

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Leandro Abib Mercês

Aplicações Estáveis entre Superfícies Fechadas

Juiz de Fora

2025

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Abib, Leandro Mercês.

Aplicações Estáveis entre Superfícies Fechadas / Leandro Abib Mercês.
– 2025.

98 f. : il.

Orientadora: Catarina Mendes de Jesus Sanches

Coorientador: Laércio José dos Santos

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto
de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2025.

1. Aplicações Estáveis. 2. Grafos. 3. Singulares. I. Mendes de Jesus
Sanches, Catarina, orient. II. Título. Dos Santos, Laércio José, coorient. III.
Título

Leandro Abib Mercês

Aplicações Estáveis entre Superfícies Fechadas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração:

Orientadora: Profa. Dra. Catarina Mendes de Jesus Sanches

Coorientador: Prof. Dr. Laércio José dos Santos

Juiz de Fora

2025

Leandro Abib Mercês

Aplicações Estáveis entre Superfícies Fechadas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática Pura

Aprovada em 10 de março de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Laércio José dos Santos - Coorientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos

Universidade Federal de São Carlos

Prof. Dr. Pantaleón D. Romero Sánchez

Universidad CEU Cardenal Herrera

Juiz de Fora, 02/04/2025.



Documento assinado eletronicamente por **Laercio Jose dos Santos, Professor(a)**, em 09/04/2025, às 14:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Edivaldo Lopes dos Santos, Usuário Externo**, em 10/04/2025, às 08:48, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Pantaleón David Romero Sánchez, Usuário Externo**, em 16/05/2025, às 10:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **2328358** e o código CRC **A65C6098**.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), pelo concedimento da bolsa de mestrado que possibilitou a realização desta pesquisa. Agradeço à minha orientadora, Catarina, pelos ensinamentos e pela paciência apresentada comigo por eu ser um iniciante neste assunto em específico; e ao meu coorientador, Laércio, por sempre me dar um norte quando necessário e pelo olhar cirúrgico de sempre. Agradeço, também, à todos que já me orientaram em minha trajetória acadêmica, pela minha formação como matemático. Por último, mas não menos importante, a todos os meus parentes e amigos que estiveram comigo neste período e que, felizmente, se eu fosse citá-los dobraria o tamanho desta dissertação.

RESUMO

Este trabalho tem como estudo principal os grafos associados a aplicações estáveis entre superfícies fechadas, orientáveis e não-orientáveis, como um invariante quanto à equivalência topológica, com o objetivo de determinar quando aplicações com a mesma imagem não são topologicamente equivalentes e de codificar informações sobre o domínio da aplicação. O processo de associação de um grafo a uma aplicação estável é feito sobre as regiões regulares e curvas singulares do domínio da aplicação, respectivamente atribuindo um vértice e uma aresta a cada uma destas; o processo inverso da associação de grafos é a realização de grafos por aplicações estáveis, que consiste em construir uma aplicação a partir de um grafo dado. Para a classificação dos invariantes as ferramentas utilizadas são as transições, isto é, homotopias entre aplicações estáveis em vizinhanças de estabilidade distintas; e as cirurgias de aplicações e grafos resultantes das cirurgias em variedades — uma técnica de se obter novas variedades a partir de uma variedade dada. Os efeitos de uma cirurgia sobre uma variedade induz efeitos nos conjuntos regular e singular que, por sua vez, induz alterações ao grafo associado; desta forma, é possível obter uma aplicação estável a partir de outras aplicações estáveis cujo estudo é mais fácil.

Palavras-chave: Aplicações-Estáveis. Grafos. Singularidades.

ABSTRACT

This dissertation's main theme is the graphs associated with stable maps between closed surfaces, orientable and non-orientable, as an invariant regarding topological equivalence, intending to determine whenever two stable maps with the same image are not topologically equivalent and codify informations about the map's domain. The process of associating a graph to a stable map is done over the regular regions and singular curves of the map, respectively assigning a vertex and an edge to each of these; the inverse process is the realization of graphs by stable maps, which consists in constructing a map from a given graph. In addition, the tools used in the classification of the invariants are the transitions, which are homotopies between maps in distinct stability neighbourhoods; and the surgeries of maps and graphs resulting from manifold surgeries — a technique of obtaining new manifolds from a given manifold. The effects of a surgery over a manifold induce effects on the regular and singular sets which, in turn, induces changes to the associated graph; in this way, it is possible to obtain a stable map from other stable maps, which are simpler to study.

Keywords: Stable-Maps. Graphs. Singularities.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

0-, 1- e 2-células.	23
Exemplo do que não é uma célula à esquerda e do que é uma célula à direita. . . .	23
(a) é um complexo; (b) não é um complexo.	24
Exemplo de grafo planar.	26
Exemplos de grafos com 7 vértices.	31
Soma conexa de n Toros.	32
Tipos de vizinhanças de uma curva fechada.	37
Lábios.	47
Bicos.	47
Rabo de Andorinha.	48
Tangência de Dobras ($\mathbf{DD}^0$).	48
Tangência de Dobras ($\mathbf{DD}^1$).	48
Tangência de Dobras ($\mathbf{DD}^2$).	48
Ponto triplo ($\mathbf{PT}^0$ acima e $\mathbf{PT}^1$ embaixo).	49
Tangência de Dobras com Cúspides ($\mathbf{CD}^1$).	49
Tangência de Dobras com Cúspides($\mathbf{CD}^2$).	49
Exemplo de aplicações contorno aparente idêntico mas que não são equivalentes . .	53
Cúspides positivas e negativas.	56
Exemplos de Transições $\mathbf{L}^+$ e $\mathbf{B}_v^{\pm,+}$	59
Exemplos de transições $\mathbf{B}_w^{+,+}$ e $\mathbf{B}_w^{-,-}$	59
Exemplos de contornos aparentes irredutíveis sobre o 3-toro.	61
Superfície Cross-Cap e a Soma Conexa de Duas Superfícies Cross-Cap.	63
Exemplos de grafos de aplicações estáveis com $\star$ -laços.	64
Exemplos de aplicações de dobra e seus grafos.	64
Cirurgia Horizontal Local.	66
Cirurgia Vertical Local.	66
Exemplos de Cirurgias de Grafos.	67
Transição $\mathbf{B}_e$	68
Exemplos de transições Bicos $\mathbf{B}_v^-$ e $\mathbf{B}_w^+$	69
Efeito da Cirurgia Vertical no Contorno Aparente.	70
Exemplo de Cirurgia Möbius-Disco ($\mathbf{Strip-Disc}$).	71
Exemplos de somas horizontais de grafos irredutíveis.	74
Exemplos de grafos com, no máximo, dois vértices.	78
Diagrama das definições dos asteriscos.	85
Árvores com $V \leq 4$	93
Árvores com $V = 5$	94
Árvores com $V = 6$	95

Árvores com $V = 7$ 95

Árvores com $V = 8$ 96

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	–	Número $\mathfrak{A}$ de árvores distintas com V vértices.	27
Tabela 2	–	Efeito das transições lábios e bicos nos invariantes.	57

LISTA DE SÍMBOLOS

D^n	Disco n -dimensional
ΔABC	Triângulo ABC
K	Complexo
$ K $	Espaço subjacente do complexo K
int	Interior
$\cap$	Interseção
χ	Característica de Euler
$\mathcal{G}$	Grafo
$\in$	Pertence
V	Número de vértices
E	Número de arestas
$\mathcal{G}(V, E)$	Conjunto dos grafos com V vértices e E arestas
$\mathcal{T}$	Árvore
β_1	Primeiro número de Betti
$\mathbb{R}^n$	Espaço Euclidiano n -dimensional
$\#$	Soma conexa
D_+^n	Meio disco n -dimensional
$\mathbb{S}^2$	2-esfera
∂	Bordo ou Fronteira
$\mathbb{T}$	Toro
$\mathbb{P}$	Espaço Projetivo
F	Face
g	Gênero
$\cup$	União
$\setminus$	Diferença de conjuntos
$\mathcal{C}$	Conjunto de curvas fechadas, simples e disjuntas
α_k	Curva fechada, simples e disjunta
W	Peso total
$\mathcal{G}_W(V, E)$	Conjunto dos grafos com V vértices, E arestas e peso total W
(T, P)	Par de pesos
$\mathcal{G}_{(T, P)}(V, E)$	Conjunto dos grafos com V vértices, E arestas e par de pesos (T, P)
S	Número total de $\star$ -laços
$\mathcal{G}_{(T, P)}^S(V, E)$	Conjunto dos grafos com V vértices, E arestas, par de pesos (T, P) e S $\star$ -laços
$\overset{k}{\sim}$	Relação de contato de k -ésima ordem
$(df)_p$	Derivada de f em p
$T_p M$	Espaço tangente de M em p
TM	Fibrado tangente
$J^k(M, N)_{p, q}$	Conjunto das classes de equivalência de $\overset{k}{\sim}$
$J^k(M, N)$	Espaço dos k -jatos de M em N

$j^k f$	k -jato de f
$\partial/\partial x^{ \alpha }$	Derivada parcial
$\mathbb{A}_n^k$	Espaço de polinômios em n variáveis e grau $\leq k$
$\mathbb{B}_{n,m}^k$	Soma direta de m espaços $\mathbb{A}_n^k$
$\bigoplus$	Soma direta
$\dim$	Dimensão
$C^\infty(M, N)$	Espaço das aplicações suaves de M em N
π_k^ℓ	Aplicação canônica $J^\ell(M, N) \rightarrow J^k(M, N)$
$\circ$	Composição
id_X	Identidade de X
$\mathcal{E}(M, N)$	Espaço das aplicações estáveis de M em N
$\Gamma(M, N)$	Conjunto discriminante
Σf	Conjunto singular de f
$\mathcal{B}f$	Contorno aparente de f
codim	Codimensão
S_r	Singularidade
$\ker$	Núcleo
$H(\cdot, t)$	Homotopia
L	Transição Lábios
B	Transição Bicos
S	Transição Rabo de Andorinha
DD ^{k}	Transição Tangência de Dobras
PT ^{k}	Transição Ponto Triplo
CD ^{k}	Transição Tangência de Dobras com Cúspides
$M^\pm$	Fecho da componente conexa que preserva (inverte) orientação
$\deg_y f$	Grau local de f em y
$\deg f$	Grau de f
θ_X	Diferença do parâmetro X^+ e X^-
L ^{$\pm$}	Transição Lábios positiva (negativa)
B _{v} ^{$\pm$}	Transição Bicos sobre o vértice
B _{w} ^{$\pm$}	Transição Bicos sobre o peso
I	Invariante
ΔI	Incremento do invariante
$\mu(p_k)$	Grau local de um ponto de cúspide p_k
$\mathbb{K}$	Garrafa de Klein
D_P	Região de $\mathbb{P}$ homeomorfa ao disco
F_P	Faixa de Möbius
D^q	Disco q -dimensional
C_h	Cirurgia horizontal
C_v	Cirurgia vertical
B _{e}	Transição Bicos que troca o peso de dois vértices adjacentes
C_{md}	Cirurgia Möbius-Disco

$\mathcal{G}^e$	Grafos expandidos a partir de $\mathcal{G}$
$\forall$	Para todo
$\mathcal{L}_n$	Árvore tipo linha com n vértices
$\mathcal{S}_n$	Árvore tipo estrela com n vértices

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
2	PRELIMINARES	23
2.1	COMPLEXOS	23
2.2	GRAFOS	24
2.3	CURVAS E SUPERFÍCIES	31
2.4	GRAFOS E SUPERFÍCIES FECHADAS COM CURVAS	34
3	SINGULARIDADES	39
3.1	k -JATOS	39
3.2	TOPOLOGIAS DE WHITNEY	41
3.3	APLICAÇÕES ESTÁVEIS	42
3.4	CLASSIFICAÇÃO DE SINGULARIDADES	44
3.5	TRANSIÇÕES DE CODIMENSÃO 1	46
4	APLICAÇÕES ESTÁVEIS ENTRE SUPERFÍCIES FECHADAS	51
4.1	GRAFOS DE APLICAÇÕES ESTÁVEIS	52
4.2	EFEITOS DAS TRANSIÇÕES DE CODIMENSÃO 1	56
4.3	INVARIANTES GLOBAIS	60
5	APLICAÇÕES DE SUPERFÍCIES FECHADAS EM $\mathbb{P}$	63
5.1	CIRURGIAS DE APLICAÇÕES E GRAFOS	65
5.2	EFEITOS DAS TRANSIÇÕES E CIRURGIAS	68
5.3	REALIZAÇÃO DE GRAFOS PRÉ-FIXADOS	70
5.3.1	Realização de Árvores Quasi-Equilibradas	72
5.3.2	Realização de Grafos Quasi-Equilibradas com Ciclos	77
6	CONCLUSÃO	81
	APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÕES OMITIDAS	83
	APÊNDICE B – ÁRVORES COM ATÉ 8 VÉRTICES	93
	REFERÊNCIAS	97

1 INTRODUÇÃO

A Teoria das Singularidades é uma área da matemática que utiliza uma ampla gama de resultados de outras áreas, como a Topologia Algébrica e a Geometria Diferencial; e, também é utilizada em uma vasta amplitude de resultados de outras áreas, como na Teoria da Relatividade Geral (1) e sendo um caso mais geral da Teoria das Catástrofes em Sistemas Dinâmicos (2).

Um dos objetos de estudo desta teoria são as aplicações estáveis. Para defini-las, precisamos, primeiro, definir uma topologia sobre o conjunto das aplicações suaves entre duas variedades e relacionar duas aplicações suaves por difeomorfismos. Assim, define-se uma relação de equivalência que, por sua vez, define vizinhanças de estabilidade.

Este texto visa exibir que é possível associar grafos à cada aplicação e, em contrapartida, realizar cada grafo por uma aplicação no caso em que as variedades em questão são superfícies fechadas, sejam elas orientáveis ou não, como feito por *Mendes & Romero* em (3) e (4) e por *Hacon, Mendes & Romero* em (5) e (6).

No Capítulo 2 apresentamos os resultados propedêuticos para esta classificação, abordando sobre Complexos, Grafos, Curvas e Superfícies e a Associação entre Grafos e Superfícies com Curvas; baseado nos materiais de *Kinsey* (7), *Diestel* (8) e *Mendes* (9).

No Capítulo 3 desenvolvemos os resultados necessários da Teoria de Singularidades, abordando sobre k -Jatos, Topologias de Whitney, Aplicações Estáveis, Classificação de Singularidades e Transições; baseado nos materiais de *Guillemin & Golubitsky* (10), *Alhadas* (11) e *Ohmoto & Aicardi* (12).

Para os Capítulos 4 e 5 nos baseamos em *Mendes & Romero* em (3) e (4), respectivamente. No Capítulo 4 estudamos estes invariantes para o caso em que ambas superfícies são orientáveis e no Capítulo 5 estendemos este estudo para o caso em que o contradomínio é o plano projetivo, *id est*, não-orientável.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo iremos explorar uma miscelânea de resultados necessários para o resto do corpo do texto, construindo a partir da Teoria de Complexos resultados da Teoria de Grafos. Este capítulo é baseado nas referências (7), (8) e (9).

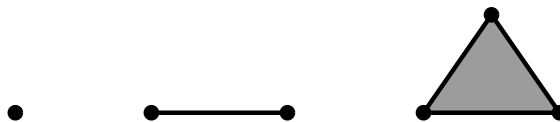
2.1 COMPLEXOS

Nesta seção definimos células e complexos, que são ferramentas bastante utilizadas em Topologia Algébrica e em Geometria.

Definição 2.1. Uma n -célula é um conjunto cujo interior é homeomorfo a um disco n -dimensional $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ com a condição que seu bordo (Definição 2.22) deve ser formado por um número finito de células de dimensão menor, chamadas de **faces** da n -célula. Denotamos $\sigma < \tau$ quando σ é uma face de τ .

- (i) Uma 0-célula é um ponto A .
- (ii) Uma 1-célula é um segmento de reta $a = AB$, unindo duas 0-células A e B ($A, B < a$).
- (iii) Uma 2-célula é um polígono (comumente um triângulo), como em $\sigma = \Delta ABC$, com $AB, BC, CA < \sigma$. Note que $A < AB < \sigma$, então $A < \sigma$.

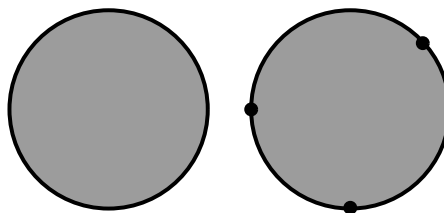
Figura 1 – 0-, 1- e 2-células.



Fonte: Adaptado de (7).

Pela Definição 2.1, notamos que n -células são formadas por m -células, com $m < n$: uma 1-célula têm duas faces, que são 0-células; uma 2-célula têm 1-células como suas arestas e 0-células como seus vértices.

Figura 2 – Exemplo do que não é uma célula à esquerda e do que é uma célula à direita.



Fonte: Adaptado de (7).

Definição 2.2. Um **complexo** K é um conjunto finito de células

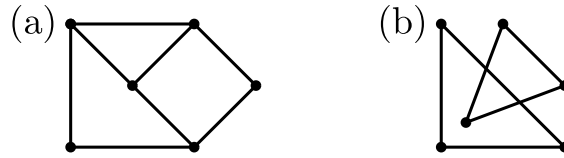
$$K = \bigcup \{\sigma : \sigma \text{ é uma célula}\}$$

tais que:

- (i) se σ é uma célula em K , então todas suas faces são células de K ;
- (ii) se σ e τ são células de K , então $\text{int}(\sigma) \cap \text{int}(\tau) = \emptyset$.

A dimensão de K é igual à dimensão de sua célula de maior dimensão.

Figura 3 – (a) é um complexo; (b) não é um complexo.



Fonte: Adaptado de (7).

Pela Definição 2.2, temos que uma n -célula é, também, um complexo de dimensão n ; e que complexos de dimensão n são gerados ao “colarmos” n -células. A condição (ii) da Definição 2.2 proíbe a interseção dos interiores células para a formação de complexos, como ilustrado na Figura 3.

Definição 2.3. Dado um complexo K , qualquer subconjunto de K que é, também, um complexo é dito um **subcomplexo**. Dizemos que um complexo K é **conexo** quando não pode ser escrito como união disjunta de subcomplexos.

A seguir, temos um Teorema que define um invariante topológico para complexos.

Teorema 2.4. ((7), p.97) *Seja K um complexo n -dimensional. Denotando por a_k o número total de k -células em K , a **característica de Euler** de K é dada por*

$$\chi(K) = \sum_{j=0}^n (-1)^j a_j.$$

Demonstração. Veja (13), Teorema 13.3, Página 215. ■

2.2 GRAFOS

Nesta seção definimos grafos, que têm um papel central nesta dissertação, e desenvolvemos as suas propriedades básicas com detalhes.

Definição 2.5. Um **grafo** $\mathcal{G}$ é um 1-complexo conexo. Denotamos por $\mathcal{G}(V, E)$ o conjunto de todos os grafos com V vértices e E arestas.

Para os propósitos deste estudo, definimos grafos como sendo conexos, porém, classicamente, um grafo não é necessariamente conexo.

Uma aresta que conecta dois vértices u e v será denotada por uv .

Definição 2.6. Dado um grafo $\mathcal{G} \in \mathcal{G}(V, E)$, dizemos que:

- um **caminho** sobre $\mathcal{G}$ é uma sequência de vértices $\{v_1, \dots, v_{k+1}\}$ todos distintos e arestas $\{e_1, \dots, e_k\}$ distintas da forma $v_1e_1v_2e_2 \cdots v_ke_kv_{k+1}$, onde e_j é incidente aos vértices v_j e v_{j+1} , sendo k o **comprimento** do caminho (o número de arestas pertencentes ao caminho);
- dois vértices são **adjacentes** se são conectados por uma mesma aresta;
- duas ou mais arestas são **adjacentes** se são incidentes a um mesmo vértice;
- Um **ciclo** no grafo é um caminho fechado $v_1e_1v_2e_2 \cdots e_kv_1$. Um **laço** no grafo é um ciclo com única aresta.
- O **grau** de um vértice v corresponde ao número de arestas incidentes a v , contando duas vezes cada laço em v .

Dados dois grafos, a definição abaixo nos diz como determinar se são iguais ou distintos.

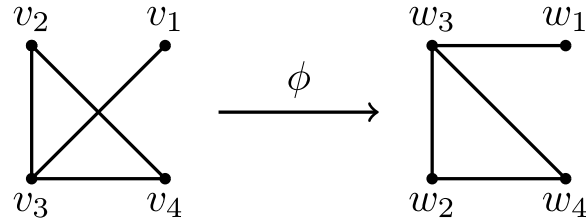
Definição 2.7. Dois grafos $\mathcal{G} \in \mathcal{G}(V, E)$ e $\mathcal{G}' \in \mathcal{G}(V', E')$ são **isomorfos** quando $V = V'$, $E = E'$ e existe uma correspondência $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ bijetiva entre os V vértices e as E arestas que conserva as relações de adjacência.

Pelas Definições 2.6 e 2.7, temos imediatamente que dois grafos não podem ser isomorfos quando não têm o mesmo número de vértices ou o mesmo número de arestas. Se possuem o mesmo número de vértices e arestas, quando o grau máximo de um vértice de um dos grafos é diferente do grau máximo de um vértice do outro, temos que não são isomorfos.

Se os graus máximos são iguais, devemos ver a quantidade de vértices com o mesmo grau, caso exista alguma diferença nessa quantidade em algum grau, segue que os grafos não são isomorfos. Por fim, se nenhum dos casos anteriores falha para o isomorfismo, é preciso analisar as adjacências de cada vértice em cada um dos grafos e este é um processo com mais nuances do que os anteriores. Assim, descrevemos um algoritmo para a determinação de isomorfismos de grafos.

Definição 2.8. Um grafo é dito **planar** quando é isomorfo a um grafo sem cruzamento de arestas no plano. Caso não haja um isomorfismo desse tipo o grafo é dito **não planar**.

Figura 4 – Exemplo de grafo planar.



Fonte: Imagem produzida pelo autor.

Quando um grafo é planar ele divide o plano em regiões que são delimitadas por suas arestas. Denominamos essas regiões de **faces**. A região exterior ao grafo, que não é limitada por suas arestas, também é contada como uma face do grafo, ou seja, um grafo com 2 vértices e 1 aresta possui uma única face. Segundo Euler, dado um grafo planar e conexo, com V vértices, F faces (ou regiões) e E arestas, então:

$$V + F - E = 2.$$

Aqui vamos considerar grafos no caso geral, podendo ser planares ou não planares.

Teorema 2.9. A *característica de Euler* de um grafo $\mathcal{G} \in \mathcal{G}(V, E)$ é um invariante topológico e é dado por $\chi(\mathcal{G}) = V - E$.

Demonstração. Como $\mathcal{G} \in \mathcal{G}(V, E)$ é um 1-complexo conexo, temos que $a_0 = V$, $a_1 = E$ e, pela Definição 2.4, sua característica de Euler é dada por

$$\chi(\mathcal{G}) = \sum_{j=0}^1 (-1)^j a_j = a_0 - a_1 = V - E,$$

concluindo a demonstração. Se $\mathcal{G}, \mathcal{G}' \in \mathcal{G}(V, E)$ são isomorfos, então $\chi(\mathcal{G}) = \chi(\mathcal{G}')$, portanto a característica de Euler é um invariante topológico (note que independe de serem ou não isomorfos). ■

Definição 2.10. Uma **árvore** é um grafo sem ciclos.

As árvores são os grafos mais simples e servem como uma base para construção de outros grafos. Além disso, sabemos quantas árvores existem para cada número de vértices, quantidade exibida na tabela abaixo.

Tabela 1 – Número $\mathfrak{A}$ de árvores distintas com V vértices.

V	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathfrak{A}$	1	1	1	2	3	6	11	23

Fonte: Retirado de (7).

O teorema a seguir é uma caracterização de árvores.

Teorema 2.11. ((8), p.14) *As seguintes afirmações são equivalentes para um grafo $\mathcal{T}$:*

- (i) $\mathcal{T}$ é uma árvore;
- (ii) Quaisquer dois vértices de $\mathcal{T}$ estão ligados por um único caminho em $\mathcal{T}$;
- (iii) $\mathcal{T}$ é minimalmente conexo, isto é, $\mathcal{T} \setminus \{e\}$ é desconexo para toda aresta $e \in \mathcal{T}$;
- (iv) $\mathcal{T}$ é maximalmente acíclico, isto é, $\mathcal{T} \cup \{xy\}$ contém ciclos para quaisquer dois vértices não adjacentes $x, y \in \mathcal{T}$.

Demonstração. (i) $\implies$ (ii): Seja $\mathcal{T}$ uma árvore e suponha que, dados dois vértices $x, y \in \mathcal{T}$, existe mais de um caminho ligando-os. Sejam $xe_1 \cdots e_k y$ e $xe'_1 \cdots e'_m y$ dois destes caminhos. Desta forma, $xe_1 \cdots e_k ye'_m \cdots e'_1 x$ é um ciclo em $\mathcal{T}$, contradizendo a hipótese de $\mathcal{T}$ ser uma árvore. Portanto, quaisquer dois vértices de $\mathcal{T}$ estão ligados por um único caminho em $\mathcal{T}$.

(ii) $\implies$ (iii): Seja $\mathcal{T}$ um grafo no qual exista somente um caminho entre quaisquer dois vértices em $\mathcal{T}$. Seja $e \in \mathcal{T}$ uma aresta ligando x e y em $\mathcal{T}$. Se e é uma aresta na qual $\mathcal{T} \setminus \{e\}$ não é desconexo, então deve existir algum outro caminho em $\mathcal{T}$ ligando as arestas x e y , contradizendo a hipótese de que existe somente um caminho entre quaisquer dois vértices em $\mathcal{T}$. Logo, $\mathcal{T}$ é minimalmente conexo.

(iii) $\implies$ (iv): Seja $\mathcal{T}$ um grafo minimalmente conexo. Se, dados $x, y \in \mathcal{T}$ não adjacentes, $\mathcal{T} \cup \{xy\}$ não contém ciclos, então $\mathcal{T}$ deve ser desconexo, pois, caso contrário, existiria outro caminho em $\mathcal{T}$ unindo x a y formando um ciclo em $\mathcal{T} \cup \{xy\}$; mas isto contradiz a hipótese de que $\mathcal{T}$ é minimalmente conexo. Logo, $\mathcal{T} \cup \{xy\}$ contém ciclos para quaisquer dois vértices não adjacentes $x, y \in \mathcal{T}$.

(iv) $\implies$ (i): Se $\mathcal{T}$ é maximalmente acíclico, então $\mathcal{T}$ é um grafo sem ciclos e, portanto, uma árvore. ■

Do item (ii) do Teorema 2.11, temos que existe um único caminho unindo quaisquer dois vértices x e y de uma árvore $\mathcal{T}$. Assim, podemos denotar este caminho por $x\mathcal{T}y$. Muitas vezes, é útil fixar algum vértice r de $\mathcal{T}$ e comparar dois vértices x e y de $\mathcal{T}$ a partir de r . Neste caso, denominamos o vértice r de **raíz** da árvore $\mathcal{T}$.

Podemos escrever $x \leq_r y$ quando $x \in r\mathcal{T}y$, ou seja, x “é menor ou igual a” y quando x pertence ao caminho que une y à raiz r . Temos que $x \leq_r x$, pois é o ponto final do caminho $r\mathcal{T}x$. Se $x \leq_r y$ e $y \leq_r x$, então $x \in r\mathcal{T}y$ e $y \in r\mathcal{T}x$, ou seja, x está no único caminho unindo r a y e vice-versa, de onde $x = y$, pois, caso contrário, ou $x <_r y$, de onde $y \notin r\mathcal{T}x$, ou $y <_r x$, de onde $x \notin r\mathcal{T}y$. Ainda, se $x \leq_r y$ e $y \leq_r z$, temos que $x \in r\mathcal{T}y$ e $y \in r\mathcal{T}z$, mas podemos decompor o caminho $r\mathcal{T}z$ em $r\mathcal{T}y\mathcal{T}z$, de onde

$$x \in r\mathcal{T}y \subset r\mathcal{T}y\mathcal{T}z = r\mathcal{T}z.$$

Assim, $x \leq_r z$. Dessa forma, $\leq_r$ é uma ordem parcial em $\mathcal{T}$, chamada de **ordem-árvore**.

Teorema 2.12. ((7), p.93) *Se $\mathcal{T}$ é uma árvore, então $\chi(\mathcal{T}) = 1$.*

Demonstração. A demonstração é feita por indução sobre o número de vértices V . Se $\mathcal{T}$ tem somente um vértice, temos que $\mathcal{T}$ não possui arestas, de onde $\chi(\mathcal{T}) = V - E = 1 - 0 = 1$.

Suponha que o resultado é verdadeiro para toda árvore com $V < n$ e seja $\mathcal{T}$ uma árvore com n vértices. Escolha, em $\mathcal{T}$, uma aresta a e remova-a, obtendo duas subárvores disjuntas $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$, pelo item (iii) do Teorema 2.11.

Como $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ têm menos de n vértices, segue da hipótese indutiva que

$$\chi(\mathcal{T}_1) = V_1 - E_1 = 1,$$

$$\chi(\mathcal{T}_2) = V_2 - E_2 = 1.$$

Note que cada vértice de $\mathcal{T}$ ou está em $\mathcal{T}_1$, ou está em $\mathcal{T}_2$, de onde $V = V_1 + V_2$; enquanto as arestas de $\mathcal{T}$ são as arestas de $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ e a aresta a removida, de onde $E = E_1 + E_2 + 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{T}) &= V - E \\ &= (V_1 + V_2) - (E_1 + E_2 + 1) \\ &= V_1 + V_2 - E_1 - E_2 - 1 \\ &= (V_1 - E_1) + (V_2 - E_2) - 1 \\ &= 1 + 1 - 1 \\ &= 1, \end{aligned}$$

como queríamos. ■

Suponhamos que temos um grafo do tipo $\mathcal{G}(2, 3)$ e denotemos seus vértices por A e B e suas arestas por a , b e c conectando A a B . Uma pergunta natural é a quantidade de ciclos que este grafo possui; podemos listá-los como $AaBbA$, $AbBcA$ e $AaBcA$, porém, podemos escrever este último ciclo como combinação dos dois anteriores. De fato,

$$AaBcA = AaBbAbBcA.$$

A próxima definição formaliza a noção discutida aqui.

Definição 2.13. O número de **ciclos livres** (ou **ciclos distintos**) de um dado grafo $\mathcal{G}$ com V vértices é o número mínimo de arestas que podem ser retiradas do grafo para obter uma árvore com os V vértices de $\mathcal{G}$. Este número será denotado por $\beta_1(\mathcal{G})$ e é chamado de **primeiro número de Betti** de $\mathcal{G}$.

A árvore resultante do processo de retirada de arestas de um grafo com ciclos tem um papel especial em algumas demonstrações e é formalizada na seguinte definição.

Definição 2.14. Uma árvore $\mathcal{T}$ será dita **árvore maximal** (ou **árvore geradora**) do grafo $\mathcal{G} \in \mathcal{G}(V, E)$ quando $\mathcal{T}$ é um subgrafo de $\mathcal{G}$ contendo os seus V vértices.

Note que, em geral, a árvore geradora de um grafo não é única, exceto quando o grafo é uma árvore.

Teorema 2.15. ((7), p.95) *Seja $\mathcal{G}$ um grafo com $\beta_1(\mathcal{G})$ ciclos livres. Então,*

$$\chi(\mathcal{G}) = 1 - \beta_1(\mathcal{G}).$$

Demonstração. Para cada um dos $\beta_1(\mathcal{G})$ ciclos de $\mathcal{G}$ podemos retirar uma aresta, obtendo sua árvore geradora $\mathcal{T}$ que tem $E - \beta_1(\mathcal{G})$ arestas. Pelo Teorema 2.12, segue que

$$1 = \chi(\mathcal{T}) = V - (E - \beta_1(\mathcal{G})) = (V - E) + \beta_1(\mathcal{G}) = \chi(\mathcal{G}) + \beta_1(\mathcal{G}).$$

Portanto, $\chi(\mathcal{G}) = 1 - \beta_1(\mathcal{G})$. ■

Agora, podemos ver qual é o tipo de grafo $\mathcal{G}(V, E)$ de uma árvore.

Teorema 2.16. ((8), p.14) *Um grafo $\mathcal{T}$ é uma árvore se, e somente se, $\mathcal{T} \in \mathcal{G}(V, V - 1)$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{T}$ uma árvore. Pelos Teoremas 2.8 e 2.11 temos que

$$V - E = \chi(\mathcal{T}) = 1 \implies E = V - 1.$$

Por outro lado, se $\mathcal{T}$ é um grafo com V vértices e $V - 1$ arestas, temos dos Teoremas 2.18 e 2.14 que

$$1 - \beta_1(\mathcal{T}) = \chi(\mathcal{T}) = V - (V - 1) = 1 \implies \beta_1(\mathcal{T}) = 0,$$

logo, $\mathcal{T}$ é sua própria árvore maximal e, portanto, $\mathcal{T}$ é uma árvore. ■

Definição 2.17. Um grafo $\mathcal{G}$ é dito **bipartido** quando é possível particionar o conjunto de vértices $V(\mathcal{G})$ em dois subconjuntos não vazios V' e V'' tais que toda aresta em $\mathcal{G}$ tem um vértice em V' e o outro em V'' .

Podemos, atribuindo um sinal de $+$ aos vértices de V' e um sinal de $-$ aos vértices de V'' , dizer que um grafo é bipartido quando é possível atribuir sinais $\pm$ aos vértices de $\mathcal{G}$ de modo que toda aresta ligue um vértice positivo a um vértice negativo. O teorema a seguir caracteriza os grafos bipartidos.

Teorema 2.18. ((8), p.18) *Um grafo é bipartido se, e somente se, todos os seus ciclos têm comprimento par.*

Demonstração. Seja $\mathcal{G}$ um grafo bipartido. Então seus vértices têm sinais $\pm$ e todas as arestas ligam um vértice positivo a um vértice negativo. Suponha que algum ciclo $v_1e_1 \cdots v_ke_kv_1$ de $\mathcal{G}$ tem comprimento ímpar, isto é, $k = 2m + 1$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Suponha que v_1 é positivo, então, por $\mathcal{G}$ ser bipartido, v_{2n} é negativo e v_{2n+1} é positivo para todo $n \in \{1, \dots, m\}$. Desta forma, a aresta e_k liga o vértice $v_k = v_{2m+1}$, que é positivo, ao vértice v_1 , que também é positivo, logo, $\mathcal{G}$ não é bipartido, o que é uma contradição; atribuindo sinal negativo a v_1 obtemos a mesma contradição. Logo, todos os ciclos de $\mathcal{G}$ têm comprimento par.

Em contrapartida, sejam $\mathcal{G}$ um grafo tal que todos os seus ciclos têm comprimento par e $\mathcal{T}$ uma árvore geradora de $\mathcal{G}$. Escolha uma raiz $r \in \mathcal{T}$ e considere a ordem-árvore associada. Para cada $v \in \mathcal{G}$, o único caminho $r\mathcal{T}v$ tem comprimento par ou ímpar. Denotemos por $\ell_r(v)$ este comprimento.

Seja $e = xy \in \mathcal{G}$. Por hipótese, $x \neq y$, pois e seria um ciclo de comprimento ímpar caso contrário. Se $e \in \mathcal{T}$ e $x <_r y$, então $r\mathcal{T}y = r\mathcal{T}xy$ de modo que $\ell_r(y) = \ell_r(x) + 1$, ou seja, se o comprimento de $r\mathcal{T}x$ é par, então o comprimento de $r\mathcal{T}y$ é ímpar e vice-versa. Se $e \notin \mathcal{T}$, então, por hipótese, $C_e := y\mathcal{T}xy$ é um ciclo de comprimento par, de onde $y\mathcal{T}x$ tem comprimento ímpar e um número par de vértices. Assim, temos duas possibilidades: $r \in C_e$ e $r \notin C_e$.

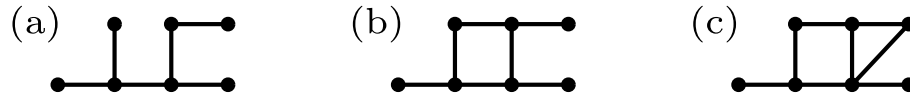
- Se $r \in C_e$, temos que $y\mathcal{T}x = y\mathcal{T}r\mathcal{T}x$, como $y\mathcal{T}x$ tem comprimento ímpar, ou $y\mathcal{T}r$ tem comprimento par e $r\mathcal{T}y$ tem comprimento ímpar, ou $y\mathcal{T}r$ tem comprimento ímpar e $r\mathcal{T}y$ tem comprimento par, de onde e une vértices de classes distintas.
- Se $r \notin C_e$, existe um único vértice $r' \in C_e$ tal que $r\mathcal{T}x = r\mathcal{T}r'\mathcal{T}x$ e $r\mathcal{T}y = r\mathcal{T}r'\mathcal{T}y$; isto posto, a mesma análise do caso anterior vale para r' , de onde e une vértices de classes distintas.

Portanto, $\mathcal{G}$ é bipartido. ■

A classe dos grafos bipartidos tem um papel significativo neste trabalho. Como árvores são grafos sem ciclos, temos que o comprimento dos ciclos das árvores é 0, logo, par. Segue da caracterização feita no Teorema 2.19 que toda árvore é um grafo bipartido.

Exemplo 2.19. A Figura 5 ilustra três grafos conexos de tipos $\mathcal{G}(7, E)$, com $E \in \{6, 7, 8\}$:

Figura 5 – Exemplos de grafos com 7 vértices.



Fonte: Adaptado de (9).

- (a) o grafo é de tipo $\mathcal{G}(7, 6)$, isto é, é uma árvore e possui quatro vértices de grau 1, um vértice de grau 2 e dois vértices de grau 3;
- (b) o grafo é de tipo $\mathcal{G}(7, 7)$ e é bipartido, contendo um ciclo de comprimento 4. Possui três vértices de grau 1, um vértice de grau 2 e três vértices de grau 3;
- (c) o grafo é de tipo $\mathcal{G}(7, 8)$ e não é bipartido, contendo um ciclo de comprimento 3 e um ciclo de comprimento 4. Possui dois vértices de grau 1, dois vértices de grau 2, dois vértices de grau 3 e um vértice de grau 4.

2.3 CURVAS E SUPERFÍCIES

Nesta seção, veremos os conceitos básicos de curvas e superfícies e alguns resultados úteis; aqui, assumimos que os conceitos básicos de Topologia são conhecidos, por exemplo, conjuntos abertos, fechados, compactos, conexos, bordo, espaços de Hausdorff etc.

Definição 2.20. Um espaço topológico X é dito um **espaço localmente euclidiano** em x , quando existe uma vizinhança U de x homeomorfa a $\mathbb{R}^n$, para algum $n \geq 1$.

Em geral, duas vizinhanças disjuntas podem ser homeomorfas a espaços euclidianos diferentes, o que torna o estudo de espaços localmente euclidianos mais complicado. A definição abaixo adiciona uma condição de “regularidade”, que duas vizinhanças disjuntas devem sempre ser homeomorfas ao mesmo espaço euclidiano.

Definição 2.21. Um conjunto X é dito uma **variedade topológica de dimensão n** ou uma **n -variedade topológica** quando é localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ em todo ponto $x \in X$.

Definição 2.22. Uma **n -variedade com bordo** é um espaço topológico tal que todo ponto ou possui uma vizinhança homeomorfa ao disco n -dimensional, ou possui uma vizinhança homeomorfa ao meio disco

$$D_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r \text{ e } x_n \geq 0\}.$$

Pontos com vizinhança homeomorfa ao meio disco são ditos **pontos de bordo**.

Definição 2.23. Uma **curva** é uma 1-variedade topológica e uma **superfície** 2-variedade topológica. Uma superfície M será dita **fechada** quando é compacta e não tem bordo.

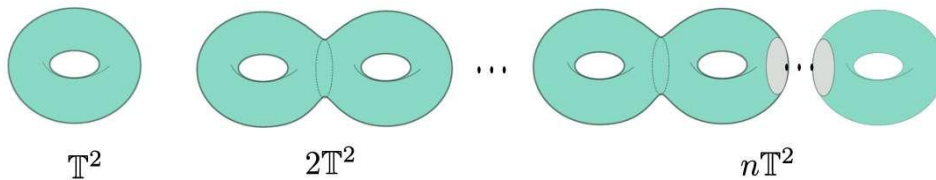
Em outras palavras, uma superfície M sem bordo é um espaço topológico de Hausdorff no qual cada ponto $p \in M$ tem uma vizinhança homeomorfa ao disco aberto. Alguns exemplos de superfícies topológicas são:

- a **2-esfera** $\mathbb{S}^2$, definida por $\mathbb{S}^2 = \partial D^3$, isto é, é o bordo de um disco tridimensional. Em geral, a n -esfera é definida por $\mathbb{S}^n = \partial D^{n+1}$;
- o **Toro** $\mathbb{T}$, definido por $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$;
- o **Plano Projetivo** $\mathbb{P}$, definido ao identificar pontos antipodais de $\mathbb{S}^2$.

Definição 2.24. Uma superfície é dita **suave** quando cada ponto possui uma vizinhança difeomorfa a $\mathbb{R}^n$, com este difeomorfismo sendo infinitamente continuamente diferenciável. Uma superfície suave M é **orientável** quando o determinante do Jacobiano das funções de transição é positivo. Caso contrário, M é **não-orientável**.

Definição 2.25. Sejam M_1 e M_2 superfícies. A **soma conexa** de M_1 e M_2 , denotada por $M_1 \# M_2$, é a superfície resultante da remoção de um disco mergulhado em M_1 e em M_2 e da identificação dos bordos gerados por esta remoção (veja a Figura 6).

Figura 6 – Soma conexa de n Toros.



Fonte: Retirado de (9).

Definição 2.26. Duas superfícies M e N são **topologicamente equivalente** quando existe um homeomorfismo entre elas.

Dada uma superfície topológica M , dizemos que M é **triangulável** quando existe um 2-complexo K tal que $M = |K| = \{x : x \in \sigma \in K, \sigma \text{ é célula de } K\}$ com as condições adicionais de que toda célula de K é triangular e duas 2-células se intersectam ou em uma única aresta, ou em um único vértice, ou são disjuntas. Dizemos, também, que um 2-complexo triangulado é um **2-complexo simplicial** e cada célula é dita um **simplex**.

Esta ferramenta é útil para estudar propriedades das superfícies, por exemplo:

- Uma superfície é compacta se, e somente se, toda triangulação é finita (veja (7), Teorema 4.12, página 77).

- Uma superfície é conexa se, e somente se, uma triangulação pode ser organizada em ordem $T_1, \dots, T_n$ com cada triângulo tendo pelo menos uma aresta identificada com uma aresta de um triângulo anterior (veja (7), Teorema 4.13, página 78).

Triangulações também servem para classificar superfícies fechadas, como enunciado abaixo.

Teorema 2.27. (Teorema da Classificação das Superfícies). ((7), p.79) *Toda superfície fechada M é homeomorfa a esfera, a soma conexa de n -toros ou a soma conexa de m planos projetivos, isto é:*

$$M \simeq \mathbb{S}^2 \# n\mathbb{T} \# m\mathbb{P},$$

para algum $n \geq 0$ e $m \geq 0$. Toda superfície compacta e conexa com bordo é classificada da mesma forma, porém, com um número finito de discos removidos.

Demonstração. Veja (7), Teoremas 4.14 e 4.17, páginas 79 e 87. ■

Dada uma superfície compacta e conexa M e uma triangulação K , a **característica de Euler** de M é dada por

$$\chi(M) = V - E + F,$$

sendo V , E e F o número de vértices, arestas e faces de K , respectivamente, e independe da triangulação K .

Teorema 2.28. ((7), p.105) *A característica de Euler é um invariante topológico para superfícies compactas e conexas.*

Demonstração. Veja (7), Teorema 5.13, página 105. ■

Definição 2.29. Dada uma superfície compacta conexa M com k componentes de bordo, podemos definir o **gênero** de M por

$$g(M) = \frac{2 - \chi(M) - k}{2},$$

quando M é orientável, e por $g(M) = 2 - \chi(M) - k$, quando M é não-orientável.

Teorema 2.30. *Dadas duas superfícies M_1 e M_2 compactas e conexas, então*

$$\chi(M_1 \cup M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - \chi(M_1 \cap M_2),$$

quando a união está bem definida. Se M_1 e M_2 são duas superfícies compactas, então $\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2$.

Demonstração. Suponhamos que a união de M_1 e M_2 , compactas e conexas, está bem definida, isto é, a interseção ou é uma superfície compacta e conexa, ou um conjunto finito de curvas fechadas ou um conjunto finito de pontos. Assim, podemos triangular

M_1 , M_2 , $M_1 \cap M_2$ e $M_1 \cup M_2$ de modo que as triangulações de M_1 e M_2 concordem na interseção e a triangulação de $M_1 \cup M_2$ seja resultado destas triangulações. Denotemos estas triangulações por K_1 , K_2 , $K_\cap$ e $K_\cup$, respectivamente. Por M_1 e M_2 serem compactas, todas essas triangulações são finitas, de onde podemos contar seus vértices, arestas e faces.

Ao contar o número de vértices, arestas e faces em K_1 e K_2 , estamos contando duas vezes o número de vértices em $K_\cap$, de onde

$$\begin{aligned} V_\cup &= V_1 + V_2 - V_\cap, \\ E_\cup &= E_1 + E_2 - E_\cap, \\ F_\cup &= F_1 + F_2 - F_\cap. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \chi(M_1 \cup M_2) &= \chi(K_\cup) \\ &= V_\cup - E_\cup + F_\cup \\ &= (V_1 + V_2 - V_\cap) - (E_1 + E_2 - E_\cap) + (F_1 + F_2 - F_\cap) \\ &= (V_1 - E_1 + F_1) + (V_2 - E_2 + F_2) - (V_\cap - E_\cap + F_\cap) \\ &= \chi(K_1) + \chi(K_2) - \chi(K_\cap) \\ &= \chi(M_1) + \chi(M_2) - \chi(M_1 \cap M_2), \end{aligned}$$

como queríamos.

Para a soma conexa, considere K_1 e K_2 a triangulação de M_1 e M_2 , respectivamente, e denotemos por V_j , E_j e F_j o número de vértices arestas e faces de K_j e por V , E e F o número de vértices arestas e faces de $K_1 \# K_2$.

Como o interior de um triângulo é homeomorfo a um disco aberto, basta escolher um triângulo de cada triangulação, removê-los e identificar os vértices e arestas. Neste processo, obtemos $V = V_1 + V_2 - 3$, $E = E_1 + E_2 - 3$ e $F = F_1 + F_2 - 2$, de onde

$$\begin{aligned} \chi(M_1 \# M_2) &= \chi(K_1 \# K_2) = V - E + F \\ &= (V_1 + V_2 - 3) - (E_1 + E_2 - 3) + (F_1 + F_2 - 2) \\ &= (V_1 - E_1 + F_1) + (V_2 - E_2 + F_2) - 2 \\ &= \chi(K_1) + \chi(K_2) - 2 = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2, \end{aligned}$$

concluindo a demonstração. ■

2.4 GRAFOS E SUPERFÍCIES FECHADAS COM CURVAS

Sejam M uma superfície fechada e

$$\mathcal{C} = \bigcup_{k=1}^E \alpha_k$$

um conjunto de curvas fechadas, simples e disjuntas mergulhadas em M , com E número natural. O conjunto $\mathcal{C}$ separa M em um conjunto de V regiões conexas, isto é, $M \setminus \mathcal{C}$ é a união disjunta de regiões conexas de M .

Definição 2.31. Dois pares $(M, \mathcal{C})$ e $(M', \mathcal{C}')$ são ditos equivalentes quando existe um difeomorfismo de M em M' que leva $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}'$.

Dado um grafo, podemos associar a cada vértice v_j um número inteiro $w_j \geq 0$, que é chamado de **peso**. Denotamos por $\mathcal{G}_W(V, E)$ o conjunto de grafos com peso total

$$W = \sum_{j=1}^V w_j.$$

Também podemos associar a cada vértice v_j um par (t_j, p_j) , com $t_j, p_j \geq 0$ inteiros, $p_j = 0$ quando $t_j > 0$ e vice-versa. Denotamos por $\mathcal{G}_{(T,P)}(V, E)$ o conjunto de grafos com pares de pesos total

$$(T, P) = \left(\sum_{j=1}^V t_j, \sum_{j=1}^V p_j \right).$$

Dado um par $(M, \mathcal{C})$, com M orientável, é possível associá-lo a um grafo $\mathcal{G}$ com pesos nos vértices seguindo as seguintes regras de associação:

- associamos um vértice v_j em $\mathcal{G}$ a cada região conexa U_j de $M \setminus \mathcal{C}$, $j \in \{1, \dots, V\}$, e associamos uma aresta e_k em $\mathcal{G}$ a uma curva α_k de $\mathcal{C}$, $k \in \{1, \dots, E\}$;
- uma aresta e_k é incidente ao vértice v_j quando a curva α_k de $\mathcal{C}$ associada a e_k está no bordo da região U_j de $M \setminus \mathcal{C}$ associada a v_j ;
- quando uma curva é bordo de uma única região duas vezes, sua aresta associada é um laço;
- associamos um peso w_j a um vértice v_j quando a região regular correspondente a v_j tem gênero w_j .

Dados dois pares $(M, \mathcal{C})$ e $(M', \mathcal{C}')$ equivalentes, isto é, quando existe um homeomorfismo que leva M em M' e $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}'$, então existe um isomorfismo entre os seus respectivos grafos associados, com a propriedade adicional de levar um vértice de peso w_j em um vértice de peso w_j .

Proposição 2.32. *Todo grafo $\mathcal{G} \in \mathcal{G}_W(V, E)$ está associado a um par $(M, \mathcal{C})$, onde $\mathcal{C}$ é um conjunto de curvas fechadas, com E componentes, mergulhadas e disjuntas sobre a superfície fechada M .*

Demonstração. ((9), p.12) Dado um grafo $\mathcal{G} \in \mathcal{G}_W(V, E)$, podemos obter o par $(M, \mathcal{C})$ associado a $\mathcal{G}$ da seguinte forma:

1. Mergulhe o grafo $\mathcal{G}$ em $\mathbb{R}^3$ e tome uma vizinhança de $\mathcal{G}$ conveniente em $\mathbb{R}^3$, que denotaremos por R .

2. Denote por Z o bordo de R que é a superfície fechada conhecida como vizinhança tubular de $\mathcal{G}$. Observe que o gênero de Z é igual a $\beta_1(\mathcal{G}) = 1 - V + E$
3. A cada aresta e_j de $\mathcal{G}$ associe uma curva fechada α_j em Z transversal à aresta e_j . Denote por $\mathcal{C}$ o conjunto destas curvas. O par $(Z, \mathcal{C})$ corresponde ao grafo $\mathcal{G}$ com peso zero.
4. Por fim, a cada vértice v_k do grafo $\mathcal{G}$ com o peso $t_k > 0$, faça uma soma conexa de uma superfície fechada W_k de gênero t_k com Z em cada uma das regiões Z_k associadas a v_k .

As somas conexas feitas no último passo resultam no par $(M, \mathcal{C})$ que realiza o grafo $\mathcal{G}$, sendo M uma superfície fechada e orientável com $\mathcal{C}$ o conjunto de curvas mergulhadas em M . ■

Proposição 2.33. ((9), p.14) *Se $\mathcal{G} \in \mathcal{G}_W(V, E)$ é um grafo associado ao par $(M, \mathcal{C})$, onde M é uma superfície orientável, então a característica de Euler de M é dada por $\chi(M) = 2(V - E - W)$ e o gênero de M é dado por $g(M) = \beta_1(\mathcal{G}) + W$.*

Demonstração. Pela definição de gênero, a característica de Euler de cada componente conexa U_j de $M \setminus \mathcal{C}$ é dada por

$$\chi(U_j) = 2 - 2w_j - E_j$$

onde w_j e E_j correspondem, respectivamente, ao gênero de U_j e ao número de componentes de bordo de U_j . Como cada curva de $\mathcal{C}$ é bordo de duas componentes conexas de $M \setminus \mathcal{C}$, o número total de componentes de bordo da união das componentes U_j é $2E$. A interseção entre duas componentes conexas é uma curva fechada ou conjunto vazio, ou seja, a característica de Euler da interseção de duas componentes conexas é igual a zero. Logo,

$$\chi(M) = \chi\left(\bigcup_{j=1}^V U_j\right) = \sum_{j=1}^V \chi(U_j) = \sum_{j=1}^V (2 - 2w_j - E_j) = 2(V - E - W)$$

O gênero de uma superfície orientável M é dado por

$$g(M) = 1 - \frac{\chi(M)}{2} = 1 - V + E + W, \quad (2.1)$$

mas $\beta_1(\mathcal{G}) = 1 - V + E$, temos $g(M) = \beta_1(\mathcal{G}) + W$ ■

Analisando uma curva fechada e simples sobre uma superfície não-orientável, percebemos as seguintes possibilidades:

Figura 7 – Tipos de vizinhanças de uma curva fechada.



Fonte: Retirado de (9).

- ou a vizinhança da curva é do tipo cilindro (item (a) da Figura 7);
- ou a vizinhança da curva é do tipo faixa de Möbius (item (b) da Figura 7).

Em geral, dado $(M, \mathcal{C})$, podemos associar um grafo $\mathcal{G}$ com pares de pesos nos vértices como feito anteriormente, porém, com passos adicionais.

- um vértice v recebe peso $(t, 0)$ quando a região conexa correspondente a v é orientável e tem gênero t ;
- um vértice v recebe peso $(0, p)$ quando a região conexa correspondente a v é não-orientável e tem gênero p ;
- uma aresta e será dita um **★-laço** quando a vizinhança da curva correspondente a e for do tipo faixa de Möbius. Denotaremos por S o número total de ★-laços.

Denotaremos por $\mathcal{G}_{(T,P)}^S(V, E)$ o conjunto de grafos com S ★-laços. Além disso, podemos comparar W com (T, P) por $W = 2T + P$.

Teorema 2.34. ((9), p.15) *Todo grafo $\mathcal{G} \in \mathcal{G}_{(T,P)}^S(V, E)$ pode ser associado a um par $(M, \mathcal{C})$, onde $\mathcal{C}$ é um conjunto com E componentes de curvas fechadas simples e mergulhadas sobre a superfície fechada M com gênero dado por*

$$g(M) = \begin{cases} 1 - V + E + T, & \text{se } M \text{ é orientável,} \\ 2(1 - V + E + T) + P - S, & \text{se } M \text{ é não-orientável.} \end{cases}$$

Demonstração. Se $P = S = 0$, temos que $\mathcal{G}_{(T,0)}^0(V, E) = \mathcal{G}_T(V, E)$ e, pela Proposição 2.32, $\mathcal{G} \in \mathcal{G}_T(V, E)$ pode ser realizado por um par $(M, \mathcal{C})$ com $g(M) = 1 - V + E + T$, pela Equação (2.1).

Para $P > 0$ ou $S > 0$, o grafo $\mathcal{G} \in \mathcal{G}_{(T,P)}^S(V, E)$ pode ser realizado da seguinte forma:

1. Primeiro, retire os S ★-laços e todos pesos $(0, p_j)$ do grafo $\mathcal{G}$, obtendo um novo grafo $\mathcal{G}' \in \mathcal{G}_{(T,0)}^0(V, E - S)$ que, pela Proposição 2.32, pode ser associado a um par $(Y, \mathcal{C}')$, onde Y é uma superfície fechada e orientável com gênero

$$g(Y) = 1 - V + (E - S) + T,$$

e $\mathcal{C}'$ é um conjunto com $E - S$ curvas simples fechadas e mergulhadas em Y .

2. Agora vamos realizar o grafo $\mathcal{G}_{(T,P)}^0(V, E - S)$ com os pesos p_j nos vértices. Suponha que existem V_p vértices com pesos $p_j > 0$ em $\mathcal{G}$. Para cada uma das regiões U_j de Y , correspondente ao vértice $v_j \in \mathcal{G}$ com peso $(0, p_j)$, faça uma soma conexa de Y com superfícies fechadas e não-orientáveis Z_j de gênero p_j . Assim obtemos um par $(Z, \mathcal{C}'')$ associado ao grafo $\mathcal{G}'' \in \mathcal{G}_{(T,P)}^0(V, E - S)$, onde Z é uma superfície fechada não-orientável com gênero

$$g(Z) = 2g(Z) + \sum_{j=1}^{V_p} p_j = 2[1 - V + (E - S) + T] + P.$$

3. Finalmente, podemos realizar o grafo $\mathcal{G} \in \mathcal{G}_{(T,P)}^S(V, E)$ com os S $\star$ -laços. Suponha que existem V_s vértices com $\star$ -laços no grafo $\mathcal{G}$. Para cada um dos s_j $\star$ -laços retirados do vértice v_j e faça uma soma conexa de $\mathbb{P}$ com Z na região U_j associada a v_j , obtendo a superfície fechada M com gênero

$$g(M) = g(Y) + \sum_{j=1}^{V_s} s_j = 2[1 - V + (E - S) + T] + P + S = 2(1 - V + E + T) + P - S.$$

Assim, obtemos o par $(M, \mathcal{C})$ associado a $\mathcal{G} \in \mathcal{G}_{(T,P)}^S(V, E)$, onde o gênero da superfície não-orientável M é dado por

$$g(M) = 2[1 - V + E + T] + P - S$$

como desejado. ■

Corolário 2.34.1. ((9), p.16) *Seja $\mathcal{G} \in \mathcal{G}_{(T,P)}^S(V, E)$ o grafo associado ao par $(M, \mathcal{C})$, onde M é uma superfície fechada e $\mathcal{C}$ um conjunto de curvas fechadas simples e disjuntas sobre M . Então, a característica de Euler de M é dada por*

- $\chi(M) = 2(V - E - T)$ quando M é orientável.
- $\chi(M) = 2(V - E - T) - P + S$, quando M é não-orientável.

Demonstração. Seja M orientável, então $P = S = 0$. Pela definição de gênero, temos que $\chi(M) = 2 - 2g(M)$, pelo Teorema 2.32 temos que $g(M) = 1 - V + E + T = 1 - (V - E - T)$, de onde

$$\chi(M) = 2 - 2 + 2(V - E - T) = 2(V - E - T).$$

Agora, seja M não-orientável. Pela definição de gênero, temos que $\chi(M) = 2 - g(M)$, pelo Teorema 2.32 temos que $g(M) = 2 - 2(V - E - T) + P - S$, de onde

$$\chi(M) = 2 - 2 + 2(V - E - T) - P + S = 2(V - E - T) - P + S,$$

concluindo a demonstração. ■

3 SINGULARIDADES

Neste capítulo estudaremos a teoria básica das singularidades, teoria que serve como base para o resto do trabalho. Aqui dissecamos um pouco sobre os k -jatos, a Topologia de Whitney, definimos aplicações estáveis e classificamos suas singularidades, baseado em (10), (11) e (12).

3.1 k -JATOS

Dadas duas variedades suaves M e N e duas aplicações $f, h : M \rightarrow N$ que coincidem em um ponto p , é útil pensar no que acontece com as derivadas de f e h neste ponto.

Definição 3.1. Sejam M e N variedades suaves e $p \in M$. Suponha que $f, h : M \rightarrow N$ são aplicações suaves com $f(p) = h(p) = q$.

- (1) f faz **contato de primeira ordem com** h em p se $(df)_p = (dh)_p$ como aplicação de $T_p M \rightarrow T_q N$
- (2) f faz **contato de k -ésima ordem com** h em p se $(df) : TM \rightarrow TN$ faz contato de $(k-1)$ -ésima ordem com (dh) em todo ponto de $T_p M$. Denotamos isto por $f \stackrel{k}{\sim} g$ em p (k é um inteiro positivo).

Com esta definição, temos que $f \stackrel{k}{\sim} f$; se $f \stackrel{k}{\sim} h$, então $h \stackrel{k}{\sim} f$; por fim, se $f \stackrel{k}{\sim} h$ e $h \stackrel{k}{\sim} \varphi$, então $f \stackrel{k}{\sim} \varphi$. Com isto, temos que $\stackrel{k}{\sim}$ é uma relação de equivalência.

Definição 3.2. Sobre a relação de equivalência $\stackrel{k}{\sim}$, definimos o seguinte:

- (1) Seja $J^k(M, N)_{p,q}$ o conjunto das classes de equivalência sobre $\stackrel{k}{\sim}$ em p de aplicações $f : M \rightarrow N$ com $f(p) = q$.
- (2) Seja $J^k(M, N) = \bigcup_{(p,q) \in M \times N} J^k(M, N)_{p,q}$ (união disjunta). Um elemento $\sigma \in J^k(M, N)$ é dito um **k -jato de aplicações** (ou simplesmente um **k -jato**) de M em N .
- (3) Seja σ um k -jato, então existe p em M e q em N para os quais σ está em $J^k(M, N)_{p,q}$. p é dito a **fonte** de σ e q é dito o **alvo** de σ . A aplicação $\alpha : J^k(M, N) \rightarrow M$ dada por $\sigma \mapsto (\text{fonte de } \sigma)$ é a **aplicação fonte** e a aplicação $\beta : J^k(M, N) \rightarrow N$ dada por $\sigma \mapsto (\text{alvo de } \sigma)$ é a **aplicação alvo**.

Note que dada uma aplicação suave $f : M \rightarrow N$, existe uma aplicação canonicamente definida $j^k f : M \rightarrow J^k(M, N)$ chamada de **k -jato de f** definida por $j^k f(p) = [f]_k$, sendo $[f]_k$ a classe de equivalência de f em $J^k(M, N)_{p,f(p)}$. Mostraremos que $j^k f(p)$ é uma forma invariante de descrever a expansão de Taylor de f em p até ordem k tal que $j^k f(p)$ é uma aplicação suave.

Note que $J^0(M, N) = M \times N$, então f faz $\overset{0}{\sim}$ contato com h em p se $f(p) = h(p)$, e $j^0 f(p) = (p, f(p))$ é simplesmente o gráfico de f .

Lema 3.3. ((10), p.37) *Seja U um aberto de $\mathbb{R}^n$ e p um ponto em U . Sejam $f, h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ aplicações suaves. Então $f \overset{k}{\sim} h$ em p se, e somente se,*

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f_j}{\partial x^\alpha}(p) = \frac{\partial^{|\alpha|} h_j}{\partial x^\alpha}(p)$$

para todo multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ com $|\alpha| \leq k$ e $1 \leq j \leq m$ onde f_j e h_j são as funções coordenadas de f e h , respectivamente, e $x_1, \dots, x_n$ são coordenadas em U .

Demonstração. Veja o Lema A.1. ■

Corolário 3.3.1. ((10), p.38) *f e $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ tem contato de k -ésima ordem em p se, e somente se, as expansões de Taylor de f e h até (e incluindo) ordem k são idênticas em p .*

Seja $\mathbb{A}_n^k$ o espaço vetorial de polinômios em n variáveis com grau $\leq k$ que têm seu termo constante nulo. Escolha as coordenadas para $\mathbb{A}_n^k$ os coeficientes dos polinômios. Então $\mathbb{A}_n^k$ é isomorfo a algum espaço Euclidiano e é, desta forma, uma variedade suave. Seja

$$\mathbb{B}_{n,m}^k = \bigoplus_{j=1}^m \mathbb{A}_n^k.$$

$\mathbb{B}_{n,m}^k$ também é uma variedade suave.

Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Defina $T_k f : U \rightarrow \mathbb{A}_n^k$ por $T_k(f)(x_0)$ sendo o polinômio de grau k dado pelos primeiros k termos da série de Taylor de f em x_0 após o termo constante.

Seja V um aberto de $\mathbb{R}^m$. Então existe uma bijeção canônica

$$T_{U,V} : J^k(U, V) \rightarrow U \times V \times \mathbb{B}_{n,m}^k$$

dada por

$$T_{U,V}(\sigma) = (x_0, y_0, T_k(f_1)(x_0), \dots, T_k(f_m)(x_0))$$

onde $x_0 = \alpha(\sigma)$ (fonte de σ), $y_0 = \beta(\sigma)$ (alvo de σ), $f : U \rightarrow V$ é suave e $\sigma = [f]_k$ (f é representante de σ) e $f_j : U \rightarrow \mathbb{R}$ ($1 \leq j \leq m$) são as funções coordenada associadas a f . Pelo Corolário 3.3.1, $T_{U,V}$ está bem-definida; *id est*, independe da escolha do representante de classe f , e é injetiva.

Dados $z_0 \in U$, $w_0 \in V$ e $(q_1(z_0), \dots, q_m(z_0)) \in \mathbb{B}_{n,m}^k$, é possível construir uma $h \in C^\infty(U, V)$ tal que $h(z_0) = w_0$ e $T_k(h_1)(z_0) = q_1(z_0), \dots, T_k(h_m)(z_0) = q_m(z_0)$. Logo, existe $\tau \in J^k(U, V)$ tal que h representa τ e $T_{U,V}(\tau) = (z_0, w_0, T_k(h_1)(z_0), \dots, T_k(h_m)(z_0))$. Isto posto, $T_{U,V}$ é sobrejetiva e, portanto, uma bijeção.

Lema 3.4. ((10), p.39) *Sejam U e U' abertos de $\mathbb{R}^n$ e sejam V e V' abertos de $\mathbb{R}^m$. Suponha que $\varphi : V \rightarrow V'$ e $\phi : U \rightarrow U'$ são aplicações suaves com ϕ um difeomorfismo. Então,*

$$T_{U',V'}(\phi^{-1})^* \varphi_* T_{U,V}^{-1} : U \times V \times \mathbb{B}_{n,m}^k \rightarrow U' \times V' \times \mathbb{B}_{n,m}^k$$

é uma aplicação suave.

Demonstração. Veja o Lema A.4. ■

O Lema 3.4 nos diz que as mudanças de coordenadas são suaves, o que prepara para provar que o espaço dos k -jatos é uma variedade suave.

Teorema 3.5. ((10), p.40) *Sejam M e N variedades suaves. Então, $J^k(M, N)$ é uma variedade suave com*

$$\dim J^k(M, N) = \dim M + \dim N + \dim \mathbb{B}_{n,m}^k.$$

Demonstração. Veja o Teorema A.5. ■

3.2 TOPOLOGIAS DE WHITNEY

Sejam M e N variedades suaves e $C^\infty(M, N)$ o conjunto de aplicações suaves de M em N . Fixe um inteiro não negativo k . Seja U um subconjunto de $J^k(M, N)$. Então, seja $K(U)$ o conjunto

$$K(U) := \{f \in C^\infty(M, N) : j^k f(M) \subset U\}.$$

Lema 3.6. $K(U) \cap K(V) = K(U \cap V)$.

Demonstração. Se $f \in K(U \cap V)$, então $j^k f(M) \subset U \cap V$, de onde $j^k f(M) \subset U$ e $j^k f(M) \subset V$, isto é, $f \in K(U)$ e $f \in K(V)$, de onde $f \in K(U) \cap K(V)$. Por outro lado, Se $f \in K(U) \cap K(V)$, segue que $f \in K(U)$ e $f \in K(V)$, de onde $j^k f(M) \subset U$ e $j^k f(M) \subset V$, isto é, $j^k f(M) \subset U \cap V$, logo, $f \in K(U \cap V)$. ■

Isto posto, podemos definir a topologia a seguir.

Proposição 3.7. *A família de conjuntos $\{K(U)\}$ onde U é aberto $J^k(M, N)$ forma uma base para uma topologia em $C^\infty(M, N)$. Chamamos esta topologia de **topologia C^k de Whitney**.*

Demonstração. Seja $f \in C^\infty(M, N)$, temos que $J^k(M, N)$ é aberto de $J^k(M, N)$ e $j^k f(M) \subset J^k(M, N)$, então $f \in K(J^k(M, N))$. Logo, para cada $f \in C^\infty(M, N)$ existe aberto U de $J^k(M, N)$ tal que $f \in K(U)$.

Além disso, dados $U, V \subset J^k(M, N)$ abertos tais que $f \in K(U) \cap K(V)$, temos do Lema 3.6 que $K(U) \cap K(V) = K(U \cap V)$, então existe um aberto $\mathcal{W} \subseteq U \cap V$ tal que $f \in K(\mathcal{W})$. Portanto, $\{K(U)\}$ com $U \subset J^k(M, N)$ aberto é base para uma topologia de $C^\infty(M, N)$. ■

Seja $\pi_k^\ell : J^\ell(M, N) \rightarrow J^k(M, N)$ a aplicação canônica que leva um ℓ -jato $\sigma \in J^\ell(M, N)$, representado por f , na classe de equivalência de f em $J^k(M, N)$, isto é,

$$\pi_k^\ell([f]_\ell) = [f]_k.$$

Lema 3.8. $K(U) = K((\pi_k^\ell)^{-1}(U))$.

Demonstração. Se $f \in K(U)$, então $j^k f(M) \subset U$, de onde $\pi_k^\ell(j^\ell f)(M) \subset U$, assim $j^\ell f(M) \subset (\pi_k^\ell)^{-1}(U)$, isto é, $f \in K((\pi_k^\ell)^{-1}(U))$. Por outro lado, Se $f \in K((\pi_k^\ell)^{-1}(U))$, segue que $j^\ell f(M) \subset (\pi_k^\ell)^{-1}(U)$, de onde $j^k f(M) = \pi_k^\ell(j^\ell f)(M) \subset U$, isto é, $f \in K(U)$. ■

Pelo Lema 3.8, $K(U) = K((\pi_k^\ell)^{-1}(U))$ para todo aberto U em $J^k(M, N)$, ou seja, denotando por $\mathcal{W}_k$ o conjunto de abertos de $C^\infty(M, N)$ na topologia C^k de Whitney, temos que $\mathcal{W}_k \subset \mathcal{W}_\ell$ sempre que $k \leq \ell$.

Proposição 3.9. A topologia C^∞ de Whitney em $C^\infty(M, N)$ é a topologia cuja base é

$$\mathcal{W} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{W}_k.$$

Esta base está bem definida uma vez que $\mathcal{W}_k \subset \mathcal{W}_\ell$ sempre que $k \leq \ell$.

A demonstração da Proposição 3.9 é inteiramente análoga à demonstração da Proposição 3.7. Para o resto do corpo do texto, muniremos $C^\infty(M, N)$ da topologia C^∞ de Whitney.

3.3 APLICAÇÕES ESTÁVEIS

Nesta subseção definiremos a equivalência topológica entre duas aplicações suaves entre variedades, singularidades de aplicações e classificaremos os tipos de singularidades para 2-variedades.

Definição 3.10. Sejam $f, h \in C^\infty(M, N)$. Dizemos que f e h são **topologicamente equivalentes** (ou **$\mathcal{A}$ -equivalentes**) quando existem difeomorfismos ℓ e k tais que $h \circ \ell = k \circ f$.

Proposição 3.11. A $\mathcal{A}$ -equivalência é uma relação de equivalência.

Demonstração. De fato,

1. as identidades id_M e id_N são difeomorfismos. Logo, f é topologicamente equivalente a f , uma vez que $f \circ \text{id}_M = \text{id}_N \circ f$.
2. Se f é topologicamente equivalente a h , então existem difeomorfismos ℓ e k tais que $g \circ \ell = k \circ f$. Mas como ℓ e k são difeomorfismos, ℓ^{-1} e k^{-1} são difeomorfismos tais que $f \circ \ell^{-1} = k^{-1} \circ g$, de onde h é topologicamente equivalente a f .
3. Se f é topologicamente equivalente a h e h é topologicamente equivalente a h , então existem difeomorfismos ℓ, k, p e q tais que $g \circ \ell = k \circ f$ e $h \circ p = q \circ g$. Mas como ℓ é difeomorfismo, podemos escrever $g = k \circ f \circ \ell^{-1}$. Substituindo na segunda igualdade, obtemos $h \circ p = q \circ (k \circ f \circ \ell^{-1})$, de onde $h \circ (p \circ \ell) = (q \circ k) \circ f$. Como a composição de difeomorfismos é um difeomorfismo, então f é topologicamente equivalente a h . ■

Definição 3.12. Seja $f \in C^\infty(M, N)$. Dizemos que f é uma **aplicação estável** quando existe um aberto $U \subset C^\infty(M, N)$ contendo f tal que f é topologicamente equivalente a h , para toda aplicação $h \in U$.

Desta forma, a $\mathcal{A}$ -equivalência separa o conjunto $C^\infty(M, N)$ em dois conjuntos que são de interesse para o estudo das invariantes de aplicações entre variedades.

Definição 3.13. Denotamos por $\mathcal{E}(M, N)$ o **conjunto das aplicações estáveis** e por $\Gamma(M, N)$ o **conjunto discriminante**. O conjunto discriminante é definido por $\Gamma(M, N) = C^\infty(M, N) \setminus \mathcal{E}(M, N)$.

Definição 3.14. Seja X um espaço topológico. Então

- (1) Um subconjunto Y de X é dito **residual** quando é a interseção enumerável de subconjuntos abertos e densos de X . Dizemos que $Z = X \setminus Y$ é um conjunto **magro**.
- (2) X é dito um **espaço de Baire** quando todo conjunto residual é denso.

Proposição 3.15. ((10), p.44) *Sejam M e N variedades suaves. Então, $C^\infty(M, N)$ munido da topologia C^∞ Whitney é um espaço de Baire.*

Demonstração. Veja a Proposição A.7. ■

A partir do Teorema 3.15 obtém-se a continuidade de uma gama de aplicações entre espaços de aplicações suaves munidos da topologia C^∞ de Whitney. Por exemplo:

- $j^k : C^\infty(M, N) \rightarrow C^\infty(M, J^k(M, N)), f \mapsto j^k$;
- $\phi : N \rightarrow Z$ suave: $\phi_* : C^\infty(M, N) \rightarrow C^\infty(M, Z), f \mapsto \phi \circ f$;
- $\times : C^\infty(M, N) \times C^\infty(M, Z) \rightarrow C^\infty(M, N \times Z); (f, g) \mapsto f \times g$ e sua inversa;

- adição e multiplicação $C^\infty(M, \mathbb{R}) \times C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$, $(f, g) \mapsto f + g$ e $(f, g) \mapsto f \cdot g$;
- $\delta^k : \prod_{j=1}^k C^\infty(M, N) \rightarrow C^\infty(M^k, N^k)$, $(f_1, \dots, f_k) \mapsto f_1 \times \dots \times f_k$.

Ou seja, o conjunto das aplicações suaves entre variedades munido da topologia C^∞ de Whitney é bem comportado para uma boa quantidade de aplicações.

Teorema 3.16. *Se M e N são superfícies, então o conjunto $\mathcal{E}(M, N)$ é aberto e denso em $C^\infty(M, N)$.*

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{E}(M, N)$. Por definição, existe um aberto $U \subset C^\infty(M, N)$ contendo f tal que h é $\mathcal{A}$ -equivalente a f para todo $h \in U$, ou seja, U é uma vizinhança de f tal que h é $\mathcal{A}$ -equivalente a f para todo $h \in U$. Logo, $f \in \mathcal{E}(M, N)$ e $U \subset \mathcal{E}(M, N)$. Isto mostra que $\mathcal{E}(M, N)$ é aberto. A densidade de $\mathcal{E}(M, N)$ segue de $\dim M = \dim N = 2$ e da discussão em (10) na Seção 6 do Capítulo 6. ■

Também podemos entender o Teorema 3.16 da seguinte forma: um elemento genérico de $C^\infty(M, N)$ é estável quando M e N são superfícies.

3.4 CLASSIFICAÇÃO DE SINGULARIDADES

Para finalizar este capítulo, definiremos e faremos um estudo sobre as singularidades.

Definição 3.17. Seja $f \in C^\infty(M, N)$.

- (1) Um ponto $p \in M$ é dito **ponto singular** de f quando $(df)_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ não tem posto máximo.
- (2) Denotamos por Σf o conjunto de todos os pontos singulares de f , chamado **conjunto singular** de f . A imagem $f(\Sigma f)$ do conjunto singular de f é denotada por $\mathcal{B}(f)$ e chamado de **contorno aparente** de f .
- (3) O ponto $p \in M$ é um **ponto regular** de f quando $p \notin \Sigma f$. O ponto $q \in N$ é um **valor regular** quando $f^{-1}(q) \cap \Sigma f = \emptyset$.

Tomando $\sigma \in J^k(M, N)$ um k -jato entre M e N , temos que σ induz naturalmente uma única aplicação $T_p M \rightarrow T_q N$, com p sendo a fonte e q sendo o alvo de σ . A saber, se f representa σ , então $(df)_p$ é esta aplicação induzida.

Definição 3.18. Sejam $\sigma \in J^k(M, N)$ e f um representante de σ .

- (1) $\text{posto}(\sigma) = \text{posto}(df)_p$;

(2) $S_r = \{\sigma \in J^1(M, N) : \text{posto}(\sigma) = \gamma - r\}$, com $\gamma = \min\{\dim M, \dim N\}$.

Teorema 3.19. S_r é uma subvariedade de $J^1(M, N)$ com

$$\text{codim } S_r = (m - \gamma - r)(n - \gamma - r),$$

onde $m = \dim M$ e $n = \dim N$.

Demonstração. Veja (10), Teorema 5.4, página 61. ■

Definição 3.20. Dizemos $f : M \rightarrow N$ tem uma **singularidade do tipo S_r em $p \in M$** quando $\text{posto}(df)_p = \gamma - r$, com $\gamma = \min\{\dim M, \dim N\}$. Denotamos por $S_r(f)$ o conjunto dos pontos $p \in M$ tais que f tem uma singularidade do tipo S_r em p .

Notemos que o conjunto $S_0(f)$ é o conjunto dos pontos regulares. De fato, se $p \in S_0(f)$, então $\text{posto}(df)_p = m$, ou seja, $(df)_p$ tem posto máximo e p é um ponto regular; por outro lado, se p é um ponto regular, então $(df)_p$ tem posto máximo, ou seja, $\text{posto}(df)_p = m$ e $p \in S_0(f)$.

Teorema 3.21. $S_r(f)$ é uma subvariedade M com codimensão $\text{codim } S_r(f) = r^2 - \tau r$, sendo $\tau = |\dim M - \dim N|$.

Demonstração. Veja a discussão feita após a Proposição 1.4 em (10), página 144. ■

Agora, restringiremos o estudo para o caso em que M e N são superfícies, isto é, $\dim M = \dim N = 2$. Dada $f : M \rightarrow N$, segue da discussão anterior que $S_0(f) = M \setminus \Sigma f$. Por $S_r(f)$ ser subvariedade de M , temos que a dimensão de $S_r(f)$ é no máximo 2. Temos que $\tau = 0$; calculando a codimensão de $S_r(f)$ temos que:

- para $r = 1$, $\text{codim } S_1(f) = 1^2 = 1$. Então, por $\dim S_1(f) = \dim M - \text{codim } S_1(f) = 1$, segue que $S_1(f)$ consiste de curvas de pontos singulares.
- para $r = 2$, $\text{codim } S_2(f) = 2^2 = 4$, o que não pode ocorrer. Logo, $S_r(f) = \emptyset$ para todo $r > 1$.

Concluimos que as únicas singularidades de aplicações entre superfícies são as do tipo S_1 , ou seja, $S_1(f) = \Sigma f$. Além disso, pela definição, $p \in S_1(f)$ se, e somente se, $\dim \ker(df)_p = 1$, ou seja, para cada $p \in \Sigma f$, $\ker(df)_p$ é uma reta. Isto posto, dado $p \in \Sigma f$, ou $\ker(df)_p$ coincide com $T_p \Sigma f$, ou $\ker(df)_p$ e $T_p \Sigma f$ geram $T_p M$. Isto posto, a Proposição abaixo está provada.

Proposição 3.22. ((11), p.46) Para cada $p \in \Sigma f$, uma das seguinte situações mutuamente exclusivas acontece.

- (1) $T_p \Sigma f \oplus \ker(df)_p = T_p M$. Neste caso, p é dito um **ponto de dobra**;

(2) $T_p \Sigma f = \ker(df)_p$. Neste caso, p é dito um **ponto de cúspide**. ■

Definição 3.23. Dizemos que $f : M \rightarrow N$ é uma **aplicação de dobra** quando todo $p \in \Sigma f$ é ponto de dobra.

Também dizemos que f é **excelente** quando todo ponto $p \in M$ ou é um ponto de dobra, um ponto de cúspide ou um ponto regular de f . Como discutido anteriormente, toda aplicação entre superfícies é excelente.

3.5 TRANSIÇÕES DE CODIMENSÃO 1

Nesta seção veremos como obter novas aplicações a partir de uma aplicação dada, baseado em (12). A $\mathcal{A}$ -equivalência separa o conjunto $C^\infty(M, N)$ em vizinhanças abertas de equivalência. Pelo Teorema 3.15, temos que $\mathcal{E}(M, N)$ é aberto e denso em $C^\infty(M, N)$, de onde o conjunto discriminante $\Gamma(M, N)$ tem interior vazio.

Definição 3.24. Sejam $f, h : M \rightarrow N$ duas aplicações contínuas. Uma aplicação contínua $H : M \times [0, 1] \rightarrow N$ tal que

$$\begin{cases} H(x, 0) = f(x), \\ H(x, 1) = h(x) \end{cases}$$

é dita uma **homotopia** entre f e h . Quando existe tal aplicação, dizemos que f e h são **homotópicas**.

Dadas $f, h \in \mathcal{E}(M, N)$ homotópicas, seja $H : M \times [0, 1] \rightarrow N$ uma homotopia entre f e h de modo que $h_0 = H(\cdot, 0) = f$, $h_1 = h$ e $h_t = H(\cdot, t) \in C^\infty(M, N)$ para todo $t \in [0, 1]$. Desta forma, o conjunto singular Σf é deformado continuamente no conjunto singular Σh , assim como o contorno aparente $\mathcal{B}f$ é deformado continuamente no contorno aparente $\mathcal{B}h$.

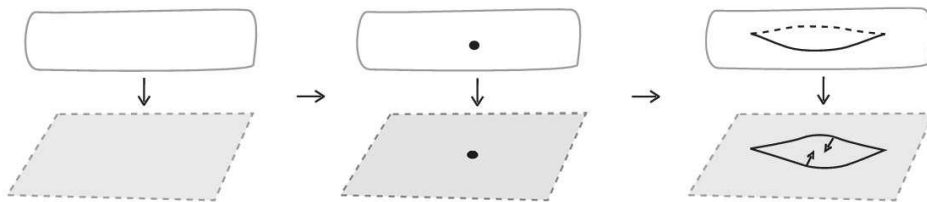
Supondo que f e h em $C^\infty(M, N)$ são homotópicas, é possível que f e h não pertençam a uma mesma componente conexa por caminhos de $\mathcal{E}(M, N)$, isto é, é possível que f e h não sejam $\mathcal{A}$ -equivalentes. Se f e h são homotópicas e não são $\mathcal{A}$ -equivalentes, então existe $q \in (0, 1)$ tal que $h_q \in \Gamma(M, N)$. Esta aplicação h_q é dita uma **transição**. Note que existe mais de uma homotopia entre duas aplicações homotópicas e que pode existir mais de um valor $q \in (0, 1)$ tal que $h_q \in \Gamma(M, N)$.

Segundo (12), o conjunto discriminante $\Gamma(M, N)$ pode ser decomposto em diferentes subconjuntos, chamados **estratos**. Uma **transição de codimensão 1** corresponde a uma homotopia transversal a todos os estratos do conjunto discriminante $\Gamma(M, N)$. Segundo (12), existem 10 estratos de codimensão 1 distintos, definidos a partir do resultado da deformação do contorno aparente.

Definição 3.25. Os estratos de codimensão 1 são:

- (1) Estrato **L**: referente a **Lábios**. Essa transição ocorre quando uma componente singular com duas cúspides que apontam para a mesma região regular se forma a partir de uma região regular, de onde as cúspides possuem o mesmo sinal. A orientação da transição depende da orientação da homotopia, sendo positiva quando um par de cúspides surge e negativa quando um par de cúspides desaparece. Esta transição aumenta o número de curvas singulares e de regiões regulares do domínio.

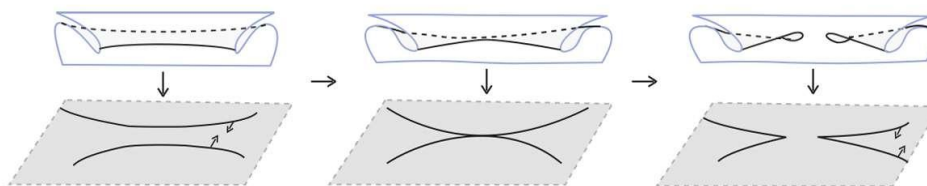
Figura 8 – Lábios.



Fonte: Retirado de (14).

- (2) Estrato **B**: referente a **Bicos**. Essa transição ocorre quando duas curvas de dobra, bordos de uma mesma região regular, se tangenciam e se cindem em duas cúspides que apontam para a mesma região regular, de onde as cúspides possuem o mesmo sinal. Dependendo da orientação da homotopia, esta transição também faz surgir ou desaparecer um par de cúspides. Ainda, essa transição pode mudar o gênero da região regular.

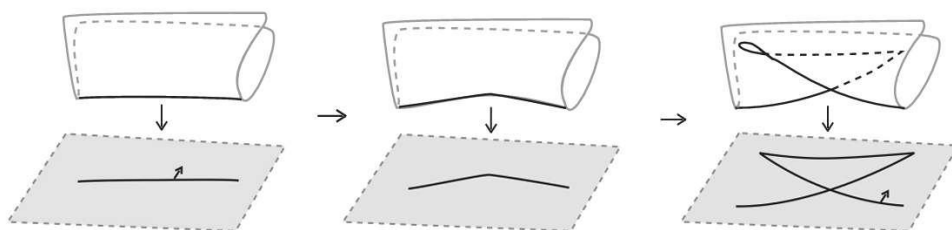
Figura 9 – Bicos.



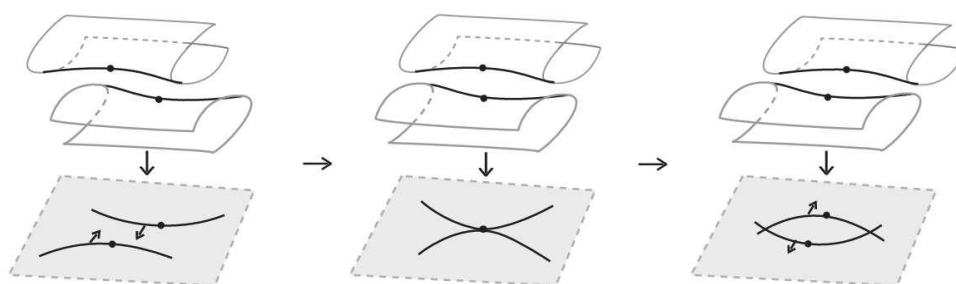
Fonte: Retirado de (14).

- (3) Estrato **S**: referente a **Rabo de Andorinha**. Essa transição ocorre quando uma curva de dobra passa por uma deformação resultando em um ponto duplo e duas cúspides que apontam para regiões regulares com sinais diferentes, isto é, as cúspides possuem sinais opostos.
- (4) Estrato $\mathbf{DD}^k$: referente a **Tangência de Dobras** ($k \in \{0, 1, 2\}$). Estas transições ocorrem quando o contorno aparente de duas curvas de dobra com orientações opostas se tangenciam, gerando uma nova região de valores regulares. Em $\mathbf{DD}^0$ o número de pré-imagens na nova região é zero; em $\mathbf{DD}^1$ o número de pré-imagens na nova região é dois; em $\mathbf{DD}^2$ o número de pré-imagens na nova região é quatro;

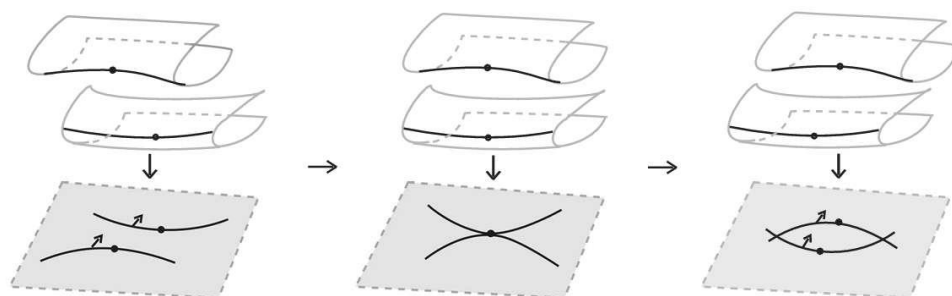
Figura 10 – Rabo de Andorinha.



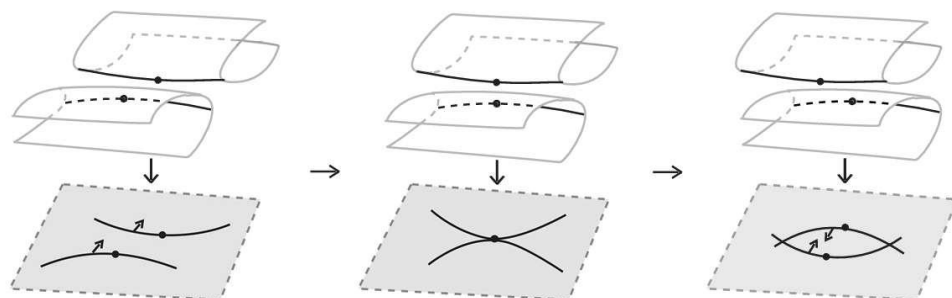
Fonte: Retirado de (14).

Figura 11 – Tangência de Dobras ($\mathbf{DD}^0$).

Fonte: Retirado de (14).

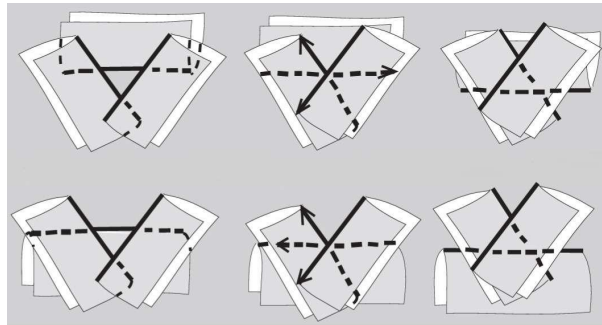
Figura 12 – Tangência de Dobras ($\mathbf{DD}^1$).

Fonte: Retirado de (14).

Figura 13 – Tangência de Dobras ($\mathbf{DD}^2$).

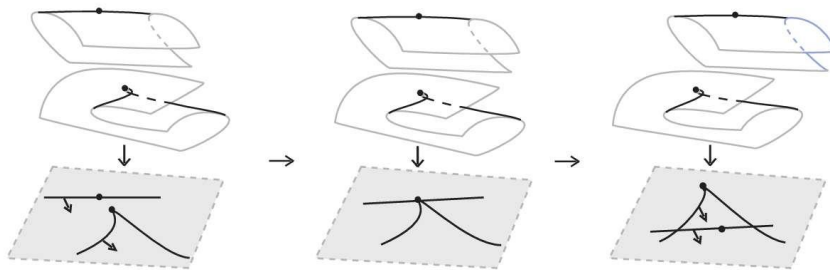
Fonte: Retirado de (14).

Figura 14 – Ponto triplo ($\mathbf{PT}^0$ acima e $\mathbf{PT}^1$ embaixo).



Fonte: Adaptado de (12).

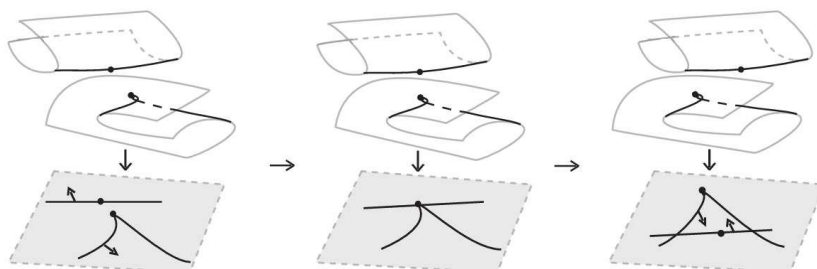
Figura 15 – Tangência de Dobras com Cúspides ($\mathbf{CD}^1$).



Fonte: Retirado de (14).

- (5) Estrato $\mathbf{PT}^k$: referente a **Ponto Triplo** ($k \in \{0, 1\}$). Essas transições ocorrem quando três pontos duplos se encontram em um ponto triplo. O triângulo que some nesta transição tem zero pré-imagens em $\mathbf{PT}^0$ e duas pré-imagens em $\mathbf{PT}^1$.
- (6) Estrato $\mathbf{CD}^k$: referente a **Tangência de Dobras com Cúspides** ($k \in \{1, 2\}$). Estas transições ocorrem quando os contornos aparentes de uma curva de dobra e uma cúspide se tangenciam. Em $\mathbf{CD}^1$ o número de pré-imagens dentro da nova região triangular criada após a tangência é três; em $\mathbf{CD}^2$ o número de pré-imagens dentro da nova região triangular criada após a tangência é cinco;

Figura 16 – Tangência de Dobras com Cúspides($\mathbf{CD}^2$).



Fonte: Retirado de (14).

Neste trabalho focamos nas transições que alteram o conjunto singular, isto é, nas transições Bicos e Lábios.

Um estrato de codimensão 2 é dito **trivial** quando é interseção de dois estratos de codimensão 1 e **não-trivial** caso contrário. Segundo (12), dadas duas aplicações estáveis e uma homotopia H entre elas com uma transição de codimensão maior, é possível construir outra homotopia H' com uma sequência de transições de codimensão 1, de modo que o efeito da transição de H é combinação linear dos efeitos das transições de H' (Seção 4, página 31).

4 APLICAÇÕES ESTÁVEIS ENTRE SUPERFÍCIES FECHADAS

A partir deste capítulo, uniremos todas as ferramentas descritas até aqui com o propósito de encontrar invariantes globais para as aplicações, baseado em (4).

Para o resto do texto M e N serão superfícies diferenciáveis fechadas e conexas. Se $f \in C^\infty(M, N)$ é uma aplicação estável, o conjunto singular Σf consiste de uma coleção finita de curvas fechadas, regulares e simples em M (veja (15), Lema 4b, página 378). As curvas de Σf dividem a superfície M em um número finito de regiões conexas em $M \setminus \Sigma f$ tendo curvas de Σf como bordo e são imersas (isto é, $(df)_p$ é injetiva em todo ponto $p \in M$) em N por f .

Ademais, o contorno aparente $\mathcal{B}f$ é uma coleção de curvas fechadas em N com auto-interseções (pontos duplos) e imagens dos pontos de cúspide de f . Se Σf é conexo, dizemos que f tem um **contorno aparente irredutível**.

Observação 4.1. Dada uma aplicação estável $f \in C^\infty(M, N)$ e uma região regular $U \subset M \setminus \Sigma f$, a restrição $f|_U$ de f em U é um difeomorfismo, pois $(df)_p$ é injetiva em todo ponto $p \in M$. Em outras palavras, f é um difeomorfismo local em uma vizinhança de um ponto regular.

Definição 4.2. Sejam M e N superfícies orientáveis e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação estável. Uma região regular U de $M \setminus \Sigma f$ é dita **positiva** quando tem a orientação preservada por f e **negativa** caso contrário.

Notação. U_j^+ denota o fecho de uma componente conexa de $M \setminus \Sigma f$ cuja orientação é preservada por f e U_j^- o fecho de uma componente conexa cuja orientação é invertida por f . Denotaremos por

$$M^+ = \bigcup_j U_j^+ \quad \text{e} \quad M^- = \bigcup_k U_k^-.$$

Note que M^+ e M^- são superfícies compactas com bordo. Além disso, $M = M^+ \cup M^-$ e $\Sigma f = M^+ \cap M^-$.

Definição 4.3. Dizemos que um ponto $x_k \in f^{-1}(y)$ é **positivo** quando $x_k \in M^+$ e **negativo** quando $x_k \in M^-$.

Agora, vamos definir um invariante homotópico de aplicações contínuas $f : M \rightarrow N$. Pelo Teorema da “Pilha de Registros” (*Stack of Records Theorem*, ver (16), Exercício 7, página 26), temos que $f^{-1}(y)$ é um conjunto finito para todo ponto regular $y \in M$.

Definição 4.4. Sejam M e N superfícies fechadas e orientáveis e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação de classe C^1 . O **grau local** de f no ponto y , indicado por $\deg_y f$ é a diferença entre o número de pontos positivos e o número de pontos negativos em $f^{-1}(y)$.

Teorema 4.5. *Sejam M e N superfícies orientáveis, de mesma dimensão, sendo N conexa, e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Então o grau $\deg_y(f)$ é o mesmo, qualquer que seja o valor regular $y \in N$.*

Demonstração. Veja (17) Teorema 2, página 34. ■

Definição 4.6. O número $\deg_y f$ do Teorema 4.6 é o **grau** da aplicação f , denotado por $\deg f$.

O grau é um invariante homotópico (ver (18), item (c), página 134, e Corolário 4.25, página 361), ou seja, uma homotopia entre duas aplicações em $C^\infty(M, N)$ não altera o grau da aplicação; como consequência, duas aplicações de graus distintos não podem ser homotópicas e não podem ser $\mathcal{A}$ -equivalentes.

4.1 GRAFOS DE APLICAÇÕES ESTÁVEIS

Para o resto do capítulo, M e N serão orientáveis, além de fechadas e conexas. Seja $f \in \mathcal{E}(M, N)$. Aqui, assim como feito no Capítulo 2, Seção 4, temos um par $(M, \Sigma f)$ com M superfície fechada com curvas simples e disjuntas mergulhadas em M ; então podemos associar um grafo $\mathcal{G} \in \mathcal{G}_W(V, E)$ a este par. Os vértices são as regiões regulares de f e as arestas são as curvas singulares de f , isto é, curvas nas quais f não tem posto máximo.

Definição 4.7. Seja $f \in \mathcal{E}(M, N)$. O **grafo de f** é o grafo $\mathcal{G}$ associado a $(M, \Sigma f)$.

Proposição 4.8. *Seja $f \in \mathcal{E}(M, N)$ e $\mathcal{G}$ seu grafo associado. Então, $\mathcal{G}$ é bipartido.*

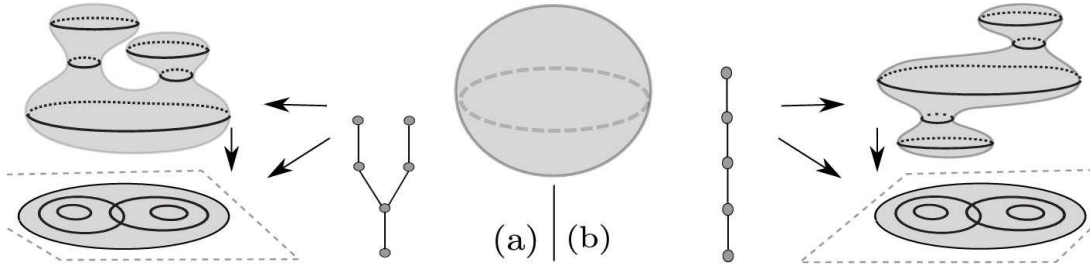
Demonstração. Seja M fechada, conexa e orientável. Se $M \setminus \Sigma f$ é conexo, então o grafo $\mathcal{G}$ de f possui somente uma aresta, de onde $\mathcal{G}$ é bipartido. Caso contrário, $M \setminus \Sigma f$ possui um número finito de componentes conexas.

Tomando $p \in X \subset M \setminus \Sigma f$, com X componente conexa, temos que $\det(df)_p \neq 0$, uma vez que p é um ponto regular. Assim, ou $\det(df)_p > 0$ para todo $p \in X$ ou $\det(df)_p < 0$ para todo $p \in X$. De fato, se $p_1, p_2 \in X$ são tais que $\det(df)_{p_1} < 0 < \det(df)_{p_2}$, segue do Teorema do Valor Intermediário (veja (19), Teorema 24.2, página 154) que $\det(df)_p = 0$ para algum $p \in X$, ou seja, $p \in X$ é um ponto singular, o que é uma contradição.

Por fim, tomando $p_1 \in X_1$ (região positiva) e $p_2 \in X_2$, com $\partial X_1 \cap \partial X_2 = \alpha \in \Sigma f$, temos que X_2 é uma região negativa, por M ser orientável. Assim, cada curva singular é bordo de uma região que preserva orientação e outra região que inverte orientação, de onde podemos atribuir sinais aos seus vértices correspondentes de modo que cada aresta correspondente a cada curva singular liga vértices de sinais diferentes. Portanto, $\mathcal{G}$ é bipartido. ■

Teorema 4.9. *O grafo de uma aplicação estável é um invariante por $\mathcal{A}$ -equivalência.*

Figura 17 – Exemplo de aplicações contorno aparente idêntico mas que não são equivalentes



Fonte: Retirado de (4).

Demonstração. Dadas duas aplicações equivalentes $f, h \in C^\infty(M, N)$, existem difeomorfismos $\ell : M \rightarrow M$ e $k : N \rightarrow N$ que preservam orientações tais que $h \circ \ell = k \circ f$. Podemos reescrever $h = k \circ f \circ \ell^{-1}$ e $f = k^{-1} \circ h \circ \ell$. Pela Regra da Cadeia, temos que

$$(dh)_p = (dk)_{f(\ell^{-1}(p))} \circ (df)_{\ell^{-1}(p)} \circ (d\ell^{-1})_p \quad (4.1)$$

e

$$(df)_p = (dk^{-1})_{h(\ell(p))} \circ (dh)_{\ell(p)} \circ (d\ell)_p. \quad (4.2)$$

Como k e ℓ são difeomorfismos, suas derivadas são isomorfismos em todo ponto. Assim, segue de (4.1) que $(dh)_p$ não tem posto máximo se, e somente se, $(df)_{\ell^{-1}(p)}$ não tem posto máximo; e de (4.2) que $(df)_p$ não tem posto máximo se, e somente se, $(dh)_{\ell(p)}$ não tem posto máximo. Isto posto, se $p \in \Sigma h$, então $\ell^{-1}(p) \in \Sigma f$. Por outro lado, se $p \in \Sigma f$, então $\ell(p) \in \Sigma h$. Logo, $\Sigma h = \ell(\Sigma f)$ e $(M, \Sigma f)$ é equivalente a $(M, \Sigma h)$.

Agora, tome $p \in \ell(M \setminus \Sigma f)$, ou seja, existe $q \in M \setminus \Sigma f$ tal que $\ell(q) = p$. Suponha que $p = \ell(q) \in \ell(\Sigma f)$. Como $q \notin \Sigma f$, existe $r \in \Sigma f$ ($r \neq q$) tal que $\ell(r) = p = \ell(q)$, o que contradiz o fato de ℓ ser um difeomorfismo. Logo, $p \in \ell(M) \setminus \ell(\Sigma f) = M \setminus \Sigma h$. Por outro lado, tome $p \in M \setminus \Sigma h = \ell(M) \setminus \ell(\Sigma f)$, isto é, $p \in \ell(M)$ e $p \notin \ell(\Sigma f)$, de onde existe $q \in M$ tal que $\ell(q) = p \notin \ell(\Sigma f)$ e, consequentemente, que $q \notin \Sigma f$. Logo, existe $q \in M \setminus \Sigma f$ tal que $\ell(q) = p$, de onde $p \in \ell(M \setminus \Sigma f)$ e, portanto, $\ell(M \setminus \Sigma f) = M \setminus \Sigma h$.

Se associarmos $\mathcal{G}_1$ a f e $\mathcal{G}_2$ a h , mostramos até agora que $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ têm o mesmo número de arestas e de vértices. Basta provar que as relações de adjacências são mantidas e os pesos dos vértices relacionados são iguais. Dadas $X_1, X_2 \subset M \setminus \Sigma f$ e $\alpha \in \Sigma f$ de modo que $\partial X_1 \cap \partial X_2 = \alpha$, temos que $X_1 \cup \alpha \cup X_2$ é conexo por caminhos, logo $\ell(X_1 \cup \alpha \cup X_2) = \ell(X_1) \cup \ell(\alpha) \cup \ell(X_2)$ também o é e isso prova que as relações de adjacências são mantidas por ℓ . Por fim, segue do Teorema da Classificação de Superfícies (Teorema 2.27) que duas superfícies só podem ser difeomorfas se têm o mesmo gênero, logo, a divisão dos gêneros das componentes conexas deve ser igual.

Portanto, $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ são isomorfos. ■

Definição 4.10. A diferença entre o número de regiões positivas e negativas será denotado por $\theta_V = V^+ - V^-$ e a diferença entre o peso positivo total e o peso negativo total será denotado por $\theta_W = W^+ - W^-$.

Definição 4.11. Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação estável. Denotamos por

1. $\chi(M_f^\pm)$ a característica de Euler de $M_f^\pm$;
2. $\theta_\chi(f) = \chi(M_f^+) - \chi(M_f^-)$ a diferença de $\chi(M_f^+)$ e $\chi(M_f^-)$.

Existem aplicações estáveis entre superfícies fechadas e orientáveis cujo conjunto singular é vazio. Se uma aplicação possuir conjunto singular vazio e for sobrejetiva, dizemos que é uma **aplicação de recobrimento**. Segue deste fato que o grafo de aplicações de recobrimento possui somente um vértice com $W = g(M)$.

Proposição 4.12. ((4), p.4) *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação de recobrimento com M e N fechadas e orientáveis. Temos:*

1. a característica de Euler de M é $\chi(M) = \deg(f)\chi(N)$;
2. o gênero de M é dado por $g(M) = \deg(f)(g(N) - 1) + 1$.

Demonstração. Podemos decompor M em $\deg(f)$ regiões M_j de gênero $g(N) - 2$ e quatro componentes de bordo, cobrindo N somente uma vez ao identificar os pares de componentes de bordo (*e.g.* um $(n - 2)$ -toro com 4 discos removidos, de modo que, ao identificarmos os 2 pares mais próximos, obtemos um n -toro), isto é, $\deg f|_{M_j} = 1$. Então,

$$\begin{aligned}
 \chi(M) &= \sum_{j=1}^d \chi(M_j) \\
 &= \deg(f)(2 - 2g(M_j) - 4) \\
 &= \deg(f)(2 - 2(g(N) - 2) - 4) \\
 &= \deg(f)(2 - 2g(N)) \\
 &= \deg(f)\chi(N).
 \end{aligned}$$

Como $\chi(M) = 2 - 2g(M)$, segue que

$$\begin{aligned}
 2(1 - g(M)) = 2 \deg(f)(1 - g(N)) &\implies 1 - g(M) = \deg(f)(1 - g(N)) \\
 &\implies -g(M) = \deg(f)(1 - g(N)) - 1 \\
 &\implies g(M) = \deg(f)(g(N) - 1) + 1,
 \end{aligned}$$

concluindo a demonstração. ■

Proposição 4.13. ((4), p.4) Se $\mathcal{G} \in \mathcal{G}_W(V, E)$ é o grafo de uma aplicação estável f entre duas superfícies fechadas e orientáveis, então $\theta_\chi(f) = 2(\theta_V - \theta_W)$.

Demonstração. A característica de Euler de $M_j^\pm$ é $\chi(M_j^\pm) = 2 - 2w_j^\pm - E_j^\pm$, onde $w_j^\pm$ e $E_j^\pm$ denotam respectivamente o gênero e o número de componentes de fronteira para cada superfície $M_j^\pm$. Logo,

$$\chi(M^\pm) = \sum_{i=1}^{V^\pm} \chi(M_j^\pm) = 2V^\pm - 2W^\pm - E.$$

Então, segue da Definição 4.11 que

$$\theta_\chi(f) = \chi(M_j^+) - \chi(M_j^-) = 2(\theta_V - \theta_W),$$

como queríamos. ■

Proposição 4.14. ((4), p.4) Se f é uma aplicação de dobra entre duas superfícies fechadas e orientáveis M e N , então $\theta_\chi(f) = \deg(f)\chi(N)$.

Demonstração. Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação de dobra com $\deg(f) \geq 0$ e $\Sigma f \neq \emptyset$. Denotamos por N_0 o conjunto dos valores regulares de N e por M_0 a imagem inversa de N_0 contidas em M . Por f ser aplicação de dobra, M_0 consiste de componentes conexas R_j ($j \in \{1, \dots, \deg f\}$), sendo R_j^- em M_0^- e R_j^+ em M_0^+ , sendo que para cada região negativa R_j^- , temos uma cópia positiva R_j^+ . Defina

$$M_r^+ = M^+ \setminus \bigcup_j R_j^+.$$

Então,

$$\chi(M^-) = \chi\left(\bigcup_j R_j^-\right) = \chi\left(\bigcup_j R_j^+\right)$$

e

$$\chi(M^+) = \chi(M_r^+) + \chi\left(\bigcup_j R_j^+\right). \quad (4.3)$$

Logo, $\chi(M_r^+) = \chi(M^+) - \chi(M^-)$. Como $f|_{M_r^+}$ forma um recobrimento de N com grau $\deg f$, por M_r^+ não conter o conjunto singular Σf , temos que

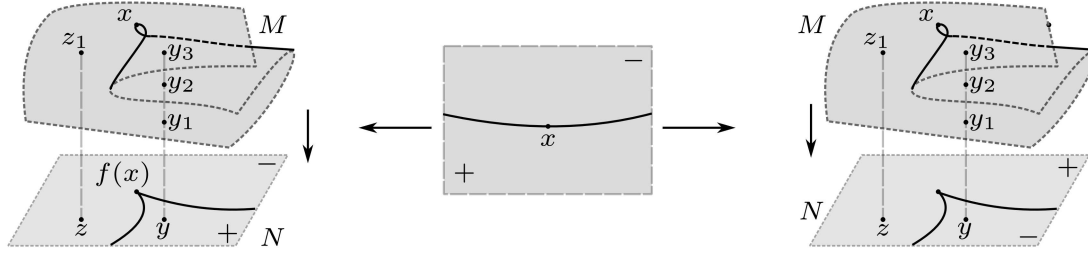
$$\chi(M_r^+) = \deg(f)\chi(N). \quad (4.4)$$

Substituindo a Equação (4.3) na Equação (4.4), obtemos $\chi(M^+) - \chi(M^-) = \deg(f)\chi(N)$ e, pela Definição 4.11, segue que $\theta_\chi(f) = \deg(f)\chi(N)$. ■

Corolário 4.14.1. ((4), p.4) Se $\mathcal{G} \in \mathcal{G}_W(V, E)$ é um grafo de uma aplicação de dobra $f : M \rightarrow N$ com grau $\deg(f)$, então

$$\theta_V - \theta_W = \deg(f)(1 - g(N)).$$

Figura 18 – Cúspides positivas e negativas.



Fonte: Adaptado de (4).

Demonstração. Toda aplicação de dobra é estável (ver (10), Capítulo III, Parágrafo 4, página 87), pois podemos construir uma vizinhança por meio de homotopias de modo que as aplicações resultantes sejam de dobra e equivalentes. Então, pelas Proposições 4.13 e 4.14, temos a igualdade $\deg(f)\chi(N) = 2(\theta_V - \theta_W)$, de onde

$$\deg(f)(2 - 2g(N)) = 2(\theta_V - \theta_W) \implies \theta_V - \theta_W = \deg(f)(1 - g(N))$$

o que conclui a demonstração. ■

Para $N = \mathbb{S}^2$, temos $\deg(f) = \theta_V - \theta_W$, pois $g(\mathbb{S}^2) = 0$. Para $N = \mathbb{T}$, temos que $\theta_V = \theta_W$, pois $g(\mathbb{T}) = 1$.

4.2 EFEITOS DAS TRANSIÇÕES DE CODIMENSÃO 1

Agora iremos estudar os efeitos das transições de codimensão 1 na topologia do conjunto regular e no conjunto singular de um ponto de vista global, a saber, as transições lábios e bicos.

O conjunto singular em uma vizinhança de qualquer ponto de cuspide x separa M em duas regiões pequenas imersas, uma positiva M_x^+ e outra negativa M_x^- . Dizemos que um ponto de cuspide x tem **sinial positivo** (ou **negativo**) quando $f(M_x^-)$ ($f(M_x^+)$) é conexa em $N \setminus \mathcal{B}f$.

Em outras palavras, x é um ponto de cuspide positivo (negativo) se todos os pontos de $f(M_x^-)$ ($f(M_x^+)$) têm o mesmo número de pré-imagens (exatamente 3, em uma pequena vizinhança de x , como mostrado na Figura 18). Denotamos por C^+ (C^-) o número total de pontos de cuspide positivos (negativos).

As transições de codimensão 1 que mudam o número de cúspides e curvas singulares são as transições lábios e bicos, sendo estas últimas divididas em 8 casos diferentes:

1. $\mathbf{B}_v^{+,\pm}$: aumenta em 1 o número de vértices em $V^\mp$, arestas E e aumenta em 2 o número de cúspides $C^\pm$.
2. $\mathbf{B}_v^{-,\pm}$: diminui em 1 o número de vértices em $V^\pm$, arestas E e aumenta em 2 o número de cúspides $C^\pm$.

3. $\mathbf{B}_w^{+,\pm}$: aumenta em 1 o peso em $W^\pm$, diminui em 1 o número de arestas E e aumenta em 2 o número de cúspides $C^\pm$.
4. $\mathbf{B}_w^{-,\pm}$: diminui em 1 o peso em $W^\mp$, aumenta em 1 o número de arestas E e aumenta em 2 o número de cúspides $C^\pm$.

A Tabela 2 mostra o incremento dos números de arestas, cúspides, vértices e pesos relacionados às transições de lábios e bicos, no sentido que o número de cúspides cresce.

Tabela 2 – Efeito das transições lábios e bicos nos invariantes.

$\begin{matrix} T \\ I \end{matrix}$	$\mathbf{L}^+$	$\mathbf{L}^-$	$\mathbf{B}_v^{+,+}$	$\mathbf{B}_v^{+,-}$	$\mathbf{B}_v^{-,+}$	$\mathbf{B}_v^{-,-}$	$\mathbf{B}_w^{+,+}$	$\mathbf{B}_w^{+,-}$	$\mathbf{B}_w^{-,+}$	$\mathbf{B}_w^{-,-}$
ΔE	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
ΔC^+	2	0	2	0	2	0	2	0	2	0
ΔC^-	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2
ΔV^+	0	1	0	1	-1	0	0	0	0	0
ΔV^-	1	0	1	0	0	-1	0	0	0	0
ΔW^+	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1
ΔW^-	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0

Fonte: Retirado de (4).

A importância da decomposição da transição de bicos $\mathbf{B}$ está na variação do número de arestas no grafo, que afeta o número de vértices ou pesos no grafo (ver Tabela 2).

Definição 4.15. Seja I um invariante de f que pode ser obtido a partir de h por uma transição $\eta \in \{\mathbf{L}^\pm, \mathbf{B}_v^\pm, \mathbf{B}_w^\pm\}$ de codimensão 1. A diferença $\Delta I = I(f) - I(h)$ é chamada de **incremento** de I .

Para calcular $I(f)$, podemos escolher uma aplicação inicial h homotópica a f com invariante $I(h)$ conhecido. A partir daí, podemos calcular $I(f)$ começando por $I(h)$ e adicionando o incremento ΔI ao longo da homotopia de h a f .

Lema 4.16. ((4), p.7) *Os incrementos dos números de cúspides, curvas singulares, regiões singulares e o gênero total da região ao longo do caminho entre duas aplicações estáveis f e h na mesma homotopia $C^\infty(M, N)$ são dadas, respectivamente, por*

$$\Delta E = (\mathbf{L}^+ + \mathbf{L}^- + \mathbf{B}_v^{+,+} + \mathbf{B}_v^{+,-} + \mathbf{B}_w^{-,+} + \mathbf{B}_w^{-,-}) - (\mathbf{B}_v^{-,+} + \mathbf{B}_v^{-,-} + \mathbf{B}_w^{+,+} + \mathbf{B}_w^{+,-}),$$

$$\Delta C = 2(\mathbf{B}_v^{+,\pm} + \mathbf{B}_v^{-,\pm} + \mathbf{B}_w^{+,\pm} + \mathbf{B}_w^{-,\pm} + \mathbf{L}^\pm),$$

$$\Delta V = \mathbf{L}^\mp + \mathbf{B}_v^{+,\mp} - \mathbf{B}_v^{-,\pm},$$

$$\Delta W = \mathbf{B}_w^{+,\pm} - \mathbf{B}_w^{-,\mp}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\Delta\theta_C &= 2 \left[\left(\mathbf{L}^+ + \sum_{k \in \{v,w\}} \sum_{j \in \{-,+\}} \mathbf{B}_k^{j,+} \right) - \left(\mathbf{L}^- + \sum_{k \in \{v,w\}} \sum_{j \in \{-,+\}} \mathbf{B}_k^{j,-} \right) \right], \\
\Delta\theta_V &= (\mathbf{L}^- + \mathbf{B}_v^{+,-} + \mathbf{B}_v^{-,-}) - (\mathbf{L}^+ + \mathbf{B}_v^{+,+} + \mathbf{B}_v^{-,+}) \\
\Delta\theta_W &= (\mathbf{B}_w^{+,+} + \mathbf{B}_w^{-,+}) - (\mathbf{B}_w^{+,-} + \mathbf{B}_w^{-,-}) \\
\Delta\theta_X &= 2[\Delta\theta_V - \Delta\theta_W] = -\Delta\theta_C.
\end{aligned}$$

Demonstração. Note que $\Delta\theta_X = \Delta(X^+ - X^-) = \Delta X^+ - \Delta X^-$, com $X \in \{C, V, W\}$. O resultado segue da Tabela 2 e da Proposição 4.13. ■

Teorema 4.17. ((4), p.8) *Sejam $f \in \mathcal{E}(M, N)$ uma aplicação estável e $h \in \mathcal{E}(M, N)$ uma aplicação de dobra na mesma classe de homotopia de f . Então,*

$$\theta_X(f) + \theta_C(f) = \theta_X(h)$$

Demonstração. Se h é uma aplicação de dobra, então $\theta_C(h) = 0$ e $\theta_C(f) = \Delta\theta_C(f)$. Assim,

$$\theta_X(f) = \theta_X(h) + \Delta\theta_X(f) \stackrel{(*)}{=} \theta_X(h) - \Delta\theta_C(f) \implies \theta_X(f) + \theta_C(f) = \theta_X(h),$$

onde a igualdade marcada por $(*)$ segue da última igualdade do Lema 4.16. ■

Corolário 4.17.1. ((4), p.8) *Se h e f são duas aplicações de dobra na mesma classe de homotopia de $C^\infty(M, N)$, então $\theta_X(f) = \theta_X(h)$.*

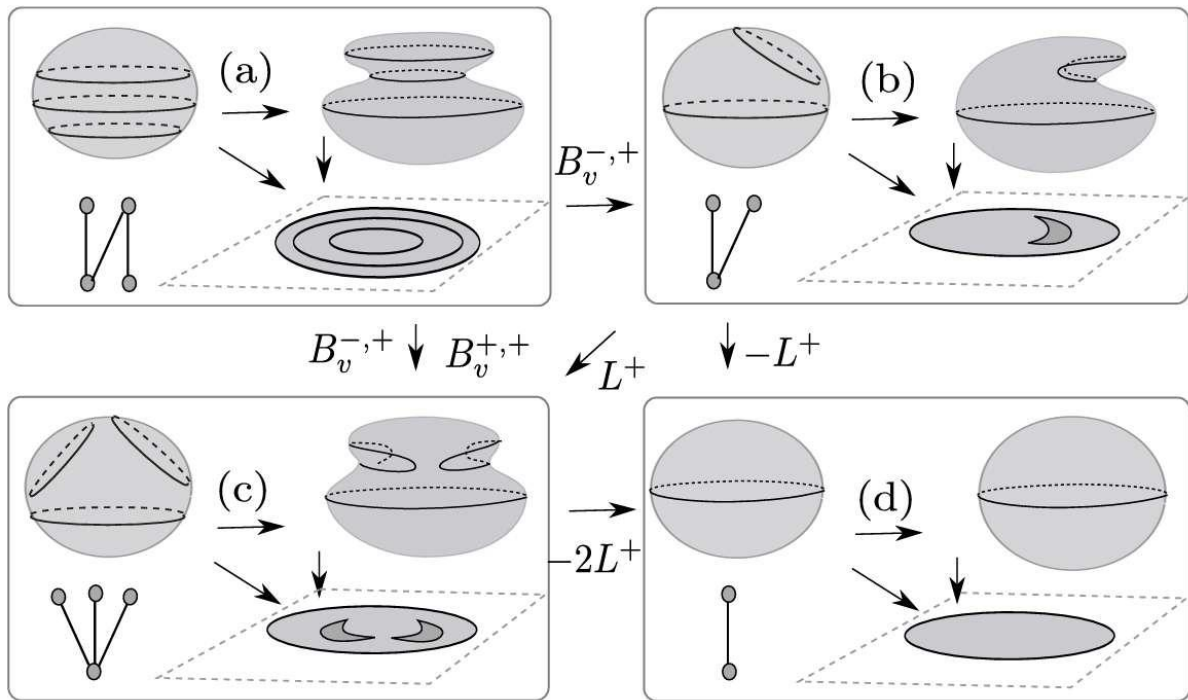
Demonstração. Por serem aplicações de dobra, temos que $\theta_C(f) = \theta_C(h) = 0$. O resultado segue do Teorema 4.17. ■

Exemplo 4.18. Ilustramos na Figura 19 as transições entre quatro aplicações estáveis da esfera no plano. Em:

- (a) a aplicação possui três curvas singulares, nenhum ponto duplo nem cúspides, cujo grafo é do tipo $\mathcal{G}_0(4, 3)$;
- (b) a aplicação com grafo $\mathcal{G}_0(3, 2)$ pode ser obtida aplicando uma transição de bicos $\mathbf{B}_v^{-,+}$ em (a);
- (c) a aplicação com grafo $\mathcal{G}_0(4, 3)$ pode ser obtida aplicando a transição lábios $\mathbf{L}^+$ na aplicação (b);
- (d) a aplicação é a projeção trivial da esfera, com grafo $\mathcal{G}_0(2, 1)$, e pode ser obtida aplicando uma transição lábios $-\mathbf{L}^+$ na aplicação (b) ou duas transições lábios $-L^+$ na aplicação (c).

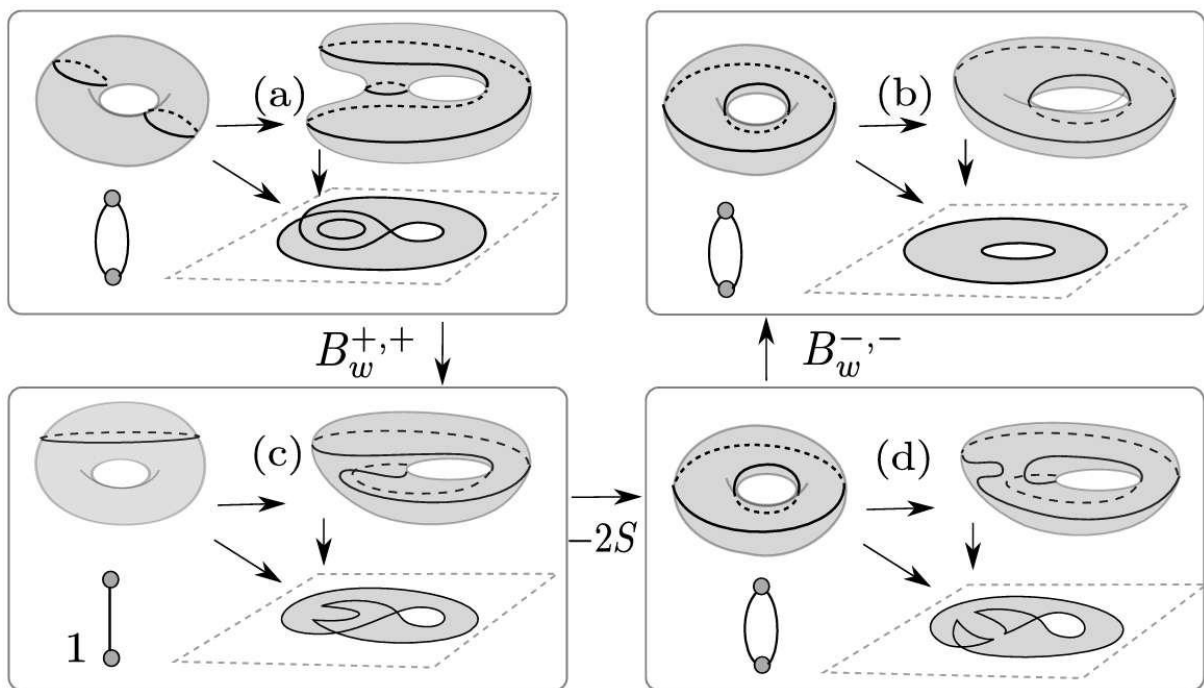
Exemplo 4.19. A Figura 20 ilustra quatro aplicações estáveis do toro em N . Em:

Figura 19 – Exemplos de Transições $\mathbf{L}^+$ e $\mathbf{B}_v^{\pm,+}$.



Fonte: Retirado de (4).

Figura 20 – Exemplos de transições $\mathbf{B}_w^{+,+}$ e $\mathbf{B}_w^{-,-}$.



Fonte: Retirado de (4).

- (a) as aplicações dobra com duas curvas singulares, dois pontos duplos e grafo do tipo $\mathcal{G}_0(2, 2)$ é composta por uma imersão do toro no 3-espço, uma projeção do 3-espço no plano e um mergulho do plano em N ;
- (b) a aplicação de dobra com duas curvas singulares não possui pontos duplos e pode ser obtida aplicando uma transição bicos $\mathbf{B}_w^{-,-}$ à aplicação (d);
- (c) a aplicação com uma curva singular possui dois pontos duplos e duas cúspides e grafo do tipo $\mathcal{G}_1(2, 1)$. Esta aplicação pode ser obtida aplicando uma transição bicos $\mathbf{B}_w^{+,+}$ à aplicação (a);
- (d) a aplicação com uma curva singular possui dois pontos duplos, quatro cúspides e seu grafo é do tipo $\mathcal{G}_0(2, 2)$. Esta aplicação pode ser obtida aplicando duas transições rabo de andorinha $-S$ à aplicação (c).

4.3 INVARIANTES GLOBAIS

Agora veremos a relação entre θ_χ , θ_C e $\deg f$ para uma aplicação estável.

Teorema 4.20. ((4), p.9) *Se a aplicação estável $f : M \rightarrow N$ tem grau $\deg(f)$, então*

$$\theta_\chi(f) + \theta_C(f) = \deg(f)\theta_\chi(N).$$

Demonstração. Seja h uma aplicação de dobra na mesma classe de homotopia de f . Então, $\deg(f) = \deg(h)$. Pela Proposição 4.14, temos que $\theta_\chi(h) = \deg(h)\chi(N)$; e pelo Teorema 4.17, segue que $\theta_\chi(f) + \theta_C(f) = \theta_\chi(h)$. Logo,

$$\theta_\chi(f) + \theta_C(f) = \deg(f)\theta_\chi(N),$$

como queríamos provar. Note que o resultado não depende da escolha de h na classe de homotopia de f . ■

Note que $\theta_\chi(f) = \chi(M) - 2\chi(M_f^-)$ e $\theta_C(f)$ é a soma total dos sinais dos pontos de cúspide de f . Logo, vemos que o Teorema 4.20 é equivalente ao Teorema de Quine:

Teorema 4.21. (Teorema de Quine). *Sejam M e N superfícies suaves compactas e orientáveis e $f : M \rightarrow N$ excelente. Se $p_1, \dots, p_n$ são os pontos de cúspide e $\mu(p_k)$ o grau local no ponto de cúspide p_k , então*

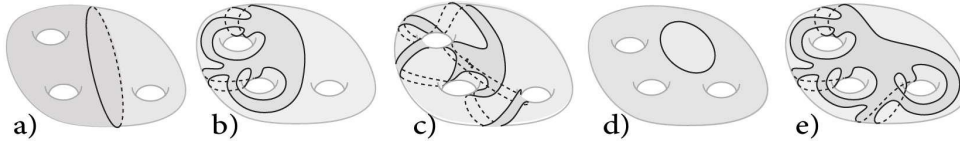
$$\chi(M) - 2\chi(M^-) + \sum \mu(p_k) = \deg(f)\chi(N).$$

Demonstração. Veja (20). ■

Proposição 4.22. ((4), p.9) *Se a aplicação estável $f : M \rightarrow N$ tem grau $\deg(f)$, então,*

$$\theta_V(f) - \theta_W(f) + \frac{\theta_C(f)}{2} = \deg(f)(1 - g(N)). \quad (4.5)$$

Figura 21 – Exemplos de contornos aparentes irredutíveis sobre o 3-toro.



Fonte: Retirado de (4).

Demonstração. Pelo Teorema 4.20, temos que $\theta_\chi(f) = \deg(f)\chi(N) - \theta_C(f)$. Pela Proposição 4.13, temos $\theta_\chi(f) = 2[\theta_V(f) - \theta_W(f)]$. Então, destas duas igualdades e de $\chi(N) = 2(1 - n)$ obtemos

$$\theta_V(f) - \theta_W(f) = \deg(f)(1 - n) - \frac{\theta_C(f)}{2} \implies \theta_V(f) - \theta_W(f) + \frac{\theta_C(f)}{2} = \deg(f)(1 - n),$$

com $n = g(N)$. ■

O próximo resultado é uma consequência da Proposição 4.22.

Corolário 4.22.1. ((4), p.9) *Se $\mathcal{G}_W(2, 1)$ é o tipo do grafo de uma aplicação estável $f : M \rightarrow N$ com grau $\deg(f)$, então*

$$\theta_W(f) = \deg(f)(g(N) - 1) + \frac{\theta_C(f)}{2}.$$

Consequentemente, se $\theta_W(f) = 0$, então $\theta_C(f) = 2 \deg(f)(1 - g(N))$.

Demonstração. Como $\mathcal{G}$ tem 2 vértices, segue que $V^+ = V^- = 1$, de onde $\theta_V(f) = 0$. Agora, basta rearranjar a Equação (4.5),

$$-\theta_W(f) = \deg(f)(1 - g(N)) - \frac{\theta_C(f)}{2} \implies -\theta_W(f) = \deg(f)(g(N) - 1) + \frac{\theta_C(f)}{2},$$

concluindo a demonstração. ■

Se N é uma superfície fechada orientável, segundo (21), cada aplicação $f \in C^\infty(M, N)$ é homotópica a uma aplicação $h \in \mathcal{E}(M, N)$ cujo contorno aparente é irredutível.

Se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação de dobra de grau zero com contorno aparente irredutível, então M^- é uma cópia de M^+ . Consequentemente, pelas Definições 4.10 e 4.11, temos que $\theta_V = \theta_W = \theta_\chi = 0$ (veja a Figura 21).

Exemplo 4.23. A Figura 21 ilustra cinco aplicações de dobra de grau zero com contornos aparentes irredutíveis, nenhum ponto duplo ou cúspide sobre o 3-toro. Uma aplicação de dobra do 4-toro em (a) é homotópica à (b), mas não é homotópica à (c). Também, são homotópicas as aplicações dobra do 6-toro no 3-toro em (d) e (e).

Proposição 4.24. ((4), p.10) *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação estável com grau $\deg(f)$ e contorno aparente irredutível. Então, o gênero de M é dado por*

$$g(M) = 2W^\mp \pm \deg(f)(n-1) \pm \frac{\theta_C}{2}.$$

Demonstração. Se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação estável com grau $\deg(f)$ e contorno aparente irredutível, então $E = V^+ = V^- = 1$. Pelo Corolário 4.22.1, $W^+ - W^- = \deg(f)(n-1) + \frac{\theta_C}{2}$. Pelo Teorema 4.17, $W^+ = g(M) - W^-$.

Substituindo a última igualdade na igualdade anterior, temos

$$g(M) - 2W^- = \deg(f)(n-1) + \frac{\theta_C}{2} \implies g(M) = 2W^- + \deg(f)(n-1) + \frac{\theta_C}{2}.$$

Para $W^- = g(M) - W^+$, temos que

$$2W^+ - g(M) = \deg(f)(n-1) + \frac{\theta_C}{2} \implies g(M) = 2W^+ - \deg(f)(n-1) - \frac{\theta_C}{2},$$

o que conclui a demonstração. ■

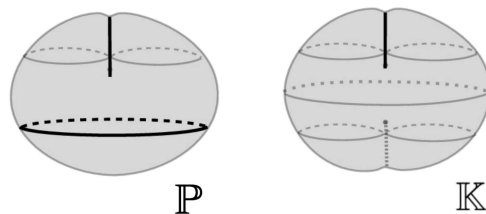
5 APLICAÇÕES DE SUPERFÍCIES FECHADAS EM $\mathbb{P}$

Neste capítulo completaremos o estudo feito no Capítulo 4 para o caso em que o contradomínio é não orientável, baseado em (3). Visamos generalizar os resultados já conhecidos de aplicações de dobra de superfícies fechadas (não necessariamente orientáveis) à 2-esfera, feitos no Capítulo 4, para aplicações de dobra de superfícies fechadas ao plano projetivo $\mathbb{P}$.

Como discutimos na Seção 4 do Capítulo 2, recordemos a divisão do peso W em pares de pesos (T, P) e que quando a superfície domínio M é não orientável e a forma de associar grafos com estes pares de pesos. Além disso, temos duas possibilidades para uma curva fechada γ em M (Figura 7): ou a curva γ possui uma pequena vizinhança homeomorfa a um cilindro; ou a curva γ possui uma pequena vizinhança homeomorfa a uma faixa de Möbius.

De modo a ilustrar, utilizaremos a superfície “cross-cap” como modelo para o plano projetivo e a soma conexa de duas superfícies “cross-cap” como modelo para a garrafa de Klein (Figura 22). Esta superfície é definida ao identificarmos os pares antipodais no bordo do disco D^2 e é uma das definições equivalentes para o plano projetivo.

Figura 22 – Superfície Cross-Cap e a Soma Conexa de Duas Superfícies Cross-Cap.



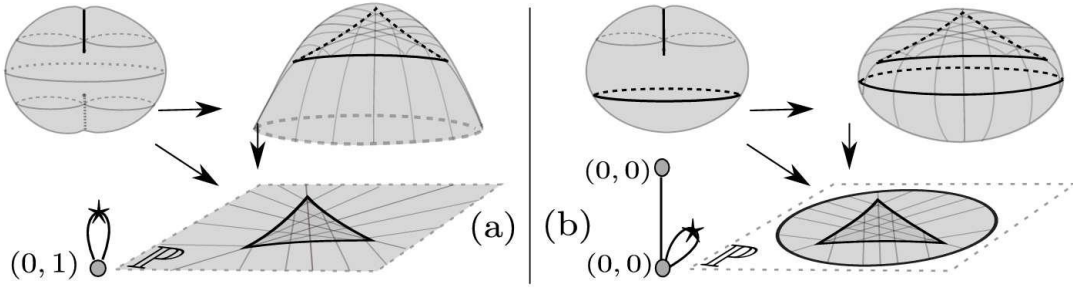
Fonte: Adaptado de (3).

Assim, para uma aplicação estável $f : M \rightarrow \mathbb{P}$, precisamos adicionar uma $\star$ a cada aresta do grafo de f que corresponda a uma curva singular de f possuindo uma vizinhança homeomorfa a uma faixa Möbius. Note que tal aresta sempre determina um laço, isto é, uma aresta com vértice inicial e final sendo um mesmo vértice do grafo.

Exemplo 5.1. A Figura 23 ilustra grafos e contornos aparentes com três cúspides de duas aplicações estáveis a partir da garrafa de Klein (em (a)) e a partir de $\mathbb{P}$ (em (b)) ao $\mathbb{P}$. Aqui, vemos que as três cúspides aparecem nas curvas possuindo vizinhança homeomorfa à faixa de Möbius. ■

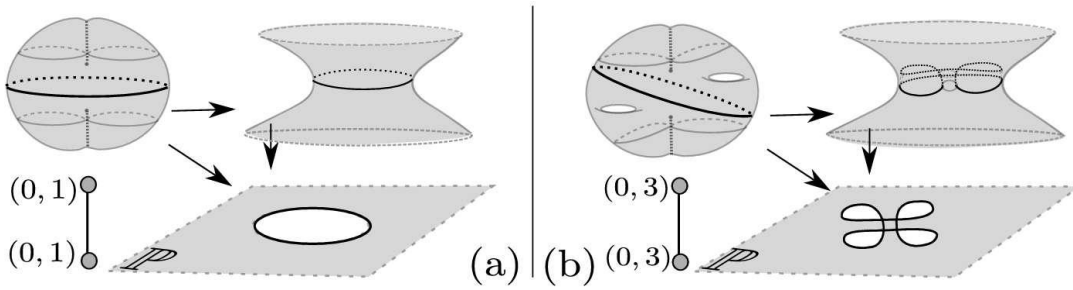
Exemplo 5.2. A Figura 24 exhibe duas aplicações de dobra a partir de superfícies fechadas ao $\mathbb{P}$, onde $P > 0$:

Figura 23 – Exemplos de grafos de aplicações estáveis com $\star$ -laços.



Fonte: Retirado de (3).

Figura 24 – Exemplos de aplicações de dobra e seus grafos.



Fonte: Retirado de (3).

- (a) Aplicação da garrafa de Klein a $\mathbb{P}$, com uma única curva singular e nenhum ponto duplo, cujo grafo é do tipo $\mathcal{G}_{(0,2)}^0(2,1)$. Como citado na Figura 22, a garrafa de Klein $\mathbb{K}$ é a soma conexa de dois planos projetivos $\mathbb{P}$, de onde o gênero de $\mathbb{K}$ é 2;
- (b) Aplicação de uma superfície dada pela soma conexa do bitoro e uma garrafa de Klein a $\mathbb{P}$, com grafo de tipo $\mathcal{G}_{(0,6)}^0(2,1)$. Temos que $\mathbb{P} \# \mathbb{T} = \mathbb{P} \# \mathbb{P} \# \mathbb{P}$, de onde

$$\mathbb{K} \# 2\mathbb{T} = 2\mathbb{P} \# 2\mathbb{T} = 6\mathbb{P}.$$

Esta aplicação possui uma única curva singular e quatro pontos duplos. ■

Denotamos por D_P uma região simplesmente conexa (homeomorfa a um disco) em $\mathbb{P}$, com fronteira γ , e por $F_P = \mathbb{P} \setminus D_P$ uma faixa de Möbius, que é o fecho do complemento de D_P em $\mathbb{P}$. Observe que $\gamma = D_P \cap F_P$. Então, podemos distinguir entre estes dois casos possíveis de contorno aparente.

Definição 5.3. Dizemos que uma aplicação estável $f : M \rightarrow \mathbb{P}$ tem **contorno aparente planar** quando existe uma aplicação estável $h : M \rightarrow \mathbb{P}$ com $h(\Sigma h) \subset D_P$, onde os conjuntos singulares Σf e Σh são difeomorfos em M e os contornos aparentes $\mathcal{B}f$ e $\mathcal{B}h$ são difeomorfos em $\mathbb{P}$. Caso contrário, dizemos que f tem **contorno aparente não planar**. Quando $h(M) \subset D_P$, dizemos que f é uma **aplicação estável planar**.

Observação 5.4. A Figura 23-(b) exibe uma aplicação estável planar $\mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ com três cúspides, que pode ser vista, localmente, como uma aplicação para o plano (veja (22)). Uma forma de modificar o número de cúspides de aplicações estáveis $\mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ consiste em tomar um caminho no espaço de aplicações $\mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ e fazer transições pelos estratos convenientes de codimensão 1. Mas, todas tais transições alteram o número de cúspides por dois (Ver Tabela 2). Pela Figura 23-(b), concluímos que não existem aplicações de dobra planares a partir do plano projetivo. Além disso, podemos afirmar que qualquer curva singular possuindo uma pequena vizinhança homeomorfa à faixa de Möbius tem pelo menos um ponto de cúspide, logo, para qualquer aplicação de dobra temos que $S = 0$. Por simplicidade, denotaremos o tipo de grafo $\mathcal{G}_{(T,P)}^0(V, E)$ por $\mathcal{G}_{(T,P)}(V, E)$.

5.1 CIRURGIAS DE APLICAÇÕES E GRAFOS

Classicamente, cirurgias são uma técnica de obter novas variedades a partir de uma variedade dada. A saber, seja M uma variedade de dimensão $m = p + q$. É possível construir um mergulho $\mathbb{S}^p \times D^q \rightarrow M$, sendo $\mathbb{S}^p$ e D^q a esfera p -dimensional e o disco q -dimensional, respectivamente. Removendo de M o interior da imagem deste mergulho e unindo $D^{p+1} \times \mathbb{S}^{q-1}$ ao longo de $\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^{q-1}$, que é o bordo de $\mathbb{S}^p \times D^q$, obtém-se uma nova m -variedade M' .

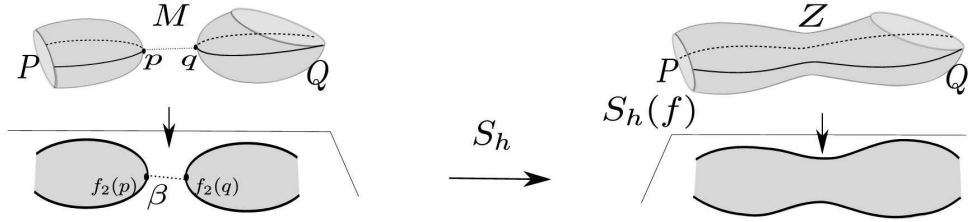
A visualização deste processo em dimensões menores é mais fácil. Por exemplo, dada uma esfera $\mathbb{S}^2$, temos duas opções para cirurgias, construindo mergulhos $\mathbb{S}^1 \times D^1 \rightarrow \mathbb{S}^2$ ou $\mathbb{S}^0 \times D^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ (dois discos bidimensionais). No primeiro caso, removemos um “cilindro” ao longo do equador da esfera e colamos $\mathbb{S}^0 \times D^2$ ao longo dos bordos, resultando em duas esferas disjuntas. No segundo caso removemos dois discos da esfera (uma calota superior e outra inferior): se a orientação do mergulho nos bordos for igual, então colamos o cilindro $\mathbb{S}^1 \times D^1$ sem “torção” resultando em um toro $\mathbb{T}$; se a orientação do mergulho nos bordos for inversa, colamos o cilindro $\mathbb{S}^1 \times D^1$ com “torção”, resultando em uma garrafa de Klein $\mathbb{K}$.

Olhemos para o processo induzido, a partir de uma cirurgia, nas aplicações entre superfícies visando estabelecer uma técnica análoga a esta para os grafos. Observamos que quando duas aplicações podem ser obtidas uma da outra aplicando transições, estas estão na mesma classe de homotopia. As cirurgias são uma forma de obter novas aplicações em classes de homotopia diferentes.

Definição 5.5. As principais cirurgias de aplicações estão descritas abaixo:

- (1) **Cirurgia Horizontal de Aplicações Estáveis (C_h):** Dada uma aplicação estável l entre duas superfícies M e N , uma **ponte** é um arco mergulhado β em N que intersecta o contorno aparente em seus dois pontos finais (e em nenhum outro lugar), assim como na Figura 25. A aplicação estável l_β é construída como segue. A ponte intersecta $\mathcal{B}l$ em seus pontos finais que denotamos por $l(p)$ e $l(q)$, onde p e q são

Figura 25 – Cirurgia Horizontal Local.

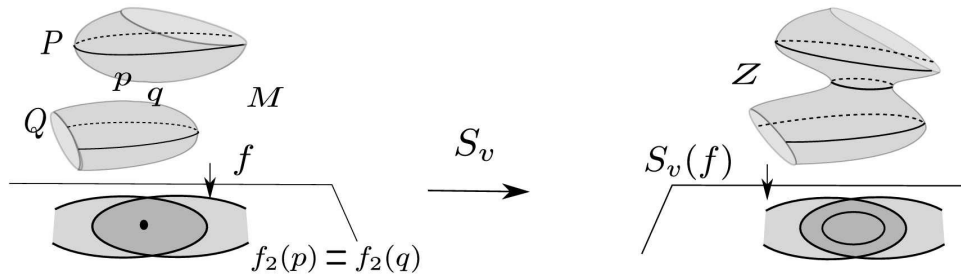


Fonte: Retirado de (3).

pontos singulares de l . Escolha pequenos discos em M centrados em p e q e substitua seus interiores por um tubo (i.e., um anel), conectando estes dois pequenos discos. Como ilustrado na Figura 25, a aplicação l pode ser estendida sobre o tubo para resultar na aplicação estável l_β . Em particular, quando M é a união disjunta de superfícies P e Q e f e g denotam as restrições de l a P e a Q , respectivamente, com $p \in P$ e $q \in Q$, chamamos a aplicação estável l_β a **soma horizontal** de f e g e a denotamos por $f +_h g$. Em outras palavras $l = f \cup g$ e $(f \cup g)_\beta = f +_h g$.

- ii) **Cirurgia Vertical de Aplicações Estáveis (C_v):** É feita identificando dois pequenos discos no domínio (quando existirem), ambos positivos ou ambos negativos cujas imagens em N coincidem (veja a Figura 26), quando existirem discos com essa propriedade. Estes discos são substituídos por um tubo que é levado ao plano, com uma curva singular pelo meio do tubo. Esta cirurgia adiciona uma curva disjunta mergulhada ao contorno aparente. A aplicação estável l_β é dita a **soma vertical** de f e g e a denotamos por $f +_v g$.

Figura 26 – Cirurgia Vertical Local.

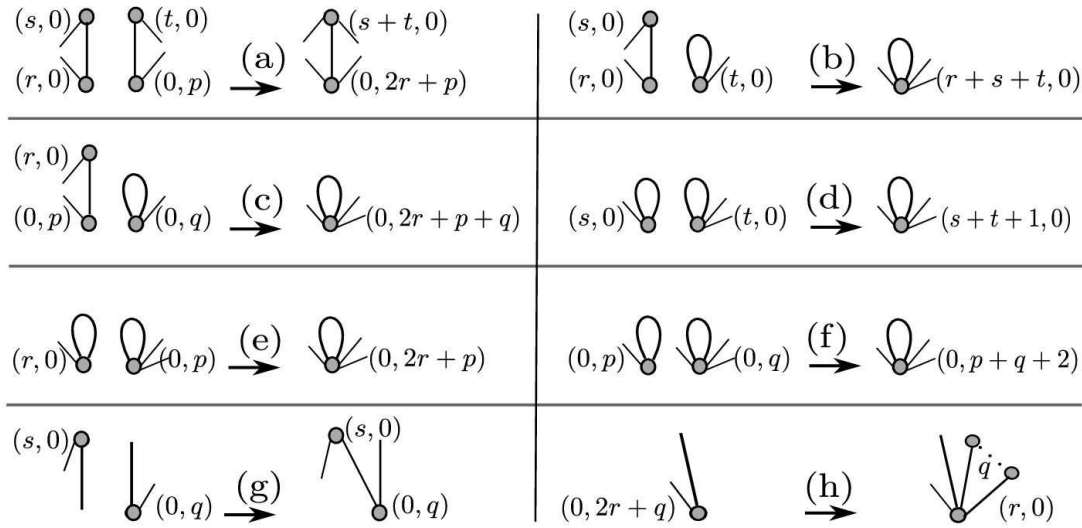


Fonte: Retirado de (3).

As cirurgias de aplicações estáveis definidas acima induzem, de forma natural, cirurgias entre os grafos correspondentes.

1. A soma conexa de duas regiões com respectivos gêneros g_1 e g_2 produz uma região conexa com gênero $g_1 + g_2$.

Figura 27 – Exemplos de Cirurgias de Grafos.



Fonte: Retirado de (3)

2. A soma conexa de uma região orientada com gênero t e uma região não orientada com gênero p produz uma região não orientada com gênero $2t + p$.

Então, definiremos algumas cirurgias naturais entre grafos. Tais cirurgias podem ser realizadas tanto identificando uma das arestas (e seus respectivos vértices) do grafo $\mathcal{G}_1$ com uma aresta (e seus respectivos vértices) do grafo $\mathcal{G}_2$, quanto introduzindo uma nova aresta que coneta um vértice do grafo $\mathcal{G}_1$ com um vértice do grafo $\mathcal{G}_2$.

Definição 5.6. Uma **cirurgia horizontal** de dois grafos é feita identificando uma aresta de um grafo com uma aresta do outro grafo. Isto gera um novo grafo e pode ser feita em uma das seguintes formas:

1. A identificação de duas arestas, ambas terminando em vértices diferentes (isto é, nenhuma dessas é um laço) produz uma aresta que também termina em vértices diferentes. Os pesos dos vértices envolvidos são adicionados de acordo com as seguintes regras (veja Figura 27-(a)):

- (i) $(s, 0) + (t, 0) = (s + t, 0)$;
- (ii) $(0, p) + (0, q) = (0, p + q)$;
- (iii) $(r, 0) + (0, p) = (0, 2r + p)$.

2. A identificação de uma aresta que termina em vértices diferentes com um laço gera um laço. O peso do vértice correspondente também seguem as regras acima (veja as Figuras 27-(b) e 27-(c)).

3. A identificação de dois laços produz um laço (veja as Figuras 27-(d), 27-(e) e 27-(f)), onde os pesos dos vértices envolvidos são adicionados de acordo com as seguintes regras:

$$(i) \quad (s, 0) + (t, 0) = (s + t + 1, 0);$$

$$(ii) \quad (0, p) + (0, q) = (0, p + q + 2).$$

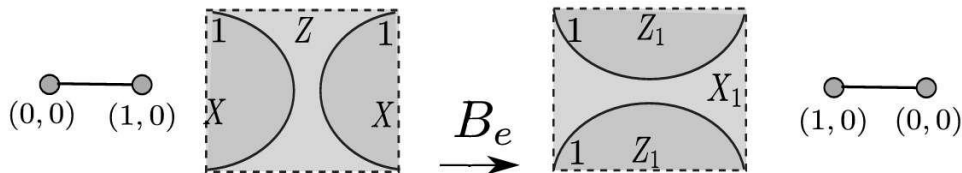
Definição 5.7. Uma cirurgia vertical de grafos consiste em unir dois vértices de grafos diferentes com uma aresta (veja a Figura 27-(g)).

5.2 EFEITOS DAS TRANSIÇÕES E CIRURGIAS

Nesta seção descreveremos como obter novas aplicações estáveis aplicando transições de codimensão 1 convenientes ou cirurgias para outras aplicações estáveis. Os efeitos das transições Lábios e Bicos discutidas anteriormente ainda se aplicam neste caso. Então, consideraremos aqui somente um novo tipo de transição Bicos:

B_e : não afeta o número de componentes conexas nos conjuntos singular e regular, mas muda o peso de dois vértices conectados pela aresta que corresponde a curva singular na qual a transição é feita.

Figura 28 – Transição B_e .



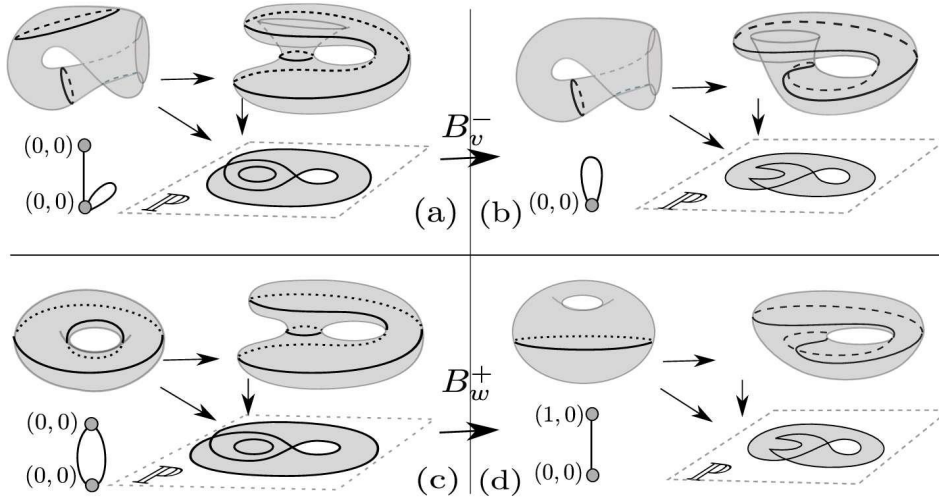
Fonte: Retirado de (3).

O novo tipo de transição bicos está localmente ilustrado na Figura 28, onde Z e Z_1 denotam (localmente) as regiões regulares onde as transições são feitas e o número 1 representa o número de curvas singulares.

Exemplo 5.8. Na Figura 29 exibimos quatro aplicações estáveis, com seus grafos correspondentes, ilustrando a ação das transições bicos que mudam os pesos e vértices do grafo:

- (a) Aplicação da garrafa de Klein em $\mathbb{P}$ com grafo de tipo $\mathcal{G}_{(0,0)}(2,2)$, com duas curvas singulares.

Figura 29 – Exemplos de transições Bicos $\mathbf{B}_v^-$ e $\mathbf{B}_w^+$.



Fonte: Retirado de (3).

- (b) Aplicação da garrafa de Klein em $\mathbb{P}$ com grafo de tipo $\mathcal{G}_{(0,0)}(1,1)$. Observamos que, neste caso, a única curva singular não torna a região regular desconexa. Esta aplicação possui dois pontos duplos e duas cúspides e pode ser obtido aplicando uma transição bicos $\mathbf{B}_v^+$ à aplicação (a).
- (c) Aplicação do toro em $\mathbb{P}$ com grafo de tipo $\mathcal{G}_{(0,0)}(2,2)$. Esta aplicação tem dois pontos duplos e duas curvas singulares decompondo o toro em dois cilindros.
- (d) Aplicação do toro em $\mathbb{P}$ com grafo de tipo $\mathcal{G}_{(1,0)}(2,1)$. A curva singular separa um disco e um toro com um buraco. Esta aplicação tem dois pontos duplos e duas cúspides e pode ser obtido aplicando uma transição bicos $\mathbf{B}_w^+$ à aplicação (c). ■

Lembramos que as transições bicos e lábios sobre o plano alteram o número de componentes singulares (veja (12)) e, portanto, o número de arestas no grafo (veja Figura 29). Além disso, elas também podem alterar o número de vértices, assim como seus pesos correspondentes.

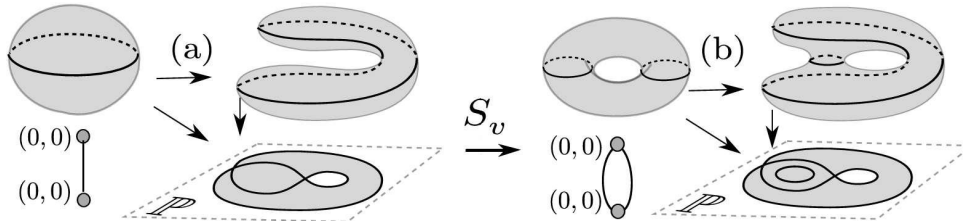
No caso de aplicações com contradomínio em $\mathbb{P}$, as transições bicos $\mathbf{B}_e$ podem alterar o gênero das regiões afetadas sem mudar o número de curvas singulares e componentes regulares. Em tal caso, somente os pesos dos dois vértices afetados são alterados, sem alterar a soma total dos pesos.

Quando M é uma superfície orientável conexa, a aplicação $f + g$ obtida por meio de cirurgias é definida numa superfície conexa Z cujo gênero é $g(Z) = g(M) + 1$, se Z é orientável e $g(Z) = 2g(M) + 2$, caso contrário. Se M é uma superfície não orientável, então

$$g(Z) = g(M) + 2.$$

Uma cirurgia vertical adiciona uma nova componente conexa ao conjunto singular (veja a Figura 30). No caso do grafo de uma cirurgia horizontal, o número de componentes conexas do conjunto singular aumenta em 1 se os pontos finais p e q estão na mesma componente conexa do conjunto singular, ou diminui em 1 se p e q estão em componentes conexas diferentes do conjunto singular.

Figura 30 – Efeito da Cirurgia Vertical no Contorno Aparente.



Fonte: Adaptado de (3).

Dado um grafo bipartido do tipo $\mathcal{G}_{(T,P)}(V, E)$ com pesos (t_j, p_j) em seus vértices, podemos atribuir sinais $\pm$ à eles e denotar por V^+ (respectivamente V^-) o número total de vértices com sinal $+$ (respectivamente $-$), por T^+ (respectivamente T^-) a soma de todos pesos t_j correspondentes a vértices com sinal positivo (respectivamente com sinal negativo) e por P^+ (respectivamente P^-) a soma de todos pesos p_j correspondentes a vértices com sinal positivo (respectivamente com sinal negativo).

Definição 5.9. Um grafo bipartido $\mathcal{G}_{(T,P)}(V, E)$ é dito **equilibrado** quando satisfaz

$$\mathcal{D} = (V^+ - V^-) - (W^+ - W^-) = 0$$

Teorema 5.10. ((3), p.225) *Um grafo bipartido $\mathcal{G} \in \mathcal{G}_{(T,0)}(V, E)$ está associado a uma aplicação dobra de uma superfície fechada e orientável M para $\mathbb{R}^2$ (consequentemente de grau 0 sobre $\mathbb{S}^2$) se, e somente se, é equilibrado.*

Demonstração. Veja (5), Teoremas 3.1, 4.2 e 6.2. Compondo a aplicação $M \rightarrow \mathbb{R}^2$ que realiza o grafo com uma projeção estereográfica $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, obtemos uma aplicação de grau 0 sobre $\mathbb{S}^2$. ■

Do Teorema 5.10 obtemos o seguinte corolário.

Corolário 5.10.1. ((3), p.225) *Um grafo bipartido $\mathcal{G} \in \mathcal{G}_{(T,0)}(V, E)$ está associado a uma aplicação de dobra planar de uma superfície fechada e orientável M ao plano projetivo se, e somente se, é equilibrado.*

5.3 REALIZAÇÃO DE GRAFOS PRÉ-FIXADOS

Agora, iremos determinar todos os grafos que podem ser associados a aplicações de superfícies fechadas a $\mathbb{P}$. Para este propósito, definimos algumas cirurgias convenientes.

Cirurgia Möbius-Disco (MD, ou C_{md}): Seja $h : M \rightarrow \mathbb{P}$ uma aplicação de dobra com contorno aparente planar, como na Definição 5.3, cujo grafo associado é do tipo $\mathcal{G}_{(T,P)}(V, E)$. Escolhemos um ponto y no interior de F_P na imagem de h , quando existir. Suponha que sua imagem inversa $h^{-1}(y)$ possui Q pontos em M , então $h^{-1}(F_P)$ é a união de Q faixas de Möbius mergulhadas em M que não intersectam Σh . Denotamos por $\gamma_1, \dots, \gamma_Q$ os componentes de bordo de $h^{-1}(F_P)$ que são imagens inversas de y por h .

Podemos construir uma aplicação planar a partir de h como segue:

Ao remover o interior de Q faixas de Möbius em M obtemos uma nova superfície M_1 com Q componentes de bordo e gênero

$$g(M_1) = g(M) - Q,$$

no caso em que M_1 é não orientável, ou

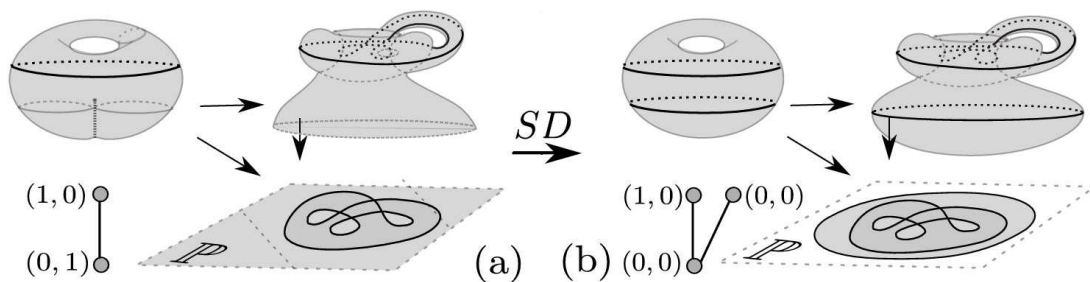
$$g(M_1) = \frac{g(M) - Q}{2},$$

caso contrário. Agora, colando um disco ao longo de cada componente de bordo, obtemos uma superfície fechada M_0 com gênero $g(M_1) = g(M_0)$.

A Figura 27-(h) ilustra a ação de uma cirurgia Möbius-Disco em um grafo. Observamos que a cirurgia resulta em uma mudança de $(0, 2r + q)$ para $(r, 0)$ no peso de um dos vértices v do grafo. Também adiciona q vértices extremos (folhas) de peso $(0, 0)$, todas conectadas a v .

Estendendo a restrição h_1 da aplicação h a M_1 sobre os discos B_j , obtemos uma nova aplicação (não necessariamente estável) $\phi : M_0 \rightarrow \mathbb{P}$, com $\gamma_j \in \Sigma\phi$ ($j \in \{1, \dots, Q\}$). Agora, uma perturbação conveniente (por homotopia) de ϕ sobre algumas vizinhanças das curvas γ_j , resulta em uma aplicação de dobra planar $\psi_1 : M_0 \rightarrow \mathbb{P}$, onde as curvas singulares ψ_1 e h_1 restritas ao interior de M_1 coincidem (a menos de difeomorfismo) e o conjunto $\{\psi(\gamma_1), \dots, \psi(\gamma_Q)\} \subset D_P$ consiste de curvas simples e disjuntas. Uma aplicação de dobra $\psi : M_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$, agora, pode ser definida como a composição $\psi = \ell \circ \psi_1$, onde $\ell : D_P \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um mergulho.

Figura 31 – Exemplo de Cirurgia Möbius-Disco (**Strip-Disc**).



Fonte: Adaptado de (3).

Observação 5.11. O resultado da cirurgia Möbius-Disco, definida acima, no grafo associado consiste em substituir o peso $(0, p_j)$ por $(r_j, 0)$, onde $p_j = 2r_j + q_j \geq 0$ e

$$Q = \sum_{i=1}^V q_j,$$

conectando q_j vértices extremos (isto é, vértices de grau 1) com uma única aresta e pesos $(0, 0)$ a cada vértice v_j (veja as Figuras 27-(h) e 31).

Definição 5.12. Dizemos que dois pares $(t_1, p_1), (t_2, p_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ são **equivalentes** quando satisfazem uma das seguintes condições:

- (1) $t_1 = t_2 = 0$ e $p_1 = p_2$, ou
- (2) $t_1, t_2 \neq 0$ e $2p_1 + t_1 = 2p_2 + t_2$.

Consideramos, agora, grafos com pesos (t_j, p_j) em seus vértices.

Definição 5.13. Dizemos que dois grafos são **peso-equivalentes** quando são isomorfos como grafos e os vértices têm pesos equivalentes, no sentido definido acima.

Definição 5.14. Um grafo $\mathcal{G}_{(T,P)}(V, E)$ é dito um **grafo quasi-equilibrado** quando é peso-equivalente a algum grafo equilibrado.

Observação 5.15. De forma direta, qualquer grafo equilibrado também é quasi-equilibrado, uma vez que todo grafo é isomorfo e peso-equivalente a si mesmo. Também temos que, dado um grafo quasi-equilibrado $\mathcal{G} \in \mathcal{G}_{(T,P)}(V, E)$, segue do item (2) da Definição 5.12 que qualquer grafo equilibrado peso-equivalente a este tem forma $\mathcal{G}_{(T-k, P-2k)}(V, E)$, para algum $k \in \mathbb{N}$.

5.3.1 Realização de Árvores Quasi-Equilibradas

Definição 5.16. Um grafo com uma única aresta é dito **irredutível**. Um grafo do tipo $\mathcal{G}_{(T,P)}(2, 1)$ é dito uma **árvore irredutível**.

Observe que a soma horizontal ou vertical de dois grafos equilibrados resulta em um grafo equilibrado. A soma horizontal de duas árvores irredutíveis resulta em uma árvore irredutível e satisfaz a relação

$$C_h(\mathcal{G}_{(T_1, P_1)}(2, 1), \mathcal{G}_{(T_2, P_2)}(2, 1)) = \mathcal{G}_{(T_1+T_2, P_1+P_2)}(2, 1).$$

A soma vertical, entretanto, não gera árvores irredutíveis por adicionar uma nova aresta.

Exibimos na Figura 32 quatro exemplos de aplicações de dobra em $\mathbb{P}$, associadas a árvores irredutíveis, que podem ser obtidas por somas horizontais conexas de aplicações estáveis. Precisamente:

- (a) A aplicação resultante tem grafo do tipo $\mathcal{G}_{(2t,0)}(2,1)$, é uma aplicação de dobra do $2t$ -toro com uma única curva singular e $4t$ pontos duplos, separando em duas cópias dos t -toros com um buraco. Esta aplicação pode ser obtida a partir de $t - 1$ cirurgias horizontais entre t aplicações de dobra do bitoro em $\mathbb{P}$.
- (b) A aplicação resultante tem grafo do tipo $\mathcal{G}_{(0,2p)}(2,1)$, é uma aplicação de dobra do $2p\mathbb{P}$ em $\mathbb{P}$ com uma única curva singular e $2p - 2$ pontos duplos, separando em duas cópias do $p\mathbb{P}$ com um buraco. Esta aplicação pode ser obtida a partir de $p - 1$ cirurgias horizontais entre p aplicações de dobra da garrafa de Klein em $\mathbb{P}$, como na Figura 24-(a).
- (c) A aplicação resultante tem grafo do tipo $\mathcal{G}_{(0,3k)}(2,1)$, é uma aplicação de dobra do $3k\mathbb{P}$ em $\mathbb{P}$ com uma única curva singular e $4k$ pontos duplos, separando em um k -toro com um buraco e um $k\mathbb{P}$ com um buraco. Esta aplicação pode ser obtida realizando $k - 1$ cirurgias horizontais entre k aplicações de dobra da soma conexa de um toro com um plano projetivo em $\mathbb{P}$, como exibido na Figura 31.
- (d) A aplicação resultante tem grafo do tipo $\mathcal{G}_{(k+t,k+2t)}(2,1)$, é uma aplicação de dobra do $(3k + 4t)\mathbb{P}$ em $\mathbb{P}$ com uma única curva singular e $4(k + t)$ pontos duplos, separando em um $k + t$ -toro com um buraco e um $(k + 2t)\mathbb{P}$ com um buraco. Esta aplicação pode ser obtida pela cirurgia horizontal entre as aplicações de dobra (a) e (c), descritas anteriormente.

Dado um grafo de tipo $\mathcal{G}_{(T,P)}(V, E)$, com $P = 2R^\pm + Q^\pm$, ao trocar o peso $(0, 2r^\pm + q^\pm)$ no vértice $v^\pm$ pelo peso $(r^\pm, 0)$ e conectando $q^\pm$ vértices de grau 1 ao vértice $v^\pm$ obtemos um grafo do tipo $\mathcal{G}_{(T+R,0)}^e(V + Q, E + Q)$.

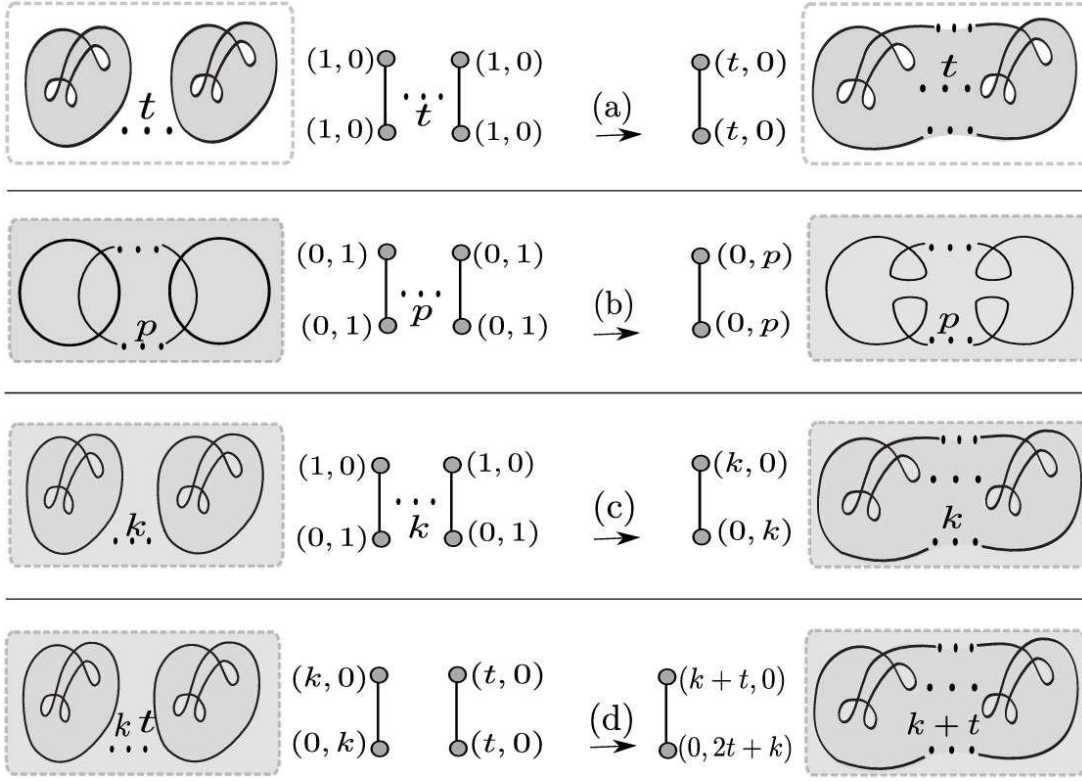
Definição 5.17. Os grafos de tipo $\mathcal{G}_{(T+R,0)}^e(V + Q, E + Q)$ obtidos, como descrito acima, do grafo $\mathcal{G} \in \mathcal{G}_{(T,P)}(V, E)$, trocando pesos por vértices, são chamados de **grafos expandidos**.

Lema 5.18. ((3), p.235) *Uma árvore irredutível do tipo $\mathcal{G}_{(T,P)}(2,1)$ é o grafo de uma aplicação de dobra $f : M \rightarrow \mathbb{P}$ com contorno aparente planar se, e somente se, é um grafo quasi-equilibrado.*

A superfície M é orientável se, e somente se, $P = 0$. Ainda, o gênero de M é dado por T no caso em que M é orientável e por $2T + P$ caso contrário.

Demonstração. Suponha que $\mathcal{T} \in \mathcal{G}_{(T,P)}(2,1)$ é a árvore de uma aplicação de dobra $f : M \rightarrow \mathbb{P}$ com contorno aparente planar. Seja h uma aplicação de dobra homotópica a f tal que $h(\Sigma h) \subset D_P$ (Disco contido em $\mathbb{P}$). Denotamos por M^+ e M^- as duas regiões regulares de h e por $Q^\pm$ o número de pré-imagens (por h) de $y \in F_P$ em $M^\pm$ correspondendo ao vértice $v^\pm$. Denotamos por $R^\pm$ o gênero das regiões regulares de $M^\pm$,

Figura 32 – Exemplos de somas horizontais de grafos irredutíveis.



Fonte: Retirado de (3).

o complemento de $Q^\pm$ faixas de Möbius em $M^\pm$. Então o peso $(0, P^\pm)$ em $v^\pm$ satisfaz $P^\pm = 2R^\pm + Q^\pm$.

Então podemos aplicar uma cirurgia Möbius-Disco para substituir cada uma das $Q^\pm$ faixas de Möbius por discos, cujo bordo é uma curva singular para a nova aplicação de dobra $h : M_0 \rightarrow \mathbb{P}$, onde M_0 é uma superfície orientável, com grafo expandido do tipo $\mathcal{G}_{(T+R,0)}^e(2 + Q, 1 + Q)$, tendo $V_0^- = Q^+ + 1$ vértices de sinal negativo e $V_0^+ = Q^- + 1$ vértices de sinal positivo, correspondendo a pesos $T_0^\pm = T^\pm + R^\pm$. Segue do Teorema 5.10 que este grafo deve satisfazer

$$(V_0^+ - V_0^-) - (T_0^+ - T_0^-) = 0. \quad (5.1)$$

Substituindo $V_0^\pm$ e $T_0^\pm$ na equação (5.1) resulta em

$$\begin{aligned} ((Q^- + 1) - (Q^+ + 1)) - ((T^+ + R^+) - (T^- + R^-)) &= 0 \\ \implies (Q^- + 1 - Q^+ - 1) - (T^+ + R^+ - T^- - R^-) &= 0 \\ \implies (Q^+ - Q^-) + (T^+ - T^-) + (R^+ - R^-) &= 0. \end{aligned}$$

Isto posto, temos que o grafo é quasi-equilibrado. Ainda mais, caso $R^+ = R^- = 0$, o grafo é equilibrado.

Se $\mathcal{T}$ é um grafo quasi-equilibrado, então existem cinco casos diferentes para os pares de peso em seus dois vértices:

1. $(t, 0), (t, 0)$: O grafo pode ser realizado como na Figura 32-(a).
2. $(0, p), (0, p)$: O grafo pode ser realizado como na Figura 32-(b).
3. $(k, 0), (0, k)$: O grafo pode ser realizado como na Figura 32-(c).
4. $(0, p), (0, 2q + r)$, com $p = q + r$: O grafo pode ser realizado como a soma conexa de duas aplicações de dobra, uma com pesos $(0, q), (q, 0)$ e a outra com pesos $(0, r), (0, r)$.
5. $(t, 0), (0, 2q + r)$, com $t = q + r$: O grafo pode ser realizado como a soma conexa de duas aplicações de dobra, uma com pesos $(q, 0), (q, 0)$ e a outra com pesos $(r, 0), (0, r)$.

■

Agora, estenderemos este resultado a árvores com número arbitrário de vértices.

Lema 5.19. ((3), p.235) *Seja M uma superfície fechada. Toda árvore $\mathcal{T} \in \mathcal{G}_{(T,P)}(V, V-1)$ associada a uma aplicação de dobra $M \rightarrow \mathbb{P}$ com contorno aparente planar é quasi-equilibrada.*

Demonstração. A demonstração é análoga à demonstração do Lema 5.18. Suponha que $\mathcal{T} \in \mathcal{G}_{(T,P)}(V, V-1)$ é a árvore associada à aplicação $f : M \rightarrow \mathbb{P}$, com sinais $+$ e $-$ em seus vértices e contorno aparente planar. Seja h uma aplicação de dobra homotópica a f tal que $h(\Sigma h) \subset D_P$. Denotamos por $M^\pm$ a união das regiões regulares de h correspondendo aos $V^\pm$ vértices do grafo. Para $y \in F_P$, denotamos por $Q^\pm$ o número de pré-imagens de y em $M^\pm$ e $R^\pm$ o gênero da região orientável $M^\pm$, complementar às $Q^\pm$ faixas de Möbius em $M^\pm$. Logo, o peso $P^\pm$ satisfaz $P = 2R^\pm + Q^\pm$.

Agora, podemos aplicar a cirurgia Möbius-Disco para substituir cada uma das $Q^\pm$ faixas de Möbius por um disco, obtendo uma aplicação de dobra $f_0 : M_0 \rightarrow \mathbb{P}$, associada ao grafo expandido $\mathcal{G}' \in \mathcal{G}_{(T+R,0)}^e(V+Q, V-1+Q)$, onde M_0 é orientável. Seu grafo terá $V_0^+ = Q^- + V^+$ vértices positivos e $V_0^- = Q^+ + V^-$ vértices negativos com pesos correspondentes $T_0^\pm = T^\pm + R^\pm$. Segue do Teorema 5.10 que este grafo satisfaz

$$(V_0^+ - V_0^-) - (T_0^+ - T_0^-) = 0. \quad (5.2)$$

Substituindo os valores de $V_0^\pm$ e $T_0^\pm$ na equação (5.2), obtemos

$$\begin{aligned} ((Q^- + V^+) - (Q^+ + V^-)) - ((T^+ + R^+) - (T^- + R^-)) &= 0 \\ \implies (Q^- + V^+ - Q^+ - V^-) - (T^+ + R^+ - T^- - R^-) &= 0 \\ \implies (V^+ - V^-) - (Q^+ - Q^-) - (T^+ - T^-) - (R^+ - R^-) &= 0. \end{aligned}$$

Por fim, segue dessa igualdade que o grafo é quasi-equilibrado. Particularmente, quando $R^+ = R^- = 0$ o grafo é equilibrado. ■

O Lema 5.19 nos diz que toda árvore associada a uma aplicação de dobra planar $M \rightarrow \mathbb{P}$ é quasi-equilibrada. Vejamos a afirmação contrária, isto é, que toda árvore quasi-equilibrada é o grafo de uma aplicação de dobra planar $M \rightarrow \mathbb{P}$.

Lema 5.20. ((3), p.236) *Seja M uma superfície fechada. Toda árvore $\mathcal{T} \in \mathcal{G}_{(T,P)}(V, V-1)$ quasi-equilibrada é o grafo de uma aplicação $M \rightarrow \mathbb{P}$ com contorno aparente planar. A superfície M é orientável, com gênero T , se e somente se, $P = 0$.*

Demonstração. O caso $P = 0$ segue do Corolário 5.10.1. Logo, podemos supor $P > 0$. Suponha que $\mathcal{T} \in \mathcal{G}_{(T,P)}(V, V-1)$ seja uma árvore quasi-equilibrada com sinais $+$ e $-$. Então há uma árvore equilibrada $\mathcal{T}' \in \mathcal{G}_{(T+R,Q)}(V, V-1)$ satisfazendo

$$(V^+ - V^-) - (T^+ - T^-) - (R^+ - R^-) - (Q^+ - Q^-) = 0, \quad (5.3)$$

onde os pesos $(0, p_j^\pm)$ nos vértices $v_j^\pm$ satisfazem $p_j^\pm = 2r_j^\pm + q_j^\pm$, com $r_j^\pm, q_j^\pm \geq 0$ são números inteiros tais que $R^\pm = \sum_{j=1}^{V^\pm} r_j$, $Q^\pm = \sum_{j=1}^{V^\pm} q_j$ e $P^\pm = 2R^\pm + Q^\pm$.

Agora, podemos construir uma árvore auxiliar $\mathcal{T}'' \in \mathcal{G}_{(T_0,0)}(V_0, V_0-1)$ como segue: Mudamos o peso $(0, p_j^\pm)$ do vértice $v_j^\pm$ por $(r_j^\pm, 0)$ e conectamos $q_j^\mp$ vértices extremos com pesos $(0, 0)$ ao vértice $v_j^\pm$ (veja a Figura 27-(h)). Então $T_0^\pm = T^\pm + R^\pm$, $V_0^\pm = V^\pm + Q^\mp$ e da Equação (5.3) eles satisfazem $(V_0^+ - V_0^-) - (T_0^+ - T_0^-) = 0$. Ou seja, $\mathcal{T}''$ é uma árvore equilibrada (com $P_0 = 0$). Então, a partir do Corolário 5.10.1 temos que existe uma aplicação de dobra $h : M_0 \rightarrow \mathbb{P}$, onde M_0 é uma superfície orientada com gênero $g(M) = T_0^+ + T_0^-$, cujo grafo é $\mathcal{T}''$. Observe que a região regular da aplicação h , correspondente a cada um dos novos vértices extremos $Q^\pm$ em $\mathcal{T}''$, é homeomorfa a um disco cujo bordo é uma curva singular que corresponde a uma aresta extrema.

Agora, construímos uma nova aplicação de dobra $g : M \rightarrow \mathbb{P}$ com o grafo $\mathcal{G}$ do tipo $\mathcal{G}_{(T,P)}(V, E)$ da seguinte forma: Removendo os discos D_k , $k \in \{1, \dots, Q_k^\pm\}$, com $Q^\pm = Q_j^\pm$, cujos bordos são as curvas singulares correspondentes às arestas extremas com peso $(0, 0)$, resulta em uma superfície M_0 com $Q^+ + Q^-$ componentes conexas α_j , $j \in \{1, \dots, Q\}$, em seu bordo. Agora, colando uma faixa de Möbius ao longo de cada um desses componentes de bordo, obtemos uma superfície fechada não orientada M , com gênero (pelo Teorema 5.3)

$$g(M) = 2(1 - V + (V - 1) + T + R) + Q = 2T + (2R + Q) = 2T + P.$$

Agora podemos estender a aplicação de dobra g em cada uma das faixas de Möbius coladas, de forma que g e h coincidam em M_0 e k seja um mergulho de cada faixa de Möbius F_j em $\mathbb{P}$, conforme ilustrado na Figura 31. Obtivemos, portanto, uma aplicação de dobra $f : M \rightarrow \mathbb{P}$, cujo grafo coincide com $\mathcal{T}$. ■

A partir dos Lemas 5.19 e 5.20, podemos concluir que:

Teorema 5.21. ((3), p.237) *Seja M uma superfície fechada. Uma árvore $\mathcal{T} \in \mathcal{G}_{(T,P)}(V, V-1)$ é o grafo de uma aplicação de dobra $M \rightarrow \mathbb{P}$ com contorno aparente planar se, e somente se, é um grafo quasi-equilibrado.*

5.3.2 Realização de Grafos Quasi-Equilibradas com Ciclos

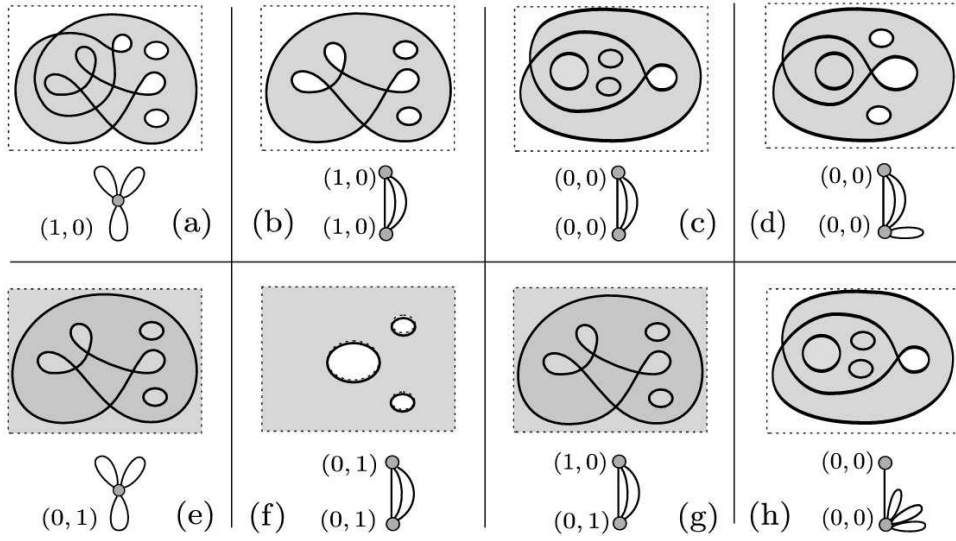
Veremos primeiro como realizar qualquer grafo com no máximo dois vértices. Os exemplos a seguir, ilustrados na Figura 33, correspondem a aplicações de dobras com contorno aparente planar:

1. O grafo $\mathcal{G}_{(0,1)}(1, 0)$ é realizado pela identidade do plano projetivo.
2. O grafo $\mathcal{G}_{(1,0)}(1, E)$ com $E = 1$ é realizado por uma aplicação de uma superfície que é a soma conexa de um toro com uma garrafa de Klein em $\mathbb{P}$, com uma curva singular e 8 pontos duplos no contorno aparente. Para implementar $E > 1$, basta aplicar $E - 1$ cirurgias verticais convenientes (veja Figura 33-(a)).
3. O grafo $\mathcal{G}_{(0,1)}(1, E)$ com $E = 1$ é realizado por uma aplicação de uma superfície que é a soma conexa de um toro com uma garrafa de Klein em $\mathbb{P}$, com uma curva singular e 4 pontos duplos no contorno aparente. Para obter $E > 1$, podemos aplicar $E - 1$ cirurgias verticais (veja Figura 33-(e)).
4. O grafo $\mathcal{G}_{(0,0)}(2, E)$ com $E = 1$ é realizado pela projeção da 2-esfera no plano com uma única curva singular, sem pontos duplos, nem cúspides, composta com qualquer mergulho do plano em $\mathbb{P}$. Para $E = 2$ pode ser realizado por uma aplicação de $\mathbb{S}^2$ em $\mathbb{P}$, com uma curva singular e 2 pontos duplos no contorno aparente. Para $E > 2$, precisamos apenas aplicar $E - 2$ cirurgias verticais convenientes (veja a Figura 33-(c) para superfícies orientadas ou as Figuras 33-(d) e 33-(h) para não orientadas).
5. O grafo $\mathcal{G}_{(2,0)}(2, E)$ com $E = 1$ é realizado por uma aplicação de $\mathbb{T}$ em $\mathbb{P}$, com duas curvas singulares e 2 pontos duplos no contorno aparente. Para $E > 1$, podemos aplicar $E - 1$ cirurgias verticais convenientes, conforme ilustrado na Figura 33-(b).
6. O grafo $\mathcal{G}_{(0,2)}(2, E)$ com $E = 1$ é realizado na Figura 24-(a). Para realizar este grafo com $E > 1$, podemos aplicar $E - 1$ cirurgias verticais como na Figura 33-(f).
7. O grafo $\mathcal{G}_{(1,1)}(2, E)$ com $E = 1$ é realizado na Figura 31-(b). O caso $E > 1$, é obtido como resultado de $E - 1$ cirurgias verticais convenientes (veja Figura 33-(g)).

Agora, aplicando cirurgias horizontais convenientes entre as aplicações acima e aquelas na Figura 27, podemos realizar qualquer grafo quase-equilibrado do tipo $\mathcal{G}_{(T,P)}(2, E)$ por uma aplicação de dobra com contorno aparente planar, onde cirurgias verticais convenientes podem adicionar um número arbitrário de arestas.

Como consequência, podemos afirmar o seguinte:

Figura 33 – Exemplos de grafos com, no máximo, dois vértices.



Fonte: Retirado de (3).

Teorema 5.22. ((3), p.238) *Qualquer grafo do tipo*

$$\mathcal{G}_{(0,1)}(1,0), \mathcal{G}_{(1,0)}(1,E), \mathcal{G}_{(0,1)}(1,E), \mathcal{G}_{(2,0)}(2,E), \mathcal{G}_{(1,1)}(2,E), \mathcal{G}_{(0,2)}(2,E) \text{ ou } \mathcal{G}_{(0,0)}(2,E)$$

é o grafo de uma aplicação de dobra com contorno aparente planar de uma superfície fechada M em $\mathbb{P}$.

Corolário 5.22.1. ((3), p.238) *Qualquer grafo quasi-equilibrado do tipo $\mathcal{G} \in \mathcal{G}_{(T,P)}(2,E)$ é o grafo de uma aplicação de dobra com contorno aparente planar de uma superfície fechada M em $\mathbb{P}$.*

Observe que um grafo bipartido $\mathcal{G} \in \mathcal{G}_{(T,P)}(V,E)$ é um grafo quasi-equilibrado se, e somente se, qualquer uma das suas árvores maximais é quasi-equilibrada.

Teorema 5.23. ((3), p.238) *Um grafo bipartido $\mathcal{G} \in \mathcal{G}_{(T,P)}(V,E)$ é o grafo de uma aplicação de dobra com contorno aparente planar de uma superfície fechada M em $\mathbb{P}$ se, e somente se, é quasi-equilibrado.*

Demonstração. A demonstração de que qualquer grafo bipartido quasi-equilibrado pode ser o grafo de uma aplicação de dobra de uma superfície fechada em $\mathbb{P}$ com contorno aparente planar é análoga à demonstração do Lema 5.19. Por outro lado, a demonstração de que qualquer grafo bipartido associado a uma aplicação de dobra $f : M \rightarrow \mathbb{P}$ com contorno aparente planar é quasi-equilibrado é análoga à demonstração do Lema 5.18. ■

Teorema 5.24. ((3), p.238) *Qualquer grafo quasi-equilibrado é o grafo de uma aplicação de dobra de uma superfície fechada em $\mathbb{P}$ com contorno aparente planar.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{G} \in \mathcal{G}_{(T,P)}(V, E)$ um grafo quasi-equilibrado com $\beta(\mathcal{G})$ ciclos e $\mathcal{T} \in \mathcal{G}_{(T,P)}(V, E - \beta(\mathcal{G}))$ uma árvore maximal quasi-equilibrada de $\mathcal{G}$. Pelo Lema 5.19, existe uma aplicação de dobra $f : M \rightarrow \mathbb{P}$ com contorno aparente planar associada a $\mathcal{T}$. Uma aplicação de dobra associada ao grafo $\mathcal{G}$ pode ser obtida aplicando $\beta(\mathcal{G})$ cirurgias verticais convenientes criando as curvas singulares correspondentes às $\beta(\mathcal{G})$ arestas removidas. ■

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi estudada a associação de grafos a aplicações $\mathcal{A}$ -estáveis e o processo de realização de grafos por aplicações $\mathcal{A}$ -estáveis, como tema principal. Primeiramente determinamos alguns invariantes para o caso entre superfícies fechadas e orientáveis, no Capítulo 4, e depois estendemos o estudo para o caso não-orientável, olhando para as aplicações sobre o espaço projetivo $\mathbb{P}$, no Capítulo 5.

Pelo Teorema de Classificação de Superfícies (Teorema 2.27), o caso de aplicações entre superfícies fechadas está completamente compreendido pelo escopo do texto aqui escrito. Os grafos associados a aplicações estáveis têm como função diferenciar duas aplicações que possuem contornos aparentes idênticos, além de codificar informações sobre os domínios das aplicações, como o gênero e a Característica de Euler.

Em (10) é discutido que o conjunto das aplicações estáveis, dependendo das variedades em questão, pode ser vazio — conclui-se, também, que o caso aqui estudado é muito bem comportado.

Este estudo pode ser estendido por alguns caminhos. *Exempli gratia*, é possível estender o estudo para imersões suaves no plano a partir de superfícies compactas, conexas e com bordo, como feito em (22); ou para aplicações do plano ao plano, como feito em (23). Ambos são extensões sobre as propriedades da superfície no domínio.

Outra forma de estender o estudo é alterando as dimensões das variedades envolvidas. Em (24) são estudados os invariantes locais para aplicações de superfícies no 3-espaço; em (25), os invariantes semi-locais para aplicações de 3-variedades no plano; e, em (26), os invariantes para aplicações de superfícies 3-variedades no 3-espaço.

A associação de grafos neste último caso difere da associação feita aqui em alguns pontos. Por exemplo, o conjunto singular Σf é composto de superfícies, então é necessário adicionar pesos às arestas do grafo, para representar o gênero dessas superfícies; além disso, os pesos dos vértices representa o número de componentes conexas do bordo da região regular correspondente.

APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÕES OMITIDAS

Neste apêndice estão reunidas todos os resultados omitidos e as demonstrações omitidas no Capítulo 3, resultados estes retirados de (10), exceto quando especificado o contrário.

Lema A.1. *Seja U um aberto de $\mathbb{R}^n$ e p um ponto em U . Sejam $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ aplicações suaves. Então $f \stackrel{k}{\sim} g$ em p se, e somente se,*

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f_j}{\partial x^\alpha}(p) = \frac{\partial^{|\alpha|} g_j}{\partial x^\alpha}(p)$$

para todo multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ com $|\alpha| \leq k$ e $1 \leq j \leq m$ onde f_j e g_j são as funções coordenadas de f e g , respectivamente, e $x_1, \dots, x_n$ são coordenadas em U .

Demonstração. Prosseguiremos por indução sobre k . Para $k = 1$, $f \stackrel{1}{\sim} g$ se, e somente se, $(df)_p = (dg)_p$ e isto acontece se, e somente se, as primeiras derivadas parciais de f em p são idênticas às primeiras derivadas parciais de g em p .

Suponha que o resultado vale para $k - 1$. Sejam $y_1, \dots, y_n$ as coordenadas de $\mathbb{R}^n$ em $U \times \mathbb{R}^n = TU$. Então $(df) : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m = T\mathbb{R}^m$ é dada por

$$(x, y) \mapsto (f(x), \bar{f}_1(y), \dots, \bar{f}_m(y))$$

onde

$$\bar{f}_j(x, y) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) y_k.$$

Analogamente para (dg) .

Por hipótese $(df) \stackrel{k-1}{\sim} (dg)$ em todo ponto $(p, v) \in \{p\} \times \mathbb{R}^n$. Por indução, as derivadas parciais de (df) em pontos $(p, v) \in \{p\} \times \mathbb{R}^n$ são iguais às derivadas parciais de (dg) nestes mesmos pontos. Seja α uma n -upla de inteiros não-negativos com $|\alpha| \leq k - 1$. Então

$$\frac{\partial^{|\alpha|} \bar{f}}{\partial x^\alpha}(p, v) = \frac{\partial^{|\alpha|} \bar{g}}{\partial x^\alpha}(p, v).$$

Calculando em $v = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ com o 1 na j -ésima coordenada. Então, temos que

$$\frac{\partial^{|\alpha|} \partial f}{\partial x^\alpha \partial x_j}(p) = \frac{\partial^{|\alpha|} \partial g}{\partial x^\alpha \partial x_j}(p).$$

Todas as derivadas parciais de f e g de ordem $\leq k$ são obtidas desta forma.

Se as derivadas parciais em p de f e g são idênticas para todo $|\alpha| \leq k$, então as derivadas parciais de (df) e (dg) são idênticas para todo $|\alpha| \leq k - 1$, isto é, $(df) \stackrel{k-1}{\sim} (dg)$, de onde $f \stackrel{k}{\sim} g$ em p . (Lema 3.3) ■

Lema A.2. *Seja U um aberto de $\mathbb{R}^n$ e V um aberto de $\mathbb{R}^m$. Sejam $f_1, f_2 : U \rightarrow V$ e $g_1, g_2 : V \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ aplicações suaves tais que $g_1 \circ f_1$ e $g_2 \circ f_2$ estejam definidas. Seja $p \in U$ e suponha que $f_1 \stackrel{k}{\sim} f_2$ em p e $g_1 \stackrel{k}{\sim} g_2$ em $q = f_1(p) = f_2(p)$. Então $g_1 \circ f_1 \stackrel{k}{\sim} g_2 \circ f_2$ em p .*

Demonstração. A demonstração segue por indução sobre k . Para $k = 1$, basta aplicar a Regra da Cadeia:

$$d(g_1 \circ f_1)_p = (dg_1)_q(df_1)_p = (dg_2)_q(df_2)_p = d(g_2 \circ f_2)_p.$$

Suponha verdadeiro para $k - 1$. Agora aplique a Regra da Cadeia utilizando a hipótese indutiva que

$$(dg_1) \circ (df_1) \stackrel{k-1}{\sim} (dg_2) \circ (df_2)$$

em todos os pontos $(p, v) \in \{p\} \times \mathbb{R}^n$. Portanto, $g_1 \circ f_1 \stackrel{k}{\sim} g_2 \circ f_2$ em p . ■

Proposição A.3. *Sejam M, N, P e Q variedades suaves.*

(1) *Seja $h : N \rightarrow P$ uma aplicação suave; então h induz uma aplicação*

$$h_* : J^k(M, N) \rightarrow J^k(M, P)$$

definida como segue: Seja σ em $J^k(M, N)_{p,q}$ e seja $f : M \rightarrow N$ representante de σ . Então $h_(\sigma) = [h \circ f]_k$ em $J^k(M, P)_{p,h(q)}$.*

(2) *Seja $a : P \rightarrow Q$ uma aplicação suave. Então $a_* \circ h_* = (a \circ h)_*$ como aplicações de $J^k(M, N) \rightarrow J^k(M, Q)$ e $(\text{id}_N)_* = \text{id}_{J^k(M, N)}$. Logo, se h é um difeomorfismo, h_* é uma bijeção.*

(3) *Seja $g : P \rightarrow M$ um difeomorfismo suave; então g induz uma aplicação*

$$g^* : J^k(M, N) \rightarrow J^k(P, N)$$

definida como segue: seja τ em $J^k(M, N)_{p,q}$ e seja $f : M \rightarrow N$ representante de τ . Então $g^(\tau) = [f \circ g]_k$ em $J^k(P, N)_{g^{-1}(p),q}$.*

(4) *Seja $b : Q \rightarrow P$ um difeomorfismo suave. Então $b^* \circ g^* = (g \circ b)^*$ como aplicações de $J^k(M, N) \rightarrow J^k(Q, N)$ e $(\text{id}_M)^* = \text{id}_{J^k(M, N)}$ de modo que g^* é uma bijeção.*

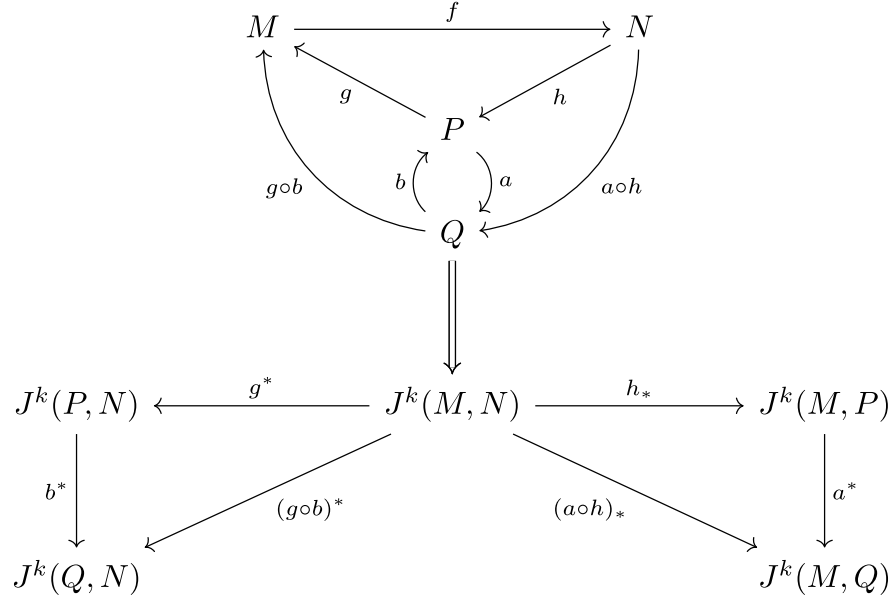
As informações dos itens acima estão ilustradas no diagrama abaixo. Além disso, as aplicações “” superior e inferior comutam.*

Demonstração. Sejam $f_1, f_2 : M \rightarrow N$ aplicações suaves tais que $f_1 \stackrel{k}{\sim} f_2$, $h : N \rightarrow P$ aplicação suave e $g : P \rightarrow M$ difeomorfismo. Como $h \stackrel{k}{\sim} h$ e $g \stackrel{k}{\sim} g$, temos pelo Lema A.2 que $h \circ f_1 \stackrel{k}{\sim} h \circ f_2$ e $f_1 \circ g \stackrel{k}{\sim} f_2 \circ g$, logo as aplicações h_* e g^* independem da escolha do representante de classe e estão bem definidas.

(2) Considere $\text{id}_N : N \rightarrow N$. Tomando um k -jato $\sigma \in J^k(M, N)_{p,q}$ e f seu representante, temos que $(\text{id}_N)_*(\sigma) = [\text{id}_N \circ f]_k$ em $J^k(M, N)_{p,q}$, mas como

$$(\text{id}_N \circ f)(x) = \text{id}_N(f(x)) = f(x)$$

Figura 34 – Diagrama das definições dos asteriscos.



Fonte: Imagem produzida pelo autor.

para todo $x \in M$, temos que $[\text{id}_N \circ f]_k = [f]_k$ em $J^k(M, N)_{p,q}$, de onde $(\text{id}_N)_* = \text{id}_{J^k(M, N)}$. Agora, considere $h : N \rightarrow P$ e $a : P \rightarrow Q$ e tome um k -jato $\sigma \in J^k(M, N)_{p,q}$ arbitrário com f seu representante. Assim, temos que $h_*(\sigma) = [h \circ f]_k$ em $J^k(M, P)_{p, h(q)}$ e

$$(a_* \circ h_*)(\sigma) = a_*(h_*(\sigma)) = [a \circ (h \circ f)]_k = [(a \circ h) \circ f]_k = (a \circ h)_*(\sigma),$$

de onde $a_* \circ h_* = (a \circ h)_*$. Por fim, se h é um difeomorfismo, temos que

$$(h^{-1})_* \circ h_* = (h^{-1} \circ h)_* = (\text{id}_N)_* = \text{id}_{J^k(M, N)}$$

e

$$h_* \circ (h^{-1})_* = (h \circ h^{-1})_* = (\text{id}_P)_* = \text{id}_{J^k(M, P)},$$

ou seja, $(h^{-1})_* = h_*^{-1}$ e h_* é uma bijeção.

(4) Considere $\text{id}_M : M \rightarrow M$. Tomando um k -jato $\sigma \in J^k(M, N)_{p,q}$ e f seu representante, temos que $(\text{id}_M)^*(\sigma) = [f \circ \text{id}_M]_k$ em $J^k(M, N)_{p,q}$, mas como

$$(f \circ \text{id}_M)(x) = f(\text{id}_M(x)) = f(x)$$

para todo $x \in M$, temos que $[f \circ \text{id}_M]_k = [f]_k$ em $J^k(M, N)_{p,q}$, de onde $(\text{id}_M)^* = \text{id}_{J^k(M, N)}$. Agora, considere $g : P \rightarrow M$ e $b : Q \rightarrow P$ e tome um k -jato $\sigma \in J^k(M, N)_{p,q}$ arbitrário com f seu representante. Assim, temos que $g^*(\sigma) = [f \circ g]_k$ em $J^k(M, P)_{g^{-1}(p), q}$ e

$$(b^* \circ g^*)(\sigma) = b^*(g^*(\sigma)) = [(f \circ g) \circ b]_k = [f \circ (g \circ b)]_k = (g \circ b)^*(\sigma),$$

de onde $b^* \circ g^* = (g \circ b)^*$. Como g é um difeomorfismo, temos que

$$(g^{-1})^* \circ g^* = (g \circ g^{-1})^* = (\text{id}_P)^* = \text{id}_{J^k(P, N)}$$

e

$$g^* \circ (g^{-1})^* = (g \circ g^{-1})^* = (\text{id}_M)^* = \text{id}_{J^k(M,N)},$$

ou seja, $(g^{-1})^* = (g^*)^{-1}$ e g^* é uma bijeção.

Resta mostrar que os asteriscos comutam. Como $h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g$, temos que $[(h \circ f) \circ g]_k = [h \circ (f \circ g)]_k$, de onde

$$g^* h_*(\sigma) = [(h \circ f) \circ g]_k = [h \circ (f \circ g)]_k = h_* g^*(\sigma),$$

para σ k -jato arbitrário. Portanto $g^* h_* = h_* g^*$. ■

Lema A.4. *Sejam U e U' abertos de $\mathbb{R}^n$ e sejam V e V' abertos de $\mathbb{R}^m$. Suponha que $h : V \rightarrow V'$ e $g : U \rightarrow U'$ são aplicações suaves com g um difeomorfismo. Então,*

$$T_{U',V'}(g^{-1})^* h_* T_{U,V}^{-1} : U \times V \times \mathbb{B}_{n,m}^k \rightarrow U' \times V' \times \mathbb{B}_{n,m}^k$$

é uma aplicação suave.

Demonstração. Seja $D = (x_0, y_0, f_1(x), \dots, f_m(x))$ com $f_j \in \mathbb{A}_n^k$ ($1 \leq j \leq m$). Defina $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ por $f(x) = y_0 + (f_1(x - x_0), \dots, f_m(x - x_0))$. Então, temos que $f(x_0) = y_0$. Seja $\sigma = [f]_k \in J^k(U, V)_{(x_0, y_0)}$, desta forma $T_{U,V}(\sigma) = D$. Agora

$$(g^{-1})^* h_*(\sigma) = j^k(h \circ f \circ g^{-1})(x_0).$$

Assim

$$\begin{aligned} T_{U',V'}(g^{-1})^* h_* T_{U,V}^{-1}(D) &= T_{U',V'}(j^k(h \circ f \circ g^{-1})(x_0)) \\ &= (g(x_0), h(y_0), T_k((h \circ f \circ g^{-1})_1)(g(x_0)), \dots, T_k(h \circ f \circ g^{-1})_m)(g(x_0)), \end{aligned}$$

onde $(h \circ f \circ g^{-1})_j : U' \rightarrow \mathbb{R}$ são as funções coordenada de $h \circ f \circ g^{-1} : U' \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Para mostrar que esta aplicação é suave basta mostrar que a aplicação

$$\begin{aligned} U \times V \times \mathbb{B}_{n,m}^k &\rightarrow \mathbb{A}_n^k \\ D &\mapsto T_k((h \circ f \circ g^{-1})_j)(g(x_0)) \end{aligned}$$

é suave.

Seja $\phi = h \circ f \circ g^{-1}$. Então

$$T_k(\phi_j)(g(x_0)) = \sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} \frac{\partial^{|\alpha|} \phi_j}{\partial x^\alpha}(g(x_0))(x - g(x_0))$$

Para mostrar que $D \mapsto T_k(\phi_j)(g(x_0))$ é suave basta provar que $D \mapsto \left(\frac{\partial^{|\alpha|} \phi_j}{\partial x^\alpha} \right)(g(x_0))$ levando $U \times V \times \mathbb{B}_{n,m}^k$ em $\mathbb{R}$ é suave para cada multi-índice α tal que $|\alpha| \leq k$. Isto é feito

pela Regra da Cadeia e indução em $l = |\alpha|$. De fato, $(\partial^{|\alpha|}\phi_j/\partial x^\alpha)(g(x_0))$ é soma e produto de termos da forma

$$\frac{\partial h_j}{\partial y_k}(x_0), \quad \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(0), \quad \frac{\partial g_j^{-1}}{\partial x_k}(g(x_0))$$

onde $y_1, \dots, y_m$ são as coordenadas em $\mathbb{R}^m$ e h_j, g_j são as funções coordenadas determinadas por h e g respectivamente. Cada um destes termos variam suavemente com D ; logo $\left(\frac{\partial^{|\alpha|}\phi_j}{\partial x^\alpha}\right)(g(x_0))$ varia suavemente com D . (Lema 3.4) ■

Teorema A.5. *Sejam M e N variedades suaves. Então*

(1) $J^k(M, N)$ é uma variedade suave com

$$\dim J^k(M, N) = \dim M + \dim N + \dim \mathbb{B}_{n,m}^k.$$

(2) $\alpha : J^k(M, N) \rightarrow M$, $\beta : J^k(M, N) \rightarrow N$ e $\alpha \times \beta : J^k(M, N) \rightarrow M \times N$ são submersões.

(3) Se $h : N \rightarrow P$ é suave, então $h_* : J^k(M, N) \rightarrow J^k(M, P)$ é suave. Se $g : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo, então $g^* : J^k(N, P) \rightarrow J^k(M, P)$ é um difeomorfismo.

(4) Se $g : M \rightarrow N$ é suave, então $j^k g : M \rightarrow J^k(M, N)$ é suave.

Demonstração. (1) Sejam U o domínio para uma carta ϕ em M e V o domínio para uma carta ψ em N . Sejam $U' = \phi(U)$ e $V' = \psi(V)$. Então,

$$(\phi^{-1})^* \psi_* : J^k(U, V) \rightarrow J^k(U', V')$$

e

$$\tau_{U,V} \equiv T_{U',V'} \circ (\phi^{-1})^* \psi_* : J^k(U, V) \rightarrow U' \times V' \times \mathbb{B}_{n,m}^k.$$

Muna $J^k(M, N)$ a estrutura de variedade induzida declarando que $\tau_{U,V}$ é uma carta.

Para ver que esta estrutura está bem-definida basta checar o que acontece nas sobreposições. Sejam $\phi_1, \psi_1, U_1, V_1, U'_1, V'_1$ os dados para uma outra carta τ_{U_1, V_1} . Disso, note que

$$\begin{aligned} \tau_{U_1, V_1} \circ (\tau_{U, V})^{-1} &= T_{U'_1, V'_1} \circ (\phi_1^{-1})^* (\psi_1)_* \circ (\psi_*)^{-1} \phi^* \circ T_{U', V'}^{-1} \\ &= T_{U'_1, V'_1} \circ (\phi_1^{-1} \circ \phi)^* (\psi_1 \circ \psi^{-1})_* \circ T_{U', V'}^{-1}, \end{aligned}$$

uma vez que as aplicações “*” superior e inferior comutam. Esta última aplicação é suave pelo Lema 3.4.

(2) Em coordenadas locais α tem a forma

$$\left(\phi \circ \alpha \circ \tau_{U,V}^{-1}\right)(D) = \left[\phi \circ \alpha \circ (\psi_*)^{-1} \circ \phi^* T_{U', V'}^{-1}\right](D) = \left[\phi \circ \alpha \circ j^k(\psi^{-1} \circ f \circ \phi) \circ \phi^{-1}\right](x_0)$$

onde f é definida pelo Lema A.2. Logo, $(\phi \circ \alpha \circ \tau_{u,v}^{-1})(D) = x_0$ uma vez que $\alpha \circ j^k g = \text{id}_M$ para qualquer aplicação g . Então α é uma aplicação suave e uma submersão. Similarmente,

$$\begin{aligned} (\psi \circ \beta \circ \tau_{u,v}^{-1})(D) &= [\psi \circ \beta \circ j^k(\psi^{-1} \circ f \circ \phi) \circ \phi^{-1}](x_0) \\ &= [(\psi \circ \psi^{-1}) \circ f \circ (\phi \circ \phi^{-1})](x_0) \\ &= f(x_0) = y_0 \end{aligned}$$

uma vez que $\beta \circ j^k g = g$ para toda aplicação g . Logo β também é uma aplicação suave e uma submersão. Uma vez que $T_{(p,q)}(M \times N) \simeq T_p M \oplus T_q N$, $\alpha \times \beta : J^k(M, N) \rightarrow M \times N$ é uma submersão.

(3) Sejam U o domínio para uma carta ϕ em M , V o domínio para uma carta φ em N e $\mathcal{W}$ o domínio para uma carta ψ em P . Sejam $U' = \phi(U)$, $V' = \varphi(V)$ e $\mathcal{W}' = \psi(\mathcal{W})$. Olhando para as cartas $\tau_{u,v}$ de $J^k(M, N)$ e $\tau_{u,w}$ de $J^k(M, P)$, a representação local de h_* é dada por

$$\begin{aligned} \tau_{u,w} h_* \tau_{u,v}^{-1} &= (T_{u',w'} \circ (\phi^{-1})^* \psi_*) h_* (T_{u',v'} \circ (\phi^{-1})^* \varphi_*)^{-1} \\ &= (T_{u',w'} \circ (\phi^{-1})^* \psi_*) h_* ((\varphi_*)^{-1} \phi^* \circ T_{u',v'}^{-1}) \\ &= T_{u',w'} \circ (\phi^{-1} \circ \phi)^* (\psi \circ h \circ \varphi)_* \circ T_{u',v'}^{-1} \\ &= T_{u',w'} \circ (\psi \circ h \circ \varphi)_* \circ T_{u',v'}^{-1}. \end{aligned}$$

Por $T_{u',w'}$ e $T_{u',v'}$ serem lineares, ψ e φ serem cartas e h ser suave, segue do Lema 3.4 que a representação acima é suave. Pela arbitrariedade do domínio das cartas, segue que h_* é suave. Pela Proposição A.3, temos que se g é um difeomorfismo, então g^* é uma bijeção, logo, basta olhar para a forma local de g^* e $(g^*)^{-1}$ e concluir pelo Lema 3.4 que ambas são suaves.

(4) Considere $j^k g : M \rightarrow J^k(M, N)$. Suponha que $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Então,

$$j^k g : \mathbb{R}^n \rightarrow J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{B}_{n,m}^k$$

e é dada por

$$j^k g(x_0) = (x_0, g(x_0), (T^k g_1)(x_0), \dots, (T^k g_m)(x_0))$$

onde $g_1, \dots, g_m$ são as funções coordenadas de g . Agora $T^k g_j$ é uma função suave sendo somente a soma de derivadas parciais das g_j . Então, localmente $j^k g$ é uma função suave. Com o uso padrão das cartas dadas acima, segue que $j^k g$ é suave como aplicação de $M \rightarrow J^k(M, N)$. (Teorema 3.5) ■

Lema A.6. (28) *Seja A um subconjunto aberto e conexo de um espaço de Banach E , (f_n) uma sequência de aplicações diferenciáveis de A em um espaço de Banach F . Suponha que:*

- (1) existe um ponto $x_0 \in A$ tal que a sequência $(f_n(x_0))$ converge em F ;
- (2) para todo ponto $a \in A$, existe uma bola $B(a)$ de centro contido em A de modo que em $B(a)$ a sequência (f_n) converge uniformemente.

Então para cada $a \in A$, a sequência (f_n) converge uniformemente em $B(a)$; ademais, se, para cada $x \in A$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ e $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$, então $g(x) = f'(x)$ para cada $x \in A$.

Demonstração. Veja (28), (8.6.3), página 163. ■

Proposição A.7. *Sejam M e N variedades suaves. Então, $C^\infty(M, N)$ munido da topologia C^∞ Whitney é um espaço de Baire.*

Demonstração. Para cada inteiro k escolha uma métrica d_k em $J^k(M, N)$ de modo que $(J^k(M, N), d_k)$ é um espaço métrico completo. Seja $U_1, U_2, \dots$ uma sequência de conjuntos abertos e densos de $C^\infty(M, N)$ e seja V um outro aberto de $C^\infty(M, N)$.

Mostraremos que

$$V \cap \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j \neq \emptyset.$$

Uma vez que V é aberto na topologia C^∞ de Whitney, existe um subconjunto aberto $\mathcal{W} \subset J^{k_0}(M, N)$ tal que $K(\overline{\mathcal{W}}) \subset V$ e $K(\mathcal{W}) \neq \emptyset$. É suficiente mostrar que

$$K(\mathcal{W}) \cap \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j \neq \emptyset.$$

Escolhemos indutivamente uma sequência de funções $f_1, f_2, \dots \in C^\infty(M, N)$; uma sequência de inteiros $k_1, k_2, \dots$; e, para cada j , um aberto $\mathcal{W}_j \subset J^{k_j}(M, N)$ satisfazendo:

$$(a_i) \quad f_i \in K(\mathcal{W}) \cap \bigcap_{j=1}^{i-1} K(\mathcal{W}_j) \cap U_i;$$

$$(b_i) \quad M(\overline{\mathcal{W}_i}) \subseteq U_i \text{ e } f_i \in M(\mathcal{W}_i);$$

$$(c_i) \quad (i > 1) \quad d_s(j^s f_i(x), j^s f_{i-1}(x)) < \frac{1}{2^i}, \text{ para todo } x \in M \text{ e } 1 \leq s \leq i.$$

Primeiro mostramos que ao efetuar as escolhas acima o teorema pode ser demonstrado. Defina $g^s(x) := \lim_{i \rightarrow \infty} j^s f_i(x)$. Este limite existe pois $J^s(M, N)$ munido de d_s é um espaço métrico completo e, para cada x , a sequência $j^s f_1(x), j^s f_2(x), \dots$ é uma sequência de Cauchy em $J^s(M, N)$ pela condição (c_s) . Note que $j^0 f_i(x) = (x, f_i(x))$, então podemos definir $g : M \rightarrow N$ com $g^0(x) = (x, g(x))$. Se g é suave, então o resultado está demonstrado. De fato, cada f_i está em $K(\mathcal{W})$ por (a_s) , logo $g = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x) \in K(\mathcal{W})$. Por (b_s) , $\mathcal{W}_s$ foi escolhido de modo que $K(\overline{\mathcal{W}_s}) \subset U_s$ e, por (a_s) , cada f_i , para $i > s$, foi escolhido de

modo que $f_i \in K(\mathcal{W}_s)$. Como s é arbitrário, $g \in K(\overline{\mathcal{W}}) \cap \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$, de onde segue que a interseção é não vazia, ou seja, a interseção dos U_j é um aberto e denso de $C^\infty(M, N)$. Pela arbitrariedade na escolha da sequência $(U_j)_{j=1}^\infty$, segue que $C^\infty(M, N)$ é um espaço de Baire.

Agora, mostramos que g é suave. Escolha $x \in M$ e vizinhanças compactas K de x e L de $g(x)$ com $g(K) \subset L$. Ao escolhermos K e L pequenos, podemos supor que estão contidos em vizinhanças de cartas e, então, via estas cartas, K e L são subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Uma vez que a métrica d_s é compatível com a topologia em $J^s(M, N)$, segue da condição (c_s) que g^s converge uniformemente em K . Usando coordenadas locais, vemos que as funções coordenadas de $j^s f_j$ são $\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta} f_j$ para $|\beta| \leq s$. Logo, localmente, $\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta} f_j$ converge uniformemente em K . Segue do Lema A.6 que

$$\frac{\partial^{|\beta|} f_j}{\partial x^\beta} = \frac{\partial^{|\beta|} g}{\partial x^\beta}$$

em K para todo $|\beta| \leq s$. Como s é arbitrário, todas as derivadas parciais de g existem em x , na realidade, $g^s(x) = j^s g(x)$ e g é suave.

Por fim, mostramos que é possível escolher f_j , k_j e $\mathcal{W}_j$ indutivamente satisfazendo às condições (a_i) , (b_i) e (c_i) . Como $K(\mathcal{W})$ é aberto e não-vazio e U_1 é denso, podemos escolher $f_1 \in K(\mathcal{W}) \cap U_1$. Logo, a condição (a_1) é satisfeita. Como U_1 é aberto e $f_1 \in U_1$, podemos escolher $k_1 \geq 0$ e um aberto $\mathcal{W}_1 \subset J^{k_1}(M, N)$ de modo que $f_1 \in K(\mathcal{W}_1)$ e $K(\overline{\mathcal{W}_1}) \subset U_1$. Logo, a condição (b_1) é satisfeita e a condição (c_1) é satisfeita por vacuidade. Agora, supomos por indução que as escolhas foram feitas atendendo às condições (a_j) , (b_j) e (c_j) para todo $1 < j \leq i-1$. Escolheremos f_i atendendo às condições (a_i) e (c_i) podemos escolher k_i e $\mathcal{W}_i$ de modo que (b_i) seja satisfeita como feito anteriormente. Considere o conjunto

$$D_i = \left\{ g \in C^\infty(M, N) \left| \begin{array}{l} d_s(j^s g(x), j^s f_{i-1}(x)) < \frac{1}{2^i} \\ \text{para } 1 \leq s \leq i \text{ e para todo } x \in M. \end{array} \right. \right\}$$

Se D_i é aberto, então

$$E_i = K(\mathcal{W}) \cap \bigcap_{j=1}^{i-1} K(\mathcal{W}_j) \cap D_i$$

é aberto. Temos que $f_{i-1} \in D_i$, pois $d_s(j^s f_{i-1}(x), j^s f_{i-1}(x)) = 0 < \frac{1}{2^i}$, e, pelas condições (a_{i-1}) e (b_{i-1}) da hipótese indutiva, temos que $f_{i-1} \in K(\mathcal{W})$ e $f_{i-1} \in K(\mathcal{W}_j)$ para todo $1 \leq j \leq i-1$. Logo, $f_{i-1} \in E_i$. Como E_i é aberto e não-vazio e U_i é denso, podemos escolher $f_i \in U_i \cap E_i$. Pela definição de E_i , a condição (a_i) é satisfeita e, pela definição de D_i , a condição (c_i) é satisfeita. Agora, basta mostrar que D_i é aberto em $C^\infty(M, N)$. Seja

$$F_s = \left\{ g \in C^\infty(M, N) : d_s(j^s g(x), j^s f_{i-1}(x)) < \frac{1}{2^i}, \forall x \in M \right\}.$$

Como $D_i = F_1 \cap \cdots \cap F_i$, basta mostrar que F_s é aberto em $C^\infty(M, N)$. Agora, defina $B_x = \alpha^{-1}(x) \cap B_{1/2^i}(j^s f_{i-1}(x))$ onde $\alpha : J^s(M, N) \rightarrow M$ é a aplicação fonte e

$$B_{1/2^i}(j^s f_{i-1}(x)) = \left\{ \sigma \in J^s(M, N) : d_s(\sigma, j^s f_{i-1}(x)) \leq \frac{1}{2^i} \right\}.$$

Seja

$$G = \bigcup_{x \in M} B_x.$$

Tomando $f \in F_s$, temos que $d_s(j^s f(x), j^s f_{i-1}(x)) < \frac{1}{2^i}$ para todo $x \in M$, de onde $j^s f(x) \in B_x \subset G$ para todo $x \in M$, de onde $j^s f(M) \subset G$, ou seja $F_s \subset K(G)$. Por outro lado, se $f \in K(G)$, então $j^s f(M) \subset G$ de onde $d_s(j^s f(x), j^s f_{i-1}(x)) < \frac{1}{2^i}$ e $f \in F_s$. Portanto, $F_s = K(G)$. Seja $\sigma \in G$ e $x = \alpha(\sigma)$. Note que a aplicação $\Psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $q \mapsto d_s(j^s f_{i-1}(q), j^s f_{i-1}(x))$ é contínua. Logo,

$$H = \alpha^{-1} \left(\Psi^{-1} \left(-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2} \right) \right)$$

é um conjunto aberto de $J^s(M, N)$, onde $\delta = \frac{1}{2^i} - d_s(\sigma, j^s f_{i-1}(x)) > 0$. Ainda, $H \cap B_{\delta/2}(\sigma)$ é aberto e contém σ , de modo que se $H \cap B_{\delta/2}(\sigma)$, a demonstração está completa. Seja $\tau \in H \cap B_{\delta/2}(\sigma)$, logo

$$\begin{aligned} d_s(\tau, j^s f_{i-1}(\alpha(\tau))) &\leq d_s(\tau, \sigma) + d_s(\sigma, j^s f_{i-1}(x)) + d_s(j^s f_{i-1}(x), j^s f_{i-1}(\alpha(\sigma))) \\ &< \frac{\delta}{2} + \left(\frac{1}{2^i} - \delta \right) + \frac{\delta}{2} \\ &= \frac{1}{2^i}, \end{aligned}$$

concluindo a demonstração. (Proposição 3.15) ■

APÊNDICE B – ÁRVORES COM ATÉ 8 VÉRTICES

De modo a ilustrar a Tabela 1, construiremos aqui, de forma indutiva, as árvores $\mathcal{T} \in \mathcal{G}(V, V-1)$ com $V \in \{1, \dots, 8\}$, todas distintas a menos de isomorfismo. As construções são feitas escolhendo vértices de um dado grau e adicionando uma aresta e um vértice a este.

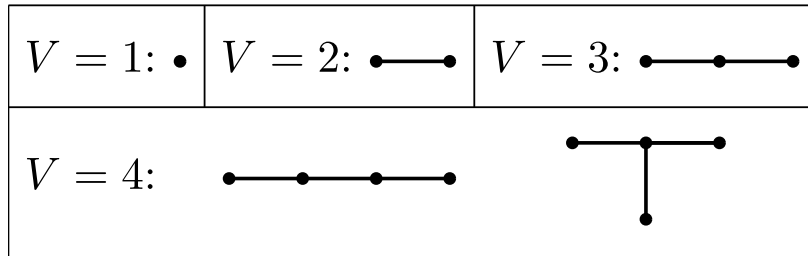
Para $V \in \{1, 2, 3\}$, é simples: temos que a árvore com 1 vértice tem 0 arestas, isto é, consiste de somente um ponto; a árvore com 2 vértices é construída adicionando uma aresta e um vértice à árvore de 1 vértice; por fim, a árvore com 3 vértices é construída adicionando uma aresta e um vértice à árvore de 2 vértice, observando que independente da escolha de vértice as árvores resultantes são isomorfas.

Para $V = 4$, temos duas opções distintas de onde adicionar um vértice e uma aresta:

1. ou adicionamos aos vértices finais, isto é, os vértices de grau 1;
2. ou adicionamos ao vértice do meio, isto é, o vértice de grau 2.

A Figura 35 abaixo ilustra os 4 primeiros casos.

Figura 35 – Árvores com $V \leq 4$.



Fonte: Imagem produzida pelo autor.

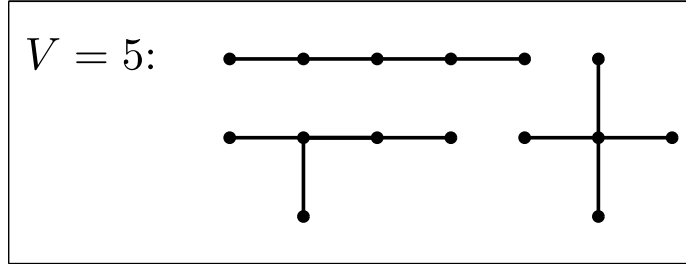
Agora, precisamos fazer uma distinção entre os tipos de árvores resultantes.

Definição B.1. *Seja $\mathcal{T} \in \mathcal{G}(V, V-1)$. Dizemos que $\mathcal{T}$ é uma **árvore tipo linha** quando $V = 1$ ou quando tem $V-2$ vértices de grau 2 (ou, equivalentemente, 2 vértices de grau 1) quando $V \geq 2$. Denotamos por $\mathcal{T} = \mathcal{L}_V$.*

Da Definição B.1, podemos escrever

$$\mathcal{G}(1, 0) = \{\mathcal{L}_1\}, \quad \mathcal{G}(2, 1) = \{\mathcal{L}_2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{G}(3, 2) = \{\mathcal{L}_3\}.$$

Definição B.2. *Seja $\mathcal{T} \in \mathcal{G}(V, V-1)$, com $V \geq 3$. Dizemos que $\mathcal{T}$ é uma **árvore tipo estrela** quando tem 1 vértice de grau $V-1$. Denotamos por $\mathcal{T} = \mathcal{S}_V$.*

Figura 36 – Árvores com $V = 5$.

Fonte: Imagem produzida pelo autor.

Da Definição B.2, podemos escrever $\mathcal{G}(4, 3) = \{\mathcal{L}_4, \mathcal{S}_4\}$. Para $V = 5$, temos 3 possibilidades (Veja a Figura 36):

1. Adicionar uma aresta e um vértice a um dos vértices de grau 1 de $\mathcal{L}_4$, resultando em $\mathcal{L}_5$;
2. Adicionar uma aresta e um vértice ao vértice de grau 3 de $\mathcal{S}_4$, resultando em $\mathcal{S}_5$;
3. Adicionar uma aresta e um vértice a um dos vértices de grau 2 de $\mathcal{L}_4$, ou adicionar uma aresta e um vértice a um dos vértices de grau 1 de $\mathcal{S}_4$. Note que, independente da escolha, as árvores resultantes são todas isomorfas.

A Figura 36 acima ilustra o caso $V = 5$.

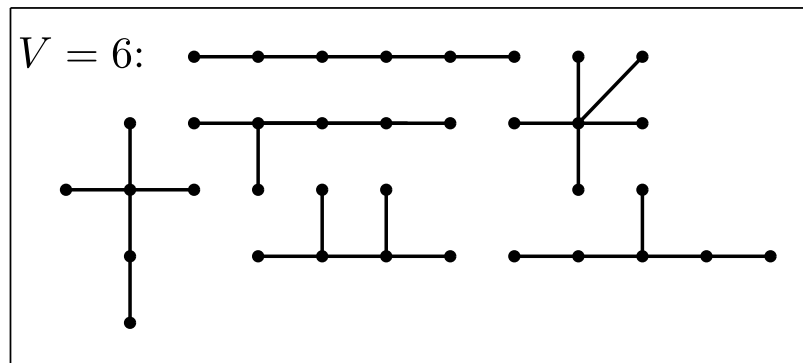
A árvore resultante do terceiro caso é um novo tipo de árvore, dito **tipo lagarta**. A notação para este caso não será explicitada por simplicidade.

Para $V = 6$, temos 6 possibilidades (Veja a Figura 37):

1. Adicionar uma aresta e um vértice a um vértice de grau 1 de $\mathcal{L}_5$, resultando em $\mathcal{L}_6$;
2. Adicionar uma aresta e um vértice ao vértice de grau 4 de $\mathcal{S}_5$, resultando em $\mathcal{S}_6$;
3. Adicionar uma aresta e um vértice a um vértice de grau 2 adjacente a um vértice de grau 1 de $\mathcal{L}_5$. Também pode ser obtido ao adicionar uma aresta e um vértice ao vértice de grau 1 adjacente ao vértice de grau 3 da árvore tipo lagarta;
4. Adicionar uma aresta e um vértice ao vértice de grau 2 adjacente aos vértices de grau 2 de $\mathcal{L}_5$;
5. Adicionar uma aresta e um vértice ao vértice de grau 1 adjacente ao vértice de grau 3 da árvore tipo lagarta. Também pode ser obtido ao adicionar um vértice e uma aresta a um vértice de grau 1 de $\mathcal{S}_6$;

6. Adicionar uma aresta e um vértice ao vértice de grau 2 adjacente aos vértices de grau 3 da árvore tipo lagarta;

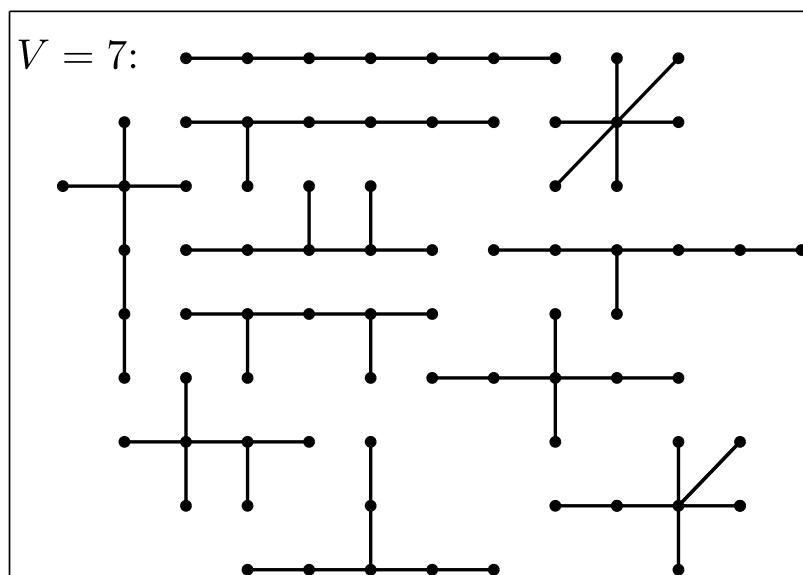
Figura 37 – Árvores com $V = 6$.



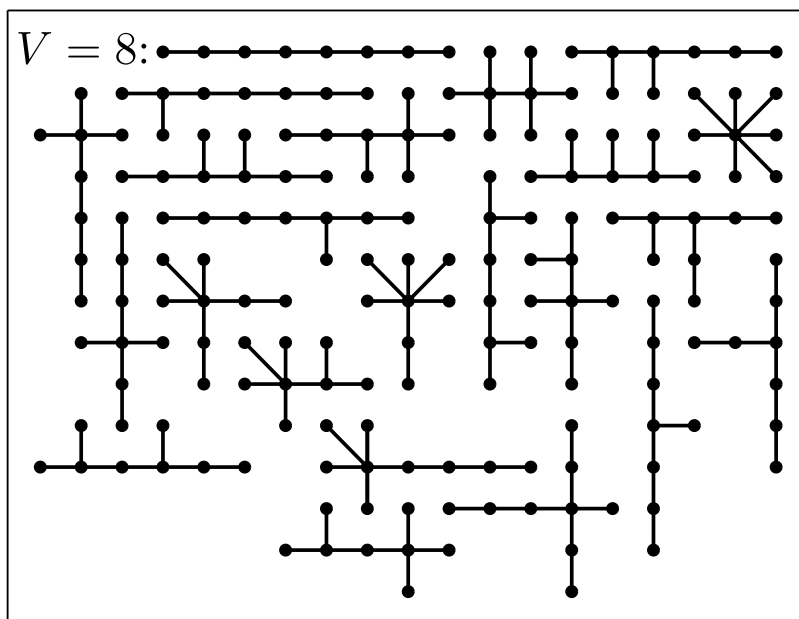
Fonte: Imagem produzida pelo autor.

Para os casos $V \in \{7, 8\}$, omitiremos a explicação das escolhas de vértices, por brevidade. As Figuras 38 e 39 ilustram estes casos.

Figura 38 – Árvores com $V = 7$.



Fonte: Imagem produzida pelo autor.

Figura 39 – Árvore com $V = 8$.

Fonte: Imagem produzida pelo autor.

Alguma dessas árvores descritas pode ser a árvore geradora de um grafo associado a uma aplicação estável, ressaltando que mais de uma dessas árvores pode ser a árvore geradora de um mesmo grafo.

REFERÊNCIAS

- 1 GEROCH, R. **What is a Singularity in General Relativity?**, Annals of Physics: 526-540. Princeton (1968).
- 2 ARNOLD, V.I. **Catastrophe Theory**, Springer-Verlag, Berlin (1992). ISBN 978-3540548119.
- 3 MENDES DE JESUS, C.; ROMERO-FUSTER, M.C. **Graphs associated to fold maps from closed surfaces to the projective plane**. Topology and Its Appl., 234 (2018), 298-310.
- 4 MENDES DE JESUS, C.; ROMERO, P.D. **Invariants of Stable Maps between Closed Orientable Surfaces**. Mathematics (2021), 9, 215.
<http://doi.org/10.3390/math9030215>.
- 5 HACON, D.; MENDES DE JESUS, C.; ROMERO-FUSTER, M.C. **Graphs of stable maps from closed orientable surfaces to the 2-sphere**. J. Singularities, 2. (2010), 67-80.
- 6 HACON, D.; MENDES DE JESUS C.; ROMERO FUSTER, M.C. **Stable maps from surfaces to the plane with prescribed branching data**, Topology and Its Appl. 154, (2007), 166-175. DOI: 10.1016/j.topol.2006.04.005
- 7 KINSEY, L.C. **Topology of Surfaces**, Springer-Verlag, New York (1993).
- 8 DIESTEL, R; **Graph Theory**, 5a edição. Springer, Berlin (2017).
- 9 MENDES DE JESUS, C. **Aplicações entre Superfícies**. Minicurso sobre aplicações e grafos, Universidade Federal de Viçosa (2023).
- 10 GOLUBITSKY, M.; GUILLEMIN, V. **Stable Mappings and Their Singularities**. Springer-Verlag, Berlin (1976).
- 11 ALHADAS, M.M. **Aplicações de Superfícies Fechadas no Plano**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Juiz de Fora (2019).
- 12 OHMOTO, T.; AICARDI, F. **First Order Local Invariants of Apparent Coutours**. Topology, 45 (2006), 27-45.
- 13 BREDON, G.E. **Topology and Geometry**. Springer-Verlag, New York, (1993).
- 14 GLELSON, P.M. **Um teorema global para singularidades de aplicações entre superfícies**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Viçosa (2015).
- 15 WHITNEY, H. **On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces**, The Annals of Mathematics, 62(3), 374-410. (1955). doi:10.2307/1970070
- 16 GUILLEMIN, V., POLLACK, A. **Differential Topology**, AMS Chelsea Publishing, Providence (2010).
- 17 LIMA, E.L. **Introdução à Topologia Diferencial**, 2a edição. IMPA, Rio de Janeiro (2012).

- 18 HATCHER, A. **Algebraic Topology**. Cambridge University Press, Cambridge (2002).
- 19 MUNKRES, J.R. **Topology**, 2nd ed. Prentice Hall.(2000).
- 20 QUINE, J.R. **A global theorem for singularities of maps between oriented 2-manifolds**. Trans. Am. Math. Soc. (1978), 236, 307–314.
- 21 ELIASHBERG, Y. **On singularities of folding type**. Izv. Ross. Akad. Nauk Seriya Mat. (1970), 34, 1110–1126.
- 22 YAMAMOTO, M. **Immersiones of surfaces with boundary into the plane**, Pacific J. Math., 212 (2003) 371–376.
- 23 RIEGER, J.H. **Families of maps from the plane to the plane**, J. Lond. Math. Soc. (2), 36 (2) (1987) 351–369.
- 24 GORYUNOV, V. **Local invariants of mappings of surfaces into three-space**, The Arnold-Gelfand mathematical seminars, Birkhauser Boston, Boston, MA (1997) 223–255.
- 25 YAMAMOTO, M. **First order semi-local invariants of stable maps of 3-manifolds into the plane**, Proc. London Math. Soc. (2006), 471–504.
- 26 HUAMANI, N.B. **Invariantes de aplicaciones estables de 3-variedades al 3-espacio euclidiano**. Tese de Doutorado, Universidad Nacional de Ingeniaria, Lima (2019).
- 27 ROMERO, P.D.; COELHO, J.R.P.; MENDES DE JESUS, C. **An algorithm for the determination of graphs associated to fold maps between closed surfaces**, Math. Methods Appl. Sci., 43 (14) (2020) 8177-8191.
- 28 DIEUDONNÉ, J. **Foundations of Modern Analysis**, Academic Press, New York & London (1969).