UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Mário Márcio Dias Júnior

Estudo sobre a Transformação de Foldy-Wouthuysen Exata para conjunto completo de termos que violam as simetrias CPT/Lorentz na teoria de Dirac

Juiz de Fora

2023

Mário Márcio Dias Júnior

Estudo sobre a Transformação de Foldy-Wouthuysen Exata para conjunto completo de termos que violam as simetrias CPT/Lorentz na teoria de Dirac

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Física. Área de concentração: Física

Orientador: Prof. Dr. Ilya L. Shapiro

Coorientador: Prof. Dr. Bruno Gonçalves

Juiz de Fora

2023

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Dias Júnior, Mário Márcio.
Estudo sobre a Transformação de Foldy-Wouthuysen Exata para conjunto completo de termos que violam as simetrias CPT/Lorentz na teoria de Dirac / Mário Márcio Dias Júnior. – 2023.
77 f.

Orientador: Ilya L. Shapiro
Coorientador: Bruno Gonçalves
Tese (Doutorado Acadêmico) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2023.

1. Transformação Foldy-Wouthuysen Exata. 2. Campo de Dirac. 3. Violação das Simetrias de CPT e de Lorentz. I. Shapiro, Ilya L., orient. II. Gonçalves, Bruno, coorient. III. Título.

Mário Márcio Dias Júnior

"Estudo sobre a Transformação de Foldy-Wouthuysen Exata para conjunto completo de termos que violam as simetrias CPT/Lorentz na teoria de Dirac"

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Física. Área de concentração: Física.

Aprovada em 03 de Maio de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ilia Chapiro - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Bruno Gonçalves - Coorientador
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais

Prof. Dr. José Abdalla Helayel-Neto
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira Junior
Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Jorge Ananias Neto
Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, 12/04/2023.

Documento assinado eletronicamente por **Ilia Chapiro**, **Professor(a)**, em 03/05/2023, às 19:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **José Abdalla Helayêl Neto**, **Usuário Externo**, em 04/05/2023, às 13:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Gil de Oliveira Neto**, **Professor(a)**, em 04/05/2023, às 15:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Jorge Ananias Neto**, **Professor(a)**, em 04/05/2023, às 21:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Bruno Gonçalves**, **Usuário Externo**, em 05/05/2023, às 21:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Manoel Messias Ferreira Junior**, **Usuário Externo**, em 10/05/2023, às 16:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

À minha família...
À minha mãe, meu eterno exemplo de vida;
ao meu irmão, meu maior incentivador;
e à memória de meu pai.

AGRADECIMENTOS

A Deus, primeiramente, pelo dom da vida, pelas oportunidades criadas e sonhos que tenho realizado.

À minha mãe pelo seu exemplo de força e determinação, além de me ensinar a ousar, questionar e acima de tudo ser curioso na busca constante do conhecimento.

Ao meu irmão pelo apoio, incentivo e por sempre acreditar na minha capacidade.

Dedico também este trabalho aos meus avós - Maria Aparecida e Orcizo, Maria da Glória e Pedro Paulo, Mariza e Geraldo - por serem exemplos de batalhadores e de resignação diária em seus tempos.

Ao professor Ilya L. Shapiro, pela orientação no período de toda minha pós-graduação, pela oportunidade de desenvolver este trabalho, pelos ensinamentos, discussões e conselhos.

Ao professor Bruno Gonçalves, pela sugestão e desenvolvimento do trabalho desta tese, pela orientação, ensinamentos, conselhos e conversas durante a iniciação científica e a pós-graduação.

Ao professor Baltazar J. Ribeiro, pela colaboração no desenvolvimento dos trabalhos e pelos ensinamentos.

Aos professores do Departamento de Física da UFJF e IF Sudeste MG, por todo o conhecimento transmitido.

Aos amigos que fiz durante a graduação e a pós-graduação, especialmente aos meus companheiros de estudos que estiveram na sala 01 do Departamento da UFJF.

À UFJF, pelo apoio financeiro.

Se avexe não...
Amanhã pode acontecer tudo
Inclusive nada.

Se avexe não...
Que a lagarta rasteja
Até o dia em que cria asas.

Se avexe não...
Que a burrinha da felicidade
Nunca se atrasa.

Se avexe não...
Amanhã ela pára
Na porta da tua casa.

Se avexe não...
Toda caminhada começa
No primeiro passo
A natureza não tem pressa
Segue seu compasso
Inexoravelmente chega lá...

Se avexe não...
Observe quem vai
Subindo a ladeira
Seja princesa ou seja lavadeira...
Pra ir mais alto
Vai ter que suar.
[· · ·]
Accioly Neto

Ao infinito e... muito mais além !

RESUMO

O estudo da possibilidade da violação das simetrias CPT/Lorentz tem recebido uma atenção significativa da comunidade científica atualmente. Há um grande número de estudos nos últimos anos que mostram os possíveis experimentos que poderiam dar o efeito físico mais proeminente para medir campos externos que violam as simetrias fundamentais. Uma forma que se mostra eficiente para estudar e interpretar resultados da interação do campo de Dirac com muitos campos externos possíveis associados à violação das simetrias de CPT/Lorentz é através da Transformação de Foldy-Wouthuysen Exata. Nesta tese, iniciamos com a breve apresentação de elementos relacionados à construção da teoria quântica relativística para descrição de partículas e interações, bem como a formulação dos campos de Klein-Gordon e de Dirac. A seguir, apresentamos o cenário de um férmion de Dirac interagindo com diferentes campos externos que violam as simetrias CPT/Lorentz. Para extrair tais informações físicas do Hamiltoniano, é necessário realizar uma Transformação de Foldy-Wouthuysen no mesmo. O método da Transformação de Foldy-Wouthuysen Exata é generalizado aqui. Em princípio, não é possível construir a Transformação de Foldy-Wouthuysen Exata para qualquer Hamiltoniano. As condições de transformação são as mesmas, mas o operador involução tem uma nova forma. Tomamos um exemplo particular e construímos explicitamente o novo operador involução que permite realizar a transformação. Tratamos o caso do Hamiltoniano com 160 possíveis termos que violam CPT/Lorentz, usando esta nova técnica. A transformação foi realizada, e a análise física das equações de movimento é mostrada. Além disso, apresentamos também uma breve perspectiva sobre testes experimentais no contexto da Transformação de Foldy-Wouthuysen Exata e propostas futuras.

Palavras-chave: Transformação Foldy-Wouthuysen Exata. Campo de Dirac. Violação das Simetrias de CPT e de Lorentz. Novo Operador Involução.

ABSTRACT

The study of the possible candidates to break CPT/Lorentz symmetry is very important nowadays. There are a large number of studies over the last ten years that show the possible experiments that could give the more prominent physical effect to measure external fields that violate fundamental symmetries. An efficient way to study and interpret results of the interaction of the Dirac field with many possible external fields associated with the violation of the CPT/Lorentz symmetries is through the Exact Foldy-Wouthuysen Transformation. In this thesis, we begin with a brief presentation of elements related to the construction of relativistic quantum theory for the description of particles and interactions, as well as the formulation of the Klein-Gordon and Dirac fields. Next, we present the scenario of a Dirac fermion interacting with different external fields that violate the CPT/Lorentz symmetries. It is necessary to perform a Foldy-Wouthuysen Transformation on the Hamiltonian to extract such physical information from it. The Exact Foldy-Wouthuysen transformation method is generalized here. In principle, it is not possible to construct the exact Foldy-Wouthuysen transformation for any Hamiltonian. The transformation conditions are the same, but the involution operator has a new form. We took a particular example and constructed explicitly the new involution operator that allows one to perform the transformation. We treat the case of the Hamiltonian with 160 possible CPT/Lorentz breaking terms, using this new technique. The transformation was performed, and physics analysis of the equations of motion is shown. In addition, we also present a brief perspective on experimental tests in the context of Exact Foldy-Wouthuysen Transformation and future proposals.

Keywords: Exact Foldy-Wouthuysen Transformation. Dirac Field. Violation of CPT and Lorentz symmetries. New Involution Operator.

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O estudo da possibilidade da violação das simetrias CPT/Lorentz tem recebido uma atenção significativa da comunidade científica atualmente [1, 2]. Há um grande número de estudos nos últimos anos que mostram os possíveis experimentos que poderiam dar o efeito físico mais proeminente para medir campos externos que violam as simetrias fundamentais [3]. Até o momento, nenhum deles foi observado diretamente. As abordagens teóricas mais proeminentes que consideram esses casos são baseadas em efeitos físicos indiretos, como é mostrado nas referências [4, 5, 6]. Em outras palavras, a busca por essas manifestações começa com uma ação que considera pelo menos dois campos independentes, como pode ser visto em trabalhos recentes [7]. Sinais observáveis de violação de Lorentz e CPT também podem ser descritos de forma independente do modelo usando a teoria de campo efetiva [8].

A teoria de campo efetivo realista geral para violação de Lorentz é chamada de Extensão de Modelo Padrão (SME) [5, 9, 10]. Inclui o Modelo Padrão acoplado à Relatividade Geral junto com todos os possíveis operadores para violação de Lorentz. Tanto a violação de Lorentz global [5, 9] quanto a local [10] são incorporadas. Como a violação do CPT em teorias de campo realistas é acompanhada pela violação de Lorentz [11], o SME também descreve a violação geral de CPT. Avaliações do SME podem ser encontradas em [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21].

Além disso, existem também grandes esforços em estudar simetrias CPT/Lorentz fracamente quebradas não apenas do ponto de vista matemático. Para o cenário não-relativístico, os resultados estão bem estabelecidos em [22, 23, 24, 25], para o campo de torção, por exemplo. É muito interessante ver em [26] que o campo de torção pode ser gerado a partir da quebra de simetria. Alguns estudos teóricos recentes foram desenvolvidos com a mesma base fenomenológica [27, 28, 29, 30]. Já em [31], uma descrição relativística de uma partícula de Dirac no campo de torção foi feita.

Outra possível abordagem fenomenológica para este problema pode ser construída passo a passo, buscando novos termos no Hamiltoniano, que descreva essa situação. Pensando assim, é possível encontrar, no Hamiltoniano transformado, um termo com mistura explícita entre um campo externo conhecido e um dos termos CPT/Lorentz. O cenário mais interessante é encontrado quando o campo externo tem uma amplitude grande o suficiente para compensar a fraqueza do termo CPT/Lorentz.

A ideia é a mesma apresentada em [32], em que o campo magnético forte poderia, em princípio, alterar a trajetória da partícula de Dirac que interage com as ondas gravitacionais. É importante levar em consideração as correções, feitas com a transformação de Foldy-Wouthuysen usual (TFW) [33], a esses resultados que são mostrados em [34, 35]. A gravidade massiva linearizada pode ser estudada em [36], e a descrição relativística geral de uma partícula de Dirac em uma onda gravitacional e um campo magnético foi realizada (com TFW usual) em [37], onde são indicados alguns possíveis experimentos que poderiam medir os efeitos indiretos das ondas gravitacionais nos férmions de Dirac. Entretanto, resolver a equação de Dirac para o caso geral não é um procedimento simples [38]. É conhecido na literatura que trabalhar com a transformação de Foldy Wouthuysen exata (TFWE) é uma abordagem mais proeminente para interpretar um Hamiltoniano de Dirac do que a transformação usual [39, 40]. Contudo, isso é verdade não apenas pelo fato de poder nos dar novos termos, mas também por ser um procedimento mais rápido e econômico (em termos de cálculo algébrico) [32, 41, 42, 43]. Pode-se ver essa transformação como uma melhoria da TFW usual.

Comparando os dois procedimentos, é possível ver que na TFW usual, a multiplicação em cada passo (em cada ordem de $1/m$) pelo termo que torna o Hamiltoniano par gera um máximo de $1 + 2n$ termos pares, onde n representa o número de termos do Hamiltoniano anterior (ver, por exemplo, pp. 48-51 em [44]). O número máximo de termos no enésimo Hamiltoniano é obtido diretamente pelo fato de que esta é uma expansão em série de potências de um operador. O fator 2 na expressão $1 + 2n$ é obtido no caso em que não comuta-se com todos os termos originais.

Por outro lado, a TFWE impõem a multiplicação de todos os termos do Hamiltoniano por si mesmos. Argumentos análogos nos dão o máximo de $1 + 2n^2$ no Hamiltoniano expandido. Se o parâmetro de expansão aqui também for considerado como $1/m$, pode-se ver que a possibilidade de ter novos termos em comparação com o método usual é maior. Dentre muitos casos particulares conhecidos [42, 45, 46], os anticomutadores em ambos os casos são tais que os resultados são os mesmos. Porém, não é o caso geral. Isso foi mostrado explicitamente em [39]. Neste trabalho, mostramos outro caso em que isso acontece.

Em [47], o autor atua a comparação formal entre os dois métodos de forma bastante didática. Ele também descreve qual é o método mais eficiente para cada possível aplicação. Os cálculos explícitos são realizados na série de três trabalhos em que a generalidade para o procedimento exato torna-se evidente [48, 49, 50]. Já as referências [51, 52, 53] são uma série de artigos em que as condições da TFWE não são satisfeitas. Nesses artigos, o estudo dos termos que violam CPT/Lorentz é usado como pano de fundo para esta transformação. É possível ver em [54] o Hamiltoniano diagonalizado para todos os possíveis termos que permitem este procedimento.

Nesta tese, usando o resultado apresentado em [53], desenvolvemos um algoritmo para construir um operador involução generalizado para a TFWE. Mostramos um método para construir a forma explícita do operador que permite que o Hamiltoniano seja diagonalizado. Em certo sentido, a lógica aqui é inversa: não testamos se é possível realizar a TFWE, mas buscamos o operador que nos dá essa possibilidade.

Ao mostrar a forma analítica explícita desse operador, o algoritmo usual da TFWE pode ser aplicado ao Hamiltoniano inicial. Nós construímos um operador geral, e o caso completo de CPT/Lorentz interagindo com o campo de Dirac [38] é estudado aqui usando a técnica da TFWE. Nós também comparamos o resultado com a transformação usual, e aparecem novos termos.

Discutimos assim, a generalização do método para derivar a análise física do Hamiltoniano inicial. O objetivo é obter o resultado mais geral que pode ser escrito para realizar a análise física dos termos que quebram CPT/Lorentz usando o método que acreditamos ser o mais completo para realizar esse tipo de estudo, que é a TFWE. Embora o TFW [33] forneça, em geral, informações mais detalhadas sobre a aproximação não-relativística, há uma vantagem considerável na construção da TFWE [39, 40, 42, 45, 46, 55, 56, 57]. Usando a transformação exata, o risco de perder alguns termos importantes é menor (como pode ser visto em [39] para o campo espinorial no caso do campo gravitacional fraco) e, do ponto de vista matemático, a TFWE é mais complexa [42, 45].

Esta tese está organizada como segue. No capítulo 2, uma pequena revisão de elementos e conceitos básicos relacionados à teoria quântica relativística e a representação de Dirac é realizada. Os campos de Klein-Gordon e de Dirac são formulados e introduzidos no final do mesmo. No capítulo 3, o panorama de CPT/Lorentz é apresentado para campo do férmion de Dirac interagindo com outros campos externos que violam as simetrias fundamentais. Além disso, as simetrias para a equação de Dirac são brevemente desenvolvidas no final do capítulo. No capítulo 4, resultados importantes referentes à utilização do método TFWE são discutidos. Adicionalmente, as duas versões existentes para a *Transformação de Foldy-Wouthuysen* são diferenciadas para compreender os principais pontos de cada uma. A transformação exata é demonstrada de forma didática, permitindo a investigação e análise de qualquer caso de interação entre campos externos e o campo de Dirac. A partir do capítulo 5, os principais resultados originais obtidos [52, 53, 54] que englobam todos os conceitos apresentados anteriormente nesta tese são apresentados. Já no capítulo 8, é apresentado outro resultado original desenvolvido ao longo deste doutorado [58], sendo dedicado a obtenção de uma generalização do método e o desenvolvimento de um novo operador involução. Nos dois últimos capítulos, é apresentada uma breve perspectiva sobre testes experimentais no cenário da TFWE e a violação de simetrias de CPT/Lorentz, e encerra-se discutindo os principais resultados apresentados nesta tese e propostas para trabalhos futuros.

2 CAMPOS DE KLEIN-GORDON E DE DIRAC

O objetivo deste capítulo é introduzir brevemente um formalismo que pode ser usado para descrever partículas e suas interações, e que serão necessários para desenvolvimentos posteriores. A ênfase é dada aos elementos ligados aos campos que aparecem quando a mecânica quântica relatívistica é considerada, que sustentam o arcabouço teórico da física de partículas de alta energia.

2.1 NOTAÇÕES

Primeiro, antes de introduzir conceitos importantes relacionados à teoria quântica relativística, é necessário definir a notação. As grandezas fundamentais da teoria serão então definidas, mas não serão explicadas detalhadamente cada uma delas, pois não é esse o objetivo deste trabalho. A notação a seguir é a mesma de [44, 59].

O conceito de distância entre dois pontos no espaço pode ser generalizado como o intervalo entre dois pontos no espaço-tempo, para que seja invariante às transformações de Lorentz. O intervalo é dado por

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) \ , \tag{2.1}$$

onde

$$x^\mu = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = (-ct, x, y, z) \tag{2.2}$$

e $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski. Para os operadores diferenciais,

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right) \ ,$$

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right) \quad , \quad \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \ . \tag{2.3}$$

O quadrivetor energia-momento de uma partícula é escrito da seguinte maneira

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \boldsymbol{p}\right) \quad , \quad p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\boldsymbol{p}\right) \ . \tag{2.4}$$

A relação entre o momento e energia da partícula tem a forma (relação de dispersão)

$$p^2 = p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2 \ . \tag{2.5}$$

Nas unidades em que $c = 1$,

$$p^2 = p^\mu p_\mu = E^2 - p^2 = m^2 \ . \tag{2.6}$$

Já os observáveis físicos são representados por operadores hermitianos lineares que são

$$\begin{aligned} p_i &\longrightarrow -i\hbar\tfrac{\partial}{\partial x^i}\,; \\ E &\longrightarrow \quad i\hbar\tfrac{\partial}{\partial t}\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Agora, para a representação de Dirac,

$$\alpha^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \beta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \tag{2.8}$$

em que as matrizes 4×4, α^i e β, são todas hermitianas e possuem as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i &= 2\delta_{ij}\,; \\ \alpha_i\beta + \beta\alpha_i &= 0\,; \\ {\alpha_i}^2 = \beta^2 &= \mathrm{I}\,. \end{aligned} \tag{2.9}$$

As matrizes σ_i são as matrizes de Pauli

$$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \sigma_2 = \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \sigma_3 = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \ . \tag{2.10}$$

Cada matriz de Pauli é hermitiana e, juntamente com a matriz identidade I, as mesmas (multiplicadas por coeficientes reais) formam uma base para o espaço vetorial de matrizes hermitianas 2×2.

Tais matrizes possuem as seguintes propriedades também

$${\sigma_1}^2 = {\sigma_2}^2 = {\sigma_3}^2 = -i\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I\,. \tag{2.11}$$

As matrizes de Pauli obedecem às seguintes relações de comutação

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k\,; \tag{2.12}$$

e anticomutação

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}I\,; \tag{2.13}$$

de modo que,

$$\sigma_i \sigma_j \; = \; \delta_{ij} I + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \, . \tag{2.14}$$

Outra notação quadridimensional conveniente são as matrizes 4×4, γ^μ, na representação de Dirac, que podem ser representadas da seguinte maneira

$$\gamma^0 \; \equiv \; \beta \; = \; \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \qquad ; \qquad \gamma^i \; \equiv \; \beta\alpha^i \; = \; \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

onde $i \; = \; 1, 2, 3$.

As matrizes γ^μ não são hermitianas, mas obedecem à relação importante,

$$\gamma^{\mu\dagger} \; = \; \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \; . \tag{2.16}$$

É fácil ver que as relações apresentadas em (2.9) se escrevem em uma forma compacta em termos das matrizes γ, isto é,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \; = \; \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu \; = \; 2\eta^{\mu\nu} \; . \tag{2.17}$$

É útil também definir o produto das quatro matrizes gama da seguinte maneira

$$\gamma^5 \; := \; i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \; = \; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \; . \tag{2.18}$$

2.2 A EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON

A mecânica quântica relativística das partículas de spin-0 foi considerada primeiro por Schrödinger, antes de publicar sua famosa equação para o caso não-relativístico. Abandonou a mecânica quântica relativística por dificuldades formais que só foram compreendidas muitos anos depois. Neste trabalho, as equações de Klein-Gordon e de Dirac serão desenvolvidas.

Comecemos pela partícula livre. Em mecânica quântica não-relativística a equação de Schrödinger é obtida da equação fundamental

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi \; . \tag{2.19}$$

Considerando o Hamiltoniano da partícula livre não-relativística de massa m que é

$$H = \frac{p^2}{2m} \ , \tag{2.20}$$

e fazendo a substituição $\boldsymbol{p} \longrightarrow -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$, obtém-se então

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi \ . \tag{2.21}$$

A ideia proposta para generalizar esta equação foi utilizar o Hamiltoniano relativístico ao invés da equação (2.20). Para uma partícula livre, o Hamiltoniano é sua energia e deve-se ter

$$H = E \ . \tag{2.22}$$

Como a energia está relacionada com o momento linear através da relação (2.5), portanto, tem-se

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \ . \tag{2.23}$$

Classicamente, exige-se que as energias sejam positivas e por isso, deveria haver no caso relativístico

$$H = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \ . \tag{2.24}$$

Assim, confronta-se com o problema de interpretar a raiz quadrada de um operador. Para evitar tal problema, encontra-se uma equação para H^2. Esta equação é obtida iterando a equação (2.19) e observando que $\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\, , H\right] = 0$. Obtém-se então,

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = \left(-\hbar^2c^2\nabla^2 + m^2c^4\right)\psi \ , \tag{2.25}$$

ou ainda,

$$\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\psi = 0 \ , \tag{2.26}$$

onde $\Box = \partial_\mu\partial^\mu$. Não há problemas com a interpretação dos operadores, mas soluções de energia negativa, que também são soluções para a equação (2.26), são introduzidas no problema. Como resultado, soluções de energia negativa não podem deixar de existir na mecânica quântica relativística, e sua interpretação relaciona-se com as antipartículas. A observação experimental de antipartículas corroborou esta teoria [60, 61, 62].

A existência de soluções com energia negativa não foi o que induziu ao abandono da equação (2.26), chamada equação de Klein-Gordon [62, 63, 64, 65], como equação relativística para o elétron, mas outro problema anterior relacionado com a densidade de probabilidade. Partindo de (2.26) e da equação complexa conjugada, pode-se obter

$$\psi^* \left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi - \psi \left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi^* = 0 \ , \tag{2.27}$$

ou

$$0 = \psi^* \Box \psi - \psi \Box \psi^* = \partial_\mu \left(\psi^* \overleftrightarrow{\partial^\mu} \psi \right) \ , \tag{2.28}$$

onde $\psi^* \overleftrightarrow{\partial^\mu} \psi \equiv \psi^* \overrightarrow{\partial^\mu} \psi - \psi^* \overleftarrow{\partial^\mu} \psi$. Então,

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \qquad ; \qquad j^\mu = \psi^* \overleftarrow{\partial^\mu} \psi \ . \tag{2.29}$$

Na identificação usual, $j^\mu = (c\rho \, , \boldsymbol{j})$, em que a densidade será

$$\rho = \frac{1}{c^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \ . \tag{2.30}$$

Esta equação demonstra que ρ não pode ser considerado como uma densidade de probabilidade porque não é definida como positiva. É por isso que um terceiro motivo levou a abandonar a equação de Klein-Gordon, o fato de ela não levar aos níveis de energia atômica do hidrogênio.

Se este último motivo for omitido, a equação (2.26) foi abandonada pelos motivos errados. De fato, pode-se demonstrar que é uma boa aproximação para partículas de spin-0, por isso não pode explicar os níveis do átomo de hidrogênio, onde os efeitos de spin são significativos. Soluções de energia negativa serão compreendidas e a densidade ρ será reinterpretada como *densidade de carga* [62].

2.3 A EQUAÇÃO DE DIRAC

Para tentar resolver os problemas associados à interpretação da equação de onda de Klein-Gordon, Dirac propôs outra equação relativística para o elétron [44, 66, 67]. A equação é semelhante à equação fundamental (2.19) em que a derivada temporal é linear. Partindo deste princípio, é natural admitir que o Hamiltoniano também seja linear nas derivadas em relação às coordenadas, o que permite escrever

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left(-i\hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta m c^2 \right) \psi \equiv H \psi \ . \tag{2.31}$$

É evidente que α e β não podem ser números, pois assim a relação entre energia e momento de uma partícula relativística não seria comprovada. Similarmente, ψ não pode ser um escalar se $\rho = \psi^*\psi$ deve ser interpretado como o componente de um quadrivetor de corrente. Isso levou Dirac a propor que $\boldsymbol{\alpha}$ e β sejam matrizes hermitianas $N \times N$ (para que H seja hermitiano) e que ψ seja uma matriz coluna com N elementos.

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{bmatrix} . \tag{2.32}$$

A equação (2.31) é então interpretada como uma equação matricial e para que ela faça sentido deve-se satisfazer certas condições.

Para que se obtenha a relação energia-momento correta basta que cada componente satisfaça à equação de Klein-Gordon. Para isso itera-se a equação (2.31)

$$\begin{aligned} -\hbar\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi &= \left(-i\hbar c\alpha^i\nabla_i + \beta mc^2\right) i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \\ &= \left[-\hbar^2c^2\frac{\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i}{2}\nabla_i\nabla_j - i\hbar mc^2\left(\alpha^i\beta + \beta\alpha^i\right)\nabla_i + \beta^2m^2c^4\right]\psi \, , \end{aligned} \tag{2.33}$$

e usando as propriedades apresentadas em (2.9), obtemos a equação de Klein-Gordon.

Já em relação à questão da probabilidade de corrente, escreve-se a equação conjugada hermitiana de (2.31). Atentando que α^i e β são hermitianas, obtém-se

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^\dagger = \psi^\dagger\left(i\hbar c\alpha^i\overleftarrow{\partial}_i + \beta mc^2\right) . \tag{2.34}$$

Multiplicando a equação (2.31) à esquerda por $\psi^\dagger$ e a equação (2.34) à direita por ψ, e então, subtraindo

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^\dagger\psi\right) = -i\hbar c\nabla_i\left(\psi^\dagger\alpha^i\psi\right) , \tag{2.35}$$

ou ainda,

$$\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^\dagger\psi\right) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\psi^\dagger c\boldsymbol{\alpha}\psi\right) = 0 \tag{2.36}$$

o que permite identificar uma densidade de probabilidade e uma corrente de probabilidade, respectivamente,

$$\rho = \psi^\dagger\psi \quad , \quad \boldsymbol{j} = \psi^\dagger c\boldsymbol{\alpha}\psi . \tag{2.37}$$

Integrando a equação (2.36) em todo o espaço

$$\frac{d}{dt}\int d^3x\,\psi^\dagger\psi = 0 , \tag{2.38}$$

o que está de acordo com o termo $\psi^\dagger\psi$ identificado como uma densidade de probabilidade definida positiva.

A notação das equações (2.36) e (2.37) antecipa o fato de $\boldsymbol{j}$ ser um 3−vetor, em que $j^\mu = (c\rho\,,\boldsymbol{j})$ é um quadrivetor conservado, $\partial_\mu j^\mu = 0$ e que a equação de Dirac é covariante, isto é, que mantém a mesma forma em todos os referenciais inerciais.

Agora, multiplicando a equação (2.31) por $\frac{1}{c}\beta$ à esquerda e introduzindo as matrizes apresentadas em (2.15), a equação de Dirac escreve-se

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\,\psi = 0\ , \tag{2.39}$$

ou ainda,

$$\left(i\hbar\partial\!\!\!/ - mc\right)\psi = 0\ , \tag{2.40}$$

onde $\partial\!\!\!/ \equiv \gamma^\mu\partial_\mu$, introduzindo a notação de Feynman que abrevia a contração de matrizes$-\gamma$ com um quadrivetor.

2.4 LIMITE NÃO-RELATIVÍSTICO DA EQUAÇÃO DE DIRAC

Uma verificação importante ao construir uma teoria que tenta fornecer uma descrição mais geral do comportamento de, por exemplo, um tipo particular de partículas, é se a teoria recupera a física estabelecida de suas formas mais específicas. No caso da equação de Dirac, é importante que em seu limite não-relativístico a base da mecânica quântica seja recuperada.

2.4.1 Partícula livre

Para determinar o limite não-relativístico da equação de Dirac, considera-se inicialmente o caso para uma partícula livre. Então, considerando,

$$\psi = \begin{pmatrix} \hat{\varphi} \\ \hat{\chi} \end{pmatrix}\ , \tag{2.41}$$

onde $\hat{\varphi}$ e $\hat{\chi}$ são espinores de Pauli (duas componentes) e a representação de Dirac para $\boldsymbol{\alpha}$ e β é utilizada, o seguinte par de equações acopladas é obtido para os espinores $\hat{\varphi}$ e $\hat{\chi}$

$$\begin{cases} i\frac{\partial}{\partial t}\hat{\varphi} &= -i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}\hat{\chi} + m\hat{\varphi}\ . \\ i\frac{\partial}{\partial t}\hat{\chi} &= -i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}\hat{\varphi} - m\hat{\chi}\ . \end{cases} \tag{2.42}$$

No limite não-relativístico, $E - m \ll m$ [1], em que é feita a substituição

[1] A partir de agora, serão utilizadas unidades naturais, de tal forma que $\hbar = c = 1$.

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi} \\ \hat{\chi} \end{pmatrix} = e^{-imt} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad . \tag{2.43}$$

Substituindo (2.43) em (2.42)

$$\begin{cases} i\frac{\partial}{\partial t}\varphi &= -i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}\chi \ . \\ i\frac{\partial}{\partial t}\chi &= -i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}\varphi - 2m\chi \ . \end{cases} \tag{2.44}$$

Como χ varia devagar com o tempo, a segunda equação é resolvida, aproximadamente por,

$$\chi \simeq -i\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}}{2m}\varphi = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{2m}\varphi \ll \psi \quad . \tag{2.45}$$

Substituindo na primeira equação

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\nabla^2}{2m}\varphi \ , \tag{2.46}$$

que é a equação de Schrödinger para a partícula livre. Como resultado, no limite não-relativístico, as componentes grandes φ seguem a equação não relativística e as componentes pequenas são desprezadas. Além disso, desprezar χ também significa desprezar soluções de energia negativa. Como resultado, elas nunca surgiram na mecânica quântica não-relativística.

2.4.2 Equação de Pauli

Considerando agora que o elétron está sujeito a um campo eletromagnético externo descrito pelo quadrivetor $A^\mu = (A^0\,, \boldsymbol{A})$. Isso é facilmente (ver e.g. [68] para mais detalhes) obtido usando, $p_\mu \longrightarrow p_\mu - \frac{e}{c}A_\mu$. Assim, escreve-se mais explicitamente

$$\begin{cases} -i\boldsymbol{\nabla} & \longrightarrow \ \boldsymbol{\pi} = -i\boldsymbol{\nabla} - e\boldsymbol{A} \ . \\ i\frac{\partial}{\partial t} & \longrightarrow \ i\frac{\partial}{\partial t} - eA^0 \ . \end{cases} \tag{2.47}$$

Então, com a separação da equação (2.41) é obtido ao invés da equação (2.44)

$$\begin{cases} i\frac{\partial\varphi}{\partial t} &= \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}\chi + eA^0\varphi \ ; \\ i\frac{\partial\chi}{\partial t} &= \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}\varphi + eA^0\chi - 2m\chi \ ; \end{cases} \tag{2.48}$$

onde foi utilizada a equação (2.43). Admitindo que os campos eletrostáticos são fracos,

$$\chi = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}}{2m}\varphi \ , \tag{2.49}$$

e portanto, para as grandes componentes

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left[\frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi})\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi})}{2m} + eA^0\right]\varphi\ . \tag{2.50}$$

Para analisar o significado desta equação nota-se que

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi})\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}) = \boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\pi} - e\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}\ . \tag{2.51}$$

Então,

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left[\frac{(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2}{2m} - \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B} + eA^0\right]\varphi\ , \tag{2.52}$$

que é reconhecida como a equação de Pauli para o elétron. A dedução da equação de Pauli como limite não-relativístico para a equação de Dirac é notável, pois foi realizada de maneira diferente e independente. Esta equação foi originalmente derivada antes da equação de Dirac como uma generalização da equação de Schrödinger para o caso de uma partícula de spin-1/2 interagindo com um campo eletromagnético externo. Como resultado, os postulados da mecânica quântica foram expandidos por Pauli, levando a incluir a descrição de uma partícula com spin, e a equação acima foi alterada para introduzir a interação entre o campo magnético externo e o momento magnético do spin.

3 O CAMPO DE DIRAC NO PANORAMA DE CPT

Neste capítulo, o cenário de um férmion interagindo com diferentes campos externos que violam as simetrias CPT/Lorentz será considerado [69, 70]. O propósito é obter o Hamiltoniano que descreva totalmente tal situação.

3.1 A EQUAÇÃO DE DIRAC COM TERMOS QUE VIOLAM AS SIMETRIAS DE CPT E LORENTZ

Iniciando com a ação que descreve um férmion de Dirac, com os termos que violam as simetrias de CPT e Lorentz

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\Big\{\frac{i}{2}\bar{\Psi}\,\Gamma^\mu D_\mu\Psi - \frac{i}{2}D^\star_\mu\bar{\Psi}\,\Gamma^\mu\Psi - \bar{\Psi}M\Psi\Big\} \; . \tag{3.1}$$

Os termos que violam as simetrias de CPT/Lorentz podem ser escritos da seguinte maneira [4]

$$D_\mu = \nabla_\mu - ieA_\mu; \quad D^\star_\mu = \nabla_\mu + ieA_\mu; \quad \Gamma^\mu = \gamma^\mu + \Gamma^\mu_1; \quad M = m + M_1 \; . \tag{3.2}$$

A ação inicial foi definida em um espaço-tempo curvo apenas para ser representada de forma geral. Porém, não há o desejo de analisar termos que violem CPT/Lorentz em um espaço-tempo curvo, pois as magnitudes desses termos são pequenas, e assim, os termos correspondentes produziriam um efeito fraco, que nunca se misturariam com os termos curvos do espaço-tempo.

Nas fórmulas acima, ∇_μ é operador de derivada covariante, $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$, e os termos Γ^ν_1 e M_1 podem ser escritos como

$$\Gamma^\nu_1 = c^{\mu\nu}\gamma_\mu + d^{\mu\nu}\gamma_5\gamma_\mu + e^\nu + if^\nu\gamma_5 + \frac{1}{2}g^{\lambda\mu\nu}\sigma_{\lambda\mu} \tag{3.3}$$

e

$$M_1 = a_\mu\gamma^\mu + b_\mu\gamma^5\gamma^\mu + im_5\gamma^5 + \frac{1}{2}H^{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} \; . \tag{3.4}$$

As grandezas a_μ, b_μ, m_5, $c_{\mu\nu}$, $d_{\mu\nu}$, e_μ, f_μ, $g_{\mu\nu\lambda}$ e $H_{\mu\nu}$ são os parâmetros que violam as simetrias CPT/Lorentz. Destes, a_μ, b_μ, e_μ, f_μ, $g_{\mu\nu\lambda}$ determinam a violação de CPT. Os coeficientes m_5, a_μ, b_μ, $H_{\mu\nu}$ possuem dimensão de massa, enquanto $c_{\mu\nu}$, $d_{\mu\nu}$, e_μ, f_μ, $g_{\mu\nu\lambda}$ são adimensionais [71]. O método convencional de investigar a possibilidade de quebra das simetrias CPT e Lorentz é considerar a forma mais geral dessas violações, e então, investigar seus efeitos fenomenológicos. O tipo mais promissor de experimento pertence à área de física atômica [14, 72, 73], mas há opções interessantes na área de altas energias e física do estado sólido [74, 75, 76], experimentos com neutrinos [77, 78, 79], gravitação [80, 81] e cosmologia [81, 82, 83].

Uma discussão extensa da possibilidade da origem destes parâmetros, bem como as diversas implicações fenomenológicas deles podem ser encontradas em [69, 70, 84]. Esses aspectos não serão considerados aqui.

É possível reescrever (3.1) da seguinte maneira

$$S = \int d^4x\bar{\psi}\Big\{i\Gamma^\mu D_\mu + \frac{i}{2}\left(\nabla_\mu\Gamma^\mu\right) - M\Big\}\psi \ . \tag{3.5}$$

Como resultado, as equações de movimento para ψ podem ser escritas como

$$i\Gamma^\mu D_\mu\psi = \left[M - \frac{i}{2}\left(\nabla_\mu\Gamma^\mu\right)\right]\psi \ . \tag{3.6}$$

E então, escrevendo a equação anterior na forma de Schrödinger, $i\partial_t\psi = H\psi$,

$$i\Gamma^0\nabla_0\psi = \left(M + P^*_\nu\Gamma^\mu\right)\psi \ . \tag{3.7}$$

Adotando a seguinte notação [43]:

$$P^0_\nu = (0, P_i) \ , \qquad \overline{P}_\nu = P^0_\nu - eA_\nu \qquad \text{e} \qquad P^*_\nu = \overline{P}_\nu - \frac{i}{2}\nabla_\nu \ . \tag{3.8}$$

Tais notações permitem que os termos não constantes que violam CPT/Lorentz sejam também considerados. Na última equação, a representação padrão [44] para as matrizes de Dirac foi utilizada.

Representando $\Gamma^0 = \gamma^0 + \Gamma^0_1$ e introduzindo $\overline{\Gamma}^0_1$ de tal forma $\left(\Gamma^0\right)^{-1} = \gamma^0 - \overline{\Gamma}^0_1$. Se considerar que o Hamiltoniano é linear nos termos que violam CPT/Lorentz presentes em Γ^0_1, é possível mostrar que

$$\overline{\Gamma}^0_1 = \gamma^0\Gamma^0_1\gamma^0 \, . \tag{3.9}$$

Portanto, a equação (3.7) pode ser escrita na seguinte forma

$$i\nabla_0\psi = \Big\{\gamma_0 - \gamma_0(c^{\mu0}\gamma_\mu + d^{\mu0}\gamma_5\gamma_\mu + e^0 + if^0\gamma_5 + \frac{1}{2}g^{\lambda\mu0}\sigma_{\lambda\mu})\gamma_0\Big\} \times [M + (P^*_\nu\Gamma^\nu)]\psi \, . \tag{3.10}$$

No trabalho de [43], os autores apresentam uma tabela completa que contém 80 casos de termos que violam CPT/Lorentz na equação de Dirac modificada.

A forma correspondente a cada termo da tabela é obtida pela multiplicação dos termos de uma linha por uma coluna. Por exemplo, o coeficiente 1 apresentado na primeira célula da tabela significa que para γ^0 e m o Hamiltoniano contém o termo $\gamma^0 \times 1 \times m = \beta m$, que é o termo mais trivial possível e correspondente à equação de Dirac livre. Já os termos presentes na primeira linha devem ser considerados separadamente, como por exemplo, na segunda coluna há três termos diferentes – a_l, $P^*_\nu c^{l\nu}$ e $\overline{P}_l$.

Tabela 1 – Coeficientes de Interação

	m $P^*_\nu e^\nu$	a_l $P^*_\nu c^{l\nu}$ $\overline{P}_l$	b_0 $P^*_\nu d^{0\nu}$	H^{lj} $P^*_\nu g^{lj\nu}$	m_5 $P^*_\nu f^\nu$	b_l $P^*_\nu d^{l\nu}$	a_0 $P^*_\nu c^{0\nu}$ $\overline{P}_0$	$H^{0\mu}$ $P^*_\nu g^{0\mu\nu}$
γ^0	1	γ^l	$-\gamma^0\gamma^5$	$\frac{1}{2}\sigma^{lj}$				
c^{00}	$-\gamma^0$	$-\alpha^l$	γ^5	$-\frac{1}{2}\gamma^0\sigma^{lj}$				
f^0	$i\gamma^5$	$i\gamma^5\gamma^l$	$i\gamma^0$	$\frac{i}{2}\gamma^5\sigma^{lj}$				
d^{i0}	$-i\gamma^i\gamma^5$	$-i\gamma^i\gamma^5\gamma^l$	α^i	$-\frac{1}{2}\gamma^i\gamma^5\sigma^{lj}$				
g^{i00}	$2\alpha^i$	$2\alpha^i\gamma^l$	$2\gamma^i\gamma^5$	$\alpha^i\sigma^{lj}$				
d^{00}					$i\gamma^0$	α^l	$-\gamma^5$	$\frac{1}{2}\sigma^{0\mu}\gamma^0\gamma^5$
e^0					$-i\gamma^5$	$-\gamma^5\gamma^l$	$-\gamma^0$	$\frac{1}{2}\sigma^{0\mu}$
c^{i0}					$-i\gamma^i\gamma^5$	$-i\gamma^i\gamma^5\gamma^l$	$-\alpha^i$	$\frac{1}{2}\gamma^i\sigma^{0\mu}$
g^{ij0}					$\frac{1}{2}\sigma^{ij}\gamma^5$	$\frac{1}{2}\sigma^{ij}\gamma^5\gamma^l$	$\frac{1}{2}\sigma^{ij}\gamma^0$	$\frac{1}{4}\sigma^{ij}\sigma^{0\mu}$

Fonte: Retirado de GONÇALVES et al. (2009, p.3).

3.2 SIMETRIAS DA EQUAÇÃO DE DIRAC

Nesta seção, conceitos relacionados ao estudo das simetrias serão desenvolvidos. Porém, não serão trabalhados detalhadamente, pois não é o objetivo deste trabalho. O desenvolvimento seguido é o mesmo de [44, 59, 62].

3.2.1 Transformação de Lorentz

Como o campo $\psi(x)$ se comporta sob uma *transformação de Lorentz*?

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \qquad , \qquad \partial_\mu \longrightarrow \partial'_\mu = \left[\Lambda^{-1}\right]_\mu{}^\nu \partial_\nu \qquad , \qquad \psi(x) \longrightarrow \psi'\left(x'\right) = S\psi(x)$$

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi(x) = 0 \longrightarrow \left(i\gamma^\mu \left[\Lambda^{-1}\right]^\nu{}_\mu \partial_\nu - m\right) S\psi(x) = 0 \,, \tag{3.11}$$

em que Λ é a matriz de transformação 4×4 entre dois sistemas e, γ^μ e m são apenas números e não sofrem transformação.

Agora, multiplicando (3.11) por S^{-1},

$$\left(iS^{-1}\gamma^\mu S\left[\Lambda^{-1}\right]^\nu{}_\mu \partial_\nu - m\right)\psi\left(x\right) \,=\, 0 \ .$$

Então, obtem-se

$$S^{-1}\gamma^\mu S \,=\, \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \ . \tag{3.12}$$

Pode-se encontrar S para uma transformação própria infinitesimal. Considerando,

$$\Lambda^\mu{}_\nu \,=\, g^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu \ , \tag{3.13}$$

com $\omega^\mu{}_\nu$ antissimétrico, e

$$S \,=\, 1 + \frac{i}{4}\,\sigma_{\mu\nu}\,\omega^{\mu\nu} \ , \tag{3.14}$$

em que (3.14) é apenas uma parametrização, e substituindo as equações anteriores em (3.12)

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \,+\, \omega^\mu{}_\nu\gamma^\nu \;&=\; \left(1 - \frac{i}{4}\,\sigma_{\alpha\beta}\,\omega^{\alpha\beta}\right)\,\gamma^\mu\,\left(1 + \frac{i}{4}\,\sigma_{\lambda\rho}\,\omega^{\lambda\rho}\right) \\ 2i\omega^{\alpha\beta}\left(\delta^\mu{}_\alpha\,\gamma_\beta - \delta^\mu{}_\beta\,\gamma_\alpha\right) \;&=\; \left[\gamma^\mu\,,\,\sigma_{\alpha\beta}\right]\,\omega^{\alpha\beta} \ . \end{aligned} \tag{3.15}$$

Desprezando os termos de ordem $\mathcal{O}\left(\omega^2\right)$, obtem-se

$$\sigma_{\mu\nu} \,=\, \frac{i}{2}\,\left[\gamma_\mu\,,\,\gamma_\nu\right] \ . \tag{3.16}$$

Isso diz como um campo de férmions se transforma sob um *boost* de Lorentz.

O adjunto se transforma como

$$\overline{\psi} \,\equiv\, \psi^\dagger\gamma^0 \longrightarrow \psi^\dagger S^\dagger\gamma^0 \,=\, \psi^\dagger\gamma^0 S^{-1} \,=\, \overline{\psi}S^{-1} \ , \tag{3.17}$$

desde que $S^\dagger\gamma^0 = \gamma^0 S^{-1}$ para a forma explícita de S derivada acima. Logo, $\overline{\psi}\psi$ é invariante. Assim,

$$j^\mu \,=\, \overline{\psi}\gamma^\mu\psi \longrightarrow \overline{\psi}S^{-1}\gamma^\mu\psi \,=\, \Lambda^\mu{}_\nu\overline{\psi}\gamma^\nu\psi \ , \tag{3.18}$$

a corrente é um quadrivetor.

3.2.2 Paridade

A *transformação de paridade* é uma transformação imprópria de Lorentz, em que $t \rightarrow t$ e $\boldsymbol{x} \rightarrow -\boldsymbol{x}$, descrita por

$$[\Lambda^{\mu}{}_{\nu}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{3.19}$$

Considerando

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu} = P^{-1}\gamma^{\mu}P , \tag{3.20}$$

então,

$$P\gamma^{0} = \gamma^{0}P \qquad \text{e} \qquad P\gamma^{i} = -\gamma^{i}P , \tag{3.21}$$

em que $i = 1, 2, 3$. Como γ^0 comuta consigo mesmo (trivialmente) e anticomuta com γ^i, uma escolha adequada é

$$P = \eta\gamma^{0} , \tag{3.22}$$

em que $|\eta| = 1$. Logo,

$$P : \psi(t, \boldsymbol{x}) \longrightarrow \psi_P(t, -\boldsymbol{x}) = P\psi(t, \boldsymbol{x}) = \gamma^{0}\psi(t, \boldsymbol{x}) . \tag{3.23}$$

3.2.3 Conjugação de Carga

Outra simetria discreta da equação de Dirac é a alternância de partícula e antipartícula.

$$\psi \longrightarrow \psi_C \equiv C\overline{\psi}^{T} . \tag{3.24}$$

Considerando o complexo conjugado da equação de Dirac,

$$\begin{aligned} (i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)^{*}\psi^{*}(x) &= \left(-i\left(\gamma^{\mu\dagger}\right)^{T}\partial_{\mu} - m\right)\left(\psi^{\dagger}\right)^{T} \\ &= \gamma^{0T}\left(-i\gamma^{\mu T}\partial_{\mu} - m\right)\overline{\psi}^{T} , \end{aligned} \tag{3.25}$$

em que foi utilizado $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^{0}\gamma^{\mu}\gamma^{0}$ e $\overline{\psi} \equiv \psi^{\dagger}\gamma^{0}$.

Agora, multiplicando por $C\gamma^{0T}$, a equação de Dirac torna-se

$$\left(-iC\gamma^{\mu T}C^{-1}\partial_\mu - m\right)\psi_C \;=\; 0\;. \tag{3.26}$$

Portanto, precisa-se C tal que

$$C\gamma^{\mu T}C^{-1} \;=\; -\gamma^\mu\;. \tag{3.27}$$

A forma de C muda com a representação das matrizes γ. Para a representação de Dirac, uma escolha adequada é

$$C \;=\; i\gamma^2\gamma^0 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\;. \tag{3.28}$$

Assim,

$$C\;:\;\psi\left(t,\boldsymbol{x}\right) \longrightarrow \psi_C\left(t,\boldsymbol{x}\right) \;=\; C\overline{\psi}^T\left(t,\boldsymbol{x}\right) \;=\; i\gamma^2\gamma^0\,\overline{\psi}^T\left(t,\boldsymbol{x}\right)\;. \tag{3.29}$$

3.2.4 Reversão de Tempo

Uma transformação simples da função de onda, em que $t \to -t$ e $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}$, não é suficiente para a *reversão do tempo*. Como o momento de uma partícula é uma *taxa de variação*, ele também deve mudar de sinal.

Alterando a direção do momento e o tempo para uma onda plana, tem-se

$$e^{-i(Et-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})} \longrightarrow e^{-i(E(-t)-(-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{x})} \;=\; e^{i(Et-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})} \;=\; \left(e^{-i(Et-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}\right)^*\;. \tag{3.30}$$

Fazendo uma conjugação complexa,

$$\psi\left(t,\boldsymbol{x}\right) \longrightarrow \psi_T\left(-t,\boldsymbol{x}\right) \;=\; T\psi^*\left(t,\boldsymbol{x}\right)\;, \tag{3.31}$$

e considerando a conjugação complexa da equação de Dirac, trocando $t \to -t$ e multiplicando a mesma por T, obtem-se

$$\begin{aligned}\left(i\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} - m\right) \;&\to\; T\left(-i\gamma^{0*}\frac{\partial}{\partial(-t)} - i\boldsymbol{\gamma}^*\cdot\boldsymbol{\nabla} - m\right)T^{-1}T\psi^*\left(-t,\boldsymbol{x}\right) \\ &=\; \left(i\left[T\gamma^{0*}T^{-1}\right]\frac{\partial}{\partial t} + i\left[-T\boldsymbol{\gamma}^*T^{-1}\right]\cdot\boldsymbol{\nabla} - m\right)\psi_T\left(t,\boldsymbol{x}\right).\end{aligned} \tag{3.32}$$

Sendo assim, precisa-se que

$$T\gamma^{0*}T^{-1} = \gamma^{0} \qquad , \qquad T\boldsymbol{\gamma}^{*}T^{-1} = -\boldsymbol{\gamma} \ . \tag{3.33}$$

Uma escolha adequada é

$$T = i\gamma^{1}\gamma^{3} = \begin{pmatrix} -i\sigma_1\sigma_3 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1\sigma_3 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{3.34}$$

Logo,

$$T : \psi\left(t,\boldsymbol{x}\right) \longrightarrow \psi_T\left(-t,\boldsymbol{x}\right) = T\psi^{*}\left(t,\boldsymbol{x}\right) = i\gamma^{1}\gamma^{3}\,\psi^{*}\left(t,\boldsymbol{x}\right) \ . \tag{3.35}$$

3.2.5 CPT

Para as simetrias discretas, tem-se

$$\begin{array}{lclcl} C : \psi\left(t,\boldsymbol{x}\right) & \rightarrow & \psi_C\left(t,\boldsymbol{x}\right) & = & C\,\overline{\psi}^{T}\left(t,\boldsymbol{x}\right) & = & i\gamma^{2}\gamma^{0}\,\overline{\psi}^{T}\left(t,\boldsymbol{x}\right) \ ; \\ P : \psi\left(t,\boldsymbol{x}\right) & \rightarrow & \psi_P\left(t,-\boldsymbol{x}\right) & = & P\,\psi\ \left(t,\boldsymbol{x}\right) & = & \gamma^{0}\,\psi\left(t,\boldsymbol{x}\right) \ ; \\ T : \psi\left(t,\boldsymbol{x}\right) & \rightarrow & \psi_T\left(-t,\boldsymbol{x}\right) & = & T\,\psi^{*}\left(t,\boldsymbol{x}\right) & = & i\gamma^{1}\gamma^{3}\,\psi^{*}\left(t,\boldsymbol{x}\right) \ . \end{array} \tag{3.36}$$

Fazendo todas essas transformações, obtem-se

$$\begin{aligned} CPT : \psi\left(t,\boldsymbol{x}\right) \rightarrow \psi_{CPT}\left(-t,-\boldsymbol{x}\right) &= i\gamma^{2}\gamma^{0}\gamma^{0T}\left[\gamma^{0}i\gamma^{1}\gamma^{3}\psi^{*}\left(t,\boldsymbol{x}\right)\right]^{*} \\ &= i\gamma^{2}\gamma^{0}\gamma^{0}\gamma^{0}\left(-i\right)\gamma^{1}\gamma^{3}\psi\left(t,\boldsymbol{x}\right) \\ &= \gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}\psi\left(t,\boldsymbol{x}\right) \\ &= -i\gamma^{5}\psi\left(t,\boldsymbol{x}\right) \ . \end{aligned} \tag{3.37}$$

Portanto, se $\psi\left(x\right)$ é um elétron, $\psi_{CPT}\left(-x\right)$ é um pósitron viajando para trás no espaço-tempo multiplicado por um fator $-i\gamma^{5}$.

O próximo capítulo discutirá a técnica TFW e seus diferentes tipos, usual e exata. Além disso, esta técnica será demonstrada de forma didática, pois permite trabalhar e investigar qualquer caso de interação entre campos externos e o campo de Dirac.

4 TRANSFORMAÇÃO DE FOLDY-WOUTHUYSEN

Embora muitas propriedades da equação de Dirac tenham sido derivadas, ainda não houve uma interpretação física para os operadores que aparecem na teoria. O fato é que a equação de Dirac na forma descrita anteriormente não concede facilmente uma interpretação simples. À vista disso, a *Transformação de Foldy-Wouthuysen* será apresentada neste capítulo, abordando suas versões usual e exata.

4.1 A TRANSFORMAÇÃO DE FOLDY-WOUTHUYSEN

A transformação de Foldy e Wouthuysen [33] transforma a equação de Dirac em duas equações separadas com componentes desacopladas. As duas primeiras componentes da equação são idênticas à equação de Pauli no limite não-relativístico; além disso, existem termos adicionais que resultam em correções relativísticas. Tais componentes possuem energias positivas. A equação para as outras duas componentes descreve estados de energia negativos.

A transformação canônica (unitária) que consegue o desacoplamento necessário pode ser escrita na forma

$$\psi \, = \, e^{-iS}\psi^{'} \; , \tag{4.1}$$

onde, em geral, S pode depender do tempo. Da equação de Dirac, segue então que

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = i\frac{\partial}{\partial t}e^{-iS}\psi^{'} = ie^{-iS}\frac{\partial}{\partial t}\psi^{'} + i\left(\frac{\partial}{\partial t}e^{-iS}\right)\psi^{'} = H\psi = He^{-iS}\psi^{'} \tag{4.2}$$

e, portanto, para a equação de movimento para $\psi^{'}$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi^{'} = \left[e^{iS}\left(H - i\frac{\partial}{\partial t}\right)e^{-iS}\right]\psi^{'} \equiv H^{'}\psi^{'} \, ; \tag{4.3}$$

com o Hamiltoniano transformado de Foldy-Wouthuysen

$$H^{'} = e^{iS}\left(H - i\frac{\partial}{\partial t}\right)e^{-iS} \; . \tag{4.4}$$

A derivada temporal contida no lado direito da equação anterior só atua no termo e^{-iS}. A construção de S, tal que $H^{'}$ não contenha operadores ímpares, é trabalhosa e demanda atenção em suas etapas. Dessa maneira, para o caso de uma partícula livre, pode-se encontrar uma transformação exata, mas caso contrário, deve-se executar uma série de expansões em série de potência de $1/m$ e, sucessivas transformações, satisfazendo esta condição para cada ordem de $1/m$. De fato, cada potência de $1/m$ corresponde a um fator $\frac{p}{mc} \sim \frac{v}{c}$; no domínio atômico, isso é aproximadamente igual à constante α da estrutura fina de Sommerfeld, pois, da relação de incerteza de Heisenberg, tem-se $\frac{v}{c} \approx \frac{\hbar}{cm\Delta x} \approx \frac{\hbar}{cma} = \alpha$ [59].

Aqui é necessário, para o desenvolvimento da teoria, estabelecer a distinção entre operadores pares e ímpares. Na teoria de Dirac, operadores *"ímpares"* são aqueles que conectam as componentes grandes e pequenas da função de onda $(\alpha^i, \gamma^i, \gamma_5)$, e os *"pares"*, aqueles que não acoplam tais componentes (I, β, Σ).

Uma condição necessária e sufiente que pode ser mostrada para uma matriz ser *par* (*ímpar*) é que ela *comute* (*anticomute*) com β. Assim, pode-se escrever para um operador M qualquer:

$$M = M^P + M^I \ , \tag{4.5}$$

onde M^P é a parte par e M^I, a parte ímpar; escritas como

$$M^P = \frac{1}{2}\left(M + \beta M \beta\right) \qquad ; \qquad M^I = \frac{1}{2}\left(M - \beta M \beta\right) \ . \tag{4.6}$$

As relações anteriores são simples de serem entendidas. Substituindo (4.6) em (4.5) obtém-se,

$$M = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}\left(\beta M \beta\right) + \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}\left(\beta M \beta\right) \ . \tag{4.7}$$

O que se pode pensar é na questão de que se o Hamiltoniano fosse um operador par, seria possível separar a equação de Dirac em duas, sem haver a mistura de componentes. Porém, existe uma maneira de se realizar isso, utilizando-se de sucessivas transformações canônicas.

O Hamiltoniano assumiria a seguinte forma

$$H = \beta m + \varepsilon + \mathcal{O} \quad , \tag{4.8}$$

onde ε são os operadores *pares* e $\mathcal{O}$, os *ímpares.*

4.1.1 Transformação para uma Partícula Livre

Para uma partícula livre, o Hamiltoniano de Dirac simplifica-se para

$$H = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p} + \beta m \ , \tag{4.9}$$

que não depende do tempo.

Deseja-se encontrar S de modo que $H^{'}$ não contenha operadores ímpares. Fazendo,

$$e^{iS} = e^{\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\theta} = \cos\theta + \beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\sin\theta \ , \tag{4.10}$$

onde $\hat{\boldsymbol{p}} = {}^{\boldsymbol{p}}/_{|\boldsymbol{p}|}$.

Então,

$$\begin{aligned} H^{'} &= (\cos\theta + \beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\sin\theta)(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta m)(\cos\theta - \beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\sin\theta) \\ &= (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta m)(\cos\theta - \beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\sin\theta)^2 \\ &= (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta m)\, exp\,(-2\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\theta) \\ &= (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})\left(\cos 2\theta - \frac{m}{|\boldsymbol{p}|}\sin 2\theta\right) + \beta\,(m\cos 2\theta + |\boldsymbol{p}|\sin 2\theta) \ . \end{aligned} \tag{4.11}$$

A condição de que o termos ímpar, ou seja, $(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})$, desapareça é mediante a condição $\tan 2\theta = {}^{|\boldsymbol{p}|}/_{m}$, de onde segue que

$$\sin 2\theta = \frac{\tan 2\theta}{(1+\tan^2 2\theta)^{1/2}} = \frac{p}{(m^2+p^2)^{1/2}} \quad ; \quad \cos 2\theta = \frac{m}{(m^2+p^2)^{1/2}} \ . \tag{4.12}$$

Substituindo as relações de (4.12) na equação (4.11) resulta que

$$H^{'} = \beta m\left(\frac{m}{E} + \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}}{mE}\right) = \beta\sqrt{m^2 + \boldsymbol{p}^2} \ . \tag{4.13}$$

Assim, $H^{'}$ foi diagonalizado. Mesmo agora, $H^{'}$ ainda contém o caráter da teoria de quatro componentes devido à sua dependência da matriz β, que é diferente para as componentes superior e inferior. Tal transformação exata só é viável para partículas livres.

4.1.2 Transformação para Interação com o Campo Eletromagnético

Primeiramente, o interesse é investigar o caso dos campos eletromagnéticos que interagem com a partícula de Dirac. Assume-se assim, que os potenciais A e Φ são dados, de modo que o Hamiltoniano de Dirac fica

$$H = \boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}) + \beta m + e\Phi \tag{4.14}$$

$$= \beta m + \varepsilon + \mathcal{O} \ . \tag{4.15}$$

Aqui, é introduzida uma decomposição em um termo proporcional a β, um termo par ε e um termo ímpar $\mathcal{O}$,

$$\varepsilon = e\,\Phi \qquad ; \qquad \mathcal{O} = \boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}) \ . \tag{4.16}$$

Estes têm diferentes propriedades de comutação em relação a β,

$$\beta\,\varepsilon = \varepsilon\,\beta \qquad ; \qquad \beta\,\mathcal{O} = -\mathcal{O}\,\beta \ . \tag{4.17}$$

A solução no caso anterior (4.10) implica que, para θ pequeno, isto é, no limite não-relativístico,

$$iS = \beta\,\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}\theta \sim \beta\,\boldsymbol{\alpha}\frac{\boldsymbol{p}}{2m} \ . \tag{4.18}$$

Espera-se assim, que sucessivas transformações desse tipo levem a uma expansão em $1/m$. Na estimativa de $H^{'}$, é utilizada a identidade de Baker-Hausdorff [1],

$$\begin{aligned} H^{'} &= H + i\,[S,H] + \frac{i^2}{2}\,[S,[S,H]] + \frac{i^3}{6}\,[S,[S,[S,H]]] + \\ &+ \frac{i^4}{24}\,[S,[S,[S,[S,H]]]] - \dot{S} - \frac{i}{2}\left[S,\dot{S}\right] - \frac{i^2}{6}\left[S,\left[S,\dot{S}\right]\right] \ , \end{aligned} \tag{4.19}$$

dado aqui apenas para a ordem exigida. Os termos ímpares são eliminados para a ordem m^{-2}, enquanto os pares são calculados até a ordem m^{-3}. Executa-se a expansão em potências de $1/m$, que é portanto, "pequeno" no limite relativístico, e o procedimento é repetido até que a ordem desejada seja alcançada.

Para a primeira ordem $[\mathcal{O}\,(1/m)]$,

$$H^{'} = \beta m + \varepsilon + \mathcal{O} + i\,[S,\beta]\,m \ . \tag{4.20}$$

Em analogia com o procedimento para a partícula livre, e de acordo com a observação que segue da equação (4.17), a escolha para S apresenta a seguinte forma

$$S = -\frac{i\beta\mathcal{O}}{2m} \ . \tag{4.21}$$

Então, aplicando o parâmetro S apresentado em (4.21) na equação (4.20), obtém-se

$$\begin{aligned} H^{'} &= \beta m + \beta\left(\frac{\mathcal{O}^2}{2m} - \frac{\mathcal{O}^4}{8m^3}\right) + \varepsilon - \frac{1}{8m^2}\,[\mathcal{O},[\mathcal{O},\varepsilon]] - \frac{i}{8m^2}\left[\mathcal{O},\dot{\mathcal{O}}\right] \\ &+ \frac{\beta}{2m}\,[\mathcal{O},\varepsilon] - \frac{\mathcal{O}^3}{3m^2} + \frac{i\beta\dot{\mathcal{O}}}{2m} \\ &\equiv \beta m + \varepsilon^{'} + \mathcal{O}^{'} \ . \end{aligned} \tag{4.22}$$

[1] $e^A B e^{-A} = B + [A,B] + \cdots + \frac{1}{n!}\,[A,[A,\cdots,[A,B]\cdots]] + \cdots$

Aqui, ε e todas as potências pares de $\mathcal{O}$ foram combinados em um novo termo par $\varepsilon^{'}$, e as potências ímpares em um novo termo ímpar $\mathcal{O}^{'}$. Os termos ímpares agora ocorrem apenas para ordens de pelo menos $1/m$. Para reduzi-los ainda mais, aplica-se outra Transformação de Foldy-Wouthuysen

$$S^{'} = -\frac{i\beta}{2m}\mathcal{O}^{'} = -\frac{i\beta}{2m}\left(\frac{\beta}{2m}\left[\mathcal{O},\varepsilon\right] - \frac{\mathcal{O}^3}{3m^2} + \frac{i\beta\dot{\mathcal{O}}}{2m}\right) . \tag{4.23}$$

Essa transformação produz

$$\begin{aligned} H^{''} &= e^{iS^{'}}\left(H^{'} - i\frac{\partial}{\partial t}\right)e^{-iS^{'}} = \beta m + \varepsilon^{'} + \frac{\beta}{2m}\left[\mathcal{O}^{'},\varepsilon^{'}\right] + \frac{i\beta\dot{\mathcal{O}}^{'}}{2m} \\ &\equiv \beta m + \varepsilon^{'} + \mathcal{O}^{''} . \end{aligned} \tag{4.24}$$

Uma vez que $\mathcal{O}^{'}$ é de ordem $1/m$, em $\mathcal{O}^{''}$ agora existem apenas termos de ordem $1/m^2$. Essa transformação também gera mais termos pares, que, no entanto, são de ordem superior. Por meio da transformação

$$S^{''} = -\frac{i\beta}{2m}\mathcal{O}^{''} , \tag{4.25}$$

o termo ímpar $\mathcal{O}^{''} \approx \mathcal{O}\left(1/m^2\right)$ também é eliminado. O resultado é o operador

$$\begin{aligned} H^{'''} &= e^{iS^{''}}\left(H^{''} - i\frac{\partial}{\partial t}\right)e^{-iS^{''}} = \beta m + \varepsilon^{'} \\ &= \beta\left(m + \frac{\mathcal{O}^2}{2m} - \frac{\mathcal{O}^3}{8m^3}\right) + \varepsilon - \frac{1}{8m^2}\left[\mathcal{O},\left[\mathcal{O},\varepsilon\right] + i\dot{\mathcal{O}}\right] . \end{aligned} \tag{4.26}$$

que agora só é composta por termos pares.

A fim de apresentar o Hamiltoniano $H^{'''}$ na sua forma final, deve-se substituir (4.16) na equação anterior e reescrever os termos individuais como se segue

$$\frac{\mathcal{O}^2}{2m} = \frac{\left(\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})\right)^2}{2m} = \frac{\left(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}\right)^2}{2m} - \frac{e}{2m}\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{B} ; \tag{4.27}$$

$$\frac{1}{8m^2}\left(\left[\mathcal{O},\varepsilon\right] + i\dot{\mathcal{O}}\right) = \frac{e}{8m^2}\left(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}\Phi - i\boldsymbol{\alpha}\cdot\dot{\boldsymbol{A}}\right) = \frac{ie}{8m^2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E} ; \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{O},\frac{ie}{8m^2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E}\right] &= \frac{ie}{8m^2}\left[\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p},\frac{ie}{8m^2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E}\right] \\ &= \frac{ie}{8m^2}\sum_{i,j}\alpha^i\alpha^j\left(-i\frac{\partial E^j}{\partial x^i}\right) + \frac{e}{4m^2}\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{p} \\ &= \frac{e}{8m^2}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}\right) + \frac{ie}{8m^2}\boldsymbol{\Sigma}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}\right) + \frac{e}{4m^2}\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{p} . \end{aligned} \tag{4.29}$$

Então, o Hamiltoniano de (4.26) para a ordem desejada é

$$
\begin{aligned}
H''' &= \beta\left(m + \frac{(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2}{2m} - \frac{\boldsymbol{p}^4}{8m^3}\right) + e\Phi - \frac{e}{2m}\beta\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{B} \\
&\quad - \frac{ie}{8m^2}\boldsymbol{\Sigma}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}) - \frac{e}{4m^2}\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{p} - \frac{e}{8m^2}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}) \ . \qquad (4.30)
\end{aligned}
$$

O hamiltoniano H''' não contém mais nenhum operador ímpar. Assim, não existe mais um acoplamento entre as componentes do espinor e o Hamiltoniano transformado é um bloco diagonal. Além disso, cada termo presente na equação (4.30) possui uma interpretação física direta. O primeiro termo entre parênteses é a expansão de

$$
\sqrt{(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2 + m^2} \qquad (4.31)
$$

e $-\boldsymbol{p}^4/(8m^3)$ é a principal correção relativística para a energia cinética. Os dois termos

$$
-\frac{ie}{8m^2}\boldsymbol{\Sigma}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}) - \frac{e}{4m^2}\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{p} \qquad (4.32)
$$

juntos são a energia da interação spin-órbita. Em um potencial estático esfericamente simétrico, eles assumem uma forma muito familiar. Neste caso, $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = 0$,

$$
\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{p} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{L} \ , \qquad (4.33)
$$

e esse termo se reduz a

$$
H_{\text{spin–órbita}} = \frac{e}{4m^2}\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{L} \ . \qquad (4.34)
$$

O último termo é conhecido como termo de Darwin. Em um potencial de Coulomb de um núcleo com carga $Z|e|$, ele toma a forma

$$
-\frac{e}{8m^2}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}) = -\frac{e}{8m^2}Z|e|\delta^3(r) = \frac{Ze^2}{8m^2}\delta^3(r) = \frac{Z\alpha\pi}{2m^2}\delta^3(r) \ . \qquad (4.35)
$$

O procedimento utilizado para a obtenção de informações físicas de um Hamiltoniano de uma partícula de Dirac com uma interação qualquer, através da Transformação de Foldy-Wouthuysen pode ser esquematizado da seguinte maneira:

1. Primeiro, identifica-se os termos “ímpares” e “pares” no Hamiltoniano.

2. Executa-se a primeira transformação e então, o resultado par em primeira ordem em $1/m$ é obtido.

3. Executa-se a segunda transformação para obter um resultado par de ordem $1/m^2$.

4. Executa-se a expansão em potências de $1/m$, e o procedimento é repetido até que a ordem desejada seja alcançada. Geralmente, utiliza-se até a terceira ordem.

4.2 A TRANSFORMAÇÃO DE FOLDY-WOUTHUYSEN EXATA

Uma breve revisão sobre a TFWE [39, 45] será abordada nesta seção. Geralmente, a TFW fornece informações mais detalhadas em relação à aproximação não-relativística [33, 85, 86, 87]. A solução aproximada não é muito complicada de se obter, mas existe um certo risco de serem perdidos termos relevantes para este caso [39].

As transformações *usual* e *exata* conduzem a diferentes representações. A TFWE apresenta, essencialmente, uma expansão em série de potências em um pequeno parâmetro na teoria e funciona com qualquer parâmetro que possa ser justificado para executar a expansão. Por outro lado, a TFW funciona apenas com o parâmetro $1/m$. Vale ressaltar que a TFW e a versão exata não apresentam, necessariamente, o mesmo resultado analítico. Além disso, durante o procedimento de diagonalização do Hamiltoniano, os operadores podem ser diferentes em alguns aspectos. Um conjunto de exemplos desta diferença pode ser encontrado em [40, 56, 57] e em [88], onde uma análise mais detalhada é apresentada.

O espinor se transforma da seguinte maneira

$$\psi^{tr} = U\psi \quad , \quad \psi = U^{\star}\psi^{tr} \ , \tag{4.36}$$

onde U é um operador unitário e que se busca uma forma particular do mesmo que torne o Hamiltoniano par. Não serão discutidas todas as possíveis formas que U possa apresentar. Após substituir a última relação na equação (2.19), obtém-se

$$H^{tr} = UHU^{\star} - iU\frac{\partial U^{\star}}{\partial t} = UHU^{\star} - iU\dot{U}^{\star} \ , \tag{4.37}$$

onde foi considerado que $i\frac{\partial\psi^{tr}}{\partial t} = H^{tr}\psi^{tr}$. Aqui serão abordados os casos em que os campos externos são independentes do tempo, então o último termo na equação (4.37) é nulo. Considerando a relação de comutação

$$\left[\beta, H^{tr}\right] = [\beta, UHU^{\star}] = 0 \ . \tag{4.38}$$

A última equação pode ser reescrita multiplicando pela esquerda por $U^{\star}$ e pela direita por U. A condição se torna,

$$[\beta, UHU^{\star}] = [U^{\star}\beta U, H] = 0 \ . \tag{4.39}$$

Uma escolha possível para a quantidade $U^{\star}\beta U$ é

$$U^{\star}\beta U = \frac{H}{\sqrt{H^2}} \equiv \lambda \ . \tag{4.40}$$

Neste caso, o termo $\sqrt{H^2}$ deve ser entendido como uma notação. O cálculo de H^2 é realizado na representação de coordenadas e, como próximo passo, é necessário escrever H^2 na representação de momentos para extrair sua raiz quadrada. Expande-se o operador em série de potências em algum parâmetro que possa ser considerado pequeno na teoria que está sendo estudada. Em todos as etapas futuras que aparecerem raízes de operadores, tais grandezas devem ser entendidas dessa forma.

Na última equação, a quantidade λ é um operador hermitiano e unitário, $\lambda^2 = \lambda^\dagger\lambda = 1$. Assumindo que o Hamiltoniano está bem definido e não possui zero como autovalor [42, 45]. É notável dizer que para realizar a TFWE, o Hamiltoniano deve obedecer a seguinte relação:

$$J\,H \,+\, H\,J \,=\, 0\ , \tag{4.41}$$

onde J é um um operador hermitiano e unitário, denominado *operador involução*. Outra informação útil sobre J é a relação $J\beta + \beta J = 0$. A TFWE é realizada se a relação $U = U_2 \times U_1$ for considerada, onde

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + J\lambda) \qquad \text{e} \qquad U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \beta J)\ . \tag{4.42}$$

Consequentemente,

$$U_1\lambda U_1^\dagger = J \qquad \text{e} \qquad U_2\lambda U_2^\dagger = \beta\ . \tag{4.43}$$

Não é difícil verificar que a equação (4.42) satisfaz a relação $U\lambda U^\dagger = \beta$. Da equação (4.40) é fácil ver que

$$\beta \,=\, U\lambda U^\star \,=\, \frac{H^{tr}}{\sqrt{(H^{tr})^2}} \tag{4.44}$$

e a quantidade H^{tr} é dada por $H^{tr} = \beta\sqrt{(H^{tr})^2}$ que é um Hamiltoniano par. Agora e assim por diante, assume-se que os termos com o índice *"tr"* são os termos transformados e esses pertencem ao Hamiltoniano transformado final.

No sentido prático, para realizar todas as etapas para obter H^{tr} é necessário conhecer o operador U como uma solução da equação (4.40). Considerando $U = \sqrt{\beta\lambda}$ como uma solução. O operador U possui a propriedade $U\beta = U^\star\beta$. Agora, da equação (4.41), tem-se $H^2 J \,=\, JH^2$. Então,

$$J\sqrt{H^2} = \sqrt{J^2}\sqrt{H^2} = \sqrt{J^2H^2} = \sqrt{JH^2J} = \sqrt{H^2J^2} = \sqrt{H^2}\sqrt{J^2} = \sqrt{H^2}J \tag{4.45}$$

em que se obtém $J\sqrt{H^2} = \sqrt{H^2}J$. Fazendo a transformação

$$
\begin{aligned}
U_1 H U_1^{\star} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+J\lambda\right)H\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-J\lambda\right) = \frac{1}{2}\left(H+J\lambda H\right)\left(1-J\lambda\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(H-HJ\lambda+J\lambda H-J\lambda HJ\lambda\right) = \frac{1}{2}\left(2J\lambda H\right) \\
&= J\sqrt{H^2}\ . \qquad (4.46)
\end{aligned}
$$

e, finalmente,

$$
\begin{aligned}
U_2 J\sqrt{H^2} U_2^{\star} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\beta J\right)J\sqrt{H^2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\beta J\right) = \frac{1}{2}\left(J\sqrt{H^2}+\beta\sqrt{H^2}\right)\left(1-\beta J\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(J\sqrt{H^2}-J\sqrt{H^2}\beta J+\beta\sqrt{H^2}-\beta\sqrt{H^2}\beta J\right) \\
&= J\frac{1}{2}\left(\sqrt{H^2}-\beta\sqrt{H^2}\beta\right)+\beta\frac{1}{2}\left(\sqrt{H^2}+\beta\sqrt{H^2}\beta\right)\ . \qquad (4.47)
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
H^{tr} = UHU^{\star} = \beta\left[\sqrt{H^2}\right]_{(\mathrm{PAR})} + J\left[\sqrt{H^2}\right]_{(\mathrm{ÍMPAR})}\ . \qquad (4.48)
$$

onde os operadores pares e ímpares são definidos nas relações de (4.6). As quantidades $\sqrt{H^2}_{(\mathrm{PAR})}$ e $\sqrt{H^2}_{(\mathrm{ÍMPAR})}$ representam o Hamiltoniano ao quadrado *par* e *ímpar*, respectivamente. Se $[H^2, \beta] = 0$, o Hamiltoniano é par, e se $\{H^2, \beta\} = 0$, o mesmo é ímpar. A equação (4.48) representa a TFWE.

O procedimento utilizado para a Transformação Foldy-Wouthuysen Exata também pode ser esquematizado da seguinte maneira:

1. Primeiro, verifica-se a condição $\{J, H\}$.

2. Deve-se calcular H^2.

3. Identificar corretamente os termos *pares* e *ímpares* e multiplicá-los por β ou J, respectivamente, ou seja, utilizar a equação (4.48)

Dessa forma, a operação para calcular $\sqrt{H^2}$ pode ser realizada em diferentes abordagens. Uma opção mais simples é escrever $H = H_0 + H_{int}$. As constantes de acoplamento dos termos de interação estão presentes em H_{int}. Essa é, de fato, a principal diferença entre a TFW usual e a TFWE. A liberdade na escolha do parâmetro de expansão pode dar resultados com uma forma analítica mais familiar para as expressões finais. Esse fato, em geral, facilita a realização da análise física. O Hamiltoniano livre é denotado por H_0 e a interação por H_{int}. Ambos os termos na equação (4.48) são termos pares e, por essa razão, a quantidade H^{tr} não mistura os componentes do espinor.

5 TRANSFORMAÇÃO DE FOLDY-WOUTHUYSEN EXATA PARA O CONJUNTO COMPLETO DE TERMOS QUE VIOLAM CPT / LORENTZ

A TFWE para toda a teoria apresentada no capítulo (3) será desenvolvida neste ponto, e será baseado no artigo [54]. O objetivo é obter o Hamiltoniano para os diferentes casos que descrevem a interação do férmion de Dirac com os campos externos que violam CPT/Lorentz, e então, executar a TFWE.

5.1 TFWE PARA TERMOS QUE VIOLAM AS SIMETRIAS CPT/LORENTZ

Para realizar a TFWE, é necessário que o Hamiltoniano admita o operador involução [39, 42, 45, 46] e obedeça a relação (4.41). É importante notar que a forma explícita do operador involução J é a utilizada em [43] para estabelecer os critérios para executar a TFWE para os termos que violam CPT/Lorentz. A forma explícita do operador involução é

$$J = i\gamma^5\beta\,. \tag{5.1}$$

A forma mais geral da equação (3.10) que admite o operador involução é apresentada em [43]. Em tal trabalho, os autores apresentam a tabela completa (1) que contém os 80 casos de termos que violam as simetrias de CPT e de Lorentz na equação modificada de Dirac que admite TFWE. Seguindo o artigo [43], é considerado aqui o Hamiltoniano completo com tais termos que violam CPT/Lorentz e admitem a TFWE,

$$\begin{aligned} H &= m\Big(\gamma^0 - \gamma^0 c_{00} + i\gamma^5 f_0 + \gamma^i\gamma^5 d_{i0} + \frac{i}{2}\alpha^i g_{i00}\Big) + \bar{P}_l\Big(\gamma^0 e^l + \alpha_i c^{il} - \gamma^5 d^{0l} + \alpha^l \\ &+ \frac{1}{2}\gamma^0\sigma^{ij}\, g_{ijl} - \alpha^l c^{00} + i\gamma^5\gamma^l f_0 + \gamma^i\gamma^5\gamma^l d_{i0} + \frac{i}{2}\alpha^i\gamma^l g_{i00}\Big) \\ &+ \alpha^l a_l - \gamma^5 b_0 + \frac{1}{2}\gamma^0\sigma^{ij} H_{ij}\,. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Os termos de interação de segunda ordem são muito pequenos e, por essa razão, podem ser negligenciados nesta última equação e assim por diante. Calcula-se o Hamiltoniano ao quadrado como um primeiro passo para se obter uma transformação exata e adota-se a quantidade $\bar{H}^2$ para representar esse Hamiltoniano. É conveniente escrever o $\bar{H}^2$ na seguinte forma

$$\bar{H}^2 = (1+\bar{A})[(\delta_{ij} + B_{ij})\bar{P}^i + \bar{C}_j]^2 + \bar{D} + m^2\,, \tag{5.3}$$

onde são definidos os seguintes termos

$$
\begin{aligned}
\bar{A} &= -4d_{i0}\gamma^5\alpha^i - 4if_0\gamma^0\gamma^5 + ig_{i00}\gamma^0\alpha^i\,, \\
\bar{B}_{ij} &= \frac{1}{2}\Big[-2c_{ij} - 2\gamma^5\alpha^i d_{0j} - 2\gamma^5\alpha^i d_{j0} - 2\gamma^0\gamma^5\epsilon^{lmi}g_{lmj} + 2i\gamma^0\gamma^5 g_{tij}\Sigma^t + \frac{i}{3}g_{i00}\gamma^0\alpha_j\Big]\,, \\
\bar{C}_j &= \frac{1}{2}\Big[2m\,e_j + m\sigma^{lm}g_{lmj} - 2img_{j00} - 4m\gamma^0\gamma^5 d_{j0} - 2a_j - 2\gamma^5\alpha^j b_0 - 2H_{lm}\epsilon^{lmj}\gamma^0\gamma^5 \\
&- mg_{l00}\epsilon^{ljk}\Sigma_k - 2im\gamma^0\gamma^5 d_{m0}\epsilon^{jmk}\Sigma_k + 2i\gamma^0\gamma^5 H_{mj}\Sigma^m\Big]\,, \\
\bar{D} &= -2m^2c_{00} - 2m^2\gamma^5\alpha^i d_{i0} + m\sigma^{ij}H_{ij} \\
&+ \Big(1 - 2id_{i0}\gamma^5\alpha^i - 2if_0\gamma^0\gamma^5 + \frac{i}{3}g_{i00}\gamma^5\alpha^i\Big)\frac{i\hbar e}{mc}\Sigma_k B^k\,. \qquad (5.4)
\end{aligned}
$$

Essas notações são utilizadas para simplificar a álgebra e facilitar a interpretação dos resultados. Nesta forma, é possível, por exemplo, identificar os termos que estão ligados à parte cinética do Hamiltoniano.

De acordo com a TFWE, deve-se tomar a raiz quadrada dos termos pares na equação (5.4) e multiplicá-los por β. Por outro lado, a raiz quadrada dos termos ímpares deve ser multiplicada pelo operador J apresentado em (5.1). Assim, um novo ponto de vista é apresentado para realizar a transformação exata. Observe que é possível mostrar que a equação (4.48) é completamente equivalente a relação

$$H^{tr} = J\frac{1}{2}(\sqrt{H^2} - \beta\sqrt{H^2}\beta) + \beta\frac{1}{2}(\sqrt{H^2} + \beta\sqrt{H^2}\beta)\,. \qquad (5.5)$$

Esta última relação nos permite realizar a TFWE onde muitos termos ímpares estão presentes. De acordo com a equação (5.5), é possível tomar como primeiro passo, a raiz quadrada do hamiltoniano completo e como um segundo passo, identificar e separar termos pares e ímpares.

Para calcular a raiz quadrada, será considerado neste caso que $m^2 \gg \bar{H}^2$, na equação (5.3), assim como uma expansão. Essas considerações permitem afirmar que a seguinte equação

$$H^2 = m^2\Big(1 + \frac{\bar{H}^2}{m^2}\Big) \qquad (5.6)$$

pode ser escrita como

$$\sqrt{H^2} = m\left(1 + \frac{\bar{H}^2}{2m^2}\right), \qquad (5.7)$$

onde $\bar{H}^2$ é dado por relação (5.3). Após alguma álgebra, o Hamiltoniano pode ser apresentado da seguinte maneira

$$H^{tr} = \beta m + \frac{1}{2m}\left\{(1 + A^{tr})[(\delta_{ij} + B^{tr}_{ij})\bar{P}^i + C^{tr}_j]^2 + D^{tr}\right\}\,, \qquad (5.8)$$

onde

$$
\begin{aligned}
A^{tr} &= -4\beta\Sigma^i d_{i0} + 4f_0 + \Sigma^i g_{i00}\,, \\
\bar{B}^{tr}_{ij} &= \frac{1}{2}\Big[-2\beta c_{ij} + 2\beta\Sigma^i d_{0j} + 2\beta\Sigma^i d_{j0} - 2i\epsilon^{lmi} g_{lmj} - 2g_{tij}\Sigma^t + \frac{1}{3} g_{i00}\Sigma_j\Big]\,, \\
\bar{C}^{tr}_{j} &= \frac{1}{2}\Big[2m\beta\, e_j + m\beta g_{lmj}\epsilon^{lmk}\Sigma_k - 4imd_{j0} - 2\beta a_j + 2\beta\Sigma^j b_0 - 2i\epsilon^{lmj} H_{lm} \\
&- m\beta\epsilon^{ljk}\Sigma_k g_{l00} + 2m\epsilon^{jmk}\Sigma_k d_{m0} - 2im\beta g_{j00} - 2\Sigma^m H_{mj}\Big]\,, \\
\bar{D}^{tr} &= -2m^2\beta c_{00} + 2m^2\beta\Sigma^i d_{i0} + m\beta\epsilon^{ijk}\Sigma_k H_{ij} \\
&+ \Big[\beta(1 + 2i\Sigma^i d_{i0}) + 2f_0 + \frac{1}{3}\Sigma^i g_{i00}\Big]\frac{i\hbar e}{mc}\Sigma_k B^k\,.
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

A equação (5.8) apresenta uma estrutura conhecida. De acordo com esta equação, o primeiro termo corresponde à energia de repouso. O segundo representa o termo cinético. É um termo do tipo $(\boldsymbol{P} - e\,\boldsymbol{A})$ e pode-se imaginar a quantidade C^{tr}_j (na situação em que $B^{tr}_{ij} = 0$), como sendo um termo análogo de uma transformação de calibre para $\bar{P}^i$. A quantidade $(1 + A^{tr})$ pode ser vista como uma correção para a forma geral da energia cinética. O último termo na equação (5.8) corresponde a uma interação externa.

5.1.1 Equações de Movimento com termos que violam CPT/Lorentz

Os cálculos das equações de movimento serão executados a seguir. Começando, considerando o espinor em duas componentes, (2.43), e escrevendo a equação de Dirac na forma de Schrödinger, (2.19); após alguns cálculos, pode-se obter o seguinte Hamiltoniano para ϕ

$$
H = \frac{1}{2m}\Big\{(1 + A)[\big(\delta_{ij} + B_{ij}\big)\bar{P}^i + C_j]^2 + D\Big\}\,, \tag{5.10}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
A &= -4\sigma^i d_{i0} + 4f_0 + \sigma^i g_{i00}\,, \\
B_{ij} &= -c_{ij} + \sigma^i d_{0j} + \sigma^i d_{j0} - i\epsilon^{lmi} g_{lmj} - g_{tij}\sigma^t + \frac{1}{3} g_{i00}\sigma_j\,, \\
C_j &= m\, e_j + \frac{1}{2} m g_{lmj}\epsilon^{lmk}\sigma_k - 2imd_{j0} - a_j + \sigma^j b_0 - i\epsilon^{lmj} H_{lm} \\
&- \frac{1}{2} m\epsilon^{ljk}\sigma_k g_{l00} + m\epsilon^{jmk}\sigma_k d_{m0} - img_{j00} - \sigma^m H_{mj}\,, \\
D &= -2m^2 c_{00} + 2m^2\sigma^i d_{i0} + m\epsilon^{ijk}\sigma_k H_{ij} \\
&+ \Big[1 + 2i\sigma^i d_{i0} + 2f_0 + \frac{1}{3}\sigma^i g_{i00}\Big]\frac{i\hbar e}{mc}\sigma_k B^k\,.
\end{aligned} \tag{5.11}
$$

Agora, o Hamiltoniano será quantizado e as equações semi-clássicas de movimento serão escritas. Logo, os operadores de posição $\hat{x}_i$, momento $\hat{p}_i$ e spin $\hat{\sigma}_i$ são introduzidos, bem como as seguintes relações de comutação, que são satisfeitas para instantes de tempos iguais,

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad , \quad [\hat{x}_i, \hat{\sigma}_j] = [\hat{p}_i, \hat{\sigma}_j] = 0 \quad , \quad [\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k \,. \tag{5.12}$$

O operador Hamiltoniano $\hat{H}$ é facilmente construído em termos dos operadores $\hat{x}_i, \hat{p}_i, \hat{\sigma}_i$, e então, esses operadores fornecem as equações de movimento

$$i\hbar\frac{d\hat{x}_i}{dt} = [\hat{x}_i, H] \quad , \quad i\hbar\frac{d\hat{p}_i}{dt} = [\hat{p}_i, H] \quad , \quad i\hbar\frac{d\hat{\sigma}_i}{dt} = [\hat{\sigma}_i, H] \ . \tag{5.13}$$

Assim,

$$\frac{d\hat{x}_i}{dt} = \frac{1}{m}\Big(1 + A\Big)\Big[\Big(\delta_{ij} + 2B_{[ij]}\Big)\bar{P}^j + C_i\Big] \,, \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{p}_i}{dt} &= \frac{1}{2m}\Bigg\{ -\frac{\partial A}{\partial x_i}\Big[(\delta_{kj} + B_{kj})\bar{P}^k + C_j\Big]^2 \\ &- (1 + A)\Big[2\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}[(\delta^{lj} + B^{lj})\bar{P}_l + C_j]\Big)\Big[(\delta_{kj} + B_{kj})\bar{P}^k + C_j\Big] - \frac{\partial D}{\partial x^i}\Bigg\} \\ &= e\,v_j\frac{\partial A^j}{\partial x_i} \end{aligned} \tag{5.15}$$

e

$$i\hbar\frac{d\hat{\sigma}_i}{dt} = \varepsilon_{ijk}\, R_j\, \sigma_k + C_{ij}\sigma^j \,, \tag{5.16}$$

onde

$$\begin{aligned} R_j &= (-4imd_{j0} + img_{j00})v^2 + \Big(2imd_{0l}\delta_{jm} + 2imd_{l0}\delta_{jm} - 2img_{mlj} + \frac{2}{3}img_{l00}\delta_{jm}\Big)v_l v_m \\ &+ (2ib_0\delta_{ij} + 2iH_{ij})v^i + 2imd_{j0} - \frac{\hbar e}{m^2c}(1 + 2f_0)B_j \end{aligned} \tag{5.17}$$

e

$$C_{ij} = (2img_{kij} + img_{i00}\delta_{jk} + 2imd_{i0}\delta_{jk} - img_{k00}\delta_{ij} - 2imd_{k0}\delta_{ij})v^k + 2iH_{ij} \,. \tag{5.18}$$

Derivando a equação (5.14) em relação ao tempo, pode-se obter a força generalizada de Lorentz

$$m\,\frac{dv_i}{dt} = \frac{d\lambda_{ij}}{dt}mv^j + \frac{dC_i}{dt} + (\delta_{ij} + \lambda_{ij})[-e\,\vec{E}\, + e\,\vec{v} \times \vec{B}]^j \,, \tag{5.19}$$

onde

$$\lambda_{ij} = A\,\delta_{ij} + 2B_{[ij]} \tag{5.20}$$

e os termos A e B_{ij} são descritos pelas relações em (5.11). A equação (5.19) representa a força de Lorentz corrigida pelos termos que violam CPT/Lorentz. Vale ressaltar que, se as quantidades c_{00}, d_{i0}, c_{ij}, g_{lji} e g_{i00} forem nulas, pode-se obter a força de Lorentz como um caso particular de equação (5.19). O primeiro termo em tal equação representa um termo de arraste, uma vez que é proporcional à velocidade. O segundo está relacionado a uma força externa e o último é uma correção para o termo conhecido $e\,(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$.

5.2 A TFWE PARA TERMOS QUE VIOLAM AS SIMETRIAS CPT/LORENTZ - O CASO DO CAMPO DE TORÇÃO

A TFWE para um dos termos que está presente na tabela (1) [43], e que admite a transformação, será considerada nesta seção. A transformação exata será desenvolvida apenas para o caso do campo de torção.

5.2.1 TFWE para parte escalar da Torção

Para o caso da TFWE para parte escalar da torção, todo o procedimento seguido aqui está presente em [52]. Inicialmente, o Hamiltoniano correspondente é dado pela seguinte relação

$$H \,=\, c\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{p} - e\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{A} + \eta_1\gamma_5 S_0 + mc^2\beta\,. \tag{5.21}$$

As seguintes notações são consideradas para os campos externos: $A_\mu = (\Phi, \overrightarrow{A})$, para o campo eletromagnético, e $S_\mu = (S_0, \overrightarrow{S})$, para o campo de torção. Apenas os campos magnéticos e de torção que só podem variar com o tempo, e que não dependem das coordenadas espaciais, serão considerados. Como se pode verificar, o Hamiltoniano descrito por (5.21) obedece à relação $JH + HJ = 0$. Essa relação é uma condição para executar TFWE [39, 42, 45], apresentada em (4.41).

Por uma questão de completeza, mencionamos que essa relação (5.21) não contém um termo do tipo $\eta_1\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{S}\gamma_5$ que representa a interação do campo de Dirac com a parte de torção vetorial. É possível notar que, com este termo adicional, o Hamiltoniano correspondente não obedeceria à relação de anticommutação acima mencionada.

Além disso, devido à fraqueza do campo de torção, o real interesse é na ordem linear da mesma, enquanto, o campo magnético deve ser tratado normalmente. Por esta razão, considera-se que S_0 é constante e é o único termo não nulo de S_μ.

Agora, de acordo com a prescrição padrão [45], o próximo passo é obter H^2. Os cálculos diretos resultam em

$$H^2 \;=\; (c\vec{p} - e\vec{A} - \eta_1\vec{\Sigma}S_0)^2 + m^2c^4 \;+\; \hbar c e\vec{\Sigma}\cdot\vec{B} - 2(\eta_1)^2(S_0)^2\,. \tag{5.22}$$

Para obter o Hamiltoniano transformado H^{tr}, H^2 é reescrito como $H^2 = A^2 + B$ em que A são agrupados os termos dependentes da massa em H^2, e B, os que não dependem da massa. Nesse caso, $A = mc^2$. Então, procura-se um operador K na forma

$$K = A + \frac{1}{A}K_1 + K_1\frac{1}{A} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{A^2}\right)\,, \tag{5.23}$$

de tal forma que $K^2 = A^2$. Finalmente, usando as equações (4.48) e (5.22), obtém-se

$$H^{tr} \;=\; \beta mc^2 + \frac{\beta}{2mc^2}(c\vec{p} - e\vec{A} - \eta_1\vec{\Sigma}S_0)^2 \;+\; \beta\frac{\hbar e}{2mc}\vec{\Sigma}\cdot\vec{B} - \beta\frac{(\eta_1)^2}{mc^2}(S_0)^2\,. \tag{5.24}$$

O próximo passo é apresentar o férmion de Dirac na forma de um bi-espinor (descrito por φ e χ), conforme foi apresentado em (2.43) para a partícula livre e seguir com um procedimento parecido, para derivar o Hamiltoniano. Usando o fato de que o Hamiltoniano transformado seja uma função par, então,

$$H^{tr}_{\varphi} = \frac{1}{2m}(\vec{\Pi})^2 + B_0 + \vec{\sigma}\cdot\vec{Q}\,,$$

onde

$$\vec{\Pi} = \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} - \frac{\eta_1}{c}S_0\vec{\sigma} \quad , \quad B_0 = -\frac{(\eta_1)^2}{mc^2}(S_0)^2 \quad , \quad \vec{Q} = \frac{\hbar e}{2mc}\vec{B}\,. \tag{5.25}$$

As expressões acima são exatamente as mesmas derivadas em [23] e em [24] através da transformação perturbativa usual de Foldy-Wouthuysen.

5.2.2 Equações de Movimento com a parte escalar da Torção

Pode-se também realizar a quantização canônica da teoria de maneira semelhante a [23]. Para quantizar o Hamiltoniano (5.25) e escrever as equações semi-clássicas de movimento, as relações (5.13) serão consideradas. Os cálculos diretos levam às equações[1]

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{m}\left(p_i - \frac{e}{c}A_i - \frac{\eta_1}{c}\sigma_i S_0\right) = v_i\,,$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{1}{m}\left(p^j - \frac{e}{c}A^j - \frac{\eta_1}{c}\sigma^j S_0\right)\frac{e}{c}\frac{\partial A_j}{\partial x^i}\,,$$

[1] Neste ponto, podem ser omitidos todos os termos que se anulam quando $\hbar \to 0$.

$$\frac{d\sigma_i}{dt} = \left[\overrightarrow{R} \times \overrightarrow{\sigma}\right]_i \quad , \quad \overrightarrow{R} = \frac{2\eta_1}{\hbar}\left[-\frac{1}{c}\overrightarrow{v} S_0\right] + \frac{e}{mc}\overrightarrow{B}\,. \tag{5.26}$$

Usando as duas primeiras equações de (5.26), é possível obter

$$m\frac{dv_i}{dt} = -\frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{e}{c}\left[\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}\right]_i - \frac{\eta_1}{c}\sigma_i\frac{\partial S_0}{\partial t} - \frac{\eta_1}{c}S_0\frac{d\sigma_i}{dt}\,. \tag{5.27}$$

Esta equação é a correção para a expressão conhecida da força de Lorentz. Porém, não é mostrada uma interação explícita entre a torção e o campo eletromagnético (como para as ondas gravitacionais, por exemplo, [43]), os dois últimos termos no lado direito da equação mostram a possível interação da parte escalar do campo de torção com a partícula de Dirac.

5.2.3 TFWE para a Torção do Espaço-Tempo: TFW Semi-Exata

Apresenta-se aqui uma breve revisão sobre a Transformação Foldy-Wouthuysen Semi-Exata (TFWSE) [43, 51, 53]. Inicialmente, considerando uma partícula de spin-1/2 em campos externos de torção e eletromagnético. Os campos magnético e de torção só podem variar com o tempo, mas não dependem das coordenadas espaciais. O Hamiltoniano a ser trabalhado é escrito da seguinte forma

$$H = c\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{p} - e\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{A} - \eta_1\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{S}\gamma_5 + e\Phi + \eta_1\gamma_5 S_0 + mc^2\beta\,. \tag{5.28}$$

Aqui, serão adotadas as mesmas notações para o campo eletromagnético, $A_\mu = (\Phi\,,\,\overrightarrow{A})$, e para o campo de torção, $S_\mu = (S_0\,,\,\overrightarrow{S})$. Em caso de campo magnético constante, pode-se definir $\Phi = 0$. Tais notações estão descritas em [44] para as matrizes de Dirac, em que a matriz γ^0 é β.

Somente àquelas teorias em que o Hamiltoniano obedece à relação (4.41), $J\,H + H\,J = 0$, permitem executar a TFWE [39, 42, 45, 46]. Sendo que J, o operador involução, possui a forma usual presente na literatura e apresentada em (5.1).

Analisando diretamente o Hamiltoniano (5.28), é possível perceber que o termo $\eta_1\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{S}\gamma_5$ é o único que não satisfaz a condição (4.41). Deste ponto de vista, uma conclusão natural é que não seria possível realizar a TFWE quando se leva em consideração o campo de torção no Hamiltoniano da teoria. No entanto, existe uma consideração possível que modifica esse cenário, em algum sentido (veja, por exemplo, [43] e referências citadas). Então, fazendo uma modificação *ad hoc* no termo comentado acima, que o mesmo deve ser multiplicado pela matriz β. Observa-se que tal modificação satisfaz a condição (4.41) e agora a TFWE é perfeitamente possível [2]. A motivação para a realização do procedimento descrito anteriormente é que depois de desenvolver o Hamiltoniano final, o mesmo apresentará uma estrutura em blocos diagonal. O interesse é somente no bloco superior do Hamiltoniano que é par (após a transformação) para fazer a análise física. Pelo menos em primeira ordem em $1/m$, não importa se esse termo está multiplicado por β ou não, visto que esta matriz possui a forma (2.8) e o bloco superior da mesma é a matriz unitária. Com tal resultado chegamos ao que pode ser denominado como TFWSE, pois essa transformação é exata em parte dos campos externos e linear nos outros campos. Portanto, o Hamiltoniano possui a forma

$$H = c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} - e\vec{\alpha}\cdot\vec{A} - \eta_1\vec{\alpha}\cdot\vec{S}\gamma_5\beta + \eta_1\gamma_5 S_0 + mc^2\beta\,. \tag{5.29}$$

De acordo com a TFWE padrão [45, 54], o próximo passo é a obtenção de H^2. Os cálculos diretos dão o resultado

$$\begin{aligned} H^2 &= (c\vec{p} - e\vec{A} - \eta_1\vec{\Sigma}S_0)^2 + m^2c^4 + 2\eta_1 mc^2\vec{\Sigma}\cdot\vec{S} \\ &- (\eta_1)^2(\vec{S})^2 - \hbar ce\vec{\Sigma}\cdot\vec{B} - 2(\eta_1)^2(S_0)^2 + i\eta_1\gamma_5\beta\vec{\Sigma}\cdot\left[\vec{S}\times(c\vec{p} - e\vec{A})\right]. \end{aligned} \tag{5.30}$$

O último termo nesta equação se transforma (sob a paridade) de uma maneira diferente em comparação com os outros termos no Hamiltoniano. No entanto, não há argumentos físicos razoáveis que permitem supor que $\vec{\Sigma}\cdot[\vec{S}\times(c\vec{p} - e\vec{A})] = 0$. Assim, a presença dele parece, de certa forma natural, visto que foi utilizado o procedimento artificial em (5.28). Ao mesmo tempo, se tal termo não for considerado, o restante é exatamente o Hamiltoniano que vem da TFW perturbativa usual com torção [24]. Uma vantagem óbvia do método presente é a grande simplicidade técnica comparada com a do método perturbativo.

A partir deste ponto, o próximo passo é realizar a transformação exata. Este procedimento não será descrito em detalhes aqui (o procedimento padrão é descrito em [39] e [43]). O Hamiltoniano transformado pode ser escrito do seguinte modo

$$\begin{aligned} H^{tr} &= \beta mc^2 + \frac{\beta}{2mc^2}(c\vec{p} - e\vec{A} - \eta_1\vec{\Sigma}S_0)^2 + \beta\eta_1\vec{\Sigma}\cdot\vec{S} \\ &- \beta\frac{\hbar e}{2mc}\vec{\Sigma}\cdot\vec{B} - \beta\frac{(\eta_1)^2}{mc^2}(S_0)^2 + i\beta\eta_1\gamma_5\beta\vec{\Sigma}\cdot\left[\vec{S}\times(c\vec{p} - e\vec{A})\right]. \end{aligned} \tag{5.31}$$

[2] Na ordem linear no campo de torção, um β extra não tem efeito.

Agora e assim por diante denota-se os termos com o índice "*tr*" como os transformados e esses termos pertencem ao Hamiltoniano transformado final. Considerando o bi-espinor (2.43) e escrevendo a equação de Dirac na forma de Schrödinger, o Hamiltoniano transformado para φ é

$$H_{\varphi}^{tr} = \frac{1}{2m}(\overrightarrow{\Pi})^2 + B_0 + \overrightarrow{\sigma} \cdot \overrightarrow{Q}\,, \tag{5.32}$$

onde

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Pi} &= \overrightarrow{p} - \frac{e}{c}\overrightarrow{A} - \frac{\eta_1}{c}S_0\overrightarrow{\sigma} \quad , \quad B_0 = -\frac{(\eta_1)^2}{mc^2}(S_0)^2\,, \\
\overrightarrow{Q} &= \eta_1\overrightarrow{S} - \frac{\hbar e}{2mc}\overrightarrow{B} + \frac{\eta_1}{mc}\overrightarrow{S} \times (\overrightarrow{p} - \frac{e}{c}\overrightarrow{A})\,.
\end{aligned}$$

A quantização canônica de (5.32) fornece as equações de movimento (quasi)clássicas

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{m}\Big(p_i - \frac{e}{c}A_i - \frac{\eta_1}{c}\sigma_i S_0\Big) + \frac{\eta_1}{mc}\Big[\overrightarrow{\sigma} \times \overrightarrow{S}\Big]_i = v_i\ ; \tag{5.33}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{1}{m}\Big(p^j - \frac{e}{c}A^j - \frac{\eta_1}{c}\sigma^j S_0\Big)\frac{e}{c}\frac{\partial A_j}{\partial x^i} + \frac{\eta_1}{mc}\Big[\overrightarrow{\sigma} \times \overrightarrow{S}\Big]^j\frac{e}{c}\frac{\partial A_j}{\partial x^i}\ ; \tag{5.34}$$

$$\frac{d\sigma_i}{dt} = \Big[\overrightarrow{R} \times \overrightarrow{\sigma}\Big]_i\ ,\ R_j = \frac{2\eta_1}{\hbar}\Big[S_j - \frac{1}{c}v_j S_0 + \Big(S \times \frac{\overrightarrow{v}}{c}\Big)_j + \frac{2\eta_1}{\hbar}S_0\Big(\overrightarrow{S} \times \overrightarrow{\sigma}\Big)_j\Big] + \frac{e}{mc}B_j\,. \tag{5.35}$$

Combinando esta última equação, a força de Lorentz é escrita como

$$m\frac{dv_i}{dt} = -\frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{e}{c}\Big[\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}\Big]_i - \frac{\eta_1}{c}\sigma_i\frac{\partial S_0}{\partial t} - \frac{\eta_1}{c}\frac{\partial(\overrightarrow{S} \times \overrightarrow{\sigma})_i}{\partial t}\ . \tag{5.36}$$

Com base no que foi explicado anteriormente, pode-se supor que a abordagem da TFWSE não é consistente. Por outro lado, a TFWSE é realizada em [51] para vários casos e os resultados estão de acordo com a TFWE usual. Embora a abordagem em si pareça estar alinhada com o método desenvolvido, sua aplicação demonstra limitações no contexto prático do caso em análise. Para obter uma melhor perspectiva sobre esta situação, é apresentada na próxima seção uma nova proposta para realizar a transformação exata para o caso de torção espacial.

6 TRANSFORMAÇÃO DE FOLDY-WOUTHUYSEN EXATA, UMA OUTRA PROPOSTA

A ação combinada de torção e um forte campo magnético no campo de um espinor massivo e da partícula correspondente será considerada neste capítulo, conforme apresentado na seção (**5.2.3**) e no artigo [53]. Aqui, o Hamiltoniano não admite a TFWE da maneira usual. Um método que permita a realização da TFWE será discutido, bem como a obtenção de alguns resultados físicos desta situação. A escolha correta do operador involução é o início.

O método é empregado com o campo de torção, mas também pode ser aplicado a outros campos. O resultado principal aqui é o método em si. Nesse sentido, criam-se possibilidades de realizar o TFWE em alguns casos que antes não eram contemplados pela literatura e extraídos de suas propriedades físicas.

6.1 A TFWE - O CASO DA TORÇÃO DO ESPAÇO-TEMPO

Uma abordagem que permite trabalhar com a TFWE usual para o campo de torção é apresentada aqui. A ideia principal é considerar uma forma de operador involução mais geral e não a utilizada na seção anterior. Deve-se considerar a estrutura do operador involução mais geral [42, 89]

$$\hat{J} = M \times \hat{F}\,, \tag{6.1}$$

onde M e $\hat{F}$ são operadores que atuam nos espaços de matrizes e funções (campos externos na ação, por exemplo), respectivamente. Com esta suposição, a forma geral do hamiltoniano (5.28) não é alterada. O operador involução com o qual será trabalhado tem a seguinte forma explícita

$$\hat{J} = i\gamma^5\beta\,\hat{O}\,, \tag{6.2}$$

onde $\hat{O}$ pode ser $\hat{T}$, o operador de reversão temporal, e $\hat{P}$, o operador de paridade.

Pode-se encontrar na introdução de [90] uma lista de referências ao teorema de CPT. É importante lembrar algumas relações básicas para a reflexão de paridade $\hat{P}$ e reversão de tempo $\hat{T}$ que são importantes neste trabalho para quadrivetores. O importante aqui é levar em consideração como os vetores e os pseudo-vetores respondem à ação desses operadores. O ponto principal é que, sob a transformação em T, apenas a componente de tempo do quadrivetor muda o sinal e para a transformação em P, a parte vetorial é afetada. Para um pseudo-vetor, como S_μ, a situação é que se $x'_i \to -x$ (paridade), a parte de S_0 muda de sinal, e se $t' \to -t$, a parte vetorial muda de sinal [3]. Como deveria ser, uma vez que não há termos que violam a simetria C deste Hamiltoniano, para este caso, a transformação PT dará a covariância do Hamiltoniano.

Portanto, o que está sendo proposto aqui é que a nova abordagem considerada é um método para encontrar a forma correta do operador involução que permite que o método da TFWE seja aplicado em alguns casos que não seriam possíveis. Aqui, o operador involução (6.2), que tem a mesma forma, por exemplo, em [42], não restringe a forma do campo externo analisado, como foi feito para o vetor de potencial eletromagnético no trabalho citado. A ideia aqui é aplicada apenas para possíveis termos que violam as simetrias CPT e Lorentz. Deve-se saber, a partir da literatura, qual tipo de simetria que o termo estudado viola, antes dos cálculos. Neste caso, é a paridade e o tempo, para a torção, como exemplo. Então, o próximo passo é propor uma forma para o operador $\hat{F}$ em (6.1) que é $\hat{T}$, para esse caso.

É possível observar agora que a relação de comutação (4.41) é obedecida, quando se considera a relação (6.2) e o Hamiltoniano do sistema apresentado em (5.28). Por esse motivo, a TFWE é completamente possível de ser realizada. Vale ressaltar que em um caso geral, se alguém quer realizar a transformação exata ou para qualquer termo externo, o que precisa ser feito é encontrar a forma explícita para o operador $\hat{F}$, que será feito para mostrar a consistência do método.

Neste ponto, é possível realizar a TFWE. O procedimento que se utiliza é o padrão, que está bem descrito em [39, 43, 54]. O Hamiltoniano transformado, para o espinor de Dirac, é escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} H^{tr} &= \beta mc^2 + \frac{\beta}{2mc^2}(c\overrightarrow{p} - e\overrightarrow{A} - \eta_1\overrightarrow{\Sigma}S_0 - \eta_1\gamma_5\overrightarrow{S})^2 + \beta\eta_1\overrightarrow{\Sigma}\cdot\overrightarrow{S} \\ &- \beta\frac{\hbar e}{2mc}\overrightarrow{\Sigma}\cdot\overrightarrow{B} - \beta\frac{(\eta_1)^2}{mc^2}(S_0)^2 + \beta\frac{(\eta_1)^2}{2mc^2}(\overrightarrow{S})^2 . \end{aligned} \tag{6.3}$$

Observa-se assim que esta última equação é completamente livre de termos que violam a invariância no tempo. No entanto, uma comparação entre as equações (5.31) e (6.3) mostra que o Hamiltoniano descrito por (6.3) apresenta uma contribuição do vetor de torção na parte cinética.

6.2 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO COM A TORÇÃO

Considerando o bi-espinor e conforme explicado na seção (6.1), o próximo passo é escrever a equação de Dirac na forma de Schrödinger $i\hbar\,\partial_t\psi = H\psi$. A partir de cálculos diretos, pode-se escrever o Hamiltoniano para φ como

$$H_{\varphi}^{tr} = \frac{1}{2m}(\overrightarrow{\Pi})^2 + B_0 + \overrightarrow{\sigma}\cdot\overrightarrow{Q}\,, \tag{6.4}$$

onde

$$\overrightarrow{\Pi} = \overrightarrow{p} - \frac{e}{c}\overrightarrow{A} - \frac{\eta_1}{c}S_0\overrightarrow{\sigma} - \frac{\eta_1}{c}\sigma_5\overrightarrow{S} \qquad , \qquad B_0 = -\frac{(\eta_1)^2}{mc^2}(S_0)^2 + \frac{(\eta_1)^2}{2mc^2}(\overrightarrow{S})^2 \quad ,$$

$$\overrightarrow{Q} = \eta_1\overrightarrow{S} - \frac{\hbar e}{2mc}\overrightarrow{B}\,, \tag{6.5}$$

onde $\sigma_5 = (1/6)\,\varepsilon^{ijk}\,\sigma_i\,\sigma_j\,\sigma_k$ [39]. As expressões acima não são exatamente as mesmas derivadas em [23] e [24] através da TFW perturbativa usual. A diferença básica é o termo $\sigma_5\overrightarrow{S}$. A aparência deste novo termo baseia-se na vantagem de usar a TFWE ao invés da TFW [1].

É importante notar que a presença de termos do tipo $\overrightarrow{S}\cdot\overrightarrow{B}$ no Hamiltoniano transformado (6.4) está relacionada à possibilidade de considerar testes experimentais para o campo de torção usando ressonância magnética, como foi explicado em [23]. No entanto, é a comparação direta entre as equações (5.32) e (6.4) que mostra duas diferenças entre a abordagem da TFWSE e o método aqui apresentado. O primeiro representa uma nova contribuição na parte cinética de (6.4) representada por um termo[2] do tipo $\sigma_5\overrightarrow{S}$. O segundo é a ausência, no Hamiltoniano (6.4), de um termo que viola o tempo.

Para quantizar o Hamiltoniano (6.5) e escrever as equações de movimento semi-clássicas (após o cálculo, faz $\hbar \to 0$). Considerando as relações de comutação (5.12), então,

$$\frac{d\hat{x}_i}{dt} = \frac{1}{m}\left(p_i - \frac{e}{c}A_i - \frac{\eta_1}{c}\sigma_i S_0 - \frac{\eta_1}{c}\sigma_5 S_i\right) = v_i\,; \tag{6.6}$$

$$\frac{d\hat{p}_i}{dt} = \frac{\pi^j}{mc}\left(e\frac{\partial A_j}{\partial x^i} + \eta_1 S_0\frac{\partial\sigma_j}{\partial x^i} + \eta_1 S_j\frac{\partial\sigma_5}{\partial x^i}\right)\,; \tag{6.7}$$

$$\frac{d\hat{\sigma}_i}{dt} = \left[\overrightarrow{R}\times\overrightarrow{\sigma}\right]_i\,, \tag{6.8}$$

[1] Usando a transformação exata, o risco de eliminar alguns termos importantes é menor.
[2] Observe que esse termo é novo com relação a TFW [24] e TFWSE [43].

onde

$$\pi^k = p^k - \frac{e}{c}A^k \quad ; \quad R_j = 2\frac{\eta_1}{\hbar}\Big[S_j - \frac{1}{c}v_j S_0\Big] - \frac{e}{mc}B_j \quad ; \tag{6.9}$$

e σ_5 é a matriz γ_5 na representação para o bi-espinor. E agora, derivando a equação (6.6),

$$m\frac{dv_i}{dt} = \Big[\vec{v} \times \vec{C}\Big]_i + \frac{d}{dt}\Big(u_i\Big)\,, \tag{6.10}$$

onde

$$C_k = -\frac{e}{c}B_k - \frac{\eta_1}{c}\varepsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial x_l}\Big(S_0\sigma^m + \sigma_5 S^m\Big) \qquad \text{e} \qquad u_i = -\frac{e}{c}A_i - \frac{\eta_1}{c}\Big(S_0\sigma_i - \sigma_5 S_i\Big)\,. \tag{6.11}$$

A última equação representa as correções para a força clássica de Lorentz que atua sobre a partícula de Dirac. Se considerar uma trajetória descrita por este férmion, é possível observar que os termos com S_μ podem oferecer correções para o caminho da partícula. Estes resultados estão de acordo com as equações de movimento conhecidas e apresentadas em [24].

Comparando os resultados para as equações de movimento, isto significa, neste caso, comparar a aproximação exata com a semi-exata, é possível ver algumas diferenças. Olhando um por um, é possível notar que os termos com S_i têm construção algébrica diferente em (5.33) e (6.6). Mas, em ambas as equações eles têm o mesmo significado físico, uma vez que há matrizes de espinor em primeira ordem (o que importa para a abordagem fenomenológica). Considerações análogas podem ser realizadas para equações (5.34) e (6.7), em que a única diferença está nos termos com σ_i e S_i. Finalmente, as equações (5.35) e (6.8) não têm diferença se for verificado cuidadosamente. O termo de segunda ordem da torção em (5.35) foi considerado negligenciável em (6.8). O termo com o produto vetorial entre S_i e v_i é zero, pois se simplesmente for substituído v_i por (6.6) neste termo, pode-se ver que o termo com A_i tem o fator v/c^2 (está sendo trabalhado com o limite não-relativístico da teoria) e os outros contribuem apenas para a segunda ordem no campo de torção. O termo com a parte espacial pura do momento p_i não produzirá diferença física quando multiplicado pelos termos com torção, uma vez que cada um destes termos possui uma derivada de matrizes de spin em relação às coordenadas (não contribui para a trajetória da partícula, como pode ser visto nas equações (5.36) e (6.10)).

7 A TFWE PARA A TEORIA DE DIRAC COM O CONJUNTO COMPLETO DE TERMOS QUE VIOLAM CPT/LORENTZ

Neste capítulo, será desenvolvida a TFWE para toda a teoria apresentada no capítulo (3), incluindo os termos que não estavam presentes na tabela (1), ou seja, para os blocos vazios que não permitiam a TFWE. Todo o desenvolvimento é fundamentado no artigo [58]. Assim, será apresentada uma nova formulação para estudar todos os casos para os quais a transformação exata não é permitida, através de uma generalização do método e o desenvolvimento de um novo operador involução [58].

7.1 HAMILTONIANO COMPLETO PARA A TEORIA DE DIRAC COM VIOLAÇÃO DA INVARIÂNCIA DE CPT/LORENTZ

Como já foi mostrado, um dos critérios para se executar a TFWE é que os termos que violam CPT/Lorentz obedeçam a relação (4.41). Analisando a tabela (1), é possível perceber que os blocos com células vazias são justamente aqueles termos que não admitem a TFWE e a forma do operador involução (5.1), até então, utilizado para a transformação. É, portanto, normal formular a seguinte questão: é possível mostrar que existe um operador involução para este caso na forma da equação (6.1)? O resultado deste procedimento é mostrado na tabela (2) [53].

Tabela 2 – Antigos e Novos Coeficientes de Interação

	m $P^*_\nu e^\nu$	a_l $P^*_\nu c^{l\nu}$ $\overline{P}_l$	b_0 $P^*_\nu d^{0\nu}$	H^{lj} $P^*_\nu g^{lj\nu}$	m_5 $P^*_\nu f^\nu$	b_l $P^*_\nu d^{l\nu}$	a_0 $P^*_\nu c^{0\nu}$ $\overline{P}_0$	$H^{0\mu}$ $P^*_\nu g^{0\mu\nu}$
γ^0	1	γ^l	$-\gamma^0\gamma^5$	$\frac{1}{2}\sigma^{lj}$	$\boldsymbol{i\gamma_5}$	$\boldsymbol{\gamma_5\gamma_l}$	$\boldsymbol{\gamma_0}$	$\boldsymbol{\frac{1}{2}\sigma^{0\mu}}$
c^{00}	$-\gamma^0$	$-\alpha^l$	γ^5	$-\frac{1}{2}\gamma^0\sigma^{lj}$	$\boldsymbol{-i\gamma_0\gamma_5}$	$\boldsymbol{\gamma_5\alpha_l}$	$\boldsymbol{-1}$	$\boldsymbol{-\frac{1}{2}\gamma_0\sigma^{0\mu}}$
f^0	$i\gamma^5$	$i\gamma^5\gamma^l$	$i\gamma^0$	$\frac{i}{2}\gamma^5\sigma^{lj}$	$\boldsymbol{-1}$	$\boldsymbol{i\gamma^l}$	$\boldsymbol{i\gamma^5\gamma^0}$	$\boldsymbol{\frac{i}{2}\gamma^5\sigma^{0\mu}}$
d^{i0}	$-i\gamma^i\gamma^5$	$-i\gamma^i\gamma^5\gamma^l$	α^i	$-\frac{1}{2}\gamma^i\gamma^5\sigma^{lj}$	$\boldsymbol{i\gamma^i}$	$\boldsymbol{\gamma^i\gamma^l}$	$\boldsymbol{\gamma^5\alpha^i}$	$\boldsymbol{\frac{1}{2}\gamma^i\gamma^5\sigma^{0\mu}}$
g^{i00}	$-\frac{i}{2}\alpha^i$	$-\frac{i}{2}\alpha^i\gamma^l$	$-\frac{i}{2}\gamma^i\gamma^5$	$-\frac{1}{4}\alpha^i\sigma^{lj}$	$\boldsymbol{\frac{1}{2}\alpha^i\gamma_5}$	$\boldsymbol{-\frac{1}{2}\alpha^i\gamma_5\gamma_l}$	$\boldsymbol{-\frac{i}{2}\alpha^i\gamma_0}$	$\boldsymbol{-\frac{i}{4}\alpha^i\sigma^{0\mu}}$
d^{00}	$\boldsymbol{-\gamma^0\gamma^5}$	$\boldsymbol{\gamma^5\alpha^l}$	$\boldsymbol{-1}$	$\boldsymbol{\frac{1}{2}\gamma_5\gamma_0\sigma^{lj}}$	$-i\gamma^0$	$-\alpha^l$	$-\gamma^5$	$-\frac{1}{2}\sigma^{0\mu}\gamma^0\gamma^5$
e^0	$\boldsymbol{-1}$	$\boldsymbol{-\gamma^l}$	$\boldsymbol{-i\gamma^5\gamma^0}$	$\boldsymbol{-\frac{1}{2}\sigma^{lj}}$	$-i\gamma^5$	$-\gamma^5\gamma^l$	$-\gamma^0$	$-\frac{1}{2}\sigma^{0\mu}$
c^{i0}	$\boldsymbol{\gamma^i}$	$\boldsymbol{\gamma^i\gamma^l}$	$\boldsymbol{\gamma^5\alpha^i}$	$\boldsymbol{\frac{1}{2}\gamma^i\sigma^{lj}}$	$-i\gamma^i\gamma^5$	$i\gamma^i\gamma^5\gamma^l$	$-\alpha^i$	$\frac{1}{2}\gamma^i\sigma^{0\mu}$
g^{ij0}	$\boldsymbol{-\frac{1}{2}\sigma^{ik}}$	$\boldsymbol{-\frac{1}{2}\sigma^{ik}\gamma^l}$	$\boldsymbol{\frac{1}{2}\sigma^{ik}\gamma^0\gamma^5}$	$\boldsymbol{-\frac{1}{4}\sigma^{ik}\sigma^{lj}}$	$-\frac{1}{2}\sigma^{ij}\gamma^5$	$-\frac{1}{2}\sigma^{ij}\gamma^5\gamma^l$	$-\frac{1}{2}\sigma^{ij}\gamma^0$	$-\frac{1}{4}\sigma^{ij}\sigma^{0\mu}$

Fonte: Retirado de JÚNIOR et al. (2019, p.2).

A tabela especifica todos os possíveis casos para os termos que violam CPT e Lorentz na equação de Dirac modificada que admitem a TFWE. A partir de agora, as quantidades em negrito serão chamadas de termos *novos* e as quantidades que não estiverem em negrito, termos *antigos*.

Para entender como o Hamiltoniano pode ser obtido, diretamente da tabela (2), é apresentado um exemplo simples. A regra é baseada no produto dos termos da linha pelos termos na coluna. Então, considerando, por exemplo, a primeira linha vezes a primeira coluna: $\gamma^0 \times 1 \times m = \gamma^0 m$. Neste caso, é obtido o termo da equação de Dirac livre, que é o mais trivial.

Considerando outro exemplo, como o produto da sexta linha pela primeira coluna. Os termos dentro da tabela (2) também devem ser levados em consideração. Essa multiplicação resulta em dois termos:

$$d^{00} \times (-\gamma^0\gamma^5) \times m = -md^{00}\gamma^0\gamma^5$$

e

$$d^{00} \times (-\gamma^0\gamma^5) \times P^*_\nu e^\nu = -md^{00}\gamma^0\gamma^5 P^*_\nu e^\nu. \tag{7.1}$$

Observa-se que ambos quebram C, P, PT e CT [3, 71]. É notável dizer que o estudo deste tipo de termos, com considerações da TFWE, depende da escolha correta do operador involução, tal que a relação (4.41) seja contemplada.

A forma geral do operador involução [42, 89] tem a estrutura apresentada em (6.1), ou seja, $\hat{J} = M \times \hat{F}$, em que M e $\hat{F}$ são operadores. Eles atuam no espaço de matrizes e funções, respectivamente. Em particular, as escolhas $M = i\gamma^5\gamma^0$ e $\hat{F} = \hat{1}$ correspondem ao operador usual usado em trabalhos anteriores [43, 54]. No entanto, como já mencionado anteriormente, os novos termos da tabela (2) não satisfazem a relação de anticomutação (4.41) para tal escolha. O ponto principal aqui é o seguinte: a escolha de um operador involução apropriado, para um termo específico da tabela (2), envolve o conhecimento de exatamente qual simetria está sendo quebrada (para cada termo dessa tabela).

Um caso interessante é a parte vetorial do campo de torção, b_l. Como se pode verificar [3, 71], este termo quebra T, CT, PT e CPT. No Hamiltoniano, o campo de torção é determinado pelo produto da linha 0 pela coluna 6. O resultado é $b_l\gamma^0\gamma^5\gamma^l$. Foi demonstrado que $M = i\gamma^5\gamma^0$ e $\hat{F} = T$ representam uma escolha específica para o operador involução, tal que a relação de anticomutação é obedecida [54]. No entanto, não é a única escolha possível. Em particular, $\hat{F} = CT$, $\hat{F} = PT$ e $\hat{F} = CPT$ funcionariam igualmente bem.

O objetivo principal da tabela é mostrar que existe um operador involução para esse caso. Não importa o quão complexo ele seja, ele não terá influência na forma explícita das equações de movimento, já que ele não possui nenhuma interpretação física. Assim, para realizar a TFWE para todos os termos da tabela (2), apresenta-se na próxima seção uma proposta de um novo operador involução que anticomuta com todos os termos da tabela (2).

7.2 OPERADOR INVOLUÇÃO, UMA ESCOLHA APROPRIADA

Começando com uma representação apropriada do Hamiltoniano com termos que violam CPT/Lorentz,

$$H = \phi_1^A \, H_{AB} \, \phi_2^B \, . \tag{7.2}$$

Ao longo deste trabalho, as grandezas com índices latinos A e B estão associadas apenas a posições possíveis na tabela (2). É necessário enfatizar que esses índices não são índices espaço-temporais. Os valores possíveis para A estão varrendo horizontalmente na tabela (2), de 0 a 8. No caso de B, os valores possíveis estão varrendo verticalmente, de 0 a 9. Além disso, as quantidades ϕ_1^A e ϕ_2^B são os campos que aparecem na linha superior e na coluna esquerda da tabela (2), respectivamente, e a quantidade H_{AB} representa os termos contidos nas células da tabela (2).

Como será melhor discutido na próxima seção, a TFWE funciona se, e somente se, for possível escrever o Hamiltoniano na forma da equação (7.2). Pode parecer complicado, à primeira vista, mas não é. Considerando o seguinte exemplo, sendo $A = 0$ e $B = 6$ (primeira coluna e sétima linha, respectivamente), obtem-se $\phi_1^0 = m + P_\nu^* e^\nu$, $\phi_2^6 = d_{00}$ e $H_{0,6} = -\gamma^0\gamma^5$. Logo, são fornecidos os dois termos descritos na equação (7.1).

Levando em conta essas considerações, apresenta-se, como próximo passo, um operador involução que anticomuta com o conjunto completo de termos do Hamiltoniano (7.2),

$$\hat{J} = \left(i\gamma^5\gamma^0\right) \times \left(C^{O'_{AB}} P^{O''_{AB}} T^{O'''_{AB}}\right)^{\theta_{IK}} , \tag{7.3}$$

onde C, P e T são os operadores conhecidos de carga, paridade e tempo, respectivamente [3, 71]. Observa-se que a equação (7.3) obedece à estrutura da equação (6.1), com a escolha de M e $\hat{F}$,

$$M = i\gamma^5\gamma^0$$

e

$$\hat{F} = \left(C^{O'_{AB}} P^{O''_{AB}} T^{O'''_{AB}}\right)^{\theta_{IK}}, \tag{7.4}$$

onde

$$I = A - 5 \qquad \text{e} \qquad K = B - 6\,. \tag{7.5}$$

A quantidade θ_{IK} é definida de forma a assumir o valor 0 ou 1. Se $I \times K > 0$, $\theta_{IK} = 0$. Por outro lado, se $I \times K < 0$, $\theta_{IK} = 1$. Na verdade, o produto entre I e K expressa o fato de estar trabalhando com os termos novos ou antigos da tabela (2). As grandezas O_{AB} também assumem o valor 0 ou 1. Elas são determinadas pelo conhecimento prévio de qual simetria está sendo violada.

Então, considerando outro exemplo em que seja $A = 6$ e $B = 0$. Então, $\phi_1^6 = b_l + P^*_\nu d^{ln}$, $\phi_2^0 = \gamma^0$ e $H_{6,0} = \gamma^5\gamma^l$. De acordo com a equação (7.2), o Hamiltoniano para este caso é dado por

$$H = \gamma^0\gamma^5\gamma^l\left(b_l + P^*_\nu d^{ln}\right). \tag{7.6}$$

Para se utilizar a tabela é necessário definir objetos matemáticos que são associados unicamente a esta tabela. Também é importante conhecer como cada um deles atua nesta tabela. Assim, o próximo passo é a escolha das grandezas O_{AB}. Como foi isto anteriormente, os termos contidos nas regiões *antigas* da tabela (2) são aqueles que a TFWE é permitida e foi realizada no trabalho [54]. Já os termos nas regiões *novas* da mesma tabela, são novos e a construção do operador involução para a execução da TFWE segue a "*Tabela XVII*" em [3, 71] que identifica as propriedades dos operadores *C*, *P* e *T* para a violação de Lorentz em eletrodinâmica quântica (EDQ), conforme apresentado na tabela (3).

A tabela (3) lista as propriedades em transformações de simetria discreta dos operadores que violam Lorentz na extensão mínima de EDQ [71]. As sete transformações consideradas são a conjugação de carga *C*, a inversão de paridade *P*, a inversão temporal *T* e suas combinações *CP*, *CT*, *PT* e *CPT*. A primeira coluna especifica o operador indicando seu coeficiente correspondente. Cada uma das outras colunas diz respeito a uma das sete transformações. Um operador *par* é indicado por um sinal *positivo* e um *ímpar* por um sinal *negativo*. A tabela contém oito linhas, uma para cada uma das oito combinações possíveis de sinais em *C*, *P* e *T* [3, 71]. Os termos $(k_{AF})_\mu$ e $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$ presentes na tabela são coeficientes para a violação de Lorentz no campo de fótons [71]. A violação de CPT é determinada apenas por $(k_{AF})_\mu$, que tem dimensões de massa. E o coeficiente $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$ é adimensional, tem as propriedades de simetria do tensor de Riemann e é duplo-*traceless*.

Tabela 3 – Propriedades dos operadores C, P e T para a violação de Lorentz em EDQ

$Coeficiente$	C	P	T	CP	CT	PT	CPT
$c_{00}, c_{jk}, (k_F)_{0j0k}, (k_F)_{jklm}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$b_j, g_{j0l}, g_{jk0}, (k_{AF})_j$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$
$b_0, g_{j00}, g_{jkl}, (k_{AF})_0$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$
$c_{0j}, c_{j0}, (k_F)_{0jkl}$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
a_0, e_0, f_j	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$
H_{jk}, d_{0j}, d_{j0}	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$
H_{0j}, d_{00}, d_{jk}	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
a_j, e_j, f_0	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$

Fonte: Retirado de KOSTELECKY et al. (2011, p.25).

Além disso, existem tabelas de dados para a violação de Lorentz e CPT [3] que são atualizadas frequentemente com resultados disponíveis na literatura, apresentado e compilando definições e propriedades. Tais tabelas compilam valores que são medidos e derivados de coeficientes para a violação de Lorentz e CPT na extensão de modelo padrão (*SME*), listando as sensibilidades máximas atingidas nos setores de matéria, fóton, neutrino e gravidade.

Em [3], são apresentadas 35 tabelas de dados reunidos da literatura existente até o presente momento. Alguns deles incluem resultados restritos à *SME* mínimo, outros limitam os coeficientes não-mínimos e alguns contêm dados envolvendo setores mínimos e não-mínimos. Cada uma dessas 35 tabelas de dados contém quatro colunas. A primeira coluna lista os coeficientes para a violação de CPT/Lorentz ou suas combinações relevantes. A segunda coluna contém as medidas e *bounds*, apresentados na mesma forma documentada na literatura. A terceira coluna contém um lembrete sucinto do contexto físico no qual o *bound* é extraído, enquanto a quarta coluna contém as citações de origem. O leitor é remetido para esta última para detalhes de procedimentos experimentais e teóricos, pressupostos subjacentes aos resultados, definições de notações não convencionais e outras informações relevantes. Os resultados deduzidos em bases teóricas são distinguidos daqueles obtidos através de medição experimental direta por um asterisco colocado após a citação.

Então, de acordo com a tabela (3), pode-se considerar que $O'_{AB} = 0$ e $O''_{AB} =$

$O'''_{AB} = 1$. Observando que da equação (7.5), $I = 1$, $K = -6$ e $I \times K = -6$; por esta razão, $\theta_{6,0} = 1$. Com essas considerações, o operador de involução correspondente é

$$\hat{J} = i\gamma^5\gamma^0 \, PT \, . \tag{7.7}$$

Como se pode verificar, a relação de anticomutação é obedecida quando as grandezas H e $\hat{J}$ são descritas pelas relações (7.6) e (7.7), respectivamente.

Pode-se ver que para os termos antigos da tabela (2) o produto entre I e K é sempre positivo e a quantidade θ na equação (7.3) é igual a zero. Consequentemente, no que se refere à parte antiga da tabela (2), obtem-se, como esperado, $M = i\gamma^5\gamma^0$ e $\hat{F} = \hat{1}$.

7.3 TRANSFORMAÇÃO EXATA COM CPT

Apresenta-se nesta seção a TFWE do Hamiltoniano para um férmion livre de Dirac Ψ com spin-1/2 e massa m na extensão de modelo padrão (*SME*) [4, 38]. Então, considerando o seguinte Hamiltoniano

$$\begin{aligned} H &= m\Big(\gamma^0 - \gamma^0 c_{00} - e_0 - d_{j0}\gamma^5\gamma^j + \frac{1}{2} g_{ik0}\sigma^{ik}\Big) \\ &+ P^k\Big(- \alpha_k + 2d_{0k}\gamma^5 - c_{jk}\alpha^j + c_{00}\alpha_k + if_k\gamma^5\gamma^0 - 2g_{0jk}\gamma^0\sigma^{0j} - 2c_{0k} + d_{jk}\gamma^5\alpha^j \\ &- d_{00}\gamma^5\alpha_k - e_k\gamma^0 + \frac{1}{2}\gamma^0\sigma^{ij} g_{ijk} - ig_{i00}\gamma_k\alpha^i\Big) \\ &+ a_j\alpha^j - b_0\gamma^5 + iH_{0j}\gamma^j - b_j\gamma^5\alpha^j - \frac{1}{2}\gamma^0\sigma^{ij} H_{ij} \, . \end{aligned} \tag{7.8}$$

Este Hamiltoniano pode ser construído diretamente a partir da tabela (2) apresentada na última seção. No entanto, não é o Hamiltoniano mais completo que se pode extrair dessa tabela. O ponto principal deste trabalho é o desenvolvimento do operador descrito em (7.4). Como está sendo utilizado pela primeira vez, vale a pena tratar de um Hamiltoniano do qual se possa conhecer pelo menos o resultado qualitativo diagonalizado. Por outro lado, seria muito interessante do ponto de vista físico se a nova TFWE gerasse termos inesperados em comparação com a transformação usual para a mesma ação. Porém, foram escolhidos apenas os termos representados na equação (7.8) porque os autores realizam a TFW usual em [38], levando em consideração este Hamiltoniano. Realizando a transformação, seria possível validar o algoritmo desenvolvido e buscar também por quantidades físicas misturadas em uma nova forma. O Hamiltoniano transformado (com

TFW usual)[1] é o

$$\tilde{H}^{tr} = \beta m + \frac{1}{2m}\Big\{(1+\tilde{A})\Big[\Big(\delta_{ij}+\tilde{B}_{ij}\Big)\bar{P}^i + \tilde{C}_j\Big]^2 + \tilde{D}\Big\}\,, \tag{7.9}$$

onde

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &= -2c_{00}\gamma^0 \\
\tilde{B}_{ij} &= \frac{1}{2}\Big[4\Big(d_{0i}+d_{i0}\Big)\gamma^5\gamma^j - 4c_{ij}\gamma^0 + 4\epsilon^l{}_{mj}\Big(g_{l0i}+g_{li0}\Big)\gamma^5\gamma^0\gamma^m\Big] \\
\tilde{C}_j &= \frac{1}{2}\Big[-4m\Big(c_{0j}+c_{j0}\Big) + 4md_{ij}\gamma^5\gamma^0\gamma^i - 4md_{00}\gamma^5\gamma^0\gamma^j - 4me_j\gamma^0 + 2m\epsilon^{kl}{}_m g_{klj}\gamma^5\gamma^m \\
&- 4m\epsilon^{ij}{}_l g_{i00}\gamma^5\gamma^l + 4a_j\gamma^0 - 4b_0\gamma^5\gamma^j + 4\epsilon^{jk}{}_l H_{0k}\gamma^5\gamma^0\gamma^l\Big] \\
\tilde{D} &= -2m^2c_{00}\gamma^0 - 2m^2e_0 - 2m^2d_{j0}\gamma^5\gamma^j - m^2\epsilon^{ik}{}_l g_{ik0}\gamma^5\gamma^0\gamma^l \\
&+ 2ma_0 - 2mb_j\gamma^5\gamma^0\gamma^j + m\epsilon^{ij}{}_l H_{ij}\gamma^5\gamma^l
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Além de TFWE ser mais econômica em álgebra, apresenta informações mais detalhadas com relação à aproximação não-relativística [33, 85, 86, 87]. Desta forma, o procedimento a ser utilizado é o padrão que já foi descrito anteriormente, e pode ser verificado em [39, 43, 54]. O primeiro passo na realização da TFWE é calcular o Hamiltoniano ao quadrado H^2. Para simplificar a álgebra, essa quantidade será escrita como

$$H^2 = m^2\Big(1+\frac{\bar{H}^2}{m^2}\Big)\,. \tag{7.11}$$

Lembrando que os termos de interação de segunda ordem são muito pequenos e, por essa razão, podem ser negligenciados aqui também. Repetindo os passos executados na seção (5.1), o termo H^2 pode ser escrito sob a forma de (5.3),

$$\bar{H}^2 = (1+\bar{A})[(\delta_{ij}+B_{ij})\bar{P}^i + \bar{C}_j]^2 + \bar{D} + m^2\,.$$

As quantidades $\bar{A}$, $\bar{B}_{ij}$, $\bar{C}_j$ e $\bar{D}$ são escritas da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\bar{A} &= -2c_{00} - d_{00}\gamma^5 + 2ig_{i00}\gamma^0\alpha^i\,, \\
\bar{B}_{ij} &= \frac{1}{2}\Big[-8\,d_{0i}\gamma^5\alpha_j - 4c_{ij} + 8\,g_{0li}\gamma^0\epsilon^{jlm}\Sigma_m + 8\,c_{0i}\alpha_j + 4d_{ij}\gamma^5 + 4g_{lmi}\epsilon^{lmj}\gamma^0\gamma^5 \\
&+ 4ig_{ilj}\gamma^0\gamma^5\Sigma^l + 4ig_{i00}\gamma^0\alpha_j\Big]\,,
\end{aligned}$$

[1] De agora em diante, as quantidades transformadas serão apresentadas usando o índice *tr*.

$$\begin{aligned}
\bar{C}_j &= \frac{1}{2}\Big[-8m\gamma^0 c_{0j} + 4md_{ij}\gamma^0\gamma^5\alpha^i - 4md_{00}\gamma^0\gamma^5\alpha_j - 4me_j + 2mg_{klj}\sigma^{kl} - 4img_{j00}\\
&- 4mg_{i00}\epsilon^{ijl}\Sigma_l + 4me_0\alpha_j + 4imd_{k0}\gamma^0\gamma^5\epsilon^{jkl}\Sigma_l - 2mg_{il0}\epsilon^{ilj}\gamma^5 + 4a_j + 4b_0\gamma^5\alpha_j\\
&- 4H_{0k}\gamma^0\epsilon^{jkl}\Sigma_l - 4a_0\alpha_j - 4b_j\gamma^5 - 4H_{kl}\epsilon^{klj}\gamma^0\gamma^5 + 4iH_{lj}\gamma^0\gamma^5\Sigma^l\Big],\\
\bar{D} &= -2m^2c_{00} - 2m^2\gamma^0 e_0 + 2m^2 d_{j0}\gamma^5\alpha^j + m^2\gamma^0\sigma^{ik}g_{ik0} + 2m\gamma^0 a_0 - 2m\gamma^0\gamma^5\alpha^j b_j\\
&- m\sigma^{ij}H_{ij} + \Big(1 - 2c_{00} + 2d_{00}\gamma^5 - 2ig_{i00}\gamma^0\alpha^i\Big)\frac{i\hbar e}{mc}\Sigma_k B^k\,. \qquad (7.12)
\end{aligned}$$

Existem, na última equação, termos pares e ímpares. No contexto da transformação Foldy-Wouthuysen, os operadores pares e ímpares são escritos conforme as relações (4.6). Então,

$$M_{(PAR)} = \frac{1}{2}(M + \gamma^0 M\gamma^0) \qquad (7.13)$$

e

$$M_{(\acute{I}MPAR)} = \frac{1}{2}(M - \gamma^0 M\gamma^0)\,. \qquad (7.14)$$

Na situação em que há muitos termos ímpares, deve-se levar em conta a relação [54]

$$H^{tr} = \hat{J}\frac{1}{2}(\sqrt{H^2} - \gamma^0\sqrt{H^2}\gamma^0) + \gamma^0\frac{1}{2}(\sqrt{H^2} + \gamma^0\sqrt{H^2}\gamma^0)\,, \qquad (7.15)$$

onde $\hat{J}$ é dado pela equação (7.3). O Hamiltoniano transformado H^{tr} apresenta apenas termos pares, e por esta razão, H^{tr} não mistura os componentes do espinor. Naturalmente, o cálculo de $\sqrt{H^2}$ deve ser realizado, e o resultado deve ser inserido na equação (7.15). Considerando que $m^2 \gg \bar{H}^2$ na equação (7.11), tal que

$$\sqrt{H} = m\Big(1 + \frac{\bar{H}^2}{2m^2}\Big)\,. \qquad (7.16)$$

Assim sendo, após alguma álgebra, o Hamiltoniano final transformado pode ser apresentado na forma de (5.8),

$$H^{tr} = \gamma^0 m + \frac{1}{2m}\Big\{(1 + A^{tr})\Big[(\delta_{ij} + B^{tr}_{ij})\bar{P}^i + C^{tr}_j\Big] + D^{tr}\Big\}\,,$$

onde

$$\begin{aligned}
A^{tr} &= -2\gamma^0 c_{00} - 2i\gamma^0 d_{00} + 2g_{i00}\,,\Sigma^i\\
B^{tr}_{ij} &= \frac{1}{2}\Big[8d_{0i}\gamma^0\Sigma_j - 4\gamma_0 c_{ij} - 8g_{0li}\epsilon^{jlm}\Sigma_m - 8ic_{0i}\gamma^0\Sigma_j + 4i\gamma^0 d_{ij}\\
&+ 4ig_{lmi}\epsilon^{lmj} - 4g_{ilj}\Sigma^l + 4g_{i00}\Sigma^i\Big],
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
C_j^{tr} &= \frac{1}{2}\Big[8mc_{0j} + 4md_{ij}\Sigma^i - 4md_{00}\Sigma_j - 4m\gamma^0 e_j + 2mg_{klj}\gamma^0\epsilon^{klm}\Sigma_m - 4img_{j00}\gamma^0 \\
&- 4mg_{i00}\gamma^0\epsilon^{ijl}\Sigma_l - 4ime_0\gamma^0\Sigma_j - 4md_{k0}\epsilon^{jkl}\Sigma_l - 2img_{il0}\epsilon^{ilj}\gamma^0 + 4\gamma^0 a_j \\
&- 4b_0\gamma^0\Sigma_j + 4H_{0k}\epsilon^{jkl}\Sigma_l + 4ia_0\gamma^0\Sigma_j - 4ib_j\gamma^0 - 4i\epsilon^{klj}H_{kl} - 4H_{lj}\Sigma^l\Big], \\
D^{tr} &= -2m^2\gamma^0 c_{00} + 2m^2 e_0 - 2m^2 d_{j0}\gamma^0\Sigma^j - m^2 g_{ik0}\epsilon^{ikl}\Sigma_l - 2ma_0 - 2mb_j\Sigma^j \\
&- m\gamma^0\epsilon^{ijl}H_{ij}\Sigma_l + \gamma^0\Big(1 + 2c_{00} + 2id_{00} - 2g_{i00}\gamma^0\Sigma^i\Big)\frac{i\hbar e}{mc}\Sigma_k B^k\,. \qquad (7.17)
\end{aligned}
$$

A equação anterior foi escrita em uma estrutura conhecida. O primeiro termo desta equação corresponde à energia de repouso, e o segundo representa o termo cinético, em que há uma correção para a forma geral da energia cinética. Já o último termo nessa equação corresponde a uma interação externa.

A equação (7.8) foi considerada como ponto de partida, para obter o Hamiltoniano transformado (7.17). É possível ver que há nove novos termos em (7.17) quando comparado a (7.10). Os novos termos são um na quantidade $\bar{A}$ relacionada ao coeficiente d_{00}; dois em $\bar{B}_{ij}$ relacionados aos coeficientes c_{0i} e d_{ij}; quatro em $\bar{C}_j$ relacionados aos coeficientes a_0, b_j, e_0 e g_{il0}; e dois termos em $\bar{D}$ relacionado aos coeficientes c_{00} e d_{00} com o campo magnético. No entanto, o processo exato apresenta algumas vantagens quando comparado ao usual, conforme comentado acima. Por exemplo, os novos termos que aparecem em D são relevantes quando o *bound state* da teoria é considerado.

Deste modo, um ponto que deve ser enfatizado é a necessidade de extrair do Hamiltoniano transformado o *bound state* da teoria, a fim de propor possíveis testes experimentais. O *bound state* daria a possibilidade de usar o método apresentado na série de artigos [3, 4, 69, 70, 74, 75, 76, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101] para encontrar outro possível teste experimental para o campo de torção usando esta teoria, por exemplo. No próximo capítulo deste trabalho, este assunto relevante será discutido.

8 TESTES CPT, UMA PERSPECTIVA

Uma breve perspectiva sobre testes experimentais é apresentada neste capítulo. O cenário completo da TFWE, incluindo todos os casos possíveis que violam as simetrias de CPT e de Lorentz na equação de Dirac, será considerado.

Um quadro teórico consistente sobre os testes de violação de CPT/Lorentz (em sistemas atômico e de partículas) pode ser encontrado em [4, 5, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98]. Essa estrutura incorpora a violação de CPT/Lorentz usando a chamada extensão de modelo padrão (SME) [4, 5] e a busca por novas assinaturas é possível. No entanto, este assunto é muito extenso e não seria possível abordar profundamente todo este tópico aqui.

Sabe-se que os sistemas da eletrodinâmica quântica são extremamente abundantes no âmbito dos testes de violação de CPT/Lorentz, uma vez que é sensível a energias muito baixas. Pode-se citar alguns exemplos de experimentos envolvendo experiências de física atômica como *Penning-Trap*, *Clock-Comparison*, *Pêndulo de Torção*, *Experiências com hidrogênio e anti-hidrogênio*, *Spin-Polarized Matter*, *Experimentos com Múon*, entre outros (ver as referências [91, 99, 100, 102, 103, 104]). Cada um dos experimentos mencionados apresenta um *bound state* muito específico e a magnitude de tais limites possibilita determinar quais tipos de experimentos devem ser realizados [3].

Uma questão muito natural surge aqui. Existe um *bound state* associado à TFWE para uma teoria de Dirac relacionada aos termos que violam as simetrias de CPT e de Lorentz? Para responder a esta questão, será considerado o potencial de violação de Lorentz V, que obedece à seguinte relação [91]

$$V = -\tilde{b}_j \sigma_j \,, \tag{8.1}$$

onde σ representa as matrizes de spin. Após alguns cálculos, pode-se escrever o *bound* correspondente da seguinte maneira [1]

$$\tilde{b}_j = b_j - \frac{1}{2}\epsilon^{jlm} H_{lm} - m d_{j0} - \left[1 + 2i\sigma^i d_{i0} + 2f_0 + \frac{1}{3}\sigma^i g_{i00}\right] \frac{i\hbar e}{2m^2 c} B_j \,. \tag{8.2}$$

O *bound* apresentado na última equação permite considerar a possibilidade de obter uma indicação de possíveis experiências atômicas [3]. De fato, a magnitude do campo magnético desempenha um papel crucial na determinação de tais experimentos. No entanto, a análise direta da equação (8.2) para prever qual é a experiência mais apropriada não é direta.

[1] Note que o potencial de violação de Lorentz vem, naturalmente, da equação (5.11).

Como um exemplo deste procedimento, considera-se o seguinte Hamiltoniano obtido após a transformação de Foldy-Wouthuysen

$$H = m + \frac{p^2}{2m} + a_0 - mc_{00} + \Big(-b_j + md_{j0} + \frac{1}{2}\epsilon_{jkl}H_{kl}\Big)\sigma^j + \Big[-a_j + m(c_{0j} + c_{j0})\Big]\frac{p_j}{m}\,, \tag{8.3}$$

onde todos os termos na última equação foram definidos anteriormente. Este Hamiltoniano apresenta o *bound*

$$\tilde{b}_j = b_j - \frac{1}{2}\epsilon_{jkl}H_{kl} - m\,d_{j0}\,. \tag{8.4}$$

Esse *bound* é compatível com os experimentos do pêndulo de torção [105]. Claramente, o resultado apresentado na equação (8.2) é mais geral que o apresentado na equação (8.4). Se for considerada a situação em que o campo magnético é nulo, é possível obter o *bound state* do experimento do pêndulo de torção, descrito por (8.4) como resultado particular. Observa-se também que o Hamiltoniano descrito pela equação (8.3) pode ser visto como um caso particular da equação (5.10).

Se a mesma abordagem for considerada, isto é, considerando os únicos termos de interação não nulos como sendo a_0 , c_{00} , b_j , d_{j0} , H_{kl} e c_{oj}, da equação (5.10), após algum cálculo, é possível obter a mesma estrutura que a observada na equação (8.3). Os termos a_0 e b_j não estarão presentes porque não foram considerados no Hamiltoniano inicial. A razão para isso foi a não aceitação desses termos para os critérios da TFWE. No entanto, todos os outros termos estão presentes e têm uma forma mais geral. Neste sentido, é possível considerar a equação (5.10) como um caso mais completo, apesar do campo de torção (b_j) e a_j não estarem presentes.

Outro resultado que deve ser analisado vem da equação (5.19). Esta equação está relacionada à possibilidade de compreender o comportamento das partículas reais devido às interações com os campos externos. Como exemplo, podem ser citadas as interações misturando termos entre o campo magnético $\boldsymbol{B}$ e os termos de CPT/Lorentz do tipo $\lambda_{ij}B$.

Já para os dois casos que envolvem o campo de torção, o ponto principal nos testes experimentais é a fraqueza deste campo externo. Assim, outra questão surge aqui. É possível obter dados experimentais do campo de torção? Para obter alguma indicação sobre a possibilidade de tais dados experimentais, é necessário saber, antes de tudo, o *bound state* desta teoria [3], conforme mencionado anteriormente. Esse *bound* fornece uma indicação sobre qual experimento atômico deve ser realizado para obter possíveis medidas do campo de torção no espaço-tempo. Para calcular o *bound state*, os pontos de partida são os Hamiltonianos transformados destes casos, dados pelas equações (5.25) e (6.4). Assim, considerando (8.1), os *bound states* para cada caso, podem-se ser escritos das seguintes maneiras

$$\tilde{b}_j = b_j + \frac{e\hbar}{2mc}B_j - \frac{\eta_1 S_0}{mc}\Big(p_j - \frac{e}{c}A_j\Big) \tag{8.5}$$

e

$$\tilde{b}_j = b_j - \eta_1 S_j + \frac{\hbar e}{2mc}B_j\,. \tag{8.6}$$

O *bound* na equação (8.5) permite considerar a possibilidade de obter uma indicação de possíveis experiências atômicas na tabela apresentada em [91].

Agora, na equação (8.6) pode-se observar a contribuição da torção. Essa contribuição é completamente nova e não foi contemplada no *bound state* associado à TFWE para a teoria de Dirac relacionada aos 80 casos de termos que violam CPT/Lorentz[2] [54]. No entanto, embora a possibilidade de indicações de possíveis experiências atômicas [3, 101] esteja relacionada ao *bound state* (8.6), a magnitude do campo de torção é irrelevante quando comparada, por exemplo, com a magnitude do campo magnético. Por este motivo, uma proposta concisa sobre medidas experimentais do campo de torção não é direta.

Contudo, é possível imaginar o caso em que o módulo de $\boldsymbol{B}$ é suficientemente grande para compensar a fraqueza das interações. A possibilidade de medir essas quantidades de forma indireta (por exemplo, usando física atômica e molecular [106]) é contemplada se for considerada a situação em que um gás de elétrons está presente. Em princípio, é possível fazer uma previsão do movimento gerado por esses novos termos.

Agora, para o caso do Hamiltoniano derivado da tabela (2) é possível calcular o *bound state* também. Então, considerando o Hamiltoniano transformado obtido após a TFWE escrito na equação (7.17) e levando em conta o espinor de dois componentes

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \exp^{-imt}\ . \tag{8.7}$$

A partir deste ponto, pode-se escrever, após alguma álgebra, a equação de Dirac na forma de Schrödinger, $i\partial_t\psi = H\psi$. Com essas considerações, o Hamiltoniano para ϕ é escrito como

$$H = \frac{1}{2m}\Big\{(1+A)[\big(\delta_{ij} + B_{ij}\big)\bar{P}^i + C_j]^2 + D\Big\}\,, \tag{8.8}$$

[2] A razão é que, em [54], os critérios para executar a TFWE é uma relação de anticomutação entre o Hamiltoniano e $i\gamma^5\beta$.

onde

$$
\begin{aligned}
A &= -2c_{00} - 2id_{00} + 2g_{i00}\sigma^i \\
B_{ij} &= 4d_{0i}\sigma_j - 2c_{ij} - 4g_{0li}\epsilon^{jlm}\sigma_m - 4ic_{0i}\sigma_j + 2id_{ij} \\
&+ 2ig_{lmi}\epsilon^{lmj} - 2g_{ilj}\sigma^l + 2g_{i00}\sigma^i \,, \\
C_j &= 4mc_{0j} + 2md_{ij}\sigma^i - 2md_{00}\sigma_j - 2me_j + mg_{klj}\epsilon^{klm}\sigma_m - 2img_{j00} \\
&- 2mg_{i00}\epsilon^{ijl}\sigma_l - 2ime_0\sigma_j - 2md_{k0}\epsilon^{jkl}\sigma_l - img_{il0}\epsilon^{ilj} + 2a_j \\
&- 2b_0\sigma_j + 2H_{0k}\epsilon^{jkl}\sigma_l + 2ia_0\sigma_j - 2ib_j - 2i\epsilon^{klj}H_{kl} - 2H_{lj}\sigma^l \,, \\
D &= -2m^2c_{00} + 2m^2e_0 - 2m^2d_{j0}\sigma^j - m^2g_{ik0}\epsilon^{ikl}\sigma_l - 2ma_0 - 2mb_j\sigma^j \\
&- m\epsilon^{ijl}H_{ij}\sigma_l + \left[1 + 2c_{00} + 2id_{00} - 2g_{i00}\sigma^i\right]\frac{i\hbar e}{mc}\sigma_k B^k \,.
\end{aligned}
\tag{8.9}
$$

O *bound state* do Hamiltoniano (7.17) pode ser calculado levando em consideração o potencial de violação de Lorentz V, que corresponde ao termo D na última equação. A partir deste ponto, pode-se calcular o *bound state* da teoria

$$
\tilde{b}_j = b_j + \frac{1}{2}\epsilon^{lmj}H_{lm} + md_{j0} + \frac{1}{2}m\epsilon^{lmj}g_{lm0} - \left[1 + 2c_{00} + 2id_{00} - 2g_{i00}\sigma^i\right]\frac{i\hbar e}{2m^2c}B_j \,. \tag{8.10}
$$

Como esperado, este *bound state* é uma combinação específica de duas partes relacionadas aos coeficientes do SME. A primeira parte inclui os coeficientes b_j, H_{lm}, d_{j0} e g_{lm0}, e o limite é baseado no relógio atômico e outros experimentos não-relativísticos [107] que podem envolver um maser/magnetômetro (veja, por exemplo, *Tabela VII* na referência [3]). Na segunda parte, há a presença de um campo magnético, que pode ser um resultado notável e muito importante do ponto de vista experimental. Como se sabe, os campos externos na equação (8.10) são muito fracos. No entanto, o módulo de $\boldsymbol{B}$ pode ser suficientemente alto para compensar a fraqueza das interações c_{00}, d_{00} e g_{i00}. Em outras palavras, com um campo magnético forte o suficiente, pode-se ter indicações, em princípio, do tipo de movimento gerado pelo campo externo comentado acima. É uma maneira indireta de realizar medições de campos externos tão fracos.

9 CONCLUSÃO

Nesta tese, foram obtidos os seguintes resultados originais:

(**A**) A Transformação Foldy-Wouthuysen Exata para o campo espinorial de Dirac no fundo de termos que violam as simetrias de CPT e de Lorentz foi considerada. No trabalho [43], há um algoritmo que mostra como construir um Hamiltoniano geral descrevendo 80 novos casos de termos que violam as simetrias de CPT e de Lorentz na equação de Dirac que podem ser analisados com a TFWE. O foco foi precisamente o desenvolvimento da TFWE, considerando toda a situação apresentada no último trabalho mencionado, bem como o cálculo das equações de movimento. Nesta parte, a torção foi tratada como um caso particular das equações apresentadas aqui, bem como de cada um dos outros termos no Hamiltoniano completo. O objetivo foi obter o resultado mais geral que foi possível de ser escrito para realizar a análise física para os termos que violam CPT/Lorentz usando o método que acredita-se ser o mais completo para realizar esse tipo de estudo, ou seja, a TFWE. Também explorou-se a possibilidade de combinar tais equações para obter uma expressão para descrever a dinâmica da partícula. Tais resultados foram publicados em [54].

(**B**) A possibilidade de se utilizar a TFWE para o espinor de Dirac com diferentes termos que violam as simetrias de CPT e Lorentz também foi discutida. Neste trabalho, foi considerado o caso da ação combinada com a torção e campo magnético para o campo espinorial. O própósito principal foi obter uma forma explícita para a equação de movimento que mostrasse as possíveis interações entre os campos externos e o espinor em um Hamiltoniano que fosse independente em cada componente. Considerou-se que S_0 era constante e o único terno não nulo de S_μ, a fim de simplificar a álgebra, já que o ponto principal não era descrever o próprio campo de torção. Então, a TFWE foi realizada e foi apresentado um Hamiltoniano transformado que descreve um campo para uma partícula de spin-1/2 na presença de campos externos eletromagnéticos e de torção. Obteve-se assim, uma forma explícita para a equação de movimento, mostrando as possíveis interações entre os campos externos e o espinor. Tais resultados foram publicados em [52].

(**C**) Outro ponto trabalhado foi o papel da TFWE para situações que a teoria não admite um operador involução. Nestes casos, a técnica da transformação exata é utilizada para se obter uma análise qualitativa do resultado perturbativo. Foi focada a atenção na inconsistência que aparece quando a Transformação Foldy-Wouthuysen Semi-Exata para o campo de Dirac interagindo com o campo de torção é realizada. Para resolver este problema, apresentou-se um novo operador involução que possibilita a realização da transformação exata quando o campo de torção está presente. Esse operador possui uma estrutura, conhecida na literatura, composta pelo produto de um operador que atua no espaço das matrizes e outro que atua no espaço de funções. O método foi usado com o campo de torção, mas pode ser diretamente generalizado para outros termos. Deve ser enfatizado que o próprio método foi o principal resultado aqui, no sentido de que abre uma janela para a possibilidade de realizar a TFWE para alguns casos que até então, não eram contemplados pela literatura e excluídos de suas informações físicas. Estes resultados foram publicados em [53].

(**D**) O estudo de um operador involução mais geral que contempla todos os possíveis campos externos mencionados anteriormente foi desenvolvido. O primeiro resultado desse trabalho está escrito na forma da tabela (2), representando um Hamiltoniano com o conjunto completo de termos que violam CPT/Lorentz na equação de Dirac. Na tabela, os termos destacados em negrito não anticomutam com o operador involução usual (5.1). Estes novos termos apresentados na tabela (2) não cabiam no âmbito do operador involução habitual, porque não sabia se a natureza se opõe a este tipo de transformação exata ou era apenas um problema de inconsistência matemática. Outro resultado do trabalho é o operador involução apropriado, dado pela equação (7.3), de modo que a relação de anticomutação com o Hamiltoniano do problema seja alcançada. Na verdade, a equação (7.3) introduz a nova possibilidade de realizar a TFWE. A partir de agora, uma grande classe de Hamiltonianos pode admitir a transformação exata, já que o novo operador involução é utilizado. Deste modo, o algoritmo usual da TFWE foi aplicado, e a transformação exata foi realizada para esse contexto. Como era esperado, a abordagem da TFWE apresentou um Hamiltoniano transformado (7.10) com termos adicionais, quando comparado ao Hamiltoniano (7.17), no qual foi utilizado a TFW usual. Estes resultados foram publicados em [58].

(**E**) Breves considerações foram apresentadas a respeito do *bound state* relacionado ao campo de Dirac interagindo com os termos que violam as simetrias de CPT e de Lorentz. A perspectiva dos testes de violação do CPT/Lorentz tem vantagens consideráveis no contexto dos sistemas eletrodinâmicos quânticos. Foram citados alguns exemplos de experimentos envolvendo experiências de física atômica, como *Penning-Trap*, *Clock-Comparison*, *Pêndulo de Torção*, *Experiências com hidrogênio e anti-hidrogênio*, *Spin-Polarized Matter*, *Experimentos com Múon*, entre outros. Cada um dos experimentos mencionados apresenta um *bound state* muito específico e a magnitude de tais limites possibilita determinar qual tipo de experimentos devem ser realizados. Nesse sentido, é completamente relevante o cálculo do *bound state* das teorias que estão sendo analisadas. Estas considerações estão presentes nos trabalhos publicados em [52, 53, 54, 58].

REFERÊNCIAS

1 KOSTELECKÝ, V. A.; VARGAS, A. J. Lorentz and CPT tests with clock-comparison experiments. **Phys. Rev. D**, v. 98, p. 036003, 2018.

2 COLLADAY, D.; NOORDMANS, J. P.; POTTING, R. CPT and Lorentz violation in the electroweak sector. **J. Phys. Conf. Ser.**, v. 952, n. 1, p. 012021, 2018.

3 KOSTELECKÝ, V. A.; RUSSELL, N. Data tables for Lorentz and CPT violation. **Rev. Mod. Phys.**, v. 83, p. 11, 2011.

4 COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. CPT violation and the standard model. **Phys. Rev. D**, v. 55, p. 6760, 1997.

5 COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. Lorentz-violating extension of the standard model. **Phys. Rev. D**, v. 58, p. 116002, 1998.

6 KOSTELECKÝ, V. A. Recent Progress in Lorentz and CPT Violation. In: _____. **CPT and Lorentz Symmetry**. Bloomington, USA: World Scientific, 2017. p. 25.

7 DING, Y.; KOSTELECKÝ, V. A. Lorentz-violating spinor electrodynamics and Penning traps. **Phys. Rev. D**, v. 94, p. 056008, 2016.

8 KOSTELECKÝ, V. A.; POTTING, R. CPT, strings, and meson factories. **Phys. Rev. D**, v. 51, p. 3923, 1995.

9 COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. CPT violation and the standard model. **Phys. Rev. D**, v. 55, p. 6760, 1997.

10 KOSTELECKÝ, V. A. Gravity, Lorentz violation, and the standard model. **Phys. Rev. D**, v. 69, p. 105009, 2004.

11 GREENBERG, O. W. CPT Violation Implies Violation of Lorentz Invariance. **Phys. Rev. Lett.**, v. 89, p. 231602, 2002.

12 KOSTELECKÝ, V. A. CPT and Lorentz symmetry. In: **Proceedings: CPT'98**. Bloomington, USA: World Scientific, 1999.

13 KOSTELECKÝ, V. A. CPT and Lorentz symmetry. In: **Proceedings of the Second Meeting**. Bloomington, USA: World Scientific, 2002.

14 KOSTELECKÝ, V. A. CPT and Lorentz symmetry. In: **Proceedings of the Third Meeting**. Bloomington, USA: World Scientific, 2005.

15 KOSTELECKÝ, V. A. CPT and Lorentz symmetry. In: **Proceedings of the Fourth Meeting**. Bloomington, USA: World Scientific, 2008.

16 KOSTELECKÝ, V. A. CPT and Lorentz symmetry. In: **Proceedings of the Fifth Meeting**. Bloomington, USA: World Scientific, 2010.

17 KOSTELECKÝ, V. A. CPT and Lorentz symmetry. In: **Proceedings of the Sixth Meeting**. Bloomington, USA: World Scientific, 2014.

18 KOSTELECKÝ, V. A. CPT and Lorentz symmetry. In: **Proceedings of the Seventh Meeting**. Bloomington, USA: World Scientific, 2017.

19 KOSTELECKÝ, V. A. *CPT* and Lorentz symmetry. In: **Proceedings of the Eighth Meeting**. Bloomington, USA: World Scientific, 2020.

20 BLUHM, R. Overview of the Standard Model Extension: Implications and Phenomenology of Lorentz Violation. In: _____. **Special Relativity: Will it Survive the Next 101 Years?** Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2006. p. 191.

21 TASSON, J. D. What do we know about Lorentz invariance? **Rep. Prog. Phys.**, v. 77, p. 062901, 2014.

22 SABBATA, V. de; PRONIN, P. I.; SIVARAM, C. Neutron interferometry in gravitational field with torsion. **Int. J. Theor. Phys.**, v. 30, p. 1671, 1991.

23 BAGROV, V. G.; BUCHBINDER, I. L.; SHAPIRO, I. L. On the possible experimental manifestations of the torsion field at low energies. **Sov. Phys. J.**, v. 35, n. 5, p. 1, 1992.

24 RYDER, L. H.; SHAPIRO, I. L. On the interaction of massive spinor particles with external electromagnetic and torsion fields. **Phys. Lett. A**, v. 247, n. 1, p. 21, 1998.

25 LAMMERZAHL, C. Constraints on space-time torsion from Hughes-Drever experiments. **Phys. Lett. A**, v. 228, n. 4, p. 223, 1997.

26 SHAPIRO, I. L. Physical aspects of the space–time torsion. **Phys. Rep.**, v. 357, n. 2, p. 113, 2002.

27 ALEXANDRE, J. Non-Hermitian Lagrangian for Quasirelativistic Fermions. **Adv. High Energy Phys.**, v. 2014, p. 527967, 2014.

28 CASANA, R. et al. Generation of geometrical phases and persistent spin currents in 1-dimensional rings by Lorentz-violating terms. **Phys. Lett. B**, v. 746, p. 171, 2015.

29 ARAUJO, J. B.; CASANA, R.; FERREIRA, M. M. General *CPT*-even dimension-five nonminimal couplings between fermions and photons yielding EDM and MDM. **Physics Letters B**, v. 760, p. 302–308, 2016.

30 MA, K. Constrains of Charge-to-Mass Ratios on Noncommutative Phase Space. **Adv. High Energy Phys.**, v. 2017, p. 1945156, 2017.

31 OBUKHOV, Y. N.; SILENKO, A. J.; TERYAEV, O. V. Spin-torsion coupling and gravitational moments of Dirac fermions: Theory and experimental bounds. **Phys. Rev. D**, v. 90, p. 124068, 2014.

32 GONÇALVES, B.; OBUKHOV, Y. N.; SHAPIRO, I. L. Exact Foldy-Wouthuysen transformation for gravitational waves and magnetic field background. **Phys. Rev. D**, v. 75, p. 124023, 2007.

33 FOLDY, L. L.; WOUTHUYSEN, S. A. On the Dirac Theory of Spin 1/2 Particles and Its Non-Relativistic Limit. **Phys. Rev.**, v. 78, p. 29, 1950.

34 QUACH, J. Q. Foldy-Wouthuysen transformation of the generalized Dirac Hamiltonian in a gravitational-wave background. **Phys. Rev. D**, v. 92, p. 084047, 2015.

35 OLIVEIRA, S. W. P.; OYADOMARI, G. Y.; SHAPIRO, I. L. **Pauli equation and charged spin-1/2 particle in a weak gravitational field**. [S.l.]: arXiv, 2023. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2301.10848>. Acesso em: 16 mar. 2023.

36 IVANOV, A. N.; PITSCHMANN, M.; WELLENZOHN, M. Effective low-energy gravitational potential for slow fermions coupled to linearized massive gravity. **Phys. Rev. D**, v. 92, p. 105034, 2015.

37 OBUKHOV, Y. N.; SILENKO, A. J.; TERYAEV, O. V. General treatment of quantum and classical spinning particles in external fields. **Phys. Rev. D**, v. 96, p. 105005, 2017.

38 KOSTELECKÝ, V. A.; LANE, C. D. Nonrelativistic quantum Hamiltonian for Lorentz violation. **J. Math. Phys.**, v. 40, n. 12, p. 6245, 1999.

39 OBUKHOV, Y. N. Spin, Gravity, and Inertia. **Phys. Rev. Lett.**, v. 86, p. 192, 2001.

40 OBUKHOV, Y. N.; SILENKO, A. J.; TERYAEV, O. V. Spin dynamics in gravitational fields of rotating bodies and the equivalence principle. **Phys. Rev. D**, v. 80, p. 064044, 2009.

41 MURGUíA, G.; RAYA, A. Free form of the Foldy–Wouthuysen transformation in external electromagnetic fields. **J. Phys. A**, v. 43, n. 40, p. 402005, 2010.

42 NIKITIN, A. G. On exact Foldy-Wouthuysen transformation. **J. Phys. A**, v. 31, n. 14, p. 3297, 1998.

43 GONÇALVES, B.; OBUKHOV, Y. N.; SHAPIRO, I. L. Exact Foldy-Wouthuysen transformation for a Dirac spinor in torsion and other CPT and Lorentz violating backgrounds. **Phys. Rev. D**, v. 80, p. 125034, 2009.

44 BJORKEN, J. M.; DRELL, S. D. **Relativistic Quantum Mechanics**. New York: McGraw-Hill, 1964.

45 ERIKSEN, E.; KOLSRUD, M. Canonical transformations of Dirac's equation to even forms. Expansion in terms of the external fields. **Nuovo Cimento**, v. 18, p. 1, 1960.

46 CASE, K. M. Some Generalizations of the Foldy-Wouthuysen Transformation. **Phys. Rev.**, v. 95, p. 1323, 1954.

47 SILENKO, A. J. Comparative analysis of direct and "step-by-step" Foldy-Wouthuysen transformation methods. **Theor. Math. Phys.**, v. 176, p. 987, 2013.

48 SILENKO, A. J. General method of the relativistic Foldy-Wouthuysen transformation and proof of validity of the Foldy-Wouthuysen Hamiltonian. **Phys. Rev. A**, v. 91, p. 022103, 2015.

49 SILENKO, A. J. General properties of the Foldy-Wouthuysen transformation and applicability of the corrected original Foldy-Wouthuysen method. **Phys. Rev. A**, v. 93, p. 022108, 2016.

50 SILENKO, A. J. Exact form of the exponential Foldy-Wouthuysen transformation operator for an arbitrary-spin particle. **Phys. Rev. A**, v. 94, p. 032104, 2016.

51 GONÇALVES, B. Some aspects of the exact Foldy-Wouthuysen transformation for a Dirac fermion. **Int. J. Mod. Phys. A**, v. 24, n. 08n09, p. 1717, 2009.

52 JÚNIOR, M. M. D.; GONÇALVES, B.; RIBEIRO, B. J. The exact Foldy-Wouthuysen transformation for a Dirac Theory with the complete set of CPT/Lorentz Violating terms. **PoS**, FFP14, p. 112, 2016.

53 JÚNIOR, M. M. D. et al. The space–time torsion in the context of the exact Foldy–Wouthuysen transformation for a Dirac fermion. **Int. J. Mod. Phys. A**, v. 31, n. 13, p. 1650075, 2016.

54 JÚNIOR, M. M. D.; GONÇALVES, B.; RIBEIRO, B. J. Exact Foldy-Wouthuysen transformation for a Dirac theory with the complete set of CPT-Lorentz invariance violating terms. **Phys. Rev. D**, v. 90, p. 085026, 2014.

55 OLIVEIRA, C. G. de; TIOMNO, J. Representations of Dirac equation in general relativity. **Nuovo Cimento**, v. 24, p. 672, 1962.

56 SILENKO, A. J.; TERYAEV, O. V. Equivalence principle and experimental tests of gravitational spin effects. **Phys. Rev. D**, v. 76, p. 061101, 2007.

57 SILENKO, A. J.; TERYAEV, O. V. Semiclassical limit for Dirac particles interacting with a gravitational field. **Phys. Rev. D**, v. 71, p. 064016, 2005.

58 JÚNIOR, M. M. D.; GONÇALVES, B.; RIBEIRO, B. J. Exact Foldy-Wouthuysen transformation for a Dirac theory revisited. **Phys. Rev. D**, v. 99, p. 096015, 2019.

59 SCHWABL, F.; HILTON, R.; LAHEE, A. **Advanced Quantum Mechanics**. Alemanha: Springer Berlin Heidelberg, 2008.

60 SAKURAI, J. J. **Advanced Quantum Mechanics**. Rússia: Addison-Wesley Publishing Company, 1967.

61 SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. **Modern Quantum Mechanics**. Índia: Cambridge University Press, 2017.

62 GREINER, W.; BROMLEY, D. A. **Relativistic Quantum Mechanics. Wave Equations**. Alemanha: Springer Berlin Heidelberg, 2013.

63 SCHRÖDINGER, E. Quantisierung als Eigenwertproblem. **Annalen der Physik**, v. 384, n. 6, p. 489, 1926.

64 GORDON, W. Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen Theorie. **Zeitschrift für Physik**, v. 40, p. 117, 1926.

65 GORDON, W. Elektrodynamik und Wellenmechanik vom Standpunkt des Korrespondenzprinzips. **Zeitschrift für Physik A Hadrons and nuclei**, v. 41, p. 407, 1927.

66 DIRAC, P. A. M.; FOWLER, R. H. The quantum theory of the electron. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character**, v. 117, n. 778, p. 610, 1928.

67 DIRAC, P. A. M.; FOWLER, R. H. The quantum theory of the Electron. Part II. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character**, v. 118, n. 779, p. 351, 1928.

68 LANDAU, L. **The Classical Theory of Fields**. Reino Unido: Elsevier Science, 2013.

69 KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory. **Phys. Rev. D**, v. 39, p. 683, 1989.

70 KOSTELECKÝ, V. A.; POTTING, R. Analytical construction of a nonperturbative vacuum for the open bosonic string. **Phys. Rev. D**, v. 63, p. 046007, 2001.

71 KOSTELECKÝ, V. A.; LANE, C. D.; PICKERING, A. G. M. One-loop renormalization of Lorentz-violating electrodynamics. **Phys. Rev. D**, v. 65, p. 056006, 2002.

72 MATTINGLY, D. Modern Tests of Lorentz Invariance. **Liv. Rev. Rel.**, v. 8, p. 5, 2005.

73 KOSTELECKÝ, V. A. The Search for Relativity Violations. **SA Special Editions**, v. 15, p. 12, 2006.

74 BLUHM, R.; KOSTELECKÝ, V. A.; RUSSELL, N. CPT and Lorentz Tests in Hydrogen and Antihydrogen. **Phys. Rev. Lett.**, v. 82, p. 2254, 1999.

75 BLUHM, R.; KOSTELECKÝ, V. A.; LANE, C. D. CPT and Lorentz Tests with Muons. **Phys. Rev. Lett.**, v. 84, p. 1098, 2000.

76 BLUHM, R.; KOSTELECKÝ, V. A. Lorentz and CPT Tests with Spin-Polarized Solids. **Phys. Rev. Lett.**, v. 84, p. 1381, 2000.

77 MURAYAMA, H.; YANAGIDA, T. $LSND$, $SN1987A$, and CPT violation. **Phys. Lett. B**, v. 520, n. 3, p. 263, 2001.

78 BARENBOIM, G. et al. Neutrinos as the messengers of CPT violation. **J. High Energy Phys.**, 2002.

79 KOSTELECKÝ, V. A.; MEWES, M. Lorentz and CPT violation in the neutrino sector. **Phys. Rev. D**, v. 70, p. 031902, 2004.

80 KOSTELECKÝ, V. A. Gravity, Lorentz violation, and the standard model. **Phys. Rev. D**, v. 69, p. 105009, 2004.

81 BLUHM, R.; KOSTELECKÝ, V. A. Spontaneous Lorentz violation, Nambu-Goldstone modes, and gravity. **Phys. Rev. D**, v. 71, p. 065008, 2005.

82 BERTOLAMI, O. et al. CPT violation and baryogenesis. **Phys. Lett. B**, v. 395, n. 3, p. 178, 1997.

83 KOSTELECKÝ, V. A.; MEWES, M. Cosmological Constraints on Lorentz Violation in Electrodynamics. **Phys. Rev. Lett.**, v. 87, p. 251304, 2001.

84 JACKIW, R.; KOSTELECKÝ, V. A. Radiatively Induced Lorentz and CPT Violation in Electrodynamics. **Phys. Rev. Lett.**, v. 82, p. 3572, 1999.

85 COSTELLA, J. P.; MCKELLAR, B. H. J. The Foldy–Wouthuysen transformation. **Am. J. Phys.**, v. 63, n. 12, p. 1119, 1995.

86 SILENKO, A. J. Foldy–Wouthuysen transformation for relativistic particles in external fields. **J. Math. Phys.**, v. 44, n. 7, p. 2952, 2003.

87 SILENKO, A. J. Foldy-Wouthyusen transformation and semiclassical limit for relativistic particles in strong external fields. **Phys. Rev. A**, v. 77, p. 012116, 2008.

88 NEZNAMOV, V. P.; SILENKO, A. J. Foldy–Wouthuysen wave functions and conditions of transformation between Dirac and Foldy–Wouthuysen representations. **J. Math. Phys.**, v. 50, n. 12, p. 122302, 2009.

89 TRETYNYK, V. On Exact Foldy-Wouthuysen Transformation of Bozons in an Electromagnetic Field and Reduction of Kemmer-Duffin-Petiau Equation. In: **Proceedings: 3rd International Conference on Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics**. Kiev, Ukraine: Natl. Acad. of Sci. of Ukraine, 1999.

90 KOSTELECKÝ, V. A. The status of CPT. In: **Physics Beyond the Standard Model**. Santa Fe, New Mexico, USA: World Scientific, 1999.

91 KOSTELECKÝ, V. A.; LANE, C. D. Constraints on Lorentz violation from clock-comparison experiments. **Phys. Rev. D**, v. 60, p. 116010, 1999.

92 KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. Phenomenological gravitational constraints on strings and higher-dimensional theories. **Phys. Rev. Lett.**, v. 63, p. 224, 1989.

93 KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. Photon and graviton masses in string theories. **Phys. Rev. Lett.**, v. 66, p. 1811, 1991.

94 KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory. **Phys. Rev. D**, v. 39, p. 683, 1989.

95 KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. Gravitational phenomenology in higher-dimensional theories and strings. **Phys. Rev. D**, v. 40, p. 1886, 1989.

96 KOSTELECKÝ, V. A.; POTTING, R. CPT and strings. **Nuc. Phys. B**, v. 359, n. 2, p. 545–570, 1991.

97 KOSTELECKÝ, V. A.; POTTING, R. Expectation values, Lorentz invariance, and CPT in the open bosonic string. **Phys. Lett. B**, v. 381, n. 1, p. 89–96, 1996.

98 KOSTELECKÝ, V. A.; PERRY, M. J.; POTTING, R. Off-Shell Structure of the String Sigma Model. **Phys. Rev. Lett.**, v. 84, p. 4541, 2000.

99 BLUHM, R.; KOSTELECKÝ, V. A.; RUSSELL, N. CPT and Lorentz Tests in Hydrogen and Antihydrogen. **Phys. Rev. Lett.**, v. 82, p. 2254, 1999.

100 BLUHM, R.; KOSTELECKÝ, V. A. Lorentz and CPT tests with Spin-Polarized Solids. **Phys. Rev. Lett.**, v. 84, p. 1381, 2000.

101 KOSTELECKÝ, V. A.; TASSON, J. D. Matter-gravity couplings and Lorentz violation. **Phys. Rev. D**, v. 83, p. 016013, 2011.

102 BLUHM, R.; KOSTELECKÝ, V. A.; RUSSELL, N. Testing *CPT* with Anomalous Magnetic Moments. **Phys. Rev. Lett.**, v. 79, p. 1432, 1997.

103 BLUHM, R.; KOSTELECKÝ, V. A.; RUSSELL, N. *CPT* and Lorentz tests in Penning traps. **Phys. Rev. D**, v. 57, p. 3932, 1998.

104 BLUHM, R.; KOSTELECKÝ, V. A.; LANE, C. D. *CPT* and Lorentz Tests with Muons. **Phys. Rev. Lett.**, v. 84, p. 1098, 2000.

105 COLLADAY, D. Low energy tests of lorentz and cpt violation. **AIP Conf. Proc.**, v. 1560, n. 1, p. 137, 2013.

106 TINO, G. M.; VETRANO, F. Is it possible to detect gravitational waves with atom interferometers? **Class. Quantum Grav.**, v. 24, n. 9, p. 2167, 2007.

107 ALTSCHUL, B. Disentangling forms of Lorentz violation with complementary clock comparison experiments. **Phys. Rev. D**, v. 79, p. 061702, 2009.