que na outra ela demora 2, então o que eu pensei… Se aqui ela faz 1 a cada 5, aqui ela vai fazer 2 a cada 10, porque a eficiência é a mesma. Aí eu coloquei que uma impressora leva 10 minutos para imprimir 2 convites.

Pesquisadora: Mas ele está perguntando quanto tempo elas levam para produzir todos os convites.

Paulo: Então… na 1ª eram 4 impressoras, a gente vai multiplicar tudo por 4, aí vai dar 4, 60 e 12. Nessa daqui, era 6, vai dar 6, 60 e 12. Deu a mesma coisa. Deu 60 minutos.

Pesquisadora: Então ficou diferente do que ela fez?

Paulo: Da outra forma que eu fiz deu 40, mas dessa deu 60.

Rita: Ah, eu acho que ele não pode fazer isso, não, porque ele tá dificultando um negócio que era pra ser fácil. Ele não sabe a quantidade de convites, pra quê que ele tá fazendo isso?
Paulo: Uai, eu tenho que botar um número.
Pesquisadora: Olha aqui, vou fazer de outro jeito… mas sem seta pra cima e pra baixo. Eu coloquei uma tabela com o número de impressoras e o tempo. 4 impressoras gastam 60 minutos. A gente quer descobrir 6 impressoras. De cara assim fica difícil, então vou analisar outras coisas. Por exemplo, se eu tiver 8 impressoras…
Paulo: 120.
Pesquisadora: Por quê?
Paulo: Porque é o dobro.
Rita: Não. Paulo, sabe por que você tá fazendo isso? Porque você tá achando que essas 4 vão imprimir a mesma quantidade que essas 8.
Paulo: Então seria 30.
Rita: Exatamente.
Pesquisadora: Então olha só: quanto mais impressoras eu tiver, menos tempo eu vou gastar. O que aconteceu do 4 pro 8?
Paulo: Você multiplicou por 2.
Pesquisadora: Isso mesmo, eu dobrei. Certo?
Paulo: Sim.
Pesquisadora: E o que acontece do 60 pro 30?
Paulo: Você divide por 2.
Pesquisadora: Eu divido por 2. Concorda que do 30 pro 60, voltando aqui, eu multipliquei por 2?
Paulo: Sim, entendi.
Pesquisadora: Só que eu quero chegar nas 6 impressoras. Como eu posso fazer isso?
Paulo: Aqui você pode multiplicar por 1,5.
Pesquisadora: Ok, mas vamos tentar usar número natural?
Paulo: Eu posso triplicar e dividir por 2.
Pesquisadora: Se eu triplicar o número de impressoras eu vou ter 12 impressoras. E aí quanto tempo eu vou ter?
Paulo: 20, divido por 3.
Pesquisadora: E agora, se eu coloco pela metade o número de impressoras, o meu tempo…
Paulo: Dobra. Vai dar 40.

Pesquisadora: Tudo bem com a ideia da tabela?

Paulo: Sim.

Pesquisadora: Então, quanto mais impressoras, menos tempo. Quanto menos impressoras, mais tempo. É o que vocês já falaram, elas são inversamente proporcionais, porque enquanto uma cresce, a outra decresce – numa mesma proporção.

Paulo: Então, aqui eu tô errado porque eu deveria ter subtraído o 20, né?

Pesquisadora: Aí tá errado porque você supôs um valor. Se supor outro, vai encontrar outro número.

Tarefa 6

Durante a resolução dos problemas abaixo:

Paulo: Não necessariamente, quanto mais velha a pessoa, maior ela é, né?

Problema 1:

Rita: Primeiro as grandezas. Elas seriam as páginas e as horas que ele gastou lendo. Certo? A gente sabe que pra ler 30 páginas ele gasta 2 horas. Ele quer saber quantas horas ele gasta para ler 225 páginas. A gente sabe que quanto mais página tem o livro, ele vai passar mais horas lendo. Então a gente percebe que elas são diretamente proporcionais. Então ele precisa de 15 horas para ler o livro de 225 páginas.

Paulo: Fiz igual, só que na tabela.

Problema 2:

Paulo: Coloquei que as grandezas são gatos e dias. E na simulação eu coloquei: gatos 4 e dias 3. Como a pessoa adotou 2 gatos, dividiu os gatos pela metade, divide por 2. E aqui eu multipliquei, porque se tem menos gatos, a ração vai durar mais dias. Então as grandezas são inversamente proporcionais. Aí eu achei que se a mulher tiver só 2 gatos, a ração vai durar 6 dias.

Rita: Mesma coisa.

Paulo: Eu coloquei que as grandezas são alturas e anos. Aí fiz a tabelinha: 5 anos é igual a 1 metro e 12, 10 anos é 1 metro e 60 e 15 é igual x. Aí eu escrevi: não se pode atribuir um valor exato, pois a pessoa pode crescer mais ou menos que o esperado.

Porque não tem uma…..

Rita: Proporcionalidade…

Paulo: Não. Uma…

Pesquisadora: Padrão de crescimento?

Paulo: É. Porque olha bem. Se a gente analisar aqui, ela cresceu 48 cm durante 5 anos. Só que a gente pegar essa informação que a gente tem, do 1 ano dela até os 5 era pra ela ter 48 cm, mas ela não tem, ela tem 1 metro e 12. Então a gente não pode dizer que ela cresceu um valor. Aqui nos primeiros anos dela, ela cresceu meio que o dobro do que ela cresceu aqui.

Rita: Eu só falei que a gente não pode dizer que idade e altura são grandezas proporcionais.

Pesquisadora: Isso mesmo.

Paulo: Mas se pedisse para eu colocar, como que eu colocaria o x aqui?

Pesquisadora: Não tem como.

Paulo: Mas é uma estimativa?!

Pesquisadora: Considerando elas diretamente proporcionais?

Paulo: Sim

Pesquisadora: Mas elas não são.

Paulo: Verdade, não tem como né?!

<u>*Problema 5*</u>:

Rita: Grandezas: velocidade e tempo. Para acabar o percurso com uma velocidade de 60km/h ele leva 5 horas e quer saber em 2,5 horas qual seria a velocidade dele. Aí a gente percebe que quanto maior a velocidade, menos tempo ele vai gastar. Aí chegamos que ele deverá andar a 120km/h.

Paulo: Isso, inversamente proporcional.

<u>*Problema 6:*</u>

Paulo: Eu coloquei que as grandezas são litros e dias, e, na tabelinha, eu coloquei 92 litros são desperdiçados em 2 dias. Aí eu dividi por 2 pra ficar mais fácil, deu 46 litros em 1 dia. Depois eu multipliquei por 30, que deu 1380 litros em 30 dias. E elas são diretamente proporcionais.

Rita: O meu deu diferente. Eu coloquei água e dias nas grandezas, mas dá pra ser litros. A gente sabe que em 2 dias desperdiça 92 litros de água. Quer saber em 30 dias, ou seja, quanto mais dias a torneira ficar pingando, maior vai ser o desperdício de água. Como elas são diretamente, eu multipliquei cruzado, que aí deu 2x é igual a 1860 dividido por 2, que aí deu 930 litros de água.

Pesquisadora: Então vocês chegaram em respostas diferentes. E agora?

Paulo: O seu tá errado, porque você multiplicou errado.

Rita: Ah é. Foi sem querer.