

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Gustavo Ribeiro de Oliveira Roque

Expoentes de Lyapunov Sobre Campos Vetoriais de Classe  $C^0$  Lipschitz

Juiz de Fora

2023

Gustavo Ribeiro de Oliveira Roque

Expoentes de Lyapunov Sobre Campos Vetoriais de Classe  $C^0$  Lipschitz

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração:

Orientador: Profa. Dra. Laura Senos Lacerda Fernández

Coorientador: Titulação Nome e sobrenome

Juiz de Fora

2023

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Ribeiro de Oliveira Roque, Gustavo.

Expoentes de Lyapunov Sobre Campos Vetoriais de Classe  $C^0$  Lipschitz  
/ Gustavo Ribeiro de Oliveira Roque. – 2023.

76 f.

Orientador: Laura Senos Lacerda Fernández

Coorientador: Nome e sobrenome

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto  
de Ciências Exatas. Programa de Pós Graduação em Matemática, 2023.

1. Expoentes de Lyapunov. 2. Sistemas Dinâmicos. 3. Campos  
Vetoriais. I. Senos Lacerda Fernández, Laura, orient. II. Título.

Gustavo Ribeiro de Oliveira Roque

**Expoentes de Lyapunov sobre campos vetoriais de classe C0 Lipschitz**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria/Topologia

Aprovada em 23 de março de 2023.

BANCA EXAMINADORA

**Profª Drª Laura Senos Lacerda Fernandez** - Orientadora

Universidade Federal de Juiz de Fora

**Prof. Dr. Alexander Eduardo Arbieta Mendoza**

Universidade Federal do Rio de Janeiro

**Prof. Dr. Regis Castijos Soares Junior**

Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, 24/03/2023.



Documento assinado eletronicamente por **Regis Castijos Alves Soares Junior, Professor(a)**, em 24/03/2023, às 12:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Laura Senos Lacerda Fernandez, Professor(a)**, em 24/03/2023, às 16:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Alexander Eduardo Arbieta Mendoza, Usuário Externo**, em 28/03/2023, às 09:37, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Uffj ([www2.uffj.br/SEI](http://www2.uffj.br/SEI)) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **1201736** e o código CRC **883F83D4**.

Dedico este trabalho à minha mãe Jacqueline, que tanto fez por mim durante toda a vida.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos professores do Departamento de Matemática da UFJF por todo suporte e apoio, à minha família e aos amigos por estarem sempre ao meu lado, e à FAPEMIG pelo suporte econômico.

“Pense num dia qualquer, e o subtraia, e veja que, sem ele, sua vida teria um rumo inteiramente diferente. Faça uma pausa, você que lê estas palavras, e, por um momento, pense na imensa corrente de ferro ou de ouro, de espinhos ou flores, que talvez jamais o tivesse encadeado, não fosse a formação do primeiro elo de um dia memorável.” - Grandes Esperanças, Charles Dickens.

## RESUMO

Nesse trabalho apresentamos duas das ferramentas que servem para determinar o comportamento hiperbólico dos campos vetoriais diferenciáveis e não diferenciáveis que preservam elemento de volume definidos sobre variedades riemannianas de dimensão 3 (suaves compactas e conexas), os quais respectivamente chamaremos expoente de Lyapunov "clássico" e novo expoente de Lyapunov. Mostraremos algumas das semelhanças e diferenças que estes apresentam: a invariância do novo expoente de Lyapunov ao longo da órbita de quase todo ponto em  $M$  e a densidade do conjunto de campos diferenciáveis com expoente de Lyapunov zero no conjunto dos campos de classe  $C^0$  Lipschitz que preservam elemento de volume.



## ABSTRACT

In this work we will present two tools that are used to determine the hyperbolic behavior of differentiable and non differentiable vector fields that preserve volume element, defined over riemannian manifolds with dimension 3 (smooth, compact and connected), which we will denote, respectively, by classical and new Lyapunov exponents. We will show some of the similarities and differences they present: the invariance of the new exponent along the orbit of almost every point in  $M$  and the density of the set of differentiable vector fields with zero Lyapunov exponent in the set of the  $C^0$  Lipschitz vector fields that preserve volume element. Keywords: Keyword. Keyword.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

## LISTA DE TABELAS

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
Fil.	Filosofia
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
INMETRO	Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\forall$	Para todo
$\in$	Pertence

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução . . . . .</b>	<b>13</b>
1.1	Introdução Histórica . . . . .	13
1.2	Estrutura . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Preliminares . . . . .</b>	<b>17</b>
2.1	Variedades Diferenciáveis . . . . .	17
2.1.1	Variedades . . . . .	17
2.1.2	Variedades riemannianas . . . . .	24
2.1.3	Formas Diferenciais . . . . .	26
2.1.4	Integração em Variedades . . . . .	30
2.2	Campos Vetoriais Anosov . . . . .	32
2.3	Conceitos de Teoria Ergódica . . . . .	34
2.3.1	Teoria da Medida . . . . .	34
2.3.2	Teoria Ergódica . . . . .	38
2.4	Cociclos Lineares e Expoentes de Lyapunov . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Expoentes de Lyapunov em Campos Diferenciáveis . . . . .</b>	<b>55</b>
3.1	Introdução e Definições . . . . .	55
3.2	Estratégia Para a Demonstração do Teorema 3.1.1 . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Novo Expoente de Lyapunov . . . . .</b>	<b>59</b>
4.1	Definição e Resultados Preliminares . . . . .	59
4.2	Densidade dos Campos com Novo Expoente de Lyapunov Nulo em $\mathfrak{X}_\mu^{0,L}(M)$ . . . . .	63
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>75</b>

## 1 Introdução

### 1.1 Introdução Histórica

A teoria de estabilidade de sistemas dinâmicos passa pela contribuição de matemáticos renomados dos séculos XIX e XX, como Henri Poincaré e Aleksandr Lyapunov, que pesquisavam sobre o problema geral da estabilidade no movimento.

Henri Poincaré é considerado por muitos o fundador dos sistemas dinâmicos, com seus dois trabalhos clássicos sendo "New Methods of Celestial Mechanics" e "Lectures on Celestial Mechanics", que incluíam resultados importantes como o Teorema de Recorrência de Poincaré, que nos diz que sistemas dinâmicos munidos de uma medida invariante vão, após uma certa passagem de tempo, retornar a um estado muito próximo a seu estado inicial. Poincaré desenvolveu tais trabalhos a partir de seus estudos do famoso "Problema dos 3 Corpos", um problema em aberto desde a época de Isaac Newton (século XVII), que ainda no século XIX era considerado extremamente relevante e desafiador. De fato, em 1887, o Rei Oscar II da Suécia anunciou que daria um prêmio para quem resolvesse o problema, ou ao menos fizesse avanços significativos. Henri Poincaré acabou ganhando o prêmio, mesmo não tendo dado a solução completa de tal problema.

Aleksandr Lyapunov por sua vez desenvolveu métodos de aproximação que permitem definir a estabilidade de conjuntos de equações diferenciais ordinárias, criando assim a teoria moderna de estabilidade de sistemas dinâmicos. Um de seus resultados mais conhecidos e marcantes é o Teorema de Lyapunov, que serve como método para determinar a estabilidade dos pontos próximos a um ponto de equilíbrio. Atualmente, uma das ferramentas mais importantes para se determinar o comportamento assintótico de sistemas dinâmicos é o Expoente de Lyapunov, que é um número que nos fornece a taxa de separação entre duas trajetórias infinitesimalmente próximas. A partir dos expoentes de Lyapunov de um sistema dinâmico, podemos determinar o caráter divergente, dissipativo ou conservativo do sistema.

As informações apresentadas até aqui foram retiradas de [16].

Um exemplo de uso dos expoentes de Lyapunov está no livro de Barreira e Pesin [3], onde o expoente de Lyapunov é introduzido com o objetivo de caracterizar a estabilidade da solução trivial de uma equação diferencial linear  $\dot{x} = A(t)x$ , onde  $x \in \mathbb{C}^n$  e  $A(t)$  é uma matriz de dimensão  $n$  limitada com entradas complexas que dependem continuamente de  $t$ . Além disso, neste trabalho é exposta a teoria dos sistemas dinâmicos com expoentes de Lyapunov não nulos.

Devido a essa importância dos expoentes de Lyapunov no estudo de estabilidade de sistemas dinâmicos, é interessante buscarmos resultados em espaços de funções sobre os quais existem conjuntos de aplicações com o mesmo comportamento dos expoentes de

Lyapunov.

Nesse sentido, J. Bochi demonstrou em 2002 [12] o chamado Teorema de Bochi-Mañé, enunciado por Ricardo Mañé, que afirma que no espaço dos difeomorfismos definidos em uma variedade  $M$  que preservam densidade de área, denotado por  $\text{Diff}_\mu(M)$ , existe um subconjunto residual  $G_\delta$  (isto é, uma interseção de abertos densos) do conjunto dos difeomorfismos definidos em  $M$  que preservam densidade de área de classe  $C^1$ , denotado  $\text{Diff}_\mu^1(M)$ , no qual os elementos ou são difeomorfismos de Anosov ou possuem expoente de Lyapunov clássico igual a zero. Além disso, Bochi mostra que para qualquer sistema dinâmico discreto composto de um homeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  e  $\mu$  uma medida ergódica para  $f$ , existe um subconjunto residual na topologia  $C^0$  dos cociclos lineares  $\mathcal{A} : M \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ , onde cada elemento ou é uniformemente hiperbólico, ou tem expoente de Lyapunov nulo para quase todo ponto, usando a semicontinuidade superior da seguinte aplicação:

$$\Lambda : \text{Diff}_\mu(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \int_M \chi^+(f, x) d\mu.$$

Inspirado por tais resultados, principalmente pelo Teorema de Bochi-Mañé, em 2005, M. Bessa explorou o caso dos sistemas dinâmicos em tempo contínuo, fazendo as adaptações naturais e desenvolvendo técnicas de perturbação de campos vetoriais [6]. Nesse trabalho, os principais resultados são:

**Teorema 1:** No espaço dos campos vetoriais de classe  $C^1$  definidos em uma variedade compacta tridimensional  $M$  que preservam volume e que não possuem singularidades, denotado por  $\mathfrak{X}_\mu^1(M)^*$ , existe um subconjunto residual  $\mathcal{R}$ , no qual os elementos ou são campos vetoriais de Anosov ou possuem expoente de Lyapunov clássico igual a zero.

**Lema 2.10:** A função entropia, definido como a integração sobre um conjunto invariante pelo fluxo do expoente de Lyapunov superior do campo vetorial, é semicontínua superior.

Note que o Teorema 1 acima é um análogo do Teorema de Bochi-Mañé no caso de tempo contínuo, e o Lema 2.10 é análogo à outro resultado que havia sido provado por J. Bochi.

Por outro lado, o expoente de Lyapunov clássico é definido para aplicações diferenciáveis, pois seu cálculo depende da transformação derivada. Sendo assim, para homeomorfismos a função  $\chi^+$  não está bem definida.



Para contornar esse problema, M. Bessa e C. Silva em 2010 definiram a noção de novo expoente de Lyapunov, sendo uma definição que não depende da transformação derivada, e portanto está bem definida para homeomorfismos [10]. Entre os resultados provados, estão os seguintes:

- Caso a aplicação seja diferenciável, o novo expoente de Lyapunov coincide com o clássico.
- Assumindo que algumas funções são integráveis, o novo expoente de Lyapunov permanece invariante pela órbita de quase todo ponto em uma superfície  $M$ .
- Existe um subconjunto denso do conjunto de homeomorfismos que preservam área definidos em uma superfície compacta, sem bordo e conexa, no qual todo elemento tem expoente de Lyapunov igual a zero, para Lebesgue quase todo ponto.
- A função que associa um homeomorfismos que preserva densidade de área munido da topologia  $C^0$  à integral do seu novo expoente de Lyapunov superior em toda a superfície não é semicontínua superior. Note que esse resultado difere do caso em que a função associada é um difeomorfismo.

Nossa inspiração para este trabalho vêm dessas fontes, de onde visamos adaptar os resultados obtidos por M. Bessa e C. Silva em 2010 para o caso de sistemas dinâmicos em tempo contínuo. Ou seja, temos como objetivo definirmos o que seriam os novos expoentes de Lyapunov para campos vetoriais não diferenciáveis e obtermos resultados similares aos comentados, considerando campos vetoriais de classe  $C^0$  Lipschitz definidos em uma variedade tridimensional compacta, conexa e sem bordo.

## 1.2 Estrutura

Este trabalho está organizado da seguinte maneira:

**Capítulo 2:** Daremos uma visão geral das ferramentas e resultados necessários para seguirmos em frente com o trabalho. Entre os tópicos mais relevantes, definiremos variedades diferenciáveis e campos vetoriais, além de trabalharmos com formas diferenciais a fim de definirmos forma de volume em uma variedade. Em seguida, passaremos por alguns dos resultados mais relevantes de Teoria da Medida e Teoria Ergódica. Terminamos esse capítulo definindo cociclos lineares e expoentes de Lyapunov para tais objetos.

**Capítulo 3:** Aqui, nos aprofundamos no estudo de expoentes de Lyapunov para campos vetoriais, apresentando alguns dos resultados mais importantes, como por exemplo o Teorema de Oseledets, que nos garante a existência de tais expoentes, e em seguida

elaboramos as demonstrações do Teorema 1 e Lema 2.10 comentados na seção anterior, devido à M. Bessa.

**Capítulo 4:** No capítulo final, definimos o novo expoente de Lyapunov para sistemas dinâmicos em tempo contínuo e buscamos demonstrar resultados análogos aos obtidos por M. Bessa e C. Silva em 2010, como comentado acima. Para isso, devemos adaptar alguns argumentos e dependemos fortemente de um Lema de Colagem para campos vetoriais de classe  $C^0$ .

## 2 Preliminares

### 2.1 Variedades Diferenciáveis

#### 2.1.1 Variedades

**Definição 2.1.1.** *Seja  $M$  um espaço topológico.  $M$  é dita uma **variedade topológica de dimensão  $n$**  quando, para todo  $p \in M$ , existem abertos  $U \subseteq M$  e  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  e um homeomorfismo  $\phi : U \rightarrow V$ .*

*Quando um espaço topológico satisfaz essa condição, dizemos que ele é **localmente euclidiano**. O aberto  $U$  é chamado um aberto euclidiano e o homeomorfismo  $\phi$  de **carta local** ou **sistema de coordenadas**.*

• **Observação:** A partir daqui, sempre que falarmos de uma variedade topológica, iremos assumir que a topologia de  $M$  é Hausdorff e possui base enumerável.

Uma carta local  $\phi : U \rightarrow V$  define  $n$  funções  $x^j : U \rightarrow \mathbb{R}$ , onde

$$\phi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p)) \in \mathbb{R}^n,$$

chamadas coordenadas locais em  $U$ .

**Exemplo 2.1.2.** 1. Qualquer conjunto  $M$  tem uma estrutura de variedade topológica. Com efeito, considere em  $M$  a topologia discreta. Para todo  $p \in M$ , o conjunto unitário  $\{p\} \subseteq M$  é aberto, e a aplicação

$$\begin{aligned} \phi_p : \{p\} &\rightarrow \{0\} \\ p &\mapsto 0 \end{aligned}$$

é um homeomorfismo. Então,  $M$  é uma variedade topológica de dimensão zero.

2. Sejam  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  aberto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação contínua. Considere o gráfico de  $f$ :

$$\text{gr}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; x \in U\}.$$

Sejam  $\pi_1 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  a projeção na primeira coordenada e  $\phi : \text{gr}(f) \rightarrow U$  a restrição de  $\pi_1$  à  $\text{gr}(f)$ , isto é,  $\phi = \pi_1|_{\text{gr}(f)}$ . Temos que  $\phi$  assim definido é um homeomorfismo. Com efeito,  $\phi$  é a restrição de uma aplicação contínua e aberta, então  $\phi$  é contínua e aberta. Note que  $\pi_1$  não é injetora, pois ao tomarmos  $(a, b), (a, c) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  com  $b \neq c$ ,  $\pi_1(a, b) = a = \pi_1(a, c)$ . Porém, ao restringirmos a projeção ao gráfico de  $f$ , obtemos que  $\phi$  é injetora, e portanto, é um homeomorfismo. Logo, mostramos que  $\text{gr}(f)$  é uma variedade topológica de dimensão  $n$ .

Denotaremos as cartas locais  $\phi : U \rightarrow \phi(U)$  como um par  $(U, \phi)$ .  $M$  no que se segue é uma variedade topológica de dimensão  $n$ .

**Definição 2.1.3.** *Sejam  $(U, \phi)$  e  $(V, \psi)$  duas cartas locais em  $M$  tal que  $U \cap V \neq \emptyset$ . Assim,  $\phi(U \cap V)$  e  $\psi(U \cap V)$  são abertos, não vazios em  $\mathbb{R}^n$  e a aplicação*

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

é um homeomorfismo denotado **mudança de coordenadas de  $\phi$  para  $\psi$** .

Um **atlas** em  $M$  é uma família de cartas locais  $\mathcal{A} = (U_i, \phi_i)_{i \in I}$  tal que  $(U_i)_{i \in I}$  forma uma cobertura de  $M$ .

Agora, iremos construir o conceito de variedade diferenciável. Para tal, usaremos o fato de uma variedade topológica ser localmente euclidiana, o que nos permite usar o conceito de diferenciabilidade em  $\mathbb{R}^n$ . Lembremos que uma aplicação  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dita um difeomorfismo quando ela é diferenciável, inversível, e sua inversa é diferenciável.

**Definição 2.1.4.** *Seja  $\mathcal{A}$  um atlas em  $M$ . Duas cartas locais  $(U, \phi)$  e  $(V, \psi)$  são ditas **compatíveis de classe  $C^r$**  (ou  **$C^r$ -compatíveis**) quando  $U \cap V = \emptyset$  ou quando  $U \cap V \neq \emptyset$  e a mudança de coordenadas  $\psi \circ \phi^{-1}$  é um difeomorfismo de classe  $C^r$ .  $\mathcal{A}$  é um **atlas de classe  $C^r$**  quando as cartas de  $\mathcal{A}$  são duas a duas  $C^r$ -compatíveis.*

Denotemos  $\mathfrak{A}^r(M)$  o conjunto de todos os atlas de classe  $C^r$  na variedade  $M$ , munido da relação de ordem parcial dada pela inclusão de conjuntos.

**Definição 2.1.5.** *Um atlas  $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}^r(M)$  é dito **maximal** quando para todo  $\mathcal{B} \in \mathfrak{A}^r(M)$  tal que  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ , temos  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ .*

Uma **estrutura diferenciável de classe  $C^r$**  em  $M$  é um elemento maximal de  $\mathfrak{A}^r(M)$ .

Uma **variedade diferenciável de classe  $C^r$**  é um par  $(M, \mathcal{D})$  onde  $M$  é uma variedade topológica e  $\mathcal{D}$  é uma estrutura diferenciável de classe  $C^r$  em  $M$ .

**Exemplo 2.1.6.** 1. Seja  $M$  uma variedade topológica de dimensão zero (como visto no exemplo 2.1.2). Dado  $p \in M$ , a aplicação

$$\begin{aligned} \phi_p : \{p\} &\rightarrow \{0\} \\ p &\mapsto 0, \end{aligned}$$

é uma carta local em  $M$ , e a família  $\mathcal{A} = \{(\{p\}, \phi_p); p \in M\}$  é um atlas de classe  $C^\infty$  em  $M$ , que determina uma estrutura diferenciável.

Isto mostra que todo conjunto tem estrutura de variedade diferenciável de classe  $C^\infty$  e dimensão zero.

2. Seja  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  aberto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação de classe  $C^r$ . Vimos no exemplo 2.1.2 que o  $\text{gr}(f)$  é uma variedade topológica de dimensão  $n$ . Novamente tomando  $\phi = \pi_1|_{\text{gr}(f)}$ , segue que  $\{(\text{gr}(f), \phi)\}$  é um atlas de classe  $C^r$  em  $\text{gr}(f)$ .

Portanto,  $\mathcal{A}$  determina uma estrutura diferenciável em  $\text{gr}(f)$ . Isto prova que o gráfico desta aplicação é uma variedade diferenciável de classe  $C^r$  e dimensão  $n$ .

**Definição 2.1.7.** *Uma variedade  $M$  é dita **compacta** quando ela é compacta como um espaço topológico, ou seja, quando toda cobertura aberta de  $M$  admite subcobertura finita.*

Da definição acima, podemos fazer a seguinte caracterização de variedades compactas:

**Proposição 2.1.8.** *Toda variedade compacta admite um atlas finito.*

**Demonstração.** Sejam  $M$  uma variedade compacta e  $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) : i \in I\}$  um atlas em  $M$ .  $(U_i)_{i \in I}$  é uma cobertura de  $M$ . Por  $M$  ser compacta, admite uma subcobertura finita  $(U_j)_{j=1}^n$ . Assim, a família

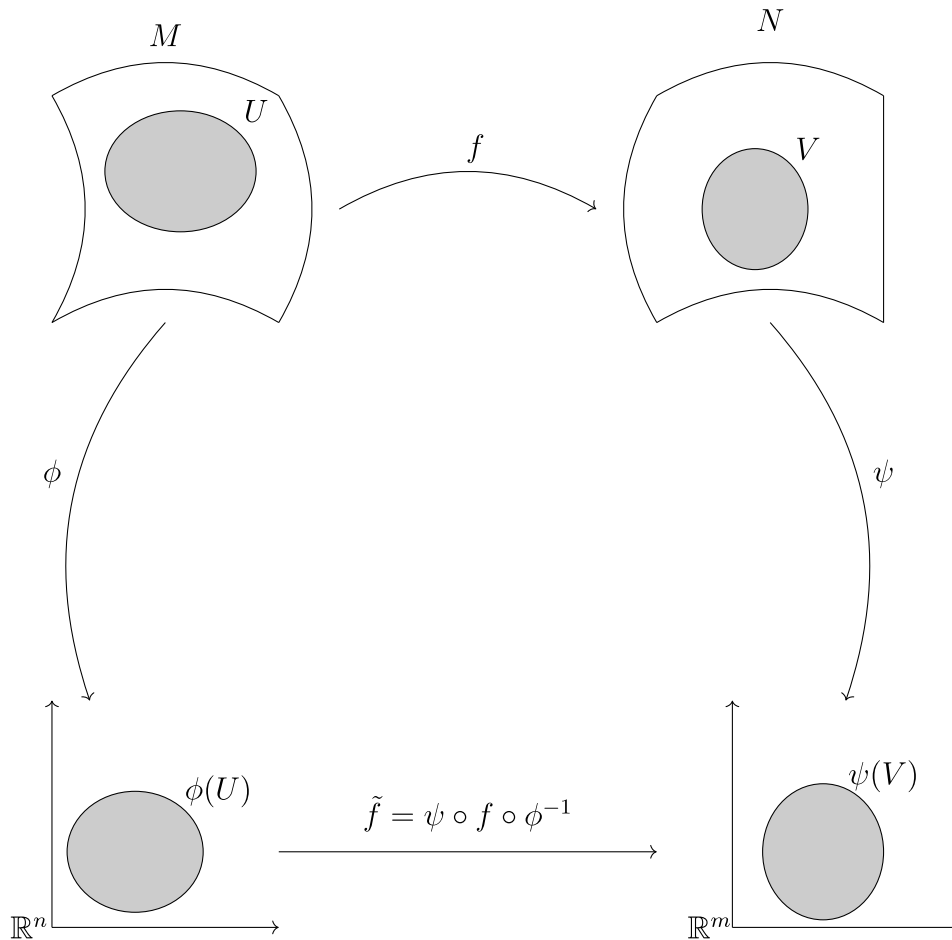
$$\{(U_j, \phi_j) : j = 1, \dots, n\}$$

forma um atlas finito em  $M$ . □

Temos agora como objetivo definir aplicações diferenciáveis entre variedades. Note que, como as variedades têm a propriedade de serem localmente euclidianas, podemos relacionar o conceito de diferenciabilidade nesse contexto ao de diferenciabilidade entre abertos em espaços euclidianos, ou seja, um conceito que já conhecemos bem. Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis de classe  $C^r$  e dimensão  $m$  e  $n$ , respectivamente, e tome uma aplicação  $f : M \rightarrow N$ . Vamos construir a partir de  $f$  uma aplicação entre abertos de  $R^m$  e  $R^n$ . Considere  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  atlas em  $M$  e  $N$ , respectivamente. Dizemos que  $f : M \rightarrow N$  tem **representação local em**  $p \in M$  quando existem cartas locais  $(U, \phi) \in \mathcal{A}$  e  $(V, \psi) \in \mathcal{B}$  tais que  $p \in U$  e  $f(U) \subseteq V$ . A aplicação

$$\tilde{f} : \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \psi(V)$$

é chamada **representação local de  $f$  nas cartas  $\phi$  e  $\psi$** . Este conceito é representado pelo seguinte diagrama:



A partir desse conceito, podemos definir aplicação diferenciável entre variedades.

**Definição 2.1.9.** Dizemos que  $f : M \rightarrow N$  é **diferenciável em**  $p \in M$  quando existe uma representação local  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  de  $f$  diferenciável em  $\phi(p)$ . Se  $f$  é diferenciável em todo  $p \in M$ , dizemos que  $f$  é **diferenciável**.  $f$  é dita de **classe**  $C^k$ , com  $k \leq r$ , quando para todo  $p \in M$  existe uma representação local de classe  $C^k$ .

Dada  $M$  uma variedade diferenciável, dizemos que  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  com  $\gamma(0) = p$  é uma **curva diferenciável** em  $M$  se, e somente se, dada uma carta local contendo  $p \in M$   $(U, \phi)$ , temos que  $\phi \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma aplicação diferenciável no ponto 0.

Duas curvas diferenciáveis  $\gamma_1, \gamma_2$  são ditas **equivalentes** quando  $(\phi \circ \gamma_1)'(0) = (\phi \circ \gamma_2)'(0)$  para toda carta local  $(U, \phi)$  contendo  $p$ . A relação  $\sim$  definida por

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \text{ se, e somente se, } \gamma_1 \text{ e } \gamma_2 \text{ são equivalentes}$$

é uma relação de equivalência no conjunto das curvas em  $M$  passando pelo ponto  $p$  em  $t = 0$ .

Assim, denotamos por  $[\gamma]$  a classe de equivalência de uma curva  $\gamma$  pela relação  $\sim$ , isto é,

$$[\gamma] := \{\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \mid \beta \sim \gamma\}.$$

O **vetor tangente de uma curva**  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  com  $\gamma(0) = p$  é, por definição, a classe de equivalência de  $\gamma$ , ou seja,  $[\gamma]$ .

**Definição 2.1.10.** O **espaço tangente a  $M$  em  $p \in M$**  é o conjunto de todos os vetores tangentes de curvas  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  tal que  $\gamma(0) = p$ , e é denotado  $T_p M$ . Isto é,

$$T_p M := \{[\gamma] \mid \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M, \gamma(0) = p\}.$$

Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis de dimensão  $m$  e  $n$ , respectivamente. Dada uma aplicação diferenciável  $f : M \rightarrow N$ ,  $p \in M$  e cartas locais  $(U, \phi)$  e  $(V, \psi)$  de  $p$  e  $f(p)$  respectivamente, com  $f(U) \subseteq V$ , a **derivada** de  $f$  no ponto  $p$  é a aplicação linear

$$\begin{aligned} Df_p : T_p M &\rightarrow T_{f(p)} N \\ [\gamma] &\mapsto [f \circ \gamma]. \end{aligned}$$

As aplicações  $D\phi_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $D\psi_{f(p)} : T_{f(p)} N \rightarrow \mathbb{R}^n$  são isomorfismos, e podemos escrever

$$Df_p = (D\psi_{f(p)}) \circ D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})_{\phi(p)} \circ D\phi_p.$$

**Teorema 2.1.11.** Se  $f : M \rightarrow N$  e  $g : N \rightarrow P$  são diferenciáveis em  $p$  e  $f(p)$  respectivamente, então  $g \circ f$  é diferenciável em  $p$ , e

$$D(g \circ f) = Dg_{f(p)} \circ Df_p.$$

**Demonstração.** Sejam  $(U, \phi)$ ,  $(V, \psi)$  e  $(W, \alpha)$  cartas locais em torno de  $p$ ,  $f(p)$  e  $g(f(p))$  respectivamente, e de modo que  $f(U) \subseteq V$  e  $g(V) \subseteq W$ . Assim, como  $f$  e  $g$  são diferenciáveis em  $p$  e  $f(p)$  respectivamente, então segue que as representações locais

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \psi(V) \\ \tilde{g} &= \alpha \circ g \circ \psi^{-1} : \psi(V) \rightarrow \alpha(W) \end{aligned}$$

são diferenciáveis em  $\phi(p)$  e  $\psi(\phi(p))$ , respectivamente.

Daí, a composta

$$\tilde{g} \circ \tilde{f} = \alpha \circ (g \circ f) \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \alpha(W)$$

é diferenciável em  $\phi(p)$ .

Por definição,  $g \circ f : M \rightarrow P$  é uma aplicação diferenciável em  $p \in M$ . Resta mostrar que vale a regra da cadeia. Para cada  $[\gamma] \in T_p M$ , temos

$$\begin{aligned} D(g \circ f)_p([\gamma]) &= [(g \circ f) \circ \gamma] = [g \circ (f \circ \gamma)] \\ &= Dg_{f(p)}([f \circ \gamma]) = Dg_{f(p)}(Df_p([\gamma])) \\ &= Dg_{f(p)} \circ Df_p([\gamma]). \end{aligned}$$

Logo,  $D(g \circ f) = Dg_{f(p)} \circ Df_p$ . □

**Definição 2.1.12.** *Seja  $M$  uma variedade topológica e considere duas cartas  $(U, \phi)$  e  $(V, \psi)$  de  $M$ . Dizemos que as cartas são **coerentes** quando  $U \cap V = \emptyset$  ou quando  $U \cap V \neq \emptyset$  e  $\det J(\psi \circ \phi^{-1}(\phi(p))) > 0$  para todo  $p \in U \cap V$ .*

*Um atlas de  $M$  é **coerente** quando as suas cartas são duas a duas coerentes.*

*A variedade  $M$  é dita **orientável** quando existe um atlas coerente em  $M$ .*

Se  $\mathcal{A}$  é um atlas coerente em  $M$ , então existe uma única estrutura diferenciável coerente  $\mathcal{O}$  em  $M$  tal que  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{O}$ , chamada **orientação** de  $M$ . Neste caso, dizemos que  $M$  está **orientada**.

**Definição 2.1.13.** *Seja  $M$  uma variedade de classe  $C^r$ . O **fibrado tangente de  $M$**  é o espaço  $TM$  definido como a união disjunta dos espaços tangentes a  $M$ , isto é,*

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M = \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_p M\}.$$

Denotaremos por  $\pi : TM \rightarrow M$  a aplicação sobrejetora  $\pi(p, v) = p$ , denominada **projeção de  $TM$  sobre  $M$** . Para cada  $p \in M$ , a aplicação dada por

$$\sigma : T_p M \rightarrow TM, v \mapsto (p, v)$$

é injetora. Por meio desta aplicação, cada vetor  $v \in T_p M$  é identificado com o par  $(p, v)$ . Assim, podemos usar a notação  $v_p$  para simbolizar o vetor  $v \in T_p M$  tal que  $\sigma(v) = (p, v)$ .

**Definição 2.1.14.** *Um **campo vetorial em  $M$**  é uma aplicação*

$$\begin{aligned} X : M &\rightarrow TM \\ p &\rightarrow (p, v_p). \end{aligned}$$



Note que  $\pi \circ X = id_M$ , donde dizemos que  $X$  é uma **seção** do fibrado tangente  $TM$ .

Pela identificação de  $v_p$  com  $p$  por meio da aplicação injetora  $\sigma$ , podemos considerar a aplicação

$$\begin{aligned} \sigma^{-1} \circ X : M &\rightarrow T_p M \\ p &\mapsto v_p. \end{aligned}$$

Quando for conveniente, iremos cometer um abuso de notação, chamando  $X = \sigma^{-1} \circ X$ , donde segue que iremos considerar  $X(p) = v_p$ .

Seja  $X$  um campo vetorial em  $M$ . Dada uma carta local  $(U, \phi)$  com  $p \in U$  e onde  $\phi = (x_1, \dots, x_n)$ , o conjunto  $\{\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_p\}$  forma uma base para  $T_p M$ . Daí, segue que existem funções  $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$X|_U = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (*)$$

**Proposição 2.1.15.** *Seja  $X$  um campo vetorial em  $M$ .  $X$  é de classe  $C^r$  se, e somente se, para toda carta local  $(U, \phi)$  de  $M$ , as funções  $a_i$  definidas em  $(*)$  são de classe  $C^r$ .*

**Demonstração.** [15, Proposição 1.6.4]. □

**Definição 2.1.16.** *Um **fluxo** é uma família  $(X^t)_{t \in \mathbb{R}}$  de difeomorfismos  $X^t : M \rightarrow M$  de classe  $C^r$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  satisfazendo:*

1.  $X^0 = id : M \rightarrow M$
2.  $X^{t+s} = X^t \circ X^s, \forall t, s \in \mathbb{R}$ .

*Dizemos que o fluxo  $(X^t)_{t \in \mathbb{R}}$  é gerado pelo campo vetorial  $X$  quando*

$$\frac{d}{dt} X^t(q)|_{t=t_0} = X(X^{t_0}(q))$$

*para todo  $q \in M$  e todo  $t_0 \in \mathbb{R}$ .*

Agora, vamos fazer uma definição (2.1.18) que será útil na próxima seção, quando discutiremos sobre Variedades riemannianas.

**Definição 2.1.17.** *Sejam  $M$  uma variedade topológica,  $E$  um espaço normado e  $f : M \rightarrow E$  uma aplicação. O **suporte de  $f$**  é o conjunto  $supp(f)$ , definido como*

$$supp(f) = \overline{\{p \in M | f(p) \neq 0\}}$$

**Definição 2.1.18.** Uma *partição da unidade de  $M$*  é uma família  $\xi = (\xi_i)_{i \in I}$  de funções  $\xi_i \in C^\infty(M)$ ,  $i \in I$ , tal que:

1.  $0 \leq \xi_i(p) \leq 1$ ,  $\forall p \in M$ .
2. A família dos suportes  $(\text{supp}(\xi_i))_{i \in I}$  é localmente finita em  $M$ .
3.  $\sum_{i \in I} \xi_i(p) = 1$ ,  $\forall p \in M$ .

Seja  $\mathcal{C}$  uma cobertura de  $M$ . Dizemos que uma partição da unidade  $(\xi_i)_{i \in I}$  está **subordinada à cobertura  $\mathcal{C}$**  quando  $(\text{supp}(\xi_i))_{i \in I}$  é um refinamento de  $\mathcal{C}$ .

Denotamos por  $\mathfrak{X}^r(M)$  o conjunto dos campos vetoriais diferenciáveis na variedade  $M$  de classe  $C^r$ , com  $1 \leq r \leq \infty$ . O conjunto dos campos vetoriais contínuos em  $M$  é denotado por  $\mathfrak{X}^0(M)$ . O conjunto dos campos vetoriais de Lipschitz são denotados por  $\mathfrak{X}^L(M)$ , e o conjunto dos campos vetoriais contínuos de Lipschitz em  $M$  é denotado por  $\mathfrak{X}^{0,L}(M)$ . Caso qualquer uma dessas notações venha acompanhada do subscrito  $\mu$ , por exemplo,  $\mathfrak{X}_\mu^{0,L}(M)$ , isso significa que os campos vetoriais desses conjuntos também preservam a forma de volume  $\mu$ .

Para o caso de difeomorfismos em  $M$ ,  $\text{Diff}^r(M)$  denota o conjunto dos difeomorfismos de classe  $C^r$  em  $M$ , com  $1 \leq r \leq \infty$ , enquanto  $\text{Hom}(M)$  denota o conjunto dos homeomorfismos em  $M$ .

### 2.1.2 Variedades riemannianas

Em 1827, o brilhante matemático Carl Friedrich Gauss provou seu *Theorema Egregium* (do latim, Teorema Notável), o qual podemos enunciar da seguinte forma

**Teorema 2.1.19.** *A curvatura Gaussiana de uma superfície em  $\mathbb{R}^3$  é invariante por isometrias locais.*

**Demonstração.** [14, pág. 280] □

Heuristicamente, o Teorema nos diz que a curvatura de uma superfície pode ser totalmente determinada por meio de medições de distâncias ao longo de caminhos sobre a superfície. Ou seja, a curvatura é uma propriedade intrínseca da superfície, não dependendo de como a superfície está mergulhada em um espaço tridimensional.

Em 1854, Bernhard Riemann introduziu o conceito que veio a ser conhecido como Variedade riemanniana, estendendo a teoria de Gauss para dimensões maiores de modo que nos permita definir o conceito de curvaturas em variedades (antes um conceito extremamente vago e com resultados focando, principalmente, em considerações locais), novamente de maneira que a curvatura seja intrínseca à variedade. Para fazermos tal construção, precisamos primeiro definir uma métrica riemanniana.

Seja  $M$  uma variedade  $C^\infty$ . Para cada  $p \in M$ , o espaço tangente  $T_pM$  é um espaço vetorial e, portanto, admite um produto interno. Dado  $p \in M$ , considere  $g_p$  um produto interno fixado em  $M$ , isto é,

$$g_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que  $g_p$  é uma forma bilinear, simétrica e positiva definida, ou seja,

1.  $g_p$  é linear nas duas coordenadas;
2.  $g_p(u, v) = g_p(v, u), \forall u, v \in T_pM$ ;
3.  $g_p(u, v) \geq 0, \forall u, v \in T_pM$ .

Com isso feito, podemos finalmente definir métrica riemanniana:

**Definição 2.1.20.** Uma **métrica riemanniana** na variedade  $M$  é uma aplicação  $g$  de classe  $C^\infty$  tal que

$$p \in M \xrightarrow{g} g_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R},$$

ou seja, a cada  $p \in M$  a aplicação  $g$  associa um produto interno  $g_p$  em  $T_pM$ .

**Definição 2.1.21.** Uma **variedade riemanniana** é um par  $(M, g)$  onde  $M$  é uma variedade e  $g$  uma métrica riemanniana em  $M$ .

**Observação:** Note que a partir do produto interno  $g_p$ , podemos definir uma norma induzida em  $T_pM$ , dada por  $\|v\| = \sqrt{g_p(v)}$ , para todo  $v \in T_pM$ .

Se  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$  é uma carta de  $M$ , uma expressão local para  $g$  pode ser dada por

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

onde  $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ . Tais aplicações  $g_{ij}$  são chamadas funções coordenadas de  $g$ .

**Proposição 2.1.22.** Toda variedade de classe  $C^\infty$  pode ser munida de uma métrica riemanniana.

**Demonstração.** Seja  $M = \bigcup_{i \in I} U_i$  uma cobertura de  $M$  por domínios de cartas  $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ . Para cada  $i \in I$ , considere a métrica riemanniana  $g_i$  em  $U_i$ , ou seja,

$$p \in U_i \xrightarrow{g_i} (g_i)_p : T_p U_i \times T_p U_i \rightarrow \mathbb{R},$$

cuja expressão local  $((g_i)_{kj})$  é matriz identidade. Seja  $(\xi_i)_{i \in I}$  uma partição da unidade  $C^\infty$  de  $M$  subordinada à cobertura  $(U_i)_{i \in I}$ , e defina

$$g = \sum_{i \in I} \xi_i g_i.$$

Como a família de suportes de  $\xi_i$  é localmente finita, a soma acima é localmente finita, e assim  $g$  está bem definido e é  $C^\infty$ . Além disso,  $g$  é bilinear e simétrico em cada ponto.

Como  $\xi_i \geq 0$  para todo  $i \in I$  e  $\sum_{i \in I} \xi_i = 1$  e  $(g_i)_p$  é positivo para todo  $p \in M$ , segue que  $g$  é uma métrica riemanniana em  $M$ .  $\square$

### 2.1.3 Formas Diferenciais

Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais reais. Uma aplicação  $\varphi : E \times \cdots \times E \rightarrow F$ , definida no produto cartesiano de  $r$  fatores iguais a  $E$ , diz-se  **$r$ -linear** quando

$$\varphi(v_1, \dots, v_i + w_i, \dots, v_r) = \varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_r) + \varphi(v_1, \dots, w_i, \dots, v_r)$$

e

$$\varphi(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_r) = \lambda \varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_r),$$

para quaisquer que sejam  $v_1, \dots, v_i, w_i, \dots, v_r \in E$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Definição 2.1.23.** Uma aplicação  $r$ -linear é dita **alternada** quando se tem  $\varphi(v_1, \dots, v_r) = 0$  sempre que  $(v_1, \dots, v_r)$  possuir repetições, isto é, quando existirem  $i \neq j$  com  $v_i = v_j$ .

**Proposição 2.1.24.** A fim de que uma aplicação  $r$ -linear seja alternada, é necessário e suficiente que seja **anti-simétrica**, isto é, que

$$\varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_r) = -\varphi(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_r),$$

para quaisquer  $v_1, \dots, v_r \in E$ .

**Demonstração.** [20, pág. 397].  $\square$

O conjunto das aplicações  $r$ -lineares alternadas de  $E$  em  $F$  será denotado  $\mathcal{A}_r(E; F)$ . No caso em que  $F = \mathbb{R}$ , denotamos  $\mathcal{A}_r(E; \mathbb{R}) = \mathcal{A}_r(E)$  e chamamos os elementos desse conjunto de  **$r$ -formas**.

Note que as 1-formas são os funcionais lineares de  $E$ , ou seja,  $\mathcal{A}_1(E) = E^*$  (o dual de  $E$ ). Convencionamos que  $\mathcal{A}_0(E) = \mathbb{R}$ .

A partir de  $r$  funcionais lineares  $f_1, \dots, f_r \in E^*$  obtemos a forma  $r$ -linear alternada  $f_1 \wedge \dots \wedge f_r : E \times \dots \times E \rightarrow \mathbb{R}$  chamada de **produto exterior** desses funcionais, e definida como

$$f_1 \wedge \dots \wedge f_r(v_1, \dots, v_r) = \det (f_i(v_j)).$$

Dados  $v \in E$  e  $\omega \in \mathcal{A}_r(E)$ , definimos a forma  $v \lrcorner \omega \in \mathcal{A}_{r-1}(E)$  como

$$v \lrcorner \omega(v_1, \dots, v_r) = \omega(v, v_2, \dots, v_r).$$

A forma  $v \lrcorner \omega$  é chamada **produto interior** de  $v$  por  $\omega$ , e a aplicação

$$E \times \mathcal{A}_r(E) \rightarrow \mathcal{A}_{r-1}, (v, \omega) \mapsto v \lrcorner \omega$$

é chamada **multiplicação interior**.

**Exemplo 2.1.25.** Seja  $E$  um espaço vetorial de dimensão  $n$  orientado e munido de um produto interno. Definiremos uma forma  $\omega \in \mathcal{A}_n(E)$  a qual chamaremos de **elemento de volume de  $E$** . Tome uma base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  ortonormal positiva em  $E$ . Dados  $n$  vetores  $v_1, \dots, v_n \in E$ , temos  $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$  para cada  $j = 1, \dots, n$ .

Denotamos por  $A = (a_{ij})$  a matriz  $n$ -dimensional assim obtida, e definimos

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = \det A.$$

Isso define uma forma  $\omega \in \mathcal{A}_n(E)$ . Provemos que  $\omega$  independe da escolha de uma base. Para isso, considere a **matriz de Gram**  $g = (\langle v_i, v_j \rangle)$ . Note que

$$\langle v_i, v_j \rangle = \left\langle \sum_k a_{ki} e_k, \sum_s a_{sj} e_s \right\rangle = \sum_k a_{ki} a_{kj},$$

donde  $g = A^t \cdot A$ . Daí segue que  $\det g = (\det A)^2$ .

Em particular,  $\det g \geq 0$ , sendo  $\det g = 0$  se, e somente se, os vetores  $v_1, \dots, v_n$  são linearmente independentes. Concluimos que

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = \pm \sqrt{\det g},$$

onde o sinal depende do sinal da matriz  $A$ . Isso mostra que  $\omega$  independe de uma escolha de base.

**Definição 2.1.26.** Uma **forma diferencial de grau  $r$**  (ou  **$r$ -forma diferencial**) numa variedade  $n$ -dimensional  $M$  é uma aplicação

$$\omega : p \in M \mapsto \omega(p) \in \mathcal{A}_r(T_p M).$$

Ou seja, para cada  $p \in M$ ,  $\omega(p)$  (ou  $\omega_p$ ) é uma  $r$ -forma alternada no espaço tangente  $\omega_p : T_p M \times \cdots \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ .

Se  $r = 0$ , uma 0-forma diferencial em  $M$  é simplesmente uma função real  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Denotemos por  $\Omega_r(M)$  o conjunto das  $r$ -formas diferenciais em  $M$ .

Seja  $(U, \phi)$  uma carta local de  $M$  com  $\phi = (x_1, \dots, x_n)$ . Em cada ponto  $p \in U$  temos a base

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p) \right\} \subset T_p M.$$

Denotaremos por  $\{dx_1, \dots, dx_n\} \subset (T_p M)^*$  a base dual. Note que  $dx_1, \dots, dx_n$  são 1-formas diferenciais em  $U$ : para cada  $x \in U$ , temos os funcionais lineares  $dx_1(p), \dots, dx_n(p) \in (T_p M)^*$ . Simplificamos a notação ao denotarmos os funcionais lineares como  $dx_i$  em vez de  $dx_i(p)$ .

Dados  $\omega_1$  uma  $r$ -forma diferencial e  $\omega_2$  uma  $s$ -forma diferencial, definimos  $\omega_1 \wedge \omega_2 : M \rightarrow \mathcal{A}_{r+s}(T_p M)$  por

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(p) = \omega_1(p) \wedge \omega_2(p).$$

Temos que  $\omega_1 \wedge \omega_2$  é uma  $(r + s)$ -forma diferencial em  $M$  e é chamado **produto exterior** de  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . Isso define uma aplicação

$$\wedge : \Omega_r(M) \times \Omega_s(M) \rightarrow \Omega_{r+s}(M)$$

$$(\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1 \wedge \omega_2,$$

que goza das seguintes propriedades:

1. Bilinearidade sobre  $\mathbb{R}$ :

- $(\omega_1 + \omega'_1) \wedge \omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega'_1 \wedge \omega_2$
- $\omega_1 \wedge (\omega_2 + \omega'_2) = \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega'_2$
- $\omega_1 \wedge (\lambda \omega_2) = (\lambda \omega_1) \wedge \omega_2 = \lambda(\omega_1 \wedge \omega_2)$ ,

para todos  $\omega_1, \omega'_1 \in \Omega_r(M)$ ,  $\omega_2, \omega'_2 \in \Omega_s(M)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

2. Associatividade:

$$(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3).$$

3. Anticomutatividade graduada:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{rs} \omega_2 \wedge \omega_1, \text{ para todos } \omega_1 \in \Omega_r(M) \text{ e } \omega_2 \in \Omega_s(M).$$

Em cada ponto  $p \in U$ , as  $r$ -formas  $dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}$ , com  $I = \{i_1 < \cdots < i_n\}$  formam uma base para  $\mathcal{A}_r(T_p M)$ . Dada uma  $r$ -forma diferencial  $\omega$  em  $M$  podemos escrever, para cada ponto  $p \in U$ ,

$$\omega(p) = \sum_I a_I(x) dx_I.$$

As funções  $a_I : U \rightarrow \mathbb{R}$  são chamadas coordenadas (ou componentes) da forma  $\omega$  relativamente à carta local  $(U, \phi)$ .

Seja  $M$  uma variedade de classe  $C^\infty$ . Uma  $r$ -forma diferencial em  $M$  diz-se contínua, diferenciável ou de classe  $C^\infty$  quando  $M$  pode ser coberta por cartas  $(U, \phi)$  tais que as componentes  $a_I$  de  $\omega$  nessas cartas são contínuas, diferenciáveis ou de classe  $C^\infty$ , respectivamente.

Dados um campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e uma  $r$ -forma diferencial  $\omega \in \Omega_r(M)$ , definimos a  $(r-1)$ -forma diferencial  $X \lrcorner \omega \in \Omega_{r-1}(M)$  como

$$(X \lrcorner \omega)(p) = X(p) \lrcorner \omega(p).$$

A forma  $X \lrcorner \omega$  é chamada **produto interior** de  $X$  por  $\omega$ , e a aplicação

$$\mathfrak{X}(M) \times \Omega_r(M) \rightarrow \Omega_{r-1}(M), (X, \omega) \mapsto X \lrcorner \omega$$

é chamada **multiplicação interior**.

Agora, sejam  $N$  outra variedade de dimensão  $n$  e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação de classe  $C^\infty$ . Dada uma  $r$ -forma diferencial  $\omega$  em  $N$  ( $r \geq 1$ ) temos que  $f$  e  $\omega$  induzem uma  $r$ -forma diferencial na variedade  $M$ , denotada  $f^*\omega$  e definida por:

$$(f^*\omega)(p)(v_1, \dots, v_r) = \omega(f(p))(df_p(v_1), \dots, df_p(v_r)).$$

A forma  $f^*\omega$  é chamada **pull-back** de  $\omega$  para  $M$  por meio de  $f$ .

Agora, nosso objetivo é definir a forma elemento de volume numa variedade orientada  $M$  de dimensão  $n$ . Para todo ponto  $p \in M$  o espaço vetorial tangente  $T_p M$

possui um produto interno e é orientado. Logo, podemos introduzir uma  $n$ -forma diferencial  $\omega$  da seguinte forma: para cada  $p \in M$ ,  $\omega(p) =$  elemento de volume do espaço vetorial  $T_pM$ , nos moldes do exemplo 2.1.25.

Se  $M$  é de classe  $C^k$  e  $(U, \phi)$  é uma carta local em  $M$ , então para cada  $p \in U$  temos

$$\omega(p) = \sqrt{g(p)} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

onde  $g(p) = \det(g_{ij}(p))$ ,  $g_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p) \right\rangle$  e  $\{dx_1, \dots, dx_n\}$  é a base dual de  $\left( \frac{\partial}{\partial x_1}(p) \right)$ . Isto mostra que a forma  $\omega$  é de classe  $C^{k-1}$ .

#### 2.1.4 Integração em Variedades

Consideremos  $M$  uma variedade topológica orientada,  $(U, \phi)$  uma carta positiva em  $M$  e  $\omega \in \Omega_n(M)$  tal que  $\text{supp}(\omega)$  é compacto e  $\text{supp}(\omega) \subseteq U$ . Definimos a **integral de  $\omega$  em  $M$**  por

$$\int_M \omega = \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^* \omega.$$

Essa definição de integral não depende da escolha de carta local, o que nos permite estender o conceito de integral à variedade, mesmo quando o suporte da forma diferencial não está contido no domínio de uma carta.

Seja  $\mathcal{O} = \{(U_i, \phi_i); i \in I\}$  um atlas coerente de  $M$  e  $\omega \in \Omega_n(M)$  tal que  $\text{supp}(\omega)$  é compacto. Seja  $\xi = (\xi_i)_{i \in I}$  uma partição da unidade estritamente subordinada à cobertura aberta  $\mathcal{C} = (U_i)_{i \in I}$ . Para cada  $i \in I$ , seja  $\omega_i = \xi_i \omega$ . Assim,

$$\sum_{i \in I} \omega_i = \sum_{i \in I} \xi_i \omega = \left( \sum_{i \in I} \xi_i \right) \omega = \omega.$$

Para todo  $i \in I$ ,  $\text{supp}(\omega_i) \subseteq \text{supp}(\xi_i) \subseteq U_i$  e  $\text{supp}(\omega_i)$  é compacto, pois é fechado no compacto  $\text{supp}(\omega)$ . Logo, a integral  $\int_M \omega_i$  faz sentido.

Como  $\text{supp}(\omega)$  é compacto e  $\mathcal{C}$  é uma cobertura aberta, existem  $i_1, \dots, i_r \in I$  tais que

$$\text{supp}(\omega) \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_r}.$$

Assim, para cada  $s \in \{1, \dots, r\}$  e cada  $i \in I \setminus \{i_1, \dots, i_r\}$ , valem as respectivas igualdades

$$\int_M \omega_{i_s} = \int_{U_i} \omega_{i_s} \text{ e } \int_M \omega_i = 0.$$



Logo, a soma  $\sum_{i \in I} \int_M \omega_i$  tem um número finito de parcelas não nulas. Definimos a integral de  $\omega$  em  $M$  por

$$\int_M \omega = \sum_{i \in I} \int_M \omega_i.$$

Tal definição não depende da escolha de partição da unidade.

Agora, consideremos o caso em que a forma diferencial  $\omega \in \Omega_n(M)$  não possui suporte compacto. Suponhamos que  $\omega \geq 0$  e consideremos  $\mathcal{O} = \{(U_i, \phi_i); i \in I\}$  um atlas coerente em  $M$  tal que cada  $U_i$  tem fecho compacto. Como feito antes, consideremos uma partição da unidade  $\xi = (\xi_i)_{i \in I}$  estritamente subordinada à cobertura  $\mathcal{C} = (U_i)_{i \in I}$ . Para cada  $i \in I$ , seja  $\omega_i = \xi_i \omega$ . Note que, para todo  $i \in I$ , temos

$$\text{supp}(\omega_i) \subseteq \text{supp}(\xi_i) \subseteq U_i \subseteq \overline{U_i}.$$

Assim,  $\text{supp}(\omega_i)$  é compacto, donde a integral  $\int_M \omega_i$  faz sentido.

Nesse caso, a soma  $\sum_{i \in I} \int_M \omega_i$  é enumerável, pois a família  $(\text{supp}(\omega_i))_{i \in I}$ , sendo localmente finita, é enumerável. O fato da série convergir ou não independe da partição da unidade. Dizemos que  $\omega \geq 0$  é integrável quando  $\sum_{i \in I} \int_M \omega_i$  converge, e definimos a integral de  $\omega$  em  $M$  por

$$\int_M \omega = \sum_{i \in I} \int_M \omega_i.$$

No caso geral, escrevemos  $\omega = \omega_+ - \omega_-$ , onde  $\omega_+$  e  $\omega_-$  denotam a parte positiva e negativa de  $\omega$ , respectivamente, e são definidas por

$$\omega_+(p) = \begin{cases} \omega(p), & \text{se } \omega(p) \geq 0, \\ 0, & \text{se } \omega(p) \leq 0. \end{cases}$$

e

$$\omega_-(p) = \begin{cases} -\omega(p), & \text{se } \omega(p) \leq 0, \\ 0, & \text{se } \omega(p) \geq 0. \end{cases}$$

Como  $\omega_+, \omega_- \geq 0$ , as integrais  $\int_M \omega_+$  e  $\int_M \omega_-$  estão bem definidas. Dizemos que  $\omega$  é integrável quando  $\omega_+$  e  $\omega_-$  forem integráveis, e definimos a integral de  $\omega$  em  $M$  por

$$\int_M \omega = \int_M \omega_+ - \int_M \omega_-.$$

**Proposição 2.1.27.** *Se  $\omega \in \Omega_n(N)$  é uma forma diferencial integrável em  $M$  e  $f : M \rightarrow N$  é um difeomorfismo positivo, onde  $M$  é uma variedade topológica orientada, então*

$$\int_M f^* \omega = \int_N \omega.$$

**Demonstração.** [19, pág. 242]. □

## 2.2 Campos Vetoriais Anosov

Considere um sistema dinâmico contínuo  $(X^t)_{t \in \mathbb{R}}$  em uma variedade diferenciável  $M$ . Fixado um ponto  $p \in M$ , ao qual chamaremos de condição inicial do sistema dinâmico, nosso objetivo é identificar se as condições iniciais  $q \in M$  próximas de  $p$  têm evolução ao longo do tempo suficientemente próxima à do ponto  $p$ , isto é, se  $X^t(q)$  está próximo de  $X^t(p)$  para um determinado  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

Uma ferramenta importante nesse contexto é o comportamento assintótico das aplicações lineares  $(DX^t)_p$  quando  $t \rightarrow \infty$  ou  $t \rightarrow -\infty$ , o que reflete o comportamento assintótico de condições iniciais muito próximas de  $p$ . Isso motiva a primeira definição desta seção.

**Definição 2.2.1.** *Uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dita **hiperbólica** se, para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\det(A - \lambda Id) = 0$ , temos  $|\lambda| \neq 1$ .*

*Os elementos  $\lambda \in \mathbb{C}$  que satisfazem tal condição são chamados autovalores de  $T$ , e os vetores  $v \in \mathbb{C}^n$  tal que  $(A - \lambda Id)v = 0$  são denominados autovetores de  $T$ .*

O conjunto chamado de **espectro de  $T$**  é denotado  $\text{Spec}(T)$  e definido como

$$\text{Spec}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ é autovalor de } T\}.$$

A proposição a seguir nos mostra que  $\text{Spec}(T)$  não "explode" ao sofrer uma pequena perturbação.

**Proposição 2.2.2.** *Seja  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  e  $\|S - T\| < \delta$ , então para cada  $\lambda' \in \text{Spec}(S)$  existe  $\lambda \in \text{Spec}(T)$  com  $|\lambda - \lambda'| < \varepsilon$ .*

**Demonstração.** Seja  $\lambda \in \text{Spec}(T)$ . Por um resultado de álgebra linear [13, pág. 125], segue que  $\lambda$  é um autovalor do operador complexificado  $T'$ . Portanto,

$$|\lambda| \leq \|T'\| = \|T\|.$$

Logo, se  $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  é tal que  $\|S - T\| < 1$ , o conjunto  $\text{Spec}(S)$  está contido no interior do disco  $D$  com raio  $1 + \|T\|$  e centro na origem de  $\mathbb{C}$ .

Seja  $V_\varepsilon$  a união das bolas de raio  $\varepsilon$  e centro nos elementos de  $\text{Spec}(T)$ , isto é,

$$V_\varepsilon = \bigcup_{\lambda \in \text{Spec}(T)} B(\lambda; \varepsilon).$$

Seja  $\alpha \in D \setminus V_\varepsilon$ , então  $\det(T' - \alpha Id) \neq 0$ . Por continuidade do determinante, existe uma vizinhança aberta  $U_\alpha$  de  $\alpha$  em  $\mathbb{C}$  e  $\delta = \delta(\alpha) > 0$  a depender de  $\alpha$ , tal que se  $\|S - T\| < \delta$  e  $\alpha' \in U_\alpha$ , então  $\det(S' - \alpha' Id) \neq 0$ . Portanto,  $\alpha' \notin \text{Spec}(S')$ . Note que

$$\bigcup_{\alpha \in D \setminus V_\varepsilon} U_\alpha \supseteq D \setminus V_\varepsilon,$$

donde  $(U_\alpha)_{\alpha \in D \setminus V_\varepsilon}$  é uma cobertura aberta de  $D \setminus V_\varepsilon$ . Como  $D \setminus V_\varepsilon$  é compacto, segue que existe uma subcobertura finita  $(U_{\alpha_i})_{i=1}^k$ .

Tome  $\delta = \min_{1 \leq i \leq k} \delta(\alpha_i) > 0$ , então se  $\|S - T\| < \delta$  e  $\alpha \in D \setminus V_\varepsilon$ , temos  $\det(S - \alpha Id) \neq 0$ .

Como  $\text{Spec}(S) \subset D$ , segue-se que  $\text{Spec}(S) \subset V_\varepsilon$ , o que demonstra a proposição.  $\square$

**Proposição 2.2.3.** *Se  $\lambda$  é um autovalor de  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  de multiplicidade  $m$ , então existem  $\varepsilon > 0$  e  $\delta > 0$  tal que, se  $\|S - T\| < \delta$ , a soma das multiplicidades dos autovalores de  $S$  contidos na bola de raio  $\varepsilon$  e centro em  $\lambda$  é no máximo igual a  $m$ .*

**Demonstração.** Veja a página 93 de [18].  $\square$

**Definição 2.2.4.** *Dados  $M$  uma variedade e  $(X^t)_{t \in \mathbb{R}}$  um fluxo em  $M$ , dizemos que  $p \in M$  é um **ponto periódico** de  $(X^t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  se existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $X^{t_0}(p) = p$ .*

*Se  $t_0$  for o menor número real positivo com essa propriedade, dizemos que  $t_0$  é o **período** do ponto  $p \in M$ .*

Dado um fluxo  $(X^t)_{t \in \mathbb{R}}$  em  $M$ , dizemos que um ponto  $p \in M$  é um **ponto hiperbólico periódico** para  $(X^t)_{t \in \mathbb{R}}$  se  $p$  é um ponto periódico de período  $t_0$  e a aplicação

$$DX_p^{t_0} : T_p M \rightarrow T_p M$$

é uma aplicação linear hiperbólica. A segunda condição nos fornece uma estrutura hiperbólica local na variedade.

**Definição 2.2.5.** *Dado um ponto  $p \in M$ , a **órbita** de  $p$  é definida como o conjunto  $\mathcal{O}(p) = \{X^t(p) | t \in \mathbb{R}\}$ . Caso  $p$  seja um ponto (hiperbólico) periódico de período  $t_0$ , definimos a **órbita (hiperbólica) periódica** de  $p$  como o conjunto  $\{X^t(p) | t \in [0, t_0]\}$ .*

**Definição 2.2.6.** *Dizemos que um campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}^r(M)$  é **Anosov** se existem  $C > 0$ ,  $\lambda \in (0, 1)$  e para todo  $x \in M$  existe uma decomposição do espaço tangente  $T_x M = E_x^s \oplus [X] \oplus E_x^u$ , onde  $[X]$  é a direção do fluxo, tal que:*

- $DX^t(E_x^s) = E_{X^t(x)}^s$  e  $DX^t(E_x^u) = E_{X^t(x)}^u$
- $\|DX_x^t v^s\| \leq C\lambda^t \|v^s\|$ , para todo  $v^s \in E_x^s$  e  $t \geq 0$
- $\|DX_x^{-t} v^u\| \leq C\lambda^t \|v^u\|$ , para todo  $v^u \in E_x^u$  e  $t \geq 0$

A definição de campo Anosov nos diz que há uma decomposição do espaço tangente em cada ponto da variedade de modo que essa decomposição é  $DX^t$ -invariante, um subespaço é uniformemente contraído por  $DX^t$  e o outro é uniformemente expandido por  $DX^t$ .

## 2.3 Conceitos de Teoria Ergódica

A partir da definição de campo vetorial de Anosov, conseguimos uma estimativa para a média da taxa de variação na norma da derivada de uma função com respeito à evolução no tempo. Vamos apresentar outras ferramentas a partir do estudo da Teoria Ergódica para obter informação sobre o comportamento da derivada.

Para isso, precisamos apresentar antes alguns resultados e definições de Teoria da Medida.

### 2.3.1 Teoria da Medida

**Definição 2.3.1.** Dado um conjunto  $X$ , uma coleção  $\mathcal{X}$  não vazia de subconjuntos de  $X$  é dita uma  **$\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $X$** , ou simplesmente  **$\sigma$ -álgebra de  $X$** , quando satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $\emptyset \in \mathcal{X}$ .
2. Se  $E \subseteq \mathcal{X}$ , então  $E^c \in \mathcal{X}$ .
3. Se  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$ , então  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{X}$ .

Os elementos de  $\mathcal{X}$  são chamados **conjuntos mensuráveis**, e o par  $(X, \mathcal{X})$  é chamado **espaço mensurável**.

- Exemplo 2.3.2.**
1. Dado um conjunto qualquer  $X$ , a coleção  $\mathcal{X} = \{X, \emptyset\}$  é uma  $\sigma$ -álgebra de  $X$ , denominada a  $\sigma$ -álgebra **trivial** de  $X$ .
  2. Dado um conjunto qualquer  $X$ , o conjunto das partes de  $X$ , definido como  $\mathcal{P}(X) = \{A; A \subseteq X\}$  é uma  $\sigma$ -álgebra de  $X$ .
  3. Seja  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ . A menor  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}$  contendo todos os abertos de  $X$  é chamada  **$\sigma$ -álgebra de Borel**, e seus elementos são chamados de **borelianos**.

**Definição 2.3.3.** Dado um espaço mensurável  $(X, \mathcal{X})$ , uma função definida na  $\sigma$ -álgebra com valores reais não negativos  $\mu : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$  é dita uma **medida** quando satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ .
2. Para qualquer coleção enumerável  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$  de conjuntos dois a dois disjuntos, tem-se  $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n)$ .

Note que, caso exista ao menos um conjunto mensurável  $E$  com medida finita, ou seja,  $\mu(E) < \infty$ , então a condição 1 da definição acima segue diretamente da condição 2. De fato,

$$\mu(E) = \mu(E \cup \emptyset) = \mu(E) + \mu(\emptyset),$$

donde segue que  $\mu(\emptyset) = 0$ .

Uma 3-upla  $(X, \mathcal{X}, \mu)$  é chamada espaço de medida.

**Exemplo 2.3.4.** 1. Considere  $(X, \mathcal{X})$  um espaço mensurável, onde  $\mathcal{X}$  é a  $\sigma$ -álgebra trivial de  $X$ . A função  $\mu : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$  definida como  $\mu(X) = 1$  e  $\mu(\emptyset) = 0$  é uma medida. Na verdade,  $\mu(X)$  pode ser definida como tomando qualquer valor na semi reta positiva.

2. Seja  $(X, \mathcal{X})$  um espaço mensurável. Definimos a seguinte função:

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{X} &\rightarrow [0, \infty] \\ E &\mapsto \mu(E) = \#E. \end{aligned}$$

onde consideramos  $\mu(E) = \infty$  caso  $E$  seja um conjunto infinito. Temos que  $\mu$  é uma medida, denominada **medida de contagem** em  $(X, \mathcal{X})$ .

Agora, queremos construir uma noção de volume (a qual chamaremos medida de Lebesgue) de subconjuntos em geral de  $\mathbb{R}^n$ , em vez de apenas em retângulos ou cubos.

Se denotamos por  $L(\mathbb{R}^n)$  a coleção dos conjuntos ditos Lebesgue-mensuráveis e denotamos por  $\mu : L(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$  a medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^n$ , queremos que a partir da nossa construção o conjunto  $L(\mathbb{R}^n)$  contenha todos os retângulos  $n$ -dimensionais e  $\mu(R)$  deve ser igual ao volume usual do retângulo  $R$ .

Infelizmente, não é possível definirmos diretamente o conceito de medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^n$  de forma consistente. Por exemplo, em [2] foi provado que, para  $n \geq 3$ ,

pode-se dividir uma bola em um número finito de pedaços e usar isometrias (translações e rotações) para reorganizar os pedaços em uma bola de qualquer volume desejado. Isso é chamado usualmente de **paradoxo de Banach-Tarski**.

Para realizarmos a construção desejada, será necessário o conceito de medida exterior.

**Definição 2.3.5.** *Uma função  $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  é chamada de uma **medida exterior** quando satisfaz as seguintes propriedades:*

1.  $\mu^*(\emptyset) = 0$ .
2. Para qualquer coleção enumerável  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$  de conjuntos dois a dois disjuntos, tem-se  $\mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(E_n)$ .

Ou seja, a medida exterior substitui o conceito de aditividade da medida por uma espécie de subaditividade. A partir disso será possível definirmos de maneira consistente uma medida de Lebesgue, como comentada anteriormente. Isso acontece pois a propriedade de aditividade é muito forte. Ao enfraquecermos essa propriedade, podemos sair do paradoxo de Banach-Tarski.

Nossa ideia é construir uma medida exterior atuando sobre todos os subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  que aproxime o volume de um subconjunto pela união enumerável de retângulos contendo o subconjunto. Em seguida, restringimos essa medida exterior a uma *sigma*-álgebra onde ela seja aditiva, obtendo portanto uma medida.

**Definição 2.3.6.** *Um **retângulo fechado  $n$ -dimensional** (ou simplesmente **retângulo**) é um subconjunto  $R \subset \mathbb{R}^n$  da forma*

$$R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

onde  $-\infty < a_i < b_i < \infty$  para  $i = 1, \dots, n$ . O volume  $\mu(R)$  de  $R$  é

$$\mu(R) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n).$$

Se  $n = 1$  ou  $n = 2$ , o volume de um retângulo é seu comprimento ou área, respectivamente. Consideramos  $\emptyset$  como um retângulo de volume zero. Denotamos por  $\mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$  a coleção de todos os retângulos em  $\mathbb{R}^n$ . Então,  $R \mapsto \mu(R)$  define uma aplicação

$$\mu : \mathcal{R}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty].$$

**Definição 2.3.7.** *A **medida exterior de Lebesgue** é uma aplicação  $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ , onde  $\mu^*(E)$  de um subconjunto  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  é definida como*

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(R_i); E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i, R_i \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^n) \right\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as coleções enumeráveis de retângulos cuja união cobre  $E$ .

A prova de que a medida exterior de Lebesgue, como definida acima, é de fato uma medida exterior, pode ser encontrada em [17, Teo. 2.4].

**Definição 2.3.8.** Um subconjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  é dito **Lebesgue mensurável** se

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

para todo subconjunto  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ . Denotamos a coleção dos conjuntos Lebesgue mensuráveis em  $\mathbb{R}^n$  por  $L(\mathbb{R}^n)$ .

**Teorema 2.3.9.** A coleção  $L(\mathbb{R}^n)$  é uma  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  e a função definida como  $\mu = \mu^*|_{L(\mathbb{R}^n)}$  é uma medida.

**Demonstração.** [17, Teo. 2.9] □

**Definição 2.3.10.** A medida definida como  $\mu = \mu^*|_{L(\mathbb{R}^n)}$  é chamada **medida de Lebesgue** em  $\mathbb{R}^n$ .

Finalmente, conseguimos definir uma noção de volume em  $\mathbb{R}^n$ . Como era esperado, valem as seguintes propriedades:

**Teorema 2.3.11.** 1. Todos os retângulos em  $\mathbb{R}^n$  são Lebesgue mensuráveis.

2. Se  $R$  é um retângulo em  $\mathbb{R}^n$ , então  $\mu(R) = \mu^*(R) = \text{vol}(R)$ .

3. Se  $A \subset \mathbb{R}^n$  e  $h \in \mathbb{R}^n$ , e definimos a translação de  $A$  por  $h$  como

$$A + h = \{x + h; x \in A\},$$

temos

$$\mu^*(A + h) = \mu^*(A).$$

Além disso,  $A + h$  é Lebesgue mensurável se, e somente se,  $A$  é Lebesgue mensurável.

**Demonstração.** [17, Prop. 2.7, Prop 2.11, Prop. 2.16] □

O item 3 no Teorema acima implica que a medida de Lebesgue é invariante por translações. Portanto, não caímos no paradoxo de Banach-Tarski.

Agora, faremos algumas últimas definições relevantes antes de entrarmos de fato na Teoria Ergódica.

**Definição 2.3.12.** Dizemos que  $(X, \mathcal{X}, \mu)$  é um espaço de medida finita quando  $\mu(X) < \infty$ . Caso tenhamos  $\mu(X) = 1$ , dizemos que  $\mu$  é uma **medida de probabilidade**.

Note que dado um espaço de medida finita qualquer  $(X, \mathcal{X}, \mu)$ , existe uma medida de probabilidade definida em  $\mathcal{X}$ . De fato, basta considerarmos

$$\nu : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty], \quad E \mapsto \nu(E) = \frac{\mu(E)}{\mu(X)}.$$

Sejam  $(X, \mathcal{X}, \mu)$  um espaço de medida e  $P$  uma propriedade em  $X$ . Dizemos que  $P$  é **satisfeita em  $\mu$ -quase todo ponto de  $X$**  ( $\mu$ -q.t.p. em  $x$ ) se  $P$  é satisfeita em um conjunto  $Y \subset X$  tal que  $\mu(X \setminus Y) = 0$ . Ou seja, a propriedade  $P$  é satisfeita em  $P$  exceto por um conjunto de medida nula.

**Definição 2.3.13.** Uma aplicação  $f : X \rightarrow X$  é dita uma **aplicação mensurável** quando  $f^{-1}(E) \in \mathcal{X}$  sempre que  $E \in \mathcal{X}$ . Isto é, quando a pré-imagem de conjuntos mensuráveis são também conjuntos mensuráveis.

### 2.3.2 Teoria Ergódica

A Teoria Ergódica se ocupa em estudar o comportamento de sistemas dinâmicos relativamente a medidas que permanecem invariantes sob a ação da dinâmica. Mais precisamente, busca-se descrever as propriedades válidas para  $\mu$ -quase toda trajetória, onde  $\mu$  é uma medida invariante. Começamos, então, por definir essa noção de medida invariante, e enunciar alguns resultados importantes.

**Definição 2.3.14.** Seja  $(M, \mathcal{X}, \mu)$  um espaço de medida e  $f : M \rightarrow M$  uma transformação mensurável. Dizemos que a medida  $\mu$  é invariante por  $f$  (ou que  $f$  preserva  $\mu$ ) se

$$\mu(E) = \mu(f^{-1}(E)),$$

para todo conjunto mensurável  $E \subseteq M$ .

Heuristicamente, essa definição nos diz que a probabilidade de um ponto pertencer a um conjunto é igual à probabilidade de sua imagem estar no mesmo conjunto.

É natural buscarmos estender tal definição à sistemas dinâmicos de tempo contínuo, isto é, fluxos. Dizemos que uma medida  $\mu$  é invariante por um fluxo  $(X^t)_{t \in \mathbb{R}}$  se ela é invariante por cada uma das transformações  $X^t : M \rightarrow M$ , ou seja, se

$$\mu(E) = \mu(X^{-t}(E)),$$

para todo conjunto mensurável  $E \subseteq M$  e para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Seja  $M$  uma variedade riemanniana qualquer de dimensão  $n \geq 2$ . Por simplicidade, supomos que  $M$  é uma variedade orientável. Neste caso, a medida de Lebesgue é dada por



uma  $n$ -forma diferencial  $\mu$  chamada forma de volume, a qual foi descrita anteriormente. Dada uma carta local  $(U, \phi)$  com  $\phi = (x_1, \dots, x_n)$ , podemos escrever

$$\mu = \rho dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Assim, o volume de qualquer conjunto mensurável  $B$  contido em  $(U, \phi)$  é dado por

$$\text{vol}(B) = \int_B \rho(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Seja  $X$  um campo vetorial em  $M$  de classe  $C^1$ . Em coordenadas locais, escrevemos

$$X(x_1, \dots, x_n) = (X_1(x_1, \dots, x_n), \dots, X_n(x_1, \dots, x_n))$$

Desta forma, definimos o divergente de  $X$  como sendo

$$\text{div}X = \frac{\partial \rho X}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \rho X}{\partial x_n}.$$

Tal definição independe da escolha de coordenadas locais.

**Teorema 2.3.15** (Teorema de Liouville). *Sejam  $M$  uma variedade riemanniana orientada e  $X \in \mathfrak{X}^L(M)$  um campo vetorial de Lipschitz que gera um fluxo  $(X^t)_{t \in \mathbb{R}}$ . O fluxo  $(X^t)_{t \in \mathbb{R}}$  preserva a medida de volume  $\mu$  se, e somente se,  $\text{div}X = 0$  em todo ponto de  $M$ .*

**Demonstração.** Seja  $E$  um conjunto mensurável contido na variedade  $M$  e considere  $B_t = X^{-t}(E)$ , para cada  $t \in \mathbb{R}$ . Assim, temos

$$\mu(B_t) = \int_{B_t} d\mu = \int_{X^{-t}(E)} d\mu = \int_E (X^{-t})^* d\mu.$$

Como o integrando à direita depende suavemente de  $(t, p)$  em  $M$ , podemos diferenciar essa expressão. Para isso, usamos a fórmula de Cartan para a derivada de Lie da forma de volume usual ([19, Pág. 344]):

$$\mathcal{L}_X d\mu = X \lrcorner d(d\mu) + d(X \lrcorner d\mu) = (\text{div}X)d\mu,$$

pois  $d(d\mu)$  é uma  $(n+1)$ -forma diferencial em uma  $n$ -variedade. Daí, segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \mu(B) &= \int_E \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=t_0} (X^t)^* d\mu = \int_E (X^{t_0})^* (\mathcal{L}_X d\mu) \\ &= \int_E (X^{t_0})^* ((\text{div}X)d\mu) = \int_{X^{t_0}} (\text{div}X)d\mu. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Isso posto, suponha que  $\operatorname{div} X = 0$ . Segue da expressão (2.1) que  $\mu(B) = \mu(X^{-t}(E))$  é uma função constante de  $t$  para todo  $E$  mensurável. Portanto,  $\mu(E) = \mu(X^{-t}(E))$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$  e  $E \subseteq M$  mensurável.

Para provarmos a recíproca, suponha que  $\operatorname{div} X \neq 0$ . Então, sem perda de generalidade, existe um ponto  $p \in M$  tal que  $\operatorname{div} X(p) > 0$ . Assim, existe  $U$  uma vizinhança aberta de  $p$  tal que  $\operatorname{div} X > 0$  em  $U$ .

Portanto, pela expressão (2.1),  $\mu(X^{-t}(E))$  é uma função crescente em relação a  $t$ , e portanto o fluxo  $(X^t)_{t \in \mathbb{R}}$  não preserva medida de volume.  $\square$

**Exemplo 2.3.16** (Rotações em Toros). Considere a relação de equivalência em  $\mathbb{R}^d$

$$(x_1, \dots, x_d) \sim (y_1, \dots, y_d) \iff (x_1 - y_1, \dots, x_d - y_d) \in \mathbb{Z}^d$$

Chamamos de  **$d$ -toro** o espaço quociente  $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ .

A rotação associada a um vetor  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$  do toro é dada pela aplicação

$$R_\theta : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d, \quad R_\theta([x]) = [x] + [\theta].$$

Seja  $\lambda$  a medida de volume em  $\mathbb{R}^d$  e seja  $\pi : [0, 1]^d \rightarrow \mathbb{T}^d$  a projeção canônica, ou seja,  $\pi(x) = [x]$ . Definimos a medida de Lebesgue no toro por  $\mu(B) = \lambda(\pi^{-1}(B))$ , para todo  $B \subset \mathbb{T}^d$  tal que  $\pi^{-1}(B)$  é mensurável.

Afirmamos que  $\mu$  é uma medida invariante por  $R_\theta$  para todo  $\theta$ . De fato, queremos mostrar que  $\mu(B) = \mu(R_\theta^{-1}(B))$ , ou seja,  $\lambda(\pi^{-1}(B)) = \lambda(\pi^{-1}(R_\theta^{-1}(B)))$ . Note que

$$\pi^{-1}(R_\theta^{-1}(B)) = \{x \in [0, 1]^d : [x + \theta] \in B\}.$$

Provemos que  $\pi^{-1}(R_\theta^{-1}(B)) = \pi^{-1}(B) - \theta$ .

Seja  $x \in \pi^{-1}(R_\theta^{-1}(B))$ . Então, segue que  $x + \theta = \pi^{-1}([x + \theta]) \in \pi^{-1}(B)$ , o que implica que  $x \in \pi^{-1}(B) - \theta$ . Reciprocamente, se  $x \in \pi^{-1}(B) - \theta$  então  $[x + \theta] \in B$ , donde segue que  $x \in \pi^{-1}(R_\theta^{-1}(B))$ .

Como  $\lambda$  é invariante por translações, temos

$$\begin{aligned} \mu(R_\theta^{-1}(B)) &= \lambda(\pi^{-1}(R_\theta^{-1}(B))) = \lambda(\pi^{-1}(B) - \theta) \\ &= \lambda(\pi^{-1}(B)) = \mu(B). \end{aligned}$$

Uma questão que surge de forma natural é a seguinte: quando podemos garantir a existência de medidas invariantes por uma função em um determinado espaço? O seguinte Teorema nos fornece essa resposta, e nos mostra que é bastante comum a existência de tais

medidas, pois não precisamos pedir muitas hipóteses, apenas a compacidade do espaço e a continuidade da uma função.

**Teorema 2.3.17.** *Seja  $f : M \rightarrow M$  uma transformação contínua em um espaço métrico compacto. Então existe pelo menos uma medida de probabilidade em  $M$  que é invariante por  $f$ .*

**Demonstração.** [26, Pág. 42] □

Uma consequência de termos uma medida invariante finita é que quase todo ponto de qualquer conjunto mensurável é recorrente, ou seja, quase todo ponto em um conjunto mensurável  $E$  regressa infinitas vezes a  $E$  ao longo da evolução do sistema. Tal fato é enunciado e provado a seguir para sistemas dinâmicos discretos:

**Teorema 2.3.18** (Teorema de Recorrência de Poincaré). *Seja  $f : M \rightarrow M$  uma transformação mensurável e  $\mu$  uma medida finita invariante por  $f$ . Seja  $E \subset M$  mensurável com  $\mu(E) > 0$ . Então, para  $\mu$ -qtp  $x \in E$ , existem infinitos valores de  $n$  para os quais  $f^n(x)$  também está em  $E$ .*

**Demonstração.** Seja  $E_0$  o conjunto dos pontos que nunca regressam a  $E$ .

Afirmção: Suas pré-imagens  $F^{-n}(E_0)$  são disjuntas duas a duas.

De fato, suponha que existe  $m > n \geq 1$  tal que  $f^{-m}(E_0)$  intersecta  $f^{-n}(E_0)$ . Seja  $x$  um ponto na interseção, e  $y = f^n(x)$ . Então,  $y \in E_0$  pois  $x \in f^{-n}(E_0)$  e  $f^{m-n}(y) = f^m(x) \in E_0$ , o que contradiz  $y \in E_0$ . Logo, a afirmação é válida.

Como  $\mu$  é invariante,  $\mu(E_0) = \mu(f^{-n}(E_0)), \forall n \geq 1$ , conclui-se que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(E_0)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(f^{-n}(E_0)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_0)$$

Como  $\mu$  é medida finita, a expressão à esquerda é finita. A fim de que  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_0) < \infty$ , é necessário que todas parcelas sejam nulas, pois são todas iguais e positivas. Logo,  $\mu(E_0) = 0$ .

Agora, seja  $F$  o conjunto de pontos que regressam a  $E$  apenas um número finito de vezes. Como consequência da definição, todo  $x \in F$  tem algum iterado  $F^k(x) \in E_0$ . Daí,

$$F \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(E_0).$$

Como  $\mu(E_0) = 0$  e  $\mu$  é invariante, segue que

$$\mu(F) \leq \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(E_0)\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(f^{-k}(E_0)) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(E_0) = 0.$$

Portanto,  $\mu(F) = 0$ . □

Para provarmos o caso contínuo deste Teorema, suponha que  $\mu$  seja uma medida invariante finita de um fluxo  $(X^t)_{t \in \mathbb{R}}$ . Por definição,  $\mu$  é invariante pela transformação  $X^1$ . Aplicando o Teorema de Recorrência de Poincaré no caso discreto à essa transformação, concluímos que, dado  $E \subset M$  com  $\mu(E) > 0$ , para quase todo  $p \in E$  existem uma seqüência  $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$ , onde  $t_j \rightarrow \infty$ , tal que  $X^{t_j}(p) \in E$ .

**Definição 2.3.19.** *Dado um conjunto  $E \subset M$ , para cada ponto  $x \in E$ , o **tempo médio de visita de  $x$  a  $E$**  é definido como:*

$$\tau(x, E) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m-1} \varphi_E \circ f^j(x) \quad (\text{Caso Discreto})$$

$$\tau(x, E) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi_E \circ X^t(x) dt \quad (\text{Caso Contínuo})$$

quando os limites existem, onde  $\varphi_E$  é a função característica do conjunto  $E$ .

A existência de tais limites é fonte de resultados importantes chamados Teoremas Ergódicos. A próxima definição e os seguintes resultados são nesse sentido.

**Definição 2.3.20.** *Uma seqüência de funções  $(g_n)_n$ , onde  $g_n : M \rightarrow \mathbb{R}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , é dita **subaditiva por uma transformação  $f : M \rightarrow M$**  se*

$$g_{m+n} \leq g_m + g_n \circ f^m \text{ para todo } m, n \geq 1.$$

*Equivalentemente, uma família  $(g_s)_{s \in \mathbb{R}}$ ,  $g_s : M \rightarrow \mathbb{R}$  para cada  $s \in \mathbb{R}$ , é dita **subaditiva por um fluxo  $(X^t)_{t \in \mathbb{R}}$**  se*

$$g_{s+t} \leq g_t + g_s \circ X^t \text{ para todo } s, t \in \mathbb{R}.$$

Denotamos por  $L^1(\mu)$  o conjunto das funções  $\mu$ -integráveis, ou seja, o conjunto das funções  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\int_M |g| d\mu < \infty$ .

**Teorema 2.3.21** (Teorema Ergódica Subaditivo de Kingman). *Seja  $\mu$  uma probabilidade invariante para uma transformação  $f : M \rightarrow M$  e seja  $g_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$ , uma seqüência subaditiva de funções mensuráveis tal que  $g_1^+ \in L^1(\mu)$ . Então a seqüência  $(g_n/n)_n$  converge em  $\mu$ -quase todo ponto para uma função  $f$ -invariante  $g : M \rightarrow [-\infty, +\infty)$ . Além disso,  $g^+ \in L^1(\mu)$  e*

$$\int g d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int g_n d\mu = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \int g_n d\mu \in [-\infty, +\infty).$$

**Demonstração.** [26, Pág 74]. □

**Teorema 2.3.22** (Teorema de Kingman para Fluxos). *Seja  $\mu$  uma probabilidade invariante por um fluxo  $(X^t)_{t \in \mathbb{R}}$  e seja  $(g_s)_{s \in \mathbb{R}}$  uma família de funções aditivas pelo fluxo tal que a função  $\Phi = \sup_{0 < s < 1} g_s^+ \in L^1(\mu)$ . Então,  $(1/t)g_t$  converge em  $\mu$ -quase todo ponto para uma função  $g$  tal que  $g^+ \in L^1(\mu)$  e*

$$\int g d\mu = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int g_t d\mu.$$

**Demonstração.** Tome  $g = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n)g_n$  onde  $(g_n)$  é uma sequência com as mesmas hipóteses do Teorema anterior. Para  $t > 0$  não inteiro, escrevemos  $t = n + s$  com  $n \in \mathbb{N}$  e  $s \in (0, 1)$ . Então,

$$g_t \leq g_n + g_s \circ f^n \leq g_n + \Phi \circ f^n, \quad (2.2)$$

e

$$g_t \geq g_{n+1} - g_{1-s} \circ X^t \geq g_n - \Phi \circ X^t. \quad (2.3)$$

Pelo Lema 3.2.5 de [26], a desigualdade (2.2) implica que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} g_t \leq g.$$

Analogamente, a desigualdade (2.3) implica que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} g_t \geq g.$$

Daí,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} g_t = g$ . Também segue que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int g_t d\mu$  coincide com  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int g_n d\mu = \int g d\mu$  pelo Teorema anterior.  $\square$

Sejam  $(X^t)_{t \in \mathbb{R}}$  um fluxo que preserva a medida de probabilidade  $\mu$  e  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável. Note que a família indexada pelos reais definida por

$$\varphi_T(x) = \int_0^T \varphi(X^t(x)) dt$$

satisfaz

$$\begin{aligned}
\varphi_{T+S}(x) &= \int_0^{T+S} \varphi(X^t(x)) dt \\
&= \int_0^T \varphi(X^t(x)) dt + \int_T^S \varphi(X^t(x)) dt \\
&= \int_0^T \varphi(X^t(x)) dt + \int_0^S \varphi(X^{t+T}(x)) dt \\
&= \varphi_T(x) + \varphi_S(X^T(x)), \quad \forall x \in M.
\end{aligned}$$

Portanto,  $(\varphi_T)_{T \in \mathbb{R}}$  é uma família subaditiva para o fluxo. Pelo Teorema de Kingman para Fluxos, concluímos que

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(X^t(x)) dt$$

existe em  $\mu$ -quase todo ponto e

$$\int \varphi d\mu = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int \varphi_T d\mu = \inf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int \varphi_T d\mu \in [-\infty, +\infty).$$

Esse resultado dá origem ao seguinte Teorema:

**Teorema 2.3.23** (Teorema Ergódico de Birkhoff para Fluxos). *Se  $\mu$  é uma probabilidade invariante por um fluxo  $(X^t)_{t \in \mathbb{R}}$  e  $\varphi \in L^1(\mu)$ , então a função*

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(X^t(x)) dt$$

*está definida em  $\mu$ -quase todo ponto, e*

$$\int \tilde{\varphi} d\mu = \int \varphi d\mu.$$

## 2.4 Cociclos Lineares e Expoentes de Lyapunov

Seja  $GL(n, \mathbb{R})$  o conjunto das transformações lineares inversíveis de  $\mathbb{R}^n$ . Dada uma aplicação mensurável inversível  $f : M \rightarrow M$  que preserva uma medida  $\mu$ , para qualquer função mensurável  $A : M \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$  a função  $\mathcal{A} : M \times \mathbb{Z} \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$  definida como

$$\begin{cases} \mathcal{A}(x, m) = A(f^{m-1}(x))A(f^{m-2}(x)) \dots A(x), & m > 0, \\ \mathcal{A}(x, m) = A(f^m(x))^{-1}A(f^{m+1}(x))^{-1} \dots A(f^{-1}(x))^{-1}, & m < 0, \\ \mathcal{A}(x, 0) = Id(x). \end{cases}$$

é denominada **cociclo linear mensurável sobre  $f$** , ou simplesmente **cociclo**.

Note que, dado  $x \in M$  e  $m, k \in \mathbb{Z}$  o cociclo  $\mathcal{A}$  satisfaz

$$\mathcal{A}(x, m + k) = \mathcal{A}(f^m(x), k)\mathcal{A}(x, m).$$

De fato, se  $m, k > 0$ , temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x, m + k) &= A(f^{m+k-1}(x)) \dots A(f^m(x))A(f^{m-1}(x)) \dots A(x) \\ &= A(f^{k-1}(f^m(x))) \dots A(f^m(x))A(f^{m-1}(x)) \dots A(x) \\ &= \mathcal{A}(f^m(x), k)\mathcal{A}(x, m).\end{aligned}$$

Se  $m, k < 0$ , temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x, m + k) &= A(f^{m+k}(x))^{-1} \dots A(f^{m-1}(x))^{-1}A(f^m(x))^{-1} \dots A(f^{-1}(x))^{-1} \\ &= A(f^{k-1}(f^m(x)))^{-1} \dots A(f^1(f^m(x)))^{-1}A(f^m(x))^{-1} \dots A(f^{-1}(x))^{-1} \\ &= \mathcal{A}(f^m(x), k)\mathcal{A}(x, m).\end{aligned}$$

Além disso, se considerarmos  $m > 0 > k$  e  $m + k > 0$ , por um lado temos

$$\mathcal{A}(x, m + k) = A(f^{m+k-1}(x)) \dots A(f^2(x))A(f(x))A(x).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(f^m(x), k) &= A(f^k(f^m(x)))^{-1} \dots A(f^{-1}(f^m(x)))^{-1} \\ \mathcal{A}(x, m) &= A(f^{m-1}(x))A(f^{m-2}(x)) \dots A(x).\end{aligned}$$

Logo, tomando  $j = m + k > 0$ , temos

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(f^m(x), k)\mathcal{A}(x, m) &= A(f^k(f^m(x)))^{-1} \dots A(f^{-1}(f^m(x)))^{-1}A(f^{m-1}(x))A(f^{m-2}(x)) \dots A(x) \\ &= A(f^j(x))^{-1} \dots A(f^{m-2}(x))^{-1}A(f^{m-1}(x))^{-1}A(f^{m-1}(x)) \dots \\ &\dots A(f^{j+1}(x))A(f^j(x))A(f^{j-1}(x)) \dots A(x) \\ &= \mathcal{A}(x, m + k), \text{ pois}\end{aligned}$$

$$A(f^j(x))^{-1} \dots A(f^{m-1}(x))^{-1}A(f^{m-1}(x)) \dots A(f^j(x)) = Id.$$

Além disso, note que  $\mathcal{A}(x, 1) = A(x)$ .

A aplicação  $A$  é chamada o **gerador** do cociclo  $\mathcal{A}$ .

**Definição 2.4.1.** Para um cociclo  $\mathcal{A} : M \times \mathbb{Z} \rightarrow GL(N, \mathbb{R})$  sobre a transformação  $f : M \rightarrow M$  e para  $(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , o número

$$\bar{\chi}^+ := \bar{\chi}^+(x, v) := \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\mathcal{A}(x, m)v\|$$

é chamado de **expoente de Lyapunov superior** de  $(x, v)$  com respeito ao cociclo  $\mathcal{A}$ . Por definição, escrevemos  $\bar{\chi}^+(x, 0) = -\infty$ . Se, além disso, existe o limite

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\mathcal{A}(x, m)v\| = \chi^+(x, v),$$

então esse número é chamado de **expoente de Lyapunov** de  $(x, v)$  com respeito ao cociclo  $\mathcal{A}$ .

**Lema 2.4.2.** Dado um cociclo  $\mathcal{A}$  sobre  $f$ , valem as seguintes propriedades:

1. Para  $(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n$  e  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  temos  $\bar{\chi}^+(x, v) = \bar{\chi}^+(x, \lambda v)$ .
2. Se  $v, w \in \mathbb{R}^n$ , então  $\bar{\chi}^+(x, v + w) \leq \max\{\bar{\chi}^+(x, v), \bar{\chi}^+(x, w)\}$ .
3. Se  $\bar{\chi}^+(x, v) \neq \bar{\chi}^+(x, w)$ , vale a igualdade no item anterior.
4. O conjunto  $\{\bar{\chi}^+(x, v); (x, v) \in M \times \mathbb{R}^n\}$  é finito, com cardinalidade menor ou igual à dimensão de  $M$ .

**Demonstração.**

1.

$$\begin{aligned} \bar{\chi}^+(x, \lambda v) &:= \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\mathcal{A}(x, m)\lambda v\| \\ &= \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log |\lambda| \cdot \|\mathcal{A}(x, m)v\| \\ &= \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} [\log |\lambda| + \log \|\mathcal{A}(x, m)v\|] = \bar{\chi}^+(x, v). \end{aligned}$$

2. Suponha, sem perda de generalidade, que  $\|\mathcal{A}(x, m)v\| \leq \|\mathcal{A}(x, m)w\|$ . Então, como

$$\begin{aligned} \bar{\chi}^+(x, v) &:= \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\mathcal{A}(x, m)v\| \\ &\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\mathcal{A}(x, m)w\| \\ &= \bar{\chi}^+(x, w). \end{aligned}$$

Usando a linearidade de  $\mathcal{A}(x, \cdot)$  e a propriedade 1, temos:



$$\begin{aligned}
\bar{\chi}^+(x, v+w) &= \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\mathcal{A}(x, m)(v+w)\| \\
&\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log [\|\mathcal{A}(x, m)v\| + \|\mathcal{A}(x, m)w\|] \\
&\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|2\mathcal{A}(x, m)w\| \\
&= \bar{\chi}^+(x, 2w) = \bar{\chi}^+(x, w) \\
&= \max\{\bar{\chi}^+(x, v), \bar{\chi}^+(x, w)\}.
\end{aligned}$$

3. Suponhamos que  $\|\mathcal{A}(x, m)v\| < \|\mathcal{A}(x, m)w\|$  e, portanto,  $\bar{\chi}^+(x, v) \leq \bar{\chi}^+(x, w)$ . Usando as propriedades 1 e 2, temos:

$$\begin{aligned}
\bar{\chi}^+(x, v+w) &\leq \bar{\chi}^+(x, w) = \bar{\chi}^+(x, w+v-v) \\
&\leq \max\{\bar{\chi}^+(x, w+v), \bar{\chi}^+(x, -v)\} \\
&= \max\{\bar{\chi}^+(x, w+v), \bar{\chi}^+(x, v)\}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Além disso, note que  $\bar{\chi}^+(x, v+w) > \bar{\chi}^+(x, v)$ . Caso contrário, teríamos

$$\bar{\chi}^+(x, w) \leq \max\{\bar{\chi}^+(x, v+w), \bar{\chi}^+(x, v)\} = \bar{\chi}^+(x, v),$$

o que por sua vez implicaria em  $\bar{\chi}^+(x, w) = \bar{\chi}^+(x, v)$ , o que contraria a hipótese. Portanto,

$$\bar{\chi}^+(x, v+w) \leq \bar{\chi}^+(x, w) \leq \bar{\chi}^+(x, v+w).$$

Daí,

$$\bar{\chi}^+(x, v+w) = \bar{\chi}^+(x, w) = \max\{\bar{\chi}^+(x, v), \bar{\chi}^+(x, w)\}.$$

4. Primeiro mostremos que o conjunto  $A = \{v_1, \dots, v_k; v_i \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ e } k \leq n\}$  satisfaz  $\bar{\chi}^+(x, v_i) \neq \bar{\chi}^+(x, v_j)$  sempre que  $i \neq j$ , então o conjunto  $A$  é linearmente independente. De fato, suponhamos por absurdo que existem  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$  não todos nulos tal que  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$ . Então,

$$\bar{\chi}^+(x, \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) = -\infty.$$

Pela propriedade 3, podemos mostrar indutivamente que

$$\bar{\chi}^+(x, \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) = \max\{\bar{\chi}^+(x, v_i); i = 1, \dots, k\}.$$

Portanto,

$$\bar{\chi}^+(x, \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) = \max\{\bar{\chi}^+(x, v_i); i = 1, \dots, k\} \neq -\infty,$$

o que é um absurdo. Logo,  $A$  é linearmente independente. □

Seja  $f : M \rightarrow M$  uma transformação mensurável e seja  $\mu$  uma probabilidade invariante por  $f$ . Sejam  $\theta : M \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$  e  $\theta^{-1} : M \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$  a aplicação definida por  $\theta^{-1}(x) =$  matriz inversa de  $\theta(x)$ . Consideremos também

$$\phi^m(x) = \theta(f^{m-1}(x)) \dots \theta(f(x))\theta(x)$$

e

$$\phi^{-m}(x) = \text{inversa de } \phi^m(f^{-m}(x))$$

para todo  $m \geq 1$  e  $x \in M$ , os cociclos gerados por  $\theta$  e  $\theta^{-1}$ , respectivamente. Nestas condições, temos o seguinte teorema:

**Teorema 2.4.3** (Teorema de Furstenberg-Kesten). *Se  $\log^+ \|\theta\|$  é integrável, então*

$$\lambda_{max} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\phi^m(x)\|$$

*existe em  $\mu$ -quase todo ponto. Também,  $\lambda_{max}$  é integrável e*

$$\int \lambda_{max} d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \int \log \|\phi^m\| d\mu = \inf_m \frac{1}{m} \int \log \|\phi^m\| d\mu.$$

*Além disso, se  $\log^+ \|\phi^{-1}\|$  é integrável, o limite*

$$\lambda_{min} = \lim_{m \rightarrow \infty} -\frac{1}{m} \log \|\phi^{-m}(x)\|$$

*existe em  $\mu$ -quase todo ponto. Também,  $\lambda_{min}$  é integrável e*

$$\int \lambda_{min} d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} -\frac{1}{m} \int \log \|\phi^{-m}\| d\mu = \sup_m -\frac{1}{m} \int \log \|\phi^{-m}\| d\mu.$$

**Demonstração.** Note que, pela definição de cociclos, as sequências definidas por

$$\varphi_m^{max}(x) = \log \|\phi^m(x)\| \text{ e } \varphi_m^{min}(x) = \log \|\phi^{-m}(x)\|$$

são subaditivas para  $f$ . Logo, do Teorema Ergódico de Kingman, segue o resultado.  $\square$

**Corolário 2.4.4.** *Dado  $\mathcal{A}$  um cociclo, para cada número real  $\chi$  e cada  $x \in M$ , o conjunto*

$$E_\chi(x) := \{v \in \mathbb{R}^n; \bar{\chi}^+(x, v) < \chi\}$$

*é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^n$ , e se  $\chi_1 \geq \chi_2$ , então  $E_{\chi_2}(x) \subseteq E_{\chi_1}(x)$ .*

**Demonstração.** Segue do Lema 2.4.2.  $\square$

Além disso, como consequência, para cada  $x \in M$  existe um inteiro  $s(x) \leq n$ , uma coleção de números

$$\chi_1(x) < \chi_2(x) < \cdots < \chi_{s(x)}(x),$$

e subespaços vetoriais

$$\{0\} \subset E_{\chi_1}(x) \subset E_{\chi_2}(x) \subset \cdots \subset E_{\chi_{s(x)}}(x) = \mathbb{R}^n$$

tais que, para qualquer  $v \in E_{\chi_{i+1}}(x) \setminus E_{\chi_i}(x)$ , temos  $\chi^+(x, v) = \chi_{i+1}(x)$ .

Chamaremos de:

1. **Expoente de Lyapunov superior** em  $x$  com respeito ao cociclo  $\mathcal{A}$  os números  $\chi_i(x)$  para  $i = 1, \dots, s(x)$ .
2. **Filtração** em  $x$  associada ao cociclo  $\mathcal{A}$  a cadeia encaixada de subespaços  $E_{\chi_i}$ .
3. **Multiplicidade do expoente**  $\chi_i(x)$  o número:

$$l_i(x) = \dim E_{\chi_i}(x) - \dim E_{\chi_{i-1}}(x).$$

4. **Espectro** de  $\mathcal{A}$  em  $x$  a coleção de pares dada por

$$\text{Sp}_x \mathcal{A} := \{(\chi_i(x), l_i(x)); i = 1, \dots, s(x)\}.$$

**Exemplo 2.4.5.** Seja  $M = \{x\}$  um conjunto unitário. Se  $A \in GL(n, \mathbb{R})$ , então  $\mathcal{A}(x, m) = A^m(x)$  e os expoentes de Lyapunov superiores são dados pelo logaritmo dos autovalores da matriz  $A$ . Mais ainda, temos que o limite sempre existe.

De fato, suponhamos que  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$  são os autovalores sem multiplicidades da matriz  $A(x)$ , com  $s \leq n$  e sejam  $v_{\lambda_i}$  com  $i = 1, \dots, s$  os respectivos autovetores. Então,

$$\begin{aligned}
\overline{\chi}_i^+(x, v_{\lambda_i}) &= \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\mathcal{A}(x, m)v_{\lambda_i}\| \\
&= \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|A^m(x)v_{\lambda_i}\| \\
&= \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\lambda_i^m v_{\lambda_i}\| \\
&= \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log |\lambda_i^m| \\
&= \limsup_{m \rightarrow \infty} \log |\lambda_i^m|^{1/m} = \log |\lambda_i|.
\end{aligned}$$

Agora, considere o cociclo derivada sobre  $f$ , definido por

$$\mathcal{A}(x, m) = Df_x^m$$

que tem como transformação geradora  $Df : M \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ , tal que  $x \in M \mapsto Df_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Assim, para cada  $x \in M$  e  $v \in T_x M$ , o **expoente de Lyapunov** para  $f$  do par  $(x, v)$ , considerando o cociclo derivada, é dado por

$$\chi^+(f, x, v) := \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|Df_x^m \cdot v\|.$$

**Exemplo 2.4.6.**  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  induz uma transformação linear  $T$  no 2-toro  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ .

Os autovalores de  $A$  são  $\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$  e  $\lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ . Seus respectivos autovalores são denominados  $v_1$  e  $v_2$ .

Sejam  $(x, y) \bmod 1$  as coordenadas locais de um ponto  $(x', y') \in \mathbb{T}^2$ . Pela definição da diferencial entre superfícies, nessas coordenadas a derivada de  $T$ ,  $DT_{(x,y)}$ , coincide com a matriz  $A$ .

Como  $|\lambda_1| > 1$  e  $|\lambda_2| < 1$ , concluímos que:

1.  $A$  é uma transformação linear hiperbólica.
2. O espaço  $E_1$  gerado pelo autovetor associado a  $\lambda_1$  é tal que  $DT(E_1) = E_1$ .
3. O espaço  $E_2$  gerado pelo autovetor associado a  $\lambda_2$  é tal que  $DT(E_2) = E_2$ .
4.  $T_{(x,y)}M = E_1 \oplus E_2$ .

Também, note que:

- $\|DT_{(x,y)}^m \cdot v\| = \|A^m(\alpha v_1)\| = |\alpha| \cdot \|A^m(v_1)\| = |\alpha| \lambda_1^m \|v_1\| = \lambda_1^m \|v\|$ , para todo  $v \in E_2$  e  $m \in \mathbb{Z}$ .
- $\|DT_{(x,y)}^m \cdot v\| = \lambda_2^m \|v\|$ , para todo  $v \in E_2$  e  $m \in \mathbb{Z}$ .
- $T(\mathbb{T}^2) = \mathbb{T}^2$ .

Portanto,  $T$  é um difeomorfismo Anosov. Por outro lado, considere  $\mathcal{A} : \mathbb{T}^2 \rightarrow GL(2, \mathbb{R})$  tal que  $(x, y) \in \mathbb{T}^2 \mapsto DT_{(x,y)} = A$ . Tomando o cociclo derivada, temos:

$$\begin{aligned} \chi^+(x, v) &= \limsup \frac{1}{m} \log \|DT_{(x,y)}^m v\| \\ &= \limsup \frac{1}{m} \log \|A^m v\|, \end{aligned}$$

ou seja, os expoentes de Lyapunov para  $T$  em qualquer ponto  $(x, y) \in \mathbb{T}^2$  e  $v \in \mathbb{R}^n$  são equivalentes aos expoentes de Lyapunov dados pelo cociclo gerado pela matriz  $A$ , avaliado nos autovetores  $v_1$  e  $v_2$ .

Pela propriedade 4 acima, qualquer vetor  $v$  em  $T_{(x,y)}\mathbb{T}^2$  pode ser escrito como  $v = \alpha v_1 + \beta v_2$ , para únicos  $v_1 \in E_1$  e  $v_2 \in E_2$ . Pelo Lema 2.4.2, o expoente de Lyapunov para  $v$  é dado por:

$$\chi^+(x, v) = \chi^+(x, \alpha v_1 + \beta v_2) = \max\{\chi^+(x, v_1), \chi^+(x, v_2)\}.$$

Assim, para  $i = 1$  ou  $2$ , temos:

$$\begin{aligned} \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|A^m v_i\| &= \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\lambda^m v_i\| \\ &= \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} [\log |\lambda^m| + \log \|v_i\|] \\ &= \limsup_{m \rightarrow \infty} [\log |\lambda^m|^{1/m} + \frac{1}{m} \log \|v_i\|] = \log |\lambda|. \end{aligned}$$

Portanto, os expoentes de Lyapunov de  $T$  são

$$\begin{aligned} \chi_1(x) &= \log \lambda_1 = \log \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right), \\ \chi_2(x) &= \log \lambda_2 = \log \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right). \end{aligned}$$

Definimos expoente de Lyapunov de um fluxo  $X^t$  como

$$\chi^+(X, x, v) := \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|DX_x^T \cdot v\|.$$

Note que, para  $t$  suficientemente grande, temos

$$\chi^+(x, v) \approx \frac{1}{t} \log \|DX_x^t \cdot v\|,$$

donde

$$e^{t\chi^+(x, v)} \approx \|DX^t \cdot v\|.$$

Assim, vemos que o expoente de Lyapunov serve para estimar a taxa de expansão dos vetores no espaço tangente.

**Exemplo 2.4.7.** Seja  $(X^t)_{t \in \mathbb{R}}$  um fluxo Anosov em uma variedade tridimensional  $M$ , que é definido por um campo vetorial e preserva o volume Riemanniano  $\mu$ . Fixamos um ponto  $p_0 \in M$  e introduzimos um sistema de coordenadas  $\phi = (x, y, z)$  em  $B(p_0, d)$  com  $d > 0$  de modo que  $\phi(p_0) = 0$ , o que simplificamos a notação botando  $p_0 = 0$ , e  $X = \partial/\partial z$ .

Para cada  $\varepsilon > 0$ , seja  $T_\varepsilon = S^1 \times D_\varepsilon \subset B(0, d)$  o toro sólido obtido ao se rotacionar o disco

$$D_\varepsilon = \{(x, y, z) \in B(0, d); x = 0 \text{ e } (y - d/2)^2 + z^2 \leq (\varepsilon d)^2\}$$

em torno do eixo  $z$ . Um ponto no toro sólido pode ser representado como  $(\theta, y, z)$ , com  $\theta \in S^1$  e  $(y, z) \in D_\varepsilon$ .

Para todo  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ , consideramos a seção transversal do toro sólido  $\Pi_\alpha = \{(\theta, y, z); \theta = \alpha\}$  e construímos um novo campo vetorial em  $M \setminus T_\varepsilon$ , o qual denotaremos  $\tilde{X}$ .

**Lema 2.4.8.** *Existe um campo vetorial  $\tilde{X}$  de classe  $C^\infty$  em  $M \setminus T_\varepsilon$  tal que o fluxo  $\tilde{X}^t$  gerado por ele satisfaz as seguintes propriedades*

1.  $\tilde{X}|_{M \setminus T_{2\varepsilon}} = X|_{M \setminus T_{2\varepsilon}}$ .
2. Para qualquer  $0 \leq \alpha, \beta \leq 2\pi$  o campo vetorial  $\tilde{X}|_{\Pi_\beta}$  é a imagem do campo vetorial  $\tilde{X}|_{\Pi_\alpha}$  pela rotação ao longo do eixo  $z$  que leva  $\Pi_\alpha$  em  $\Pi_\beta$ .
3. Para todo  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ , os únicos 2 pontos fixos do fluxo  $\tilde{X}^t|_{\Pi_\alpha}$  são aqueles na interseção de  $\Pi_\alpha$  com os planos  $z = \pm \varepsilon d$ .
4. Para todo  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$  e  $(y, z) \in D_{2\varepsilon} \setminus \text{int } D_\varepsilon$ , a trajetória do fluxo  $\tilde{X}^t|_{\Pi_\alpha}$  passando pelo ponto  $(y, z)$  é invariante pela simetria  $(\alpha, y, z) \mapsto (\alpha, y, -z)$ .
5. O fluxo  $\tilde{X}^t|_{\Pi_\alpha}$  preserva a medida condicional induzida por  $\mu$  no conjunto  $\Pi_\alpha$ .

**Demonstração.** [3, Pág 71].

□

No conjunto  $T_{2\varepsilon} \setminus \text{int } T_\varepsilon$ , introduzimos as coordenadas  $\theta_1, \theta_2, r$  com  $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 2\pi$  e  $\varepsilon d \leq r \leq 2\varepsilon d$  tal que o conjunto dos pontos fixos de  $\tilde{X}^t$  é composto daqueles em que  $r = \varepsilon d$  e  $\theta_1 = 0$  ou  $\theta_1 = \pi$ .

Considere o fluxo em  $T_{2\varepsilon} \setminus \text{int } T_\varepsilon$  definido por

$$(\theta_1, \theta_2, r, t) \mapsto (\theta_1, \theta_2 + [2 - r/(\varepsilon d)]^4 t \cos \theta_1, r)$$

e seja  $\hat{X}$  o campo vetorial correspondente. Defina

$$Y(x) = \begin{cases} X(x), & x \in M \setminus \text{int } T_{2\varepsilon}, \\ \tilde{X}(x) + \hat{X}(x), & x \in \text{int } T_{2\varepsilon} \setminus \text{int } T_\varepsilon. \end{cases}$$

O campo  $Y$  assim definido gera um fluxo  $Y^t$  em  $M \setminus \text{int } T_\varepsilon$ .

**Proposição 2.4.9.** *O fluxo  $Y^t$  preserva a medida  $\mu$ , é ergódico, não tem pontos fixos e é não-uniformemente hiperbólico. Além disso, para  $\mu$ -quase todo ponto  $x \in M \setminus T_{2\varepsilon}$ , temos*

$$\chi(x, v) < 0 \text{ se } v \in E^s(x) \text{ e } \chi(x, v) > 0 \text{ se } v \in E^u(x),$$

onde  $E^s(x)$  e  $E^u(x)$  são os subespaços estável e instável do fluxo  $X^t$  no ponto  $x$ , respectivamente.

**Demonstração.** Pela construção de  $Y^t$ , ele preserva a medida  $\mu$ . Como os campos vetoriais  $\tilde{X}$  e  $\hat{X}$  comutam,  $Y^t$  é ergódico. O fato de  $Y^t$  não ter pontos fixos também surge da construção do fluxo. Provemos a última afirmação.

Considere a seguinte função:

$$T(x, t) := \int_0^t \varphi_{T_{2\varepsilon}}(X^s(x)) ds,$$

onde  $\varphi_{T_{2\varepsilon}}$  denota a função característica de  $T_{2\varepsilon}$ . Do Teorema Ergódico de Birkhoff para fluxos, temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{T(t, x)}{t} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \varphi_{T_{2\varepsilon}}(X^s(x)) ds \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int \varphi_{T_{2\varepsilon}} d\mu = \mu(T_{2\varepsilon}). \end{aligned}$$

para  $\mu$ -quase todo ponto  $x \in M$ .

Fixe um ponto  $x \in M \setminus T_{2\varepsilon}$ . Considere um momento de tempo  $t_1$  no qual a trajetória  $Y^t(x)$  adentra o conjunto  $T_{2\varepsilon}$  e o próximo momento  $t_2$  onde essa trajetória sai

de  $T_{2\varepsilon}$ . Dado um vetor  $v \in E^u(x)$  denote por  $\tilde{v}_i$  a projeção ortogonal do vetor  $D_x Y^{t_i} v$  no plano  $(x, y)$  para  $i = 1, 2$ .

Segue da construção de  $\tilde{X}^t$  e  $Y^t$  que  $\|\tilde{v}_1\| \geq \|\tilde{v}_2\|$ . Como  $E^u(x)$  depende continuamente de  $x$ , existe  $k \geq 1$  (independente de  $x$ ,  $t_1$  e  $t_2$ ) tal que

$$\|D_x Y^t v\| \geq k \|D_x X^{t-T(x,t)} v\|.$$

Segue que, para  $\mu$ -quase todo ponto  $x \in M \setminus T_{2\varepsilon}$  e  $v \in E^u(x)$ ,

$$\begin{aligned} \chi(x, v) &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|D_x Y^t v\| \\ &\geq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log k \|D_x X^{t-T(x,t)} v\| \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} [\log \|D_x X^t v\| - \log \|D_x X^{T(x,t)} v\|] \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} [\log \|D_x X^t v\| - \mu(T_{2\varepsilon}) \log \|D_x X^t v\|] \\ &= (1 - \mu(T_{2\varepsilon})) \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|D_x X^t v\| > 0, \end{aligned}$$

quando  $\varepsilon$  é suficientemente pequeno. Ao repetirmos o argumento com  $Y^{-t}$ , obtemos  $\chi(x, v) < 0$  para  $\mu$ -quase todo ponto  $x \in M \setminus T_{2\varepsilon}$  e  $v \in E^s(x)$ .  $\square$

Defina  $M_1 = M \setminus T_\varepsilon$  e considere  $(\tilde{M}_1, \tilde{Y}^t)$  uma cópia do fluxo  $(M_1, Y^t)$ . Podemos colar as variedades  $M_1$  e  $\tilde{M}_1$  ao longo das fronteiras  $\partial T_\varepsilon$ , obtendo uma variedade riemanniana  $D$  com bordo. Definimos um fluxo  $F^t$  em  $D$  por:

$$F^t(x) = \begin{cases} Y^t(x), & x \in M_1, \\ \tilde{Y}^t(x), & x \in \tilde{M}_1. \end{cases}$$

Claramente,  $F^t$  é não-uniformemente hiperbólico e preserva a medida  $\mu$ .

Neste exemplo, construímos um fluxo com expoentes de Lyapunov não nulos, a partir de um fluxo Anosov.



### 3 Expoentes de Lyapunov em Campos Diferenciáveis

#### 3.1 Introdução e Definições

Todo o desenvolvimento deste capítulo tem como objetivo demonstrarmos o seguinte Teorema, devido à J. Bochi [12]:

**Teorema 3.1.1.** *Existe um subconjunto residual  $\mathcal{R} \subseteq \mathfrak{X}_\mu^1(M)^*$  tal que, se  $X \in \mathcal{R}$ , temos que ou  $X$  é Anosov ou para  $\mu$ -q.t.p.  $p \in M$ , todos os expoentes de Lyapunov de  $X^t$  são nulos.*

Seja  $M$  uma variedade riemanniana compacta de classe  $C^\infty$  sem bordo e tridimensional. Denotamos  $\mu$  uma forma de volume em  $M$ ,  $X : M \rightarrow TM$  um campo vetorial em  $M$  e  $X^t : M \rightarrow M$  seu fluxo associado, isto é,  $\frac{dX^t}{dt}|_{p=s} = X(X^s(p))$ . Denotamos  $\mathfrak{X}^r(M)$  o espaço dos campos vetoriais de classe  $C^r$  em  $M$  e  $\mathfrak{X}_\mu^r(M)$  o subespaço dos campos vetoriais de classe  $C^r$  que têm divergente nulo em  $M$ , e portanto, preservam a forma de volume  $\mu$ . Assumimos que o espaço  $\mathfrak{X}_\mu^r(M)$  está munido da topologia  $C^1$ . O fluxo  $X^t$  possui um mapa tangente  $DX_p^t$  que é a solução da equação diferencial linear não autônoma  $\dot{u}(t) = DX_{X^t(p)}u(t)$

O Teorema a seguir é de grande importância para o estudo de expoentes de Lyapunov de campos vetoriais, pois nos dá as condições para a existências dos mesmos. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [22].

**Teorema 3.1.2** (Teorema de Oseledets). *Considere  $X \in \mathfrak{X}_\mu^1(M)$  e seu fluxo associado  $X^t : M \rightarrow M$ . Temos, para  $\mu$ - q.t.p.  $x \in M$ , uma decomposição mensurável do espaço tangente em  $x$*

$$T_x M = E_x^1 \oplus E_x^2 \oplus \dots \oplus E_x^{k(x)}$$

denotada decomposição de Oseledets, e números reais  $\lambda_1(x), \dots, \lambda_{k(x)}(x)$  chamados Expoentes de Lyapunov, tal que:

- $DX_x^t(E_x^i) = E_{X^t(x)}^i$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|DX_x^t \cdot v^i\| = \lambda_i(x)$

para qualquer  $v_i \in E_x^i \setminus \vec{0}$  e  $i = 1, \dots, k(x)$ .

A partir do Teorema de Oseledets enunciado acima, podemos concluir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |\det(DX_x^t)| = \sum_{i=1}^{k(x)} \lambda_i(x) \dim(E_x^i).$$

**Corolário 3.1.3.**  $\chi^+(X, x) = \sup_{v \in T_x M} \chi(X, x, v)$

Dizemos que  $\sigma \in M$  é uma **singularidade** de  $X$  se  $X(\sigma) = \vec{0}$ , e  $S(X)$  denota o conjunto das singularidades de  $M$ . O complementar de  $S(X)$  é o conjunto dos **pontos regulares** do fluxo de  $X$ . Para um ponto regular de  $X$ , denote por

$$N_z = \{v \in T_z M; \langle v, X(z) \rangle = 0\}$$

o complemento ortogonal da direção do fluxo  $[X]_z = [X(z)]$  em  $T_z M$ . Denote por  $O_z : T_z M \rightarrow N_z$  a projeção ortogonal de  $T_z M$  em  $N_z$ . Para todo  $t \in \mathbb{R}$ , defina

$$P_X^t(z) : N_z \rightarrow N_{X^t(z)} \text{ por } P_X^t(z) = O_{X^t(z)} \circ DX_z^t.$$

Note que  $P = \{P_X^t(z); t \in \mathbb{R}, X(z) \neq \vec{0}\}$  satisfaz a identidade do cociclo:

$$P_X^{s+t}(z) = P_X^s(X^t(z)) \circ P_X^t(z), \text{ para todo } t, s \in \mathbb{R}.$$

A família  $P$  é chamada fluxo linear de Poincaré de  $X$ .

**Definição 3.1.4.** *Seja  $\Lambda$  um subconjunto  $X^t$ -invariante de  $M$ . Uma decomposição do fibrado normal  $N = N^1 \oplus N^2$  é dita **m-dominada** para o fluxo linear de Poincaré se ela é  $P_X^t$ -invariante e podemos encontrar  $m \in \mathbb{Z}$  tal que, para todo  $x \in \Lambda$ , temos*

$$\Delta(X, m) = \frac{\|P_X^m(x)|N^1\|}{\|P_X^m(x)|N^2\|} \leq \frac{1}{2}$$

Neste contexto, podemos reenunciar o Teorema de Oseledets para os Expoentes de Lyapunov associados ao fluxo linear de Poincaré, de acordo com [5, Teorema 2.1], da seguinte maneira:

**Teorema 3.1.5.** *Seja  $X \in \mathfrak{X}_\mu^1(M)$ . Para  $\mu$ -q.t.p.  $p \in M$ , existe o Expoente de Lyapunov superior  $\lambda^+(X, p)$  definido pelo limite  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|P_X^t(p)\|$  que é uma função de  $p$  mensurável e não negativa.*

Seja  $\mathfrak{X}_\mu^r(M)^*$  o subconjunto de  $\mathfrak{X}_\mu^r(M)$  de campos sem singularidades. Usaremos a seguinte proposição para demonstrar o Lema 3.1.7:

**Proposição 3.1.6.** *Seja  $X \in \mathfrak{X}_\mu^2(M)^*$  e  $\Lambda_m$  um conjunto  $X^t$ -invariante com uma decomposição  $m$ -dominada para o fluxo linear de Poincaré. Então,  $\mu(\overline{\Lambda_m}) = 0$  ou  $X$  é Anosov.*

**Demonstração.** Veja a Proposição 2.5.1 em [6]. □

**Lema 3.1.7.** *Existe  $D \subseteq \mathfrak{X}_\mu^1(M)^*$  tal que  $D$  é  $C^1$ -denso e, se  $X \in D$ , então  $X^t$  é aperiódico (isto é,  $\mu(\text{Per}(X^t)) = 0$ ),  $X$  é de classe  $C^s$ , com  $s \geq 2$ , e todos os conjuntos com decomposição  $m$ -dominada para o fluxo linear de Poincaré tem medida nula ou total*

**Demonstração.** Por uma versão do Teorema de Kupka-Smale dada por Robinson em [24, Teorema 1], existe um conjunto  $C^s$ -residual de campos vetoriais tal que os fluxos gerados possuem uma quantidade enumerável de pontos periódicos. Como  $\mathfrak{X}_\mu^s(M)$  munido da topologia  $C^s$  é um espaço de Baire, segue que temos um conjunto  $\mathcal{D}$   $C^s$ -denso, e em particular um conjunto  $C^1$ -denso, de campos vetoriais com uma quantidade enumerável de órbitas periódicas em  $\mathfrak{X}_\mu^s(M)$ . Sabemos que  $\mathfrak{X}_\mu^s(M)$  é  $C^1$ -denso em  $\mathfrak{X}_\mu^1(M)$ , então  $\mathcal{D}$  é  $C^1$ -denso em  $\mathfrak{X}_\mu^1(M)$  por transitividade, e todos os campos vetoriais em  $\mathcal{D}$  são de classe  $C^s$

Como  $\mathcal{D}$  possui uma quantidade enumerável de órbitas periódicas, segue que  $X \in \mathcal{D} \Rightarrow X^t$  é aperiódico. Usando a Proposição 3.1.6, está demonstrado o Lema.  $\square$

### 3.2 Estratégia Para a Demonstração do Teorema 3.1.1

Dado  $X \in \mathfrak{X}_\mu^1(M)$ , seja  $\lambda^+(X, p) := \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|P_X^t(p)\|$  o expoente de Lyapunov superior, cuja existência é garantida pelo Teorema de Oseledets no contexto de fluxos lineares de Poincaré.

Definimos a **função entropia** sobre qualquer conjunto  $\Gamma \subseteq M$  como

$$\begin{aligned} \text{LE}(\cdot, \Gamma) : \mathfrak{X}_\mu^1(M) &\rightarrow [0, +\infty) \\ X &\mapsto \int_\Gamma \lambda^+(X, p) d\mu(p) \end{aligned}$$

**Observação 1.** Seja  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $W$  é um espaço topológico. A função  $f$  é semicontínua superior se, e somente se, para todo  $\delta > 0$  o conjunto  $\{x \in W; f(x) < \delta\}$  é aberto. Além disso, o ínfimo de funções contínuas é uma função semicontínua superior.

**Lema 3.2.1.**  $LE(X, \Gamma) = \inf_{n \geq 1} \frac{1}{n} \int_\Gamma \log \|P_X^n(p)\| d\mu(p)$ . Portanto,  $LE(\cdot, \Gamma)$  é uma função semicontínua superior.

**Demonstração.** Temos:

$$LE(X, \Gamma) = \int_\Gamma \lambda^+(X, p) d\mu(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_\Gamma \log \|P_X^n(p)\| d\mu(p).$$

Note que a sequência definida como  $x_n(X) = \int_\Gamma \log \|P_X^n(p)\| d\mu(p)$  é subaditiva. De fato,

$$\begin{aligned}
x_{n+m}(X) &= \int_{\Gamma} \log \|P_X^{n+m}(p)\| d\mu(p) \\
&= \int_{\Gamma} \log \|P_X^n(X^m(p)) \circ P_X^m(p)\| d\mu(p) \\
&\leq \int_{\Gamma} \log [\|P_X^n(X^m(p))\| \cdot \|P_X^m(p)\|] d\mu(p) \\
&= \int_{\Gamma} \log \|P_X^n(X^m(p))\| d\mu(p) + \int_{\Gamma} \log \|P_X^m(p)\| d\mu(p) \\
&= x_n(X^m) + x_m(X).
\end{aligned}$$

$$\text{Assim, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} x_n(X) = \inf_{n \geq 1} \frac{1}{n} x_n(X).$$

Como cada  $x_n(X)$  é uma função contínua, pela observação anterior segue que  $LE(X, \Gamma)$  é semicontínua superior.  $\square$

**Proposição 3.2.2.** *Seja  $X \in \mathfrak{X}_{\mu}^2(M)^*$ , com  $X^t$  aperiódico e com conjuntos hiperbólicos de medida nula. Sejam dados  $\varepsilon, \delta > 0$ . Então, existe um campo vetorial  $Y$  conservativo de classe  $C^1$  que está  $\varepsilon$ - $C^1$ -próximo de  $X$  tal que  $LE(Y) < \delta$ .*

Agora, apresentamos a demonstração do Teorema 3.1.1:

**Demonstração.** Pelo Lema 3.1.7, temos um conjunto denso  $D$  tal que todo  $X$  em  $D$  é de classe  $C^2$ ,  $X^t$  é aperiódico e com conjuntos hiperbólicos tendo medida nula ou total. Denotemos por  $\mathcal{A}$  o conjunto dos campos vetoriais conservativos Anosov, e temos que  $\mathcal{A}$  é um conjunto aberto.

Para todo  $k \in \mathbb{N}$ , definimos o conjunto  $\mathcal{A}_k := \{X \in \mathfrak{X}_{\mu}^1(M)^*; LE(X) < 1/k\}$ . Pelo Lema 3.2.1 temos que a função entropia,  $LE$ , é uma função semicontínua superior, donde os conjuntos  $\mathcal{A}_k$  são abertos para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Fixemos algum  $k \in \mathbb{N}$  e tome  $\delta = 1/k > 0$ . Seja  $X \in \mathcal{A}^c$ , e note que neste conjunto, todos os conjuntos hiperbólicos têm medida nula, pela Proposição 3.1.6. Então, dado  $\varepsilon > 0$ , pela Proposição 3.2.2, existe um campo vetorial  $Y$  conservativo de classe  $C^1$  que está  $\varepsilon$ - $C^1$ -próximo de  $X$  de modo que  $LE(Y) < 1/k$ , o que implica que  $Y \in \mathcal{A}_k$ . Isto prova que  $\mathcal{A}_k$  é  $C^1$ -denso em  $\mathcal{A}^c$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Logo, o conjunto definido por

$$\mathcal{R} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{A} \cup \mathcal{A}_k$$

é um subconjunto  $C^1$ -residual, pois  $\text{int}(\mathcal{A} \cup \mathcal{A}_k) = \text{int}(\mathcal{A}) \cup \text{int}(\mathcal{A}_k) = \mathcal{A} \cup \mathcal{A}_k$ , que é  $C^1$ -denso em  $\mathfrak{X}_{\mu}^1(M)$  pois  $\mathcal{A}$  é denso em si mesmo e  $\mathcal{A}_k$  é denso em  $\mathcal{A}^c$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Por outro lado,  $\mathcal{R} = \mathcal{A} \cup (\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_k) = \mathcal{A} \cup \{X \in \mathfrak{X}_{\mu}^1(M); LE(X) = 0\}$ , logo, para  $X \in \Omega$  tem-se que ou  $X$  é um campo vetorial Anosov ou  $LE(X) = \int_M \lambda^+ d\mu(p) = 0$ . Esta igualdade implica que  $\mu$ -quase todo ponto  $p \in M$  possui todos os expoentes de Lyapunov nulos, e portanto, o Teorema está demonstrado.  $\square$

## 4 Novo Expoente de Lyapunov

Em 2010, Bessa e Silva definiram um novo expoente de Lyapunov para homeomorfismos (ver [10]), não dependendo da transformação derivada, e provaram que existe um subconjunto denso do conjunto de homeomorfismos que preservam área definidos em uma superfície compacta, sem bordo e conexa, no qual todo elemento tem expoente de Lyapunov igual a zero, para Lebesgue quase todo ponto. Além disso, em outro resultado também mostraram que a função que associa um homeomorfismo que preserva densidade de área munido da topologia  $C^0$  à integral do seu novo expoente de Lyapunov superior em toda a superfície não é semicontínua superior.

Inspirados nesse trabalho, para campos vetoriais de classe  $C^0$ , isto é, que não necessariamente são diferenciáveis, iremos definir um novo expoente de Lyapunov, que não depende da derivada do campo, e mostraremos que no caso em que o campo é diferenciável, a nova definição do expoente de Lyapunov coincide com a clássica, apresentada no capítulo anterior. Após estabelecida a definição, vamos buscar demonstrar resultados análogos aos de Bessa e Silva.

Assuma que  $M$  está munida de uma métrica riemanniana (podemos assumir isso devido à Proposição (2.1.22)) e denote por  $\|\cdot\|$  a norma induzida nos espaços tangentes. Seja  $\mathfrak{X}_\mu^0(M)$  o espaço dos campos vetoriais  $C^0$  que preservam volume. Munimos este espaço com a norma

$$\|X\| = \sup_{p \in M} \|X(p)\|.$$

Tal norma é chamada norma  $C^0$ . Pediremos neste capítulo que os campos vetoriais  $C^0$  sejam de Lipschitz com relação à norma  $C^0$ , pois assim temos a garantia de que tais campos geram fluxo. Denotaremos por  $\mathfrak{X}_\mu^{0,L}(M)$  o espaço dos campos vetoriais  $C^0$  Lipschitz em  $M$ .

### 4.1 Definição e Resultados Preliminares

**Definição 4.1.1.** *Dado um campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ ,  $0 \leq r \leq \infty$ , e  $x \in M$ , para cada  $\delta > 0$  e  $t \in \mathbb{R}$ , uma **bola dinâmica** de  $X$  no ponto  $x$  é o conjunto*

$$B_x(\delta, t) = \{y \in M \mid d(X^j(x), X^j(y)) < \delta \text{ para } j \in [0, t]\}.$$

*Ou seja, a bola dinâmica  $B_x(\delta, t)$  é a interseção das pré-imagens de bolas centradas em  $X^j(x)$ , para  $j \in [0, t]$ , de raio  $\delta$ . Em símbolos, isto é*

$$B_x(\delta, t) = \bigcap_{j \in [0, t]} X^{-j} B(X^j(x), \delta).$$

**Definição 4.1.2.** *Seja  $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ ,  $0 \leq r \leq \infty$ . Para cada  $x \in M$  e  $v \in T_x M$ , o **novo expoente de Lyapunov de  $X$  em  $x$**  é definido por*

$$\chi_N^+(X, x, v) := \limsup_{t \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{t} \log \sup_{y \in (B_x(\delta, t) \setminus \{x\}) \cap L_{x,v}} \Delta(X, t, x, y)$$

onde

$$\Delta(X, t, x, y) := \frac{\|X^t(x) - X^t(y)\|}{\|x - y\|}, \text{ e}$$

$$L_{x,v} := \{x + kv \mid k \in \mathbb{R}\}.$$

Para cada  $x \in M$ , definimos o **novo expoente de Lyapunov superior** como

$$\chi_N^+(X, x) := \limsup_{t \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{t} \log \sup_{y \in B_x(\delta, t) \setminus \{x\}} \Delta(X, t, x, y).$$

Das definições, segue que  $\chi_N^+(X, x, v) \leq \chi_N^+(X, x)$ .

Os seguintes resultados nos mostram que a nova definição de expoente de Lyapunov está, de certa forma, coerente com a clássica. Primeiro, mostraremos que sob condição de diferenciabilidade do campo, a nova definição coincide com a clássica. Em seguida, mostraremos que o novo expoente de Lyapunov é, assim como o clássico, invariante pelas órbitas de quase todo ponto da variedade  $M$ .

**Teorema 4.1.3.** *Se  $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ ,  $1 \leq r \leq \infty$ , então para todo  $x \in M$  e  $v \in T_x M$ , o expoente de Lyapunov clássico coincide com o novo expoente de Lyapunov.*

**Demonstração.** Sejam  $(x, v) \in TM$  arbitrário e  $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ . Primeiro, mostremos que  $\chi_N^+(X, x, v) \leq \chi^+(X, x, v)$ . Como  $X$  é um campo vetorial diferenciável, segue que para todo  $t \in \mathbb{R}$ , existe uma função  $r_t$  tal que

$$\|X^t(x) - X^t(y)\| = \|DX^t(y - x) + r_t(y - x)\|, \text{ e}$$

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{r_t(y - x)}{\|y - x\|} = 0.$$

Daí, temos

$$\begin{aligned} \sup_{y \in (B_x(\delta, t) \setminus \{x\}) \cap L_{x,v}} \Delta(X, t, x, y) &\leq \sup_{y \in (B_x(\delta, t) \setminus \{x\}) \cap L_{x,v}} \frac{\|DX_x^t(y - x)\|}{\|y - x\|} + \\ &\quad \sup_{y \in (B_x(\delta, t) \setminus \{x\}) \cap L_{x,v}} \frac{\|r_t(y - x)\|}{\|y - x\|} \\ &\leq \|DX_x^t|_{L_{x,v}}\| + \sup_{y \in (B_x(\delta, t) \setminus \{x\}) \cap L_{x,v}} \frac{\|r_t(y - x)\|}{\|y - x\|} \\ &= \|DX_x^t|_{L_{x,v}}\| + \phi_{t,x}(\delta). \end{aligned}$$

onde  $\phi_{t,x}(\delta) := \sup_{y \in (B_x(\delta,t) \setminus \{x\}) \cap L_{x,v}} \frac{\|r_t(y-x)\|}{\|y-x\|}$ .

Dados  $\delta_1 < \delta_2$  números reais positivos, note que  $B_x(\delta_1, t) \subset B_x(\delta_2, t)$ , donde segue que  $\phi_{t,x}(\delta)$  é decrescente, e portanto,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \phi_{t,x}(\delta) = 0$ . Assim, se  $\delta \rightarrow 0$ , temos que  $y \rightarrow x$ , donde concluímos que

$$\begin{aligned} \chi_N^+(X, x, v) &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left[ \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{y \in (B_x(\delta,t) \setminus \{x\}) \cap L_{x,v}} \frac{DX_x^t(y-x)}{\|y-x\|} + \lim_{\delta \rightarrow 0} \phi_{t,x}(\delta) \right] \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|DX^t v\| = \chi^+(X, x, v). \end{aligned}$$

Para a desigualdade contrária, considere  $v \in T_x M$  e  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno de modo que  $x + \varepsilon v \in B_x(t, \delta)$ . Daí,

$$\begin{aligned} \sup_{y \in (B_x(\delta,t) \setminus \{x\}) \cap L_{x,v}} \Delta(X, t, x, y) &= \sup_{y \in (B_x(\delta,t) \setminus \{x\}) \cap L_{x,v}} \frac{\|X^t(x) - X^t(y)\|}{\|x-y\|} \\ &\geq \frac{\|X^t(x) - X^t(x + \varepsilon v)\|}{\|x - (x + \varepsilon v)\|} = \frac{\|X^t(x) - X^t(x + \varepsilon v)\|}{|\varepsilon|}. \end{aligned}$$

Pela diferenciabilidade de  $X$  em  $x$ , temos que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|X^t(x) - X^t(x + \varepsilon v)\|}{|\varepsilon|} = \|DX_x^t v\|$ , e note que quando  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} \chi_N^+(X, x, v) &\geq \limsup_{t \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{t} \log \frac{\|X^t(x) - X^t(x + \varepsilon v)\|}{|\varepsilon|} \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|DX_x^t v\| = \chi^+(X, x, v). \end{aligned}$$

Ou seja, das duas desigualdades obtemos  $\chi_N^+(X, x, v) = \chi^+(X, x, v)$ .

Resta mostrarmos que  $\chi_N^+(X, x) = \chi^+(X, x)$ . Note que

$$\begin{aligned} \chi_N^+(X, x) &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{t} \log \sup_{y \in B_x(\delta,t) \setminus \{x\}} \Delta(X, t, x, y) \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left[ \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{y \in B_x(\delta,t) \setminus \{x\}} \frac{\|DX_x^t(y-x)\|}{\|y-x\|} + \lim_{\delta \rightarrow 0} \phi_{t,x}(\delta) \right] \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|DX_x^t v\| = \chi^+(X, x, v) \leq \chi^+(X, x). \end{aligned}$$

Pelo Corolário 3.1.3, temos

$$\chi^+(X, x) = \sup_{v \in T_x M} \chi^+(X, x, v) = \sup_{v \in T_x M} \chi_N^+(X, x, v).$$

Como  $\chi_N^+(X, x, v) \leq \chi_N^+(X, x)$ , segue que

$$\chi^+(X, x) = \sup_{v \in T_x M} \chi_N^+(X, x, v) \leq \chi_N^+(X, x).$$

□

**Teorema 4.1.4.** *Seja  $X \in \mathfrak{X}_\mu^{0,L}(M)$ . Se para todo  $\delta > 0$  suficientemente pequeno e todo  $t \in \mathbb{R}$  a função  $g_t^\delta : M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$g_t^\delta(x) = \sup_{y \in B_x(\delta, t) \setminus \{x\}} \log \Delta(X, t, x, y)$$

*é integrável, então para  $\mu$ -qtp  $x \in M$  temos*

$$\chi_N^+(X, x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{t} \log \sup_{y \in B_x(\delta, t) \setminus \{x\}} \Delta(X, t, x, y)$$

*e  $\chi_N^+(X, x) = \chi_N^+(X, X^s(x))$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ .*

**Demonstração.** Seja  $x \in M$ ,  $\delta > 0$  e  $t \in \mathbb{R}$ . Seja  $\varepsilon > 0$  qualquer. Temos

$$\begin{aligned} X^\varepsilon(B_x(\delta, t + \varepsilon)) &= X^\varepsilon \left( \bigcap_{s \in [0, t + \varepsilon]} X^{-s}(B(X^s(x), \delta)) \right) \\ &= \bigcap_{s \in [0, t + \varepsilon]} X^{-s + \varepsilon}(B(X^s(x), \delta)) \\ &\subseteq \bigcap_{s \in [\varepsilon, t + \varepsilon]} X^{-s + \varepsilon}(B(X^s(x), \delta)) \\ &= \bigcap_{r \in [0, t]} X^{-r}(B(X^{r + \varepsilon}(x), \delta)) \\ &= \bigcap_{r \in [0, t]} X^{-r}(B(X^r(X^\varepsilon(x)), \delta)) = B_{X^\varepsilon(x)}(\delta, t). \end{aligned}$$

Assim, para todos  $t, s \in \mathbb{R}$  temos

$$\begin{aligned} g_{t+s}^\delta(x) &= \sup_{y \in B_x(\delta, t+s) \setminus \{x\}} \log \Delta(X, t + s, x, y) = \\ &= \sup_{y \in B_x(\delta, t+s) \setminus \{x\}} \log \left[ \frac{\|X^{t+s}(x) - X^{t+s}(y)\| \|X^s(x) - X^s(y)\|}{\|X^s(x) - X^s(y)\| \|x - y\|} \right] \leq \\ &\leq \sup_{y \in B_x(\delta, t+s) \setminus \{x\}} \log \frac{\|X^{t+s}(x) - X^{t+s}(y)\|}{\|X^s(x) - X^s(y)\|} + \sup_{y \in B_x(\delta, t+s) \setminus \{x\}} \log \frac{\|X^s(x) - X^s(y)\|}{\|x - y\|} \end{aligned}$$

Além disso, como  $B_x(\delta, t + s) \subseteq B_x(\delta, t)$ , e



$$\begin{aligned}
B_{X^s(x)}(\delta, t) &= \{u \in M \mid d(X^r(X^s(x)), X^r(u)) < \delta, r \in [0, t]\} \\
&= \{u \in M \mid d(X^{r+s}(x), X^r(u)) < \delta, r \in [0, t]\} \\
&\supseteq \{y \in M \mid d(X^{r+s}(x), X^r(X^s(y))) < \delta, r \in [0, t]\} \\
&\supseteq \{y \in M \mid d(X^r(x), X^r(y)) < \delta, r \in [0, s+t]\} \\
&= B_x(\delta, s+t).
\end{aligned}$$

obtemos que

$$\begin{aligned}
g_{t+s}^\delta(x) &\leq \sup_{u \in B_{X^s(x)}(\delta, t)} \log \frac{\|X^t(X^s(x)) - X^t(u)\|}{\|X^s(x) - u\|} + \sup_{y \in B_x(\delta, s)} \log \Delta(X, s, x, y) = \\
&= \sup_{u \in B_{X^s(x)}(\delta, t)} \log \Delta(X, t, X^s(x), u) + \sup_{y \in B_x(\delta, s)} \log \Delta(X, s, x, y) = \\
&= g_t^\delta(X^s(x)) + g_s^\delta(x).
\end{aligned}$$

Portanto,  $(g_t^\delta)_{t \in \mathbb{R}}$  é um fluxo subaditivo. Pelo Teorema Ergódico Subaditivo para fluxos (2.3.22), concluímos que o seguinte limite existe para  $\mu$ -quase todo ponto  $x \in M$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sup_{y \in B_x(\delta, t)} \log \Delta(X, t, x, y).$$

Pelo Teorema Ergódico de Birkhoff para fluxos, segue que  $g_t^\delta(X^s(x)) = g_t^\delta(x)$ ,  $\forall s \in \mathbb{R}$ . Por consequência,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{t} \log g_t^\delta(X^s(x)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{t} \log g_t^\delta(x),$$

ou seja,  $\chi_N^+(X, X^s(x)) = \chi_N^+(X, x)$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ . □

## 4.2 Densidade dos Campos com Novo Expoente de Lyapunov Nulo em $\mathfrak{X}_\mu^{0,L}(M)$

**Lema 4.2.1.** *Sejam  $M$  uma variedade diferenciável com ou sem fronteira e  $g \in \mathfrak{X}^{k+\alpha}$ , com  $k + \alpha > 0$ , tal que  $\int_M g = 0$ . Então existe  $v \in \mathfrak{X}^{k+\alpha+1}(M)$  tal que*

$$\begin{cases} \operatorname{div} v(x) = g(x), & \text{se } x \in M, \\ v(x) = 0, & \text{se } x \in \partial M. \end{cases}$$

Além disso, existe  $C = C(\alpha, k, M) > 0$  tal que  $\|v\|_{1+k+\alpha} \leq C \|g\|_{k+\alpha}$ . Se  $g$  é de classe  $C^\infty$ , então  $v$  também o é.

**Demonstração.** A demonstração deste Lema pode ser vista em [25, Lema 1]. □

Fixemos  $X \in \mathfrak{X}_\mu^1(M)$ ,  $\tau > 0$  e um ponto  $p \in M$  tal que  $X^t(p) \neq p$ , para todo  $t \in [0, \tau]$ . Defina

$$\Gamma(p, \tau) := \{X^t(p); t \in [0, \tau]\}.$$

Por uma mudança de coordenadas conservativa  $(\psi, U)$ , podemos considerar que estamos trabalhando no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , que  $p = \vec{0}$  e que  $\frac{1}{\|X(p)\|}X(p) = \frac{\partial}{\partial x_1} = v$  (veja [21]).

Dado  $r > 0$ ,  $B_r(p)$  denota a bola de dimensão  $n - 1$  centrada em  $p$  de raio  $r$  e contido em  $N_p = X(p)^\perp$ . Para  $r > 0$  e  $\delta > 0$ , definimos

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(p, \tau, r, \delta) := \bigcup_{t \in (-\delta, \tau + \delta)} X^t(B_r(p)).$$

If  $r$  and  $\delta$  are sufficiently small, the set  $\mathcal{T}$  is an open neighborhood of  $\Gamma(p, \tau)$ . By definition, such a neighborhood is leafed by flow orbits. Therefore, we call  $\mathcal{T}$  a flowbox.

Fixamos uma isometria linear  $i_p : N_p \rightarrow N_p$  e escolha uma família

$$(i_t)_{t \in (-\delta, \tau + \delta)}$$

tal que, para cada  $t \in (-\delta, \tau + \delta)$ ,  $i_t$  é uma isometria linear de  $N_{X^t(p)}$  em  $N_p$ ,  $i_0 = i_p$ , e esta família é de classe  $C^1$  no parâmetro  $t$ .

Tal família de isometrias pode ser obtida ao considerarmos a variedade  $M$  mergulhada em  $\mathbb{R}^n$ , para algum  $n$ , e escolhendo  $\tau_t$  uma família de um parâmetro em  $\mathbb{R}^n$  de isometrias de classe  $C^1$  neste parâmetro, tal que  $\tau_t(N_{X^t(p)}) = N_p$  e  $\tau_0$  é a identidade. Finalmente, definimos

$$i_t = i_0 \circ \tau_t|_{N_{X^t(p)}}.$$

Nas coordenadas locais fixadas  $(\psi, U)$ , para qualquer  $q \in \mathcal{T}$ , podemos escrever

$$q = \lambda_q v + w_q,$$

onde  $w_q \in N_p$  e  $\lambda_q \in \mathbb{R}$ . Defina

$$\ell(t) = \int_0^t \|X(X^s(p))\| ds;$$

Então,  $\ell_p$  é o comprimento do pedaço da órbita do ponto  $p$  entre os tempos 0 e  $t$ .

Existe  $t_q \in (-\delta, \tau + \delta)$  tal que  $\ell(t_q) = \lambda_q$ . Note que  $t_p = 0$ . Agora, definimos o fluxo de Poincaré associado a  $X$  em  $\mathcal{T}$ , o qual denotaremos  $\hat{X}^t$ .

Para  $t$  tal que  $t_q + t \in (-\delta, \tau + \delta)$ , defina

$$\hat{X}^t(q) := \ell(t_q + t)v + \left[ i_{(t_q+t)} \circ P_x^t(X^s(p)) \circ i_{t_q}^{-1}(w_q) \right],$$

onde  $P_X^t$  é o fluxo linear de Poincaré. Por definição,  $(\hat{X}^t)_t$  é um fluxo, isto é,  $\hat{X}^t \circ \hat{X}^s = \hat{X}^{t+s}$ , para todo  $t, s \in \mathbb{R}$  e  $\hat{X}^0 = id$ .

Seja  $\hat{X}$  o campo vetorial associado ao fluxo  $(\hat{X}^t)$ .  $\hat{X}$  é de classe  $C^2$  e tem divergente zero. Para vermos isso, calculemos a matriz de  $D\hat{X}^t(q)$  relativa à decomposição  $\mathbb{R}^n = N_p \oplus \langle v \rangle$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\ell(t_q + t)v)}{\partial x_1} &= \frac{\|X(X^{t_q+t}(p))\|}{\|X(X^{t_q}(p))\|}. \\ \frac{\partial(\ell(t_q + t)v)}{\partial x_2} &= 0. \\ \frac{\partial(i_{(t_q+t)} \circ P_x^t(X^s(p)) \circ i_{t_q}^{-1}(w_q))}{\partial x_2} &= i_{(t_q+t)} \circ P_x^t(X^{t_q}(p)) \circ i_{t_q}^{-1}(w_q). \end{aligned}$$

Note que o termo  $\frac{\partial(i_{(t_q+t)} \circ P_x^t(X^s(p)) \circ i_{t_q}^{-1}(w_q))}{\partial x_1}$  não é relevante aqui, pois no cálculo do determinante esse termo é multiplicado por zero. Organizando esses termos na matriz, temos

$$\begin{pmatrix} \frac{\|X(X^{t_q+t}(p))\|}{\|X(X^{t_q}(p))\|} & 0 \\ * & i_{t_q+t} \circ P_X^t(X^{t_q}(p)) \circ i_{t_q}^{-1} \end{pmatrix}$$

Como  $\hat{X}^t$  preserva volume e os  $i$ 's são isometrias, temos

$$\det(D\hat{X}^t(q)) = \frac{\|X(X^{t_q+t}(p))\|}{\|X(X^{t_q}(p))\|} \times \det(P_X^t(X^{t_q}(p))) = 1, \quad \forall t.$$

A fórmula de Liouville nos dá o seguinte:

$$\exp\left(\int_0^t \operatorname{div}(\hat{X}(\hat{X}^s(q))) ds\right) = \det D\hat{X}^t(q) = 1,$$

donde  $\operatorname{div}(\hat{X}) = 0$ .

**Lema 4.2.2.** *Dado um campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}_\mu^2(M)$  e um ponto não periódico  $p \in M$ , existe um difeomorfismo  $\Psi$  conservativo de classe  $C^2$  definido em uma vizinhança de  $p$  tal que  $T = \Psi_*X$ , onde  $T = \frac{\partial}{\partial x_1}$ .*

**Demonstração.** Usando as cartas de Moser [21, Lema 2], assumamos que  $p = \vec{0}$  e que  $X(p) = (1, 0, \dots, 0)$ . Para  $r > 0$  pequeno, denote por  $B_r(p)$  a bola de dimensão  $(n-1)$  centrada em  $p$  de raio  $r$  contida em  $N_p$ . Defina

$$f, g : B_r(p) \rightarrow \mathbb{R},$$

$f := 1$ ,  $g(x_2, \dots, x_n) := X_1(0, x_2, \dots, x_n)$  onde  $X_1$  é a projeção na primeira coordenada do campo vetorial  $X$ .

Aplicando o Teorema 1 de [21] obtemos um difeomorfismo  $C^2$

$$\varphi : B_r(p) \rightarrow \varphi(B_r(p))$$

tal que

$$g(\varphi(x_2, \dots, x_n)) \det D\varphi_{(x_2, \dots, x_n)} = \lambda,$$

para todo  $(x_2, \dots, x_n) \in B_r(p)$ , onde  $\lambda = \int g / \int f$  e  $\varphi|_{\partial B_r(p)} = Id$ .

Enfim, definimos a mudança de coordenadas  $C^2$   $\phi : \mathbb{R} \times B_r(p) \rightarrow \mathbb{R}^n$  como

$$\phi((x_2, \dots, x_n)) = X^{x_1 \lambda^{-1}}(0, \varphi((x_2, \dots, x_n))).$$

A matriz jacobiana de  $\phi$  relativa à decomposição  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{n-1}$  é dada por:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} X_1(X^{x_1 \lambda^{-1}}(0, \varphi(x_2, \dots, x_n))) & 0 \\ * & DX^{x_1 \lambda^{-1}}(0, \varphi((x_2, \dots, x_n))) D\varphi_{(x_2, \dots, x_n)} \end{pmatrix}$$

Avaliada no ponto  $(0, x_2, \dots, x_n)$ , a matriz jacobiana de  $\phi$  fica:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} X_1(0, \varphi(x_2, \dots, x_n)) & 0 \\ * & Id \cdot D\varphi_{(x_2, \dots, x_n)} \end{pmatrix}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\det J\phi(0, x_2, \dots, x_n) &= \frac{1}{\lambda} X_1(0, \varphi(x_2, \dots, x_n)) \cdot \det Id \cdot \det D\varphi_{(x_2, \dots, x_n)} \\
&= X_1(0, \varphi(x_2, \dots, x_n)) \cdot \frac{\det D\varphi_{(x_2, \dots, x_n)}}{\lambda} \\
&= X_1(0, \varphi(x_2, \dots, x_n)) \cdot \frac{1}{g(\varphi(x_2, \dots, x_n))} \\
&= g(\varphi(x_2, \dots, x_n)) \cdot \frac{1}{g(\varphi(x_2, \dots, x_n))} = 1,
\end{aligned}$$

$\forall (0, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R} \times B_r(p)$ .

Agora considere  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in \mathbb{R}^+ \times B_r(p)$ . Note que

$$\begin{aligned}
X^{\bar{x}_1 \lambda^{-1}}[\phi(x_1 - \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)] &= X^{\bar{x}_1 \lambda^{-1}}[X^{(x_1 - \bar{x}_1) \lambda^{-1}}(0, \varphi(\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n))] \\
&= X^{\bar{x}_1 \lambda^{-1}}(0, \varphi(\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)) \\
&= \phi(x_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$D\phi_{(x_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)} = DX_{\phi(x_1 - \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)}^{\bar{x}_1 \lambda^{-1}} D\phi_{(x_1 - \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)}$$

Avaliando em  $x_1 = \bar{x}_1$ , obtemos

$$D\phi_{(x_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)} = DX_{\phi(0, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)}^{\bar{x}_1 \lambda^{-1}} D\phi_{(0, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)}$$

Usando que  $\det(J\phi(0, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)) = 1$  e que  $X^t$  é um fluxo que preserva volume, segue que

$$\det D\phi_{(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)} = 1.$$

Note que podemos tomar  $T = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$ . Tome  $(x_1, \dots, x_n) = \phi(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ . Por uma conta simples, obtemos que

$$\begin{aligned}
\phi_* T(x_1, \dots, x_n) &= D\phi_{(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)} T(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \\
&= (X_1(X^{\bar{x}_1 \lambda^{-1}}(0, \varphi(x_2, \dots, x_n))), \dots, X_n(X^{\bar{x}_1 \lambda^{-1}}(0, \varphi(x_2, \dots, x_n)))) \\
&= X(\phi(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)).
\end{aligned}$$

Assim, tomando  $\Psi = \phi^{-1}$ , obtemos  $T = \Psi_*X$ .

□

**Lema 4.2.3.** *Seja  $X \in \mathfrak{X}_\mu^1(M)$ ,  $\tau > 0$  e  $p \in M$  tal que  $X^t(p) \neq p$ , para todo  $t \in [0, \tau]$ . Existe uma mudança de coordenadas conservativa  $C^2$  denotada  $\Phi$ , definida em uma vizinhança de  $\Gamma(p, \tau)$  tal que*

$$\hat{X} = \Phi_*X \text{ e } \Phi(X^t(p)) = \hat{X}^t(0), \forall t \in [0, \tau].$$

**Demonstração.** Pelo Lema anterior, sabemos que existe um difeomorfismo conservativo  $C^2$   $\Psi$  definido em uma caixa de fluxo contendo  $\Gamma(p, \tau)$  tal que  $T = \Psi_*X$ , onde  $T = \frac{\partial}{\partial x_1}$ .

Da mesma forma, existe um difeomorfismo  $C^2$  conservativo  $\hat{\Psi}$  definido numa caixa de fluxo contendo  $\Gamma(0, \tau)$  tal que  $T = \hat{\Psi}_*\hat{X}$ .

A menos de translações definidas no hiperplano  $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} \right\rangle^\perp$  e encolhendo as vizinhanças das definições destes mapas, podemos assumir que  $\Psi(p) = 0$  e que  $\hat{\Psi}(0) = 0$ . Finalmente, definimos  $\Phi = \hat{\Psi}^{-1} \circ \Psi$ . Daí, por um lado,

$$\hat{\Psi}^{-1} \circ T = \hat{X}.$$

Por outro lado,

$$\hat{X} = \hat{\Psi}^{-1} \circ T = (\hat{\Psi}^{-1} \circ \Psi)_*X.$$

Assim,  $\Phi_*X = \hat{X}$ . Para provar que  $\Phi(X^t(p)) = \hat{X}^t(0)$ , note que

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(X^t(p))}{dt} &= D\Phi_{X^t(p)} \left( \frac{dX^t}{dt}(p) \right) \Big|_{t=0} \\ &= D\Phi_p \left( \frac{dX^t}{dt}(p) \Big|_{t=0} \right) = D\Phi_p(X(p)) \\ &= \Phi_*X(\Phi(p)) = \hat{X}(\Phi(p)). \end{aligned}$$

□

O Teorema a seguir nos mostra que a partir de um campo vetorial, podemos colar um campo de modo que a transformação de primeiro retorno de Poincaré seja igual à identidade numa vizinhança de um ponto periódico, de forma conservativa, tal que este campo que colamos esteja  $C^0$ -próximo do campo original, mas não  $C^1$ -próximo.

**Teorema 4.2.4.** *Dado  $\varepsilon > 0$  e um campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}_\mu^1(M)$ , existe  $\xi_0 = \xi_0(\varepsilon, X)$  tal que para todo  $\tau \in [1, 2]$ , para qualquer ponto periódico  $p$  de período maior que 2,*

para qualquer caixa de fluxo suficientemente pequena  $\mathcal{T}$  de  $\Gamma(p, \tau)$  e para a família linear  $\{A_t = P_X^{-t}(p)\}_{t \in [0, \tau]}$ , existe  $Y \in X_\mu^1(M)$  tal que

1.  $Y$  está  $\varepsilon - C^0$ -próximo de  $X$ .
2.  $Y^t(p) = X^t(p), \forall t \in \mathbb{R}$ .
3.  $P_Y^\tau(p) = Id$
4.  $Y|_{\mathcal{T}^c} \equiv X|_{\mathcal{T}^c}$

**Demonstração.** Pelo Lema 4.2.3, temos uma mudança de coordenadas de classe  $C^2$ , denotada  $\Phi$ , definida numa caixa de fluxo  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(p, \tau, r, \delta)$ , tal que  $\hat{X} = \Phi_* X$  e  $\Phi(X^t(p)) = \hat{X}^t(0), \forall t \in [0, \tau]$ . Para obter o campo  $Y$ , vamos construir  $\hat{Y}$  de classe  $C^2$ , divergente zero, definido em  $\Phi(\mathcal{T})$  de modo que

- (a)  $\hat{Y}$  está  $\hat{\varepsilon} - C^0$ -próximo a  $\hat{X}$ .
- (b)  $\hat{Y}^t(0) = \hat{X}^t(0)$ , quando definido.
- (c)  $P_{\hat{Y}}^t(0) = P_{\hat{X}}^t(0) \circ B_t$ , onde  $B_t = i_p \circ A_t, t \in [0, \tau]$
- (d)  $\hat{Y}|_{\hat{\mathcal{T}}_2^c} = \hat{X}|_{\hat{\mathcal{T}}_2^c}$ , onde  $\hat{\mathcal{T}}_2 = \Phi(\mathcal{T}(p, \tau, r_2, \delta_2))$  para  $0 < r_2 < r$  e  $0 < \delta_2 < \delta$  a serem fixados.

$\hat{\varepsilon}$  depende apenas de  $\Phi$  e  $\mathcal{T}$  e assegura que se um campo  $Z$  está  $\hat{\varepsilon} - C^0$ -próximo a  $\hat{X}$  em  $\Phi(\mathcal{T})$ , então  $\Phi_*^{-1}(Z)$  está  $\varepsilon - C^0$ -próximo de  $X$  em  $\mathcal{T}$ .

Em seguida, definimos  $\tilde{Y} = \Phi_*^{-1}(\hat{Y})$  e, como  $\tilde{Y} \equiv X$  em  $\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}(p, \tau, r/2, \delta/2)$ , consideramos  $Y = \tilde{Y}$  em  $\mathcal{T}$  e  $Y = X$  em  $\mathcal{T}^c$ .

Por essa construção, os itens (1), (2) e (4) do Teorema são uma consequência direta das propriedades (a), (b) e (d) em  $\hat{Y}$ , respectivamente. Para obtermos (3) note que nossa construção de  $Y$  implicará que

$$P_{\hat{Y}}^t(p) = i_t \circ P_{\hat{X}}^t(p) \circ i_p^{-1}$$

Como  $P_{\hat{X}}^t(p) = i_t \circ P_X^t(p) \circ i_p^{-1}$  e  $B_t = i_p \circ A_t$ , se o item (c) vale, temos

$$\begin{aligned} P_{\hat{Y}}^\tau(0) &= P_{\hat{X}}^\tau(0) \circ i_p \circ A_\tau = \\ &= i_\tau \circ P_X^\tau(p) \circ i_p^{-1} \circ i_p \circ A_\tau \\ &= i_\tau \circ P_X^\tau(p) \circ A_\tau. \end{aligned}$$

$i_\tau : N_{X^\tau(p)} \rightarrow N_p, i_\tau^{-1} \circ P_{\hat{Y}}^\tau(0) = P_Y^\tau(p)$ , donde

$$P_Y^\tau(p) = P_X^\tau(p) \circ A_\tau.$$

Agora, expliquemos como construir o campo vetorial  $\hat{Y}$  definido em  $\Phi(\mathcal{T})$ .

Para isso, consideremos a equação linear variacional associada ao fluxo linear de Poincaré de  $X$ , que é a equação diferencial cuja solução nos fornece o fluxo linear de Poincaré, dada por

$$[P_{\hat{X}}^t(0)]' = (O_{\hat{X}^t(0)} \circ D\hat{X}_{\hat{X}^t(0)})(P_{\hat{X}}^t(0)),$$

onde  $'$  denota a derivada temporal e  $D$  a espacial. Para simplificarmos a notação, denotemos  $\Pi = O_{\hat{X}^t(0)}$  a projeção ortogonal em  $N_{\hat{X}^t(0)}$ .

Para obter  $\hat{Y}$  consideremos uma equação linear variacional análoga associada a  $P_{\hat{Y}(0)}^t$  para obtermos  $D\hat{Y}$  ao longo da órbita de 0 e definamos de modo linear o fluxo  $\hat{Y}^t$ .

Como pedimos que  $P_{\hat{Y}}^t(0) = P_{\hat{X}}^t(0) \circ B_t$ , temos

$$\begin{aligned} [P_{\hat{Y}}^t(0)]' &= [P_{\hat{X}}^t(0) \circ B_t]' = [P_{\hat{X}}^t(0)]' \circ B_t + P_{\hat{X}}^t(0) \circ B_t' = \\ &= (\Pi \circ D\hat{X}_{\hat{X}^t(0)})(P_{\hat{X}}^t(0)) \circ B_t + P_{\hat{X}}^t(0) \circ B_t' = \\ &= (\Pi \circ D\hat{X}_{\hat{X}^t(0)} \circ P_{\hat{Y}}^t(0)) + P_{\hat{X}}^t(0) \circ B_t' \circ P_{\hat{Y}}^{-t}(0) \circ P_{\hat{Y}}^t(0) = \\ &= [\Pi \circ D\hat{X}_{\hat{X}^t(0)} + (P_{\hat{X}}^t(0) \circ B_t') \circ (B_t^{-1} \circ P_{\hat{X}}^{-t}(\hat{X}^t(0)))] \circ P_{\hat{Y}}^t(0). \end{aligned}$$

Essa equação nos permite definir, ao longo da órbita  $\hat{X}^t$  de 0, o gerador infinitesimal  $D\hat{X} + \mathcal{H}$  da perturbação desejada, onde  $\mathcal{H}_{\hat{X}^t(0)}(v) = \vec{0}$ , e

$$\Pi \circ \mathcal{H}_{\hat{X}^t(0)} = (P_{\hat{X}}^t(0) \circ B_t') \circ (B_t^{-1} \circ P_{\hat{X}}^{-t}(\hat{X}^t(0))) = C_t \quad (4.1)$$

Assim, a equação diferencial anterior pode ser escrita como

$$u'(t) = \Pi \circ (D\hat{X} + \mathcal{H})_{\hat{X}^t(0)}(u(t)). \quad (4.2)$$

Seja  $\mathcal{P}(\lambda, v, w) = (0, C_t(w))$ , onde  $t$  é tal que  $\int_0^t \|\hat{X}(\hat{X}^s(0))\| ds = \lambda$ . Note que

$$D_w \mathcal{P}(\hat{X}^t(0)) = \Pi \circ \mathcal{H}_{\hat{X}^t(0)} \quad (4.3)$$

e que

$$D_w \mathcal{P}(\hat{X}^t(0))(0, u) = \Pi \circ D\mathcal{P}_{\hat{X}^t(0)}(0, u). \quad (4.4)$$



Agora, definimos o campo vetorial de classe  $C^2$ ,  $\hat{Y}(q) = (\hat{X} + \mathcal{P})(q)$ , para  $q \in \Phi(\mathcal{T}(p, \tau, r_1, \delta_1))$  onde  $0 < r_1 < r$  e  $0 < \delta_1 < \delta$  serão fixados. Provemos que este campo é de divergente zero. Como  $\hat{Y} = \hat{X} + \mathcal{P}$  e  $\hat{X}$  tem divergente zero,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(D\hat{Y}) &= \operatorname{div}(D\mathcal{P}) = \operatorname{tr}(\Pi \circ \mathcal{H}_{\hat{X}^t(0)}) = \operatorname{tr}(C_t) = \\ &= \operatorname{tr}(B'_t \circ B_t^{-1}) = \operatorname{tr}(A'_t \circ A_t^{-1}). \end{aligned}$$

Como  $\operatorname{div}(A_t) = 1, \forall t \in \mathbb{R}$ ,

$$0 = (\det(A_t))' = \operatorname{tr}(A'_t \circ A_t^{-1}) \det(A_t) = \operatorname{tr}(A'_t \circ A_t)^{-1},$$

donde  $\operatorname{div}(D\hat{Y}) = 0$ .

Para estender  $\hat{Y}$  para um campo vetorial conservativo, aplicamos o Lema de Colagem devido à Arbieto e Matheus (4.2.1) que garante a existência de  $0 < r_1 < r_2 < r$  e  $0 < \delta_1 < \delta_2 < \delta$  tal que  $\hat{Y}$  possui uma extensão  $C^2$  de divergente zero a  $\Phi(\mathcal{T}(p, \tau, r, \delta))$ , a qual também denotamos  $\hat{Y}$ , com  $\hat{Y}(q) = \hat{X}(q), \forall q \in \Phi(\mathcal{T}(p, \tau, r, \delta)) \setminus \Phi(\mathcal{T}(p, \tau, r_2, \delta_2))$ . Provemos que esta extensão satisfaz **(a)**-**(d)**.

A condição **(d)** segue direto da construção. Para **(b)**, note que

$$\begin{aligned} \hat{Y}(\hat{X}^t(0)) &= \hat{X}(\hat{X}^t(0)) + \mathcal{P}\left(\int_0^t \|\hat{X}(\hat{X}^s(0))\| ds, \vec{0}\right) = \\ &= \hat{X}(\hat{X}^t(0)) + (0, C_t(\vec{0})) = \hat{X}(\hat{X}^t(0)). \end{aligned}$$

Para **(c)**, note primeiramente que o fluxo linear de Poincaré de  $\hat{Y}$  em  $0, P_{\hat{Y}}^t(0)$ , é a solução da equação diferencial

$$u'(t) = \Pi \circ D\hat{Y}_{\hat{Y}^t(0)}(u(t))$$

Por (4.3) e (4.4), temos

$$\Pi \circ D\hat{Y}_{\hat{Y}^t(0)}(u(t)) = \Pi \circ D(\hat{X} + \mathcal{P})_{\hat{X}^t(0)} = \Pi \circ D\hat{X}_{\hat{X}^t(0)} + \Pi \circ \mathcal{H}_{\hat{X}^t(0)}.$$

Por (4.1) e (4.2),  $P_{\hat{Y}(0)}^t = P_{\hat{X}(0)}^t \circ B_t$ .

Para provarmos o item **(a)**, dado  $\hat{\varepsilon} > 0$ , note que como  $\hat{Y} = \hat{X} + \mathcal{P}$ , que  $\mathcal{P}(\hat{X}^t(0), 0) = 0$  e que  $\mathcal{P}$  é contínuo, podemos escolher  $r_2$  e  $\delta_2$  suficientemente pequenos de modo que  $\|\hat{Y} - \hat{X}\| < \hat{\varepsilon}$  em  $\mathcal{T}_2$ .

□

**Teorema 4.2.5.** *O conjunto  $\mathfrak{X}_\mu^\infty(M)$  é  $C^0$ -denso em  $\mathfrak{X}_\mu^{0,L}(M)$ .*

**Demonstração.** Esta demonstração está contida na prova da Proposição 1 de [7]. □

**Proposição 4.2.6.** *Dados um campo Anosov  $X \in \mathfrak{X}_\mu^1(M)$  e  $\varepsilon > 0$ , existe um campo  $Y \in \mathfrak{X}_\mu^1(M)$  não Anosov  $\varepsilon - C^0$ -próximo de  $X$ .*

**Demonstração.** Seja  $p \in M$  um ponto periódico de  $X$ . A existência de tal ponto periódico é garantida pelo Closing Lemma para fluxos  $C^1$  conservativos devido à Pugh e Robinson [23, Seção 8]. Pelo Teorema anterior, existe um campo  $X_1 \in \mathfrak{X}_\mu^1(M)$  de classe  $C^\infty$   $\varepsilon/2 - C^0$ -próximo de  $X$ .

Como o campo  $X_1$  é de classe  $C^\infty$ , ele tem um ponto periódico  $p_1 \in M$ . Tome  $V_1$  uma vizinhança de  $p_1$  suficientemente pequena para que, ao aplicarmos o Teorema 4.2.4 obtemos uma vizinhança  $U \supset V_1$  e um campo  $X_2 \in \mathfrak{X}_\mu^1(M)$   $\varepsilon/2 - C^0$ -próximo de  $X_1$  tal que  $\pi_{X_2}|_{V_1 \cap \Sigma_p} = Id$ .

Pelas duas desigualdades obtidas, temos

$$\|X_2 - X\| \leq \|X_2 - X_1\| + \|X_1 - X\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Note que  $X_2$  não é um campo Anosov, pois como o mapa de Poincaré coincide com a identidade em uma vizinhança transversal ao fluxo, não existe decomposição do espaço tangente nesta vizinhança satisfazendo as condições de hiperbolicidade. □

**Teorema 4.2.7.** *Dado um campo  $X \in \mathfrak{X}_\mu^{0,L}(M)$  e  $\varepsilon > 0$ , existe um campo  $Y \in \mathfrak{X}_\mu^1(M)$  tal que  $Y$  tem expoente de Lyapunov (novo) nulo para  $\mu$ -quase todo ponto de  $M$  e está  $\varepsilon - C^0$ -próximo de  $X$ .*

**Demonstração.** Pelo Teorema 4.2.5, temos que existe um campo  $X_1 \in \mathfrak{X}_\mu^\infty(M)$  tal que

$$\|X_1 - X\| < \varepsilon/3.$$

Pela Proposição 4.2.6 segue que existe um campo  $X_2$  não Anosov tal que  $\|X_2 - X_1\| < \varepsilon/3$ .

Por último, como  $X_2$  não é Anosov, pela densidade do conjunto residual  $\mathcal{R}$  no Teorema 3.1.1 existe numa vizinhança de  $X_2$  campos que não são Anosov. Assim, pela densidade do conjunto residual  $\mathcal{R}$  no Teorema 3.1.1 existe um campo  $X_3$  de classe  $C^1$  conservativo com expoentes de Lyapunov nulos para  $\mu$ -quase todo ponto  $p \in M$ , de modo que  $\|X_3 - X_2\| < \varepsilon/3$ .

Usando as três desigualdades obtidas e tomando  $Y = X_3$ , temos

$$\|Y - X\| \leq \|Y - X_2\| + \|X_2 - X_1\| + \|X_1 - X\| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3.$$

Como  $Y$  é de classe  $C^1$ , o novo expoente de Lyapunov coincide com o clássico, donde  $\chi_N^+(Y, p) = 0$  para  $\mu$ -quase todo ponto  $p \in M$ .

□

Defina

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathfrak{X}_\mu^0(M) &\rightarrow [0, \infty], \\ X &\mapsto \int_M \chi_N^+(X, x) d\mu(x). \end{aligned}$$

**Definição 4.2.8.** *Seja  $A$  um espaço topológico. Uma função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  é dita semicontínua superior num ponto  $a \in A$  se, para cada  $\varepsilon > 0$  dado, existe uma vizinhança  $V_a$  de  $a$  tal que se  $x \in V_a$ , então  $f(a) + \varepsilon > f(x)$ .*

**Teorema 4.2.9.** *A função  $\Lambda$  não é semicontínua superior.*

**Demonstração.** Considere o campo nulo  $X \equiv 0$ . Pelo Corolário 3 de [11], existe uma órbita periódica  $\gamma$   $\varepsilon$ - $C^0$ -próxima de  $X$ . Seja  $\Sigma$  a seção transversal à essa órbita  $\gamma$  num ponto  $p \in M$ .

Em  $\Sigma$ , considere  $\mathcal{D}$  um disco de raio 1. Pela construção de Katok, existe um difeomorfismo  $\kappa : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  ergódico que preserva área, e cujos expoentes de Lyapunov são não nulos, digamos, iguais a  $\chi > 0$  e  $-\chi$ .

Considere uma família de  $n^2$  discos 2 a 2 disjuntos  $\{\mathcal{D}_i\}_{i=1}^{n^2}$  tais que cada disco tem raio  $k/10n$ , onde  $k$  é fixo a depender de  $\Sigma$ . A área de cada disco é  $\pi k^2/100n^2$ . Para cada  $i \in \{1, \dots, n^2\}$ , tome a homotetia linear  $\ell_i : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}_i$  que deforma  $\mathcal{D}$  em  $\mathcal{D}_i$ . Assim, construímos um homeomorfismo conservativo  $g_n : \Sigma \rightarrow \Sigma$  tal que:

1.  $g_n = id$  fora de  $\bigcup_{i=1}^{n^2} \mathcal{D}_i$ .
2.  $g_n = \ell_i \circ \kappa \circ \ell_i^{-1}$  em cada  $\mathcal{D}_i$ .

Note que  $g_n$  está  $k/10n$ - $C^0$ -próximo de  $id$ . Temos:

$$\begin{aligned}
\Lambda(g_n) &= \int_{\Sigma} \chi_N^+(g_n, x) d\mu = \int_{\bigcup_{i=1}^{n^2} \mathcal{D}_i} \chi_N^+(g_n, x) d\mu \\
&= \int_{\bigcup_{i=1}^{n^2} \mathcal{D}_i} \chi^+(g_n, x) d\mu = \int_{\bigcup_{i=1}^{n^2} \mathcal{D}_i} \chi d\mu \\
&= \chi \mu \left( \bigcup_{i=1}^{n^2} \mathcal{D}_i \right) = \chi \sum_{i=1}^{n^2} \mu(\mathcal{D}_i) = \chi \frac{\pi k}{100}.
\end{aligned}$$

Isso mostra que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Lambda(g_n) = \pi k/100$ . Por outro lado,  $g_n \rightarrow id$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Considere, para cada  $n$ , o fluxo  $g_n^t$  tal que  $g_n^t|_{\Sigma} = g_n$  (note que isso é possível devido ao Lema 4.2.3). Assim, provemos que os expoentes de Lyapunov coincidem no caso contínuo e discreto. Note que

$$g_n = O_{g_n^t(x)} \circ Dg_n^t(x),$$

onde  $O_{g_n^t(x)}$  é a projeção na seção transversal  $\Sigma$ . Assim,

$$\begin{aligned}
\chi^+(g_n, x) &= \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|Dg_n^m(x) \cdot v\| \\
&= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|O_{g_n^t(x)} \circ Dg_n^t(x) \cdot v\| \\
&= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \|Dg_n^t(x) \cdot v\| = \chi^+(g_n^t, x).
\end{aligned}$$

Temos que cada  $g_n^t$  gera um campo que denotaremos por  $Z_n$ . Note que  $\Lambda(g_n^t) = \Lambda(g_n) = \chi \frac{\pi k}{100}$ , donde  $\Lambda(Z_n) = \pi k/100$ , enquanto que  $\Lambda(X) = 0$  e  $Z_n \rightarrow X$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Logo,  $\Lambda$  não é semicontínua superior.  $\square$

## REFERÊNCIAS

- 1 ARBIETO, Alexander; MATHEUS, Carlos. A pasting lemma and some applications for conservative systems. *Ergod. Th. Dynam. Sys.* (2007), 27, 1399–1417.
- 2 BANACH, S. ; TARSKI, A. Sur la decomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. *Fund. Math.* 6 (1924) 244-277.
- 3 BARREIRA, L. Pesin, Y. B. (2002). *Lyapunov exponents and smooth ergodic theory* (Vol. 23). American Mathematical Soc..
- 4 BARTLE, Robert G. *The elements of integration and Lebesgue measure*. John Wiley & Sons, 2014.
- 5 BESSA, Mário. The Lyapunov exponents of generic zero divergence 3-dimensional vector fields. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* (2007), 27, 1445–1472.
- 6 BESSA, Mario. The Lyapunov exponents of conservative continuous-time dynamical systems. Thesis, IMPA (C048/2006), 2005.
- 7 BESSA, Mario. The flowbox theorem for divergence-free Lipschitz vector fields. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 355 (2017) 881-886.
- 8 BESSA, Mario; ROCHA, Jorge. Removing zero Lyapunov exponents in volume-preserving flows. *Nonlinearity* 20 (2007), 1007–1016.
- 9 BESSA, Mario; ROCHA, Jorge. On  $C^1$ -robust transitivity of volume-preserving flows. *J. Differential Equations* 245 (2008) 3127-3143.
- 10 BESSA, Mario; SILVA, Cesar. Dense area-preserving homeomorphisms have zero Lyapunov exponents. arXiv preprint arXiv:1004.0641, 2010.
- 11 BESSA, Mario; TORRES, Maria Joana; VARANDAS, Paulo. On the periodic orbits, shadowing and strong transitivity of continuous flows. *Nonlinear Anal.* 175 (2018) 191-209.
- 12 BOCHI, J. Genericity of Zero Lyapunov Exponents. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 22, 6 (2002), 1667–1696.
- 13 DÁVILA, Guillermo. *Álgebra Lineal*. Colección textos académicos. Universidad de Sonora, 2006
- 14 DO CARMO, Manfredo Perdigão. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 6a ed, SBM, 2014.
- 15 GORODSKY, Claudio. *Notes on Smooth Manifolds*. USP 2018.
- 16 HOLMES, Phillip. *A SHORT HISTORY OF DYNAMICAL SYSTEMS THEORY: 1885-2007*. Princeton University, Princeton, NJ 08544, U.S.A.
- 17 HUNTER, John K. *Lecture Notes on Measure Theory*. Department of Mathematics, University of California at Davis.

- 18 JÚNIOR, J.P.; MELO, W. de. Introdução aos sistemas dinâmicos. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1978. (Projeto Euclides).
- 19 LEE, John M. Smooth manifolds. Introduction to smooth manifolds. Springer, New York, NY, 2013. p. 1-31.
- 20 LIMA, L. E. Curso de Análise Volume 2 - 11. Ed. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2018.
- 21 MOSER, Jürgen. On the volume elements on a manifold. Trans. Amer. Math. Soc. 120 (1965) 286–294.
- 22 OSELEDETS, V. I. A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. Trans. Moscow Math. Soc. 19 (1968), 197–231.
- 23 PUGH, C. C.; ROBINSON, Clark. The  $C^1$  closing lemma, including Hamiltonians. Ergodic Theory Dynam. Systems 3 (2) (1983) 261–313.
- 24 ROBINSON, Clark. Generic properties of conservative systems. Amer. J. Math. 92 (1970), 562–603.
- 25 TEIXEIRA, Pedro. On the conservative pasting lemma. Ergodic Th. Dynam. Sys. 40(5) (2020), 1402–1440.
- 26 VIANA, M.; OLIVEIRA, K. Fundamentos da Teoria Ergódica. 2.ed. IMPA, Brazil, p. 3-12, 2014.