

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

Julio Cesar Fernandes da Silva

**ABORDAGEM BAYESIANA PARA COMPATIBILIDADE DE
PERSPECTIVAS EM MECÂNICA QUÂNTICA: UMA POSSÍVEL SOLUÇÃO
PARA O PARADOXO DO AMIGO DE WIGNER**

Juiz de Fora

2025

Julio Cesar Fernandes da Silva

**ABORDAGEM BAYESIANA PARA COMPATIBILIDADE DE
PERSPECTIVAS EM MECÂNICA QUÂNTICA: UMA POSSÍVEL SOLUÇÃO
PARA O PARADOXO DO AMIGO DE WIGNER**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Física, Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de grau de bacharel em Física.

Orientador: Professor Doutor Bruno Ferreira Rizzuti

Juiz de Fora

2025

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Fernandes da Silva, Julio Cesar.

ABORDAGEM BAYESIANA PARA COMPATIBILIDADE DE PERSPECTIVAS EM MECÂNICA QUÂNTICA : UMA POSSÍVEL SOLUÇÃO PARA O PARADOXO DO AMIGO DE WIGNER / Julio Cesar Fernandes da Silva. – 2025.

56 f. : il.

Orientador: Bruno Ferreira Rizzuti

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal de Juiz de Fora, Departamento de Física, Instituto de Ciências Exatas. Programa de graduação em física, 2025.

1. Inferência Bayesiana. 2. Compatibilidade de Perspectivas. 3. Paradoxo do Amigo de Wigner. I. Rizzuti, Bruno Ferreira, orient. II. Título.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
REITORIA - ICE - Departamento de Física

Ata de Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso

A Coordenação do Curso de Bacharelado e Licenciatura em Física Diurno declara que, no dia 20/03/2025, o aluno **Julio Cesar Fernandes da Silva**, matrícula **201965156E**, orientado pelo **Prof. Dr. Bruno Ferreira Rizzuti**, apresentou seu trabalho de conclusão de curso, intitulado “**Abordagem Bayesiana para compatibilidade de perspectivas em Mecânica Quântica: Uma possível solução para o paradoxo do amigo de Wigner**”, tendo sido aprovada pela banca examinadora com nota **90**.



Documento assinado eletronicamente por **Cristhiano Andre Gamarano Duarte Carneiro Silva, Usuário Externo**, em 21/03/2025, às 11:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Bruno Ferreira Rizzuti, Professor(a)**, em 21/03/2025, às 11:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Wallon Anderson Tadaiesky Nogueira, Professor(a)**, em 21/03/2025, às 17:35, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Maikel Yusat Ballester Furones, Professor(a)**, em 29/04/2025, às 16:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **2303205** e o código CRC **B028BA1A**.

“Dedico este trabalho à Senhora do Carmo, em honra dos meus avós e em homenagem às minhas sobrinhas.”

AGRADECIMENTOS

- A Deus e à Minha Senhora, primeiramente, pelo dom da vida e pelas graças concedidas, por me guiarem e iluminarem meus pensamentos de maneiras que ninguém mais poderia.
- À família: aos meus pais, pelo exemplo de força e determinação, por sempre apoiarem meus estudos e acreditarem que eu poderia ir além. Aos meus irmãos, que seguiram à frente e pavimentaram a estrada dos tijolos amarelos em todas as etapas da minha educação para que eu pudesse chegar até aqui. “Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes.”
- Ao professor Bruno Rizzuti, pela orientação ao longo da graduação, pela oportunidade de desenvolver este trabalho, por todas as aulas ministradas, pelos ensinamentos, conversas e conselhos que me concedeu desde antes mesmo de assumir oficialmente minha orientação. Também ao professor Cristhiano Duarte, por confiar a mim este tema em acordo com o professor Bruno, pelos conselhos diante do quadro e pelas conversas nas reuniões.
- Aos demais professores que fizeram parte da minha caminhada. Na impossibilidade de citar todos, destaco, no departamento, os professores Maikel Ballester e Wallon Tadaiesky, pela presença constante em minha trajetória acadêmica, pelo interesse genuíno em meu progresso e pelo compromisso com minha evolução como aluno. Fora do departamento, destaco os professores Marcelo Salomão e Fábio Alex dos Santos, por acolherem meu interesse pela ciência e por me incentivarem a alçar voos mais altos. Por fim, agradeço ao meu padrinho, professor João Batista, por ser um exemplo de fé conciliada à vida acadêmica.
- Aos amigos: aqueles que fiz durante toda a graduação, incluindo os dos demais departamentos, que sempre terão um espaço no meu coração, e, em especial, aos da física, que tornaram minha jornada acadêmica mais leve. Nossas conversas de corredor iluminam o departamento. Aos amigos da fé, especialmente à minha companheira de vida, que, nos momentos mais difíceis, sempre me ajudaram a lembrar o que realmente importa.
- À Universidade Federal de Juiz de Fora, pela estrutura oferecida e pelas relações humanas que proporciona. Este trabalho foi financiado pelo Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica - VII VIC 2023/2024, no âmbito do projeto Abordagem via sistemas de referência quânticos ao problema de Wigner dinâmico.
- Agradeço às ferramentas de inteligência artificial, em especial ao ChatGPT, por auxiliar na formatação e organização do texto em LaTeX, tornando os processos mecânicos mais ágeis e permitindo que minha escrita fosse mais eficiente.

“Quanto mais o homem conhece a realidade e o mundo, tanto mais se conhece a si mesmo na sua unicidade, ao mesmo tempo que nele se torna cada vez mais premente a questão do sentido das coisas e da sua própria existência. O que chega a ser objecto do nosso conhecimento, torna-se por isso mesmo parte da nossa vida.”

JOÃO PAULO II, *Carta Encíclica Fides et Ratio.*

“Estou me sentindo fino, como se eu estivesse esticado, como manteiga que foi espalhada num pedaço muito grande de pão.”

J.R.R. TOLKIEN, *O Senhor dos Anéis: A Sociedade do Anel.*

RESUMO

A física clássica e relativística são permeadas por um princípio fundamental, o da relatividade. Este princípio garante que as leis da física sejam as mesmas em qualquer referencial inercial. A situação com a mecânica quântica parece ser ortogonal a este *approach*, afinal, diferentes observadores podem utilizar diferentes perspectivas para tratar o mesmo sistema. O exemplo emblemático desta situação é o paradoxo do amigo de Wigner, em que há um choque entre evolução unitária e colapso ao se descrever o mesmo sistema. Dado que dois observadores de um mesmo sistema não concordaram sobre como atingiram suas crenças, podemos prever se é possível que eles obtenham compatibilidade de suas perspectivas e medições através de um critério de compatibilidade. Trataremos de dois neste trabalho, a saber, o objetivista e subjetivista. Após a análise das duas versões, vamos apresentar uma forma de usar este formalismo para tratar o problema (original) do amigo de Wigner. Concluiremos que diferentes crenças, informações ou conhecimento sobre um sistema podem não ser as mesmas desde que sejam compatíveis e encontraremos uma prescrição de compatibilidade entre as perspectivas que poderia solucionar o paradoxo. A existência de um paradoxo reside em procurar concordância onde apenas há demanda de compatibilidade para a descrição de observadores. Neste trabalho, usaremos o formalismo de estados condicionais, que trata a teoria quântica como uma generalização não-comutativa da teoria de inferência Bayesiana clássica, para explorar a compatibilidade de duas diferentes perspectivas sobre um mesmo sistema. Forneceremos uma definição matemática de compatibilidade de descrições entre diferentes perspectivas (bem como um teorema de caracterização). Neste formalismo, traçamos os paralelos de variáveis clássicas e sistemas quânticos e os análogos quânticos correspondentes a distribuição de probabilidades usual, conjunta e condicional, bem como o conceito de marginalização, o Teorema de Bayes e propagação de crença. Este será o ferramental para tratar duas versões do critério de compatibilidade.

Palavras-chave: Inferência Bayesiana; Estados Condicionais Quânticos; Paradoxo do amigo de Wigner; Compatibilidade de Perspectivas.

ABSTRACT

Classical and relativistic physics are permeated by a fundamental principle: the principle of relativity. This principle ensures that the laws of physics remain the same in any inertial reference frame. The situation in quantum mechanics, however, appears to be orthogonal to this approach, as different observers may use different perspectives to analyze the same system. The emblematic example of this situation is Wigner's friend paradox, where there is a clash between unitary evolution and collapse when describing the same system. Given that two observers of the same system do not agree on how they reached their beliefs, we can investigate whether they can achieve compatibility between their perspectives and measurements through a compatibility criterion. In this work, we will examine two such criteria, namely the objectivist and the subjectivist approaches. After analyzing both versions, we will present a way to use this formalism to address the (original) Wigner's friend problem. We will conclude that different beliefs, information, or knowledge about a system may not necessarily be identical, as long as they remain compatible, and we will establish a prescription for compatibility between perspectives that could resolve the paradox. The existence of a paradox lies in seeking agreement where there is only a demand for compatibility in the observers' descriptions. In this work, we will use the formalism of conditional states, which treats quantum theory as a non-commutative generalization of classical Bayesian inference theory, to explore the compatibility of two different perspectives on the same system. We will provide a mathematical definition of compatibility between different perspectives (as well as a characterization theorem). Within this formalism, we establish parallels between classical variables and quantum systems, along with their quantum counterparts to the usual, joint, and conditional probability distributions, as well as the concepts of marginalization, Bayes' theorem, and belief propagation. This will serve as the toolkit to examine two versions of the compatibility criterion.

Keywords: Bayesian Inference; Quantum Conditional States; Wigner's Friend Paradox; Compatibility of Perspectives.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

- Figura 1- (a) Regiões quânticas acausalmente relacionadas. (b) Regiões quânticas causalmente relacionadas. 27
- Figura 2- $\ker[P(Y)] \subseteq \ker[P(Y | X = x)] \Leftrightarrow \text{supp}[P(Y | X = x)] \subseteq \text{supp}[P(Y)]$. . . 33
- Figura 3- a) Uma medição realizada em B e X_1 representa a saída, o cenário causal ganha outra variável clássica via pós-processamento. b) Julio e Wigner aprendem sobre B fazendo medições nas regiões A_1 e A_2 correlacionadas. c) $\sigma_B^{(1)}$ e $\sigma_B^{(2)}$ tem interseção não trivial do suporte em seus elementos condicionados por $X = x$ 40
- Figura 4- Dois agentes: Julio mede o Sistema S e obtém resultado; Wigner descreve o Sistema e Julio como um estado emaranhado. Fonte: adaptado de (30). 44

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Analogia entre a teoria clássica de inferência Bayesiana e o formalismo de estados condicionais na teoria quântica. Retirado de (13).	29
Tabela 2 – Tradução de conceitos e equações da notação convencional para o formalismo de estados condicionais. Retirado de (13)	31

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	FORMALISMO MATEMÁTICO	14
2.1	ÁLGEBRA LINEAR	14
2.1.1	ESPAÇOS VETORIAIS	14
2.1.2	CONJUNTOS ORTOGONAIS	18
2.1.3	OPERADORES LINEARES	19
2.1.4	PROJETORES E MEDIÇÕES	20
2.1.4.1	Operadores positivos semidefinidos	21
2.1.4.2	Estados	21
2.1.4.3	Projeções ortogonais	21
2.1.4.4	Medição	21
2.2	CANAIS QUÂNTICOS	22
2.2.1	<i>POVM</i> - POSITIVE OPERATOR-VALUED MEASURE	23
2.3	PORTAS LÓGICAS QUÂNTICAS	24
2.4	ESTADOS CONDICIONAIS	25
2.4.1	INTRODUÇÃO AO CONCEITO DE REGIÕES CLÁSSICAS E REGIÕES QUÂNTICAS	25
2.4.1.1	Uma breve revisão da teoria clássica de probabilidades	27
2.4.1.2	Cenário acausal	27
2.4.1.3	Cenário causal	29
2.4.1.4	O caso clássico como caso particular	29
2.4.1.5	Média de ensembles e regra de Born	30
2.5	COMPATIBILIDADE E CONCORDÂNCIA	30
2.5.1	COMPATIBILIDADE BAYESIANA EM TEORIA DE PROBABILIDADES CLÁSSICA	31
2.5.1.1	Compatibilidade Bayesiana objetivista clássica	32
2.5.1.2	Compatibilidade Bayesiana subjetivista clássica	36
2.5.1.3	Compatibilidade Bayesiana objetivista quântica	38
2.5.1.4	Compatibilidade Bayesiana subjetivista quântica	40
3	APLICAÇÃO	43
3.1	O PARADOXO DO AMIGO DE WIGWER	43
3.1.1	PERSPECTIVA CLÁSSICA	45
3.1.2	PERSPECTIVA QUÂNTICA	47
4	CONCLUSÃO	50
	REFERÊNCIAS	52
4.1	APÊNDICE: USO DE INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL NA PRODUÇÃO DESTE TRABALHO	55

1 INTRODUÇÃO

A mecânica quântica revolucionou a compreensão da física moderna, fornecendo um arcabouço matemático robusto para descrever fenômenos em escala microscópica. Um dos aspectos mais intrigantes dessa teoria é sua interpretação probabilística, outrora um incômodo para a comunidade científica que a fundamentou (1, 2). Saímos de uma consolidada teoria determinística (dita clássica) para uma teoria (dita quântica) em que mesmo conhecendo tudo o que é possível sobre um sistema, você só consegue prever probabilidades dos resultados possíveis de uma medição e o estado de uma partícula é descrito por uma função de onda que não nos dá diretamente a posição da partícula, mas sim uma distribuição de probabilidade. Ou seja, intrinsecamente probabilística. Mas é precisamente o caráter probabilístico da teoria que nos permite introduzir o conceito de estados condicionais como uma extensão não-comutativa da inferência Bayesiana clássica (3), criando uma teoria generalizada de inferência Bayesiana que descreve fenômenos quânticos (limitado por situações em que a região de interesse não precisa ser descrita por um objeto mais exótico do que um único estado quântico (3)) e retorna ao caso clássico sob certas condições, como mostraremos adiante no segundo capítulo, subseção **2.4.1.4**. A inferência Bayesiana clássica é um modelo de inferência que não possui as mesmas limitações da teoria frequentista (às vezes também chamada apenas de clássica). Isto é, ela não depende de amostras grandes e nem de replicar dados de experimentos indefinidamente. Ela considera distribuições de probabilidade de variáveis aleatórias, e introduz um conceito de crença atrelado à distribuição que *a priori* se atribui aos parâmetros disponíveis. Depois que os dados são observados, atualiza-se essa crença usando o Teorema de Bayes, obtendo a chamada distribuição *a posteriori*. Seus fundamentos foram estabelecidos por T. Bayes em 1763 (4). O formalismo que queremos revisar herda estas premissas. Este é o formalismo de estados condicionais que, ao estabelecer paralelos entre variáveis clássicas e sistemas quânticos, permite uma nova abordagem para problemas fundamentais da física quântica, incluindo o paradoxo do amigo de Wigner (5), foco deste trabalho.

Historicamente, a questão da compatibilidade entre descrições distintas de um mesmo sistema tem sido debatida desde 1976 (6), que introduziu a ideia de concordância em sistemas clássicos. Esse conceito foi posteriormente generalizado para o contexto quântico por (7, 10) e (8), culminando na formulação moderna de compatibilidade Bayesiana como ferramenta para descrições *coarse-grained* de sistemas quânticos (7, 9).

Nesse contexto, questões clássicas da interpretação quântica podem ser revisitadas sob a perspectiva da compatibilidade. Por exemplo, O paradoxo do amigo de Wigner desafia a consistência da mecânica quântica ao sugerir que diferentes observadores podem atribuir estados distintos a um mesmo sistema, levando a interpretações conflitantes sobre o colapso da função de onda (11). O avanço recente da inferência Bayesiana na física quântica sugere que esse problema pode ser reformulado em termos de compatibilidade

estatística, ao invés de exigir uma revisão das premissas fundamentais da teoria quântica (12).

A motivação para este trabalho reside na necessidade de compreender a viabilidade da compatibilidade Bayesiana em descrições quânticas, explorando como esse conceito pode esclarecer o paradoxo original do amigo de Wigner. Esse estudo tem aplicações diretas em fundamentos de mecânica quântica (13) e teoria da informação, ajudando a avançar o entendimento sobre conciliação de perspectivas e sobre o problema da medição, que será explorado mais à frente. A abordagem tradicional da mecânica quântica baseia-se no formalismo de operadores densidade, onde a regra de Born fornece a relação entre estados quânticos e distribuições de probabilidade (14). Entretanto, a interpretação Bayesiana recente (de 2006) reformula esse formalismo em termos de estados condicionais (15). Esse modelo permite definir compatibilidade de descrições quânticas, estabelecendo critérios rigorosos para quando duas perspectivas podem coexistir sem inconsistência (7, 16). O modelo condicional também aborda cenários acausais e causais, diferenciando descrições baseadas em relações espaciais e temporais (17). A probabilidade de um dado resultado i de um evento, condicionado à probabilidade de um dado resultado j de outro evento espacialmente separado e acausalmente relacionado é uma relação construída à mão, e pode ser invertida entre eles, como probabilidade condicional entre lançamento de dois dados. Há uma distinção quando os eventos são temporalmente disjuntos e conectados por uma relação causal: obter um resultado em um evento condiciona o segundo evento que está para acontecer (17). Essa abordagem é essencial para tratar paradoxos quânticos e para uma compreensão mais profunda dos fundamentos da mecânica quântica.

Os modelos tradicionais falham em reconciliar descrições probabilísticas divergentes de observadores distintos de um sistema quântico. Embora a compatibilidade Bayesiana tenha sido proposta como solução, sua validade não foi testada de forma abrangente no contexto do paradoxo do amigo de Wigner. Essa pesquisa visa preencher essa lacuna, analisando se descrições subjetivistas e objetivistas podem ser conciliadas matematicamente (7, 10).

O objetivo geral deste trabalho é investigar a compatibilidade Bayesiana, bem como o que ela representa, como solução para o paradoxo (original) do amigo de Wigner. Especificamente, buscamos:

- Revisar um modelo matemático para compatibilidade Bayesiana em sistemas quânticos.
- Comparar a abordagem com modelos tradicionais de inferência Bayesiana.
- Identificar implicações da compatibilidade Bayesiana para a interpretação da mecânica quântica.

- Utilizar ferramentas da teoria de operadores para definir estados condicionais e modelar compatibilidade Bayesiana. A análise incluirá revisão comparativa com dados da literatura (20).

Para alcançar os pontos acima, este trabalho está organizado da seguinte forma: O capítulo 1 (este) tem por objetivo servir de introdução ao problema, contextualização e objetivos. No capítulo seguinte focaremos no formalismo matemático e revisão teórica sobre conceitos básicos de álgebra linear que serão importantes ao passo que o trabalho avança, como operadores, canais quânticos (*CPTP's*), medições (*POVM's*), operadores unitários e ação de portas lógicas quânticas. Depois, mostramos como construir os paralelos entre probabilidade clássica e quântica que residem no formalismo de estados condicionais, bem como construir estados conjuntos, condicionais e marginais, e como aplicar, nesse formalismo, conceitos importantes para medição de estados quânticos. Alguns exemplos, como a regra de Born, também serão discutidos. A construção difere na abordagem em cenários causais e acausais, embora a matemática envolvida para ambos seja semelhante. Mostramos por que nossa generalização de inferência é não-comutativa e em que caso ela se reduz ao caso clássico e comutativo de inferência Bayesiana. De posse desses conceitos, apresentamos um critério para determinar compatibilidade de perspectivas e a matemática por trás deste critério, também mostramos como o critério engloba as diferentes visões de descrição probabilística da inferência Bayesiana, o ponto de vista objetivista e subjetivista. Já o capítulo 3 foca na aplicação do critério de compatibilidade Bayesiana geral num problema mental sem solução aparente, sendo este o paradoxo original do amigo de Wigner. Conclusões e sugestões para trabalhos futuros são deixadas para o capítulo 4. Por fim, há também um apêndice que mostra como o uso de Inteligência Artificial foi utilizado na confecção deste manuscrito.

2 FORMALISMO MATEMÁTICO

Este capítulo será dedicado a uma revisão ou apresentação do formalismo matemático e físico que será utilizado para resolução do paradoxo do amigo de Wigner. Parte do conteúdo é bem conhecido, por exemplo, álgebra linear e seus conceitos (espaços vetoriais, ortogonalidade, bases e operadores), e conceitos de informação quântica como definição de portas lógicas, projetores e medições. Já o fim do capítulo trata de tópicos mais modernos, incluindo, por exemplo, formalismo de estados condicionais para descrição de mecânica quântica, Bayesianismo objetivista e subjetivista, compatibilidade de medições, etc.

2.1 ÁLGEBRA LINEAR

A álgebra linear é um braço fundamental da matemática em si. Destaca-se ainda mais por sua aplicação em diversas áreas, incluindo física, computação, informação quântica e estatística. Ela fornece ferramentas para modelar e resolver problemas envolvendo múltiplas variáveis através do estudo de vetores, matrizes e sistemas de equações lineares, além de conceitos como espaços vetoriais e transformações lineares.

2.1.1 ESPAÇOS VETORIAIS

Em nosso trabalho, se faz necessário o uso dos espaços vetoriais, sobretudo os euclidianos. São objetos matemáticos abstratos úteis para a descrição de fenômenos diversos, em particular, sistemas quânticos, que serão abordados à frente.

Um espaço vetorial nada mais é que um conjunto munido de uma soma e multiplicação por escalares, que satisfazem certas propriedades, e são oriundos de um dado corpo \mathbb{F} . (22)

A definição para espaços vetoriais sobre um corpo, digamos, dos complexos, que será mais útil no âmbito dos fundamentos de mecânica quântica é a seguinte.

Seja $\Sigma = \{1, \dots, m\}$ um conjunto finito e não-vazio. Um espaço vetorial é o conjunto de funções que levam elementos de Σ a elementos no corpo dos complexos \mathbb{C} dotado de duas operações, a adição e a multiplicação por escalar,

$$\left\{ \{u = \Sigma \rightarrow \mathbb{C}\} = \mathbb{C}^\Sigma = \mathbb{C}^m, +, \cdot \mathbb{C} \right\}.$$

A adição

$$\begin{aligned} + : \mathbb{C}^\Sigma \times \mathbb{C}^\Sigma &\rightarrow \mathbb{C}^\Sigma, \\ (u, v) &\mapsto u + v, \end{aligned} \tag{2.1}$$

é definida pontualmente

$$(u + v)(a) := u(a) + v(a), \quad \forall a \in \Sigma$$

e satisfaz as seguintes propriedades,

1. (Comutatividade): $u + v = v + u, \forall u, v.$
2. (Associatividade): $u + (v + w) = (u + v) + w, \forall u, v, w.$
3. (Existência do elemento neutro): $u + 0 = u$, onde 0 é a função nula.
4. (Existência do elemento inverso): $u + u' = 0$, onde u' é o vetor inverso de u .

O produto por escalar no corpo, no caso, dos complexos

$$\cdot_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{\Sigma} \rightarrow \mathbb{C}^{\Sigma} \quad (2.2)$$

$$(\alpha, u) \mapsto \alpha u \quad (2.3)$$

também é definido pontualmente

$$(\alpha u)(a) = \alpha(u(a)), \quad \forall a \in \Sigma,$$

e possui as propriedades:

1. $1u = u, \forall u.$
2. $(\alpha_1\alpha_2)u = \alpha_1(\alpha_2u), \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}, \forall u.$
3. (Distributividade da multiplicação escalar): $(\alpha_1 + \alpha_2)u = \alpha_1u + \alpha_2u, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}, \forall u.$
4. (Distributividade da multiplicação na soma): $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall u, v.$

Dotamos ainda, o espaço vetorial¹ $\mathbb{C}^{\Sigma} = \mathcal{X}$ com duas operações, o produto interno e a norma, denotados, respectivamente por:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}, \quad (2.4)$$

$$\|\cdot\| : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}. \quad (2.5)$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ satisfaz

1. $\langle u, u \rangle \geq 0$ para todo u e $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$,
2. $\langle u, \alpha v + \beta w \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u, w \rangle$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, para todo $u, v, w \in \mathcal{X}$,
3. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$.

Não é difícil concluir que $\langle u, v \rangle \equiv \langle u|v \rangle := \sum_{a \in \Sigma} \overline{u(a)}v(a)$ satisfaz às exigências acima.

Demonstração. O conjunto dos u forma um espaço vetorial.

¹ Usaremos para os conjuntos como $\mathbb{C}^{\Sigma}, \mathbb{C}^{\Gamma}, \dots$, a notação $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ (22).

1. **Ida:** (\Rightarrow)

$$\langle u, u \rangle = \sum_{a \in \Sigma} \overline{u(a)} u(a) = \sum_{a \in \Sigma} |u(a)|^2 \geq 0, \quad (2.6)$$

pois $|u(a)|^2 \geq 0 \forall a \in \Sigma$, por propriedade da norma em \mathbb{C} .

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \Sigma} \|u(a)\|^2 = 0 &\implies \|u(a)\| = 0 \forall a \in \Sigma, \\ &\implies u(a) = 0 \forall a \in \Sigma. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Volta: (\Leftarrow)

$$n = 0 \forall a \implies \|u(a)\| = 0 \forall a \in \Sigma \implies \langle u|u \rangle = \sum_{a \in \Sigma} \|u(a)\|^2 = 0.$$

2. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, u, v e $w \in \mathcal{X}$ e $a \in \Sigma$,

$$\begin{aligned} \langle u, \alpha v + \beta w \rangle &= \sum_{a \in \Sigma} \overline{u(a)} (\alpha v(a) + \beta w(a)) \\ &= \sum_{a \in \Sigma} [\alpha \overline{u(a)} v(a) + \beta \overline{u(a)} w(a)] \\ &= \alpha \sum_{a \in \Sigma} \overline{u(a)} v(a) + \beta \sum_{a \in \Sigma} \overline{u(a)} w(a) \\ &= \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u, w \rangle. \end{aligned} \quad (2.8)$$

3. Dados e $u, v \in \mathcal{X}$ e $a \in \Sigma$

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \sum_{a \in \Sigma} \overline{u(a)} v(a) = \overline{\sum_{a \in \Sigma} u(a) \overline{v(a)}} \\ &= \overline{\sum_{a \in \Sigma} v(a) \overline{u(a)}} = \overline{\langle v, u \rangle}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

□

A norma, por sua vez, deve satisfazer

1. $\|u\| \geq 0 \forall u \in \mathbb{C}^\Sigma$ e $\|u\| = 0 \iff u = 0$,
2. $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\| \forall u \in \mathbb{C}^\Sigma$ e $\alpha \in \mathbb{C}$,
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \forall u, v \in \mathbb{C}^\Sigma$.

Assim como não é difícil concluir que

$$\|u\| = \sqrt{\langle u|u \rangle} = \sqrt{\sum_{a \in \Sigma} |u(a)|^2}, \quad (2.10)$$

satisfaz às propriedades acima, sendo chamada de norma euclidiana. Um espaço com tal produto interno e norma euclidiana definida pelo produto será dito um espaço Euclidiano.

Demonstração. Dado $\|u\| = \sqrt{\langle u|v \rangle} = \sqrt{\sum_{a \in \Sigma} |u(a)|^2}$.

1. Dado $x \in \mathcal{R}^+$, temos $\sqrt{x} \geq 0$. Por definição do *item* (1) das propriedades de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, temos $\langle u, u \rangle \geq 0$. Logo $\|u\| \geq 0$.

Em particular,

$$\|u\| = 0 \implies \sum_{a \in \Sigma} |u(a)|^2 = 0 \implies u(a) = 0 \forall a \in \Sigma.$$

2. Dado $\alpha \in \mathbb{C}$ e $u \in \mathcal{X}$, temos

$$\begin{aligned} \|\alpha u\| &= \sqrt{\sum_{a \in \Sigma} |\alpha u(a)|^2} = \sqrt{|\alpha|^2 \sum_{a \in \Sigma} |u(a)|^2} \\ &= |\alpha| \sqrt{\sum_{a \in \Sigma} |u(a)|^2} = |\alpha| \|u\|. \end{aligned} \tag{2.11}$$

3. Para $u, v \in \mathbb{C}^\Sigma$, temos:

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + \langle u, v \rangle + \overline{\langle u, v \rangle} \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle u, v \rangle \\ &\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2|\langle u, v \rangle| \\ &\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| \quad (\text{por desigualdade de Cauchy-Schwarz}^2.) \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2. \end{aligned}$$

Tomando a raiz quadrada de ambos os lados (como ambos os lados são não-negativos), temos:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Portanto, $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ define uma norma em \mathbb{C}^Σ , chamada **norma euclidiana**. \square

Os espaços vetoriais de interesse em mecânica quântica são chamados de espaços de Hilbert (31). Um espaço de Hilbert é um espaço normado, completo (qualquer sequência

² Para todos $u, v \in \mathbb{C}^\Sigma$, vale: $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$. Se $u = 0$ ou $v = 0$, ambos os lados são zero, e a desigualdade é satisfeita. Caso contrário, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, considere a função:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &:= \|v - \lambda u\|^2 = \langle v - \lambda u, v - \lambda u \rangle = \langle v, v \rangle - \bar{\lambda} \langle u, v \rangle - \lambda \langle v, u \rangle + |\lambda|^2 \langle u, u \rangle \\ &= \|v\|^2 - 2 \operatorname{Re}(\bar{\lambda} \langle u, v \rangle) + |\lambda|^2 \|u\|^2. \end{aligned}$$

Como $f(\lambda) \geq 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, escolha: $\lambda := \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|^2}$.

Substituindo: $f(\lambda) = \|v\|^2 - \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\|u\|^2} \geq 0 \implies |\langle u, v \rangle|^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$. Portanto: $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

de Cauchy converge para um elemento do espaço. No sentido que, se faz necessário que resultados de operações entre elementos do espaço sejam elementos que pertençam ao mesmo. Se esse não for o caso, realiza-se uma extensão na construção do espaço para conter aqueles elementos, de forma que se torne completo) com a norma induzida pelo produto interno, como em (2.10)). Para concluir esta seção, faremos um comentário. É comum na literatura utilizar a notação de Dirac, em que as funções $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ são representadas por $|u\rangle$.

2.1.2 CONJUNTOS ORTOGONAIS

Um vetor v em \mathcal{X} é dito combinação linear de vetores u_1, u_2, \dots, u_n em \mathcal{X} se existem escalres a_1, \dots, a_n em \mathbb{C} tal que

$$v = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n = \sum_{i=1}^n a_i u_i \quad (2.12)$$

Um *vetor unitário* é um vetor cuja norma é igual a 1. Isto é, um vetor v é unitário quando $\|v\| = 1$ (29).

A coleção de vetores não-nulos $\{u_a : a \in \Gamma\} \subset \mathbb{C}^\Sigma$ indexado por um conjunto finito não-vazio Γ , é dita um *conjunto ortogonal* quando $\langle u_a | u_b \rangle = 0$ para todas as escolhas de a e $b \in \Gamma$ em que $a \neq b$. Esse conjunto é linearmente independente. De fato

$$\sum_{a \in \Gamma} \alpha_a u_a = 0 \implies \langle u_b, \sum_{a \in \Gamma} \alpha_a u_a \rangle = \sum_{a \in \Gamma} \alpha_a \langle u_b, u_a \rangle = \alpha_b \langle u_b, u_b \rangle = 0 \implies \alpha_b = 0,$$

com $b \in \Gamma$ tomado arbitrariamente. Se os vetores forem *unitários* o conjunto será dito *ortonormal*. Seja \mathcal{X} um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{C} . Um *subespaço* de \mathcal{X} é qualquer subconjunto, digamos $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{X}$, em que é ele próprio um espaço vetorial sobre \mathbb{C} , com as operações de adição vetorial e multiplicação escalar herdadas de \mathcal{X} . Exemplos pode ser vistos em (29).

Definição 1. *Seja S um conjunto de vetores em um espaço vetorial \mathcal{X} . O subespaço gerado por S é definido como a interseção \mathcal{W} de todos os subespaços de \mathcal{X} que contêm S . Quando S é um conjunto finito de vetores, $S = \{u_a, u_b, \dots, u_n\}$, chamaremos simplesmente \mathcal{W} de o subespaço gerado pelos vetores u_a, u_b, \dots, u_n .*

Conjuntos linearmente independentes podem ser ditos bases ordenadas do espaço expandido por eles. Um conjunto ortogonal $\{u_a : a \in \Gamma\} \subseteq \mathbb{C}^\Sigma$ é dito base ortogonal de \mathbb{C}^Σ se, e só se $|\Gamma| = |\Sigma|$. A base dita *canônica* de \mathbb{C}^Σ é dada por $\{e_a : a \in \Sigma\}$ onde

$$e_a(b) = \begin{cases} 1 & \text{se } a = b, \\ 0 & \text{se } a \neq b. \end{cases} \quad (2.13)$$

Com mais detalhes

$$e_2(1) = e_2(3) = \dots = e_2(|\Sigma|) = 0 \text{ e } e_2(2) = 1,$$

de modo que

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

2.1.3 OPERADORES LINEARES

Definição 2. *Sejam \mathcal{X} e \mathcal{Y} espaços vetoriais sobre o corpo \mathbb{C} . Um mapeamento linear de \mathcal{X} em \mathcal{Y} é uma função $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ tal que*

$$A(\alpha u + v) = \alpha A(u) + A(v)$$

para todos $u, v \in \mathcal{X}$ e todos os escalares $\alpha \in \mathbb{C}$.

Dados espaços euclidianos complexos \mathcal{X} e \mathcal{Y} , definimos $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ a coleção de todos os mapeamentos lineares da forma $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$.

O conjunto de operadores lineares forma um espaço vetorial com produto interno onde $\dim(L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})) = \dim(\mathcal{X})\dim(\mathcal{Y})$. De fato, sejam $\{e_b | b \in \Sigma\}$ e $\{f_a | a \in \Gamma\}$ bases de $\mathcal{X} = \mathbb{C}^\Sigma$ e $\mathcal{Y} = \mathbb{C}^\Gamma$ respectivamente. Para cada A associamos uma única $\dim \mathcal{Y} \times \dim \mathcal{X}$ -matriz M_A que o representa com entradas

$$M_A(a, b) = \langle f_a, Ae_b \rangle. \quad (2.15)$$

Por outro lado, dada uma $\dim \mathcal{Y} \times \dim \mathcal{X}$ -matriz M com entradas $M(a, b)$, definimos um operador linear,

$$(A_M u)(a) = \sum_{b \in \Sigma} M(a, b)u(b). \quad (2.16)$$

As operações $A \mapsto M_A$ e $M \mapsto A_M$ são as inversas (lineares) uma da outra, estabelecendo a bijeção entre $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ e o espaço de matrizes com dimensão $\dim \mathcal{Y} \times \dim \mathcal{X}$. Dado $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, construa M_A :

$$M_A(a, b) = \langle f_a, Ae_b \rangle. \quad (2.17)$$

Dado $M(a, b)$, construa A :

$$(A_M u)(a) = \sum_{b \in \Sigma} M(a, b)u(b). \quad (2.18)$$

$$(A_M e_{b'}) (a) = \sum_{b \in \Sigma} M(a, b)e_{b'}(b) = \sum_{b \in \Sigma} M(a, b)\delta_{bb'} = M(a, b') = \langle f_a, Ae_{b'} \rangle. \quad (2.19)$$

Este isomorfismo mostra que $\dim(L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})) = \dim(\mathcal{X})\dim(\mathcal{Y})$, como afirmado.

Algumas operações sobre $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ São definidas pontualmente pela matriz que o representa. São elas:

1. Conjugação complexa- $\bar{A} \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, tal que

$$\bar{A}(a, b) = \overline{A(a, b)}, \quad \forall a \in \Gamma \text{ e } \forall b \in \Sigma.$$

2. Transposição- $A^\top \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, tal que

$$A(a, b) = A(b, a), \quad \forall a \in \Gamma \text{ e } \forall b \in \Sigma.$$

3. Adjunta- $A^* \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ é o único operador que satisfaz

$$\langle u, Av \rangle = \langle A^*u, v \rangle.$$

É possível mostrar que $A^* = \bar{A}^\top$.

Sejam $u, v \in \mathcal{X}$. Pela definição do adjunto em termos do produto interno hermitiano padrão em \mathcal{X} , temos $\langle u, Av \rangle = \langle A^*u, v \rangle$. Mas o lado esquerdo pode ser reescrito como

$$\langle u, Av \rangle = (u^*)(Av) = (u^*A)v = (\bar{A}^\top u)^*v = \langle \bar{A}^\top u, v \rangle.$$

Como isso vale para todos $u \in \mathcal{X}$, segue que $A^*u = \bar{A}^\top u$, e portanto $A^* = \bar{A}^\top$.

Dado $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, algumas outras definições serão úteis. A primeira é o suporte do operador A . O suporte de A é o subespaço gerado pelos autovetores associados a autovalores não nulos.

Já o núcleo de A é definido por:

$$\ker[A] = \{x \in \mathcal{X} \mid A(x) = 0\}.$$

Antes de passarmos para a próxima subseção, discutiremos sobre outro operador de interesse. Dado $|u\rangle \in \mathcal{X}$, podemos identificá-lo com um operador linear em $L(\mathbb{C}, \mathcal{X})$ tal que $\alpha \mapsto \alpha |u\rangle$. O mapa u^* é um funcional linear em $L(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ e pela própria maneira de obtenção de u^* , o adjunto de u , temos

$$u^*v = \langle u|v\rangle, \quad \forall v \in \mathcal{X}. \quad (2.20)$$

A notação $u^* = \langle u|$ será também utilizada à frente.

2.1.4 PROJETORES E MEDIÇÕES

A descrição matemática da mecânica quântica é feita com a seguinte representação: Sistemas físicos são representados em um espaço de Hilbert (31). Estados do sistema são representados por operadores densidade (definidos logo abaixo) e por fim, observáveis são representados por operadores auto-adjuntos que atuam no espaço de Hilbert correspondente. Assim, abaixo destacaremos ainda outros objetos matemáticos de interesse que serão úteis nesta representação. Começaremos com operadores positivos semidefinidos.

2.1.4.1 Operadores positivos semidefinidos

$A \in L(\mathcal{X})$ é dito positivo semidefinido quando existir algum $B \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ tal que $A = B^*B$, para algum espaço \mathcal{Y} (22).

O conjunto dos operadores semidefinidos positivos que atuam em \mathcal{X} é denotado por $\text{Pos}(\mathcal{X})$, de modo que

$$\text{Pos}(\mathcal{X}) = \{B^*B : B \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\}. \quad (2.21)$$

Vale dizer que todo operador positivo semidefinido é, em particular, Hermitiano (22).

2.1.4.2 Estados

Um estado quântico é um elemento do conjunto

$$D(\mathcal{X}) = \{\rho \in \text{Pos}(\mathcal{X}) : \text{Tr}(\rho) = 1\}$$

de operadores chamados densidade em \mathcal{X} . Um estado é dito puro quando tem a forma $\rho = uu^* = |u\rangle\langle u|$. Se o estado não for puro, será escrito como combinação convexa de matrizes da forma $|u\rangle\langle u|$. Ou seja

$$\rho = \sum_i p_i |u_i\rangle\langle u_i|, \quad \text{com } p_i \geq 0 \text{ e } \sum_i p_i = 1. \quad (2.22)$$

2.1.4.3 Projeções ortogonais

Um dado operador positivo semidefinido será uma projeção ortogonal se, e somente se, satisfizer $P^2 = P$, ou seja, se for idempotente, (23). Este resultado é suficiente para caracterizarmos nossos projetores. Equivalentemente, podemos pensar uma projeção ortogonal como sendo qualquer operador hermitiano com autovalores 0 e 1.

2.1.4.4 Medição

Definição 3. *Uma medição sobre um espaço euclidiano complexo \mathcal{X} é uma função da forma*

$$\mu : \Gamma \longrightarrow \{P_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \subset \text{Pos}(\mathcal{X}),$$

onde Γ é um conjunto finito, não-vazio, de resultados macroscópicos da medição, por vezes chamados simplesmente de ‘saídas de medição’ ou respostas e cada $(P_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ é um operador positivo semidefinido associado à resposta γ . Uma função de medição válida, satisfaz o seguinte vínculo:

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \mu(\gamma) = I_{\mathcal{X}}. \quad (2.23)$$

É comum associarmos a medição μ com a coleção de operadores $\{P_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, onde $P_\gamma = \mu(\gamma)$ para todo $\gamma \in \Gamma$.

Cada operador P_γ é chamado de operador de medição associado à resposta $\gamma \in \Gamma$. Quando aplicamos uma medição assim definida, duas coisas acontecem:

1. Um elemento de Γ é aleatoriamente selecionado como saída da medição, com probabilidade associada a cada possível saída, dada por $p(\gamma) = \langle \mu(\gamma), \rho \rangle$.
2. O estado ρ deixa de existir em uma de duas opções. Uma possibilidade é que a medição destrói o sistema (*e.g.*, um fóton é absorvido por um detector). A outra possibilidade é que o estado colapsa para outro, em um processo de medida persistente, pois a medição o ‘colapsa’, substituindo-o por outro estado³.

Vale lembrar que estes dois itens são axiomas de medição no contexto de mecânica quântica, e não resultados obtidos (22). Esta definição garante que o vetor de probabilidades de respostas $\vec{p} \in \mathbb{R}^\Gamma$ seja de fato um vetor de probabilidade para todo $\rho \in D(\mathcal{X})$. Cada entrada $p(\gamma)$ de \vec{p} é um número real não-negativo, pois o produto interno de dois operadores positivos semidefinidos é real e não-negativo, e as probabilidades somam para 1, segundo o vínculo em (2.23). Mais detalhadamente:

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} p(\gamma) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \langle \mu(\gamma), \rho \rangle = \langle I_{\mathcal{X}}, \rho \rangle = \text{Tr}(\rho) = 1,$$

garantindo a interpretação probabilística desejada.

2.2 CANAIS QUÂNTICOS

Canais quânticos são componentes essenciais em teoria quântica (22). Eles descrevem a evolução de estados de um sistema por processos físicos. Em termos matemáticos, eles são descritos por mapas *CPTP* (*Completely Positive Trace Preserving*), isto é, Φ é um canal quântico quando for um mapeamento linear

$$\Phi : L(\mathcal{X}) \rightarrow L(\mathcal{Y}), \quad (2.24)$$

satisfazendo duas restrições:

- 1- Φ é completamente positivo, ou seja, $(\Phi \otimes I_{L(\mathcal{Z})})(P) \in D(\mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z})$, $\forall P \in D(\mathcal{X} \otimes \mathcal{Z})$ e para qualquer espaço de Hilbert finito-dimensional \mathcal{Z} .
- 2- Φ preserva o traço:

$$\text{Tr}\Phi(X) = \text{Tr}X, \quad \forall X \in L(\mathcal{X}). \quad (2.25)$$

³ Esse tipo de processo de medição do exemplo é chamado *destrutivo*, no qual a medição faz o estado e o sistema físico inicial cessarem de existir após a obtenção do resultado. No entanto, como foi mencionado, existem as formas de medição não-destrutivas. Nestas, o sistema pode ser preservado em parte ou totalmente após a medição, dependendo da interação entre sistema e aparelho, como por exemplo, no ‘conhecido’ experimento de Stern-Gerlach (32).

A operação de transposição parcial nos dá um exemplo que ilustra por que a *positividade completa* é um requisito importante para operações quânticas. Por definição, essa operação transpõe o operador densidade, digamos, na base computacional:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T \mapsto \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}.$$

Essa aplicação preserva a positividade de apenas parte do sistema. No entanto, suponha um sistema inicialmente no estado emaranhado

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle).$$

Se aplicarmos a transposição parcial, ou seja, transposição do primeiro *ket*, enquanto o segundo permanece inalterado, o operador densidade do sistema, após essa transformação, é dado por

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Um cálculo direto mostra que este operador possui autovalores $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$, o que revela que ele não é um operador densidade válido pois não é positivo semidefinido.

Portanto, a transposição é um exemplo de mapa positivo que não é completamente positivo. Ou seja, preserva a positividade de operadores no sistema principal, mas pode deixar de preservar essa propriedade quando aplicado a sistemas maiores que contêm o sistema principal como subsistema.

Para aprofundar os detalhes sobre canais quânticos, veja a seção 2.2 de (22).

2.2.1 POVM - POSITIVE OPERATOR-VALUED MEASURE

De posse das definições de operadores densidade, operadores positivos semidefinidos e medições, temos tudo que precisamos para introduzir a notação/roupagem de uma ferramenta importante conhecida na literatura como *POVM* (16, 27). A teoria quântica fornece a ferramenta para extrair a probabilidade da obtenção de certo valor de algum observável em uma medição. A teoria também descreve qual o estado do sistema após certo valor ser obtido. Se estamos realizando uma medição cujo estado cessa de existir, então nos interessa somente a estatística da medição. Neste caso, tais dados estatísticos são capturados pelo que chamamos um *POVM- Positive Valued Measure* (16). Imagine realizar uma medição generalizada num sistema quântico num dado estado $|\psi\rangle$. Essa medição é representada por um conjunto de operadores de medição $\{M_m\}$ onde os m são possíveis resultados da medição com probabilidade $p(m)$ é dada por

$$p(m) = \langle \psi | M_m^* M_m | \psi \rangle,$$

Assim, podemos definir operadores $E_m = M_m^* M_m$, e o conjunto $\{E_m\}$ é chamado de POVM, onde cada E_m é um elemento do POVM. Esses operadores satisfazem as seguintes condições:

1. São hermitianos: $E_m = E_m^*$,
2. São positivos: $\langle \psi | E_m | \psi \rangle \geq 0$,
3. Formam um conjunto completo: $\sum_m E_m = I$. Mais detalhes podem ser vistos em (23).

É importante ressaltar que esse conceito de POVM não é diferente do conceito de medição (projetiva) como foi definida, é apenas uma mudança de roupagem.

2.3 PORTAS LÓGICAS QUÂNTICAS

Portas lógicas são conceitos fundamentais da eletrônica digital, responsáveis por processar sinais binários (0 e 1) com base em regras específicas da lógica Booleana (28). Elas realizam operações lógicas, como E (*AND*), OU (*OR*), NÃO (*NOT*), OU EXCLUSIVO *XOR*, entre outras. Matematicamente, portas lógicas implementam funções Booleanas compostas por variáveis binárias e operadores lógicos. Fisicamente, são construídas com transistores e formam circuitos digitais mais complexos, como somadores e multiplexadores, para aprofundar-se no assunto, veja (28).

Uma porta lógica quântica é representada por operadores unitários \mathcal{U} . É necessário que esse operador seja unitário para conservar as probabilidades. Dado um estado $|\psi\rangle$, transforma-lo em um estado $|\phi\rangle$ pela ação da porta lógica:

$$\mathcal{U} |\psi\rangle = |\phi\rangle. \quad (2.26)$$

A porta Hadamard, digamos \mathcal{H} , por exemplo, atua sobre \mathbb{C}^2 , de forma que $|\psi\rangle$ é transformado da seguinte maneira,

$$\mathcal{H} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a + b \\ a - b \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

pois a mesma \mathcal{H} pode ser representada por uma matriz da forma

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

A porta de tipo *Cnot* (*Controlled-NOT*), que chamaremos \mathcal{U}_{Cnot} atua em um par de qubits de $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. O seu domínio é formado por dois estados de entrada sendo o primeiro o controle e o segundo o alvo. Já a saída mantém a primeira entrada e faz a soma (módulo 2) entre as duas:

$$\mathcal{U}_{Cnot}(|a\rangle \otimes |b\rangle) = |a\rangle \otimes |b \oplus a\rangle. \quad (2.29)$$

Sua representação matricial é:

$$\mathcal{U}_{Cnot} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

é preciso enfatizar que essa equação trata da sua atuação na base computacional e que o símbolo \oplus indica a soma de módulo 2.

Para vetores arbitrários em $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, a extensão da atuação da porta é feita por linearidade. Uma das aplicações para portas consiste em utilizá-las em protocolos de teletransporte quântico. Mais informações podem ser vistos em (23).

2.4 ESTADOS CONDICIONAIS

A teoria quântica pode ser vista, até certo ponto, como uma generalização não-comutativa da teoria clássica de inferência Bayesiana, descrita pelo formalismo de estados condicionais (15). Há algumas restrições causais e condições (de existência de estados conjuntos) que devem ser atendidos, porém estes cenários não são do interesse deste trabalho e não abordaremos tais condições. Estas restrições são bem destacadas em (3). Dadas as devidas ressalvas, iniciaremos formalizando nossos conceitos clássicos de distribuição de probabilidades usual, conjunta e condicional como casos especiais desta teoria de inferência Bayesiana. Como veremos, por exemplo, distribuições de probabilidade surgem como o caso particular de operadores densidade atuando em certo espaço de Hilbert. A analogia é vasta, porém incompleta (15). Inferência Bayesiana clássica não precisa de relações causais entre variáveis, ou eventos, para expressar incertezas e probabilidades. Já no formalismo quântico, a relação de causalidade entre regiões modifica radicalmente a descrição do sistema. Iremos construir o formalismo de inferência Bayesiana a partir de um certo produto não-comutativo e não-associativo entre operadores, como veremos à frente, e em posse dele poderemos reconstruir todos os equivalentes clássicos da teoria de probabilidades. Essa seção é baseada nos trabalhos (13) (15).

2.4.1 INTRODUÇÃO AO CONCEITO DE REGIÕES CLÁSSICAS E REGIÕES QUÂNTICAS

O formalismo que passamos a descrever utiliza largamente um conceito primitivo; o de uma *região*. Sua definição não será fornecida, embora possamos sugerir o seu significado, de forma bastante empírica/operacional. Se por um lado, a palavra região é utilizada em análise/topologia para definir conjuntos abertos simplesmente conexos (24), podemos importá-la com este sentido para descrever, digamos um setor do espaço (ou espaço-tempo) onde realizam-se experiências, como um laboratório, por exemplo. Suponhamos

que numa certa região são realizados experimentos, cuja descrição é feita por variáveis aleatórias clássicas, digamos, R, S, T, X, Y , e distribuições de probabilidades $P(R), P(S)$ e etc. Denotaremos $P_i = P(R = r_i)$ a probabilidade de R assumir o valor de r_i , com $i = 1, \dots, n$. Neste caso, a região é dita clássica. Notamos que existe uma bijeção natural entre a distribuição $P(R)$ e um operador diagonal ρ atuando em certo espaço de Hilbert n -dimensional representada em uma base preferencial,

$$P(R) \longleftrightarrow \rho = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & P_n \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Notemos que

$$\text{Tr } P = \sum_{i=1}^N P_i = 1,$$

com $P_i \geq 0$. Este comentário simplesmente codifica o fato que associamos a região clássica a um espaço de Hilbert \mathcal{H} com uma base preferencial e distribuições de probabilidade são descritas pelo subconjunto de operadores densidade $D(\mathcal{H})$ cujas representações matriciais naquela base escolhida sejam diagonais. Analisando as representações dos operadores é válido lembrar que produto de $n \times m$ matrizes é, em geral, não-comutativo, dado que $n \neq m$. Logo, elas comutam no caso onde são diagonais de mesmo tamanho pois $n = m$. Já no âmbito de operadores densidade em \mathcal{H} , isto significa que dois operadores comutam quando podemos diagonalizar suas representações simultaneamente em uma base em particular.

Pode ocorrer também que estejamos executando experimentos em sistemas quânticos. Neste caso, a região, digamos, A , será dita quântica. Associada a ela está um espaço de Hilbert \mathcal{H}_A . Neste caso, se medimos um $POVM = \{E^a\}$ quando o sistema estiver preparado em um estado descrito por $\sigma \in D(\mathcal{H}_A)$, as probabilidades de encontrarmos o valor a associado a E^a são dadas pela regra de Born $P_a = \text{Tr}(\sigma E^a)$. Observamos, assim, que distribuições de probabilidade clássicas podem ser representadas por operadores densidade diagonais em uma base preferencial. Tais representações não apresentam elementos fora da diagonal, ou seja, não carregam informações de coerência ou superposição entre diferentes valores possíveis das variáveis aleatórias — são, nesse sentido, descrições puramente estatísticas. Por outro lado, operadores densidade quânticos em geral não são diagonais, e seus elementos fora da diagonal (as coerências) codificam propriedades exclusivamente quânticas, como a possibilidade de interferência e superposição de estados. Portanto, enquanto toda distribuição clássica de probabilidade pode ser representada como um operador densidade especial (diagonal), o inverso não é verdadeiro: a estrutura completa de um operador densidade quântico não pode, em geral, ser reproduzida por uma distribuição clássica. Novamente, com este comentário, concluímos que operadores

densidade contém muito mais informação sobre sistemas do que meramente distribuições de probabilidade clássicas, como discutido acima.

2.4.1.1 Uma breve revisão da teoria clássica de probabilidades

Esta seção será baseada na formulação da inferência Bayesiana clássica segundo (13). Considere variáveis aleatórias clássicas X e Y , com valores discretos x e y , respectivamente. No caso clássico, a probabilidade conjunta $P(X, Y)$ descreve o conhecimento ou informação de um observador sobre as variáveis aleatórias X e Y . A distribuição de probabilidades condicional $P(Y|X)$ é função das duas variáveis e é definida por

$$P(Y|X) = \frac{P(X, Y)}{P(X)}; \text{ com } P(X) \neq 0. \quad (2.32)$$

A partir da probabilidade conjunta, podemos definir a relação de marginalização

$$P(Y) = \sum_X P(X, Y). \quad (2.33)$$

Por fim, unindo (2.32) e (2.33) é possível obter a regra de propagação de crença

$$P(Y) = \sum_X P(Y|X) \cdot P(X). \quad (2.34)$$

2.4.1.2 Cenário acausal

Consideremos inicialmente a situação descrita na Figura 1-(a), quando as regiões A e B não possuem relação causal entre si, mas, eventualmente, podem estar correlacionadas. Este cenário é conhecido como acausal.

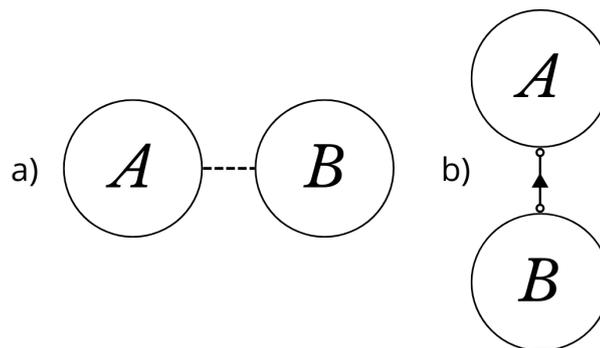


Figura 1- (a) Regiões quânticas acausalmente relacionadas. (b) Regiões quânticas causalmente relacionadas.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

No formalismo de estados condicionais, $\rho_{A,B} \in D(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ é o estado conjunto que descreve o conhecimento de um observador sobre duas regiões quânticas A e B descritas pelo espaço $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.

Definição 4. Um estado condicional acausal para B dado A é um operador positivo semidefinido $\rho_{B|A} \in D(\mathcal{H}_{AB}) = D(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ tal que

$$\text{Tr}_B(\rho_{B|A}) = I_A, \quad (2.35)$$

onde I_A é o operador identidade em $L(\mathcal{H}_A)$.

Esta definição é o análogo ao caso clássico, onde a probabilidade condicional $P(Y|X)$ fornece para cada $X = x$ uma distribuição para Y de modo que $\sum_Y P(Y|X = x) = 1$.

Assim como na teoria de probabilidades clássica temos a relação entre as distribuições conjunta e condicional, podemos emular esta estrutura. Dado ρ_A e $\rho_{B|A}$ definimos o estado conjunto $\rho_{A,B} \in L(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ por

$$\rho_{A,B} = (\rho_A^{\frac{1}{2}} \otimes I_B) \rho_{B|A} (\rho_A^{\frac{1}{2}} \otimes I_B). \quad (2.36)$$

Além disso, é preciso usar $\rho_A^{\frac{1}{2}}$ para garantir que o operador conjunto resultante tenha a estrutura de um operador positivo.

É conveniente, então, definirmos o seguinte produto.

Definição 5. Sejam M e N operadores positivos semidefinidos quaisquer no espaço de Hilbert \mathcal{H} . Define-se o produto não-comutativo e não-associativo \star entre M e N da seguinte forma:

$$M \star N \equiv N^{\frac{1}{2}} M N^{\frac{1}{2}}, \quad (2.37)$$

para $M, N \in \text{Pos}(\mathcal{H})$.

No caso clássico, onde todos os operadores comutam, o produto \star se reduz ao operador produto usual. Neste caso, as fórmulas de inferência Bayesiana se reduzem para suas contrapartes clássicas, como veremos adiante na seção **2.4.1.4**. Esta definição do produto estrela nos permite escrever a equação (2.36) como:

$$\rho_{A,B} = \rho_{B|A} \star \rho_A. \quad (2.38)$$

É do nosso interesse isolar $\rho_{B|A}$ para obter o análogo à equação (2.32), isto é, dados $\rho_{A,B}$ e ρ_A , escreveremos

$$\rho_{B|A} = \rho_{A,B} \star \rho_A^{-1}. \quad (2.39)$$

$\rho_A^{-1} \in L(\text{supp}[\rho_A])$, isto é, a inversão é feita no subespaço gerado pelos autovetores de ρ_A associados a autovalores não-nulos.

Assim traçaremos outros análogos, bem como foi feito para estados condicionais, o conceito de marginalização, o Teorema de Bayes e propagação de crença (25). Este será o ferramental para tratarmos o ponto de vista objetivista e subjetivista do critério de compatibilidade, foco central do nosso trabalho. Podemos ver a generalização do formalismo na tabela 1.

Conceito	Clássico	Quântico
Estado	$P(X)$	ρ_A
Estado conjunto	$P(X, Y)$	$\rho_{A, B}$
Marginalização	$P(Y) = \sum_X P(X, Y)$	$\rho_B = \text{Tr}_A(\rho_{A, B})$
Estado condicional	$P(Y X)$	$\rho_{B A}$
Normalização	$\sum_Y P(Y X) = 1$	$\text{Tr}_B(\rho_{B A}) = I_A$
Relação entre estado conjunto e condicional	$P(X, Y) = P(Y X)P(X)$	$\rho_{A, B} = \rho_{B A} \star \rho_A$
Estado condicional dado o conjunto	$P(Y X) = \frac{P(X, Y)}{P(X)}$	$\rho_{B A} = \rho_{A, B} \star \rho_A^{-1}$
Teorema de Bayes	$P(X Y) = \frac{P(Y X)P(X)}{P(Y)}$	$\rho_{A B} = \rho_{B A} \star (\rho_A \rho_B^{-1})$
Propagação de crença	$P(Y) = \sum_X P(Y X)P(X)$	$\rho_B = \text{Tr}_A(\rho_{B A} \rho_A)$

Tabela 1 – Analogia entre a teoria clássica de inferência Bayesiana e o formalismo de estados condicionais na teoria quântica. Retirado de (13).

2.4.1.3 Cenário causal

No caso de um cenário causal, como visto em (b) na figura 1, temos outro artifício matemático para descrição de estados condicionais.

Definição 6. *Um estado condicional causal de B dado A é um operador $\varrho_{B|A}$ em $L(\mathcal{H}_{AB})$ que pode ser escrito da forma*

$$\varrho_{B|A} = \rho_{B|A}^{T_A}, \quad (2.40)$$

onde $\rho_{B|A}$ é acausal e T_A é transposição parcial em alguma base de \mathcal{H}_A .

A transposição parcial está associada à inversão temporal somente no setor A (17), garantindo então a causalidade entre A e B.

2.4.1.4 O caso clássico como caso particular

Como esse modelo de estados condicionais se trata de uma generalização, é importante que consigamos reproduzir os resultados prévios, que são bem conhecidos na teoria de probabilidades clássica.

Considere variáveis clássicas X e Y em respectivos espaços de Hilbert \mathcal{H}_X e \mathcal{H}_Y com dimensões iguais ao número de valores distintos que cada variável pode acessar. Sejam $\{|x\rangle\}$ e $\{|y\rangle\}$ bases ortonormais em cada espaço. As distribuições conjunta, marginal e

condicional são representadas através dos seguintes operadores

$$\rho_{X,Y} = \sum_{x,y} P(X = x, Y = y) |x\rangle \langle x|_X \otimes |y\rangle \langle y|_Y, \quad (2.41)$$

$$\rho_X = \sum_x P(X = x) |x\rangle \langle x|_X = \text{Tr}_Y(\rho_{X,Y}), \quad (2.42)$$

$$\rho_{Y|X} = \sum_{x,y} P(Y = y|X = x) |x\rangle \langle x|_X \otimes |y\rangle \langle y|_Y. \quad (2.43)$$

Repare que a última igualdade em (2.42) é consistente com a marginalização. Veja a terceira linha da tabela 1.

Utilizando estas três expressões podemos verificar explicitamente que $\text{Tr}_Y(\rho_{Y|X}) = I_X$, $\rho_{X,Y} = \rho_{Y|X} \star \rho_X$ e $\rho_{Y|X} = \rho_{X,Y} \star \rho_X^{-1}$. Desta maneira, recobramos as fórmulas básicas da teoria de probabilidades clássica, vistas em **2.4.1.1**.

2.4.1.5 Média de ensembles e regra de Born

Podemos, também, ter operadores híbridos, clássico-quânticos. Por exemplo, média de ensembles. A interpretação causal desses estados é um processo que recebe uma variável clássica X como entrada e produz um estado quântico A como saída para cada $X = x$ sorteado com probabilidade $P(X = x)$. Um conjunto de estados $\{\rho_x^A\}$ será preparado na região quântica para um dado valor de x assumido por X , exceto se x for desconhecido. Nesse caso, faz-se média de estados de ensembles:

$$\rho_A = \sum_x P(X = x) \rho_x^A. \quad (2.44)$$

Para ter uma medição de uma região quântica vista por meio de uma relação causal, toma-se a região quântica como entrada, ou *input*, e obtém-se uma variável clássica como saída (*output*). A descrição é feita através de um *POVM* $\{E_A^y\}$, com a variável clássica Y varrendo todos os seus possíveis resultados.

Se o estado da região é ρ_A , então a probabilidade de obter $Y = y$ é dada pela Regra de Born:

$$P(Y = y) = \text{Tr}_A(E_A^y \rho_A). \quad (2.45)$$

Em seu análogo clássico, a região A é substituída por uma variável clássica X , o estado ρ_A pela distribuição $P(X)$ e os *POVM* pelas funções condicionais $\{P(Y = y|X)\}$. Sua relação também se dá através da propagação de crença na equação (2.34). Assim, escreve-se a distribuição de probabilidade clássica condicionada a uma região quântica.

A tabela 2 traduz vários conceitos e fórmulas do formalismo quântico convencional para o formalismo de estados condicionais.

2.5 COMPATIBILIDADE E CONCORDÂNCIA

Passamos agora a discutir a noção de compatibilidade em teoria quântica. É conveniente introduzir um pouco mais de notação agora para descrever cenários. Estamos

	Notação convencional	Formalismo de estados condicionais
Distribuição de probabilidade de X	$P(X)$	ρ_X
Probabilidade de $X = x$	$P(X = x)$	$\rho_{X=x}$
Conjunto de estados em A	$\{\rho_x^A\}$	$\varrho_{A X}$
Estado individual em A	ρ_x^A	$\varrho_{A X=x}$
POVM em A	$\{E_x^A\}$	$\varrho_{x A}$
Efeito individual em A	E_x^A	$\varrho_{X=x A}$
Canal de A para B	$\mathcal{E}^{B A}$	$\varrho^{B A}$
Regra de Born	$\forall x : P(X = x) = \text{Tr}_A(E_x^A \rho_A)$	$\rho_x = \text{Tr}_A(\varrho_{x A} \rho_A)$
Média de ensemble	$\rho_A = \sum_x P(X = x) \rho_x^A$	$\rho_A = \text{Tr}_X(\varrho_{A X} \rho_X)$
Ação de um canal quântico	$\rho_B = \mathcal{E}_{B A}(\rho_A)$	$\rho_B = \text{Tr}_A(\varrho_{B A} \rho_A)$
Composição de canais	$\mathcal{E}_{C A} = \mathcal{E}_{C B} \circ \mathcal{E}_{B A}$	$\varrho_{C A} = \text{Tr}_B(\varrho_{C B} \varrho_{B A})$
Regra de atualização de estado	$\forall x : P(X = x) \rho_x^B = \mathcal{E}_x^{B A}(\rho_A)$	$\rho_{x,B} = \text{Tr}_A(\varrho_{xB A} \rho_A)$

Tabela 2 – Tradução de conceitos e equações da notação convencional para o formalismo de estados condicionais. Retirado de (13)

usando letras para denotar regiões e usaremos números para representar os observadores-agentes. Na literatura de informação quântica, é comum associarmos os nomes Alice e Bob aos observadores-agente que atuam sobre as regiões A e B, respectivamente. Mas na interpretação deste trabalho, isto pode ser confuso, dado que os dois agentes podem atuar em sistemas distintos para atualizar um terceiro (emaranhado) remotamente, ou processando e pós-processando o mesmo sistema, ou, até mesmo, enxergar um sistema como evolução temporal do outro. Por isso, nossos agentes numerados serão Julio como 1 e Wigner como 2.

Na mecânica quântica, é comum assumir que se duas descrições sobre um mesmo sistema não dão resultados exatamente iguais, dada uma mesma medição, ou seja, mesmos estados pós-medição, mesma probabilidade de um dado ‘outcome’ ser sorteado, etc., uma das duas está mal feita e há algo de errado em um dos lados comparados (11, 12, 14). O conceito de compatibilidade de perspectivas desafia esta ideia olhando diferentes perspectivas pelo ângulo da inferência Bayesiana. Nessa visão, o coração de toda análise reside, direta ou indiretamente, nas noções do agente-observador sobre o que ele entende por compatibilidade e concordância.

Consideraremos que Wigner e Julio concordam sobre como usar mecânica quântica, estimar probabilidades via ‘Regra de Born’, estipular o tempo correto em que a medição foi realizada, e também concordam sobre o outro possuir esses conhecimentos.

2.5.1 COMPATIBILIDADE BAYESIANA EM TEORIA DE PROBABILIDADES CLÁSSICA

Vamos, primeiramente, considerar compatibilidade para variáveis aleatórias clássicas X e Y . Do ponto de vista de inferência Bayesiana, há sempre duas formas de interpretar discrepâncias entre duas descrições probabilísticas de diferentes observadores, sendo elas a objetivista e a subjetivista. Comentaremos sobre as duas separadamente, embora a

caracterização matemática de ambas se mantenha independente do viés. De maneira grosseira, o Bayesianismo subjetivista advoga que crenças racionais (as distribuições de probabilidade) são restritas apenas pelo que chamamos de “cálculo de probabilidades devido a Kolmogorov” (3, 15, 18). Já o objetivista defende que além do cálculo de probabilidades, adicionam-se as evidências disponíveis para estabelecer as crenças/probabilidades racionais sobre determinado sistema (20, 25).

2.5.1.1 Compatibilidade Bayesiana objetivista clássica

Vamos agora considerar compatibilidade para uma variável aleatória clássica Y . Para o Bayesianismo objetivista, a única forma das perspectivas de dois observadores sobre o mesmo sistema diferirem é se eles possuírem acesso a dados diferentes do sistema. Suponha que Julio tome conhecimento de uma variável aleatória X_1 e Wigner uma variável aleatória X_2 . Nesta visão, existe uma única distribuição de probabilidade preferencial $P(Y, X_1, X_2)$ que Julio e Wigner concordam. Compatibilidade de dois estados, neste caso, está na possibilidade de derivar ambos a partir de um único estado conjunto, condicionado a diferentes variáveis clássicas.

Considere que estamos em posse desta distribuição $P(Y, X_1, X_2)$. Lembre-se que ao marginalizar $P(Y, X_1, X_2)$ em, digamos X_2 , tomando $P(Y, X_1) = \sum_{X_2} P(Y, X_1, X_2)$, é possível extrair desta relação a probabilidade condicional com $P(Y|X_1) = \frac{P(Y, X_1)}{P(X_1)}$. Daí definimos:

Definição 7. (*Compatibilidade Bayesiana objetivista clássica*) Duas distrições de probabilidade $Q_1(Y)$ e $Q_2(Y)$ são compatíveis quando for possível construir um par de variáveis aleatórias X_1 e X_2 e uma distribuição conjunta $P(Y, X_1, X_2)$ tal que $Q_1(Y)$ pode ser obtida por um condicionamento Bayesiano sobre $X_1 = x_1$ para algum valor x_1 e $Q_2(Y)$ pode ser obtida analogamente para $X_2 = x_2$ para algum valor x_2 . Generalizando:

$$Q_j(Y) = P(Y|X_j = x_j), \quad (2.46)$$

para algum valor x_j de X_j . É necessário que $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) \neq 0$ para que possamos obter os dois valores de saída simultaneamente.

Essa definição de compatibilidade é equivalente, como veremos no teorema abaixo, a pedir que os suportes de $Q_1(Y)$ e de $Q_2(Y)$ tenham interseção não-trivial. Lembrando, o conjunto suporte de uma distribuição de probabilidade sobre a variável aleatória Y é dado por $\text{supp}[P(Y)] \equiv \{y \mid P(Y = y) > 0\}$. Isso nos permite construir o seguinte teorema de caracterização:

Teorema 1. *Duas distribuições $Q_1(Y)$ e de $Q_2(Y)$ satisfazem a definição de compatibilidade sob a visão Bayesiana objetivista quando eles compartilham algum elemento nos seus*

respectivos suportes, isto é:

$$\text{supp}[Q_1(Y)] \cap \text{supp}[Q_2(Y)] \neq \emptyset. \quad (2.47)$$

Este teorema será nosso critério para avaliar existência de compatibilidade, ou apenas critério de compatibilidade. Para prová-lo é preciso usar o seguinte:

Lema 1. Se a probabilidade conjunta $P(X, Y)$ de X e Y é tal que $P(X = x) = \sum_Y P(X = x, Y) \neq 0$, então o conjunto de valores não-nulos para o qual Y condicionado por $X = x$, ou seja, $\text{supp}[P(Y|X = x)]$, está contido ou é igual ao conjunto de valores não-nulos de Y , isto é, $\text{supp}[P(Y)]$, que é o conjunto de valores y para o qual $P(Y = y) \neq 0$.

Demonstração. Se $P(X = x) \neq 0$ então $\exists P(Y = y|X = x)$ bem definido $\forall y$. Considere o conjunto $\ker[P(Y)] = \{y \mid P(Y = y) = 0\} = \text{supp}[P(Y)]^C$. Seja $y \in \ker[P(Y)]$. Então $P(Y = y) = 0$. Logo $\sum_{x'} P(Y = y, X = x') = 0 \implies P(Y = y, X = x') = 0 \forall x'$. Logo $P(Y = y|X = x) = 0$. Assim, $y \in \ker[P(Y)] \subseteq \ker[P(Y|X = x)]$, ou equivalentemente $\text{supp}[P(Y|X = x)] \subseteq \text{supp}[P(Y)]$. Pois, como afirmamos acima, $\ker[P(Y)] = \text{supp}[P(Y)]^C$. \square

É possível enxergar essa relação entre o núcleo e o suporte na Figura 2.

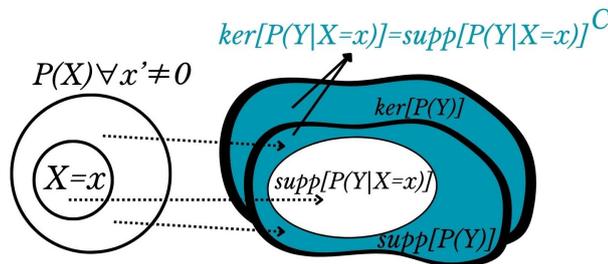


Figura 2- $\ker[P(Y)] \subseteq \ker[P(Y | X = x)] \Leftrightarrow \text{supp}[P(Y | X = x)] \subseteq \text{supp}[P(Y)]$

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Com este resultado em mãos, passamos à demonstração do Teorema 1:

Demonstração. Ida: (\Rightarrow) Temos uma distribuição conjunta $P(Y, X_1, X_2)$ tal que $Q_j(Y) = P(Y|X_j = x_j)$. Como $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) \neq 0$, $\exists P(Y|X_1, X_2)$ e pelo Lema 1, esta distribuição de probabilidade satisfaz

$$\text{supp}[P(Y|X_1 = x_1, X_2 = x_2)] \subseteq \text{supp}[P(Y|X_1 = x_1)], \quad (2.48)$$

$$\text{supp}[P(Y|X_1 = x_1, X_2 = x_2)] \subseteq \text{supp}[P(Y|X_2 = x_2)]. \quad (2.49)$$

Dado que toda distribuição de probabilidade tem suporte não-trivial, então $\text{supp}[P(Y|X_1 = x_1, X_2 = x_2)] \neq \emptyset$. Isto implica em:

$$\text{supp}[P(Y|X_1 = x_1)] \cap \text{supp}[P(Y|X_2 = x_2)] \neq \emptyset. \quad (2.50)$$

Volta: (\Leftarrow) Partindo de que $Q_1(Y)$ e $Q_2(Y)$ têm uma interseção não-trivial dos suportes, é possível encontrar uma distribuição de probabilidade $Q_0(Y)$ tal que:

$$Q_1(Y) = p_1 Q_0(Y) + (1 - p_1) Q'_1(Y), \quad (2.51)$$

$$Q_2(Y) = p_2 Q_0(Y) + (1 - p_2) Q'_2(Y), \quad (2.52)$$

onde $0 < p_1, p_2 \leq 1$ e $Q'_1(Y)$ e $Q'_2(Y)$ são, cada uma, distribuições de probabilidades normalizadas como definiremos à frente. Estamos decompondo $Q_j(Y)$ em uma combinação convexa que será útil para concluir a demonstração. Decompor dessa forma é útil para construir duas variáveis clássicas, X_1 e X_2 e a probabilidade conjunta $P(Y|X_1, X_2)$ tal que $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) \neq 0$ e $Q_j(Y) = P(Y|X_j = x_j)$ para algum valor x_1 e x_2 . Tomando X_1 e X_2 como variáveis discretas que assumem os valores $\{0, 1\}$, definimos a probabilidade de X_j assumir valor 0 como $P(X_1 = 0) = p_1$ e $P(X_2 = 0) = p_2$ tal que a possibilidade que sobra para cada variável é dada por $P(X_1 = 1) = 1 - p_1$ e $P(X_2 = 1) = 1 - p_2$ como esperamos de uma distribuição de probabilidades normalizada. Seguindo, definimos as seguintes distribuições de probabilidade:

$$P(Y|X_1 = 0, X_2 = 0) = Q_0(Y), \quad (2.53)$$

$$P(Y|X_1 = 0, X_2 = 1) = Q'_1(Y), \quad (2.54)$$

$$P(Y|X_1 = 1, X_2 = 0) = Q'_2(Y), \quad (2.55)$$

$$P(Y|X_1 = 1, X_2 = 1) = N(Y), \quad (2.56)$$

onde $N(Y)$ é apenas uma distribuição arbitrária para Y condicionado por $X_1 = 1$ e $X_2 = 1$. Denotamos assim pois ela é o único resultado possível do conjunto de possíveis valores para Y que não é útil para nossa prova. Por construção de p_1 e p_2 temos a seguinte distribuição conjunta sobre X_1 e X_2 ,

$$P(X_1 = 0, X_2 = 0) = p_1 p_2, \quad (2.57)$$

$$P(X_1 = 0, X_2 = 1) = (1 - p_1) p_2, \quad (2.58)$$

$$P(X_1 = 1, X_2 = 0) = p_1 (1 - p_2), \quad (2.59)$$

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1) = (1 - p_1)(1 - p_2). \quad (2.60)$$

Usando estas distribuições conjuntas podemos definir

$$P(Y, X_1, X_2) = P(Y|X_1, X_2)P(X_1, X_2).$$

Agora é possível verificar, por construção, que $P(X_1 = 0, X_2 = 0) = p_1 p_2 > 0$ e que

$$P(Y|X_1 = 0) = Q_1(Y), \quad (2.61)$$

$$P(Y|X_2 = 0) = Q_2(Y). \quad (2.62)$$

De fato, a probabilidade $P(Y|X_1 = 0)$ é obtida marginalizando X_2 :

$$P(Y|X_1 = 0) = \sum_{x_2} P(Y|X_1 = 0, X_2 = x_2)P(X_2|X_1 = 0). \quad (2.63)$$

Substituindo os valores de $P(Y|X_1, X_2)$ temos

$$\begin{aligned} P(Y|X_1 = 0) &= P(Y|X_1 = 0, X_2 = 0)P(X_2 = 0|X_1 = 0) \\ &\quad + P(Y|X_1 = 0, X_2 = 1)P(X_2 = 1|X_1 = 0). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Agora, usamos as probabilidades condicionais:

$$P(X_2 = 0|X_1 = 0) = \frac{P(X_1 = 0, X_2 = 0)}{P(X_1 = 0)} = \frac{p_1 p_2}{p_1 p_2 + (1 - p_1) p_2} = p_1, \quad (2.65)$$

$$P(X_2 = 1|X_1 = 0) = 1 - p_1. \quad (2.66)$$

Desta maneira,

$$P(Y|X_1 = 0) = p_1 Q_0(Y) + (1 - p_1) Q'_1(Y), \quad (2.67)$$

mas essa é exatamente a definição de $Q_1(Y)$, logo

$$P(Y|X_1 = 0) = Q_1(Y). \quad (2.68)$$

E a conta é análoga para $Q_2(Y)$. □

Esta prova é minuciosa, então vamos olhar alguns pontos com calma. A ideia central é que, se $Q_1(Y)$ e $Q_2(Y)$ compartilham suporte comum, então existe pelo menos uma distribuição $Q_0(Y)$ que está presente em ambas no seguinte sentido: podemos escrever $Q_1(Y)$ e $Q_2(Y)$ como combinações convexas dessa distribuição comum e de outras distribuições residuais.

Também é sugerido pelo Teorema 1 que quaisquer distribuições de probabilidade compatíveis podem ser escritas como uma soma ponderada de duas distribuições distintas, embora o foco do teorema seja separar $Q_i(Y)$ em duas distribuições específicas: a parte comum a $Q_1(Y)$ e $Q_2(Y)$ e o resto.

Vale lembrar que essa decomposição existe porque, por hipótese, há um conjunto de valores Y para os quais $Q_1(Y) > 0$ e $Q_2(Y) > 0$, ou seja, ambas têm suporte e interseção do mesmo. Essa decomposição segue um raciocínio semelhante ao que fazemos em álgebra linear ao decompor um vetor em uma combinação linear de vetores. Aqui, as distribuições $Q_1(Y)$ e $Q_2(Y)$ são “projetadas” sobre uma parte comum $Q_0(Y)$ e sobre partes residuais $Q'_1(Y)$ e $Q'_2(Y)$. $Q_0(Y)$ é um “ponto de referência” dentro do suporte comum.

Os coeficientes p_1 e p_2 são números no intervalo $[0, 1]$ que indicam o quanto cada distribuição $Q_1(Y)$ e $Q_2(Y)$ compartilha da parte comum $Q_0(Y)$. Eles são chamados de coeficientes de ponderação porque representam o peso de $Q_0(Y)$ na mistura convexa. Como estamos lidando com distribuições de probabilidade, os coeficientes de ponderação

garantem que todas as somas resultem em distribuições normalizadas (ou seja, somando 1). Ambos os coeficientes de ponderação p_1 e p_2 são estritamente positivos pois, como sabemos que os suportes de $Q_1(Y)$ e $Q_2(Y)$ têm interseção não trivial, significa que $Q_0(Y)$ tem pelo menos um ponto nos valores que Y pode assumir onde ela é estritamente maior que zero. Logo, se algum dos coeficientes p_1 ou p_2 fosse zero, então significaria que $Q_1(Y)$ ou $Q_2(Y)$ não teria nenhuma parte em $Q_0(Y)$, o que contradiz a suposição de que os suportes se sobrepõem.

A condição necessária do Teorema 1 estabelece o critério de interseção dos suportes como um requerimento para compatibilidades de perspectivas numa visão Bayesiana objetivista. Já a condição suficiente, com restrições causais “genéricas” estabelece que quaisquer dois pares de distribuições de probabilidade com interseção dos suportes pode surgir através da perspectiva comum sobre um estado de um par de observadores Bayesianos objetivistas.

A prova considera cenários com variáveis Y , X_1 , e X_2 . A estrutura de causalidade entre essas variáveis impõe restrições nas distribuições de probabilidade conjuntas possíveis. Se Y e X_1 forem consideradas como uma variável composta e X_2 for independente de ambas (sem influência causal direta ou indireta, nem causa comum), então a distribuição conjunta se fatora como $P(Y, X_1, X_2) = P(Y, X_1)P(X_2)$. Esta fatoração é uma consequência da independência estatística entre Y , X_1 e X_2 .

Sob essa restrição de independência, existem pares de estados $Q_1(Y)$ e $Q_2(Y)$ com suportes intersectantes que nunca podem ser atribuídos por Julio e Wigner por meio do condicionamento nas variáveis X_1 e X_2 . Nesse caso específico, $Q_1(Y)$ deve ser igual à distribuição a priori sobre Y . De acordo com o Lema 1, somente os pares onde o suporte de $Q_1(Y)$ está contido no suporte de $Q_2(Y)$ podem surgir mediante condicionamento.

A suficiência demonstrada na ida da prova se mantém apenas para cenários “genéricos”, onde a estrutura de causalidade não impõe (in)dependências condicionais na distribuição conjunta. Em cenários “genéricos”, qualquer par de estados com suportes intersectantes pode ser atribuído a Julio e Wigner por meio de condicionamento.

2.5.1.2 Compatibilidade Bayesiana subjetivista clássica

No Bayesianismo subjetivista, é preciso postular um estado inicial preferível, que todos os observadores concordem antes de coletar dados para que haja compatibilidade. Ainda que os observadores não tenham elegido este estado antes de coletar dados, ele pode existir mesmo assim. Mas isto é mais exceção do que regra (3, 20).

Entretanto, este viés não analisa como os observadores atingiram suas crenças. É mais interessante saber se é possível alcançar concordância inter-subjetivista no futuro através de um experimento. Ou seja, construir um modelo estatístico em que a coleta de dados adicionais levaria a uma atualização dos estados dos observadores para o mesmo

estado.

No caso clássico duas distribuições de probabilidade $Q_1(Y)$ e $Q_2(Y)$ de uma variável Y são compatíveis quando é possível construir um experimento em que ambos observadores concordem com o modelo. Isto é, uma função $P(X|Y)$ que, para pelo menos uma saída $X = x$, eles concordem em perspectiva quando atualizarem suas probabilidades por condicionamento Bayesiano.

Em outras palavras, o viés subjetivista visa a possibilidade de atingir compatibilidade futura enquanto o objetivista se baseia na garantia de compatibilidade no passado.

A Definição formal para compatibilidade subjetivista é a seguinte.

Definição 8. (*Compatibilidade Bayesiana subjetivista clássica*) *Duas distribuições de probabilidades $Q_1(Y)$ e $Q_2(Y)$ são compatíveis quando for possível construir uma variável aleatória X e uma distribuição condicional $P(Y|X)$ tal que exista algum valor $X = x$ para o qual*

$$\sum_Y P(X = x|Y)Q_j(Y) \neq 0 \text{ e} \\ P_1(Y|X = x) = P_2(Y|X = x), \quad (2.69)$$

onde $P_i(Y|X) \equiv \frac{P(X|Y)Q_j(Y)}{\sum_Y P(X|Y)Q_j(Y)}$.

Acontece que essa definição de compatibilidade é equivalente ao exato mesmo critério que o da compatibilidade objetivista Bayesiana:

Teorema 2. *Duas distribuições $Q_1(Y)$ e $Q_2(Y)$ satisfazem à definição de compatibilidade sob a visão Bayesiana subjetivista se, e somente se, eles compartilham algum elemento nos seus respectivos suportes, isto é:*

$$\text{supp}[Q_1(Y)] \cap \text{supp}[Q_2(Y)] \neq \emptyset. \quad (2.70)$$

Demonstração. Ida: (\Rightarrow) Dado que $P_j(Y|X = x)$ deriva de $Q_j(Y)$ por condicionamento Bayesiano, temos do Lema 1 que:

$$\text{supp}[P_1(Y|X = x)] \subseteq \text{supp}[Q_1(Y)], \quad (2.71)$$

$$\text{supp}[P_2(Y|X = x)] \subseteq \text{supp}[Q_2(Y)]. \quad (2.72)$$

De todo modo, assumindo que $P_1(Y|X = x) = P_2(Y|X = x)$ então o lado esquerdo das equações acima é igual. Daí temos que $Q_1(Y)$ e $Q_2(Y)$ têm suporte em comum. Sendo este $\text{supp}[P_1(Y|X = x)] \neq \emptyset$.

Volta: (\Leftarrow) Assumimos que existe pelo menos um valor $y \in Y$ pertencente ao suporte comum de $Q_1(Y)$ e $Q_2(Y)$. Seja X um *bit* clássico e defina a função de probabilidade como

$$P(X = 0|Y = y) = 1, \quad (2.73)$$

$$P(X = 0|Y \neq y) = 0, \quad (2.74)$$

Se Julio e Wigner concordarem com essas funções probabilidade, então, observando $X = 0$, eles vão atualizar suas distribuições para

$$P_j(Y = y'|X = 0) = \frac{P(X = 0|Y = y')Q_j(Y = y')}{\sum_{y'} P(X = 0|Y = y')Q_j(Y = y')} = \delta_{y,y'}, \quad (2.75)$$

que é independente de j e os leva à concordância. \square

2.5.1.3 Compatibilidade Bayesiana objetivista quântica

No caso quântico, se Julio e Wigner acharem o mesmo estado $\sigma_S^{(j)}$ para uma mesma região quântica, então eles são compatíveis se existe alguma resposta clássica X que eles podem coletar sobre o sistema.

Considere a região B com espaço de Hilbert \mathcal{H}_B associado. Dois observadores possuem acesso a dados diferentes representados pelas variáveis aleatórias X_1 e X_2 . Para eles, antes que se observasse X_1 e X_2 existia um estado $\rho_{B,X_1,X_2} \in \mathcal{H}_{B,X_1,X_2} = \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_{X_1} \otimes \mathcal{H}_{X_2}$ que ambos concordavam, onde $\rho_B = Tr_{X_1,X_2}(\rho_{B,X_1,X_2})$. Após eles observarem x_j para X_j eles atualizam seus estados para B para os estados $\rho_{B|X_j=x_j}$. Agora suponha que não temos os detalhes de como os observadores obtiveram seus estados. Julio atribui um estado $\sigma_B^{(1)}$ em B e Wigner um $\sigma_B^{(2)}$. A condição para obter compatibilidade mora em ser possível construir um estado híbrido ρ_{B,X_1,X_2} sobre B e duas variáveis clássicas X_1 e X_2 tal que $\sigma_B^{(j)} = \rho_{B|X_j=x_j}$ para algum valor x_j de X_j , conforme

Definição 9. (*Compatibilidade Bayesiana objetivista quântica*) *Dois estados quânticos $\sigma_B^{(1)}$ e $\sigma_B^{(2)}$ são compatíveis quando for possível construir um par de variáveis aleatórias X_1 e X_2 e um estado híbrido ρ_{B,X_1,X_2} tal que $\sigma_B^{(j)}$ pode ser obtido por um condicionamento Bayesiano sobre $X_j = x_j$ para algum valor x_j . Isto é:*

$$\sigma_B^{(j)} = \rho_{B,X_j=x_j}. \quad (2.76)$$

Lembrando que o suporte de um estado ρ_B é o *span* dos autovetores associados aos autovalores não-nulos de ρ_B . Com esta definição em mãos, temos a seguinte caracterização,

Teorema 3. *Dois estados quânticos $\sigma_B^{(1)}$ e $\sigma_B^{(2)}$ satisfazem à definição 9 se, e somente se, possuem interseção não trivial do suporte.*

$$\text{supp}[\sigma_B^{(1)}] \cap \text{supp}[\sigma_B^{(2)}] \neq \emptyset. \quad (2.77)$$

A prova é muito similar ao seu análogo clássico, e necessita do seguinte lema:

Lema 2. *Se um estado híbrido $\rho_{X,B}$ satisfaz $\rho_{X=x} \neq 0$, então $\text{supp}[\rho_{B|X=x}] \subseteq \text{supp}[\rho_B]$*

Demonstração. A condição $\rho_{X=x} \neq 0$ implica que $\rho_{B|X=x}$ é bem definido. Seja $\ker[\rho_B] = \{|\Psi\rangle_B \mid \rho_B |\Psi\rangle_B = 0\}$, ou seja, $\ker[\rho_B]$ é o complemento ortogonal do suporte de ρ_B . Seja $|\Psi\rangle_B \in \ker[\rho_B]$. Então $\langle \Psi|_B \text{Tr}_X(\rho_{BX}) |\Psi\rangle_B = 0$. Isto implica que $\langle \Psi|_B \rho_{B|X=x'} |\Psi\rangle_B = 0 \forall x'$ pois cada operador $\rho_{B|X=x'}$ é positivo. Consequentemente, $\langle \Psi|_B \rho_{B|X=x} |\Psi\rangle_B = 0$. Em outras palavras, se $|\Psi\rangle_B \in \ker[\rho_B]$ Então $|\Psi\rangle_B \in \ker[\rho_{B|X=x}]$, o que significa que $\ker[\rho_B] \subseteq \ker[\rho_{B|X=x}]$, ou equivalentemente $\text{supp}[\rho_{B|X=x}] \subseteq \text{supp}[\rho_B]$. \square

Agora, em posse deste resultado podemos provar o Teorema 3.

Demonstração. Ida: (\Rightarrow) Considere que existe um estado híbrido conjunto $\rho_{B|X=x}$ tal que $\sigma_b^{(j)} = \rho_{B|X_j=x_j}$ para alguns valores $x_j \in X_j$. Como $\rho_{X_1=x_1, X_2=x_2} \neq 0$, o estado condicional $\rho_{B|X_1=x_1, X_2=x_2}$ é bem definido. Temos do Lema 2 que:

$$\text{supp}[\rho_{B|X_1=x_1, X_2=x_2}] \subseteq \text{supp}[\rho_{B|X_1=x_1}], \quad (2.78)$$

$$\text{supp}[\rho_{B|X_1=x_1, X_2=x_2}] \subseteq \text{supp}[\rho_{B|X_2=x_2}]. \quad (2.79)$$

Como $\rho_{B|X_1=x_1, X_2=x_2}$ tem suporte não trivial, então

$$\text{supp}[\rho_{B|X_1=x_1}] \cap \text{supp}[\rho_{B|X_2=x_2}] \neq 0. \quad (2.80)$$

Volta: (\Leftarrow) Esta prova é a análoga quântica da prova da volta do Teorema 1. As contas seguem parecidas e a interpretação também. Dado que $\sigma_B^{(1)}$ e $\sigma_B^{(2)}$ têm suporte intersectante, podemos usar uma decomposição similar à equação (2.51) na volta do Teorema 1 para achar um estado quântico μ_B tal que

$$\sigma_B^{(1)} = p_1 \mu_B + (1 - p_1) \eta_B^{(1)}, \quad (2.81)$$

$$\sigma_B^{(2)} = p_2 \mu_B + (1 - p_2) \eta_B^{(2)}, \quad (2.82)$$

onde $\eta_B^{(1)}$ e $\eta_B^{(2)}$ são estados quânticos e $0 < p_1, p_2 \leq 1$.

Esta decomposição pode ser usada para construir duas variáveis clássicas X_1 e X_2 , e um estado híbrido ρ_{B, X_1, X_2} tal que $\rho_{X_1=x_1, X_2=x_2} \neq 0$ e $\sigma_B^{(j)} = \rho_{B|X_j=x_j}$ para alguns valores x_1 e x_2 . Seja X_1 e X_2 variáveis com dois níveis, e defina:

$$\rho_{B|X_1=0, X_2=0} = \mu_B, \quad (2.83)$$

$$\rho_{B|X_1=0, X_2=1} = \eta_B^{(1)}, \quad (2.84)$$

$$\rho_{B|X_1=1, X_2=0} = \eta_B^{(2)}, \quad (2.85)$$

$$\rho_{B|X_1=1, X_2=1} = \nu_B, \quad (2.86)$$

onde ν_B é um estado arbitrário.

Agora, definindo estados clássicos X_1 e X_2 temos

$$\begin{aligned} \rho_{X_1, X_2} = & p_1 p_2 |00\rangle \langle 00|_{X_1 X_2} + (1 - p_1) p_2 |01\rangle \langle 01|_{X_1 X_2} \\ & + p_1 (1 - p_2) |10\rangle \langle 10|_{X_1 X_2} + (1 - p_1) p_1 (1 - p_2) |11\rangle \langle 11|_{X_1 X_2}, \end{aligned} \quad (2.87)$$

esse resultado pode ser combinado com os estados condicionados definidos antes para obter

$$\begin{aligned}
 \rho_{B,X_1,X_2} &= \rho_{B|X_1,X_2} \rho_{X_1,X_2} & (2.88) \\
 &= p_1 p_2 (\mu_B \otimes |00\rangle \langle 00|_{X_1 X_2}) + (1-p_1) p_2 (\eta_B^{(1)} \otimes |01\rangle \langle 01|_{X_1 X_2}) \\
 &\quad + p_1 (1-p_2) (\eta_B^{(2)} \otimes |10\rangle \langle 10|_{X_1 X_2}) + (1-p_1)(1-p_2) (\nu_B \otimes |11\rangle \langle 11|_{X_1 X_2}). & (2.89)
 \end{aligned}$$

Note que $\rho_{B|X_1=0}$ e $\rho_{B|X_2=0}$ são iguais ao lado esquerdo das equações (2.81) e (2.82), e consequentemente, são iguais a $\sigma_B^{(1)}$ e $\sigma_B^{(2)}$, respectivamente. \square

Alguns cenários causais podem forçar restrições no par de estados $\sigma_B^{(1)}$ e $\sigma_B^{(2)}$ encontrados após condicionar sobre X_1 e X_2 . Considere o seguinte cenário causal onde X_2 é obtido pós-processando X_1 , como ilustrado na fig. 3.a), tornando as correlações entre X_2 e B mediadas por X_1 . Os únicos pares $\sigma_B^{(1)}$ e $\sigma_B^{(2)}$ que podem surgir condicionando sobre X_1 e X_2 são os que o suporte de $\sigma_B^{(1)}$ está contido no de $\sigma_B^{(2)}$. Isso nos leva à mesma conclusão que o caso clássico: o critério de compatibilidade é necessário em qualquer cenário causal mas nem todo par de estados compatíveis pode surgir de todo cenário causal.

No entanto, há situações em que é possível encontrar um cenário causal onde essas restrições não existam (3).

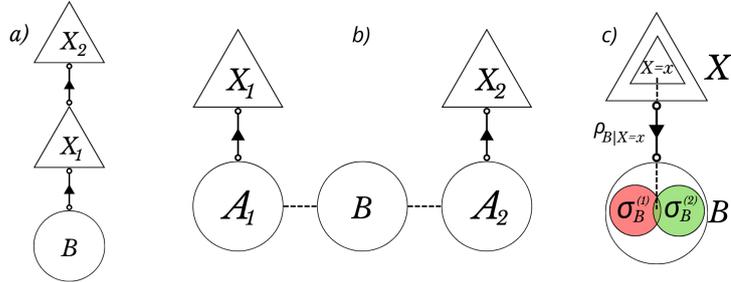


Figura 3- a) Uma medição realizada em B e X_1 representa a saída, o cenário causal ganha outra variável clássica via pós-processamento. b) Julio e Wigner aprendem sobre B fazendo medições nas regiões A_1 e A_2 correlacionadas. c) $\sigma_B^{(1)}$ e $\sigma_B^{(2)}$ tem interseção não trivial do suporte em seus elementos condicionados por $X = x$

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Por outro lado, em cenários como o da fig. 3.b), X_1 e X_2 são resultados de duas medições remotas independentes sobre o sistema B . Os estados possíveis não são restritivos e a condição de compatibilidade pode ser satisfeita. Essas restrições não se aplicam, e a compatibilidade é plenamente realizável.

2.5.1.4 Compatibilidade Bayesiana subjetivista quântica

No caso quântico, se Julio e Wigner possuírem estados $\sigma_s^{(j)}$ em suas regiões quânticas, então haverá compatibilidade se houver alguma informação clássica X que eles possam

coletar sobre o sistema em que eles concordem sobre o modelo e ao menos um $X = x$ torne suas perspectivas idênticas.

Definição 10. (*Compatibilidade Bayesiana subjetivista quântica*) Dois estados quânticos $\sigma_B^{(1)}$ e $\sigma_B^{(2)}$ são compatíveis quando for possível construir uma variável aleatória X e um estado condicional $\rho_{X|B}$ tal que exista algum valor x de X para o qual $\text{Tr}_B(\rho_{X=x|B}\sigma_B^{(j)}) \neq 0$ e:

$$\rho_{B|X=x}^{(1)} = \rho_{B|X=x}^{(2)}, \quad (2.90)$$

onde $\rho_{B|X=x}^{(j)}$ se dá pela versão quântica do Teorema de Bayes $\rho_{B|X=x}^{(j)} \equiv \frac{(\rho_{X=x|B}\sigma_B^{(j)})}{\text{Tr}_B(\rho_{X=x|B}\sigma_B^{(j)})}$.

Esta igualdade em (2.90) foi visualmente representada na figura 3 c). Neste caso, estamos falando de um objeto em uma região quântica sendo levado em uma região clássica através de um operador condicional e um traço parcial. À primeira vista, pode-se pensar que a desigualdade $\text{Tr}_B(\rho_{X=x|B}\sigma_B^{(j)}) \neq 0$ é absurda pois traço parcial leva operadores de espaços, neste caso digamos, $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ em operadores também, porém em \mathbb{C}^2 . Vamos lembrar que a distribuição de probabilidade clássica ρ_X , enquanto operador densidade, tem representação matricial com suas entradas na diagonal principal

$$\rho_X = \begin{bmatrix} P_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_x & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & P_n \end{bmatrix}$$

onde estamos pinçando à mão o valor de $P_{X=x} = \text{Pr}(X = x)$ pois queremos $\sigma_B^{(i)}$ condicionado por $X = x$, e, neste contexto $P_{X=x}$ sim é número, logo, $\text{Tr}_B(\rho_{X=x|B}\sigma_B^{(j)}) \neq 0$ é perfeitamente cabível. Mais uma vez, as consequências matemáticas da compatibilidade Bayesiana subjetivista são as mesmas da contraparte objetivista.

Teorema 4. *Dois estados $\sigma_B^{(1)}$ e $\sigma_B^{(2)}$ satisfazem à definição 10 (são compatíveis pelo viés subjetivista) se, e somente se, eles compartilham algum elemento em comum em seus suportes. Isto é*

$$\text{supp}[\sigma_B^{(1)}] \cap \text{supp}[\sigma_B^{(2)}] \neq \emptyset. \quad (2.91)$$

Demonstração. Ida: (\Rightarrow)

Seja $\rho_{B|X=x}^{(j)}$ derivado de $\sigma_B^{(j)}$ por condicionamento Bayesiano. Se segue do Lema 2 que

$$\text{supp}[\rho_{B|X=x}^{(1)}] \subseteq \text{supp}[\sigma_B^{(1)}], \quad (2.92)$$

$$\text{supp}[\rho_{B|X=x}^{(2)}] \subseteq \text{supp}[\sigma_B^{(2)}]. \quad (2.93)$$

Entretanto, assumindo $\rho_{B|X=x}^{(1)} = \rho_{B|X=x}^{(2)}$, temos o lado esquerdo das equações (2.92) e (2.93) são iguais. Logo, $\sigma_B^{(1)}$ e $\sigma_B^{(2)}$ têm suporte em comum, sendo este $\text{supp}[\rho_{B|X=x}^{(1)}]$.

Volta: (\Leftarrow) Ao assumir que os suportes de $\sigma_B^{(1)}$ e $\sigma_B^{(2)}$ têm interseção não trivial, nota-se que existe um estado puro $|\Psi\rangle_B \in \mathcal{H}_B$ no suporte comum. Considere X uma variável binária clássica e defina o operador híbrido como sendo

$$\rho_{X|B} = |0\rangle\langle 0|_X \otimes |\Psi\rangle\langle\Psi|_B + |1\rangle\langle 1|_X \otimes (I_B - |\Psi\rangle\langle\Psi|_B). \quad (2.94)$$

Se Julio e Wigner concordarem em usar esse operador híbrido e observarem $X = 0$ eles irão atualizar seus estados para

$$\rho_{B|X=0}^{(j)} = \frac{(\rho_{X=0|B} \star \sigma_B^{(j)})}{\text{Tr}_B(\rho_{X=0|B} \sigma_B^{(j)})} = |\Psi\rangle\langle\Psi|_B, \quad (2.95)$$

que é independente de j e leva ambos à concordância.

□

3 APLICAÇÃO

3.1 O PARADOXO DO AMIGO DE WIGNER

O problema tratado aqui é o experimento mental original do paradoxo do amigo de Wigner, se é que é de fato um paradoxo. A palavra ‘original’ reside no fato que este experimento já foi reformulado de novo e de novo muitas vezes desde que foi proposto (11). O paradoxo original foi concebido como parte do debate a cerca do problema de ‘*mind-and-body*’ (5) ao qual Wigner se debruçava e rapidamente foi notada a forte conexão entre o mesmo e o problema da medição, vista como evolução unitária ou colapso (11, 14), presente nos fundamentos da mecânica quântica. O interesse deste trabalho no problema original é tratar a aparente incompatibilidade como um problema de inferência Bayesiana, o que vai ao encontro com uma linha de pesquisa recente em ascensão (3, 8, 10), onde a mecânica quântica é vista como uma teoria de probabilidade geral, com similaridades estruturais com a inferência Bayesiana clássica.

Considere o experimento mental do amigo de Wigner, ilustrado na figura 4 e pensado em 1961 (5) por Eugene Wigner. Suponha a existência de dois agentes, digamos, Wigner (W) e Julio (J). Julio está trancado em um laboratório e não pode se comunicar com Wigner. Julio interage com, digamos, um *qubit* (*quantum binary digit*) para medi-lo e experiencia uma única saída de medição ou resposta (*outcome*). Wigner é um superobservador e possui todos os meios para usar a teoria quântica para descrever seu amigo e o Sistema (S) com o qual ele interage como uma evolução quântica emaranhando Julio e o Sistema. Aqui, emaranhamento significa uma correlação quântica que ocorre entre partes de um sistema quântico numa dada base, podendo ser até mesmo uma correlação entre dois laboratórios distintos espacialmente separados, que não é o nosso caso, onde Julio está trancado junto do sistema. Julio é forçado a descrever o sistema colapsando por sua medição. No entanto existe uma aparente incompatibilidade paradoxal de suas descrições (19). Vejamos com mais detalhes.

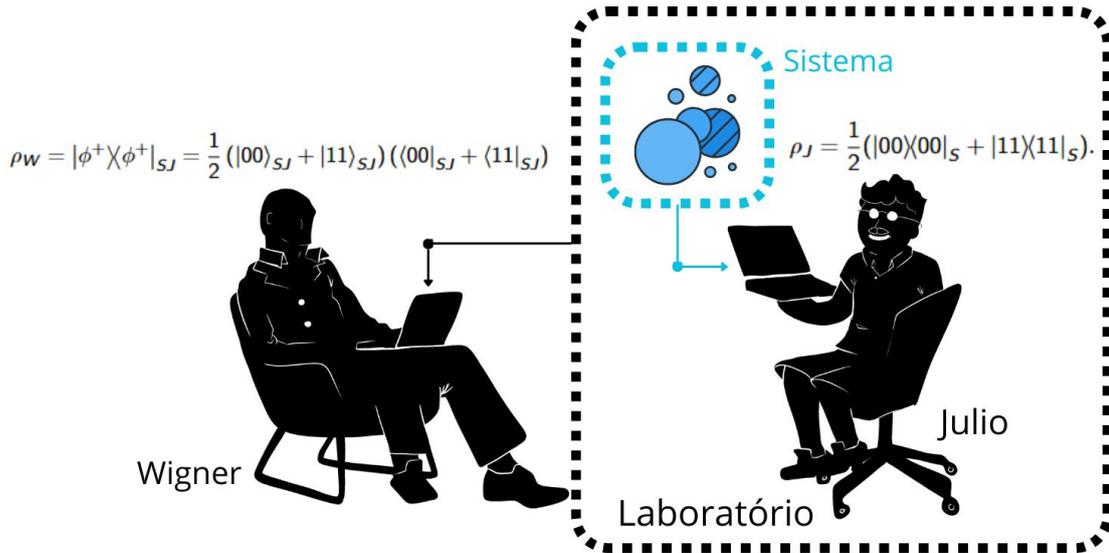


Figura 4- Dois agentes: Julio mede o Sistema S e obtém resultado; Wigner descreve o Sistema e Julio como um estado emaranhado. Fonte: adaptado de (30).

O sistema S com o qual J interagirá está inicialmente em um estado representado por $|0\rangle_S$. Em seguida, ele passa por uma evolução unitária de *Hadamard*, após a qual é descrito por $|+\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_S + |1\rangle_S)$. Este é o ponto em que J mede o sistema S com um *POVM* representado por $\Pi_{J_i} = \{|0\rangle\langle 0|, |1\rangle\langle 1|\}$. Da mesma forma, para W, o estado inicial do sistema é representado por $|0\rangle_S$. Os estados do sistema e de Julio evoluem conjuntamente, do ponto de vista de Wigner, como uma composição de um Hadamard com um *CNOT* controlado em S:

$$|00\rangle_{SJ} \xrightarrow{\mathcal{H} \otimes I} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_S + |1\rangle_S) \otimes |0\rangle_J \xrightarrow{\text{CNOT}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_{SJ} + |11\rangle_{SJ}) = |\phi^+\rangle_{SJ}. \quad (3.1)$$

Wigner pode verificar suas previsões através da medição descrita por operadores densidade na base de Bell. Isto é

$$\Pi_{W_i} = \{|\phi^\pm\rangle\langle\phi^\pm|_{SJ}, |\psi^\pm\rangle\langle\psi^\pm|_{SJ}\}.$$

Ele obterá o resultado ϕ^+ com probabilidade 1. Este resultado vai na aparente contra-mão do esperado, como Wigner pode sustentar por si só (5):

Isto é uma contradição, pois o estado descrito pela função de onda $[\phi^\pm]_{SJ}$ descreve um estado que tem propriedades que nem $[00]_{SJ}$ nem $[11]_{SJ}$ têm.

Como visto previamente, independentemente do viés adotado, subjetivista ou objetivista, ao ver o problema como uma questão de inferência Bayesiana, sabemos que as duas descrições serão compatíveis se tiverem interseção não-trivial do suporte. Isso

resolve qualquer questão sobre discordância de perspectivas entre W e J. Não queremos desenvolver um protocolo em que Wigner não possa concordar em discordar de seu amigo (6). Esta não é a intenção aqui. O que queremos é muito mais modesto. Mas antes de começarmos, é preciso achar pontos de concordância entre ambos no experimento.

No paradoxo original de Wigner, há partes que ambos devem concordar (independentemente do porquê), pois na ausência de acordo, as descrições de W e J serão naturalmente incompatíveis. Relembrando: o acordo está no cerne da noção subjetivista de compatibilidade.

W e J concordam sobre o estado inicial do sistema $|0\rangle_S$. Também há um acordo sobre o instante de tempo em que Julio realizará a medição; $P_J(T_M = t) = P_W(T_M = t)$, onde P refere-se à atribuição de probabilidades feitas por Wigner (P_W) e por Julio (P_J) e T_M é a variável aleatória que descreve os possíveis instantes de tempo.

A existência de um paradoxo reside em procurar concordância onde apenas há demanda de compatibilidade para a descrição dos observadores.

3.1.1 PERSPECTIVA CLÁSSICA

Da maneira como foi construída, a medição de Wigner é descrita por $\Pi_{W_i} = \{|\phi^\pm\rangle\langle\phi^\pm|_{SJ}, |\psi^\pm\rangle\langle\psi^\pm|_{SJ}\}$ e o estado atribuído ao sistema composto SJ é $|\phi^+\rangle\langle\phi^+|_{SJ}$.

De acordo com a regra de Born, a probabilidade de um resultado associado a um elemento Π_{W_i} do $POVM$ é dada por:

$$P(i) = \text{Tr}(\rho\Pi_{W_i}), \quad (3.2)$$

onde $\rho = |\phi^+\rangle\langle\phi^+|_{SJ}$.

Para os diferentes elementos do $POVM$, as probabilidades são calculadas como segue:

1. Para $\Pi_{W_1} = |\phi^+\rangle\langle\phi^+|_{SJ}$:

$$P(\phi^+) = \text{Tr}(|\phi^+\rangle\langle\phi^+|_{SJ}|\phi^+\rangle\langle\phi^+|_{SJ}) = |\langle\phi^+|\phi^+\rangle|^2 = 1. \quad (3.3)$$

2. Para $\Pi_{W_2} = |\phi^-\rangle\langle\phi^-|_{SJ}$:

$$P(\phi^-) = \text{Tr}(|\phi^+\rangle\langle\phi^+|_{SJ}|\phi^-\rangle\langle\phi^-|_{SJ}) = |\langle\phi^+|\phi^-\rangle|^2 = 0. \quad (3.4)$$

pois $|\phi^+\rangle$ e $|\phi^-\rangle$ são ortogonais.

3. Para $\Pi_{W_3} = |\psi^+\rangle\langle\psi^+|_{SJ}$:

$$P(\psi^+) = \text{Tr}(|\phi^+\rangle\langle\phi^+|_{SJ}|\psi^+\rangle\langle\psi^+|_{SJ}) = |\langle\phi^+|\psi^+\rangle|^2 = 0. \quad (3.5)$$

novamente pela ortogonalidade.

4. Para $\Pi_{W_4} = |\psi^-\rangle\langle\psi^-|_{SJ}$:

$$P(\psi^-) = \text{Tr}(|\phi^+\rangle\langle\phi^+|\psi^-\rangle\langle\psi^-|) = |\langle\phi^+|\psi^-\rangle|^2 = 0. \quad (3.6)$$

A regra de Born garante que sua medição de probabilidade é:

$$P_W(M) = (1, 0, 0, 0), \quad (3.7)$$

onde M representa a medição determinada pelo $POVM$ Π_{W_i} . Embora tenhamos definido antes que Julio tem o $POVM$ $\Pi_{J_i} = \{|0\rangle\langle 0|, |1\rangle\langle 1|\}$ pois crê que seu estado inicial é um estado de mistura completa que mora em \mathbb{C}^2 , sequer faz sentido falar de compatibilidade se eles não estão fazendo a mesma pergunta, ou seja, se os experimentos são diferentes. Logo, J concorda com W sobre o que está sendo medido por ele. Digamos que foi acordado previamente o uso do $POVM$ $\Pi_{W_i} = \{|\phi^\pm\rangle\langle\phi^\pm|_{SJ}, |\psi^\pm\rangle\langle\psi^\pm|_{SJ}\}$. O estado apropriado com o que Julio tem em mãos seria $\rho = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)$.

Novamente, segundo a regra de Born, a probabilidade de um resultado associado a um elemento Π_{W_i} do $POVM$ é dada por:

$$P(i) = \text{Tr}(\rho\Pi_{W_i}), \quad (3.8)$$

onde agora $\rho = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)$. Para os diferentes elementos do $POVM$, as probabilidades são calculadas como segue:

1. Para $\Pi_{W_1} = |\phi^+\rangle\langle\phi^+|$:

$$P(\phi^+) = \text{Tr}(|\rho\rangle\langle\rho|\phi^+\rangle\langle\phi^+|) = |\langle\phi^+|\rho\rangle|^2 = \frac{1}{2}. \quad (3.9)$$

2. Para $\Pi_{W_2} = |\phi^-\rangle\langle\phi^-|$:

$$P(\phi^-) = \text{Tr}(|\rho\rangle\langle\rho|\phi^-\rangle\langle\phi^-|) = |\langle\phi^-|\rho\rangle|^2 = \frac{1}{2}. \quad (3.10)$$

3. Para $\Pi_{W_3} = |\psi^+\rangle\langle\psi^+|$:

$$P(\psi^+) = \text{Tr}(|\rho\rangle\langle\rho|\psi^+\rangle\langle\psi^+|) = |\langle\psi^+|\rho\rangle|^2 = 0. \quad (3.11)$$

4. Para $\Pi_{W_4} = |\psi^-\rangle\langle\psi^-|$:

$$P(\psi^-) = \text{Tr}(|\rho\rangle\langle\rho|\psi^-\rangle\langle\psi^-|) = |\langle\psi^-|\rho\rangle|^2 = 0. \quad (3.12)$$

Sua medição de probabilidade é:

$$P_J(M) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right), \quad (3.13)$$

Eles resolverão a disputa comparando o suporte de suas distribuições.

$$P_J(M) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right), \quad (3.14)$$

$$P_W(M) = (1, 0, 0, 0). \quad (3.15)$$

Como $\text{supp}[P_W(M)] \cap \text{supp}[P_J(M)] \neq \emptyset$, suas atribuições são compatíveis. Não há incompatibilidade e nenhum cenário paradoxal. Os agentes simplesmente tiveram acesso a dados experimentais diferentes (visão objetivista) ou passaram por experiências diferentes (visão subjetivista).

Como mencionamos anteriormente, este é um cenário hipotético, no qual o conhecimento de Wigner sobre o funcionamento interno do laboratório de seu amigo é improvável, mas retrata uma situação em que a mera evolução temporal leva as descrições de compatíveis a incompatíveis. Entre muitas outras fontes de discordância, considere o caso exótico em que Julio é completamente alheio ao que está sendo descrito por Wigner, e ao uso da teoria quântica que Wigner fará. Ele sabe que Wigner está pensando no experimento de fora do laboratório, que esse experimento envolve algum tipo de incerteza e que há duas respostas diferentes possíveis para o estado inicial do experimento. Wigner, por outro lado, não sabe o que Julio pensa a cerca da teoria quântica. Nesse caso extremo, os agentes nem mesmo usam o mesmo objeto para descrever o que está acontecendo. Julio pode ser levado a ser razoável e dizer que há uma chance igual para cada uma das respostas do qubit medido, ou seja, $P_J = (1/2, 1/2)$. Wigner, ignorando a ignorância de Julio, atribui $P_J = (1/2, 1/2, 0, 0)$ à mesma situação. Podemos ser tentados a comparar ambas as atribuições adicionando zeros, por exemplo, mas elas são dois objetos diferentes em espaços distintos. Não surpreendentemente, suas atribuições não podem ser compatíveis.

Em resumo, se repensarmos o experimento mental original como um problema de inferência bayesiana (clássica), a (in)compatibilidade entre as descrições probabilísticas de Wigner e Julio é naturalmente explicada, e o paradoxo desaparece, mesmo que as perspectivas de W e J sejam distintas.

3.1.2 PERSPECTIVA QUÂNTICA

Sabemos, como visto previamente, que possuímos um modelo de probabilidade que enxerga distribuições de probabilidade através de operadores densidade, e por consequência estados. Quando operadores comutam e são estados descritos por matrizes diagonais, o modelo reflete bem a teoria de probabilidades clássica. E parece que quando os operadores não comutam o que estamos descrevendo é a própria teoria quântica vista como uma teoria de probabilidades não-comutativa, o que corrobora com a linha dos artigos (3, 7, 12, 13, 15). Dentro do laboratório, a descrição de Julio é feita pelo seguinte operador,

$$\rho_J^X = \text{Tr}_{S,J} [\varrho_J^{X|S,J} \rho_{S,J}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

$\varrho^{X|S,J}$ é um estado condicional causal de forma que $\text{Tr}_{S,J}[\varrho^{X|S,J}(\cdot)]$ fornece o update do estado para Julio condicionado a X (variável aleatória que descreve o estado do medidor

utilizado por Julio). E $\varrho_J^{X|SJ}$ representa um estado condicional que contém a informação sobre X , condicionado ao estado SJ . Em termos formais, ele é uma generalização da probabilidade condicional clássica para o contexto quântico. Seguindo a analogia da tabela 1:

$$\varrho_J^{X|SJ} = \rho_{XJ} \star \rho_{SJ}^{-1}. \quad (3.17)$$

Diante disto, tomamos o traço em SJ porque estamos marginalizando essas variáveis para obter um operador reduzido que dependa apenas de J . Isso reflete a operação sobre a descrição de um sistema quântico equivalente à soma sobre variáveis clássicas não relevantes em um sistema. Após tomar o traço, ainda sobra um operador em J porque estamos projetando toda a informação do sistema SJ no espaço de J . O traço elimina a dependência direta em SJ , mas a relação condicional entre J e SJ é incorporada. Assim, obtemos ρ_J^X como um estado em J , mas atualizado conforme a dependência condicional com X .

Aqui, X é a região clássica associada à medição de Julio. SJ é a região composta pelo estado de memória de Julio e pelo sistema quântico em evolução. Para Wigner é mais complicado. Podemos considerar o caso onde ele usa o mesmo $POVM$ Π_{W_i} com quatro respostas clássicas previstas: $\{\phi^+, \phi^-, \psi^+, \psi^-\}$. Ou podemos considerar que sua perspectiva simplesmente consiste no estado que surge através da evolução conjunta entre Julio e o Sistema quântico no laboratório. Quando há uma medição, a propagação de crenças pode ser usada para derivar:

$$\rho_W^X = \text{Tr}_{SJ} [\varrho_W^{X|S'J'} \varrho_W^{S'J'|SJ} \rho_{SJ}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Podemos usar a propagação de crenças para obter a perspectiva de Wigner no caso em que ele não realiza a medição:

$$\rho_W^{S'J'} = \text{Tr}_{SJ} [\varrho_W^{S'J'|SJ} \rho_{SJ}] = |\phi^+\rangle\langle\phi^+|. \quad (3.19)$$

Na equação (3.18) o índice X representa a região clássica associada com a medição de Wigner. Podemos comparar as perspectivas (quânticas) de Wigner e de Julio e decidir se elas são compatíveis. Consideremos, para isso,

$$\rho_W^X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_J^X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Vamos calcular a interseção dos suportes dessas matrizes. O suporte de ρ_W^X é o subespaço gerado pelos autovetores associados aos autovalores não nulos. O único autovalor não nulo

de ρ_W^X é $\lambda_W = 1$, associado ao autovetor:

$$\vec{v}_W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Logo, o suporte de ρ_W^X é o subespaço unidimensional $\text{span}\{\vec{v}_w\}$.

Os autovalores não nulos de ρ_J^X são $\lambda_J = \frac{1}{2}$, com multiplicidade 2. Os autovetores associados são:

$$\vec{v}_{J_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_{J_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Logo, o suporte de ρ_J^X é o subespaço bidimensional $\text{span}\{\vec{v}_{J_1}, \vec{v}_{J_2}\}$.

A interseção do suporte de ρ_W^X e do suporte de ρ_J^X corresponde à interseção dos subespaços $\text{span}\{\vec{v}_W\}$ e $\text{span}\{\vec{v}_{J_1}, \vec{v}_{J_2}\}$. Como $\vec{v}_W = \vec{v}_{J_1}$, temos:

$$\text{supp}[\rho_J^X] \cap \text{supp}[\rho_W^X] = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \neq \emptyset. \quad (3.23)$$

Em suma, ao reinterpretar o problema do amigo de Wigner como um problema de inferência Bayesiana podemos notar que embora as perspectivas entre J e W sejam distintas, elas são compatíveis de acordo com o critério (2.47) no caso clássico ou (2.80) no caso quântico. E isto vale para os agentes do problema sendo interpretados como clássicos ou quânticos. Se ambos forem da escola de Bayesianismo subjetivista, ao abrirem seu laboratório, será possível concordar sobre outro experimento que resolva a disputa. Agora, se forem objetivistas, eles podem compartilhar os dados que eles têm acesso (principalmente Julio para Wigner) e atualizar suas probabilidades. De toda forma, os agentes podem concordar em discordar, afinal, a compatibilidade prevê que eles podem atingir concordância subjetivista futura. Veja, um grupo de agentes que compartilham uma distribuição de probabilidade a priori, não podem assinalar posteriores diferentes, caso eles tenham conhecimento comum das posteriores, de acordo com o teorema de Aumann (26). Com base neste indicativo, será que podemos nos perguntar sobre uma possível distribuição de probabilidades comum a W e J? Este é o *pooling*, um processo de combinar as atribuições de estado de vários agentes em uma única perspectiva que represente as visões do grupo como um todo. Esse processo é abordado tanto no caso clássico quanto no quântico, utilizando princípios de inferência Bayesiana, e será tratado em outros trabalhos futuramente.

4 CONCLUSÃO

Neste trabalho de conclusão de curso, foram obtidos os seguintes resultados:

- A) Revisamos um modelo matemático para compatibilidade Bayesiana em sistemas quânticos, formalizando critérios rigorosos para avaliação de perspectivas distintas.
- B) Conferimos que nosso critério matemático suporta e abarca qualquer tipo de interpretação, viés e cenário, provando-o para inferência Bayesiana objetiva e subjetiva, clássica e quântica.
- C) Demonstramos que a compatibilidade Bayesiana pode reconciliar descrições divergentes no paradoxo do amigo de Wigner, eliminando a necessidade de revisão das premissas fundamentais da mecânica quântica.
- D) Demonstramos que nossos resultados são independentes de como queremos trabalhar nossas perspectiva, seja ela clássica ou quântica. A compatibilidade entre descrições distintas pode ser definida de maneira formal e unificada, tanto para sistemas clássicos quanto quânticos, a partir da interseção dos suportes dos estados dos observadores. Esse critério garante que, independentemente das perspectivas adotadas, as descrições probabilísticas de diferentes agentes podem coexistir sem inconsistência.

No Bayesianismo objetivista clássico, dois observadores podem ter descrições distintas apenas se possuírem acesso a diferentes dados experimentais. A compatibilidade se traduz na possibilidade de derivar ambas as descrições a partir de um único estado conjunto, condicionado a variáveis clássicas distintas. Já no caso quântico, aplicamos a mesma ideia para estados quânticos, mostrando que a compatibilidade se mantém mesmo na presença de não-comutatividade, desde que haja uma variável clássica que condicione corretamente os estados dos observadores. No Bayesianismo subjetivista clássico, mostramos que compatibilidade implica a existência de um estado inicial compartilhado que, mesmo não explicitamente acordado entre os agentes, pode ser inferido retroativamente. A compatibilidade subjetivista sugere que, com aquisição de dados adicionais, os observadores podem eventualmente convergir para uma mesma descrição. E em sua versão quântica expandimos essa análise para estados quânticos, estabelecendo um critério baseado na possibilidade de uma variável auxiliar X que reconcilie os estados dos observadores em pelo menos uma condição particular. A compatibilidade Bayesiana fornece uma possível resolução para o paradoxo do amigo de Wigner, tanto na perspectiva clássica quanto quântica.

Os resultados apresentados estendem as abordagens propostas por (13) e (7), fornecendo uma interpretação estatística robusta para descrições conflitantes em sistemas quânticos. Nossa abordagem complementa estudos recentes sobre inferência Bayesiana quântica (11) e pode servir como base para futuras reformulações da teoria de medição quântica.

Além disso, a compatibilidade Bayesiana estabelece uma conexão direta com o problema da conciliação de perspectivas distintas por meio do *pooling* de estados (3). Esse processo, amplamente estudado na inferência Bayesiana clássica, permite combinar atribuições de estado de diferentes agentes em uma única distribuição que represente a visão conjunta do grupo. No contexto quântico, essa conciliação deve respeitar restrições impostas pela não comutatividade de operadores, um aspecto que será explorado em investigações futuras.

Os métodos apresentados possuem aplicações diretas em fundamentos de mecânica quântica, teoria da informação e computação quântica. A abordagem pode ser utilizada na modelagem de sistemas quânticos complexos com múltiplos observadores e os critérios desenvolvidos auxiliam na interpretação de experimentos quânticos em larga escala, incluindo testes envolvendo emaranhamento e correlações não-locais.

Mas apesar das contribuições, algumas limitações devem ser consideradas. A abordagem depende fortemente da escolha de estados iniciais compartilhados entre observadores, o que pode ser um fator limitante em certos cenários.

Por fim, a pesquisa abre diversas possibilidades para investigações futuras, como a análise mais profunda do *pooling* Bayesiano quântico como um mecanismo para conciliação de perspectivas probabilísticas em sistemas físicos, ao qual planejamos tocar em um trabalho futuro.

Em síntese, este estudo representa um avanço significativo na compreensão da compatibilidade de perspectivas em mecânica quântica, sugerindo que a inferência Bayesiana pode fornecer uma solução consistente para o paradoxo do amigo de Wigner. Esperamos que nossa pesquisa contribua para uma compreensão mais profunda sobre a interpretação da mecânica quântica e sua relação com a inferência Bayesiana, podendo impactar significativamente estudos em informação quântica e fundamentos da física.

REFERÊNCIAS

- 1 EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Physical Review*, v. 47, p. 777-780, 1935. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.47.777>.
- 2 CABELLO, A. Interpretations of quantum theory: A map of madness. *arXiv preprint*, 2015. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1509.04711>.
- 3 LEIFER, M. S.; SPEKKENS, R. W. A Bayesian approach to compatibility, improvement, and pooling of quantum states. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 47, p. 275301, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1088/1751-8113/47/27/275301>.
- 4 MORETTIN, P. A.; BUSSAB, W. O. **Estatística Básica**. 6^a ed. revista e atualizada, 2^a tiragem. São Paulo: Saraiva, 2010.
- 5 WIGNER, E. P. Remarks on the mind-body question. In: MEHRA, J. (Ed.). *Philosophical Reflections and Syntheses*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1995. p. 247–260.
- 6 AUMANN, R. J. Agreeing to disagree. *The Annals of Statistics*, v. 4, 1976. DOI: <https://doi.org/10.1214/aos/1176343654>.
- 7 DUARTE, C. Compatibility between agents as a tool for coarse-grained descriptions of quantum systems. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 53, p. 395301, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1088/1751-8121/ab9dc9>.
- 8 LEIFER, M. S. Is the quantum state real? An extended review of psi-ontology theorems. *Quanta*, v. 3, p. 67, 2014.
- 9 DUARTE, C.; CARVALHO, G. D.; BERNARDES, N. K.; DE MELO, F. Emerging dynamics arising from coarse-grained quantum systems. *Physical Review A*, v. 96, p. 032113, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.96.032113>
- 10 DUARTE, C.; RIZZUTI, B. F.; FREIRE JR, O. Agreement and Compatibility in Wigner’s Friend Paradox. *Manuscrito não publicado*, 2024.
- 11 SCHMID, D.; YING, Y.; LEIFER, M. A review and analysis of six extended Wigner’s friend arguments. *arXiv preprint*, 2023. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2308.16220>.
- 12 AARONSON, S. The complexity of agreement. 2004. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/cs/0406061>. Acesso em: [data de acesso].
- 13 LEIFER, M. S.; SPEKKENS, R. W. Towards a formulation of quantum theory as a causally neutral theory of Bayesian inference. *Physical Review A*, v. 88, n. 5, p. 052130, 2013. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.88.052130>.
- 14 SCHLOSSHAUER, M. Decoherence, the measurement problem, and interpretations of quantum mechanics. *Reviews of Modern Physics*, v. 76, p. 1267–1305, 2005. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.76.1267>.

- 15 LEIFER, M. S. Quantum dynamics as an analog of conditional probability. *Physical Review A*, v. 74, n. 4, p. 042310, 2006. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.74.042310>.
- 16 SANTOS, A. G.; HUGUENIN, J. A. Medidas quânticas: abordagem experimental de medidas POVM em polarização com feixe laser intenso. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 45, e20220285, 2023. DOI: <https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2022-0285>.
- 17 SKOROBAGATKO, G. A. Universal separability criterion for arbitrary density matrices from causal properties of separable and entangled quantum states. 2021. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2012.09428>.
- 18 KOLMOGOROV, A. N. *Foundations of the Theory of Probability*. 2nd English edition. New York: Chelsea Publishing Company, 1950.
- 19 CAVALCANTI, E. G. The view from a Wigner bubble. *Foundations of Physics*, v. 51, p. 39, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10701-021-00448-5>.
- 20 ANSCOMBE, F. J.; AUMANN, R. J. A definition of subjective probability. *The Annals of Mathematical Statistics*, v. 34, p. 199–205, 1963.
- 21 AMARAL, B.; BARAVIERA, A. T.; CUNHA, M. O. T. *Mecânica Quântica para Matemáticos em Formação*. Publicações Matemáticas. 28º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 2011. ISBN: 978-85-244-327-9.
- 22 WATROUS, J. *The Theory of Quantum Information*. Cambridge: Cambridge University Press, 2018. Disponível em: <https://www.cs.uwaterloo.ca/~watrous/TQI/>.
- 23 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. *Quantum Computation and Quantum Information. 10th Anniversary Editio*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. ISBN: 978-1-107-00217-3.
- 24 AHLFORS, L. V. *Complex Analysis: An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1979.
- 25 STANFORD ENCYCLOPEDIA OF PHILOSOPHY. *Interpretations of Probability*. Primeira publicação em 21 de outubro de 2002; revisão substantiva em 16 de novembro de 2023. Disponível em: <https://plato.stanford.edu/entries/probability-interpret/>.
- 26 LEIFER, M.; DUARTE, C. Generalising Aumann’s Agreement Theorem. *arXiv preprint*, 2022. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2202.02156>.
- 27 YUAN, R. A Brief Introduction to POVM Measurement in Quantum Communications. *arXiv preprint*, 2022. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2201.07968>.
- 28 GROOTE, J.; MOREL, R.; SCHMALTZ, J.; WATKINS, A. *Logic Gates, Circuits, Processors, Compilers and Computers*. 2021. ISBN: 978-3-030-68552-2. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-68553-9>.
- 29 HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Linear Algebra*. 2. ed. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1971.

- 30 ROSSI, V. P.; SOARES-PINTO, D. O. Wigner's friend and the quasi-ideal clock. *Physical Review A*, v. 103, p. 052206, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.103.052206>.
- 31 DAVYDOV, A. S. *Quantum Mechanics*. 2. ed. Traduzido, editado e com acréscimos por D. ter Haar. Oxford: Pergamon Press, 1965. (International Series of Monographs in Natural Philosophy, v. 1). Tradução do original russo publicado em 1963.
- 32 GROSSI, R.; BRUGGER, L. L.; RIZZUTI, B. F.; DUARTE, C. One Hundred Years Later: Stern-Gerlach Experiment and Dimension Witnesses. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 45, e20220227, 2023. DOI: <https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2022-0227>.

4.1 APÊNDICE: USO DE INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL NA PRODUÇÃO DESTE TRABALHO

Este apêndice tem o objetivo de esclarecer como ferramentas de Inteligência Artificial, em especial o ChatGPT, auxiliaram na produção deste Trabalho de Conclusão de Curso. O uso dessas ferramentas foi limitado a processos mecânicos e de formatação, sem interferência no conteúdo original ou no desenvolvimento conceitual do trabalho.

Durante a elaboração do documento no Overleaf, a Inteligência Artificial foi utilizada principalmente para:

- Ajustar a indentação do texto de forma padronizada. Aqui cito várias equações que foi pedido para que a Inteligência Artificial indentasse, mas a indentação do código fonte não reflete no PDF final.
- Adicionar pacotes necessários ao preâmbulo do \LaTeX conforme as exigências surgiam; Cito a exemplo: `\crefname{table}{tabela}{tabelas}` *% Configura singular e plural para tabelas* e `\Crefname{table}{Tabela}{Tabelas}` *% Configura singular e plural com inicial maiúscula*, que me ajudaram a corrigir um problema do compilador de processar a chamada das tabelas. O problema vinha da classe `abntbiuffj.cls` que é padrão dos trabalhos de defesa da UFJF feitos pelo \LaTeX e, dado que não consegui consertá-lo, eu contornei o mesmo com a ajuda da função adicional fornecida pela IA.
- Inserir e organizar comentários no código-fonte (`%`) para melhor compreensão e manutenção; Cito como exemplo qualquer um dos meus pacotes no preâmbulo, ou meus *new commands* como:

```

% Comando personalizado
\definecolor{red}{rgb}{1,0,0}
\newcommand{\bfr}[1]{\textcolor{red}{#1}}
\usepackage{xcolor}
\definecolor{RED}{rgb}{1,0,0} %Define RED como um tom de vermelho.
% Texto em vermelho destacado.,
entre outros.
```

- Fornecer funções do \LaTeX desconhecidas ou pouco familiares para facilitar a escrita e edição; Cito a exemplo,

```
\begin{flushright}
```

```
\renewcommand{\arraystretch}{1.5} % Aumenta o espaçamento entre as linhas
```

`\cref`

e outras.

- Diagnosticar e corrigir erros de compilação, sugerindo soluções eficientes para problemas específicos;
- Formatar tabelas e matrizes de maneira rápida e precisa, adequando-as à sintaxe correta do \LaTeX .

Além desses aspectos técnicos, a ferramenta também teve um papel perceptível na uniformização e refinamento de alguns elementos do documento final, tais como:

- Padronização das referências bibliográficas, garantindo conformidade com o padrão exigido pelo trabalho;
- Uniformização das legendas de figuras e tabelas, respeitando normas da ABNT;
- Revisão ortográfica e de coerência textual;
- Sugerindo reformulações de trechos da conclusão para evitar redundância excessiva em relação aos objetivos apresentados no resumo e na introdução e às conclusões intermediárias dos finais dos capítulos.

Destes itens, destaco que, para que ela pudesse receber as entradas, como por exemplo, as referências, e padronizá-las, foi preciso que o autor criasse prompts especializados em estabelecer o padrão na memória da Inteligência Artificial utilizada para que ela pudesse replicar com o material desordenado.

É importante ressaltar que todas as decisões conceituais, formulações matemáticas e análises críticas do trabalho foram realizadas pelo autor, garantindo a originalidade e a integridade acadêmica do conteúdo apresentado. A Inteligência Artificial serviu apenas como uma ferramenta de suporte para otimização do processo de escrita e edição, sem substituir o pensamento crítico e a pesquisa aprofundada necessária para a elaboração deste trabalho.