UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

César Augusto Rubim

Decomposição espectral de $H^s(\mathbb{R}^n)$ aplicada à equação de Schrödinger fracionária assintoticamente linear

Juiz de Fora
2024

César Augusto Rubim

Decomposição espectral de $H^s(\mathbb{R}^n)$ aplicada à equação de Schrödinger fracionária assintoticamente linear

Dissertação apresentada ao Mestrado Acadêmico em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eduard Toon

Juiz de Fora

2024

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Rubim, César Augusto.
Decomposição espectral de $H^s(\mathbb{R}^n)$ aplicada à equação de Schrödinger fracionária assintoticamente linear / César Augusto Rubim. – 2024.
106 f.

Orientador: Eduard Toon
Dissertação – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Mestrado Acadêmico em Matemática, 2024.

1. Equação de Schrödinger fracionária. 2. Teoria espectral. 3. Espaços de Sobolev fracionários . I. Toon, Eduard, orient. II. Título.

César Augusto Rubim

Decomposição espectral de H^s(R^n) aplicada à equação de Schrödinger fracionária assintoticamente linear

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática Pura

Aprovada em 25 de março de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Eduard Toon - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

Profª Drª Liliane de Almeida Maia

Universidade Federal de Brasília

Prof. Dr. Luiz Fernando de Oliveira Faria

Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, 07/05/2024.

Documento assinado eletronicamente por **Luiz Fernando de Oliveira Faria**, **Professor(a)**, em 09/05/2024, às 12:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Eduard Toon**, **Professor(a)**, em 09/05/2024, às 15:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Liliane de Almeida Maia**, **Usuário Externo**, em 17/05/2024, às 11:15, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **1800290** e o código CRC **D5AA7A8D**.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Universidade Federal de Juiz de Fora, pelas portas abertas, oportunidades e pela democratização do conhecimento. Um agradecimento especial se dá a todo o corpo docente do Departamento de Matemática, especialmente aos professores Laércio e Lonardo, que foram grandes incentivadores nesta busca por uma formação também em matemática. Ainda, segue um agradecimento especial para Paula, por toda a disponibilidade e prestação. Estendo meus agradecimentos à PROPP e à FAPEMIG, pelo auxílio financeiro em parte deste trabalho.

Agradeço aos meus amigos que sempre estiveram comigo em toda minha trajetória até então. Guilherme, Pedro e Patrick, obrigado por sempre tornarem esta jornada mais divertida. Também agradeço às pessoas que recentemente conheci em minha outra jornada profissional, especialmente a Igor, Christian e GT, por me mostrarem que a matemática do "mundo real"também é bonita e divertida.

Agradeço à professora Liliane Maia e ao professor Luiz Fernando de Oliveira Faria, por aceitarem compor a banca examinadora de minha defesa.

Agradeço ao Prof. Eduard Toon, por todos os ensinamentos, paciência (quase infinita, eu diria) e por toda a dedicação. Definitivamente, o senhor é o maior exemplo de profissional que possuo, transcendendo até o aspecto de professor, mas como de ser humano. Obrigado por não desistir de mim, mesmo quando até eu havia desistido.

Agradeço à minha companheira, Isabelle Abranches, que tornou minha vida mais alegre e feliz. Obrigado por todo o carinho, por todo o apoio, pelo incentivo contínuo e espero que nosso amor e companheirismo se fortaleçam todos os dias. Agradeço também à sua família por todo acolhimento e apoio.

Por fim, gostaria de agradecer aos meus pais, Roberto e Elizângela. Obrigado por acreditarem em meu sonho! Vocês, que mal sabiam o que um físico/matemático "faz da vida", e que nunca tiveram a oportunidade de estudar, ainda assim, me incentivaram com todas as suas forças. Espero poder retribuir todo o amor incondicional ao longo da minha vida.

E, quando a tempestade passar, na certa lhe será difícil entender como conseguiu atravessá-la e ainda sobreviver. Aliás, nem saberá com certeza se ela realmente passou. Uma coisa porém é certa: Ao emergir do outro lado da tempestade, você já não será o mesmo de quando nela entrou. Exatamente, esse é o sentido da tempestade...

(Haruki Murakami, Kafka à Beira Mar).

RESUMO

No presente trabalho, estaremos interessados em estudar a equação de Schrödinger fracionária, dada por

$$(-\Delta)^s u + V(x)u = g(x, u), x \in \mathbb{R}^n, s \in (0, 1),$$

através do uso de um teorema de linking abstrato aplicado ao funcional energia associado a esta equação. Adotaremos algumas hipóteses associadas a g, e principalmente, a V, e, para obtermos soluções fracas do problema, vamos estudar o espectro de $S_s = (-\Delta)^s + V$ e decompor os espaços de Sobolev fracionários $H^s(\mathbb{R}^n)$ utilizando a Teoria Espectral. Construiremos as ferramentas básicas da Teoria Espectral (incluindo demonstração do Teorema Espectral para operadores autoadjuntos ilimitados), bem como provaveremos resultados associados ao espectro S_s que não foram encontrados na literatura, e também uma nova decomposição de $H^s(\mathbb{R}^n)$ que não foi encontrada na literatura em sua versão fracionária.

Palavras-chave: Equação de Schödinger fracionária. Teoria Espectral. Espaços de Sobolev fracionários.

ABSTRACT

In the present work, we are interested in studying the fractional Schrödinger equation, given by

$$(-\Delta)^s u + V(x)u = g(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad s \in (0,1),$$

through the use of an abstract linking theorem applied to the energy functional associated with such equation. We will adopt some hypotheses related to g, and primarily, to V, and, to obtain weak solutions to this problem, we will study the spectrum of $S_s = (-\Delta)^s + V$ and decompose the fractional Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R}^n)$ using Spectral Theory. We will construct the basic tools of Spectral Theory (including the proof of the Spectral Theorem for unbounded self-adjoint operators), as well as provide results related to the spectrum of S_s that have not been found in the literature, and also a new decomposition of $H^s(\mathbb{R}^n)$ in its fractional version that has not been found in the literature.

Keywords: Fractional Schrödinger equation. Spectral Theory. Fractional Sobolev spaces.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\partial\Omega$	Fronteira de Ω.
$\overline{\Omega}$	Fecho de Ω.
B_r	Bola de raio r, centrada em 0.
$B_r(y)$	Bola de raio r, centrada em y.
$suppf$	Suporte da função f.
$C^1(\Omega,\mathbb{R})$	Espaço das funções $u:\Omega\to\mathbb{R}$ que possuem derivada contínua.
$C_0^\infty(\Omega,\mathbb{R})$	Espaço das funções $u:\Omega\to\mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto.
$\mu-$q.t.p.	quase todo ponto (a menos de um conjunto de medida nula em relação a medida μ).
$L^\infty(\Omega)$	Espaço das funções mensuráveis $u:\Omega\to\mathbb{R}$ com $\sup_{x\in\Omega}\lvert u(x)\rvert<\infty$ e $$\lvert\lvert u\rvert\rvert_{L^\infty(\Omega)}=\inf\{C>0:\lvert u(x)\rvert\leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$
$L^p(\Omega)$	Espaço das funções mensuráveis $u:\Omega\to\mathbb{R}$ com $$\lvert\lvert u\rvert\rvert_{L^p(\Omega)}=\left(\int_\Omega \lvert u(x)\rvert^p dx\right)^{1/p}<\infty,\quad 1\leq p<\infty.$$
$(-\Delta)^s$	Laplaciano fracionário de índice s.
$S(\mathbb{R})$	Espaço de Schwartz das funções $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ tais que $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ e $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$, $\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\lvert x^\alpha D^\beta f(x)\rvert<\infty$.
$u_n\rightharpoonup u$	Convergência fraca.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A equação de Schrödinger dependente do tempo

$$-\Delta\psi(x,t) + V(x,t)\psi = -i\frac{\partial(x,t)\psi}{\partial t} \quad \text{para } (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty] \tag{1.1}$$

é a equação mais importante da teoria quântica, que descreve o comportamento de partículas sob a ação de um potencial $V(x,t)$. Um caso de muito interesse no estudo da equação (1.1) ocorre quando o potencial V varia pouco em curtos períodos de tempo, ou até mesmo, é constante no tempo. Nestes casos, podemos supor que V não possui dependência temporal, ou seja, $V(x,t) = V(x)$, onde buscamos por soluções da forma $\psi(x,t) = \phi(t)u(x)$. A parte espacial de (1.1) recai na equação

$$-\Delta u + (V(x) - E)u = 0, \tag{1.2}$$

onde E é entendido como a energia da partícula no estado descrito por u.

Muitas vezes, é interessante adicionar termos não lineares da forma $f(x,u)$ à (1.2) para modelar problemas mais complexos, como alguns problemas que aparecem em física dos plasmas, física da matéria condensada, dentre outras aplicações. Portanto, o estudo de equações da forma

$$-\Delta u + V(x)u = f(x,u(x)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.3}$$

constitui um campo de estudo genuíno. Do ponto de vista puramente matemático, provar a existência de soluções para equações da forma (1.3) é um desafio enorme, onde diversas abordagens vêm sendo empregadas, como por exemplo, formulações do teorema do passo da montanha, teoremas de linking generalizados, dentre outras técnicas ([1], [9], [25], [18]). Nestas técnicas, é comum o estudo do funcional energia associado à (1.3)

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 + V(x)u(x)^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} F(x,u(x))dx, \;\; u \in H^1(\mathbb{R}^n), \tag{1.4}$$

onde comumente buscamos por pontos críticos de I, sendo $F(s,x) = \int_0^t f(s,x)ds$.

Para provar a existência de soluções para (1.3), o potencial V desempenha papel crucial na possibilidade de existência, e mais ainda, correlato ao potencial V, temos também o espectro do operador de Schrödinger $S = -\Delta + V$ com $D(S) = H^2(\mathbb{R}^n)$ (veja [1], [18]).

Recentemente, com origens nos trabalhos de Laskin [15], emerge naturalmente através da expansão da integral de caminho de Feynman aplicada ao problema Browniano, a equação de Schrödinger fracionária dada por

$$(-\Delta)^s\psi(x,t) + V(x,t)\psi = -i\frac{\partial(x,t)\psi}{\partial t} \quad \text{para } (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty], s \in (0,1) \tag{1.5}$$

onde $(-\Delta)^s$ é o laplaciano fracionário, definido como

$$(-\Delta)^s = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(x)} \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

constituindo assim um novo campo de estudos de interesse próprio.

É pertinente, e extremamente natural, investigar o comportamento do laplaciano fracionário, bem como suas principais propriedades e semelhanças com o laplaciano clássico, e ainda, tentar espelhar as principais técnicas bem sucedidas no estudo do laplaciano clássico ao laplaciano fracionário. Nesta linha de ideias, naturalmente emergem os espaços de Sobolev fracionários $W^{s,p}$, sendo eles a contrapartida fracionária aos espaços de Sobolev clássicos (que são intrinsecamente associados ao estudo do laplaciano). Para uma construção detalhada dos espaços de Sobolev fracionários, bem como suas principais propriedades e relações com o laplaciano fracionário, veja [11] e [12].

Uma extensão natural das ideias citadas no parágrafo anterior é a de buscar empregar técnicas já utilizadas no estudo (1.1), mas para equações da forma (1.5). Mais ainda, consideraremos equações em que o potencial V não varia com o tempo t, donde podemos empregar a técnica de separação de variáveis e obter uma versão de (1.5) independente do tempo, e também incluindo um termo não linear $g(x, s)$, de forma análoga a (1.3). Assim, estaremos então interessados em estudar a equação

$$(-\Delta)^s u + V(x)u = g(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1.6}$$

sob certas condições associadas a g e V.

Em [18], Maia e Soares estudaram a equação (1.3), mais propriamente, buscaram por pontos críticos do funcional (1.4) utilizando um teorema de linking abstrato. São admitidas duas hipóteses sobre o potencial V

(i) $V \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e $\lim_{|x| \to \infty} V(x) = V_\infty > 0$;

(ii) $\sup[\sigma(S) \cap (-\infty, 0)] = \sigma^- < 0 < \sigma^+ = \inf[\sigma(S) \cap (0, \infty)]$.

A hipótese (i) tem impacto muito forte no estudo do espectro do operador de Schrödinger $S = -\Delta + V$, pois dela é possível obter que

$$\sigma_{ess}(S) \subset [V_\infty, +\infty), \quad \text{e} \quad \sigma(S) \subset [-||V||_{L^\infty}, +\infty). \tag{1.7}$$

Já a hipótese (ii) nos informa sobre a existência de gap no espectro de S, mais ainda, combinando (i) e (ii), e seguindo os desenvolvimentos de [9], de forma conjunta com a Teoria Espectral, mais especificamente, do uso do Teorema Espectral para operadores autoadjuntos ilimitados, podemos construir uma decomposição de $H^1(\mathbb{R}^n)$, de forma a facilitar o estudo do funcional I, bem como a aplicação do mencionado teorema de linking.

De forma objetiva, estaremos interessados em estudar a equação (1.6) sob hipóteses similiares às utilizadas em [18], utilizando o mesmo maquinário empregado, ou seja, utilizando um teorema de linking abstrato para o estudo de um um funcional energia associado a (1.6). Porém, para a boa definição de um funcional energia, precisamos saber definir o domínio mais adequado para o mesmo, que será algum espaço de Sobolev fracionário. Além disso, para aplicar condições similares às empregadas em [18], precisaremos definir um tipo de operador de Schrödinger fracionário S_s, associado a um índice $s \in (0,1)$ e, mais ainda, estudar o espectro deste operador, para obtermos condições similares a (1.7), às quais, até onde sabemos, é inédito na literatura.

Mais ainda, para conseguirmos aplicar o teorema de linking, buscaremos por uma decomposição de $W^{s,2}(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)$, de forma análoga ao trabalho [9]. Tal decomposição requer forte conhecimento do cálculo funcional de operadores autoadjuntos e integrais espectrais, o qual, por sua vez, requer sólidas fundamentações de Teoria Espectral, e mais, do Teorema Espectral para operadores autoadjuntos e ilimitados.

Partes deste trabalho, mais especificamente o Capítulo 3 e adaptações do Capítulo 5 compõe um capítulo de livro já submetido, intitulado 'Spectral Decomposition of $H^1(\mathbb{R}^n)$'. Além disso, os resultados obtidos nos Capítulos 4 e 5 são parte do manuscrito [19], que se encontra em estágio de preparação.

Assim, nesta dissertação, trataremos inicialmente de definir o conceito de operadores autoadjuntos ilimitados, bem como suas caractrísticas e propriedades básicas, o que será feito no Capítulo 2. No Capítulo 3, vamos definir o conceito de medidas espectrais e suas consequências, culminando numa demonstração do Teorema Espectral para operadores autoadjuntos e ilimitados e também nas noções básicas do cálculo funcional. No Capítulo 4, vamos estudar os espaços de Sobolev fracionários e o laplaciano fracionário. Ainda no Capítulo 4, estudaremos os operadores de Schrödinger fracionários, e obteremos algumas caracterizações do espectro de tais operadores. Por fim, no Capítulo 5, definiremos o funcional ao qual estaremos interessados em encontrar pontos críticos, construiremos uma decomposição dos espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$ através do uso do Teorema Espectral e, mais ainda, enunciaremos e aplicaremos um teorema de linking para obtermos pontos críticos do funcional a ser estudado.

2 OPERADORES FECHADOS

Neste capítulo, faremos uma breve introdução aos operadores ilimitados, que desempenharão fundamental papel no restante deste trabalho. Neste contexto, o símbolo $\mathcal{H}$ sempre será empregado para indicar espaços de Hilbert, usualmente definidos sobre o corpo $\mathbb{C}$.

Definição 1. *Uma transformação linear entre espaços de Hilbert $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ é um mapeamento T definido em um subespaço vetorial $D(T) \subset \mathcal{H}_1$, com imagem em $\mathcal{H}_2$, ou seja, $T : D(T) \subset \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, tal que*

(i) $T(x + y) = T(x) + T(y)$, $\forall x, y \in \mathcal{H}_1$;

(ii) $T(\alpha x) = \alpha T(x)$, $\forall x \in \mathcal{H}$ e $\forall \alpha \in \mathbb{C}$.

O termo operador linear será utilizado quando a transformação linear T for uma aplicação de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{H}$. Naturalmente, definimos o núcleo de T como sendo o conjunto

$$\mathcal{N}(T) = \{x \in D(T) : T(x) = 0\}$$

e a imagem de T por

$$R(T) = T(D(T)) = \{T(x) : x \in D(T)\}.$$

Por restrição de T a um subespaço vetorial $D_0 \subset D(T)$, entendemos como sendo a transformação linear $T|_{D_0}$ definida em D_0 atuando como $T|_{D_0}(x) = T(x)$, para todo $x \in D_0$. Se T e S são duas transformações lineares de $\mathcal{H}_1$ em $\mathcal{H}_2$, diremos que $T = S$ se $D(T) = D(S)$ e $T(x) = S(x)$ para todo elemento do domínio. Além disso, diremos que T é uma extensão de S, $S \subset T$, quando $D(S) \subset D(T)$ e $T|_{D(S)} = S$.

Dadas duas transformações lineares T e S de $\mathcal{H}_1$ em $\mathcal{H}_2$, certo cuidado deve ser tomado para definir $T + S$, pois os domínios podem não coincidir. Sendo assim,

$$D(S + T) := D(S) \cap D(T), \;\; (S + T)(x) = S(x) + T(x), \; x \in D(S + T).$$

Se S é uma transformação linear de $\mathcal{H}_2$ em $\mathcal{H}_3$, então definimos a transformação linear produto ST de $\mathcal{H}_1$ em $\mathcal{H}_3$ como

$$D(ST) = \{x \in D(T) : Tx \in D(S)\}, \;\; (ST)(x) = S(T(x)), \; x \in D(ST).$$

Quando $\mathcal{N}(T) = \{0\}$, podemos definir a inversa T^{-1} de $\mathcal{H}_2$ em $\mathcal{H}_1$, com $D(T^{-1}) = R(T)$ e $T^{-1}(T(x)) = x$, para $x \in D(T)$.

Outro conceito que empregaremos com frequência é o de gráfico de uma transformação.

Definição 2. *O gráfico de uma transformação linear T de $\mathcal{H}_1$ em $\mathcal{H}_2$ é o conjunto*

$$\mathcal{G}(T) = \{(x, Tx) : x \in D(T)\}.$$

Observemos que podemos retirar informações de transformações através de seu gráfico. Um exemplo imediato é o de que, se $S \subset T$, então $\mathcal{G}(S) \subset \mathcal{G}(T)$.

Lema 1. *([22], Lema 1.1, p.)*
Um subepaço linear E de $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ é o gráfico de alguma transformação linear T de $\mathcal{H}_1$ em $\mathcal{H}_2$ se, e somente se, para todo $(0, y) \in E, y \in \mathcal{H}_2$ implicar que $y = 0$.

Demonstração. Se E é o gráfico de um operador T, então a condição é satisfeita imediatamente. Reciprocamente, definindo T atuando em $D(T) = \{x \in \mathcal{H}_1 : \exists y \in \mathcal{H}_2$ tal que $(x, y) \in E\}$ com $Tx = y$, podemos verificar que T é linear. □

Um fato simples, mas utilizado de forma recorrente é o seguinte lema.

Lema 2. *([22], Lema 1.2, p.4)*
Seja T um operador linear em $\mathcal{H}$ tal que $D(T)$ seja denso em $\mathcal{H}$. Se $\langle Tx, x\rangle = 0$ para todo $x \in D(T)$, então $Tx = 0$ para todo $x \in D(T)$.

Demonstração. Provemos inicialmente a seguinte identidade de polarização:

$$4\langle Tx, y\rangle = \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle + i\langle T(x+iy), x+iy\rangle - i\langle T(x-iy), x-iy\rangle. \quad (2.1)$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\langle T(x+y), x+y\rangle &= \langle Tx, x\rangle + \langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle + \langle Ty, y\rangle, \\
-\langle T(x-y), x-y\rangle &= -\langle Tx, x\rangle + \langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle - \langle Ty, y\rangle, \\
i\langle T(x+iy), x+iy\rangle &= i\langle Tx, x\rangle + \langle Tx, y\rangle - \langle Ty, x\rangle + i\langle Ty, y\rangle, \\
-i\langle T(x-iy), x-iy\rangle &= -i\langle Tx, x\rangle + \langle Tx, y\rangle - \langle Ty, x\rangle - i\langle Ty, y\rangle,
\end{aligned}$$

donde, somando as equações, segue a identidade.

Da identidade de polarização (2.1), segue que, se $x, y \in D(T)$, então $\langle Tx, y\rangle = 0$. Da densidade de $D(T)$, podemos construir uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ de forma que $y_n \to Tx$. Da continuidade do produto interno,

$$\langle Tx, Tx\rangle = \langle Tx, \lim_{n\to\infty} y_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Tx, y_n\rangle = 0,$$

donde segue que $Tx = 0$, para todo $x \in D(T)$. □

Observemos agora que, dado $T : D(T) \subset \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ e se $\langle \cdot, \cdot\rangle_i$ é o produto escalar num espaço de Hilbert $\mathcal{H}_i$, então podemos induzir um produto interno em $D(T)$ através de

$$\langle x, y\rangle_T = \langle x, y\rangle_1 + \langle Tx, Ty\rangle_2, \quad x, y \in D(T),$$

do qual podemos definir duas normas equivalentes

$$||x||_T = (||x||_1^2 + ||Tx||_2^2)^{1/2}, \;\; x \in D(T) \text{ e}$$

$$||x||'_T = ||x||_1 + ||Tx||_2, \;\; x \in D(T),$$

onde ambas normas são chamadas de normas do gráfico. A equivalência das duas normas decorre de cálculos imediatos, a saber

$$\begin{aligned} ||x||_T &= (||x||_1^2 + ||Tx||_2^2)^{1/2} \\ &\leq (||x||_1^2 + ||Tx||_2^2 + 2||x||_1||Tx||_2)^{1/2} \\ &= ||x||_1 + ||Tx||_2 = ||x||'_T \end{aligned}$$

e reciprocamente,

$$\begin{aligned} ||x||_T &= (||x||_1^2 + ||Tx||_2^2)^{1/2} \geq ||x||_1 \\ ||x||_T &= (||x||_1^2 + ||Tx||_2^2)^{1/2} \geq ||Tx||_2 \\ \implies \; 2||x||_T &\geq ||x||_1 + ||Tx||_2 = ||x||'_T. \end{aligned}$$

A partir de agora, entraremos num conceito extremamente fundamental, que é o de transformação linear fechada. Mais do que um simples conceito, a ideia de transformação linear fechada nasce da necessidade de estudar de forma mais aprofundada transformações lineares que não são contínuas e, consequentemente, ilimitadas.

Definição 3. *Uma transformação linear $T : D(T) \subset \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ é dita fechada se seu gráfico $\mathcal{G}(T)$ é um subconjunto fechado de $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$. Por outro lado, T é dita fechável se existe uma transformação linear fechada S de $\mathcal{H}_1$ em $\mathcal{H}_2$ tal que $T \subset S$.*

Do ponto de vista prático, para verificar que uma transformação linear é fechada, devemos apenas tomar uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ convergindo para algum $x \in \mathcal{H}_1$ com $\lim_n Tx_n = y \in \mathcal{H}_2$ e conseguir concluir que $x \in D(T)$ e $y = Tx$.

Podemos então enunciar equivalências que decorrem imediatamente da definição de operadores fechados.

Proposição 1. *([22], Proposição 1.4, p.6)*
Seja $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ um operador linear. São equivalentes

(*i*) *T é fechado;*

(*ii*) *Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ tal que $\lim_n x_n = x$ em $\mathcal{H}_1$ e $\lim_n T(x_n) = y$ em $\mathcal{H}_2$, então $x \in D(T)$ e $Tx = y$;*

(*iii*) *$D(T)$ munido com a norma do gráfico $||\cdot||_T$ (e com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$) é espaço de Hilbert.*

Demonstração. A equivalencia entre (i) e (ii) é mera reformulação da definição.

(i) $\implies$ (iii). Supondo T fechado, então $\mathcal{G}(T)$ é fechado em $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ (que é Hilbert), donde segue que $\mathcal{G}(T)$ é Hilbert. Assim, tomando uma sequência de Cauchy em $(D(T), \langle\cdot,\cdot\rangle)_T$, segue, em particular, que $((x_n, Tx_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy em $\mathcal{G}(T)$, que é Hilbert. Então $(x_n, Tx_n) \to (x, Tx) \in \mathcal{G}(T)$, para algum $x \in D(T)$.

(iii) $\implies$ (i). Sejam $((x_n, Tx_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}(T)$, tais que $x_n \to x$ e $Tx_n \to y$. Como $(D(T), \langle\cdot,\cdot\rangle_T)$ é Hilbert, segue que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy em $D(T)$, donde $x \in D(T)$, e segue que $y = Tx$. □

Proposição 2. *([22], Proposição 1.4, p.6)*
São equivalentes:

(i) T *é fechável;*

(ii) *Se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(T)$ *é tal que* $\lim_n x_n = 0$ *e* $\lim_n Tx_n = y$*, então* $y = 0$*;*

(iii) $\overline{\mathcal{G}(T)}$ *é o gráfico de uma transformação linear.*

Demonstração. (i) $\implies$ (iii): Seja S uma transformação linear fechada tal que $T \subset S$. Então $\mathcal{G}(T) \subset \mathcal{G}(S)$, donde $\overline{\mathcal{G}(T)} \subset \mathcal{G}(S)$. Assim, do Lema 1, para mostrar que $\overline{\mathcal{G}(T)}$ é gráfico de uma transformação linear, precisamos mostrar que, para $(0, y) \in \overline{\mathcal{G}(T)}$ implica que $y = 0$. Tomando $(0, y) \in \overline{\mathcal{G}(T)}$, existe $((0, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}(T)$, convergindo para $(0, y)$. Porém, como $\mathcal{G}(T)$ é o gráfico de uma transformação linear, do Lema 1, segue que $y_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, implicando que $y = 0$ e provando a afirmação.

(iii) $\implies$ (i): Se $\overline{\mathcal{G}(T)} = \mathcal{G}(S)$ para algum operador S, então $T \subset S$, e como S é fechado, obtemos (i).

(ii) $\iff$ (iii): Observemos que a condição (ii) significa que $(0, y) \in \overline{\mathcal{G}(T)}$ implica em $y = 0$. Portanto, do Lema 1, obtemos a equivalência desejada. □

Se T é fechável, podemos então construir naturalmente um operador fechado que estende T. Com efeito, definimos o fecho de T como sendo o operador $\overline{T}$, que satisfaz $\overline{\mathcal{G}(T)} = \mathcal{G}(\overline{T})$.

Definição 4. *Dada uma transformação linear* T*, um subespaço vetorial* $D \subset D(T)$ *é chamado de centro de* T *se, para cada* $x \in D(T)$ *existir uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ *tal que* x_n *converge para* x *e* Tx_n *converge para* Tx.

Segue imediatamente da definição que, se T é fechado, um subespaço vetorial $D \subset D(T)$ é centro se, e somente se, T é o fecho de $T|_D$.

Passemos agora para a noção de operadores adjuntos. Sejam $(\mathcal{H}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ e $(\mathcal{H}_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ espaços de Hilbert, uma aplicação linear T entre $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ tal que $D(T)$ é denso em $\mathcal{H}_1$.

Vamos então construir o adjunto de T. Defina

$$D(T^*) = \{y \in \mathcal{H}_2 : \exists u \in \mathcal{H}_1 \text{ tal que } \langle Tx, y\rangle_2 = \langle x, u\rangle_1, \forall x \in D(T)\}. \tag{2.2}$$

Do Teorema de Riesz 18, um vetor $y \in \mathcal{H}_2$ está em $D(T^*)$ se, e somente se, a aplicação $\varphi : x \mapsto \langle Tx, y\rangle_2$ é um funcional linear contínuo em $(D(T), ||.||_1)$, ou equivalentemente, existe $c_y > 0$ tal que $|\langle Tx, y\rangle| \leq c_y ||x||_1$ para todo $x \in D(T)$.

Como $D(T)$ é denso em $\mathcal{H}_1$, o vetor u que satisfaz $\langle Tx, y\rangle_2 = \langle x, u\rangle$ para todo $x \in D(T)$ é unicamente determinado por y. Portanto, podemos definir $T^*y = u$, e assim, obtemos uma aplicação $T^* : D(T^*) \subset \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$. A aplicação definida acima é chamada de adjunta de T.

Da construção acima, vale que

$$\langle Tx, y\rangle_2 = \langle x, T^*y\rangle_1, \;\; \forall x \in D(T), \; y \in D(T^*). \tag{2.3}$$

Definição 5. *Seja T um operador linear em $\mathcal{H}$. Dizemos que T é simétrico se $T \subset T^*$. Se $T = T^*$, diremos que T é autoadjunto. Por fim, se $\overline{T}$ é autoadjunto, diremos que T é essencialmente autoadjunto.*

Tratemos de investigar as propriedades de tais aplicações.

Proposição 3. *([22], Proposição 1.6, p.9)*
Sejam S e T aplicações lineares de $\mathcal{H}_1$ em $\mathcal{H}_2$, com $D(T)$ denso em $\mathcal{H}_1$. Então:

(i) *T^* é fechado;*

(ii) *$R(T)^{\perp} = \mathcal{N}(T^*)$;*

(iii) *Se $D(T^*)$ é denso em $\mathcal{H}_2$, então $T \subset T^{**} = (T^*)^*$;*

(iv) *Se $T \subset S$, então $S^* \subset T^*$;*

(v) *$(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$ para $\lambda \in \mathbb{C}$;*

(vi) *Se $D(T + S)$ é denso em $\mathcal{H}_1$, então $T^* + S^* \subset (T + S)^*$;*

(vii) *Se S é limitado e $D(S) = \mathcal{H}_1$, então $(T + S)^* = T^* + S^*$.*

Demonstração. (i) Sejam $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T^*)$ tal que $\lim_n y_n = y$ e $\_nT^*y_n = v \in \mathcal{H}_1$. Desejamos mostrar que $y \in D(T^*)$ e $T^*y = v$. Para $x \in D(T)$, temos

$$\langle Tx, y\rangle = \langle Tx, \lim_{n\to\infty} y_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Tx, y_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, T^*y_n\rangle = \langle x, \lim_{n\to\infty} T^*y_n\rangle = \langle x, v\rangle.$$

Noutras palavras, $y \in D(T^*)$ e $v = T^*y$, donde T^* é fechado.

(ii) Observemos que da equação (2.3), $y \in \mathcal{N}(T^*)$ se, e somente se, $\langle Tx, y\rangle_2 = 0$ para todo $x \in D(T)$, mas isto é equivalente a $y \in R(T)^{\perp}$.

(iii) Observemos que, se $D(T^*)$ é denso, então podemos obter $(T^*)^* := T^{**}$. Recordemos que, da definição $D(T^{**}) = \{x \in \mathcal{H}_1 : \exists v \in \mathcal{H}_2 \text{ tal que } \langle T^*y, x\rangle_2 = \langle y, v\rangle_1 \ \forall y \in D(T^*)\}$. Porém, dado $x \in D(T)$, da equação (2.3), $x \in D(T^{**})$. Além disso, para $x \in D(T)$, segue que

$$\langle Tx, y\rangle_2 = \langle x, T^*y\rangle_1 = \langle T^{**}x, y\rangle_2, \ \forall y \in D(T^*)$$

donde segue que $Tx = T^{**}x$ para $x \in D(T)$.

(iv) Tome $y \in D(S^*)$ e $x \in D(T)$. Então

$$\langle S^*y, x\rangle_1 = \langle y, Sx\rangle_2 = \langle y, Tx\rangle_2,$$

mas isto significa exatamente que $y \in D(T^*)$ e que $T^*y = S^*y$ para $y \in D(S^*)$, ou seja, $S^* \subset T^*$.

(v) É consequência imediata de (2.3).

(vi) Como $D(T+S)$ é denso em $\mathcal{H}_1$, o operador $(S+T)^*$ está bem definido. Agora, tomando $y \in D(T^* + S^*)$ e $x \in D(T+S)$

$$\langle T^*y + S^*y, x\rangle_1 = \langle T^*y, x\rangle_1 + \langle S^*y, x\rangle_1 = \langle y, Tx\rangle_2 + \langle y, Sx\rangle_2 = \langle y, (T+S)x\rangle_2,$$

e pelo mesmo argumento final empregado no item anterior, segue a afirmação.

(vii) Pelo item (vi), precisamos provar apenas que $D((S+T)^*) \subset D(T^* + S^*)$. Como $D(S) = \mathcal{H}_1$ e $D(S^*) = \mathcal{H}_2$ pois S é limitado, segue que $D(T+S) = D(T)$ e $D(T^* + S^*) = D(T^*)$. Sejam $y \in D((T+S)^*)$ e $x \in D(T+S)$ abritrários, então

$$\langle Tx, y\rangle_2 = \langle (T+S)x, y\rangle_2 - \langle Sx, y\rangle_2 = \langle x, (T+S)^*y - S^*y\rangle_1,$$

ou seja, $y \in D(T^*) = D(T^* + S^*)$, donde segue a inclusão. $\square$

Proposição 4. *([22], Proposição 1.7, p.10)*
Sejam $T : D(T) \subset \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ e $S : D(S) \subset \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_3$ aplicações lineares tais que $D(ST)$ seja denso em $\mathcal{H}_1$. Valem

(i) Se $D(S)$ é denso em $\mathcal{H}_2$, então $T^*S^* \subset (ST)^*$.

(ii) Se S é limitado e $D(S) = \mathcal{H}_2$, então $(ST)^* = T^*S^*$.

Demonstração. (i) Observemos que da definição de produto entre transformações lineares, $D(ST) \subset D(T)$, e como o primeiro é denso $\mathcal{H}_1$, segue que $D(T)$ também é. Tomemos $y \in D(T^*S^*)$ e $x \in D(ST)$ arbitrários. Assim, $Tx \in D(S)$ e $y \in D(S^*)$

$$\langle STx, y\rangle = \langle Tx, S^*y\rangle = \langle x, T^*S^*y\rangle.$$

Portanto, $y \in D((ST)^*)$ e além disso, $(ST)^*y = T^*S^*y$ para $y \in D(T^*S^*)$, donde segue a afirmação.

(ii) Do item anterior, é suficiente mostrar que $D((ST)^*) \subset D(T^*S^*)$. Fixemos $y \in D((ST)^*)$ e tomemos arbitrariamente $x \in D(T)$. Como S é limitado, e $D(S) = \mathcal{H}_2$, segue que $x \in D(ST)$ e $y \in D(S^*) = \mathcal{H}_3$. Assim

$$\langle Tx, S^*y\rangle = \langle STx, y\rangle = \langle x, (ST)^*y\rangle.$$

Obtemos então que $S^*y \in D(T^*)$, mas isto implica que $y \in D(T^*S^*)$. $\square$

Passemos agora ao que costumeiramente é chamado de método do gráfico. Para obtermos o próximo resultado, é interessante definir dois operadores unitários $U, V : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_1$, tais que $U(x, y) = (y, x)$ e $V(x, y) = (-y, x)$. Listemos algumas constatações imediatas: $V^{-1}(y, x) = (x, -y)$, $U^{-1}V = V^{-1}U$ e $U^{-1} = U$. Por fim, se T é uma transformação linear de $\mathcal{H}_1$ em $\mathcal{H}_2$ invertível, $x \in D(T)$ e $y = Tx$, segue que $U(x, Tx) = (y, T^{-1}y)$, noutras palavras, $U(\mathcal{G}(T)) = \mathcal{G}(T^{-1})$.

Lema 3. *([22], Lema 1.10, p.11)*
Para um operador densamente definido T de $\mathcal{H}_1$ em $\mathcal{H}_2$, temos

$$\mathcal{G}(T^*) = V(\mathcal{G}(T))^{\perp} = V(\mathcal{G}(T)^{\perp}).$$

Demonstração. Sejam $x \in D(T)$ e $y \in D(T^*)$. Temos

$$\langle V(x, Tx), (y, T^*y)\rangle = \langle (-Tx, x), (y, T^*y)\rangle = -\langle Tx, y\rangle + \langle x, T^*y\rangle = 0,$$

donde $\mathcal{G}(T^*) \subset V(\mathcal{G}(T))^{\perp}$.

Reciprocamente, dado $(y, u) \in V(\mathcal{G}(T))^{\perp}$, para $x \in D(T)$, obtemos

$$\langle V(x, Tx), (y, u)\rangle = -\langle Tx, y\rangle + \langle x, u\rangle = 0,$$

ou seja, $\langle Tx, y\rangle = \langle x, u\rangle$, para todo $x \in D(T)$, donde segue que $y \in D(T^*)$ e $u = T^*y$, ou seja, $(y, u) \in \mathcal{G}(T^*)$, e assim, $V(\mathcal{G}(T))^{\perp} \subset \mathcal{G}(T^*)$.

A outra igualdade de conjuntos segue do fato de V ser unitário. $\square$

Teorema 1. *([22], Teorema 1.8, p.11)*
Seja $T : D(T) \subset \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ uma transformação linear densamente definida.

(i) T é fechável se, e somente se, $D(T^*)$ é denso em $\mathcal{H}_2$;

(ii) Se T é fechável, então $(\overline{T})^* = T^*$ e $\overline{T} = T^{**}$;

(iii) T é fechado se, e somente se, $T = T^{**}$;

(iv) Suponha $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ e $R(T)$ denso. Então T^* é invertível e $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$;

(v) Suponha T fechável e $\mathcal{N}(T) = \{0\}$. Então T^{-1} é fechável se, e somente se, $\mathcal{N}(\overline{T}) = \{0\}$. Além disso, $(\overline{T})^{-1} = \overline{(T^{-1})}$;

(vi) Se T é invertível, então T é fechado se, e somente se, T^{-1} é fechado.

Demonstração. (i) Suponhamos T fechável. Seja $u \in D(T^*)^\perp$. Então $(-u, 0) \in \mathcal{G}(T^*)^\perp$, donde

$$(0, u) = V^{-1}(-u, 0) \in V^{-1}(\mathcal{G}(T^*)^\perp) = V^{-1}(V(\mathcal{G}(T))^{\perp\perp}) = \mathcal{G}(T))^{\perp\perp} = \overline{\mathcal{G}(T)},$$

onde usamos que V é unitário e o Lema 3. Como T é fechável, $\overline{\mathcal{G}(T)}$ é o gráfico de $\overline{T}$. Portanto, devemos ter $u = 0$ e segue que $D(T^*)$ é denso.

Reciprocamente, se $D(T^*)$ é denso, então T^{**} está bem definido, é fechado e ainda $T \subset T^{**}$, donde T é fechável.

(ii) Usando o Lema 3 para $\overline{T}$, obtemos

$$\mathcal{G}((\overline{T})^*) = V(\mathcal{G}(\overline{T})^\perp) = V((\overline{\mathcal{G}(T)})^\perp) = V(\mathcal{G}(T)^\perp) = \mathcal{G}(T^*),$$

donde $(\overline{T})^* = T^*$.

Para a segunda afirmação, como T é fechável, então $D(T^*)$ é denso e T^{**} está bem definido. Aplicando o Lema 3 para T^* e T, obtemos

$$\mathcal{G}(T^{**}) = ((-V^{-1})(\mathcal{G}(T^*))^\perp) = V^{-1}(V(\mathcal{G}(T))^{\perp\perp}) = \mathcal{G}(T)^{\perp\perp} = \overline{\mathcal{G}(T)} = \mathcal{G}(\overline{T}).$$

Portanto, $T^{**} = T$.

(iii) Este item é consequência imediata do item (ii).

(iv) Como $R(T)$ é denso, segue que $\{0\} = R(T)^\perp = \mathcal{N}(T^*)$, donde existe $(T^*)^{-1}$. Além disso, (T^{-1}) existe, pois $D(T^{-1}) = R(T)$, que é denso. Agora, do Lema 3, temos $\mathcal{G}((T^{-1})^*) = (-V^{-1})(\mathcal{G}(T^{-1})^\perp)$. Então

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}((T^*)^{-1}) &= U^{-1}(\mathcal{G}(T^*)) = U^{-1}(V(\mathcal{G}(T)^\perp)) = U^{-1}V(\mathcal{G}(T)^\perp) \\
&= V^{-1}U(\mathcal{G}(T)^\perp) = V^{-1}(U(\mathcal{G}(T^\perp))) = (-V^{-1})(\mathcal{G}(T^{-1})^\perp) \\
&= \mathcal{G}((T^{-1})^*),
\end{aligned}$$

donde finalmente obtemos $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

(v) Notemos que

$$U(\mathcal{G}(\overline{T})) = U(\overline{\mathcal{G}(T)}) = \overline{U(\mathcal{G}(T))} = \overline{\mathcal{G}(T^{-1})}.$$

Assim, $(0, x) \in \overline{\mathcal{G}(T^{-1})}$ se, e somente se, $(x, 0) \in \mathcal{G}(\overline{T})$, ou de forma equivalente, se $x \in \mathcal{N}(\overline{T})$. Portanto, do Lema 1, $\overline{\mathcal{G}(T^{-1})}$ é o gráfico de um operador se, e somente se $\mathcal{N}(\overline{T}) = \{0\}$. Assim, T^{-1} é fechável se, somente se, $\mathcal{N}(T) = \{0\}$.

Agora, se T^{-1} é fechável, então

$$\mathcal{G}(\overline{(T^{-1})}) = \overline{\mathcal{G}(T^{-1})} = U(\mathcal{G}(\overline{T})) = \mathcal{G}((\overline{T})^{-1}),$$

donde $\overline{(T^{-1})} = (\overline{T})^{-1}$.

(vi) Segue do item anterior. $\square$

Definição 6. *Seja $T : D(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador linear. Dizemos que T é positivo se*

$$\langle Tx, x\rangle \geq 0, \quad \forall x \in D(T),$$

e se a desigualdade for estrita, dizemos que T é estritamente positivo (para $x \neq 0$).

Proposição 5. *([22], Proposição 3.18, p.47)*
Seja T um operador fechado e densamente definido em $\mathcal{H}$ sobre $\mathcal{H}$. Então

(i) $I + T^*T$ é uma aplicação bijetiva, e sua inversa $C = (I + T^*T)^{-1}$ é limitada e autoadjunta.

(ii) T^*T é positivo e autoadjunto e $D(T^*T)$ é centro de T.

Demonstração. (i) Recordemos inicialmente que $\mathcal{G}(T^*) = V(\mathcal{G}(T))^{\perp}$ do Lema 3, onde $V(x, y) = (-y, x)$, para $x \in \mathcal{H}$, $y \in \mathcal{H}$, donde $\mathcal{H} \times \mathcal{H} = \mathcal{G}(T^*) \times V(\mathcal{G}(T))$. Portanto, para cada $u \in \mathcal{H}$, existe um vetor $x \in D(T)$ e $y \in D(T^*)$, tal que

$$(0, u) = (y, T^*y) + V(x, Tx) = (y - Tx, T^*y + x).$$

Decorre que $y = Tx$ e $u = x + T^*y = x + T^*Tx = (I + T^*T)x$, ou seja, $I + T^*T$ é sobrejetivo.

Provemos que $I + T^*T$ é injetivo. Com efeito, para $x \in D(I + T^*T) = D(T^*T)$, temos

$$\begin{aligned}
||(I + T^*T)x||^2 &= \langle x + T^*Tx, x + T^*Tx\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, T^*Tx\rangle + \langle T^*Tx, x\rangle + \langle T^*Tx, T^*Tx\rangle \\
&= ||x||^2 + ||T^*Tx||^2 + 2||Tx||^2 \geq ||x||^2.
\end{aligned}$$

Portanto, $I + T^*T$ é bijeção, e podemos definir seu inverso C.

Mostremos que C é limitado. Tomemos $u = (I + T^*T)x$, para $x \in D(T^*T)$, donde $Cu = x$. Assim

$$||Cu|| = ||x|| \leq ||(I + T^*T)x|| = ||u||.$$

Por fim, mostremos que C é simétrico (e consequentemente, autoadjunto). Sejam $u = (I + T^*T)x$ e $v = (I + T^*T)y$. Temos

$$\begin{aligned}
\langle Cu, v\rangle &= \langle Cu, (I + T^*T)v\rangle \\
&= \langle Cu, y\rangle + \langle Cu, T^*Ty\rangle \\
&= \langle Cu, y\rangle + \langle TCu, Ty\rangle \\
&= \langle Cu, y\rangle + \langle T^*TCu, y\rangle \\
&= \langle (I + T^*T)Cu, Cv\rangle \\
&= \langle u, Cv\rangle,
\end{aligned}$$

ou seja, C é simétrico, limitado, donde é autoajdunto.

(ii) Como $C = (I + T^*T)^{-1}$ é autoadjunto e limitado, do Teorema 1, item (iv), temos

$$(I + T^*T) = (C)^{-1} = (C^*)^{-1} = (C^{-1})^* = (I + T^*T)^*,$$

ou seja, $I + T^*T$ é autoadjunto, e em particular, T^*T é autoadjunto.

Mostremos, por fim, que $D(T^*T)$ é centro de $D(T)$. Para isto, precisamos então mostrar que $D(T^*T)$ é denso em $D(T)$, na norma $||\cdot||_T$. Se $y \in D(T)$ é ortogonal a $D(T^*T)$ (em $(D(T), \langle\cdot,\cdot\rangle_T)$), segue que

$$0 = \langle y, x\rangle_T = \langle y, x\rangle + \langle y, (I + T^*T)x\rangle,$$

para $x \in D(T^*T)$. Porém, como $R(I+T^*T) = \mathcal{H}$, segue que $y = 0$. Isto prova que $D(T^*T)$ é denso em $D(T)$. $\square$

Tratemos de definir alguns conceitos essenciais da Teoria Espectral, a saber, de conjunto resolvente e espectro.

Definição 7. *Seja $T : D(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador linear. O conjunto*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I : D(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H} \text{ é um isomorfismo } \} \tag{2.4}$$

é dito resolvente de T.

O complementar de $\rho(T)$, ou seja,

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T) \tag{2.5}$$

é dito espectro de T.

Seguindo nesta linha de ideias, é interessante ainda se atentar que, se $\lambda \in \mathbb{C}$ é tal que $\mathcal{N}(T - \lambda I) \neq \{0\}$, então $T - \lambda I$ não é injetivo, donde $\lambda \notin \rho(T)$, ou seja, $\lambda \in \sigma(T)$. Mais ainda, isto significa que existe $v \in D(T)$ não nulo satisfazendo $Tv = \lambda v$, ou seja, λ é autovalor de T. Isto nos leva à seguinte definição.

Definição 8. *Seja $T : D(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador linear. O conjunto*

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{N}(T - \lambda I) \neq \{0\}\} \subset \sigma(T) \tag{2.6}$$

é dito espectro pontual de T. Além disso

$$\sigma_d(T) = \{\lambda \in \sigma_p(T) : dim \mathcal{N}(T - \lambda I) < \infty \text{ e } \lambda \text{ é ponto isolado de } \sigma(T)\} \tag{2.7}$$

é dito espectro discreto de T. Por fim,

$$\sigma_{ess}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_d(T)$$

é dito espectro essencial de T.

Lema 4. *([24], Lema 3.2, p.31)*
Seja $T : D(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador linear autoadjunto sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, $T - \lambda I$ é um isomorfismo se, e somente se existe $c > 0$ tal que $||(T - \lambda I)u|| \geq c||u||$, para todo $u \in D(T)$.

Demonstração. Se $T - \lambda I : D(T) \to \mathcal{H}$ é um isomorfismo, do Teorema 1, item (vi), segue que $(T - \lambda I)^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ também é fechado (pois de T ser autoadjunto, T é fechado). O Teorema do Gráfico Fechado 19 implica que $(T - \lambda I)^{-1}$ é limitado (contínuo), donde existe $M > 0$ tal que

$$||(T - \lambda I)^{-1}v|| \leq M||v||, \quad \forall v \in \mathcal{H},$$

e assim, dado $u \in D(T)$, tomando $v = (T - \lambda I)u$, segue que

$$||(T - \lambda I)u|| \geq \frac{1}{M}||u||.$$

Reciprocamente, se existe $c > 0$ tal que $||(T - \lambda I)u|| \geq c||u||$, para todo $u \in D(T)$, segue que $T - \lambda I$ é injetivo, donde podemos definir sua inversa sobre $R(T - \lambda I) = D((T - \lambda I)^{-1})$ e ainda, dado $v \in D((T - \lambda I)^{-1})$, segue que existe $u \in D(T)$ que $(T - \lambda I)u = v$, donde

$$||(T - \lambda I)^{-1}v|| = ||u|| \leq \frac{1}{c}||(T - \lambda I)u|| = \frac{1}{c}||v||,$$

ou seja, $(T - \lambda I)^{-1}$ é limitado. Assim, como $(T - \lambda I)^{-1}$ é limitado e fechado, segue que $D((T - \lambda I)^{-1})$ é subespaço fechado de $\mathcal{H}$. Porém, como $R(T - \lambda)^{\perp} = \mathcal{N}((T - \lambda I)^*) = \mathcal{N}(T - \lambda I) = \{0\}$, donde $\mathcal{H} = R(T - \lambda I)$, ou seja, $T - \lambda I$ é sobrejetivo, e concluímos que $T - \lambda I$ é isomorfismo, como desejávamos. $\square$

Lema 5. *Seja $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador linear autoadjunto e limitado. Então $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.*

Demonstração. Basta mostrar que se $\lambda = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, então $\lambda \in \rho(T)$. Observemos inicialmente que $\langle Tx, x\rangle$ é um número real. Com efeito

$$\langle Tx, x\rangle = \langle x, T^*x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle},$$

e segue a afirmação. Agora, subtraindo as equações

$$\begin{aligned} \overline{\langle (T - \lambda I)x, x\rangle} = \overline{\langle Tx, x\rangle} - \overline{\lambda}\overline{\langle x, x\rangle} &= \langle Tx, x\rangle - \overline{\lambda}\langle x, x\rangle \\ \langle (T - \lambda I)x, x\rangle &= \langle Tx, x\rangle - \lambda\langle x, x\rangle, \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} -2iIm(\langle (T - \lambda I)x, x\rangle) &= \overline{\langle (T - \lambda I)x, x\rangle} - \langle (T - \lambda I)x, x\rangle \\ &= (\lambda - \overline{\lambda})\langle x, x\rangle = 2ib||x||^2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Por fim,

$$|b|||x||^2 = |Im(\langle (T - \lambda I)x, x\rangle)| \leq |\langle (T - \lambda I)x, x\rangle| \leq ||(T - \lambda I)x||||x||,$$

donde podemos aplicar o Lema 4, e obtermos a afirmação. $\square$

Lema 6. *([24], Lema 3.4, p.33)*
Seja $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador linear limitado e autoadjunto, e

$$m = inf\{\langle Tu, u\rangle \ u \in \mathcal{H},\ ||u|| = 1\}$$
$$M = sup\{\langle Tu, u\rangle \ u \in \mathcal{H},\ ||u|| = 1\}.$$

então

(i) $\sigma(T) \subset [m, M]$;

(ii) $||T|| = sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(T)\} = \max\{|m|, |M|\}$;

(iii) $m, M \in \sigma(T)$.

Demonstração. Observemos inicialmente que, como T é autoadjunto e limitado, segue do Lema 5, que $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

(i) Se $\lambda > M$, para $u \in \mathcal{H}$ arbitrário, temos

$$\langle (T - \lambda I)u, u\rangle = \langle Tu, u\rangle - \lambda\langle u, u\rangle \leq (M - \lambda)||u||^2,$$

donde podemos escrever

$$\begin{aligned} ||(T - \lambda I)u||||u|| &\geq |\langle (T - \lambda I)u, u\rangle| \\ &\geq -\langle (T - \lambda I)u, u\rangle \\ &\geq (\lambda - M)||u||^2, \end{aligned}$$

que culmina em $||(T - \lambda I)u|| \geq (\lambda - M)||u||$, ou seja, de acordo com o Lema 4, $T - \lambda I$ é um isomorfimo, donde $\lambda \in \rho(T)$. Mais ainda, é imediato que $\sigma(T) \subset (-\infty, M]$. Um argumento completamente análogo nos mostra que $\sigma(T) \subset [m, \infty)$.

(ii) Seja $\mu = max\{|m|, |M|\}$, donde $\mu = sup\{|\langle Tu, u\rangle|, u \in \mathcal{H}$ e $||u|| = 1\}$. Mostremos então que $\mu = ||T||$. Assim, dado $u \in \mathcal{H}$,

$$|\langle Tu, u\rangle| \leq ||Tu||||u|| \leq ||T||||u||^2,$$

donde $\mu \leq ||T||$. Reciprocamente, dados $u, v \in \mathcal{H}$, e como $\langle Tu, u\rangle$ é um número real, segue da identidade de polarização (2.1) que

$$\begin{aligned} Re(\langle Tu, v\rangle) &= \frac{1}{4}(\langle T(u + v), u + v\rangle + \langle T(u - v), u - v\rangle \\ &\leq \frac{\mu}{4}(||u + v||^2 + ||u - v||^2) \\ &= \frac{\mu}{2}(||u||^2 + ||v||^2) = \mu, \text{ para } ||u||, ||v|| = 1. \end{aligned}$$

Agora, tomando $||u|| = 1$, com $||Tu|| \neq 0$ e $v = Tu/||Tu||$, então $\langle Tu, v\rangle = \langle Tu, Tu/||Tu||\rangle = ||Tu|| \in \mathbb{R}$, donde

$$
\begin{aligned}
||Tu|| &= \left\langle Tu, \frac{Tu}{||Tu||} \right\rangle \\
&= Re(\langle Tu, v\rangle) \leq \mu, \quad \forall u \in \mathcal{H}, \text{ com } ||u|| = 1
\end{aligned}
$$

Temos então $||T|| \leq \mu$, e o item (ii) está provado.

(iii) Inicialmente, consideremos $m = M$. Neste caso, aplicando o item (ii) ao operador $A = T - MI$ temos

$$\langle Au, u\rangle = \langle Tu, u\rangle - M||u|| \leq M||u|| - M||u|| = 0$$

donde $||A|| = ||T - MI|| = \sup\{|\langle Au, u\rangle|, ||u|| = 1\} = 0$, ou seja, $T = MI$ e $\sigma(T) = \{M\}$.

Agora, supondo $M > m = 0$ (caso contrário, podemos apenas substituir T por $T - mI$), vamos provar que $M \in \sigma(T)$, e para isso, do Lema 4, precisamos apenas mostrar que existe uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$, com $||u_n|| = 1$ e que satisfaz $||(T - MI)u_n|| \to 0$ quando tomamos o limite $n \to \infty$. Observemos que existe uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ tal que $||u_n|| = 1$ e $0 \leq M - \langle Tu_n, u_n\rangle \leq 1/n$, (pois $M = \sup_{||u||=1}\langle Tu, u\rangle$) donde podemos escrever

$$
\begin{aligned}
||(T - MI)u_n||^2 &= ||Tu_n||^2 + M^2 - 2M\langle Tu_n, u_n\rangle \\
&\leq 2M^2 + 2M\left(\frac{1}{n} - M\right),
\end{aligned}
$$

donde conseguimos a sequência que desejávamos, e obtemos então que $M \in \sigma(T)$. Um argumento similar mostra que $m \in \sigma(T)$, e o resultado segue. □

Lema 7. *([6], Teorema 3.29, p.52)*
Seja $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador simétrico e $z \in \mathbb{C}$ um número puramente imaginário. Então são equivalentes

(i) T é autoadjunto;

(ii) T é fechado e $T^* - zI$ e $T^* + zI$ são injetivos;

(iii) $T - zI$ e $T + zI$ tem inversa limitada;

(iv) $T - zI$ e $T + zI$ são sobrejetivos.

Demonstração. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Assumindo que T é autoadjunto, segue imediatamente que T é fechado. Observemos que, para $v \in D(T)$ e $z \in \mathbb{C}$, segue da equação (2.8)

$$Im\langle v, (T - zI)v\rangle = -(Imz)||v||^2,$$

donde

$$||v|| \leq \frac{1}{|Imz|}||(T - zI)v||$$

ou seja, $T - zI$ e $T + zI$ são injetivos.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Como $\mathcal{N}(T^* - zI) = R(T - zI)^\perp$, da injetividade de $T^* - zI$, segue que $R(T - zI)$ é denso. Portanto, como T é fechado, segue que $T - zI$ também é fechado, e como no item anterior, $||(T - zI)v|| \geq c||v||$, segue do Lema 4 que $T - zI$ tem inversa limitada. Repetindo o argumento para $T + zI$, obtemos de forma completamente análoga que $T + zI$ tem inversa limitada.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) Se $T - zI$ e $T + zI$ são invertíveis, em particular, são sobrejetivos.

(iv) $\Longrightarrow$ (i) Como T é simétrico, basta apenas provar que $D(T^*) \subset D(T)$. Seja $u \in D(T^*)$, donde, da sobrejetividade de $T - zI$, existe $v \in D(T)$ tal que $(T - zI)v = (T^* - zI)u$. Como T^* é extensão de T, segue que, $Tv = T^*v$, e assim, podemos escrever $(T^* - zI)(u - v) = 0$, ou seja, $u - v \in \mathcal{N}(T^* - zI) = R(T - zI)^\perp = \mathcal{H}^\perp = \{0\}$, donde concluímos que $u = v \in D(T)$, finalizando a prova. □

Lema 8. *Seja $T : D(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador ilimitado e autoadjunto. Então $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.*

Demonstração. Precisamos apenas mostrar que, se $\lambda = a + bi \in \mathbb{C}$, tal que $b \neq 0$, então $\lambda \in \rho(T)$. Assim, tomando $\lambda = a + bi$, com $b \neq 0$, podemos escrever

$$\begin{aligned} T - \lambda I &= T - aI - biI \\ &= B - zI, \end{aligned}$$

onde $B = T - aI$ e $z = bi$ é um número complexo puramente imaginário. Assim, como T é autoadjunto, segue que $T - aI$ também é autoadjunto, e portanto, aplicando o Lema 7 para B, segue que $B - zI$ é inversível, com inversa limitada, ou seja, segue que $z \in \rho(B)$, mas isto implica que $T - \lambda I = B - zI$ tem inversa limitada, donde $\lambda \in \rho(T)$ e segue o resultado. □

Lema 9. *Seja $S : D(S) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador ilimitado, sobrejetivo , estritamente positivo e simétrico no subespaço $D(S)$. Então S é densamente definido e autoadjunto*

Demonstração. Se $D(S)$ não fosse denso em $\mathcal{H}$, então existiria $0 \neq y \perp D(S)$, e da sobrejetividade de S, existiria $x \in D(S)$ tal que $y = Sx$, mas como S é estritamente positivo, teríamos uma contradição, pois

$$0 = \langle x, y \rangle = \langle x, Sx \rangle,$$

donde obtemos que S é densamente definido.

Para mostrar que S é autoadjunto, tomemos $y \in D(S^*)$, donde vale

$$\langle Sx, y \rangle = \langle x, S^*y \rangle, \ \ \forall x \in D(S).$$

Novamente, da sobrejetividade de S, existe $z \in D(S)$ tal que $Sz = S^*y$, donde podemos escrever

$$\langle Sx, y \rangle = \langle x, S^*y \rangle = \langle x, Sz \rangle = \langle Sx, z \rangle, \ \ \forall x \in D(S).$$

Como S é sobrejetiva, podemos escrever, em outras palavras, que $\langle u, y\rangle = \langle u, z\rangle$, para todo $u \in R(S)$, e como $R(S) = \mathcal{H}$ (novamente da sobrejetividade de S), segue que $y = z \in D(S)$, donde $D(S) = D(S^*)$, e concluímos a prova. $\square$

Proposição 6. *Seja $T : D(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador ilimitado e autoadjunto. Então T^2 é autoadjunto.*

Demonstração. Como T é autoadjunto, segue do Lema 8 que $i, -i \in \rho(T)$, ou seja, $T - iI$ e $T + iI$ são isomorfismos, e portanto

$$T^2 + I = (T - iI)(T + iI)$$

também é sobrejetivo. Assim, temos $T^2 + I$ sendo estritamente positivo definido (exceto obviamente na origem) e sobrejetivo. Com efeito, para $u \neq 0$

$$\begin{aligned}
\langle (T^2 + I)u, u\rangle &= \langle T^2u, u\rangle + \langle u, u\rangle \\
&= ||u||^2 + \langle Tu, Tu\rangle \\
&= ||u||^2 + ||Tu||^2 > 0.
\end{aligned}$$

Podemos obter ainda que $T^2 + I$ é simétrico, pois

$$\begin{aligned}
\langle (T^2 + I)v, u\rangle &= \langle T^2v, u\rangle + \langle v, Iu\rangle \\
&= \langle Tv, T^*u\rangle + \langle v, Iu\rangle \\
&= \langle Tv, Tu\rangle + \langle v, Iu\rangle \\
&= \langle v, T^*Tu\rangle + \langle v, Iu\rangle \\
&= \langle v, T^2u\rangle + \langle v, Iu\rangle \\
&= \langle v, (T^2 + I)u\rangle.
\end{aligned}$$

Aplicando então o Lema 9 para $S = T^2 + I$, segue que $T^2 + I$ é autoadjunto, donde T^2 é autoadjunto. $\square$

3 O TEOREMA ESPECTRAL

Neste capítulo, estaremos interessados em provar o Teorema Espectral para operadores ilimitados e autoadjuntos e obter algumas consequências dele, bem como enunciar as bases do cálculo funcional para operadores. Porém, o Teorema Espectral tem suas bases fundamentadas nas ditas Medidas Espectrais e nas Integrais Espectrais, sendo então nosso ponto de partida definir e enunciar apenas os resultados essenciais deste vasto campo de estudo. O conteúdo deste capítulo é fortemente baseado nos Capítulos 4 e 5 de [22].

3.1 MEDIDAS ESPECTRAIS

Sejam $\mathcal{U}$ uma álgebra de subconjuntos de Ω e $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Denotaremos por $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ o conjunto das projeções ortogonais de $\mathcal{H}$.

Definição 9. *Uma pré-medida espectral em $\mathcal{U}$ é uma aplicação $E : \mathcal{U} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ que satisfaz*

(i) $E(\Omega) = I$;

(ii) Se $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos de $\mathcal{U}$ dois a dois disjuntos, tal que $\cup_{n\in\mathbb{N}} M_n \in \mathcal{U}$, então $E(\cup_{n\in\mathbb{N}} M_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} E(M_n)$.

Se $\mathcal{U}$ é uma σ-álgebra, então E é dita medida espectral.

Uma observação importante é a de que, no item (ii) da definição, a soma infinita que aparece na equação deve ser entendida da seguinte forma

$$E\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n\right) x = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} E(M_n)x, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Observemos ainda que, se tomamos $M_n = \emptyset$ para todo n, obtemos que $E(\emptyset) = 0$. Agora, se tomamos uma sequência $(M_n) \subset \mathcal{U}$ finita, com termos dois a dois disjuntos, segue de (ii) e do comentário anterior que

$$E(M_1 \cup \cdots \cup M_k) = E(M_1) + \cdots + E(M_k).$$

Lema 10. *Se P_1 e P_2 são projeções ortogonais e $P_1 + P_2$ também é projeção ortogonal, então $P_1 P_2 = 0$.*

Demonstração. Tomemos $x \in R(P_2)$, então $x = P_2 x$. Mostraremos que $x \in \mathcal{N}(P_1)$, que implica na afirmação.

$$\begin{aligned}
||x||^2 = ||P_2x||^2 &\leq ||P_2x||^2 + ||P_1x||^2 \\
&= \langle P_2x, P_2x\rangle + \langle P_1x, P_1x\rangle \\
&= \langle P_2^2x, x\rangle + \langle P_1^2x, x\rangle \\
&= \langle P_2x, x\rangle + \langle P_1x, x\rangle \\
&= \langle (P_1+P_2)x, x\rangle \\
&\leq ||P_1+P_2||||x||^2 \\
&\leq ||x||^2,
\end{aligned}$$

noutras palavras, podemos reescrever

$$\begin{aligned}
&||x||^2 = ||P_2x||^2 \leq ||P_2x||^2 + ||P_1x||^2 \leq ||x||^2 \\
&\implies ||P_2x||^2 = ||P_2x||^2 + ||P_1x||^2
\end{aligned}$$

donde devemos ter $P_1x = 0$, e segue que $R(P_2) \subset \mathcal{N}(P_1)$. □

Observemos agora como o produto de projeções se correlaciona com a interseção entre conjuntos.

Lema 11. *([22], Lema 4.3, p.67)*
Se $E : \mathcal{U} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ é uma pré-medida espectral, vale que

$$E(M)E(N) = E(M \cap N), \quad M, N \in \mathcal{U}. \tag{3.1}$$

Em particular, $E(M)E(N) = 0$ se M e N são disjuntos.

Demonstração. Mostremos inicialmente o caso particular. Tomemos M e N em $\mathcal{U}$, disjuntos. Então $E(M) + E(N) = E(M \cup N) \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$, ou seja, $E(M) + E(N)$ é projeção ortogonal, donde podemos aplicar o Lema 10 e concluir que $E(M)E(N) = 0$.

Agora, para $M, N \in \mathcal{U}$ quaisquer, definimos $M_0 = M \cap N$, $M_1 = M \setminus M_0$, $M_2 = N \setminus M_0$. Como $M_1 \cap M_0 = M_2 \cap M_0 = M_1 \cap M_2 = \emptyset$, temos

$$E(M_1)E(M_0) = E(M_2)E(M_0) = E(M_1)E(M_2) = 0.$$

Além disso, de $M = M_0 \cup M_1$ e $N = M_0 \cup M_2$, segue que

$$E(M)E(N) = (E(M_1) + E(M_0))(E(M_2) + E(M_0)) = E(M_0)^2 = E(M_0) = E(M \cap N).$$

□

Observemos então que, da equação (3.1), duas projeções $E(M)$ e $E(N)$ arbitrárias comutam. Além disso, se $N, M \in \mathcal{U}$ e $N \subset M$, segue que $E(N) \subset E(M)$. Observemos agora que podemos relacionar medidas espectrais com medidas escalares.

Lema 12. *([22], Lema 4.4, p.67)*
Seja $\mathcal{U}$ uma álgebra (σ-álgebra) de Ω. Uma aplicação $E : \mathcal{U} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ é uma pré-medida espectral (medida espectral) se, e somente se, $E(\Omega) = I$ e, para cada $x \in \mathcal{H}$, a função $E_x(\cdot) = \langle E(\cdot)x, x\rangle$ definida em $\mathcal{U}$ é contavelmente aditiva (medida).

Demonstração. Se E é uma pré-medida espectral, segue imediatamente que $E(\Omega) = I$. Além disso, se x é um elemento de $\mathcal{H}$ e $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos dois a dois disjuntos de $\mathcal{U}$, então

$$E_x\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) = \left\langle E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right)x, x\right\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} E(M_n)x, x\right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} E_x(M_n).$$

Reciprocamente, observemos que, como E_x é finitamente aditiva, segue que E também é. Com efeito, dados $M_1, \cdots M_n \in \mathcal{U}$, tais que $M = \cup_{i=1}^{n} M_i \in \mathcal{U}$, segue que

$$\langle E(M)x, x\rangle = E_x(M) = \sum_{i=1}^{n} E_x(M_i) = \left\langle \sum_{i=1}^{n} E(M_i)x, x\right\rangle,$$

e do Lema 2, segue que $E(M) = \sum_{i=1}^{n} E(M_i)$.

Consideremos agora $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos dois a dois disjuntos de $\mathcal{U}$, de modo que $M = \cup_{n=1}^{\infty} M_n \in \mathcal{U}$. Do Lema 11, segue que $(E(M_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de projeções ortogonais duas a duas disjuntas, que convergem fortemente. De fato, sendo $P_k = \sum_{i=1}^{k} E(M_i)$ e dado $x \in \mathcal{H}$ arbitrário e $n > m$

$$\begin{aligned} ||P_n x - P_m x||^2 &= \langle P_n x, P_n x\rangle - \langle P_m x, P_m x\rangle \\ &= \langle P_n x, x\rangle - \langle P_m x, x\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} E(M_i)x, x\right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{m} E(M_i)x, x\right\rangle \\ &= E_x(\cup_{i=m}^{n} M_i), \end{aligned}$$

e como $E_x(\cup_{i=1}^{n} M_i)$ converge para $E_x(M)$, segue que $(E_x(\cup_{i=1}^{n} M_i))_{n\in\mathbb{N}}$ é Cauchy em $\mathbb{R}$, donde $(\sum_{i=1}^{k} E(M_i)x)_{k\in\mathbb{N}}$ é Cauchy em $\mathcal{H}$, como desejávamos. Portanto, usando da continuidade do produto interno segue que

$$\begin{aligned} \langle E(M)x, x\rangle = E_x(M) &= \sum_{n=1}^{\infty} E_x(M_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle E(M_n)x, x\rangle \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \langle E(M_n)x, x\rangle \\ &= \left\langle \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} E(M_n)x, x\right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} E(M_n)x, x\right\rangle, \end{aligned}$$

e segue do Lema 2 que $E(M) = \sum_{n=1}^{\infty} E(M_n)$, donde E é uma pré-medida espectral. $\square$

Como no resultado acima, dados uma medida espectral E sobre a σ-álgebra $\mathcal{U}$ e $x \in \mathcal{H}$, definimos uma medida escalar $E_x : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ por

$$E_x(M) = \langle E(M)x, x\rangle = \langle E(M)^2 x, x\rangle = \langle E(M)x, E(M)x\rangle = ||E(M)||^2, \ M \in \mathcal{U}.$$

Observemos que tal medida é finita, pois $E_x(\Omega) = ||E(\Omega)x||^2 = ||x||^2$. No decorrer deste capítulo, usaremos estas medidas escalares de forma recorrente. Podemos generalizar um pouco mais e, dados $x, y \in \mathcal{H}$, definir ainda uma medida complexa $E_{x,y}$ sobre $\mathcal{U}$ dada por $E_{x,y}(M) = \langle E(M)x, y\rangle$. É possível, através de um cálculo direto, verificar que a medida $E_{x,y}$ satisfaz um tipo de identidade de polarização, a saber

$$E_{x,y} = \frac{1}{4}(E_{x+y} - E_{x-y} + iE_{x-iy} - iE_{x-iy}).$$

Além disso, com uma demonstração inteiramente análoga ao caso escalar (e por isso omitiremos a demonstração, mas que pode ser encontrada em [2], Lema 3.4, p.21), é possível mostrar o seguinte resultado.

Lema 13. *([22], Lema 4.5, p.68)*
Seja E uma pré-medida espectral em $\mathcal{U}$. Suponhamos que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja uma sequência decrescente e $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência crescente em $\mathcal{U}$, tais que $M = \cap_n M_n$ e $N = \cup_n N_n$ estejam em $\mathcal{U}$. Então

$$E(M)x = \lim_{n\to\infty} E(M_n)x, \ \ E(N)x = \lim_{n\to\infty} E(N_n)x, \ \ \forall x \in \mathcal{H}.$$

Recordemos que a variação total $|\mu|$ de uma medida complexa μ sobre $\mathcal{U}$ é uma medida positiva tal que $|\mu|(M)$ é o supremo das somas $\sum_{k=1}^n |\mu(M_k)|$ tomado sobre todas as uniões disjuntas $M = \cup_{k=1}^n M_k$, com $M_k \in \mathcal{U}$. Desta definição decorre imediatamente que $|\mu(M)| \leq |\mu|(M)$. Tratemos de provar a seguir um resultado que faz uso da variação total.

Lema 14. *([22], Lema 4.8, p.70)*
Seja E uma medida espectral sobre $(\Omega,\mathcal{U})$, num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Valem

(i) $|E_{x,y}|(M) \leq E_x(M)^{1/2} E_y(M)^{1/2}$, *para* $x, y \in \mathcal{H}$ *e* $M \in \mathcal{U}$;

(ii) Se $f \in L^2(\Omega, E_x)$, $g \in L^2(\Omega, E_y)$, *então*

$$\left|\int_\Omega fg dE_{x,y}\right| \leq \int_\Omega |fg| d|E_{x,y}| \leq ||f||_{L^2(\Omega,E_x)} ||g||_{L^2(\Omega,E_y)}. \tag{3.2}$$

Demonstração. (i) Seja $M = \cup_{k=1}^n M_n \in \mathcal{U}$, com $M_k \in \mathcal{U}$, para $k = 1, \ldots, n$ uma união disjunta de M. Observemos que, como $E(M)$ é projeção ortogonal, obtemos

$$\begin{aligned} |E_{x,y}(M_k)| &= |\langle E(M_k)x, y\rangle| \\ &= |\langle E(M_k)x, E(M_k)y\rangle| \\ &\leq ||E(M_k)x|| ||E(M_k)y|| \\ &= E_x(M_k)^{1/2} E_y(M_k)^{1/2}. \end{aligned}$$

Obtemos então

$$\sum_{k=1}^{n} |E_{x,y}(M_k)| \leq \sum_{k=1}^{n} E_x(M_k)^{1/2} E_y(M_k)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} E_x(M_k)\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} E_y(M_k)\right)^{1/2}$$
$$= E_x(M)^{1/2} E_y(M)^{1/2}.$$

Tomando o supremo sobre todas as uniões disjuntas de M, segue a afirmação.

(ii) Sejam $f = \sum_k a_k \chi_{M_k}$ e $g = \sum_k b_k \chi_{M_k}$ funções simples, com $M_k \in \mathcal{U}$.

$$\left|\sum_k a_k b_k E_{x,y}(M_k)\right| \leq \sum_k |a_k b_k| |E_{x,y}|(M)$$
$$\leq \left(\sum_k |a_k|^2 E_x(M_k)\right)^{1/2} \left(\sum_k |b_k|^2 E_y(M_k)\right)^{1/2}$$

que é exatamente a desigualdade do item (ii) para funções simples. Da densidade das funções simples nos espaços $L^2(\Omega)$ (veja Teorema 23), o resultado segue imediatamente. □

A partir deste ponto, consideraremos sempre $\mathcal{U}$ uma σ-álgebra sobre Ω e E uma medida espectral definida em $\mathcal{U}$. Denotaremos por $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{U})$ o espaço de Banach das funções $\mathcal{U}-$mensuráveis e limitadas em Ω com a norma $||f||_\Omega = sup\{|f(t)| : t \in \Omega\}$. Nesta linha de ideias, $\mathcal{B}_s$ denotará o subconjunto de $\mathcal{B}$ das funções simples (ou seja, funções que assumem um número finito de valores). Sabemos que cada função simples pode ser escrita na forma

$$f = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{M_k}, \tag{3.3}$$

onde $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ e $M_1, \ldots, M_n$ são conjuntos disjuntos de $\mathcal{U}$.

Definição 10. *Seja f uma função em $\mathcal{B}_s$, ou seja, uma função que pode ser escrita como* (3.3)*. Definimos a integral espectral de f na medida espectral E como sendo o operador*

$$\mathbb{I}(f) = \int_\Omega f dE = \sum_{k=1}^{n} c_k E(M_k). \tag{3.4}$$

Da aditividade de E decorre que $\mathbb{I}$ independe da representação de f.

Buscaremos agora estender essa definição anterior para funções em $\mathcal{B}$. Comecemos este expediente com o seguinte resultado.

Lema 15. *([22], Lema 4.11, p.74)*
Para $f \in \mathcal{B}_s$, vale que $||\mathbb{I}(f)|| \leq ||f||_\Omega$.

Demonstração. Seja f uma função simples, como em (3.3), mantendo a noção de que os conjuntos $M_1, \ldots, M_n$ são dois a dois disjuntos. Portanto, $E(M_k)\mathcal{H}$ e $E(M_l)\mathcal{H}$ são conjuntos ortogonais se $l \neq k$, donde podemos obter

$$||\mathbb{I}(f)x||^2 = \left|\left|\sum_k c_k E(M_k)x\right|\right|^2 = \sum_k |c_k|^2 ||E(M_k)x||^2 \leq \sum_k ||f||_\Omega^2 ||E(M_k)x||^2$$
$$= ||f||_\Omega^2 \left|\left|\sum_k E(M_k)x\right|\right|^2 \leq ||f||_\Omega^2 ||x||^2.$$

□

Vamos construir agora a integral espectral para funções em $\mathcal{B}$. Dada $f \in \mathcal{B}$, da densidade de $\mathcal{B}_s$ em $\mathcal{B}$ (na norma $||\cdot||_\Omega$), segue que existe uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}_s$ que converge para f. Portanto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy (na norma do supremo), donde segue do Lema 15 que $(\mathbb{I}(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy na norma de operadores. Assim, existe um operador limitado $\mathbb{I}(f) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ que é o limite da sequência de operadores construída.

Proposição 7. *([22], Proposição 4.12, p.75)*
Para $f, g \in \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{U})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $x, y \in \mathcal{H}$, temos

(*i*) $\mathbb{I}(\overline{f}) = \mathbb{I}(f)^*$, $\mathbb{I}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathbb{I}(f) + \beta\mathbb{I}(g)$ *e* $\mathbb{I}(fg) = \mathbb{I}(f)\mathbb{I}(g)$*;*

(*ii*) $\langle \mathbb{I}(f)x, y\rangle = \int_\Omega f dE_{x,y}$*;*

(*iii*) $||\mathbb{I}(f)x||^2 = \int_\Omega |f|^2 dE_x$*;*

(*iv*) $||\mathbb{I}(f)|| \leq ||f||_\Omega$*;*

(*v*) *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ uma sequência convergindo pontualmente para f $E-$q.t.p. em Ω e uma constante c tal que $|f_n(t)| \leq c$ para $n \in \mathbb{N}$ e $t \in \Omega$. Então $\mathbb{I}(f_n)x \to \mathbb{I}(f)x$ para todo $x \in \mathcal{H}$.*

Demonstração. (i) Seja $f = \sum_k c_k \chi_{M_k} \in \mathcal{B}_s$, com $M_1, \ldots, M_n$ disjuntos. Então $\overline{f} = \sum_k \overline{c_k} \chi_{M_k}$ e

$$\mathbb{I}(\overline{f}) = \sum_k \overline{c_k} E(M_k) = \mathbb{I}(f)^*.$$

Agora, se $f \in \mathcal{B}$, então tomando uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}_s$ convergindo para f, segue que $(\overline{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\overline{f}$. Assim, $\mathbb{I}(f_n)^* = \mathbb{I}(\overline{f_n}) \to \mathbb{I}(\overline{f})$. Mostremos por fim que $\mathbb{I}(f_n)^*$ converge para $\mathbb{I}(f)^*$. Para isso, tome $x, y \in \mathcal{H}$

$$\langle \mathbb{I}(f)^* x, y\rangle = \langle x, \mathbb{I}(f)y\rangle = \langle x, \lim_{n\to\infty} \mathbb{I}(f_n)y\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} \mathbb{I}(f_n)^* x, y\rangle,$$

donde segue que $\mathbb{I}(f_n)^*$ converge fortemente para $\mathbb{I}(f)^*$, mas como a sequência de operadores já converge na topologia da norma (de operadores) para $\mathbb{I}(\overline{f})$, segue que $\mathbb{I}(\overline{f}) = \mathbb{I}(f)^*$.

Para provar a segunda igualdade do item (i), observemos que se $f, g \in \mathcal{B}_s$, então é imediato que vale $\mathbb{I}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathbb{I}(f) + \beta\mathbb{I}(g)$. Agora, para $f, g \in \mathcal{B}$, basta tomar sequências $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{B}_s$ tais que $f_n \to f$ e $g_n \to g$, e aplicar o caso anterior.

Para a igualdade $\mathbb{I}(fg) = \mathbb{I}(f)\mathbb{I}(g)$, sejam $f = \sum_k a_k \chi_{M_k}$ e $g = \sum_l b_l \chi_{N_l}$, onde os conjuntos M_k são dois a dois disjuntos e os conjuntos N_l também são. Podemos então escrever $fg = \sum_{k,l} a_k b_l \chi_{M_k \cap N_l}$. Assim

$$\begin{aligned}\mathbb{I}(fg) &= \sum_{k,l} a_k b_l E(M_k \cap N_l) = \sum_{k,l} a_k b_l E(M_k) E(N_l) \\ &= \left(\sum_k a_k E(M_k)\right)\left(\sum_l b_l E(N_l)\right) = \mathbb{I}(f)\mathbb{I}(g).\end{aligned}$$

Agora, para $f, g \in \mathcal{B}$, tomando sequências (f_n) e $(g_n) \in \mathcal{B}_s$ tais que f_n converge para f e g_n converge para g, segue que $f_n g_n$ converge pontualmente para fg, donde, na topologia da norma de operadores, $\mathbb{I}(f_n g_n)$ converge para $\mathbb{I}(fg)$, mas da propriedade provada para funções simples, segue que $\mathbb{I}(f_n g_n)$ converge para $\mathbb{I}(f)\mathbb{I}(g)$, e o resultado está provado.

(ii) Suponhamos que f esteja em $\mathcal{B}_s$, escrita da forma $f = \sum_k c_k \chi_{M_k}$, com os conjuntos M_k dois a dois disjuntos. Então, dados $x, y \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{I}(f)x, y\rangle &= \left\langle \sum_k c_k E(M_k)x, y \right\rangle = \sum_k c_k \langle E(M_k)x, y\rangle \\ &= \sum_k c_k E_{x,y}(M_k) = \int_\Omega f dE_{x,y}.\end{aligned}$$

Agora, do Teorema 23, sabemos que podemos construir uma sequência f_n crescente de funções simples que converge para f, com $|f_n| \leq |f| \leq K$ (pois f é limitada). Assim, do Teorema da Convergência Dominada 20

$$\langle \mathbb{I}(f)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \mathbb{I}(f_n)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n dE_{x,y} = \int_\Omega f dE_{x,y}.$$

O item (iii) decorre de um cálculo inteiramente análogo ao cálculo desenvolvido no item (ii). Já o item (iv) decorre do Lema 15, tomando uma sequência de funções simples em $\mathcal{B}_s$ convergindo para f e usar a continuidade da norma (de operadores).

(v) Dado $x \in \mathcal{H}$, segue que a função constante $g(t) = c$ está em $L^2(\Omega, E_x)$, pois a medida E_x é finita. Assim, do Teorema da Convergência Dominada 20, segue que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} ||\mathbb{I}(f_n)x - \mathbb{I}(f)x||^2 &= \lim_{n\to\infty} ||\mathbb{I}(f_n - f)x||^2 = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f|^2 dE_x \\ &= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} |f_n - f|^2 dE_x = 0\end{aligned}$$

donde $\mathbb{I}(f_n x) \to \mathbb{I}(f)x$. $\square$

Tratemos agora de estender a definição de integral espectral para um conjunto maior de funções. Seja $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\Omega, \mathcal{U}, E)$ o conjunto das funções $\mathcal{U}-$mensuráveis definidas em Ω tais que $E(\{t \in \Omega : f(t) = \infty\}) = 0$.

Definição 11. *Uma sequência $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos em $\mathcal{U}$ é dita sequência limitante de $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$ se toda função $f \in \mathcal{F}$ é limitada em M_n, $M_n \subset M_{n+1}$ e $E(\cup_n M_n) = I$.*

Observemos que $E(M_n) \subset E(M_{n+1})$, $\lim_{n\to\infty} E(M_n)x = x$ para todo $x \in \mathcal{H}$ e, noutras palavras, dado $x \in \mathcal{H}$, construimos uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \cup_n E(M_n)\mathcal{H}$ convergindo para x, donde $E(M_n)\mathcal{H}$ é denso em $\mathcal{H}$. Outra observação útil é a de que, dado um conjunto finito $\{f_1, \ldots, f_r\} \subset \mathcal{S}$, sempre existe uma sequência limitante, dada pela sequência de conjuntos da forma $M_n = \{t \in \Omega; |f_j(t)| \leq n,\ j = 1, \ldots, r\}$.

Teorema 2. *([22], Teorema 4.13, p.76)*
Suponha $f \in \mathcal{S}$ e defina

$$D(\mathbb{I}(f)) = \left\{x \in \mathcal{H} : \int_\Omega |f(t)|^2 dE_x < \infty\right\}. \tag{3.5}$$

Seja ainda $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitante para f. Temos

(i) *$x \in \mathcal{H}$ pertence a $D(\mathbb{I}(f))$ se, e somente se $(\mathbb{I}(f\chi_{M_n}x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge em $\mathcal{H}$, ou equivalentemente, $sup_{n\in\mathbb{N}}||\mathbb{I}(f\chi_{M_n})|| \leq \infty$*

(ii) *O limite de $(\mathbb{I}(f\chi_{M_n})x)$ não depende da sequência limitante (M_n). Assim, existe um operador linear $\mathbb{I}(f)$ definido em $D(\mathbb{I}(f))$ satisfazendo*

$$\mathbb{I}(f)x = \lim_n \mathbb{I}(f\chi_{M_n})x, \ \ x \in D(\mathbb{I}(f)). \tag{3.6}$$

(iii) *$\cup_{n\in\mathbb{N}} E(M_n)\mathcal{H} \subset D(\mathbb{I}(f))$ e é centro de $\mathbb{I}(f)$. Além disso, vale*

$$E(M_n)\mathbb{I}(f) \subset \mathbb{I}(f)E(M_n) = \mathbb{I}(f\chi_{M_n}),\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.7}$$

Demonstração. (i) Tome $x \in D(\mathbb{I}(f))$. Como f é limitada em cada M_n, segue que $f\chi_{M_n} \in \mathcal{B}$, donde o operador $\mathbb{I}(f\chi_{M_n})$ está bem definido. Da Proposição 7 (iii), segue que

$$\begin{aligned} ||\mathbb{I}(f\chi_{M_k})x - \mathbb{I}(f\chi_{M_n})x||^2 = ||\mathbb{I}(f\chi_{M_k} - f\chi_{M_n})x||^2 &= \int_\Omega |f\chi_{M_k} - f\chi_{M_n}|^2 dE_x \\ &= ||f\chi_{M_k} - f\chi_{M_n}||^2_{L^2(\Omega,E_x)}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Agora, como $f \in L^2(\Omega, E_x)$ e do fato de $f\chi_{M_n} \to f$ pontualmente e $|f\chi_{M_n}| \leq |f|$, segue que $(f\chi_{M_n})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Da igualdade (3.8), segue que $(\mathbb{I}(f\chi_{M_n})x)_{n\in\mathbb{N}}$ também é sequência de Cauchy em $\mathcal{H}$, donde $(\mathbb{I}(f\chi_{M_n})x)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

Observemos que, se $(\mathbb{I}(f\chi_{M_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, então $\{||(\mathbb{I}(f\chi_{M_n}))x||\}$ é limitado.

Reciprocamente, suponhamos que $\{||(\mathbb{I}(f\chi_{M_n}))x|| : n \in \mathbb{N}\}$ seja limitado, ou seja, $c = sup_n||(\mathbb{I}(f\chi_{M_n}))x|| < \infty$. Como $(|f\chi_{M_n}(t)|^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge monotonicamente para $|f(t)|^2$ E_x q.t.p. em Ω, do Teorema da Convergência Monótona 21, temos

$$\int_\Omega |f|^2 dE_x = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f\chi_{M_n}|^2 dE_x = \lim_{n\to\infty} ||\mathbb{I}(f\chi_{M_n})x||^2 \leq c^2 < \infty.$$

Obtemos então $f \in L^2(\Omega, E_x)$ e $x \in D(\mathbb{I}(f))$.

(ii) Seja $(M'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma outra sequência limitante para f. Dos itens (i) e (iii) da Proposição 7, temos

$$\begin{aligned} ||\mathbb{I}(f\chi_{M_n})x - \mathbb{I}(f\chi_{M'_k})x|| &= ||f\chi_{M_n} - f\chi_{M'_k}||_{L^2(\Omega,E_x)} \\ &\leq ||f\chi_{M_n} - f||_{L^2(\Omega,E_x)} + ||f - f\chi_{M'_k}||_{L^2(\Omega,E_x)} \to 0 \end{aligned}$$

quando $n, k \to \infty$. Portanto, o limite independe da sequência limitante.

(iii) Seja $x \in \mathcal{H}$. Como $E(M_k) = \mathbb{I}(\chi_{M_k})$, segue que

$$\mathbb{I}(f\chi_{M_k})x = \mathbb{I}(f\chi_{M_n}\chi_{M_k})x = \mathbb{I}(f\chi_{M_n})E(M_k)x = E(M_k)\mathbb{I}(f\chi_{M_n})x \tag{3.9}$$

para $n \geq k$. Como $sup_n\{||\mathbb{I}(f\chi_{M_n}E)E(M_k)x||\} < \infty$, segue que $E(M_k)x \in D(\mathbb{I}(f))$, donde $\cup_k E(M_k)\mathcal{H} \subset D(\mathbb{I}(f))$.

Da equação (3.9), para $n \geq k$ e $x \in \mathcal{H}$ arbitrário, escrevemos $\mathbb{I}(f\chi_{M_k})x = \mathbb{I}(f\chi_{M_n})xE(M_k)$, donde, fazendo $n \to \infty$, segue que $\mathbb{I}(f)E(M_k)x = \mathbb{I}(f\chi_{M_k})x$. Ainda de (3.9), quando restringimos a $x \in D(\mathbb{I}(f))$, fazendo $n \to \infty$ em $\mathbb{I}(f\chi_{M_n})E(M_k)x = E(M_k)\mathbb{I}(f\chi_{M_n})x$ e obter $E(M_k)\mathbb{I}(f)x = \mathbb{I}(f)E(M_k)x$. Isto prova que $E(M_k)\mathbb{I}(f) \subset \mathbb{I}(f)E(M_k) = \mathbb{I}(f\chi_{M_k})$, para $k \in \mathbb{N}$.

Por fim, como $E(M_n)x \to x$ e $\mathbb{I}(f)E(M_n)x = E(M_n)\mathbb{I}(f)x \to \mathbb{I}(f)x$, para $x \in D(\mathbb{I}(f))$, segue que $\cup_{n=1}E(M_n)\mathcal{H}$ é centro de $\mathbb{I}(f)$. □

Proposição 8. *([22], Proposição 4.15, p.77)*
Sejam $f, g \in \mathcal{S}$, $x \in D(\mathbb{I}(f))$ e $y \in D(\mathbb{I}(g))$. Então valem

$$\langle \mathbb{I}(f)x, \mathbb{I}(g)y\rangle = \int_\Omega fg dE_{x,y}, \tag{3.10}$$

e

$$||\mathbb{I}(f)x||^2 = \int_\Omega |f|^2 dE_x. \tag{3.11}$$

Demonstração. Observemos que a equação (3.11) decorre da equação (3.10) quando $f = g$ e $x = y$. Provemos então a primeira equação. Da Proposição 7 para $fg\chi_{M_n}$, temos

$$\int_\Omega f\overline{g}\chi_{M_n} dE_{x,y} = \langle \mathbb{I}(f\overline{g}\chi_{M_n})x, y\rangle = \langle \mathbb{I}(f\chi_{M_n})x, \mathbb{I}(g\chi_{M_n})y\rangle.$$

Como $x \in D(\mathbb{I}(f))$ e $y \in D(\mathbb{I}(g))$, segue que $f \in L^2(\Omega, E_x)$ e $g \in L^2(\Omega, E_y)$. Do Lema 14, a integral $\int_\Omega f\overline{g} dE_{x,y}$ existe, donde

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega f\overline{g}\chi_{M_n} dE_{x,y} - \int_\Omega f\overline{g} dE_{x,y}\right| &= \left|\int_\Omega (f\chi_{M_n} - f)\overline{g} dE_{x,y}\right| \\ &\leq ||f\chi_{M_n} - f||_{L^2(\Omega,E_x)}||g||_{L^2(\Omega,E_y)} \to 0 \end{aligned}$$

quando $n \to \infty$. □

Enunciemos agora algumas propriedades "operacionais"das integrais espectrais de funções em $\mathcal{S}(\Sigma, \mathcal{U}, E)$.

Proposição 9. *([22], Teorema 4.16, p.78)*
Para $f, g \in \mathcal{S}(\Omega, \mathcal{U}, E)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, temos

(i) $\mathbb{I}(\overline{f}) = \mathbb{I}(f)^*$;

(ii) $\mathbb{I}(\alpha f + \beta g) = \overline{\alpha\mathbb{I}(f) + \beta\mathbb{I}(g)}$;

(iii) $\mathbb{I}(fg) = \overline{\mathbb{I}(f)\mathbb{I}(g)}$;

(iv) $\mathbb{I}(f)$ *é um operador normal e fechado em* $\mathcal{H}$ *e* $\mathbb{I}(f)^*\mathbb{I}(f) = \mathbb{I}(\overline{f}f) = \mathbb{I}(f)\mathbb{I}(f)^*$;

(v) $D(\mathbb{I}(f)\mathbb{I}(g)) = D(\mathbb{I}(g)) \cap D(\mathbb{I}(fg))$.

Demonstração. Para a demonstração, consideraremos uma sequência limitante $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para funções f, g, e abreviaremos $E_n = E(M_n)$, $h_n = h\chi_{M_n}$, $D_0 = \cup_n E_n\mathcal{H}$ e recordemos ainda que $E_n x \to x$, para todo $x \in \mathcal{H}$. Observemos ainda que a sequência limitante tomada também é limitante para $f + g, fg, \overline{f}$.

(i) Sejam $x \in D(\mathbb{I}(f))$ e $y \in D(\mathbb{I}(\overline{f}))$. Usando a equação (3.7) duas vezes, e também o item (i) da Proposição 7 para $f_n = f\chi_{M_n} \in \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{U})$, obtemos

$$\langle E_n\mathbb{I}(f)x, y\rangle = \langle \mathbb{I}(f_n)x, y\rangle = \langle x, \mathbb{I}(\overline{f_n})y\rangle = \langle x, E_n\mathbb{I}(\overline{f})y\rangle,$$

donde, tomando o limite $n \to \infty$, obtemos $\langle \mathbb{I}(f)x, y\rangle = \langle x, \mathbb{I}(f)y\rangle$, ou seja, $\mathbb{I}(\overline{f}) \subset \mathbb{I}(f)^*$. Resta mostrar que o domínio de $D(\mathbb{I}(f)^*) \subset D(\mathbb{I}(\overline{f}))$. Assim, tomando $y \in D(\mathbb{I}(f)^*)$, e novamente da equação (3.7) e também do item (i) da Proposição 7, obtemos

$$\langle x, E_n\mathbb{I}(f)^*y\rangle = \langle \mathbb{I}(f)E_n x, y\rangle = \langle \mathbb{I}(f_n)x, y\rangle = \langle x, \mathbb{I}(\overline{f_n})y\rangle, \ \ \forall x \in \mathcal{H},$$

ou seja, $E_n\mathbb{I}(f)^*y = \mathbb{I}(\overline{f_n})y$, donde $sup_n||\mathbb{I}(\overline{f_n})y|| \leq ||\mathbb{I}(f)^*y||$. Logo, do Teorema 2, obtemos $y \in D(\mathbb{I}(\overline{f}))$, como desejávamos.

Segue imediatamente de (i) que $\mathbb{I}(f) = \mathbb{I}(\overline{\overline{f}}) = \mathbb{I}(\overline{f})^*$, e como o operador adjunto é fechado, segue que $\mathbb{I}(f)$ sempre é fechado.

(ii) Vamos provar o caso $\mathbb{I}(f+g) = \overline{(\mathbb{I}(f) + \mathbb{I}(g))}$. Inicialmente, precisamos mostrar que faz sentido escrever $\overline{(\mathbb{I}(f) + \mathbb{I}(g))}$, ou seja, que o operador $\mathbb{I}(f) + \mathbb{I}(g)$ é fechável. Observemos que, usando o item (vi) da Proposição 3 isto ocorre pois

$$D_0 \subset D(\mathbb{I}(\overline{f}) + \mathbb{I}(\overline{g})) = D(\mathbb{I}(f)^* + \mathbb{I}(g)^*) \subset D((\mathbb{I}(f) + \mathbb{I}(g))^*),$$

e assim, como D_0 é denso em $\mathcal{H}$, usando o item (i) do Teorema 1, segue que $\mathbb{I}(f) + \mathbb{I}(g)$ é fechável.

Como $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência limitante de $f, g, f + g$, e, novamente usando (3.7) e também o item (i) da Proposição 7

$$(\mathbb{I}(f) + \mathbb{I}(g))E_n = \mathbb{I}(f_n) + \mathbb{I}(g_n) = \mathbb{I}(f_n + g_n) = \mathbb{I}(f+g)E_n \tag{3.12}$$

e também

$$E_n(\mathbb{I}(f)+\mathbb{I}(g)) = E_n\mathbb{I}(f)+E_n\mathbb{I}(g) \subset (\mathbb{I}(f)+\mathbb{I}(g))E_n = \mathbb{I}(f+g)E_n. \tag{3.13}$$

Usando o fato de D_0 ser centro de $\mathbb{I}(f+g)$, dado $x \in D(\mathbb{I}(f+g))$, existe sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D_0$ tal que $x_n \to x$ e $\mathbb{I}(f+g)x_n \to \mathbb{I}(f+g)x$. Assim, tomando $n \to \infty$ em (3.12), segue, de $\mathbb{I}(f+g)$ ser fechado, que $\mathbb{I}(f+g) \subset \overline{\mathbb{I}(f)+\mathbb{I}(g)}$.

Em contrapartida, como $\mathbb{I}(f+g)E_n$ é um operador limitado, então também é fechado, donde, de (3.13), segue que $E_n\overline{\mathbb{I}(f)+\mathbb{I}(g)} \subset \mathbb{I}(f+g)E_n$. Além disso, tomando $x \in D(\overline{\mathbb{I}(f)+\mathbb{I}(g)})$, como $E_nz \to z$ para todo $z \in \mathcal{H}$, o limite $n \to \infty$ de (3.13), implica em $\overline{\mathbb{I}(f)+\mathbb{I}(g)} \subset \mathbb{I}(f+g)$. Combinando o argumento do parágrafo anterior, segue que $\mathbb{I}(f+g) = \overline{\mathbb{I}(f)+\mathbb{I}(g)}$, como desejávamos.

(iii) Como $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência limitante de $\overline{f}$, segue que D_0 é centro de $\mathbb{I}(\overline{f})$, donde D_0 está contido no domínio de $\mathbb{I}(\overline{g})\mathbb{I}(\overline{f})$. Assim, do item (i), como

$$\mathbb{I}(\overline{g})\mathbb{I}(\overline{f}) = \mathbb{I}(g)^*\mathbb{I}(f)^* \subset (\mathbb{I}(f)\mathbb{I}(g))^*,$$

ou seja, $D_0 \subset D((\mathbb{I}(f)\mathbb{I}(g))^*)$, o que implica que $D((\mathbb{I}(f)\mathbb{I}(g))^*)$ é denso em $\mathcal{H}$ e do item (i) do Teorema 1, podemos dizer que $\mathbb{I}(f)\mathbb{I}(g)$ é fechável. Observemos que

$$\mathbb{I}(fg)E_n = \mathbb{I}((fg)_n) = \mathbb{I}(f_n)\mathbb{I}(g_n) = \mathbb{I}(f)E_n\mathbb{I}(g_n) = \mathbb{I}(f)\mathbb{I}(g_n)E_n = \mathbb{I}(f)\mathbb{I}(g)E_n,$$

donde, tomando o limite $n \to \infty$, e usando o fato de D_0 ser centro de $\mathbb{I}(fg)$, segue que $\mathbb{I}(fg) \subset \overline{\mathbb{I}(f)\mathbb{I}(g)}$. Além disso, podemos escrever também que

$$E_n\mathbb{I}(f)\mathbb{I}(g) \subset \mathbb{I}(f)\mathbb{I}(g)E_n = \mathbb{I}(fg)E_n,$$

donde, como $\mathbb{I}(fg)E_n$ é limitado, obtemos $E_n\overline{\mathbb{I}(f)\mathbb{I}(g)} \subset \mathbb{I}(fg)E_n$, e tomando o limite $n \to \infty$, decorre por fim que $\overline{\mathbb{I}(f)\mathbb{I}(g)} \subset \mathbb{I}(fg)$, que implica, por fim, que $\mathbb{I}(fg) = \overline{\mathbb{I}(f)\mathbb{I}(g)}$

(iv) Dos itens (i) e (iii), temos $\mathbb{I}(f)^*\mathbb{I}(f) = \mathbb{I}(\overline{f})\mathbb{I}(f) \subset \mathbb{I}(\overline{f}f)$. Como $\mathbb{I}(f)$ é fechado, segue do item (ii) da Proposição 5, que $\mathbb{I}(f)^*\mathbb{I}(f)$ é autoadjunto. De (i), $\mathbb{I}(\overline{f}f)$ é autoadjunto. Logo, segue imediatamente que $\mathbb{I}(f)^*\mathbb{I}(f) = \mathbb{I}(\overline{f}f)$. De forma completamente análoga, é possível obter que $\mathbb{I}(f)\mathbb{I}(f)^* = \mathbb{I}(\overline{f}f)$. Portanto, obtemos $\mathbb{I}(f)\mathbb{I}(f)^* = \mathbb{I}(\overline{f}f) = \mathbb{I}(f)^*\mathbb{I}(f)$, o que encerra a prova deste item.

(v) Do item (iii), temos $\mathbb{I}(f)\mathbb{I}(g) \subset \mathbb{I}(fg)$, donde decorre $D(\mathbb{I}(f)\mathbb{I}(g)) \subset D(\mathbb{I}(fg) \cap D(\mathbb{I}(g))$. Reciprocamente, seja $x \in D(\mathbb{I}(fg) \cap D(\mathbb{I}(g))$, donde, como $\mathbb{I}(fg)E_nx = \mathbb{I}(f)\mathbb{I}(g)E_nx$, quando tomamos o limite $n \to \infty$, obtemos $\mathbb{I}(fg)E_nx \to \mathbb{I}(fg)x$, e como o operador $\mathbb{I}(f)$ é fechado, segue que $\mathbb{I}(g)x \in D(\mathbb{I}(f))$, ou seja, $x \in D(\mathbb{I}(f)\mathbb{I}(g))$, que conclui a prova. □

Proposição 10. *([22], Proposição 4.17, p.79)*
Sejam $f, g \in S(\Omega, \mathcal{U}, E)$. Valem

(i) Se $f = g$ E-q.t.p. em Ω, então $\mathbb{I}(f) = \mathbb{I}(g)$;

(ii) *Se f é uma função real E-q.t.p. em Ω, então $\mathbb{I}(f)$ é autoadjunto.*

(iii) *Se f é não-negativa E-q.t.p. em Ω, então $\mathbb{I}(f)$ é positivo e autoadjunto.*

(iv) *Se g é não negativa, E-q.t.p. em Ω, então $\mathbb{I}(\sqrt{g})$ é um operador positivo, autoadjunto e $\mathbb{I}(\sqrt{g})^2 = \mathbb{I}(g)$.*

Demonstração. Para (i) e (iii), basta aplicar a Proposição 8 para $f - g$.

Para (ii), da Proposição 9, item (i), segue que $\mathbb{I}(f) = \mathbb{I}(\overline{f}) = \mathbb{I}(f)^*$, ou seja, $\mathbb{I}(f)$ é autoadjunto.

Para (iv), como g é não negativa, segue, do item (iii) que $\mathbb{I}(\sqrt{g})$ é autoadjunto e positivo definido. Agora, da Proposição 6, sabemos que $\mathbb{I}(\sqrt{g})^2$ também é autoadjunto. Assim, $\mathbb{I}(\sqrt{g})^2 = (\mathbb{I}(\sqrt{g})^2)^* = \overline{\mathbb{I}(\sqrt{g})^2}$, e portanto, da Proposição 9, item (iii), segue que

$$\mathbb{I}(g) = \overline{\mathbb{I}(\sqrt{g})\mathbb{I}(\sqrt{g})} = \overline{\mathbb{I}(\sqrt{g})^2} = \mathbb{I}(\sqrt{g})^2,$$

como desejávamos. □

Proposição 11. *([22], Proposição 4.19, p.80)*
O operador $\mathbb{I}(f)$ é invertível se, e somente se, $f(t) \neq 0$ $E - q.t.p.$ em Ω. Neste caso, vale ainda $\mathbb{I}(f)^{-1} = \mathbb{I}(f^{-1})$, onde f^{-1} denota a função $f^{-1} = 1/f(t)$ em $\mathcal{S}$.

Demonstração. Consideremos o conjunto $N(f) = \{t \in \Omega : f(t) = 0\}$. Então $\mathbb{I}(f)E(N(f)) = \mathbb{I}(f\chi_{N(f)}) = \mathbb{I}(0) = 0$, donde o núcleo de $\mathbb{I}(f) \neq \{0\}$, ou seja, $\mathbb{I}(f)$ não é invertível. Reciprocamente, suponhamos $E(N(f)) = 0$. Então, $f^{-1} \in \mathcal{S}$, donde, do fato de $f^{-1}f = 1$ $E = q.t.p.$ em Ω, temos $D(\mathbb{I}(f^{-1}f)) = D(\mathbb{I}(1)) = \mathcal{H}$, e portanto, $D(\mathbb{I}(f^{-1})\mathbb{I}(f)) = D(\mathbb{I}(f))$. Além disso, $\mathbb{I}(f^{-1})\mathbb{I}(f) \subset \mathbb{I}(f^{-1}f) = I$. Concluímos então que $\mathbb{I}(f)$ é invertível e $\mathbb{I}(f)^{-1} \subset \mathbb{I}(f^{-1})$.

Refazendo os mesmos argumentos trocando f por f^{-1} no parágrafo anterior, obtemos $\mathbb{I}(f^{-1})^{-1} \subset \mathbb{I}(f)$, que implica que $(\mathbb{I}(f^{-1})^{-1})^{-1} = \mathbb{I}(f^{-1}) \subset \mathbb{I}(f)^{-1}$. Portanto, $\mathbb{I}(f)^{-1} = \mathbb{I}(f^{-1})$. □

Podemos ainda obter um resultado interessante que caracteriza os espaços gerados por autovetores do operador $\mathbb{I}(f)$ através de medidas espectrais atuando em conjuntos correlacionados ao comportamento de f.

Proposição 12. *([22], Proposição 4.18, p.80)*
O operador $\mathbb{I}(f)$ é limitado se, e somente se $f \in L^\infty(\Omega, E)$. Além disso, vale que $||\mathbb{I}(f)|| = ||f||_{L^\infty(\Omega,E)}$.

Demonstração. Se $f \in L^\infty(\Omega, E)$, então da equação (3.11), para $x \in \mathcal{H}$ arbitrário, podemos escrever

$$||\mathbb{I}(f)x||^2 = \int_\Omega |f|^2 dE_x \leq ||f||^2_{L^\infty(\Omega,E)}||x||^2,$$

de onde obtemos que $\mathbb{I}$ é limitado e tem norma menor que $||f||_{L^\infty(\Omega,E)}$.

Reciprocamente, sejam $\mathbb{I}(f)$ limitado e $M_n = \{t \in \Omega : |f(t)| \geq ||I(f)|| + 2^{-n}\}$, para $n \in \mathbb{N}$ e $M = \cup_n M_n$, donde segue que $M = \{t \in \Omega : |f(t)| > ||\mathbb{I}(f)||\}$. Observemos então que, da limitação de $\mathbb{I}(f)$, segue que $||I(f)E(M_n)x|| \leq ||I(f)||||E(M_n)x||$ e podemos escrever

$$\begin{aligned}||I(f)||^2||E(M_n)x||^2 &\geq ||\mathbb{I}(f)E(M_n)||^2 = ||\mathbb{I}(f\chi_{M_n})x||^2\\ &= \int_\Omega |f\chi_{M_n}|^2 dE_x = \int_{M_n} |f|^2 dE_x\\ &\geq (||\mathbb{I}(f)|| + 2^{-n})^2||E(M_n)x||^2.\end{aligned}$$

Porém, isto só é possivel se $E(M_n)x = 0$, e da arbitrariedade de x, segue que $E(M_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Concluímos então que $E(M) = 0$, ou seja, $|f(t)| \leq ||\mathbb{I}(f)||$, $E-$q.t.p., donde $||f||_{L^\infty(\Omega,E)} \leq ||\mathbb{I}(f)||$, e o resultado está provado.

□

Proposição 13. *([22], Proposição 4.20, p.80)*
Seja $f \in S(\Omega,\mathcal{U},E)$. $\lambda \in \mathbb{C}$ é autovalor de $\mathbb{I}(f)$ se, e somente se, $E(\{t \in \Omega : f(t) = \lambda\}) \neq 0$. Além disso, $E(\{t \in \Omega : f(t) = \lambda\})$ é a projeção no espaço gerado pelos autovetores associados aos autovalores λ. Vale também que

$$\sigma(\mathbb{I}(f)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : E(\{t \in \Sigma : |f(t) - \lambda| < \epsilon\}) \neq 0, \forall \epsilon > 0\}. \tag{3.14}$$

Demonstração. Por simplicidade, trocando f por $f - \lambda$, podemos assumir $\lambda = 0$. Dado $x \in \mathcal{H}$, seja $\mathcal{N}(f) = \{t \in \Omega : f(t) = 0\}$. Da Proposição 8, sabemos que $\mathbb{I}(f) = 0$ se, e somente se, f é nula q.t.p. em Ω (na medida E_x), que é equivalente a $\langle E(\Omega\backslash\mathcal{N}(f))x, x\rangle = 0$, que também é equivalente à $E(\Omega\backslash\mathcal{N}(f))x = x - E(\mathcal{N}(f))x = 0$. Portanto, $x \in \mathcal{N}(\mathbb{I}(f))$ se, e somente se $x = E(\mathcal{N}(f))x$. Portanto, $E(\mathcal{N}(f))$ é a projeção em $\mathcal{N}(\mathbb{I}(f))$. Em particular, $\mathcal{N}(\mathbb{I}(f)) \neq \{0\}$ se, e somente se, $E(\mathcal{N}(f)) \neq 0$.

Agora, para provar (3.14), observemos que, por definição, $0 \in \rho(\mathbb{I}(f))$ se, e somente se, $\mathbb{I}(f)$ possui inversa limitada definida sobre $\mathcal{H}$. Porém, das Proposições 11 e 12, $0 \in \rho(\mathbb{I}(f))$ se, e somente se, $f \neq 0$ $E-$q.t.p. e $f^{-1} \in L^\infty(\Omega, E)$, ou, equivalentemente, existe $c > 0$ tal que $E(\{t \in \Omega : |f(t)| < \epsilon\}) = 0$. Portanto, $0 \in \sigma(\mathbb{I}(f))$ se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, $E(\{t \in \Omega : |f(t)| < \epsilon\}) \neq 0$. □

Proposição 14. *([22], Proposição 4.23, p.82)*
Um operador limitado $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, comuta com uma medida espectral E (isto é, $TE(M) = E(M)T$, para todo $M \in \mathcal{U}$) se, e somente se, $T\mathbb{I}(f) \subset \mathbb{I}(f)T$ para todo $f \in S(\Omega,\mathcal{U},E)$.

Demonstração. Seja T um operador limitado que satisfaz $T\mathbb{I}(f) \subset \mathbb{I}(f)T$ para toda $f \in S(\Omega,\mathcal{U},E)$. Em particular, para $M \in \mathcal{U}$, sabemos que $\mathbb{I}(\chi_M) = E(M)$, donde $TE(M) \subset E(M)T$, com $E(M)$ também é limitado. Concluindo, como $TE(M)$ e $E(M)T$

são operadores limitados, vale a igualdade, ou seja, T comuta com todas as projeções $E(M)$.

Reciprocamente, seja T um operador limitado que comuta com E (ou seja, T comuta com E, para todo $M \in \mathcal{U}$). Dado $x \in \mathcal{H}$, segue que

$$\begin{aligned} E_{Tx}(M) &= ||E(M)Tx||^2 = ||TE(M)x||^2 \\ &\leq ||T||E_x(M). \end{aligned}$$

Portanto, de acordo com (3.5), $Tx \in D(\mathbb{I}(f))$ se $x \in D(\mathbb{I}(f))$. Como T comuta com E, então T comuta com $\mathbb{I}(g)$, para todo função simples g. Ainda, para uma função $h \in B$, tomemos uma sequência de funções simples que convergem para h, donde obtemos também a convergência de T com $\mathbb{I}(h)$. Em particular, T comuta com todos os operadores $\mathbb{I}(f)(\chi_M)$. Finalmente, como $T(D(\mathbb{I}(f))) \subset D(\mathbb{I}(f))$, segue do Teorema 2 que $T\mathbb{I}(f) \subset \mathbb{I}(f)T$. □

Para concluir esta seção, observemos que, dados $(\Omega, \mathcal{U}, E)$ e uma aplicação $\varphi : \Omega \to \Omega_0$, podemos construir uma $\sigma-$álgebra $\mathcal{U}\prime = \{M \subset \Omega_0 : \varphi^{-1}(M) \in \mathcal{U}\}$ e uma medida $F(M) = E(\varphi^{-1}(M))$.

Proposição 15. *([22], Proposição 4.24, p.83)*
Se $h \in \mathcal{S}(\Omega_0, \mathcal{U}\prime, \mathcal{F})$, então $h \circ \varphi \in \mathcal{S}(\Omega, \mathcal{U}, E)$ e

$$\int_{\Omega_0} hdF = \int_{\Omega} h \circ \varphi dE. \tag{3.15}$$

Demonstração. A primeira afirmação é imediata. Da fórmula de mudança de variáveis para medidas escalares, segue que

$$\int_{\Omega_0} |h|^2 dF_x = \int_{\Omega} |h \circ \varphi|^2 dE_x \tag{3.16}$$

$$\int_{\Omega_0} hdF_x = \int_{\Omega} (h \circ \varphi) dE_x. \tag{3.17}$$

Observemos que a primeira equação nos mostra que $D(\mathbb{I}_F(h)) = D(\mathbb{I}_E(h \circ \varphi))$, onde $\mathbb{I}_F$ e $\mathbb{I}_E$ denotam as integrais espectrais com respeito às medidas F e E, respectivamente. Da Proposição 8, segue que $\langle \mathbb{I}_F(h)y, y\rangle = \langle \mathbb{I}_E(h \circ \varphi)y, y\rangle$, para todo $y \in D(\mathbb{I}_F(h)) = D(\mathbb{I}_E(h \circ \varphi))$. Portanto, segue do Lema 2 que $\mathbb{I}_F(h) = \mathbb{I}_E(h \circ \varphi)$. □

3.2 O TEOREMA ESPECTRAL

A partir deste ponto, vamos construir a demonstração do Teorema Espectral para operadores autoadjuntos. Inicialmente, provaremos uma versão para operadores limitados. Sendo assim, vamos considerar um operador limitado e autoadjunto A, donde, do Lema 6, temos $\sigma(A) \subset J$, onde J é um intervalo compacto da reta. Para uma função $f \in C(J)$, vamos considerar $||f||_J = sup\{|f(t)|; t \in J\}$.

Lema 16. *([22], Lema 5.2, p.86)*
$\sigma(p(A)) \subset p(\sigma(A))$ para $p \in \mathbb{C}[t]$.

Demonstração. Sejam $\gamma \in \sigma(p(A))$ e $n = deg(p) > 0$. Do Teorema Fundamental da Álgebra, existem números complexos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que $p(t) - \gamma = a_n(t - \alpha_1) \ldots (t - \alpha_n)$. Então

$$p(A) - \gamma I = a_n(A - \alpha_1 I) \ldots (A - \alpha_n I).$$

Suponhamos por absurdo que todos os $\alpha_i \in \rho(A)$. Então cada termo do lado direito da equação anterior teria uma inversa limitada, donde $p(A) - \gamma I$ também teria inversa limitada, e seguiria que $\gamma \in \sigma(p(A))$, o que é um absurdo. Concluímos que existe α_j que não pertence a $\rho(p(A))$. Assim, ocorre que $p(\alpha_j) = \gamma$, donde $\gamma \in p(\sigma(A))$. □

Lema 17. *([22], Lema 5.3, p.86)*
Para $p \in \mathbb{C}[t]$, temos $||p(A)|| \leq ||p||_J$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} ||p(A)||^2 = ||p(A)^* p(A)|| = ||(\overline{p}p(A))|| &= sup\{|\gamma|; \gamma \in \sigma((\overline{p}p)(A))\} \\ &\leq sup\{pp(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\} \leq ||pp||_J = ||p||_J^2. \end{aligned}$$

□

Lema 18. *([22], Lema 5.4, p.86)*
Dado um funcional linear contínuo F definido em $(\mathbb{C}[t], ||.||_J)$, existe uma única medida complexa de Borel e regular μ sobre J tal que

$$F(p) = \int_J p d\mu, \quad p \in \mathbb{C}[t].$$

Além disso, vale ainda que $|\mu(M)| \leq ||F||$ para todo $M \in \mathcal{B}(J)$.

Demonstração. Da densidade dos polinômios em $(C(I), || \cdot ||_J)$, cada funcional linear contínuo em $(\mathbb{C}[t], || \cdot ||_J)$ tem uma extensão contínua para $C(J)$. A existência e unicidade da medida μ segue do Teorema 24. □

Teorema 3. *([22], Teorema 5.1, p.85)[Teorema Espectral para Operadores Limitados e Autoadjuntos] Seja A um operador autoadjunto limitado em $\mathcal{H}$ e J um intervalo compacto que contém $\sigma(A)$. Existe uma única medida espectral E sobre a álgebra de Borel $\mathcal{B}(J)$ tal que*

$$A = \int_J \lambda dE. \tag{3.18}$$

Demonstração. Dados $x, y \in \mathcal{H}$, definimos o funcional linear $F_{x,y} : \mathbb{C}[t] \to \mathbb{C}$, tal que $p \mapsto F_{x,y}(p) = \langle p(A)x, y \rangle$. Como

$$|F_{x,y}(p)| \leq ||p(A)||||x||||y|| \leq ||p||_J||x||||y||,$$

segue $F_{x,y}$ é contínua em $(\mathbb{C}[t], ||.||_J)$ e $||F_{x,y}|| \leq ||x||||y||$. Do Lema 18, existe uma única medida complexa, regular de Borel $\mu_{x,y}$ sobre $\mathcal{B}(J)$ tal que

$$F_{x,y}(p) = \langle p(A)x, y\rangle = \int_J pd\mu_{x,y}, \quad p \in \mathbb{C}[t]. \tag{3.19}$$

Nosso objetivo é mostrar a existência de uma medida espectral E na σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(I)$ tal que $\mu_{x,y}(M) = \langle E(M)x, y\rangle$, para $x, y \in \mathcal{H}$ e $M \in \mathcal{B}(J)$.

Sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ e $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$. Então podemos escrever

$$\int pd\mu_{\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2,y} = \alpha_1 \int pd\mu_{x_1,y} + \alpha_2 \int pd\mu_{x_2,y} = \int pd(\alpha_1\mu_{x_1,y} + \alpha_2\mu_{x_2,y}),\ p \in \mathbb{C}[t].$$

Da unicidade da medida associada ao funcional $F_{\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2,y}$, segue que

$$\mu_{\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2,y}(M) = \alpha_1\mu_{x_1,y}(M) + \alpha_2\mu_{x_2,y}(M)$$

para $M \in \mathcal{B}(I)$. De forma análoga, dados $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ obtemos

$$\mu_{x,\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2}(M) = \overline{\alpha_1}\mu_{x,y_1}(M) + \overline{\alpha_2}\mu_{x,y_2}(M).$$

Agora, da limitação proveniente do Lema 18, temos $|\mu_{x,y}(M)| \leq ||F_{x,y}|| \leq ||x||||y||$. Assim, dado $M \in \mathcal{B}(J)$, a aplicação $(x, y) \mapsto \mu_{x,y}(M)$ é uma forma sesquilinear conínua em $\mathcal{H}$. Portanto, existe um operador linear limitado $E(M)$ definido em $\mathcal{H}$ tal que

$$\mu_{x,y}(M) = \langle E(M)x, y\rangle. \tag{3.20}$$

Pondo $p = 1$ na equação (3.19), obtemos $\langle x, y\rangle = \mu_{x,y}(J) = \langle E(J)x, y\rangle$, para todo $x, y \in \mathcal{H}$, ou seja, $E(J) = I$.

Do Lema 12, segue que precisamos mostrar apenas que $E(M)$ é projeção. Para isso, dados $x, y \in \mathcal{H}$ e $p \in \mathbb{C}[t]$, temos

$$\int pd\mu_{x,y} = \langle p(A)x, y\rangle = \overline{\langle \overline{p}(A)y, x\rangle} = \int \overline{p}d\mu_{y,x} = \int pd\overline{\mu}_{x,y},$$

donde concluímos que $\mu_{x,y}(M) = \overline{\mu_{y,x}(M)}$, para $M \in \mathcal{B}(J)$, e disto segue que $E(M) = E(M)^*$. Para provar que $E(M)^2 = E(M)$, observemos inicialmente que $(pq)(A) = p(A)q(A)$, para $p, q \in \mathbb{C}[t]$, donde

$$\int pd\mu_{q(A)x,y} = \langle p(A)q(A)x, y\rangle = \langle (pq)(A)x, y\rangle = \int pqd\mu_{x,y}$$

e da unicidade dada pelo Lema 18, segue que $d\mu_{q(A)x,y} = d\mu_{x,y}$, donde $\langle E(M)q(A)x, y\rangle = \int_M d\mu_{x,y}$, para $M \in \mathcal{B}(J)$. Como $E(M)^* = E(M)$, segue que

$$\int qd\mu_{x,E(M)y} = \langle q(A)x, E(M)y\rangle = \langle E(M)q(A)x, y\rangle = \int q\chi_M d\mu_{x,y}$$

e novamente da unicidade dada pelo Lema 18, temos $d\mu_{x,E(M)y} = \chi_M d\mu_{x,y}$, ou seja, $\mu_{x,E(M)y}(N) = \int_N \chi_M d\mu_{x,y} = \mu_{x,y}(M \cap N)$, para $N \in \mathcal{B}(J)$, e portanto $\langle E(N)x, E(M)y\rangle = \langle E(M \cap N)x, y\rangle$. Assim, segue que $E(M \cap N) = E(M)E(N)$. Pondo $N = M$, segue que $E(M)^2 = E(M)$, como desejávamos.

Por fim, dados $x, y \in \mathcal{H}$ e $p \in \mathbb{C}[t]$, temos

$$\langle p(A)x, y\rangle = \int_J p dE_{x,y}, \tag{3.21}$$

e em particular, para $p(\lambda) = \lambda$, segue que $\langle Ax, y\rangle = \int_J \lambda dE_{x,y}$, donde decorre a equação (3.18).

□

Corolário 1. *([22], Corolário 5.5, p89)*
Seja A um operador positivo autoadjunto e limitado em $\mathcal{H}$. Então existe um operador positivo e autoadjunto B definido em $\mathcal{H}$, denotado por $A^{1/2}$, tal que $B^2 = A$. Além disso, se $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de polinômios tal que $p_n \to \lambda^{1/2}$ uniformemente em $[0, b]$, com $\sigma(A) \subset [0, b]$, então $\lim_n ||p_n(A) - A^{1/2}|| = 0$.

Demonstração. Como A é positivo e limitado, segue que $\sigma(A) \subset [0, b]$, para algum $b \in \mathbb{R}$. Do Teorema 3, existe uma medida espectral E tal que $A = \int_{[0,b]} \lambda dE$. Pondo $B = \int_{[0,b]} \lambda^{1/2} dE$, segue que B detêm as propriedades citadas no enunciado. Além disso, da Proposição 7, item (iv), segue imediatamente que $||p_n(A) - B|| \leq ||p_n - \lambda^{1/2}||_{[0,b]} \to 0$ quando $n \to \infty$. □

Buscaremos agora estender o resultado do Teorema Espectral para operadores autoadjuntos ilimitados. Consideremos T um operador densamente definido em $\mathcal{H}$ e fechado. Da Proposição 5, o operador $C_T = (I + T^*T)^{-1}$ é positivo e limitado, donde do Corolário 1, existe um operador $C_T^{1/2}$. O operador $Z_T = TC_T^{1/2}$ é chamado de transformação limitada de T.

Lema 19. *([22], Lema 5.8, p.90)*
Se T é um operador fechado e densamente definito em $\mathcal{H}$, então

(i) Z_T é um operador limitado, definido em $\mathcal{H}$, que satisfaz

$$||Z_T|| \leq 1 \quad e \quad C_T = (I + T^*T)^{-1} = I - Z_T^* Z_T. \tag{3.22}$$

(ii) $(Z_T)^* = Z_{T^*}$. Em particular, Z_T é autoadjunto se T é autoadjunto.

(iii) Se T é normal, então Z_T também é.

Demonstração. Vamos abreviar $C = C_T$, $Z = Z_T$, $C_* = C_{T^*}$ e $Z_* = Z_{T^*}$.

(i) Temos $C\mathcal{H} = D(I + T^*T) = D(T^*T)$. Dado $x \in \mathcal{H}$, temos

$$\begin{aligned} ||TC^{1/2}C^{1/2}x||^2 = ||TCx||^2 = \langle TCx, TCx\rangle = \langle T^*TCx, Cx\rangle \leq \langle T^*TCx, Cx\rangle + \langle Cx, Cx\rangle \\ = \langle (I + T^*T)Cx, Cx\rangle = \langle x, Cx\rangle = ||C^{1/2}x||^2, \end{aligned}$$

ou seja, $||Zy|| = ||TC^{1/2}y|| \leq ||y||$, para $y \in C^{1/2}\mathcal{H}$. Agora, como $\mathcal{N}(C^{1/2}) \subset \mathcal{N}(C) = \{0\}$ (pois C é invertível), segue do fato de $C^{1/2}$ ser autoadjunto que $R(C^{1/2})^\perp = \mathcal{N}(C^{1/2}) = \{0\}$, ou seja, $C^{1/2}\mathcal{H}$ é denso em $\mathcal{H}$. Além disso, como Z é operador fechado (pois $C^{1/2}$ é limitado e T é fechado), segue que $C^{1/2}\mathcal{H} \subset D(T)$, e $D(Z) = \mathcal{H}$, com $||Z|| \leq 1$.

Como $C\mathcal{H} = D(T^*T)$ e $C^{1/2}T^* \subset Z^*$, obtemos

$$(I - C)C^{1/2} = C^{1/2}(I + T^*T)C - C^{1/2}C = C^{1/2}T^*TC^{1/2}C^{1/2} \subset Z^*ZC^{1/2},$$

donde $Z^*ZC^{1/2} = (I - C)C^{1/2}$. Como $C^{1/2}\mathcal{H}$ é denso, temos $I - Z^*Z = C$.

(ii) Recordemos que $C = (I + T^*T)^{-1}$ e $C_* = (I + TT^*)^{-1}$. Seja $x \in D(T^*)$. Pondo $y = C_*x$, obtemos $x = (I + T^*T)y$ e $T^*x = T^*(I + TT^*)y = (I + T^*T)T^*y$, donde $C_*x \in D(T^*)$ e $CT^*x = T^*y = T^*C_*$. Usando indução, é possível mostrar que $p(C_*)x \in D(T^*)$ e $p(C)T^*x = T^*p(C_*)x$, para todo polinômio p.

Do Teorema de Weierstrass, existe uma sequência de polinômios $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $p_n \to t^{1/2}$ convergindo uniformemente em $[0, 1]$. Então

$$\lim_n ||p_n(C) - C^{1/2}|| = \lim_n ||p_n(C_*) - (C_*)^{1/2}|| = 0$$

Tomando o limite, obtemos então $p(C)T^*x = T^*p_n(C_*)x$, e como T^* é fechado, obtemos então $C^{1/2}T^*x = T^*(C_*)^{1/2}x$ para $x \in D(T^*)$. Como $C^{1/2}T^* \subset (TC^{1/2})^* = Z^*$, obtemos $Z^*x = C^{1/2}T^*x = T^*(C_*)^{1/2}x = Z_*x$, para $x \in D(T^*)$. Como $D(T^*)$ é denso em $\mathcal{H}$, obtemos $Z^* = Z_*$ em $\mathcal{H}$.

(iii) Suponhamos que T seja normal, ou seja, $T^*T = TT^*$. Então

$$I - Z^*Z = (I + T^*T)^{-1} = (I + TT^*) = I - (Z_*)^*Z = I - ZZ^*,$$

noutras palavras, Z é normal. $\square$

Teorema 4. *([22], Teorema 5.7, p.89)[Teorema Espectral para Operadores Ilimitados e Autoadjuntos] Seja A um operador autoadjunto definido no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então existe uma única medida espectral $E_A = E$ na σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que*

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_A. \tag{3.23}$$

Demonstração. Abreviemos $C = C_A$ e $Z = Z_A$. Do Lema 19, segue que $Z = AC^{1/2}$ é limitado, com $||Z|| \leq 1$ e autoadjunto e $I - Z^2 = C = (I + A^2)^{-1}$. Ainda, pelo Lema

6, $\sigma(Z) \subset [-1,1]$. Do Teorema Espectral para operadores limitados, existe uma única medida espectral F em $\mathcal{B}([-1,1])$ de forma que

$$Z = \int_{[-1,1]} z dF.$$

Como $F(\{1\})\mathcal{H} = \mathcal{N}(Z-I)$ e $F(\{-1\})\mathcal{H} = \mathcal{N}(Z+I)$, segue que $F(\{1\})\mathcal{H}+F(\{-1\})\mathcal{H} = \mathcal{N}((I-Z^2)) = \mathcal{N}((I+A^2)^{-1}) = \{0\}$, então $F(\{1\}) = F(\{-1\}) = 0$. Portanto, $\varphi(z) = z/(1-z^2)^{-1/2}$ é uma função finita F-q.t.p. em $[-1,1]$.

Vamos provar que $A = \mathbb{I}(\varphi)$. Como

$$\int_{(-1,1)} \frac{z}{(1-z^2)^{1/2}} dF < \infty \iff \int_{(-1,1)} \frac{1}{(1-z^2)^{1/2}} dF < \infty,$$

segue do Teorema 2 que $D(\mathbb{I}(\varphi)) = D(\mathbb{I}((1-z^2)^{-1/2})$. Temos também que $\mathbb{I}(\varphi) = \mathbb{I}(z)\mathbb{I}((1-z^2)^{-1/2})$, pelos itens (iii) e (v) do Teorema 7. Da Proposição 11, segue que $\mathbb{I}((1-z^2)^{-1/2}) = \mathbb{I}((1-z^2)^{1/2})^{-1}$. Da unicidade da raiz, obtemos ainda $C^{1/2} = (I-Z^2)^{1/2} = \mathbb{I}((1-z^2)^{1/2})$. Assim, provamos até então que $\mathbb{I}(\varphi) = Z(C^{1/2})^{-1}$.

Como $Z = AC^{1/2}$ é definido em todo $\mathcal{H}$, $C^{1/2}\mathcal{H} \subset D(A)$, e portanto, $\mathbb{I}(\varphi) = Z(C^{1/2})^{-1} \subset A$. Como $\mathbb{I}(\varphi)$ e A são autoadjuntos, $\mathbb{I}(\varphi) = A$. Aplicando a Proposição 15 usando a aplicação φ, existe uma medida $E(M) = F(\varphi^{-1}(M))$, $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, e obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda dE = \int_{[-1,1]} \varphi dF = \mathbb{I}(\varphi) = A. \tag{3.24}$$

□

Observemos então que, dado um operador linear autoadjunto $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, do Teorema (Espectral) 4, existe uma medida espectral E_A definida na σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, de forma que

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_A.$$

A partir da medida E_A, e dada uma função $f \in S(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), E_A)$, podemos construir o operador $f(A) := \mathbb{I}(f)$ (na medida E_A), como no Teorema 2, onde

$$D(f(A)) = \left\{ x \in \mathcal{H} : \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dE_x < \infty \right\}.$$

Assim, o mapeamento

$$\begin{aligned} \varphi : S(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), E_A) &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}) \\ f &\longmapsto f(A), \end{aligned} \tag{3.25}$$

onde $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ é o conjunto dos operadores lineares de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{H}$, é chamado de cálculo funcional associado a A. Da construção, segue que os operadores $f(A)$ possuem as propriedades já obtidas para os operadores da forma $\mathbb{I}(f)$. Sumarizando

Proposição 16. *([22], Teorema 5.9, p.93)*
Sejam $f, g, \in S(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *e* $x, y \in D(f(A))$. *Temos*

(i) $\langle f(A)x, y\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\langle E_A(\lambda)x, y\rangle$;

(ii) $||f(A)x||^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d\langle E_A(\lambda)x, x\rangle$. *Em particular, se* $f(t) = g(t)$, $E_A-q.t.p.$ *em* $\mathbb{R}$, *então* $f(A) = g(A)$;

(iii) *Se* $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n, E_A)$, *então* $||f||_{L^\infty} = ||f(A)||$;

(iv) $\overline{f}(A) = f(A)^*$. *Em particular, se* $f(x) \in \mathbb{R}$ $E_A-q.t.p.$ *em* $\mathbb{R}^n$, *então* $f(A)$ *é autoadjunto;*

(v) $(\alpha f + \beta g)(A) = \overline{\alpha f(A) + \beta g(A)}$;

(vi) $\chi_M(A) = E_A(M)$ *para* $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Enunciemos ainda uma propriedade adicional que será utilizada posteriormente.

Proposição 17. *Se* $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *é um operador autoadjunto, então* $\sigma(A)^2 \subset \sigma(A^2)$

Demonstração. Do Teorema Espectral, existe uma medida E associada ao operador A, de forma que

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE.$$

Assim, se $\lambda \in \sigma(A)$, segue da Proposição 13 que, para todo $\delta > 0$

$$E(\{t \in \mathbb{R} : |t - \lambda| < \delta\}) \neq 0.$$

Como $A^2 = f(A)$, para $f(t) = t^2$, decorre da Proposição 13

$$\sigma(A^2) = \{\alpha \in \mathbb{R} : E(\{t \in \mathbb{R} : |t^2 - \alpha| < \epsilon\}) \neq 0, \ \forall \epsilon > 0\}.$$

Mostremos que $\lambda^2 \in \sigma(A)$. Assim, dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta_\epsilon = (\epsilon + |\lambda|)^{1/2} + |\lambda|$, segue que, se $|t - \lambda| < \delta_\epsilon$

$$\begin{aligned}
|t^2 - \lambda^2| &= |t - \lambda||t + \lambda| \\
&\leq |t - \lambda|(|t - \lambda| + 2|\lambda|) \\
&< \delta_\epsilon^2 + 2\delta_\epsilon|\lambda| \\
&\leq \epsilon + |\lambda|^2 + |\lambda|^2 - 2|\lambda|(\epsilon + |\lambda|^2) + 2|\lambda|(\epsilon + |\lambda|^2) - 2|\lambda|^2 \\
&= \epsilon,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\{t \in \mathbb{R}; |t - \lambda| < \delta_\epsilon\} \subset \{t \in \mathbb{R}; |t^2 - \lambda^2| < \epsilon\},$$

e como $E(\{t \in \mathbb{R}; |t - \lambda| < \delta_\epsilon\}) \neq 0$, segue que $E(\{t \in \mathbb{R}; |t^2 - \lambda^2| < \epsilon\}) \neq 0$, e $\lambda^2 \in \sigma(A^2)$. $\square$

Para finalizar esta seção, mostremos agora que para o cálculo das integrais espectrais, precisamos apenas realizar a integração no espectro do operador A.

Teorema 5. *Sejam A um operador autoadjunto e sua medida espectral E_A, $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que $M \cap \sigma(A) = \emptyset$. Então $E_A(M) = 0$.*

Demonstração. Observemos inicialmente que, da Proposição 13, mais especificamente da equação (3.14)

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists c > 0 \text{ tal que } E(\{t \in \mathbb{R}, |t - \lambda| < c\}) = 0\}. \tag{3.26}$$

Assim, como $M \cap \sigma(A) = \emptyset$, segue que $M \subset \rho(A)$, donde, se $\lambda \in M$, então existe $c_\lambda > 0$ tal que $E(B(\lambda, c_\lambda)) = 0$. Como $M \subset \cup_{\lambda \in M} B(\lambda, c_\lambda)$, pelo Teorema de Lindelof, podemos extrair uma sequência enumerável $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$, tal que $M \subset \cup_{i\in\mathbb{N}} B(\lambda, c_{\lambda_i})$, e assim, $E(M) \subset E(\cup_{i\in\mathbb{N}} B(\lambda, c_{\lambda_i})) = 0$. $\square$

4 O OPERADOR DE SCHRÖDINGER FRACIONÁRIO

4.1 OS ESPAÇOS DE SOBOLEV FRACIONÁRIOS

Partindo do objetivo de encontrar soluções fracas para a equação (1.6), precisamos inicialmente compreender e caracterizar o laplaciano fracionário (bem como o laplaciano fracionário acrescido de um potencial), suas propriedades básicas, possíveis domínios, dentre outras características.

Iniciemos por definir os espaços de Sobolev Fracionários, donde posteriormente nos restringiremos a uma subclasse destes, onde pontuaremos as suas principais propriedades e resultados que serão utilizados na seção seguinte.

Definição 12. *Sejam $s \in (0,1)$, $p \in [1,+\infty)$ e Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Definimos o espaço de Sobolev Fracionário $W^{s,p}(\Omega)$ como sendo o conjunto das funções*

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{n/p+s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\}, \tag{4.1}$$

com norma definida por

$$||u||_{W^{s,p}} := \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \right)^{1/p}. \tag{4.2}$$

O segundo termo de (4.2) é usualmente chamado de semi-norma de Gagliardo de u, e denotado por $[u]_{W^{s,p}}$.

De forma análoga aos espaços de Sobolev clássicos, também há um resultado sobre densidade das funções de suporte compacto.

Teorema 6. *([11], Teorema 4.27, p.195)*
Para todo $s \in (0,1)$, o conjunto $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ na norma dada por (4.2).

Um questionamento natural é o da existência de alguma relação de inclusão entre os espaços de Sobolev fracionários, mediante a variações de seus índices $\{s,p\}$. No caso em que mantemos o índice p constante, obtemos o resultado a seguir, que caracteriza como a regularidade está associada ao índice s.

Teorema 7. *([12], Proposição 2.1, 6)*
Sejam $p \in [1,\infty)$ e $0 < s \leq s' < 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então

$$||u||_{W^{s,p}} \leq C||u||_{W^{s',p}}$$

e ainda, em particular, vale que

$$W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega).$$

Demonstração. Observemos inicialmente que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_{\Omega\cap\{|x-y|\geq 1\}} \frac{|u(x)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dydx &\leq \int_\Omega \left(\int_{|z|\geq 1} \frac{1}{|z|^{n+sp}} dz \right) |u(x)|^p dx \\ &\leq C(n,s,p)||u||^p_{L^p(\Omega)},\end{aligned}$$

onde $C(n,s,p)$ é uma constante que depende da dimensão n e dos índices p, s. Assim obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_{\Omega\cap\{|x-y|\geq 1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dydx &\leq 2^{p-1} \int_\Omega \int_{\Omega\cap\{|x-y|\geq 1\}} \frac{|u(x)|^p + |u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dydx \\ &\leq 2^p C(n,s,p)||u||^p_{L^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

Agora,

$$\int_\Omega \int_{\Omega\cap\{|x-y|\leq 1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dydx \leq \int_\Omega \int_{\Omega\cap\{|x-y|\leq 1\}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+s'p}} dydx.$$

Concatenando as estimativas

$$||u||^p_{W^{s,p}(\Omega)} \leq 2^p C(n,s,p)||u||^p_{L^p(\Omega)} + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+s'p}} dydx \leq C||u||^p_{W^{s',p}(\Omega)}.$$

□

Um caso especial entre os espaços de Sobolev fracionários é o caso $p = 2$ (que será o caso de real interesse nos desenvolvimentos futuros), onde denotamos $W^{s,2}(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)$. Este caso particular é extremamente interessante pois está intrinsecamente ligado ao operador $(-\Delta)^s$.

Todavia, esta não é a única definição possível para o espaço $H^s(\mathbb{R}^n)$. Uma outra construção, utilizando a Transformada de Fourier, consiste em definir o conjunto $\hat{H}^s(\mathbb{R}^n)$ por

$$\hat{H}^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^{2s})|Fu(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\}, \tag{4.3}$$

onde F é a Transformada de Fourier. É importante ressaltar ainda que esta definição não precisa ser restrita ao caso de $0 < s < 1$. Inclusive, poderíamos até definir $H^s(\mathbb{R}^n)$ para $s < 0$, porém precisaríamos adentrar no assunto de distribuições temperadas (assunto esse que pode ser encontrado com mais detalhes em [11], Seção 4.2, p.181). Ainda nesta seção, na Proposição 19, mostraremos que $\hat{H}^s(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)$, donde poderemos transitar livremente entre as definições apresentadas até agora.

Outro ponto interessante sobre o caso particular $p = 2$ é o de que os espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$ gozam de propriedades adicionais em relação aos espaços $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, pois podemos estabelecer uma estrutura de produto interno, e ainda, obter uma estruta de espaço de Hilbert.

Definição 13. *Dados $u \in S(\mathbb{R}^n)$ e $s \in (0,1)$, definimos o laplaciano fracionário $(-\Delta)^s$ atuando em u por*

$$(-\Delta)^s u(x) = C(n,s) PV \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy \tag{4.4}$$
$$= C(n,s) \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(x)} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy$$

onde

$$C(n,s) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-cos(x)}{|x|^{n+2s}} dx \right)^{-1}$$

é uma constante que depende de s e n, e aparece naturalmente em alguns cálculos envolvendo o laplaciano fracionário, e P.V. é uma abreviação para Valor Principal.

Antes dos próximos resultados, é interessante enunciar o seguinte resultado técnico, que será utilizado em algumas estimativas posteriores.

Lema 20. *Para $\xi \in \mathbb{R}^n$, vale a identidade*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-cos(\xi \cdot y)}{|y|^{n+2s}} dy = C(n,s)^{-1} |\xi|^{2s}.$$

Demonstração. Observemos que dado $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, temos

$$0 < \frac{1-cos(x_1)}{|x|^{n+2s}} \leq \frac{|x_1|^2}{|x|^{n+2s}} \leq \frac{1}{|x|^{n-2+2s}},$$

para $|x|$ próximo de 0. Assim, a integral de $\frac{1-cos(x_1)}{|x|^{n+2s}}$ é finita, e positiva. Agora, considerando o funcional $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tal que

$$I(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-cos(\xi \cdot y)}{|y|^{n+2s}} dy,$$

observemos que I satisfaz $I(\xi) = I(|\xi| e_1)$, onde $e_1 = (1, 0, ..., 0)$. Com efeito, dada uma rotação $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, onde para um $\xi \in \mathbb{R}^n$ fixado, vale $R(|\xi| e_1) = \xi$, e também, sendo R^T sua transposta, pondo $y' = R^T y$, obtemos

$$I(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-cos(R(|\xi|e_1) \cdot y)}{|y|^{n+2s}} dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-cos(|\xi|e_1 \cdot R^T y)}{|y|^{n+2s}} dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-cos(|\xi|e_1 y')}{|y'|^{n+2s}} dy' = I(|\xi| e_1),$$

que prova a afirmação. Assim, a mudança de variável $x = |\xi| y$ nos dá

$$I(\xi) = I(|\xi| e_1)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-cos(|\xi| y_1)}{|y|^{n+2s}} dy$$
$$= \frac{1}{|\xi|^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-cos(x_1)}{|x/|\xi||^{n+2s}} dx$$
$$= C(n,s)^{-1} |\xi|^{2s},$$

finalizando a prova do lema. □

Lema 21. *([12], Lema 3.2, p.12)*
Seja $s \in (0,1)$. Então, para $u \in S(\mathbb{R}^n)$, vale a identidade

$$(-\Delta)^s u(x) = \frac{1}{2}C(n,s)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x))}{|y|^{n+2s}}dy, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n. \tag{4.5}$$

Demonstração. Tomemos $u \in S(\mathbb{R}^n)$, e aplicando uma mudança de variável do tipo $z = y - x$, obtemos

$$\begin{aligned}(-\Delta)^s u(x) &= -C(n,s)P.V.\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(y)-u(x)}{|x-y|^{n+2s}}dy\\ &= -C(n,s)P.V.\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z)-u(x)}{|z|^{n+2s}}dz\end{aligned}$$

e agora, fazendo uma mudança de variáveis do tipo $\tilde{z} = -z$ (e depois renomeando a variável $\tilde{z}$ como z),

$$\begin{aligned}(-\Delta)^s u(x) &= -C(n,s)P.V.\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z)-u(x)}{|z|^{n+2s}}dz\\ &= -\frac{1}{2}C(n,s)\left(P.V.\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z)-u(x)}{|z|^{n+2s}}dz + P.V.\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x-\tilde{z})-u(x)}{|\tilde{z}|^{n+2s}}d\tilde{z}\right)\\ &= -\frac{1}{2}C(n,s)\left(P.V.\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z)-u(x)}{|z|^{n+2s}}dz + P.V.\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x-z)-u(x)}{|z|^{n+2s}}dz\right)\\ &= -\frac{1}{2}C(n,s)\left(P.V.\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+z)+u(x-z)-2u(x)}{|z|^{n+2s}}dz\right).\end{aligned}$$

Porém, como $u \in S(\mathbb{R}^n)$, segue que, da expansão de Taylor de segunda ordem, existe $\delta > 0$ tal que para $y \in B_\delta$, vale

$$|u(x+y)+u(x-y)-2u(x)| \leq ||D^2u||_{L^\infty}|y|^2, \tag{4.6}$$

donde segue que

$$\int_{B_\delta} \frac{|u(x+y)+u(x-y)-2u(x)|}{|y|^{n+2s}}dy \leq \int_{B_\delta} \frac{||D^2u||_{L^\infty}}{|y|^{n+2s-2}}dy < \infty$$

noutras palavras, a integral de $|u(x+y)+u(x-y)-2u(x)|/|y|^{n+2s}$ está bem definida perto da origem, e podemos nos livrar do valor principal $P.V.$, donde segue o resultado. □

Proposição 18. *([12], Proposição 3.3, p.14)*
Sejam $s \in (0,1)$ e $(-\Delta)^s : S(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ o Laplaciano Fracionário. Então, para toda função $u \in S(\mathbb{R}^n)$, vale

$$(-\Delta)^s u = F^{-1}(|\xi|^{2s}F(u)) \tag{4.7}$$

Demonstração. Observemos inicialmente que, da limitação (4.6), podemos limitar $|u(x+y)+u(x-y)-2u(x)|$ em uma bola centrada em x, e fora da bola, podemos limitar $|u(x+y)+u(x-y)-2u(x)|$ por $4\sup_{x\in\mathbb{R}^n} u(x)$. Ainda, como $u\in S(\mathbb{R}^n)$, u e $D^n u$ (em particular, D^2u) decaem mais rápido que polinômios, vale

$$\begin{aligned}&\frac{|u(x+y)+u(x-y)-2u(x)|}{|y|^{n+2s}} \leq \\ &\leq 4(\chi_{B_1}(y)|y|^{2-n-2s}\sup_{B_1(x)}|D^2u(y)| + \chi_{\mathbb{R}^n/B_1}(y)|y|^{-n-2s}\sup_{\mathbb{R}^n}|u|) \\ &\leq C(\chi_{B_1}(y)|y|^{2-n-2s}(1+|x|^{n+1}) + \chi_{\mathbb{R}^n/B_1}(y)|y|^{-n-2s}) \in L^1(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

Do Teorema de Fubini-Tonelli 26, podemos trocar a ordem de integração e obter

$$\begin{aligned}F((-\Delta)^s u)(\xi) &= -\frac{1}{2}C(n,s)\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x}(-\Delta)^s u(x)dx \\ &= -\frac{1}{2}C(n,s)\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|y|^{n+2s}}dy\right)dx \\ &= -\frac{1}{2}C(n,s)\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u(x+y)e^{-i\xi x}+u(x-y)e^{-i\xi x}-2u(x)e^{-i\xi x}}{|y|^{n+2s}}dx\right)dy \\ &= -\frac{1}{2}C(n,s)\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{i\xi y}+e^{i\xi y}-2}{|y|^{n+2s}}dy\right)F(u)(\xi) \\ &= C(n,s)\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1-cos(\xi y)}{|y|^{n+2s}}dy\right)F(u)(\xi)\end{aligned}$$

e do Lema 20, segue que

$$F((-\Delta)^s u)(\xi) = |\xi|^{2s}F(u)(\xi) \implies (-\Delta)^s u(x) = F^{-1}(|\xi|^{2s}F(u))(\xi),$$

como desejávamos. □

Proposição 19. *([12], Proposição 3.4, p.16)*
Dado $s\in(0,1)$, vale que $H^s(\mathbb{R}^n) = \hat{H}^s(\mathbb{R}^n)$, e além disso

$$[u]_{H^s} = 2C(n,s)^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{2s}|F(u)|^2 d\xi. \tag{4.8}$$

Demonstração. Fazendo uma mudança de variável do tipo $z = x-y$, para $y\in\mathbb{R}^n$ fixo, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dx\right)dy &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(z+y)-u(y)|^2}{|z|^{n+2s}}dz\right)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{u(z+y)-u(y)}{|z|^{n/2+s}}\right|^2 dy\right)dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left\|\frac{u(z+\cdot)-u(\cdot)}{|z|^{n/2+s}}\right\|_{L^2}^2 dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left\|F\left(\frac{u(z+\cdot)-u(\cdot)}{|z|^{n/2+s}}\right)\right\|_{L^2}^2 dz\end{aligned}$$

onde no último passo utilizamos a Fórmula de Plancharel 27. Agora, usando o Lema 20, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|\left| F\left(\frac{u(z+\cdot)-u(\cdot)}{|z|^{n/2+s}}\right)\right|\right|_{L^2}^2 dz = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|e^{i\xi z}-1|^2}{|z|^{n+2s}}|F(u)(\xi)|^2 d\xi dz$$
$$= 2\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-cos(\xi z)}{|z|^{n+2s}}|F(u)(\xi)|^2 d\xi dz d\xi$$
$$= 2C(n,s)^{-1}\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}|F(u)(\xi)|^2 d\xi,$$

donde obtemos o resultado desejado. □

Portanto, da Proposição 19, temos a igualdade entre $H^s(\mathbb{R})$ e $\hat{H}^s(\mathbb{R}^n)$, vistos como subconjuntos de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Definindo então em $H^s(\mathbb{R}^n)$ o produto interno

$$\langle u,v\rangle_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2s})F(u)(\xi)F(v)(\xi)d\xi \tag{4.9}$$

decorre imediatamente que a norma oriunda de (4.9) é dada por

$$||u||_{\hat{H}^s} = \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2s})|F(u)(\xi)|^2 d\xi, \tag{4.10}$$

e mais ainda, da Proposição 19 combinada com a Fórmula de Plancharel 27, nos dá

$$||u||_{\hat{H}^s} = \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2s})|F(u)(\xi)|^2 d\xi = ||u||_{L^2} + 2C(n,s)[u]_{H^s}$$

donde obtemos que $||.||_{H^s}$ e $||.||_{\hat{H}^s}$ são equivalentes, e mais ainda, $H^s(\mathbb{R})$ é espaço com produto interno definido. Tratemos de obter ainda que $H^s(\mathbb{R}^n)$ é espaço de Hilbert.

Teorema 8. *([11], Proposição 4.8, p.182)*
Para $s > 0$, o espaço $H^s(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Hilbert.

Demonstração. Dado $s > 0$, tomemos uma sequência de Cauchy $\{u_n\} \subset H^s(\mathbb{R}^n)$. Da definição de $H^s(\mathbb{R}^n)$, segue que $g_n(\xi) = (1+|\xi|^2)^{s/2}F(u_n) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, para todo n natural, e como $L^2(\mathbb{R}^n)$ é espaço de Banach, a sequência de funções g_n converge para alguma função $U \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Assim, como a função $f(\xi) = (1+|\xi|^2)^{-s/2}$ é limitada em $\mathbb{R}^n$, segue que $fU \in L^2(\mathbb{R}^n)$, donde podemos aplicar a transformada de Fourier, e pondo $u = F^{-1}(fU)$, segue que

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}F(u) = (1+|\xi|^2)^{s/2}F(F^{-1}(fU)) = (1+|\xi|^2)^{s/2}fU = U \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

o que implica que $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Portanto, como, para dado $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$

$$||v||_{H^s} = \left(\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^{2s})F(v)^2 d\xi\right)^{1/2} = ||(1+|\xi|^{2s})F(v)||_{L^2}$$

segue, da continuidade da transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$ que

$$||u-u_n||_{H^s} = ||(1+|\xi|^{2s})F(u-u_n)||_{L^2} \to 0,$$

ou seja, u_n converge para u, em $H^s(\mathbb{R}^n)$. □

Corolário 2. *Para $s > 0$, o espaço $H^s(\mathbb{R}^n)$ é reflexivo.*

Demonstração. Com efeito, como $H^s(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Hilbert, segue do Teorema 25, este espaço é reflexivo. $\square$

Vamos enunciar dois resultados sobre imersões (contínuas e compactas), os quais não demonstraremos devido ao seu teor mais técnico, mas que serão utilizados extensivamente no decorrer deste trabalho.

Teorema 9. *([11], Teorema 4.47, p.210) Para $0 < s < 1$, valem as seguintes imersões contínuas*

(*i*) *Se $2s < n$, então $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, para todo $2 \leq q \leq 2_s^* = 2n/(n-2s)$;*

(*ii*) *Se $2s = n$, então $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, para todo $2 \leq q < \infty$;*

(*iii*) *Se $2s > n$, então $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

E, para o caso de imersões compactas em domínios Lipschitz (veja a Definição 18 sobre domínios Lipschitz), vale

Teorema 10. *([11], Teorema 4.54, p.216)*
Seja Ω um aberto, limitado e Lipschitz de $\mathbb{R}^n$. Para $0 < s < 1$, valem as seguintes imersões

(*i*) *Se $2s < n$, então a imersão $H^s(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é compacta para todo $2 \leq q < 2_s^* = 2n/(N-2s)$;*

(*ii*) *Se $2s = n$, então a imersão $H^s(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é compacta para todo $2 \leq q < \infty$;*

(*iii*) *Se $2s > n$, então a imersão $H^s(\Omega) \hookrightarrow C_b^{0,\lambda}(\Omega)$ é compacta para $\lambda < s - n/2$.*

4.2 O OPERADOR DE SCHRÖDINGER FRACIONÁRIO

Vamos definir agora uma classe de operadores, aos quais chamaremos de operadores de Schrödinger fracionários, onde ao invés de utilizarmos o laplaciano, fazemos o uso do laplaciano fracionário. Os resultados apresentados nesta seção são uma adaptação de alguns resultados dos Capítulos 2 e 3 de [24]. Assim, nosso objetivo é obter caracterizações do espectro dos operadore de Schrödinger fracionários.

Definição 14. *Fixemos $s \in (0,1)$, e $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tal que $V \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ um potencial. Definimos o operador de Schrödinger fracionário S_s por*

$$\begin{aligned} S_s : S(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \\ u &\longmapsto (-\Delta)^s u + Vu. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Para as considerações e desenvolvimentos que seguem, é importante sabermos se S_s é autoadjunto, essencialmente autoadjunto, simétrico, ou não possui nenhuma dessas propriedades. Nesta linha de ideias, o resultado a seguir nos dá um direcionamento sobre isso.

Teorema 11. *Sejam A e B dois operadores lineares ilimitados definidos num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e um operador unitário U, tais que $UAU^{-1} = B$ e $UD(A) = D(B)$. Se A é autoadjunto, então B também é.*

Demonstração. Observemos inicialmente que, se $y \in D(B)$, segue que $U^{-1}y \in D(A)$. Com efeito, se $y \in D(B)$, então da hipótese sobre os domínios, segue que $y = Uz$, para algum $z \in D(A)$, donde decorre que $U^{-1}y = z \in D(A)$.

Da mesma forma, notemos que se $z \in D(A)$, então existe $y \in D(B)$ tal que $z = U^{-1}y$. Com efeito, para um $z \in D(A)$, segue que $Uz \in D(B)$, donde existe $y \in D(B)$ satisfazendo $Uz = y$, ou seja, $U^{-1}y = z \in D(A)$.

Mostremos agora que B é simétrico, e para isto, tomemos $x, y \in D(B)$. Então

$$\begin{aligned}\langle Bx, y\rangle =&\langle UAU^{-1}x, y\rangle = \langle AU^{-1}x, U^*y\rangle \\ =&\langle U^{-1}x, A^*U^*y\rangle = \langle x, (U^{-1})^*A^*U^*y\rangle \\ =&\langle x, UAU^{-1}y\rangle = \langle x, By\rangle\end{aligned}$$

onde usamos que $U^* = U^{-1}$.

Mostremos agora que se $x \in D(B^*)$, então $U^{-1}x \in D(A^*)$. Para isso, precisamos mostrar que, para todo $z \in D(A)$, existe $w \in H$ que satisfaz

$$\langle Az, U^{-1}x\rangle = \langle x, w\rangle,\ \ z \in D(A).$$

Dado $z \in D(A)$, existe $y \in D(B)$ tal que $z = U^{-1}y$, e assim

$$\begin{aligned}\langle Az, U^{-1}x\rangle &= \langle (U^{-1})^*AU^{-1}y, x\rangle \\ &= \langle By, x\rangle \\ &= \langle y, w'\rangle \\ &= \langle Uz, w'\rangle \\ &= \langle z, U^*w'\rangle \\ &= \langle z, w\rangle\end{aligned}$$

donde obtemos que $U^{-1}x \in D(A^*) = D(A)$.

Por fim , se $x \in D(B^*)$, então $U^{-1}x \in D(A^*) = D(A)$, que implica em $U^{-1}x \in D(A)$. Assim, segue que $U(U^{-1}x) \in UD(A) = D(B)$, ou seja, $x = UU^{-1}x \in D(B)$. $\square$

Corolário 3. *O laplaciano fracionário é essencialmente autoadjunto.*

Demonstração. Sejam $D(A) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n); \int |\xi|^{4s} |f(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\}$ e o operador

$$\begin{aligned} A : D(A) \subset L^2(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \\ f &\longmapsto |\xi|^{2s} f(\cdot) \end{aligned}$$

Então A é autoadjunto, pois é apenas um operador multiplicação. Tomando $U = F^{-1}$, onde F é a Transformada de Fourier e dada $f \in S(\mathbb{R}^n)$, segue que

$$F^{-1}AF(f)(x) = F^{-1}(|\xi|^{2s}\hat{f}(\xi)) = (-\Delta)^s f,$$

ou seja, $F^{-1}AF$ restrito a $S(\mathbb{R}^n)$ é igual ao laplaciano fracionário. Noutras palavras, $F^{-1}AF$ é extensão de $(-\Delta)^s$.

Observemos que $H^{2s}(\mathbb{R}^n) = F^{-1}D(A)$. Provemos inicialmente que $F^{-1}D(A) \subset H^{2s}(\mathbb{R}^n)$. Dado $g \in F^{-1}D(A)$, então $g = F^{-1}(f)$ para algum $f \in D(A)$, donde

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{4s} |F(g)(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{4s} |F(F^{-1}(f))(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{4s} |f(\xi)|^2 d\xi \leq \infty,$$

onde usamos no último passo que $f \in D(A)$, e assim, concluímos que $g \in H^{2s}(\mathbb{R}^n)$. Provando agora a inclusão reversa, dado $g \in H^{2s}(\mathbb{R}^n)$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{4s} |F(g)(\xi)|^2 d\xi < \infty,$$

ou seja, $F(g) \in D(A)$, e portanto, $g = F^{-1}(F(g)) \in F^{-1}D(A)$, concluindo que $H^{2s}(\mathbb{R}^n) = F^{-1}D(A)$. Portanto, se definirmos $B = F^{-1}AF$, com $D(B) = F^{-1}D(A) = H^{2s}(\mathbb{R}^n)$, então segue do Teorema 11 que B é um operador autoadjunto, e mais ainda, é uma extensão de $(-\Delta)^s$, como desejávamos. □

Para facilitar a compreensão, a partir deste ponto, quando nos referirmos ao laplaciano fracionário, estaremos nos referindo à sua extensão autoadjunta definida sobre $H^{2s}(\mathbb{R}^n)$. A partir de agora, vamos construir resultados técnicos que culminarão em ferramentas a serem utilizadas na caracterização do espectro dos operadores de Schrödinger fracionários.

Lema 22. *Sejam v, $w \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $s \in (0,1)$ tais que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x)(-\Delta)^s z(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} w(x) z(x) dx, \ \ \forall z \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Então $v \in H^{2s}(\mathbb{R}^n)$ e ainda valem

$$|\xi|^{2s}\hat{v}(\xi) = w(\xi), \quad q.t.p. \ em \ \xi \in \mathbb{R}^n,$$
$$(-\Delta)^s v(x) = w(x) \quad q.t.p. \ em \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Mostremos inicialmente que $v \in H^{2s}(\mathbb{R}^n)$, o que é equivalente a mostrar que $v \in D((-\Delta)^s)$ pois $D((-\Delta)^s) = H^{2s}(\mathbb{R}^n)$. Mais do que isso, como o laplaciano fracionário é um operador autoadjunto, segue que, para mostrar que v está em seu domínio, basta apenas que exista $C > 0$ tal que

$$|\langle v, (-\Delta)^s z\rangle| \leq C||z||_{L^2}, \;\; \forall z \in H^{2s}(\mathbb{R}^n).$$

Antes de prosseguirmos, observemos que, da hipótese, temos

$$\begin{aligned} |\langle v, (-\Delta)^s z\rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} v(x)(-\Delta)^s z(x) dx \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} w(x) z(x) dx \right| \\ &\leq ||w||_{L^2} ||z||_{L^2}, \;\; \forall z \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Temos então um pedaço da jornada já concluída, restando apenas conseguir generalizar a desigualdade acima para todo $z \in H^{2s}(\mathbb{R}^n)$. Assim, dado $z \in H^{2s}(\mathbb{R}^n)$, e do Teorema 6, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^{2s}(\mathbb{R}^n)$ donde existe uma sequência $(z_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ convergindo para z (em $H^{2s}(\mathbb{R}^n)$). Então

$$||(-\Delta)^s z - (-\Delta)^s z_n||_{L^2} \leq ||z - z_n||_{H^{2s}} \to 0,$$

donde $((-\Delta)^s z_n)$ converge para $((-\Delta)^s z)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Além disso, como para cada $n \in \mathbb{N}$ $z_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, segue da desigualdade 4.12 que

$$|\langle v, (-\Delta z_n)\rangle| \leq C||z_n||_{L^2} \to C||z||_{L^2}.$$

Portanto, $(|\langle v, (-\Delta)^s z_n\rangle|)$ é uma sequência limitada, e possui ao menos uma subsequência convergente, ao qual tomaremos em detrimento à própria sequência. Mostremos que $|\langle v, (-\Delta)^s z_n\rangle| \to |\langle v, (-\Delta)^s z\rangle|$. Para isto, basta notar que

$$\begin{aligned} ||\langle v, (-\Delta)^s z_n\rangle| - |\langle v, (-\Delta)^s z\rangle|| &\leq |\langle v, (-\Delta)^s z - (-\Delta)^s z_n\rangle| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} v(x)(-\Delta)^s (z - z_n)(x) \right| \\ &\leq ||v||_{L^2} ||(-\Delta)^s (z - z_n)||_{L^2} \to 0. \end{aligned}$$

Sumarizando, temos então

$$|\langle v, (-\Delta)^s z\rangle| \leftarrow |\langle v, (-\Delta)^s z_n\rangle| \leq C||z||_{L^2},$$

donde concluímos que $v \in H^{2s}(\mathbb{R}^n)$.

Agora, retornando à hipótese, temos também que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}(\xi)|\xi|^{2s} \hat{z}(\xi) d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} v(x)(-\Delta)^s z(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} w(x) z(x) dx \\ &= \int \hat{w}(\xi) \hat{z}(\xi) d\xi, \;\; \forall z \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

donde obtemos

$$\Longrightarrow \langle \hat{z}, \hat{v}|\xi|^{2s} - \hat{w} \rangle = 0, \;\; \forall z \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

e por fim, da densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$, segue que

$$\Longrightarrow \langle \hat{z}, \hat{v}|\xi|^{2s} - \hat{w} \rangle = 0, \;\; \forall z \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Por fim, do produto interno ser nulo para todo $z \in L^2(\mathbb{R}^n)$, segue que $\hat{v}|\xi|^{2s}(\xi) = \hat{w}(\xi)$ q.t.p. $\xi \in \mathbb{R}^n$. Mediante a aplicação da Transforma de Fourier Inversa, segue que $(-\Delta)^s v(x) = w(x)$ q.t.p. em $x \in \mathbb{R}^n$. □

Antes de prosseguirmos, vamos definir o conceito de solução fraca para o contexto (mediante a algum conjunto de funções de teste) em que estamos trabalhando. Mais ainda, cabe a observação prévia de que, para algum $s \in (0,1)$, do fato de $H^{2s}(\mathbb{R}^n)$ ser o domínio de $(-\Delta)^s$, segue que $H^s(\mathbb{R}^n)$ é o domínio de $(-\Delta)^{s/2}$.

Definição 15. *Uma função $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ é dita solução fraca em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ da equação*

$$(-\Delta)^s u(x) + V(x)u(x) = f(x),$$

se vale

$$\int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^{s/2}u(x)(-\Delta)^{s/2}v(x) + V(x)u(x)v(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)v(x)dx, \;\forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{4.13}$$

Desta definição, podemos enunciar o seguinte resultado

Lema 23. *Sejam $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e u uma solução fraca de*

$$(-\Delta)^s u(x) = \lambda u(x) + f(x) \tag{4.14}$$

em $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então $u \in H^{2s}(\mathbb{R}^n)$, e ainda

$$(-\Delta)^s u(x) = \lambda u(x) + f(x), \quad \textit{q.t.p. em } \mathbb{R}^n$$

Demonstração. Se $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ é solução fraca de (4.14), então podemos escrever que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^{s/2}u(x)(-\Delta)^{s/2}v(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda u(x) + f(x))v(x)dx, \;\forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\\
\Longrightarrow \langle (-\Delta)^{s/2}u, (-\Delta)^{s/2}v \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda u(x) + f(x))v(x)dx\\
\Longrightarrow \langle u, (-\Delta)^s v \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda u(x) + f(x))v(x)dx\\
\Longrightarrow \int u(x)(-\Delta)^s v(x) &= \int (\lambda u(x) + f(x))v(x)dx, \;\forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

Assim, usando o Lema 22, segue o resultado. □

Podemos agora começar a investigar o espectro (e suas partes) de S_s para alguns potenciais específicos.

Teorema 12. *Se $V = 0$, então $\sigma_p(S_s) = \emptyset$.*

Demonstração. Suponhamos que $u \in \mathcal{N}(S_s - \lambda I) \subset H^{2s}(\mathbb{R}^n)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Então

$$(-\Delta)^s u = \lambda u.$$

Assim, dado $z \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e usando a autoadjunção do laplaciano fracionário, temos

$$\int u(x)(-\Delta)^s z(x)dx = \int z(x)(-\Delta)^s u(x)dx = \int \lambda u(x)z(x)dx, \ \ \forall z \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

e pelo Lema 22, identificando $w = \lambda u$ e $v = u$, segue que

$$|\xi|^{2s}\hat{u}(\xi) = \lambda\hat{u}(\xi), \ \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^n,$$

donde obtemos

$$(|\xi|^{2s} - \lambda)\hat{u}(\xi) = 0, \ \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^n$$

porém, para um λ fixo, isso ocorre apenas quando u é nula em quase todo ponto. Concluímos então que $\mathcal{N}(S_s - \lambda I) = \{0\}$, como queríamos. □

Corolário 4. *Se $V = 0$, então $\sigma(S_s) = \sigma_{ess}(S_s)$.*

Demonstração. Como $\sigma_d(S_s) \subset \sigma_p(S_s)$, segue que $\sigma_d(S_s) = \emptyset$. Portanto, da decomposição $\sigma(S_s) = \sigma_{ess}(S_s) \cup \sigma_d(S_s)$, segue o resultado. □

Antes de prosseguir, dado $s \in (0,1)$ vamos considerar o funcional

$$\begin{aligned} Q_s : H^s(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{s/2}u(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} V(x)u(x)^2 dx. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Este funcional será importante nos estudos que seguem, e por isso, cabe investigar sua continuidade.

Lema 24. *O funcional Q_s para $s \in (0,1)$ definido em (4.15) é $C^1(H^s(\mathbb{R}^n))$.*

Demonstração. Para $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, podemos separar o funcional $Q_s(u) = I_1(u) + I_2(u)$, em que

$$I_1(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{s/2}u(x)|^2 dx, \quad \text{e} \quad I_2(u) = \int_{\mathbb{R}^n} V(x)u(x)^2 dx.$$

Provemos inicialmente que o funcional I_1 é diferenciável em todo ponto $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Dado $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, e tomados $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ e $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} I_1(u + tv) - I_1(u) &= \int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{s/2}(u + tv)(x)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{s/2}u(x)|^2 dx \\ &= t^2 \int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{s/2}v(x)|^2 dx + 2t \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^{s/2}v(x)(-\Delta)^{s/2}u(x)dx, \end{aligned}$$

donde
$$I_1'(u)v = \lim_{t\to 0} \frac{I_1(u+tv) - I_1(u)}{t} = 2\int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^{s/2} v(x)(-\Delta)^{s/2}u(x)dx,$$
e segue que a derivada (no sentido de Gateaux) de I_1 existe para todo ponto no domínio do funcional. Provemos agora que I_1' é uma aplicação contínua. Para isso, dados $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ e $(u_n) \subset H^s(\mathbb{R}^n)$ convergindo para u em $H^s(\mathbb{R}^n)$, basta mostrar que $I_1'(u_n)$ converge para $I_1'(u)$. Assim, dado $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$, segue que

$$\begin{aligned}
|(I_1'(u) - I_1'(u_n))v| &= 2\int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^{s/2} v(x)(-\Delta)^{s/2}(u-u_n)(x)dx \\
&\leq 2\left(\int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{s/2}v(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{s/2}(u-u_n)(x)|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\leq 2||v||_{H^s}||u-u_n||_{H^s} \to 0
\end{aligned}$$

e segue que I_1' é contínuo em $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Vamos provar agora a diferenciabilidade de I_2. Para isso, da mesma forma que fizemos anteriormente, tomando $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, e tomados $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ e $t \in \mathbb{R}$, segue

$$\begin{aligned}
I_2(u+tv) - I_2(u) &= \int_{\mathbb{R}^n} V(x)(u(x)^2 + 2tv(x) + t^2 v(x)^2)dx - \int_{\mathbb{R}^n} V(x)u(x)^2 dx \\
&= 2t\int_{\mathbb{R}^n} V(x)u(x)v(x)dx + t^2\int_{\mathbb{R}^n} V(x)v(x)^2 dx
\end{aligned}$$

donde
$$I_2'(u)v = \lim_{t\to 0}\frac{I_2(u+tv) - I_2(u)}{t} = 2\int_{\mathbb{R}^n} V(x)u(x)v(x)dx.$$

Portanto, acabamos de mostrar que I_2 é derivável em todo ponto. Provemos a continuidade, seguindo os mesmos passos da demonstração de I_1, donde dado $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ e $(u_n) \subset H^s(\mathbb{R}^n)$ convergindo para u, mostremos a convergência de $I_2'(u_n)$ para $I_2'(u)$. Tomando $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ arbitrário, podemos escrever

$$\begin{aligned}
|(I_2'(u) - I_2'(u_n))v| &= 2\left|\int_{\mathbb{R}^n} V(x)(u-u_n)(x)v(x)dx\right| \\
&\leq 2||V||_{L^\infty}||u-u_n||_{L^2}||v||_{L^2} \\
&\leq 2||v||_{H^s}||u-u_n||_{H^s} \to 0,
\end{aligned}$$

e assim, segue o resultado. □

Da construção da prova, podemos ainda inferir que a derivada do funcional Q_s, no ponto u, atuando em v é dada por

$$Q_s'(u)v = 2\int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^{s/2}v(x)(-\Delta)^{s/2}u(x)dx + 2\int_{\mathbb{R}^n} V(x)u(x)v(x)dx. \tag{4.16}$$

A partir de agora, consideremos o escalar

$$\Lambda = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{s/2}u(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} V(x)u(x)^2 dx;\ u \in H^s(\mathbb{R}^n),\ ||u||_{L^2} = 1\right\}. \tag{4.17}$$

Lema 25. *Seja $V \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e Λ como em (4.17). Valem*

(1) $\Lambda \geq -||V||_{L^\infty} > -\infty$;

(2) $\Lambda = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{s/2}u(x)|^2dx + \int_{\mathbb{R}^n} V(x)u(x)^2dx;\ \ u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ ||u||_{L^2} = 1\right\}$;

(3) $\Lambda = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^n} (S_su(x))u(x)dx;\ \ u \in H^{2s}(\mathbb{R}^n),\ ||u||_{L^2} = 1\right\}$;

(4) Se $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ *com* $||u||_{L^2} = 1$ *e* $\Lambda = \int_{\mathbb{R}^n}(S_su(x))u(x)dx$, *então*

$$u \in H^{2s}(\mathbb{R}^n),\ \ u \in \mathcal{N}(S_s - \Lambda I)\ \ \text{e}\ \Lambda \in \sigma_p(S_s).$$

Demonstração. Para (1), de $\int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{s/2}u(x)|^2dx \geq 0$, segue imediatamente que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{s/2}u(x)|^2dx + \int_{\mathbb{R}^n} V(x)u(x)^2dx &\geq \int_{\mathbb{R}^n} V(x)u(x)^2dx \\ &\geq -||V||_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u(x)^2dx \\ &= -||V||_{L^\infty}\end{aligned}$$

donde decorre que $\Lambda \geq -||V||_{L^\infty}$, como desejávamos.

Para provar (2), como $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n)$, segue que

$$\Lambda \leq \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{s/2}u(x)|^2dx + \int_{\mathbb{R}^n} V(x)u(x)^2dx;\ \ u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ ||u||_{L^2} = 1\right\}.$$

Consideremos o funcional Q_s definido em (4.15). Da definição de ínfimo, existe uma sequência $(u_n) \subset H^s(\mathbb{R}^n)$ tal que $||u_n||_{L^2} = 1$ e $Q(u_n) \to \Lambda$. Além disso, da densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ em $H^s(\mathbb{R}^n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $v_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $||v_n - u_n||_{H^s} \leq 1/n$. Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned}||v_n||_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n}(u_n(x)^2 + v_n(x)^2 - u_n(x)^2)dx &= 1 + \int_{\mathbb{R}^n}(v_n(x)^2 - u_n(x)^2)dx \\ \Longrightarrow\ ||v_n||_{L^2} - 1 &= \int_{\mathbb{R}^n}(v_n(x) - u_n(x))(v_n(x) + u_n(x))dx.\end{aligned}$$

Assim, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, podemos naturalmente escrever

$$\begin{aligned}|||v_n||_{L^2} - 1| &\leq ||v_n - u_n||_{L^2}||v_n + u_n||_{L^2} \\ &\leq \frac{1}{n}(||v_n + u_n||_{L^2}) \\ &\leq \frac{1}{n}(||v_n - u_n||_{L^2} + 2||u_n||_{L^2}) \\ &\leq \frac{1}{n}\,(1/n + 2) \to 0,\end{aligned}$$

ou seja, $||v_n||_{L^2} \to 1$.

Definindo a sequência normalizada $w_n = \frac{v_n}{||v_n||_{L^2}}$, segue que $Q_s(w_n) = \frac{Q_s(v_n)}{||v_n||_{L^2}}$. Assim

$$
\begin{aligned}
|Q_s(v_n) - \Lambda| &\leq |Q_s(v_n) - Q_s(u_n)| + |Q_s(u_n) - \Lambda| \\
&\leq |K_1| + |K_2| + |Q_s(u_n) - \Lambda|,
\end{aligned}
$$

onde

$$K_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{s/2} u_n(x)|^2 - |(-\Delta)^{s/2} v_n(x)|^2 dx, \quad \text{e} \quad K_2 = \int_{\mathbb{R}^n} V(x)(v_n(x)^2 - u_n(x)^2) dx.$$

Antes de adentrarmos nos cálculos de K_1, observemos inicialmente que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{s/2}(u_n - v_n)(x)|^2 dx \leq ||u_n - v_n||_{H^s} < 1/n.$$

Com isto em mente, obtemos

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{s/2} u_n(x)|^2 - |(-\Delta)^{s/2} v_n(x)|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} ((-\Delta)^{s/2} u_n(x) + (-\Delta)^{s/2} v_n(x))((-\Delta)^{s/2} u_n(x) - (-\Delta)^{s/2} v_n(x)) dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{s/2}(u_n - v_n)(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{s/2}(u_n + v_n)(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{n} ||(-\Delta)^{s/2} u_n + (-\Delta)^{s/2} v_n||_{L^2} \\
&\leq \frac{1}{n} (||(-\Delta)^{s/2} u_n||_{L^2} + ||(-\Delta)^{s/2} u_n + (-\Delta)^{s/2} v_n - (-\Delta)^{s/2} u_n||_{L^2}) \\
&\leq \frac{1}{n} (2||(-\Delta)^{s/2} u_n||_{L^2} + ||(-\Delta)^{s/2} v_n - (-\Delta)^{s/2} u_n||_{L^2}) \\
&\leq \frac{1}{n} \left(2||(-\Delta)^{s/2} u_n||_{L^2} + \frac{1}{n} \right),
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
|K_2| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} V(x)(v_n(x)^2 - u_n(x)^2) dx \right| \\
&\leq ||V||_{L^\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (v_n(x) + u_n(x))(v_n(x) - u_n(x)) dx \right| \\
&\leq ||V||_{L^\infty} ||v_n - u_n||_{L^2} ||v_n + u_n||_{L^2} \\
&\leq ||V||_{L^\infty} \frac{1}{n} (||v_n + u_n||_{L^2}) \\
&\leq ||V||_{L^\infty} \frac{1}{n} (||v_n - u_n||_{L^2} + 2||u_n||_{L^2}) \\
&\leq ||V||_{L^\infty} \frac{1}{n} (1/n + 2) \to 0.
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
|Q_s(v_n) - \Lambda| &\leq |K_1| + |K_2| + |Q_s(u_n) - \Lambda| \\
&\leq \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + 2||(-\Delta)^{s/2} u_n||_{L^2} \right) + ||V||_{L^\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + 2 \right) + |Q_s(u_n) - \Lambda|.
\end{aligned}
$$

Agora, para limitarmos o termo $\int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{s/2}u_n(x)|^2dx$, observemos que, da definição de Λ, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned} Q_s(u_n) &\le \Lambda + 1, \ \forall n \ge n_0 \\ \implies \int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{s/2}u_n|^2dx &\le \Lambda + 1 - \int_{\mathbb{R}^n} V(x)u_n(x)^2dx \\ &\le \Lambda + 1 + ||V||_{L^\infty} \ \forall n \ge n_0. \end{aligned}$$

Assim, tomando $n \to \infty$, concluímos que $Q_s(v_n) \to \Lambda$. Mais do que isso, como $||v_n||_{L^2} \to 1$, segue também que $Q_s(w_n) = \frac{Q_s(v_n)}{||v_n||_{L^2}} \to \Lambda$, com as propriedades adicionais de $w_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $||w_n||_{L^2} = 1$.

Portanto, construimos uma sequência pertencente ao conjunto

$$\left\{\int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{s/2}u(x)|^2dx + \int_{\mathbb{R}^n} V(x)u(x)^2dx; \ u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \ ||u||_{L^2} = 1\right\},$$

convergindo para Λ, donde da definição, o ínfimo deste conjunto é menor ou igual a Λ. Como já possuíamos a desigualdade contrária, segue a igualdade.

Para o item (3), observemos inicialmente que, do Teorema 7, temos $H^{2s}(\mathbb{R}^n) \subseteq H^s(\mathbb{R}^n)$. Assim, dado $u \in H^{2s}(\mathbb{R}^n)$, podemos atuar com $(-\Delta)^s$ e também $(-\Delta)^{s/2}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (S_su(x))u(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^su(x)u(x) + Vu(x)^2dx \\ &= \langle(-\Delta)^su, u\rangle + \int_{\mathbb{R}^n} V(x)u(x)^2dx \\ &= \langle(-\Delta)^{s/2}u, (-\Delta)^{s/2}u\rangle + \int_{\mathbb{R}^n} V(x)u(x)^2dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (|(-\Delta)^{s/2}u(x)|^2 + V(x)u(x)^2)dx. \end{aligned}$$

Assim, do item (2) e nomeando por

$$\begin{aligned} a &= \left\{\int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{s/2}u(x)|^2dx + \int_{\mathbb{R}^n} V(x)u(x)^2dx; \ u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \ ||u||_{L^2} = 1\right\} \\ b &= \left\{\int_{\mathbb{R}^n} (S_su(x))u(x)dx; \ u \in H^{2s}(\mathbb{R}^n), \ ||u||_{L^2} = 1\right\} \\ c &= \left\{\int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{s/2}u(x)|^2dx + \int_{\mathbb{R}^n} V(x)u(x)^2dx; \ u \in H^s(\mathbb{R}^n), \ ||u||_{L^2} = 1\right\}, \end{aligned}$$

segue das inclusões $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset H^{2s}(\mathbb{R}^n) \subseteq H^s(\mathbb{R}^n)$ que $a \subset b \subset c$, e como $\inf a = \inf c$, segue que $\inf a = \inf b = \inf c$.

Finalmente, para (4), coloquemos $P(u) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)^2dx$, donde temos $P \in C^1(H^s(\mathbb{R}^n))$, e $P'(u)v = 2\int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x)dx$, para $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Em particular, $P'(u)u = 2||u||_{L^2}^2 \neq 0$, para $u \neq 0$. Assim, se $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ com $P(u) = 1$ e $Q_s(u) = \Lambda$, então, do Teorema 28, existe $\xi \in \mathbb{R}$ multiplicador de Lagrange tal que

$$Q_s'(u)v = \xi P'(u)v, \ \forall v \in H^s(\mathbb{R}^n),$$

e reescrevendo,

$$2\int_{\mathbb{R}^n}(-\Delta)^{s/2}u(x)(-\Delta)^{s/2}v(x)+\int_{\mathbb{R}^n}V(x)u(x)v(x)dx=2\xi\int_{\mathbb{R}^n}u(x)v(x)dx,\ \ \forall v\in H^s(\mathbb{R}^n).$$

Pelo Lema 22, segue que $u\in H^{2s}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, no caso particular de $u=v$, decorre que $2Q_s(u)=2\xi$, donde $\Lambda=\xi$. Portanto, podemos reescrever

$$\int_{\mathbb{R}^n}(-\Delta)^{s/2}u(x)(-\Delta)^{s/2}v(x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}(\Lambda-V(x))u(x)v(x)dx,\ \ \forall v\in H^s(\mathbb{R}^n),$$

e do Lema 23, identificando $\lambda=\Lambda$ e $f=-Vu$, segue que

$$(-\Delta)^s u=(\Lambda-V)u, \qquad q.t.p. \text{ em } \mathbb{R}^n. \tag{4.18}$$

□

Teorema 13. *Sejam $V\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $s\in(0,1)$. Então*

(i) $\sigma(S_s)\subset[\Lambda,\infty)$;

(ii) $\Lambda\in\sigma(S_s)$.

Demonstração. Para provar (i), notamos que, do Lema 25 item (3), para $u\in H^{2s}(\mathbb{R}^n)$ com $u\neq 0$, pondo $u/||u||_{L^2}$, temos

$$\Lambda\le\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(S_su(x))u(x)}{||u||_{L^2}^2}dx$$

donde podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}^n}(S_su(x))u(x)dx\ge\Lambda||u||_{L^2}^2. \tag{4.19}$$

Assim, para $\lambda\in\mathbb{R}$ arbitrário, temos

$$(\Lambda-\lambda)||u||_{L^2}^2\le\int_{\mathbb{R}^n}((S_s-\lambda I)u(x))u(x)dx\le||(S_s-\lambda I)u||_{L^2}||u||_{L^2},$$

donde concluímos, que $||(S-\lambda I)u||_{L^2}\ge(\Lambda-\lambda)||u||_{L^2}$, para todo $u\in H^{2s}(\mathbb{R})$ não nulo. Portanto, do Lema 4, segue que, para $\lambda\le\Lambda$, $(S_s-\lambda I)$ é um isomorfismo, assim $\lambda\in\rho(S_s)$, e a afirmação está provada.

Agora, para (ii), tomemos m qualquer tal que $\sigma(S_s)\subset[m,\infty)$. Desejamos mostrar que $m\le\Lambda$. Para isso, tome $\xi\in(-\infty,m)$ arbitrário. Como $\xi\in\rho(S_s)$, segue que $A=(S_s-\xi I)^{-1}$ existe, é limitado e autoadjunto. É imediato que $0\in\sigma(A)$, pois $A-0I=A$, e $R(A)=D(S_s)=H^{2s}(\mathbb{R}^n)\neq L^2(\mathbb{R}^n)$. Tomando $\lambda\neq 0$, vale

$$A-\lambda I=\lambda\left\{\frac{I}{\lambda}-(S_s-\xi I)\right\}A=\lambda\left\{\left(\frac{1}{\lambda}+\xi\right)I-S_s\right\}A,$$

donde

$$\begin{aligned}
A-\lambda I :&L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}^n) \ \text{ é isomorfismo} \\
&\iff S_s - \left(\frac{1}{\lambda}+\xi\right) I : H^{2s}(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n) \ \text{ é isomorfismo} \\
&\iff \left(\frac{1}{\lambda}+\xi\right) \in \rho(S_s).
\end{aligned}$$

Noutras palavras, $\lambda \in \rho(A)$ se, e somente se, $1/\lambda+\xi \in \rho(S_s)$, porém, isto implica que, $\lambda \in \sigma(A)$ se, e somente se $\mu := 1/\lambda + \xi \in \sigma(S_s)$. Assim

$$\sigma(A) = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{\mu-\xi}, \mu \in \sigma(S_s) \right\}.$$

Provemos ainda que $\sigma(A) \subset [0, 1/(m-\xi)]$. Para isto, observemos inicialmente, que se $\lambda < 0$

$$m > \xi > \xi + \frac{1}{\lambda} \implies \frac{1}{\lambda} + \xi \notin \sigma(S_s) \implies \lambda \notin \sigma(A).$$

Portando, $\sigma(A) \subset [0,\infty)$. Além disso, se $\lambda \in \sigma(A)$, então $\frac{1}{\lambda}+\xi \in \sigma(S_s)$, donde

$$\frac{1}{\lambda} + \xi \geq m \implies \frac{1}{m-\xi} \geq \lambda,$$

e segue portanto que $\sigma(A) \subset [0, 1/(m-\xi)]$.

Portanto, do Lema 6,

$$\int_{\mathbb{R}^n} Av(x)v(x)dx \geq 0 \ \ \forall v \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Assim, dado $u \in H^{2s}(\mathbb{R}^n)$, pondo $v = (S_s - \xi I)u$, segue que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} Av(x)v(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} (S_s - \xi I)u(x)u(x)dx \\
&\implies \int S_s u(x)u(x)dx \geq \xi \int u(x)u(x)dx, \ \ \forall u \in H^{2s}(\mathbb{R}) \\
&\qquad \implies \xi \leq \Lambda.
\end{aligned}$$

□

Uma consequência imediata do resultado que acabamos de provar é que o espectro de S_s nunca é vazio, e mais ainda, seu ínfimo é bem determinado. Tratemos de obter informação similar para o espectro essencial.

Teorema 14. *Sejam $V \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $s \in (0,1)$. Então*

(i) Para todo $\lambda \in \rho(S_s)$, $(S-\lambda I)^{-1} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ é não compacto;

(ii) $\sigma_{ess}(S_s) \neq \emptyset$.

Demonstração. Iniciemos a prova pelo item (i). Dado $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, com $\varphi \neq 0$, $n = (n_1, ..., n_n) \in \mathbb{N}^n$, seja $\varphi_n(x) = \varphi(x-n)$ a translação de φ. Então $\varphi_n \in H^{2s}(\mathbb{R}^n)$ e $||\varphi_n||_{H^{2s}} = ||\varphi||_{H^{2s}}$. Além disso, observemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_n(x)v(x)dx \to 0, \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

pois a translação faz com que, para $|n_i|$ suficientemente grande (para todas as componentes de n), tenhamos $supp\varphi_n \cap supp v = \emptyset$. Deste fato e do Teorema 29, segue que $\varphi_n \rightharpoonup 0$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Porém, isto implicaria que, se $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possuísse uma subsequência que convergisse fortemente em $L^2(\mathbb{R}^n)$, então seu limite seria 0. Teríamos então

$$0 = \lim ||\varphi_{n_j}||_{H^{2s}} = ||\varphi||_{H^{2s}} > 0,$$

o que é uma contradição. Portanto, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^n}$ não pode ter uma subsequência convergindo fortemente. Utilizaremos este fato no decorrer da demonstração.

Seja $\lambda \in \rho(S_s)$ e $T = (S_s - \lambda I)^{-1}$. Consideremos $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $v_n = (S_s - \lambda I)\varphi_n$. Notemos que v_n é limitada em $L^2(\mathbb{R}^n)$, pois

$$\begin{aligned} ||v_n||_{L^2} &= ||(S_s - \lambda I)\varphi_n||_{L^2} \\ &\leq ||(-\Delta)^s\varphi_n||_{L^2} + (||V||_{L^\infty} + |\lambda|)||\varphi_n||_{L^2} \\ &\leq ||\varphi_n||_{H^{2s}} + (||V||_{L^\infty} + |\lambda|)||\varphi_n||_{H^{2s}}. \end{aligned}$$

Mas $Tv_n = \varphi_n$, donde como $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{R}^n}$ não tem subsequência convergindo fortemente, segue que Tv_n também não possui. Portanto, $T = (S - \lambda I)^{-1}$ não pode ser compacto (pois caso fosse, toda sequência limitada possuiria alguma subsequência convergente).

Agora, para (ii), suponhamos que $\sigma_{ess}(S) = \emptyset$. Teríamos $\sigma(S) = \sigma_d(S)$ e como o espectro discreto é enumerável, existiria uma sequência $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com

$$(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sigma(S_s) \subset [\Lambda, \infty), \ \ 0 < dim\mathcal{N}(S_s - \mu_n I) < \infty, \ \ \forall n \in \mathbb{N},$$

e para todo $R \in (\Lambda, \infty)$, $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \cap [\Lambda, R]$ contém apenas um número finito de pontos, pois os elementos de $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são pontos isolados em $\sigma(S)$.

Tomando $\xi \leq \Lambda$ e pondo $A = (S_s - \xi I)^{-1}$, de forma inteiramente análoga ao item (ii) do Teorema 13, $A : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ é limitado, autoadjunto e

$$\sigma(A) = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{\mu - \xi}, \ \mu \in \sigma(S_s)\right\} = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{\mu_n - \xi}, \ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Dado $\epsilon > 0$, $\sigma(A) \setminus [-\epsilon, \epsilon]$ contém um número finito de pontos e cada autovalor tem multiplicidade finita. Seja E_ϵ o subespaço de $L^2(\mathbb{R}^n)$ gerado pelos autovetores associados aos autovalores em $\sigma(A) \setminus [-\epsilon, \epsilon]$. Então $dimE_\epsilon < \infty$ e $A(E_\epsilon) = E_\epsilon$. Além disso, da autoadjunção de A, obtemos que $A(E_\epsilon^\perp) \subset E_\epsilon^\perp$, donde podemos definir a restrição de A

em $E_\epsilon^\perp$, dada por $A_\epsilon : E_\epsilon^\perp \to E_\epsilon^\perp$. Temos $\sigma(A_\epsilon) = \sigma(A) \cap [-\epsilon, \epsilon]$, e do Lema 6, segue que $||A_\epsilon|| \leq \epsilon$.

Seja $P_\epsilon : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ a projeção ortogonal de $L^2(\mathbb{R}^n)$ em E_ϵ. Como $dim E_\epsilon < \infty$, segue que P_ϵ é um operador compacto. Temos

$$A = AP_\epsilon + A(I - P_\epsilon),$$

onde AP_ϵ é compacto (pois A é limitado e P_ϵ é compacto) e $||A_\epsilon(I - P_\epsilon)|| = ||A_\epsilon|| \leq \epsilon$. Portanto, tomando a sequência de operadores $(AP_{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$, vemos que a sequência de operadores é constituída de operadores compactos, e

$$||A - AP_{1/n}|| = ||A(I - P_{1/n})|| = ||A_{1/n}|| \leq 1/n,$$

e como o conjunto dos operadores compactos é fechado dentro de $B(L^2(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))$, segue que A é compacto, contradizendo (i). Portanto, segue que $\sigma_{ess}(S_s) \neq \emptyset$. $\square$

Dado um potencial V, denotaremos o seguinte limite (quando existir) por

$$l := \lim_{R\to\infty} ess\ sup_{|x|\leq R}|V(x)|. \tag{4.20}$$

Lema 26. *Sejam $V \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $s \in (0,1)$ e $M : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, dado por $Mu = Vu$. Se $\lim_{R\to\infty} ess\ sup_{|x|\leq R}|V(x)| = 0$, então $M|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$ é um operador compacto.*

Demonstração. Para $\rho > 0$, denotemos por χ_ρ a função característica da bola $B(0,\rho)$. Da Imersão Compacta do Teorema 10 de $H^s(B(0,\rho))$ em $L^2(B(0,\rho))$, segue que $u \mapsto \chi_\rho V u$ é um operador compacto de $H^s(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Agora, notemos que

$$\begin{aligned} ||Mu - \chi_\rho V u||_{L^2}^2 &= \int_{|x|>\rho} (V(x)u(x))^2 dx \leq sup_{|x|>\rho}|V(x)|^2 ||u||_{L^2}^2 \\ &\leq sup_{|x|>\rho}|V(x)|^2 ||u||_{H^s}^2. \end{aligned}$$

Assim, fazendo $\rho \to \infty$, temos $Mu \to Vu$, donde obtemos que $M : H^s \to L^2$ é o limite em $B(H^s, L^2)$ de uma sequência de operadores compactos, e portanto, é um operador compacto. $\square$

Lema 27. *Sejam $V \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $s \in (0,1)$ e l como definido em (4.20). Então $R(S_s - \lambda I)$ é um subespaço fechado de $L^2(\mathbb{R})$ para todo $\lambda < l$.*

Demonstração. Dado $u \in H^{2s}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$(S_s - \lambda I)u = (-\Delta)^s u + (V - l)^+ u - (V - l)^- u - (\lambda - l)u.$$

Pondo $Tu = (-\Delta)^s u + (V - l)^+ u$, para $u \in H^{2s}(\mathbb{R}^n)$, temos T autoadjunto, e como $(V - l)^+ > 0$ e $\Lambda \geq -||(V - l)^+||_{L^\infty} \geq 0$, segue que $\sigma(T) \subset [0, \infty)$. Assim, $T - (\lambda - l)I$ é isomorfismo para $\lambda < l$.

Além disso, como $\lim_{|x|\to\infty}(V(x)-l)^- = 0$, segue do Lema 26 que $M : H^s(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, dado por $Mu = (V-l)^- u$ (e como $H^{2s}(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n)$ segue que M também está definido em $H^{2s}(\mathbb{R}^n)$) é um operador compacto. Verificando que, para $\lambda < l$

$$S_s - \lambda I = (T - (\lambda - l)I)\{I - (T - (\lambda - l)I)^{-1}M\},$$

considerando $K = (T - (\lambda - l)I)^{-1}M : H^{2s}(\mathbb{R}^n) \to H^{2s}(\mathbb{R}^n)$, segue que K é compacto (pois $(T - (\lambda - l)I)^{-1}$ é limitado). Então do Teorema 31, $(I - K)H^{2s}(\mathbb{R}^n)$ é subespaço fechado de $H^{2s}(\mathbb{R}^n)$, e consequentemente $R(S - \lambda I) = (T - (\lambda - l)I)(I - K)H^{2s}(\mathbb{R}^n)$ é fechado em $L^2(\mathbb{R}^n)$. □

Lema 28. *Se P é projeção, então $(I - P)(H) \perp P(H)$.*

Demonstração. Com efeito, tome $v \in (I - P)(H)$, então $v = (I - P)w = w - Pw$, para algum $w \in H$. Tomando $u \in P(H)$ arbitrário, vale que $u = Pu$. Assim

$$\langle v, u\rangle = \langle w - Pw, Pu\rangle = \langle Pw - P^2 w, u\rangle = 0$$

pois $P = P^2$. □

Lema 29. *Sejam $V \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $s \in (0, 1)$. Para $\epsilon > 0$, seja X o subespaço de $H^s(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{s/2}u(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} V(x)u(x)^2 dx \leq (l - \epsilon)\int_{\mathbb{R}^n} u(x)^2 dx, \quad \forall u \in X. \tag{4.21}$$

Então $dimX < \infty$

Demonstração. Como a aplicação $u \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{s/2}u(x)|^2 dx + \int V(x)u(x)^2 dx$ e $u \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} u(x)^2 dx$ são contínuas sobre $H^s(\mathbb{R}^n)$, segue que (4.21) também vale para $\overline{X}$, donde podemos considerar sem perda de generalidade, que X é fechado em $H^s(\mathbb{R}^n)$. Agora, para provar que $dimX < \infty$, precisamos apenas mostrar que dada uma sequência genérica $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, tal que $||u_n||_{H^s} = 1$ possui subsequência convergindo fortemente em $H^s(\mathbb{R}^n)$. Passando para uma subsequência se necessário, podemos admitir, através do Teorema 30, que $u_n \rightharpoonup u$, para algum $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Usando o Lema 28, onde P é a projeção sobre X, temos $\langle (I - P)u, u_n\rangle = 0$. Assim, usando novamente o Lema 28

$$\begin{aligned} ||u - Pu||^2 &= \langle (I - P)u, (I - P)u\rangle = \langle (I - P)u, u\rangle - \langle (I - P)u, Pu\rangle \\ &= \langle (I - P)u, u\rangle = \langle (I - P)u, u\rangle - \langle (I - P)u, u_n\rangle \\ &= \langle (I - P)u, u - u_n\rangle \to\ 0 \end{aligned}$$

donde $u = Pu \in X$.

Agora, da definição de l, existe $R > 0$ tal que

$$V(x) \geq l - \epsilon/2, \ \text{para } |x| \geq R.$$

Além disso, da imersão compacta $H^s(B_R)$ em $L^2(B_R)$ do Teorema 10, segue que

$$\int_{|x|\leq R}(u_n-u)(x)^2dx \to 0.$$

Escrevendo

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\epsilon}{2}\int_{|x|\geq R}(u_n-u)(x)^2dx + \int_{\mathbb{R}^n}|(-\Delta)^{s/2}(u-u_n)(x)|^2dx \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}\int_{|x|\geq R}(u_n-u)(x)^2dx + (l-\epsilon)\int_{\mathbb{R}^n}(u_n-u)(x)^2dx - \int_{\mathbb{R}^n}V(x)(u_n-u)(x)^2dx \\
&\leq \int_{|x|\geq R}(l-\epsilon/2-V(x))(u_n-u)(x)^2dx + \int_{|x|\leq R}(l-\epsilon-V(x))(u_n-u)(x)^2dx \\
&\leq \int_{|x|\leq R}(l-\epsilon-V(x))(u_n-u)(x)^2dx \\
&\leq (l+||V||_{L^\infty})\int_{|x|\leq R}(u_n-u)(x)^2dx,
\end{aligned}$$

obtemos que $||u_n-u||_{H^s}$ converge para 0. Com efeito,

$$\begin{aligned}
||u_n-u||_{H^s} &= \int_{\mathbb{R}^n}(u_n-u)(x)^2dx + \int_{\mathbb{R}^n}|(-\Delta)^{s/2}(u-u_n)(x)|^2dx \\
&= \int_{|x|\leq R}(u_n-u)(x)^2dx + \int_{|x|\geq R}(u_n-u)(x)^2dx + \int_{\mathbb{R}^n}|(-\Delta)^{s/2}(u-u_n)(x)|^2dx \\
&\leq \int_{|x|\leq R}(u_n-u)(x)^2dx + C(l+||V||_{L^\infty})\int_{|x|\leq R}(u_n-u)(x)^2dx \to 0
\end{aligned}$$

como desejávamos. □

Teorema 15. *Sejam* $V \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e* $s \in (0,1)$. *Então* $\sigma_{ess}(S_s) \subset [l,\infty]$.

Demonstração. Tomemos $\lambda < l$, e mostremos que $\lambda \notin \sigma_{ess}(S_s)$, ou seja, mostremos que $\lambda \in \rho(S_s)\cup\sigma_d(S_s)$. Pelo Lema 27, sabemos que $R(S_s-\lambda I)$ é subespaço fechado de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Então $R(S_s-\lambda I) = [\mathcal{N}(S_s-\lambda I)]^\perp$. Assim, se $\lambda \notin \sigma_p(S_s)$, segue que $\mathcal{N}(S_s-\lambda I) = 0$, donde concluímos que $R(S_s-\lambda I)$ é todo o espaço $L^2(\mathbb{R}^n)$, e temos uma bijeção, e assim, $\lambda \in \rho(S_s)$.

Se $u \in \mathcal{N}(S_s-\lambda I)$, então $(-\Delta)^s u + Vu = \lambda u$, donde

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}((-\Delta)^s u(x))u(x) + V(x)u(x)^2dx = \lambda\int_{\mathbb{R}^n}u(x)^2dx \\
&\Rightarrow \langle(-\Delta)^s u,u\rangle + \langle Vu,u\rangle = \langle\lambda u,u\rangle \\
&\Rightarrow \langle(-\Delta)^{s/2}u,(-\Delta)^{s/2}u\rangle + \langle Vu,u\rangle = \lambda\langle u,u\rangle \\
&\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n}|(-\Delta)^{s/2}u(x)|^2 + Vu(x)^2dx = \int_{\mathbb{R}^n}\lambda u(x)^2dx,
\end{aligned}$$

e aplicando o Lema 29 ao $\mathcal{N}(S_s-\lambda I)$, temos $dim\mathcal{N}(S_s-\lambda I) < \infty$.

Agora, tomamos $\xi < l$, e mostremos que $\sigma(S_s)\cap(-\infty,\xi]$ contém, no máximo, um número finito de pontos. Se isto nao ocorresse, existiria uma sequência $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$, tal que

$$\lambda_i \in \sigma(S_s)\cap(-\infty,\xi],\ \ \lambda_i \neq \lambda_j,\ \ i\neq j.$$

Do Teorema 13, temos $\lambda_i \leq \Lambda$, e além disso, temos $\lambda_i \in \sigma_p(S_s)$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Assim, podemos construir uma sequência de autovetores $\{e_i\}$, tais que

$$e_i \in \mathcal{N}(S_s - \lambda_i I) \ \ ||e_i||_{L^2} = 1 \ \ e_i \perp e_j = 0 \ \ i, j \in \mathbb{N} \ \ i \neq j.$$

Definindo $X = span\{e_i\}$, temos $dim X = \infty$. Por outro lado, dado $u \in X$, podemos decompor

$$u = \sum_{i=1}^{k} c_i e_i$$

Assim, tomando $u \in X$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{s/2} u(x)|^2 + V u(x)^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} ((-\Delta)^s u(x)) u(x) + V u(x)^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (S_s u(x)) u(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i=1}^{k} c_i \lambda_i e_i(x) \right) \left(\sum_{j=1}^{k} c_j e_j(x) \right) dx \\
&= \sum_{i,j=1}^{k} \lambda_i c_i c_j \int_{\mathbb{R}^n} e_i(x) e_j(x) dx \\
&= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c_i^2 \leq \xi \sum_{i=1}^{k} c_i^2 = \xi \int_{\mathbb{R}^n} u(x)^2 dx
\end{aligned}$$

Novamente, pelo Lema 29, obteríamos que $dim X < \infty$, uma contradição. Temos então que $\sigma(S_s) \cap (\infty, \xi]$ não pode conter um número infinito de pontos, e portanto, o espectro de S_s no intervalo $(-\infty, \xi]$ é discreto, para todo $\xi < l$, e isto termina a prova. $\square$

Corolário 5. *(Da Demonstração) Sejam $V \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $s \in (0, 1)$. Então $\sigma_d(S_s) \cap (-\infty, l)$ é um conjunto finito.*

Demonstração. Basta notar que durante a prova do Teorema 15 mostramos que, para um dado $\xi < l$, $\sigma(S_s) \cap (-\infty, \xi)$ contém, no máximo, um número finito de pontos, e mais ainda, $\sigma(S_s) \cap (-\infty, \xi) = \sigma_p(S_s) \cap (-\infty, \xi)$ (pois $\sigma_{ess}(S_s) \subset [l, \infty)$). Portanto, como $\sigma_d(S_s) \subset \sigma_p(S_s)$, segue que $\sigma_d(S) \cap (-\infty, \xi)$ é um conjunto finito de pontos. $\square$

5 EQUAÇÃO FRACIONÁRIA DE SCHRÖDINGER ASSINTOTICAMENTE LINEAR COM GAP NO ESPECTRO

Consideremos a equação

$$(-\Delta)^s u + V(x)u = g(x,u), \quad \text{em } \mathbb{R}^n,\ n \geq 2 \tag{5.1}$$

em que $g(x,s) = h(x)f(s)$, com as hipóteses

(h_1) $h \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$, $q = \dfrac{2_s^*}{2_s^* - p}$, para $p \in (2, 2_s^*)$ e $h > 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^n$;

(f_1) $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $\displaystyle\lim_{s\to 0} \frac{f(s)}{s} = 0$;

(f_2) Existe $a > 0$, com $\displaystyle\lim_{|s|\to\infty} \frac{F(s)}{s^2} = \frac{a}{2}$, onde $F(s) := \displaystyle\int_0^s f(t)dt$, e $F(s) \geq 0$;

(f_3) Denotando $Q(s) := \frac{1}{2}f(s)s - F(s) > 0, s \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{s\to\infty} Q(s) = \infty$;

(V_1) $V \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e $\displaystyle\lim_{|x|\to\infty} V(x) = V_\infty > 0$;

(V_2) $\sup[\sigma(S_s) \cap (-\infty, 0)] = \sigma^- < 0 < \sigma^+ = \inf[\sigma(S_s) \cap (0, \infty)]$.

Observemos inicialmente que o conjunto de potenciais $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisfazem (V_1) e (V_2) é não vazio. Com efeito, considerando o potencial dado por

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{se } |x| < 1 \\ V_\infty & \text{se } |x| \geq 2 \end{cases}$$

com $V_0 > \lambda_1$, onde λ_1 é a constante do Teorema 35 para $\Omega = B_1(0)$ e $K(x) = |x|^{-(n+2s)}$ (a menos de uma constante de normalização). Ainda do Teorema 35, existe $e_1 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ tal que $e_1|_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)} = 0$. Assim

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{s/2} e_1(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} V(x) e_1(x)^2 dx = \lambda_1 - V_0 = C < 0.$$

Utilizando o Lema 25 e o Teorema 13, segue que o espectro de $\sigma(S_s)$ tem algum elemento não negativo. Usando tambem o Corolário 5 temos apenas um número finito de pontos entre o limite inferior do espectro e V_∞, donde satisfazemos ambas as hipóteses sobre V.

Observemos ainda que a hipótese (f_2) está associada, em um certo sentido com o comportamento assintótico de f no infinito. Com efeito, notemos que

$$\lim_{|s|\to+\infty} F(s) = \lim_{|s|\to+\infty} \frac{F(s)}{s^2} s^2 = +\infty,$$

e aplicando a regra de L'Hôpital

$$\frac{a}{2} = \lim_{|s|\to+\infty} \frac{F'(s)'}{s^2} = \lim_{|s|\to+\infty} \frac{f(s)}{2s},$$

ou seja, $\lim_{|s|\to+\infty} \frac{f(s)}{s} = a$, que justifica o termo "assintonticamente linear".

Quanto à busca por soluções, heuristicamente, estaremos interessados em buscar por soluções fracas de (5.1). Comecemos então a formalizar as ideias. Inicialmente, vamos definir o funcional energia associado à (5.1), dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left(|(-\Delta)^{s/2}u(x)|^2 + V(x)u(x)^2\right) dx - \int_{\mathbb{R}^n} h(x)F(u(x))dx, \ \forall u \in H^s(\mathbb{R}^n). \quad (5.2)$$

Assim, a partir destas definições, estamos interessados em provar a existência de ponto crítico para o funcional I. Para esta finalidade, usaremos o Teorema de Linking 16, que promove condições suficientes para a existência de pontos críticos. Por completude, tratemos de enunciá-lo, bem como a estrutura necessária para sua compreensão mínima.

5.1 INTERLÚDIO SOBRE O TEOREMA DE LINKING

Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, tal que existam subespaços E_1 e E_2 satisfazendo $\mathcal{H} = E_1 \oplus E_2$ e P_1, P_2 as projeções sobre E_1 e E_2, respectivamente. Ainda, dada uma aplicação $\phi : [0,1] \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ denotaremos por $\phi_t(u) = \phi(t,u)$.

Para fixar notação, denotaremos por Σ o conjunto de aplicações

$$\Sigma = \{\phi \in C([0,1] \times \mathcal{H}, \mathcal{H}) : \ P_2\phi_t(u) = u_2 - W_t(u), \ \forall t \in [0,1] \ e \ \phi_0(u) = u\},$$

em quem $W_t : \mathcal{H} \to E_2$ é um operador compacto.

Por variedade de Hilbert de classe C^k, estaremos nos referindo a um subconjunto fechado $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ tal que existe uma função $f : \mathcal{O} \subset \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ de classe C^k, onde $\mathcal{O}$ é um aberto de $\mathcal{H}$, tal que $\mathcal{M} = f^{-1}(c)$, para algum $c \in \mathbb{R}$.

Definição 16. *Sejam S, Q variedades de Hilbert em $\mathcal{H}$, em que ∂Q é fronteira de Q. Dizemos que $S, \partial Q$ são linking se, sempre que $\phi \in \Sigma$ e $\phi_t(\partial Q) \cap S = \emptyset$, para todo $t \in [0,1]$, temos $\phi_t(Q) \cap S \neq \emptyset$, para todo $t \in [0,1]$.*

Definição 17. *Seja $I \in C^1(\mathcal{H}, \mathbb{R})$ um funcional. Dizemos que uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ é uma sequência de Cerami (do funcional I) se $sup_n I(u_n) < \infty$ e*

$$(1 + ||u_n||)||I'(u_n))|| \to 0, \quad \textit{quando } n \to \infty.$$

Além disso, no caso em que $I(u_n) \to c \in \mathbb{R}$, diremos que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cerami de nível c.

Agora, consideremos as condições

(Γ_1) $h_t(u) = U_t(u) + K_t(u)$, em que $U, K \in C([0,1] \times \mathcal{H}, \mathcal{H})$, U_t é um homeomorfismo de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{H}$ e K_t é um operador compacto, para cada $t \in [0,1]$;

(Γ_2) $U_0(u) = u$ e $K_0(u) = 0$;

(Γ_3) $P_i(U_t(u)) = U_t(P_i(u))$, para $i = 1, 2$;

(Γ_4) h_t mapeia conjuntos limitados em conjuntos limitados.

Definimos então o conjunto Γ como sendo

$$\Gamma = \{h \in C([0,1] \times \mathcal{H}, \mathcal{H}) : \; h \text{ satisfaz } (\Gamma_1) - (\Gamma_4)\}.$$

Além disso, para $h \in \Gamma$, denotaremos por $h_t^j(u)$ a j-ésima composição de h_t com ela mesma.

Temos então a linguagem (estritamente) necessária para enunciar o Teorema Abstrato de Linking.

Teorema 16. *([18], Teorema 2.3, p.5)*
Sejam E um espaço de Hilbert, E_1 subespaço fechado e $E_2 = E_1^{\perp}$, e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ tais que

(I_1) *$I(u) = \frac{1}{2}\langle Lu, u\rangle + B(u)$, para todo $u \in E$, em que $u = u_1 + u_2 \in E_1 \oplus E_2$, satisfazendo $Lu = L_1u_1 + L_2u_2$, onde $L_i : E_i \to E_i$ é operador linear, limitado e autoadjunto, para $i = \{1, 2\}$.*

(I_2) *B é fracamente contínuo e uniformemente diferenciável em subconjuntos limitados de E.*

(I_3) *Existem variedades de Hilbert $S, Q \subset E$, tais que Q é limitada com fronteira ∂Q e existem constantes $\alpha > w$ e um vetor $v \in E_2$, tais que*

  (i) *$S \subset v + E_1$ e $I(u) \geq \alpha$, para todo $u \in S$;*

  (ii) *$I(u) \leq w$, para todo $u \in \partial Q$;*

  (iii) *S e ∂Q são linking.*

(I_4) *Sejam*

$$c = \inf_{h\in\Lambda} \sup_{u\in\overline{Q}} I(h_1(u))$$

e

$$\Lambda = \left\{ h \in C([0,1] \times E, E) \;\middle|\; \begin{array}{l} h = h^{(1)} \circ \cdots \circ h^{(m)}, \text{ com } h^{(1)}, \cdots, h^{(m)} \in \Gamma; \\ h_t(\partial Q) \subset I^{\frac{\alpha+w}{2}-\beta}, \; \beta \in \left(0, \frac{\alpha-w}{2}\right) \end{array} \right\}$$

em que $I^{\lambda} = \{u \in E : I(u) \leq \lambda\}$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, e $h^{(1)}, ..., h^{(m)}$ são m elementos (diferentes ou não) de Γ. Se, para uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, existe uma constante $b > 0$ tal que $(u_n) \subset I^{-1}([c - b, c + b])$ e $(1 + ||u_n||)||I'(u_n)|| \to 0$, quando $n \to \infty$, então a sequência é limitada em E.

Então $c \geq \alpha$ e é valor crítico de I.

Por fim, para as nossas aplicações, precisaremos de mais um resultado técnico, a saber:

Lema 30. *([4], Lema 1.2, p.224)*
Sejam $e \in \partial B_1 \cap E_1$ *e* $r_1 > \rho > 0$. *Se* $Q = \{re, r \in [0, r_1]\} \oplus B_{r_2} \cap E_2$ *e* $S = \partial B_\rho \cap E_1$. *Então* S *e* ∂Q *são linking. Além disso,* $\partial Q = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3$, *onde*

$$Q_1 = \{0\} \oplus (E_2 \cap B_{r_2}), \; Q_2 = \{re, r \in [0, r_1]\} \oplus (E_2 \cap \partial B_{r_2}) \quad e \; Q_3 = \{r_1 e\} \oplus (E_2 \cap B_{r_2}). \tag{5.3}$$

5.2 DECOMPOSIÇÃO DO ESPAÇO

Vislumbrando aplicar o Teorema Abstrato de Linking 16, vamos decompor $H^s(\mathbb{R}^n)$, de forma que possamos operar adequadamente com funcionais sobre esses subespaços da decomposição. Um passo intermediário será provar uma equivalência entre duas normas relacionadas ao operador S_s. Tratemos de construir o ambiente para enunciar e provar a mencionada equivalência.

Dado $s \in (0, 1)$, consideremos S_s o operador de Schrödinger fracionário (de índice s). Como S_S é autoadjunto, sabemos, do Teorema Espectral 4, que existe uma medida espectral E_s (que por simplicidade, denotaremos por E), de forma que

$$S_s = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE.$$

Sabemos, a partir do cálculo funcional, que dada a função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|^{1/2}$, podemos construir o operador

$$A_s =: |S_s|^{1/2} = \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^{1/2} dE, \tag{5.4}$$

e, do Teorema 2, A_s possui como domínio o conjunto

$$D(A_s) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n); \int_{\mathbb{R}} |\lambda| d\langle E(\lambda)u, u\rangle < \infty\}. \tag{5.5}$$

Além disso, como S_s é autoadjunto, e f é real, segue da Proposição 16, item (iv), que $f(S_s) = A_s$ é autoadjunto, e consequentemente, é fechado. Do fato do operador A_s ser fechado, concluimos, a partir da Proposição 1 que o conjunto $E := D(A_s)$ é espaço de Hilbert quando visto como espaço vetorial munido do produto interno

$$\langle u, v\rangle_E = \langle u, v\rangle_{L^2} + \langle A_s u, A_s v\rangle_{L^2} \tag{5.6}$$

de norma

$$||u||_E = (||u||_{L^2}^2 + ||A_s u||_{L^2}^2)^{1/2} = \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + |\lambda|) d\langle E(\lambda)u, u\rangle \right)^{1/2}. \tag{5.7}$$

Fazendo $\mathbb{R} = \mathbb{R}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_+$, donde, denotando por $P_+ = \chi_{\mathbb{R}_+}$, $P_- = \chi_{\mathbb{R}_-}$ e $P_0 = \chi_0$ e usando a Proposição 16, item (vi) sobre o cálculo funcional, temos $\chi_M = E(M)$ (recordando que $E(M)$ é uma projeção ortogonal no conjunto M), segue que as projeções P_+, P_- e P_0 são ortogonais, e mais ainda, como $\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-, \{0\}$ são conjuntos dois a dois disjuntos, segue do Lema 11 que P_+, P_-, P_0 são ortogonais entre si. Notemos por fim que, da aditividade das medidas espectrais, segue que $I = E(\mathbb{R}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_-) = P_+ + P_- + P_0$. Assim, temos ainda a decomposição de E naturalmente dada por

$$E = E_+ \oplus E_- \oplus E_0 \tag{5.8}$$

onde $E_+ = P_+(E)$, $E_- = P_-(E)$ e $E_0 = P_0(E)$.

Lema 31. *Os espaços E_+, E_-, E_0 são invariantes por A_s, ou seja, $A_s(E_i) \subset E_i$, para $i \in \{-, 0, +\}$.*

Demonstração. Observemos inicialmente que, da Proposição 14, dado $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, decorre que, como $E(M)$ comuta com E (no sentido de comutar com todas as projeções $E(N)$, $N \in \mathcal{U}$), segue que

$$P_i A_s = E(M) A_s \subset A_s E(M) = A_s P_i, \quad i \in \{+, -, 0\}.$$

Assim, dado $u \in E_i$, então $u = P_i u$, segue que

$$P_i A_s u = P_i A_s P_i u = A_s P_i^2 u = A_s P_i u = A_s u, \quad \forall i \in \{+, 0, -\},$$

ou seja, $P_i A_s u = A_s u$, para $i \in \{+, 0, -\}$, e segue a afirmação. $\square$

Lema 32. *Os subespaços vetoriais E_- e E_0 da decomposição* (5.8) *tem dimensão finita.*

Demonstração. Inicialmente, notemos que diante da hipótese (V_1), podemos aplicar o Corolário 5, obtendo, para $\mathbb{R}_- \cap \sigma(S_s) = \{\lambda_n\}_{n=1}^N$, uma sequência finita de autovalores, para algum $N \in \mathbb{N}$, e autovetores correspondentes $\{\varphi_n\}_{n=1}^{N'}$. Além disso, de acordo com o Teorema 15, $\sigma_{ess}(S_s) \subset [V_\infty, \infty) \subset (0, \infty)$. Mais ainda, de acordo com o Teorema 5, juntamente da Proposição 13, e concatenando as ideias

$$\begin{aligned} E(\mathbb{R}_-)(H^s(\mathbb{R}^n)) &= E(\sigma(S_s) \cap \mathbb{R}_-)(H^s(\mathbb{R}^n)) \\ &= E\left(\bigcup_{n=1}^N \{\lambda_n\}\right)(H^s(\mathbb{R}^n)) \\ &= \sum_{n=1}^N E(\{\lambda_n\})(H^s(\mathbb{R}^n)) \\ &= span\{\varphi_n\}_{n=1}^{N'}. \end{aligned}$$

Donde concluímos que $E_- = span\{\varphi_n\}_{n=1}^{N'}$.

Observemos também que, da hipótese (V_2), temos $0 \in (\sigma^-, \sigma^+)$, donde podemos concluir que 0 não é ponto de acumulação de $\sigma(S_s)$. De fato, tomando $\epsilon = min\{|\sigma^+|, |\sigma^-|\}$, segue que $\sigma(S_s) \cap (-\epsilon, 0) = \emptyset$ e $\sigma(S_s) \cap (0, \epsilon) = \emptyset$. Com efeito, para o primeiro caso, se existisse $u \in \sigma(S_s) \cap (0, \epsilon)$, então $sup[\sigma(S_s) \cap (-\infty, 0)] = \sigma^- < u$, o que é uma contradição. Assim, concluímos que 0 não é ponto de acumulação de $\sigma(S_s)$. Portanto, 0 é ponto isolado de $\sigma(S_s)$ ou 0 não pertence à $\sigma(S_s)$. Noutras palavras

$$0 \notin \sigma(S_s) \text{ ou } 0 \in \sigma_d(S_s). \tag{5.9}$$

Notemos que, se $0 \notin \sigma(S_s)$, segue que $E(\sigma(S_s) \cap \{0\}) = E(\emptyset) = 0$, e claramente $E_0 = E(\emptyset)(H^s(\mathbb{R}^n)) = \{0\}$. Caso $0 \in \sigma_d(S_s)$, da Proposição 13, segue que $E_0 = E(\{0\})(H^s(\mathbb{R}^n))$ é o espaço gerado pelos autovetores associados a 0, e como $0 \in \sigma_d(S_s)$, 0 tem multiplicidade finita, temos $dim(E_0) < \infty$. $\square$

Consideremos a norma $||\cdot||_X$ dada por

$$||u||_X = (||A_sP_+u||^2_{L^2} + ||A_sP_-u||^2_{L^2} + ||P_0u||^2_{L^2})^{1/2}. \tag{5.10}$$

Tratemos de verificar que $||\cdot||_X$ e $||\cdot||_E$ são equivalentes.

Proposição 20. *Sejam A_s o operador definido em* (5.4) *e $E = D(A_s)$ como definido em* (5.5). *Então as normas $||\cdot||_E$ e $||\cdot||_X$, como definidas em* (5.7) *e* (5.10), *respectivamente, são equivalentes.*

Demonstração. Mostremos inicialmente que, dado $u \in E$, $||u||_X \leq ||u||_E$. Com efeito, da decomposição (5.8) e do Lema 31, segue que

$$||u||^2_{L^2} = ||P_+u||^2_{L^2} + ||P_-u||^2_{L^2} + ||P_0u||^2_{L^2},$$

e

$$||A_su||^2_{L^2} = ||A_sP_+u||^2_{L^2} + ||A_sP_-u||^2_{L^2} + ||A_sP_0u||^2_{L^2},$$

donde decorre que

$$\begin{aligned} ||u||^2_X &= ||A_sP_+u||^2_{L^2} + ||A_sP_-u||^2_{L^2} + ||P_0u||^2_{L^2} \\ &\leq ||P_+u||^2_{L^2} + ||P_-u||^2_{L^2} + ||P_0u||^2_{L^2} + ||A_sP_+u||^2_{L^2} + ||A_sP_-u||^2_{L^2} + ||A_sP_0u||^2_{L^2} \\ &= ||u||_E. \end{aligned}$$

Reciprocamente, observemos que precisamos analisar dois casos:

(i) $0 \notin \sigma(S_s)$. Da Proposição 17, temos $0 \notin \sigma(A_s)$. Portanto, $0 \in \rho(A_s)$, de onde A_s^{-1} existe e é limitado. Assim, dado $u = u_- + u_+ + u_0 \in E$, segue que

$$\begin{aligned} ||u||_{L^2} &= ||A_s^{-1}A_su||_{L^2} \leq ||A_s^{-1}||||A_su||_{L^2} \\ &\leq ||A_s^{-1}||(||A_su_+||_{L^2} + ||A_su_-||_{L^2}) \\ &\leq ||A_s^{-1}||(||A_su_+||_{L^2} + ||A_su_-||_{L^2} + ||u_0||_{L^2}) \\ &= ||A_s^{-1}||(||A_sP_+u||_{L^2} + ||A_sP_-u||_{L^2} + ||P_0u||_{L^2}) \\ &\leq ||A_s^{-1}||||u||_X \end{aligned}$$

e combinando com

$$\begin{aligned}||A_s u||_{L^2} &\leq ||A_s P_+ u||_{L^2} + ||A_s P_- u||_{L^2} \\ &\leq ||A_s P_+ u||_{L^2} + ||A_s P_- u||_{L^2} + ||P_0 u||_{L^2} \\ &\leq ||u||_X\end{aligned}$$

segue imediatamente que $||u||_E^2 = ||u||_{L^2}^2 + ||A_s u||_{L^2}^2 \leq C||u||_X^2$.

(ii) Se $0 \in \sigma_d(S_s)$, então $dim E_0 < \infty$. Logo $A_s|_{E_0}$ é um operador contínuo, donde $||A_s|_{E_0}|| \leq a_0$ para algum a_0 real e positivo. Assim, se $u \in E_0$, segue que $u = P_0 u$, donde

$$\begin{aligned}||u||_E^2 &= ||u||_{L^2} + ||A_s u||_{L^2} \\ &\leq (1 + a_0)||u||_{L^2}^2 \\ &\leq (1 + a_0)||P_0 u||_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Consideremos agora o operador S_s restrito ao conjunto $E_- \oplus E_+$, e como os espaços E_+ e E_- são invariantes por S_s, podemos escrever $S_s|_{E_- \oplus E_+} : E_- \oplus E_+ \to E_- \oplus E_+$.

Afirmação: $0 \notin \sigma(S_s|_{E_- \oplus E_+})$, e além disso, $0 \notin \sigma(A_s|_{E_- \oplus E_+})$ (pela Proposição 17). Para provar esta afirmação, observemos inicialmente que $S_s|_{E_- \oplus E_+} : E_- \oplus E_+ \to L^2(\mathbb{R}^n)$ é injetivo. Com efeito, dado $v \in \mathcal{N}(S_s|_{E_- \oplus E_+})$, então $v = v_+ + v_-$, onde $v_- \in E_-$ e $v_+ \in E_+$. Assim

$$\begin{aligned}0 = S_s|_{E_- \oplus E_+} v &= S_s|_{E_- \oplus E_+} v_+ + S_s|_{E_- \oplus E_+} v_- \\ \implies E_+ \ni S_s|_{E_- \oplus E_+} v_+ &= -S_s|_{E_- \oplus E_+} v_- \in E_-\end{aligned}$$

mas como $E_+ \cap E_- = \{0\}$, segue que $S_s|_{E_- \oplus E_+} v_+ = S_s|_{E_- \oplus E_+} v_- = 0$. Mais ainda, como $S_s|_{E_- \oplus E_+} u = S_s u$, para $u \in E_- \oplus E_+$, segue que $S_s v_- = S_s v_+ = 0$, donde $v_-, v_+ \in \mathcal{N}(S_s) = E_0$. Novamente, como $v_- \in E_- \cap E_0 = \{0\}$ e $v_+ \in E_+ \cap E_0 = \{0\}$, segue que $v = v_- + v_+ = 0$. Portanto, $S_s|_{E_- \oplus E_+}$ é injetivo.

Mostremos que $S_s|_{E_- \oplus E_+}$ é autoadjunto. Notando que, de S_s ser simétrico, segue que $S_s|_{E_- \oplus E_+}$ é simétrico, resta mostrar que $S_s|_{E_- \oplus E_+} - iI$ e $S_s|_{E_- \oplus E_+} + iI$ são sobrejetivos. Dado $v \in E_- \oplus E_+$, segue do fato de S_s ser autoadjunto que $S_s - iI$ é sobrejetiva, donde existe $u \in E$ tal que $(S_s - iI)u = v$. Como $P_i S_s \subset S_s P_i$ para $i \in \{+, -, 0\}$, segue que $(S_s|_{E_- \oplus E_+} - iI)(P_- + P_+)u = (S_s - iI)(P_- + P_+)u = (P_- + P_+)v = v$, e segue que $(S_s|_{E_- \oplus E_+} - iI)$ é sobrejetiva. O mesmo argumento vale para $(S_s|_{E_- \oplus E_-} + iI)$. Assim, $S_s|_{E_- \oplus E_+}$ é autoadjunto, e consequentemente fechado. Portanto, podemos definir (apenas onde $S_s|_{E_- \oplus E_+}$ é sobrejetivo) a inversa de $(S_s|_{E_- \oplus E_+})^{-1} : R(S_s|_{E_- \oplus E_+}) \to E_+ \oplus E_-$. De $S_s|_{E_- \oplus E_+}$ ser fechado, segue que $(S_s|_{E_- \oplus E_+})^{-1}$ é fechado, e então, do Teorema do Gráfico Fechado, $(S_s|_{E_- \oplus E_+})^{-1}$ é limitado, donde $0 \notin \sigma(S_s|_{E_- \oplus E_+})$, como desejávamos.

A partir desta afirmação, notemos que $0 \in \rho(A_s|_{E_- \oplus E_+})$, donde existe $(A_s|_{E_- \oplus E_+})^{-1}$ e tal operador é limitado, $||(A_s|_{E_- \oplus E_+})^{-1}|| \leq a_0$. Assim, para $u = u_- + u_+ \in E_- \oplus E_+$

segue que

$$\begin{aligned}||u||_{L^2} &= ||A_s^{-1}|_{E_-\oplus E_+}A_s|_{E_-\oplus E_+}u||_{L^2} \\ &\leq ||A_s^{-1}|_{E_-\oplus E_+}||(||A_s|_{E_-\oplus E_+}u_-||_{L^2} + ||A_s|_{E_-\oplus E_+}u_+||_{L^2}) \\ &= ||A_s^{-1}|_{E_-\oplus E_+}||(||A_s|_{E_-\oplus E_+}P_-u||_{L^2} + ||A_s|_{E_-\oplus E_+}P_+u||_{L^2}) \\ &\leq a_0(||A_sP_+u||_{L^2} + ||A_sP_-u||_{L^2})\end{aligned}$$

e de forma inteiramente análoga ao caso (i), segue que $||A_su||_{L^2} \leq ||A_sP_+u||_{L^2} + ||A_sP_-u||_{L^2}$. Para $u \in E_+ \oplus E_-$, segue que

$$\begin{aligned}||u||_E &= ||u||_L^2 + ||A_su||_{L^2} \\ &\leq (a_0+1)(||A_SP_+u||_{L^2} + ||A_SP_-u||_{L^2}).\end{aligned}$$

Por fim, dado $u \in E$, $u = u_0 + u'$, onde $u_0 \in E_0$, e $u' \in E_- \oplus E_+$, e então

$$\begin{aligned}||u||_E &= ||u_0||_E + ||u'||_E \\ &\leq (1+a_0)(||A_sP_+u||_{L^2} + ||A_sP_-u||_{L^2} + ||P_0u||_{L^2}),\end{aligned}$$

como desejávamos. □

Neste contexto, podemos enunciar o ponto mais importante desta seção:

Proposição 21. *O conjunto $E = D(A_s)$ coincide com o espaço de Sobolev Fracionário $H^s(\mathbb{R}^n)$ e, também, $||\cdot||_X$ é equivalente à norma $||\cdot||_{H^s}$. Além disso, vale também que*

$$||P_+u||_X^2 - ||P_-u||_X^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{s/2}u(x)|^2 + V(x)u(x)^2dx, \;\; \forall u \in H^s(\mathbb{R}^n). \tag{5.11}$$

Demonstração. A prova será construída da seguinte maneira: vamos construir uma norma auxiliar $||\cdot||_M$, a qual mostraremos sua equivalência com $||\cdot||_E$ e com $||\cdot||_{H^s}$, donde, da transitividade das equivalências concluiremos que $||\cdot||_E$ e $||\cdot||_{H^s}$ são equivalentes. Por fim, da equivalência entre $||\cdot||_X$ e $||\cdot||_E$, o resultado estará provado.

Comecemos então construindo a norma $||\cdot||_M$. Consideremos $-M := inf_{x\in\mathbb{R}}V(x)$, donde, do item (i) do Lema 25, combinado com o item (i) do Teorema 13, nos dá que $\sigma(S_s) \subset [-M, \infty)$. Definimos o produto interno (e consequentemente a norma)

$$\langle u,v\rangle_M = \langle u,v\rangle_{L^2} + \int_{\sigma(S_s)}(\lambda+2M)d\langle E(\lambda)u,v\rangle, \quad \forall u,v \in E, \tag{5.12}$$

donde temos a norma

$$||u||_M^2 = ||u||_{L^2}^2 + \int_{\sigma(S_s)}(\lambda+2M)d\langle E(\lambda)u,u\rangle. \tag{5.13}$$

Podemos então escrever

$$\begin{aligned}||u||_M^2 = ||u||_{L^2}^2 &+ \int_{\lambda\in\sigma(S_s),\lambda>0}(\lambda+2M)d\langle E(\lambda)u,u\rangle + \int_{\lambda\in\sigma(S_s),\lambda<0}(\lambda+2M)d\langle E(\lambda)u,u\rangle \\ &+ \left(\int_{\lambda\in\sigma(S_s),\lambda<0} -\lambda d\langle E(\lambda)u,u\rangle - \int_{\lambda\in\sigma(S_s),\lambda<0} -\lambda d\langle E(\lambda)u,u\rangle\right)\end{aligned},$$

e, reagrupando os termos, obtemos

$$\begin{aligned}||u||_M^2 = ||u||_{L^2}^2 + \int_{\lambda\in\sigma(S_s)} |\lambda| d\langle E(\lambda)u,u\rangle \\ + \int_{\lambda\in\sigma(S_s),\lambda>0} 2Md\langle E(\lambda)u,u\rangle + \int_{\lambda\in\sigma(S_s),\lambda<0}(2\lambda+2M)d\langle E(\lambda)u,u\rangle.\end{aligned}$$

É imediato que $||u||_E^2 \leq ||u||_M^2$. Agora, como $-M \leq \lambda$ para $\lambda < 0,\ \lambda \in \sigma(S_s)$, decorre que $2M(1-\lambda) > 2M > 2M + 2\lambda$, quando $\lambda < 0,\ \lambda \in \sigma(S_s)$. Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned}\int_{\lambda\in\sigma(S_s),\lambda<0}(2M+2M|\lambda|)\langle E(\lambda)u,u\rangle &= \int_{\lambda\in\sigma(S_s),\lambda<0}(2M+2M(-\lambda))\langle E(\lambda)u,u\rangle \\ &= \int_{\lambda\in\sigma(S_s),\lambda<0}(2M(1-\lambda))\langle E(\lambda)u,u\rangle \\ &\geq \int_{\lambda\in\sigma(S_s),\lambda<0}(2M+2\lambda)\langle E(\lambda)u,u\rangle.\end{aligned} \tag{5.14}$$

Somando $||u||_{L^2}^2 + \int_{\sigma(S_s)} |\lambda|\langle E(\lambda)u,u\rangle + \int_{\lambda\in\sigma(S_s),\lambda>0} 2Md\langle E(\lambda)u,u\rangle$ em ambos os lados de (5.14), obtemos $||u||_M^2 \leq (2M+1)||u||_E^2$. Segue que $||u||_E^2 \leq ||u||_M^2 \leq (2M+1)||u||_E^2$, noutras palavras, $||\cdot||_E$ é equivalente a $||\cdot||_M$.

Agora, tomando $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\begin{aligned}||\phi||_M^2 &= \int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle E(\lambda)u,u\rangle + (2M+1)||\phi||_{L^2}^2 \\ &= \langle S_s\phi,\phi\rangle + (2M+1)||\phi||_{L^2}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}(|(-\Delta)^{s/2}\phi(x)|^2 + V(x)\phi(x)^2 + (2M+1)\phi(x)^2)dx,\end{aligned}$$

donde existe constante $C > 0$ tal que

$$||\phi||_{H^s}^2 \leq ||\phi||_M^2 \leq C||\phi||_{H^s}^2, \ \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

ou seja, $||\cdot||_M$ define uma norma equivalente a $||\cdot||_{H^s}$ sobre $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Se H é o fecho de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ em relação a norma $||\cdot||_M$, podemos concluir que $H = H^s(\mathbb{R}^n)$. Porém, precisamos ainda concluir que $E = H^s(\mathbb{R}^n)$. Observemos inicialmente que, como $||\cdot||_E \leq ||\cdot||_M \leq C||\cdot||_E$, segue que $H \subset E$. Suponhamos, por contradição, que $H \neq E$, donde existiria $u_0 \in E$, $u_0 \neq 0$, tal que

$$\langle \phi, u_0\rangle_M = 0, \ \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

e portanto

$$0 = \langle S_s\phi, u_0\rangle_{L^2} + (2M+1)\langle \phi, u_0\rangle_{L^2} = \langle (S_s + (2M+1)I), u_0\rangle_{L^2}, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Porém, da densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ em $H^s(\mathbb{R}^n)$, obtemos que $u_0 \in D(S_s^*) = D(S_s)$, e mais ainda, $(S_s + (2M+1)I)u_0 = 0$. Mas isto significaria que $-(2M+1) \in \sigma(S_s)$, que contradiz o fato de $\sigma(S_s) \subset [-M,\infty)$, donde decorre que $E = H^s(\mathbb{R}^n)$.

Por fim, dado $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
||P_+\phi||_X^2 - ||P_-\phi||_X^2 &= \int_{\lambda>0} |\lambda| d\langle E(\lambda)u, u\rangle - \int_{\lambda<0} |\lambda| d\langle E(\lambda)u, u\rangle \\
&= \int_{\sigma(S_s)} \lambda d\langle E(\lambda)u, u\rangle = \langle S_s\phi, \phi\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (|(-\Delta)^{s/2}u(x)|^2 + V(x)u(x)^2)dx.
\end{aligned}$$

Da densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ em $H^s(\mathbb{R}^n)$, segue o resultado. $\square$

Da construção apresentada até aqui, segue imediatamente que podemos identificar $E_+ = (E_- \oplus E_0)^\perp$, tendo ainda a propriedade de $dim(E_- \oplus E_0) < \infty$. Por simplicidade, usaremos uma notação mais adequada para o contexto das próximas seções, onde $E_1 := E_+$ e $E_2 = E_0 \oplus E_-$.

Terminemos esta seção provando dois resultados técnicos oriundos da Teoria Espectral que utilizaremos na próxima seção.

Proposição 22. *Sejam u, v tais que $u \in E_+$ e $v \in E_-$. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^{s/2}u(x)(-\Delta)^{s/2}v(x) = 0. \tag{5.15}$$

Demonstração. Observemos inicialmente que, dados $u \in E_+$ e $v \in E_-$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\lambda>0} \lambda d\langle E(\lambda)u, v\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \lambda\chi_{\mathbb{R}_+}(\lambda) d\langle E(\lambda)u, v\rangle \\
&= \langle P_+Au, v\rangle \\
&= \langle Au, P_+v\rangle = 0.
\end{aligned}$$

e além disso,

$$\begin{aligned}
\int_{\lambda<0} \lambda d\langle E(\lambda)u, v\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \lambda\chi_{\mathbb{R}_-}(\lambda) d\langle E(\lambda)u, v\rangle \\
&= \langle P_-Au, v\rangle \\
&= \langle Au, P_-v\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Observemos que $E_+ \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em E_+. Com efeito, da densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ em E, dado $\phi \in E_+$, de forma que $\phi \notin C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, e $\phi \neq 0$, existe sequência $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi_n \to \phi$ em E. Afirmamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n > n_0$, $\phi_n \in E_+$. Com efeito, suponhamos por absurdo que tal afirmação não seja válida, donde poderíamos construir uma subsequência ϕ_{n_k} de forma que $\phi_{n_k} \notin E_+$, ou seja, usando a decomposição $E = E_+ \oplus E_- \oplus E_0$, poderíamos escrever $\phi_{n_k} = \phi_{n_k,-} + \phi_{n_k,0}$, e, como $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para ϕ (em E), a subsequência $(\phi_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$ também detem esta propriedade. Portanto

$$||\phi||^2 = \lim_{n\to\infty} \langle \phi, \phi_{n_k}\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \phi, \phi_{n_k,0}\rangle + \lim_{n\to\infty} \langle \phi, \phi_{n_k,-}\rangle = 0,$$

o que é uma contradição, pois assumimos $\phi \neq 0$. Assim, se $\phi \in E_+ \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $v \in E_-$, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}((-\Delta)^{s/2}\phi(x)(-\Delta)^{s/2}v(x) + V(x)\phi(x)v(x))dx &= \int_{\mathbb{R}^n}((-\Delta)^s\phi(x)v(x) + V(x)\phi(x)v(x))dx \\ &= \langle S_s\phi(x), v(x)\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle E(\lambda\phi), v\rangle \\ &= \int_{\lambda>0} \lambda d\langle E(\lambda\phi), v\rangle + \int_{\lambda<0} \lambda d\langle E(\lambda\phi), v\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Por fim, de um argumento de densidade, segue o resultado. □

Proposição 23. *Sob as hipóteses* (V_1) *e* (V_2)*, temos*

(*i*)

$$\inf_{u\in E_1, u\neq 0} \frac{||u||_X^2}{||u||_{L^2}^2} \geq \sigma^+ > 0 \tag{5.16}$$

(*ii*) *Seja* $a_0 = \inf_{u\in E_1, u\neq 0} ||u||_X^2/||h^{1/2}u||_{L^2}^2$. *Então*

$$||u||_X^2 \geq a_0 \int_{\mathbb{R}^n} h(x)u^2(x)dx, \ \ \forall u \in E_1 \tag{5.17}$$

e $a_0 > 0$.

Demonstração. (i) Tome $u \in E_1 \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = E_+ \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ não nulo. Existe $v \in E$ tal que $u = P_+v$. Como já argumentado no Lema 31, temos $P_+S_s \subset S_sP_+$. Da Proposição 21

$$\begin{aligned}||u||_X^2 = ||P_+u||_X^2 &= \int_{\mathbb{R}^n}(|(-\Delta)^{s/2}u(x)|^2 + V(x)u(x)^2)dx \\ &= \langle S_su, u\rangle = \langle S_sP_+v, P_+v\rangle = \langle P_+S_sP_+v, v\rangle \\ &= \langle S_sP_+^2v, v\rangle = \langle S_sP_+v, v\rangle \\ &= \langle S_s\chi_{\mathbb{R}_+}(S_s)v, v\rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda\chi_{\mathbb{R}_+} d\langle E(\lambda)v, v\rangle \\ &\geq \int_{\lambda>\sigma^+} \lambda d\langle E(\lambda)v, v\rangle \geq \sigma^+ \int_{\lambda>\sigma^+} d\langle E(\lambda)v, v\rangle \\ &= \sigma^+ \int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{R}_+} d\langle E(\lambda)v, v\rangle = \sigma^+\langle P_+v, v\rangle \\ &= \sigma^+\langle P_+^2v, v\rangle = \sigma^+\langle P_+v, P_+v\rangle = \sigma^+||P_+v||_{L^2}^2 \\ &= \sigma^+||u||_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Como já argumentado na Proposição 22, $E_+ \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em E_1. Finalizando, dado $u \in E_1$ não nulo, existe uma sequência $\phi_n \in E_+ \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, convergindo para u em E, satisfazendo $||\phi_n||_X^2/||\phi_n||_{L^2}^2 \geq \sigma^+$, e tomando o limite, $||u||_X^2/||u||_{L^2}^2 \geq \sigma^+$.

(ii) Da definição de a_0, é imediato que

$$||u||_X^2 \geq a_0||h^{1/2}u||_{L^2}^2 = a_0 \int_{\mathbb{R}} h(x)u(x)^2dx, \ \ \forall u \in E_1.$$

Mais ainda

$$||h^{1/2}u||_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} h(x)u(x)^2dx \leq ||h||_{L^\infty}||u||_{L^2}$$
$$\implies \frac{1}{||h^{1/2}u||_{L^2}^2} \geq \frac{1}{||h||_{L^\infty}||u||_{L^2}^2}$$

e obtemos

$$a_0 = \inf_{u\in E_1, u\neq 0} \frac{||u||_X^2}{||h^{1/2}u||_{L^2}^2} \geq \frac{1}{||h||_{L^\infty}} \left(\inf_{u\in E_1, u\neq 0} \frac{||u||_X^2}{||h^{1/2}u||_{L^2}^2} \right) \geq \frac{1}{||h||_{L^\infty}} \sigma^+ > 0, \tag{5.18}$$

como desejávamos. □

5.3 APLICAÇÃO DO TEOREMA DE LINKING

Nosso trabalho, a partir de agora, é provar que o funcional (5.2) satisfaz as hipóteses (I_1) - (I_4), do Teorema 16. Tratemos então de obter estas propriedades.

Proposição 24. *O funcional I definido em* (5.2) *satisfaz a* (I_1).

Demonstração. Consideremos os operadores $L_1 = P_+$ e $L_2 = -P_-$ e $L = L_1 + L_2$. Assim, dado $u \in E = H^s(\mathbb{R}^n)$, sabemos inicialmente que podemos escrever $u = u_1 + u_2$, onde $u_1 \in E_1$ e $u_2 \in E_2$. Observemos que

$$P_+(u) = P_+(u_1 + u_2) = P_+(u_1) + P_+(u_2) = P_+(u_1),$$

pois P_+ é projeção ortogonal em $E_+ = E_1$. Analogamente, como P_- é a projeção ortogonal em E_-, e $E_2 = E_0 \oplus E_-$ segue que

$$P_-(u) = P_-(u_1 + u_2) = P_-(u_1) + P_-(u_2) = P_-(u_2).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\langle Lu, u\rangle &= \langle L_1u + L_2u, u\rangle \\
&= \langle P_+(u), u_1 + u_2\rangle + \langle -P_-(u), u_1 + u_2\rangle \\
&= \langle P_+(u), u_1\rangle + \langle P_+(u), u_2\rangle + \langle -P_-(u), u_1\rangle + \langle -P_-(u), u_2\rangle \\
&= \langle P_+(u), u_1\rangle - \langle P_-(u), u_2\rangle \\
&= \langle P_+(u), P_+(u_1)\rangle - \langle P_-(u), P_-(u_2)\rangle \\
&= \langle P_+(u), P_-(u)\rangle - \langle P_-(u), P_-(u_2)\rangle \\
&= ||P_+(u)||^2 - ||P_-(u)||^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(|(-\Delta)^{s/2}u(x)|^2 + V(x)u(x)^2 \right) dx,
\end{aligned}$$

onde a última igualdade é consequência da Proposição 21. Assim, tomando

$$B(u) = -\int_{\mathbb{R}^n} h(x)F(u(x))dx, \tag{5.19}$$

temos

$$I(u) = \frac{1}{2}\langle Lu, u\rangle + B(u)$$

e o resultado está provado. $\square$

Para provarmos que I satisfaz (I_2), comecemos com um resultado técnico sobre o comportamento das funções f e F.

Lema 33. *Sejam f, F como em (f_1) e (f_2). Então valem*

(i) Existe $k > 0$ tal que $|f(s)| \leq k|s|$, para todo $s \in \mathbb{R}$;

Além disso, dado $\epsilon > 0$ e $2 < p < 2_s^*$, existe $C_\epsilon > 0$ tal que

(ii) $|f(s)| \leq \epsilon|s| + C_\epsilon|s|^{p-1}$;

(iii) $|F(s)| \leq \frac{\epsilon}{2}|s|^2 + \frac{C_\epsilon}{p}|s|^p$;

(iv) Dado $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $|f(u)|^2 \in L^{\frac{2_s^*}{p}}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Para provar (i), observemos inicialmente que, de (f_2), obtemos

$$\lim_{|s|\to+\infty} F(s) = \lim_{|s|\to+\infty} \frac{F(s)}{s^2}s^2 = +\infty,$$

e aplicando a regra de L'Hopital, concluímos que

$$\frac{a}{2} = \lim_{|s|\to+\infty} \frac{(F(s))'}{(s^2)'} = \lim_{|s|\to+\infty} \frac{f(s)}{2s}.$$

Então, dado $\epsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que se

$$\frac{|f(s)|}{|s|} < a + \epsilon, \quad \text{para } |s| > M. \tag{5.20}$$

Além disso, de (f_1), existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{|f(s)|}{|s|} < \epsilon, \quad \text{para } |s| < \delta \tag{5.21}$$

Observemos então que temos uma limitação para $|f(s)/s|$ nos conjuntos $(-\delta, \delta)$ e $(-\infty, -M) \cup (M, \infty)$. Suponhamos por simplicidade que $M > \delta$ (caso isto não ocorra, já temos então uma limitação de $|f(s)/s|$ em toda a reta). Como $|f(s)/s|$ é contínua, é limitada no compacto $[-M, -\delta] \cup [\delta, M]$, digamos por uma constante c. Portanto, tomando $k = max\{c, \epsilon + a\}$, segue que $|f(s)| < k|s|$, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Para (ii), como em (i), dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que valem (5.20) e (5.21), e além disso, ainda, no mesmo argumento empregado em (i), no complementar de $(-\delta, \delta) \cup (-\infty, -M) \cup (M, \infty)$, temos $|f(s)| < k|s|$, donde

$$|f(s)| < \epsilon|s| + (a + \epsilon)|s| + k|s| \leq \epsilon|s| + C_\epsilon|s|^{p-1}, \ \forall s \in \mathbb{R}$$

onde usamos que $p > 1$ (pois $p > 2$), e tomamos C_ϵ como o máximo entre k e $(a+\epsilon)$.

Para (iii), usando (ii), temos

$$|F(s)| \leq \int_0^s |f(t)|dt < \frac{\epsilon}{2}|s|^2 + \frac{C_\epsilon}{p}|s|^p, \ \forall s \in \mathbb{R},$$

como desejávamos.

Finalmente, para (iv), temos, a partir de (i)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f(u(x))|^{2\frac{2_s^*}{p}} dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (k|u(x)|)^{2\frac{2_s^*}{p}} dx \\ &= k^{2\frac{2_s^*}{p}} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{2\frac{2_s^*}{p}} dx \\ &= k||u||_{L^{2\frac{2_s^*}{p}}}^{2\frac{2_s^*}{p}} \leq K||u||_{H^s}\end{aligned}$$

onde no último passo, utilizamos da imersão contínua $H^s(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^{2\frac{2_s^*}{p}}(\mathbb{R}^n)$ (Teorema 9), e do fato de, que para $2 < p < 2_s^*$, vale $2 < 2\frac{2_s^*}{p} < 2_s^*$. $\square$

Observemos que o Teorema 16 tem como hipótese inicial de que o funcional I deve ser diferenciável, com derivada contínua. Verifiquemos tal fato.

Lema 34. *O funcional energia I definido em* (5.2) *é $C^1(H^s(\mathbb{R}^n), \mathbb{R})$ e verifica*

$$I'(u)v = \int_{\mathbb{R}^n} \Big((-\Delta)^{s/2}u(x)(-\Delta)^{s/2}v(x) + V(x)u(x)v(x)\Big)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} h(x)f(v(x))dx.$$

Demonstração. Observemos inicialmente que podemos separar o funcional I definido em (5.2) em dois funcionais

$$Q(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \Big(|(-\Delta)^{s/2}u(x)|^2 + V(x)u(x)^2\Big)\,dx$$

e

$$B(u) = -\int_{\mathbb{R}^n} h(x)F(u(x))dx.$$

Já provamos no Lema 24 que o funcional Q é $C^1(H^s(\mathbb{R}^n), \mathbb{R})$. Assim, resta provar apenas que o funcional B também é.

Comecemos tomando $t \in (0,1)$ e $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrários, $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$, e definindo $l : [0,1] \to \mathbb{R}$ por $l(s) = h(x)F(u + stv)$. Observemos que $l'(s) = h(x)f(u+stv)tv$, $l(0) = h(x)F(u)$ e $l(1) = h(x)F(u+tv)$. Do Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0,1)$ tal que $l(1) - l(0) = l'(\theta) = h(x)f(u+\theta tv)tv$, donde podemos reescrever

$$\left|\frac{h(x)F(u+tv) - h(x)F(u)}{t}\right| = |h(x)f(u+\theta tv))||v|.$$

Como, do Lema 33, existe $k > 0$ tal que $f(u) \leq k|u|$, podemos limitar $h(x)f(u+\theta tv)$ por uma função em $L^1(\mathbb{R}^n)$. Com efeito

$$\begin{aligned}|h(x)f(u+\theta tv)||v| &\leq ||h||_{L^\infty}|v||k||u+\theta tv| \\ &\leq k_1|u||v| + k_2|v|^2 \in L^1(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

Ainda, vale ressaltar que, da continuidade de f, se $t_n \to 0$, segue que $h(x)f(u(x) + t_n\theta v(x))v(x) \to h(x)f(u(x))v(x)$. Portanto, usando o Teorema da Convergência Dominada 20

$$\begin{aligned} B'(u)v &= \lim_{t\to 0} \frac{B(u+tv) - B(u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{h(x)F(u+tv) - h(x)F(u)}{t} dx \\ &= \lim_{n\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} h(x)f(u+\theta tv)vdx = \int_{\mathbb{R}^n} h(x)f(u)vdx. \end{aligned}$$

Mostremos agora que B' é contínuo. Para isto, tomemos $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^s(\mathbb{R}^n)$, tal que $u_n \to u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, e usando o Teorema das Imersões Contínuas 9, segue que $u_n \to u$ em $L^q(\mathbb{R}^n)$, para $2 \leq q \leq 2_s^*$. Assim, do Teorema de Vainberg 33, existe uma subsequência $(u_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ e uma função $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ tais que $u_{n_j}(x) \to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^n$ e $|u_{n_j}(x)| \leq g(x)$, q.t.p. em $\mathbb{R}^n$.

Prosseguindo, da continuidade de f, segue que $f(u_{n_j}(x)) \to f(u(x))$, q.t.p. em $\mathbb{R}^n$. Ainda, do Lema 33, existe $k > 0$ tal que $|f(u)| \leq k|u|$, donde

$$\begin{aligned} |f(u_{n_j}) - f(u)|^2 &\leq 2^2(|f(u_{n_j})| + |f(u)|^2) \\ &\leq C_1|u_{n_j}|^2 + C_2|u|^2 \\ &\leq C_1|g(x)|^2 + C_2|u|^2 \in L^1(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Assim, do Teorema da Convergência Dominada,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(u_{n_j}) - f(u)|^2 dx = ||f(u_{n_j}) - f(u))||_{L^2}^2 \to 0.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} |(B(u_{n_j}) - B(u))v| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} h(x)(f(u_{n_j}) - f(u))vdx \right| \\ &\leq ||h||_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f(u_{n_j}) - f(u)||v|dx \\ &\leq ||h||_{L^\infty} ||f(u_{n_j}) - f(u)||_{L^2} ||v||_{L^2} \to 0, \end{aligned}$$

donde concluímos a prova do resultado. □

Podemos então provar o seguinte resultado.

Proposição 25. *O funcional* I *definido em* (5.2) *satisfaz* (I_2).

Demonstração. Precisamos provar que B, definido em (5.19), é fracamente contínuo, e além disso, que é uniformemente diferenciável em subconjuntos limitados.

Provemos inicialmente que B é fracamente contínuo. Observemos que, da Definição 19, isto significa provar que, dada uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$, com $u_n \rightharpoonup u$, para algum $u \in E$, decorre que $B(u_n) \to B(u)$.

Assim, tomando $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E = H^s(\mathbb{R}^n)$, com $u \rightharpoonup u$, para algum $u \in E$, do Teorema das Imersões Compactas 10, temos (a menos de uma subsequência), $u_n \to u$ em $L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$ para $q \in [2, 2^*_s)$, donde, em particular, $u_n(x) \to u(x)$, q.t.p. em $\mathbb{R}^n$. Da continuidade de F, temos $F(u_n(x)) \to F(u(x))$, q.t.p. em $\mathbb{R}^n$.

Observemos que $|F(u_n)| \in L^{\frac{2^*_s}{p}}(\mathbb{R}^n)$, para $2 < p < 2^*_s$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, do item (iii) do Lema 33, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |F(u_n(x))|^{\frac{2^*_s}{p}} dx &\le \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\epsilon}{2}|u_n(x)|^2 + \frac{C_\epsilon}{p}|u_n(x)|^p \right|^{\frac{2^*_s}{p}} dx \\
&\le \epsilon^{\frac{2^*_s}{p}} \int_{\mathbb{R}^n} |u_n(x)|^{2\frac{2^*_s}{p}} dx + \left(2\frac{C_\epsilon}{p}\right)^{\frac{2^*_s}{p}} \int_{\mathbb{R}^n} |u_n(x)|^{2^*_s} dx \\
&\le K_1 ||u_n||^{2\frac{2^*_s}{p}}_{L^{2\frac{2^*_s}{p}}} + K_2 ||u||^{2^*_s}_{L^{2^*_s}}.
\end{aligned}
$$

Porém, do Teorema das Imersões Contínuas 9, segue que $H^s(\mathbb{R}^n)$ está imerso continuamente em $L^r(\mathbb{R}^n)$ com $2 \le r \le 2^*_s$, ou seja, existe $C_r > 0$ tal que $||u_n||_{L^r} \le C_r||u||_{H^s}$. Assim, notando que, de $2 < p < 2^*_s$ obtemos $2 < 2\frac{2^*_s}{p} < 2^*_s$, podemos limitar a inequação anterior

$$
\int_{\mathbb{R}^n} |F(u_n(x))|^{\frac{2^*_s}{p}} dx \le K_1 ||u_n||^{2\frac{2^*_s}{p}}_{H^s} + K_2 ||u||^{2^*_s}_{H^s} < \infty, \tag{5.22}
$$

e obtemos que $|F(u_n)| \in L^{\frac{2^*_s}{p}}(\mathbb{R}^n)$.

Agora, notemos que, como $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fracamente em E, $||u_n||_{H^s} < K$, para algum $K > 0$. Portanto, segue imediatamente disto e de (5.22) que a sequência $(F(u_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset L^{\frac{2^*_s}{p}}(\mathbb{R}^n)$ é limitada em $L^{\frac{2^*_s}{p}}(\mathbb{R}^n)$. Assim, da limitação de $(F(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ e da convergência pontual de $F(u_n(x))$ para $F(u(x))$, usando o Teorema de Brezies Lieb 32, temos

$$
F(u_n) \rightharpoonup F(u), \quad \text{em } L^{\frac{2^*_s}{p}}(\mathbb{R}^n).
$$

De (h_1), temos $h \in L^q(\mathbb{R}^n)$, onde $q = \frac{2^*_s}{2^*_s - p}$, donde q e $\frac{2^*_s}{p}$ são expoentes conjugados. Isto nos permite definir o funcional

$$
\begin{aligned}
\phi_h : L^{\frac{2^*_s}{p}}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
e &\longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} h(x)e(x)dx.
\end{aligned} \tag{5.23}
$$

Observemos que, da desigualdade de Holder, obtemos que ϕ_h é limitado

$$
|\phi_h(u)| \le \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)u(x)| dx \le ||u||_{L^{\frac{2^*_s}{p}}} ||h||_{L^q}.
$$

Para concluir a prova de que B é fracamente contínuo, basta notar que, a convergência fraca de $F(u_n)$ significa que, para qualquer funcional linear z definido em $L^{\frac{2^*_s}{p}}(\mathbb{R}^n)$ e limitado, vale que $z(F(u_n)) \to z(F(u))$, em particular, para ϕ_h, segue que

$$
B(u_n) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x)F(u_n(x))dx = \phi_h(F(u_n)) \to \phi(F(u)) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x)F(u(x))dx = B(u),
$$

como desejávamos.

Provemos agora a segunda parte do enunciado, ou seja, que B é uniformemente diferenciável em subconjuntos limitados. De forma mais explícita, dada a Definição 20 precisamos provar que, dados $\epsilon, R > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|B(u+v) - B(u) - B'(u)v| < \epsilon ||v||, \;\; \forall u, u+v \in B_R \text{ e } ||v|| < \delta. \tag{5.24}$$

Da definição de B (5.19) e do Lema 34, podemos escrever

$$B'(u)v = -\int_{\mathbb{R}^n} h(x) f(u(x)) v(x) dx. \tag{5.25}$$

Definindo a função auxiliar $\psi(t) = F(u+tv)$, segue que $\psi'(t) = f(u+tv)v$, e do Teorema do Valor Médio, existe $\theta = \theta(x)$, com $0 < \theta(x) < 1$ em $\mathbb{R}^n$, tal que

$$\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\theta), \tag{5.26}$$

e reescrevendo,

$$F(u+v) - F(u) = f(z)v, \quad \text{onde } z = u + \theta v, \;\; \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^n. \tag{5.27}$$

Multiplicando por h e integrando sobre $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} B(u+v) - B(u) &= -\int_{\mathbb{R}^n} h(x) F(u(x) + v(x)) dx + \int_{\mathbb{R}^n} h(x) F(u(x)) dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} h(x) [F(u(x) + v(x)) - F(u(x))] dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} h(x) f(z(x)) v(x) dx \end{aligned} \tag{5.28}$$

donde desenvolvendo

$$\begin{aligned} |B(u+v) - B(u) - B'(u)v| &= \left| -\int_{\mathbb{R}^n} h(x) f(z(x)) v(x) d + - \int_{\mathbb{R}^n} h(x) f(u(x)) v(x) dx \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} h(x) [f(u(x)) - f(z(x))] v(x) dx \right| \\ &\leq ||h||_\infty^{1/2} \int_{\mathbb{R}^n} h(x)^{1/2} |f(u(x)) - f(z(x))| |v(x)| dx. \end{aligned}$$

Observemos que a função e, dada por $e(x) = h(x)^{1/2} |f(z(x)) - f(u(x))|$ pertence a $L^2(\mathbb{R}^n)$. Com efeito, usando a desigualdade de Holder, e empregando a hipótese (h_1), donde $h \in L^q(\mathbb{R}^n)$, com q sendo o expoente conjugado de $\frac{2_s^*}{p}$, e usando também o item (iv) do Lema 33, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |e(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} h(x) |f(z(x)) - f(u(x))|^2 dx \\ &\leq ||h||_{L^q} ||f(u) - f(z)||_{L^{\frac{2_s^*}{p}}} < \infty. \end{aligned}$$

Retornando à (5.28), e usando que $e \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e também usando a Imersão Contínua $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R})$, juntamente com a desigualdade de Holder, segue que

$$|B(u+v) - B(u) - B'(u)v| \leq ||h||_{L^\infty}^{1/2} ||e||_{L^2} ||v||_{L^2} \leq C_2 ||h||_{L^\infty}^{1/2} ||e||_{L^2} ||v||_{H^s},$$

onde C_2 é a constante da imersão contínua.

Retornemos então ao nosso objetivo de provar que B é uniformemente difenciável em conjuntos limitados. Notemos que precisamos provar apenas que, dados $\epsilon, R > 0$, com $B_R \subset E$, existe $\delta > 0$ tal que

$$||e||_{L^2} \leq \frac{\epsilon}{||h||_{L^\infty} C_2}, \quad \forall u + v \in B_R, \quad \text{com } ||v|| < \delta.$$

Suponhamos então que exista $\epsilon_0 > 0$ e $B_{R_0} \subset E$ tais que, para todo $\delta > 0$, seja possível obter u_δ, v_δ, com $u_\delta + v_\delta \in B_{R_0}$, $||v_\delta|| < \delta$ e $||e_\delta||_{L^2} > \frac{\epsilon}{||h||_{L^\infty} C_2}$, onde

$$e_\delta(x) = h(x)^{1/2} |f(z_\delta(x)) - f(u_\delta(x))|, \;\; z_\delta = u_\delta + \theta v_\delta.$$

Então, tomando $\delta_n = 1/n$, podemos construir sequências $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tais que $u_n + v_n \in B_{R_0}$, $||v_n|| \leq 1/n$ e ainda $||e_\delta||_{L^2} > \frac{\epsilon}{||h||_{L^\infty} C_2}$.

Observemos então que $v_n \to 0$ em E. Isto implica que $(||u_n||)_{n \in \mathbb{N}}$ é sequência limitada. Com efeito, $||u_n|| - ||v_n|| \leq ||u_n + v_n|| < R_0$. Da limitação de u_n, segue que, a menos de uma subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ para algum u em E. Imediatamente, segue então que a sequência $z_n = u_n + \theta v_n$ é limitada, e da convergência de $v_n \to 0$, temos $z_n \rightharpoonup u$ em E. Portanto, novamente, pelo Teorema 10, temos, a menos de uma subsequência, u_n e z_n convergindo em $L^2(\mathbb{R}^n)$ para u, e em particular, obtemos também convergência pontual, ou seja, $u_n(x), z_n(x) \to u(x)$, q.t.p. em $\mathbb{R}^n$.

Da hipótese (f_1), mais especificamente, da continuida de f, temos

$$|f(z_n(x)) - f(u_n(x))|^2 \to 0, \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^n.$$

Assim, do item (iv) do Lema 33, decorre que $|f(z_n) - f(u_n)|^2$ pertence a $L^{\frac{2_s^*}{p}}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, temos da imersão $E \hookrightarrow L^{\frac{2_s^*}{p}}(\mathbb{R}^n)$, que

$$\begin{aligned}
|||f(z_n) - f(u_n)|^2|| &\leq ||f(z_n) - f(u_n)||^{2\frac{2_s^*}{p}}_{L^{2\frac{2_s^*}{p}}} \\
&\leq k^{2\frac{2_s^*}{p}} \left(||z_n||^{2\frac{2_s^*}{p}}_{L^{2\frac{2_s^*}{p}}} + ||u_n||^{2\frac{2_s^*}{p}}_{L^{2\frac{2_s^*}{p}}} \right) \\
&\leq \left(C_{2\frac{2_s^*}{p}} k \right)^{2\frac{2_s^*}{p}} \left(||z_n||^{2\frac{2_s^*}{p}}_{H^s} + ||u_n||^{2\frac{2_s^*}{p}}_{H^s} \right) \\
&\leq 2 \left(C_{2\frac{2_s^*}{p}} k R_0 \right)^{2\frac{2_s^*}{p}},
\end{aligned}$$

donde a sequência $(|f(z_n) - f(u_n)|^2)$ é limitada em $L^{\frac{2_s^*}{p}}(\mathbb{R}^n)$. Novamente do Teorema de Brezies-Lieb 32, segue que

$$|f(z_n) - f(u_n)|^2 \rightharpoonup 0, \text{ em } L^{\frac{2_s^*}{p}}(\mathbb{R}^n), \text{ quando } n \to \infty.$$

Utilizando o funcional ϕ_h definido em (5.23), obtemos

$$||e_n||^2_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} h(x) |f(z_n(x)) - f(u_n(x))|^2 dx = \phi_h(|f(z_n) - f(u_n)|^2) \to 0,$$

o que é uma contradição com $||e_n||_{L^2} > \frac{\epsilon}{||h||_{L^\infty} C_2}$, e segue que B é uniformemente diferenciável. $\square$

Antes de partimos para a prova de (I_3), tratemos de enunciar um resultado técnico sobre o comportamento de F.

Lema 35. *Consideremos F como definida em (f_2) e que sejam válidas as hipóteses (f_1), (f_2), (f_3) e (h_1).*

(i) Dado $u \neq 0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, vale

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} 2h(x) \frac{F(nu(x))}{n^2} dx = a \int_{\mathbb{R}^n} h(x) u(x)^2 dx; \tag{5.29}$$

(ii) Seja $e \in E_1$, com $||e|| = 1$. Então

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} 2h(x) \frac{F(n(e(x)+v(x)))}{n^2} dx = a \int_{\mathbb{R}^n} h(x)(e(x)+v(x))^2 dx \tag{5.30}$$

é uniforme para todo $v \in B_1 \cap E_2$.

Demonstração. Tratemos de provar o item (i). Recordemos do item (i) do Lema 33, juntamente de (f_3)

$$0 \leq F(s) \leq \frac{1}{2} f(s)s \leq \frac{1}{2}|f(s)||s| \leq k|s|^2, \ \ \forall s \in \mathbb{R},$$

donde, para $s = nu(x)$, com $u \neq 0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\left| h(x) \frac{F(nu(x))}{n^2} \right| \leq k ||h||_{L^\infty} |u(x)|^2. \tag{5.31}$$

Portanto, da hipótese (f_2), temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(n(u(x)))}{n^2 u(x)^2} = \frac{a}{2}, \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^n, \tag{5.32}$$

donde

$$\lim_{n\to\infty} 2h(x) \frac{F(n(u(x)))}{n^2} = ah(x)u(x)^2, \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^n.$$

Sabemos então da convergência pontual da sequência $h(x)F(n(u(x)))/n^2$, e além disso, de (5.31), temos uma limitação para esta sequência de funções por uma função que está em $L^1(\mathbb{R}^n)$, donde podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada 20, e obtermos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} 2h(x) \frac{F(nu(x))}{n^2} dx = a \int_{\mathbb{R}^n} h(x)u(x)^2 dx.$$

Agora, para o item (ii), dado $n \in \mathbb{N}$, definimos o funcional $J_n : B_1 \cap E_2 \to \mathbb{R}$

$$J_n(v) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(a - \frac{2F(n(e(x)+v(x)))}{n^2(e(x)+v(x))^2} \right) h(x)(e(x)+v(x))^2 dx.$$

Antes de prosseguirmos, observemos que, para todo s real, do fato de F ser não negativa, segue que $a - \frac{2F(s)}{s^2} \leq a$, para todo $s \neq 0 \in \mathbb{R}$. Usando este fato e também a imersão contínua $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\begin{aligned}
J_n(v) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(a - \frac{2F(n(e(x)+v(x)))}{n^2(e(x)+v(x))^2} \right) h(x)(e(x)+v(x))^2 dx \\
&\leq a||h||_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (e(x)+v(x))^2 dx \\
&\leq a||h||_{L^\infty} \left(||e||_{L^2}^2 + ||v||_{L^2}^2 \right) \\
&\leq a||h||_{L^\infty} C_2 \left(||e||_{H^s}^2 + ||v||_{H^s}^2 \right) \\
&\leq 2a||h||_{L^\infty} C_2, \ \forall v \in B_1 \cap E_2,
\end{aligned}$$

onde no último passo utilizamos que $||e|| = 1$ e $||v|| \leq 1$.

Como E_2 tem dimensão finita e B_1 é um conjunto fechado, segue que $B_1 \cap E_2$ é compacto, donde, da continuidade de J_n, existe $u_n \in B_1 \cap E_2$ de forma que J_n atinge máximo em u_n. Naturalmente construímos então uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B_1 \cap E_2$, e como esta sequência está contida em um compacto, podemos assumir (a menos de uma subsequência) que u_n converge para algum $u \in B_1 \cap E_2$, onde a convergência é em E. Porém, da convergência em E, segue imediatamente que u_n converge para u em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Do Teorema 33, segue que $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^n$. Da hipótese (f_2) e do mesmo argumento aplicado no item (i), temos

$$\lim_{n \to \infty} \left(a - \frac{2F(n(e(x)+u_n(x)))}{n^2(e(x)+u_n(x))^2} h(x)(e(x)+u_n(x))^2 \right) = 0 \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^n.$$

Além disso, ainda do Teorema 33, a menos de uma subsequência, existe $w \in L^2(\mathbb{R}^n)$, que domina u_n. Assim

$$\left(a - \frac{2F(n(e(x)+u_n(x)))}{n^2(e(x)+u_n(x))^2} h(x)(e(x)+u_n(x))^2 \right) \leq a||h||_{L^\infty}(e(x)+w(x))^2$$

ou seja, temos uma limitação da sequência acima, donde podemos, novamente, aplicar o Teorema da Convergência Dominada 20, e assim, obtemos

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left(a - \frac{2F(n(e(x)+u_n(x)))}{n^2(e(x)+u_n(x))^2} h(x)(e(x)+u_n(x))^2 \right) = 0. \tag{5.33}$$

Noutras palavras, o limite acima é equivalente a dizer que $\lim_{n \to \infty} J_n(u_n) = 0$. Porém, do fato de $J_n(u_n)$ ser máximo de J_n (para cada n), segue que, para todo $v \in B_1 \cap E_2$, temos

$$0 \leq J_n(v) \leq J_n(u_n) \to 0, \ n \to \infty,$$

e segue, portanto, que $J_n(v) = 0$, para todo $v \in B_1 \cap E_2$, que é exatamente o que buscávamos demonstrar. $\square$

Consideremos agora uma nova hipótese sobre o potencial V e o espectro de S_S, necessária para a obtenção de (I_3).

$$(V_3) \qquad\qquad 0 \notin \sigma(S_s)$$

Proposição 26. *Sejam a_0 definido na Proposição 23, a definido em (f_2), com $a > a_0$ e com a hipótese adicional (V_3). Então, o funcional I definido em (5.2), satisfaz (I_3).*

Demonstração. Comecemos definindo os conjuntos Q, S por

$$Q = \{re, r \in [0, r_1]\} \oplus (E_2 \cap B_{r_2}) \quad \text{e} \quad S = \partial B_\rho \cap E_1, \tag{5.34}$$

em que $0 < \rho < r_1 < r_2$ são constantes (a serem definidas durante a prova) e $e \in E_1$ é um vetor unitário, também a ser determinado na construção da prova.

Da hipótese de $a_0 < a$, tomemos $\epsilon > 0$ tal que $a_\epsilon := a - \epsilon$ e $a_0 < a_\epsilon < a$. Assim, da definição de a_0, existe $e_0 \in E_1$ não nulo tal que

$$a_0 \leq \frac{||e_0||^2}{||h^{1/2}e_0||_{L^2}^2},$$

donde podemos reescrever

$$a_0 \int_{\mathbb{R}^n} h(x)e_0(x)^2 dx \leq ||e_0||^2 \leq a_\epsilon \int_{\mathbb{R}^n} h(x)e_0(x)^2 dx.$$

Assim, definindo o vetor $e = e_0/||e_0||^2$, e usando a Proposição 23, notando que, como $e \in E_1$, temos $P_+e = e$ e $P_-e = 0$, segue que

$$1 = ||e||^2 \leq a_\epsilon \int_{\mathbb{R}^n} h(x)e(x)^2 dx, \tag{5.35}$$

assim, nosso vetor e já está determinado.

Observemos que o item (iii) de (I_3) decorre imediatamente do Lema 30, onde é provado que os conjuntos $\partial Q, S$ definidos em (5.34) são linking. Além disso, o Lema 30 também nos dá uma decomposição mais precisa de ∂Q a partir da equação (5.3), de forma que $\partial Q = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$ e

$$Q_1 = \{0\} \oplus (E_2 \cap B_{r_2}),\ Q_2 = \{re, r \in [0, r_1]\} \oplus (E_2 \cap \partial B_{r_2}) \ \text{ e } Q_3 = \{r_1 e\} \oplus (E_2 \cap B_{r_2}). \tag{5.36}$$

Precisamos mostrar então os itens (i) e (ii) de (I_3).

Para provar (i), precisamos mostrar que existe $\alpha > 0$ tal que, para todo $u \in S$, vale $I(u) \geq \alpha$. Assim, tomando $u \in S = \partial B_\rho \cap E_1$, segue que $||u|| = \rho$. Usando o item (ii) do Lema 33 e as imersões contínuas de $H^s(\mathbb{R}^n)$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$ do Teorema das Imersões

Contínuas 9

$$
\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2}(||P_+u||^2 + ||P_-u||^2) - \int_{\mathbb{R}^n} h(x)F(u(x))dx \\
&\geq \frac{1}{2}||u||^2 - ||h||_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\epsilon}{2}|u(x)| + \frac{C_\epsilon}{p}|u(x)|^p\right) dx \\
&= \frac{\rho^2}{2} - ||h||_{L^\infty} \left(\frac{\epsilon}{2}||u||^2_{L^2} + \frac{C_\epsilon}{p}||u||^p_{L^p}\right) \\
&\geq \frac{\rho^2}{2} - ||h||_{L^\infty} \left(\frac{\epsilon}{2}C_2^2||u||^2_{H^s} + \frac{C_\epsilon}{p}C_p^p||u||^p_{H^s}\right) \\
&\geq \frac{\rho^2}{2} - ||h||_{L^\infty} \left(\frac{\epsilon}{2}C_2^2\rho^2 + \frac{C_\epsilon}{p}C_p^p\rho^p\right) \\
&= \rho^2 \left(\frac{1}{2}(1 - \epsilon||h||_{L^\infty}C_2^2) - \frac{C_\epsilon}{p}||h||_{L^\infty}C_p^p\rho^{p-2}\right).
\end{aligned}
$$

Portanto, basta tomarmos ϵ e ρ suficientemente pequenos de forma que $I(u) \geq \alpha > 0$, para algum $\alpha > 0$, e então ρ está determinado.

Para provarmos o item (ii) de (I_3), precisamos mostrar que $I|_{\partial Q} \leq 0$, e para isto, vamos usar a decomposição de ∂Q dada em (5.3), o que reduz nosso problema em provar que $I|_{Q_i} \leq 0$, para $i = 1, 2, 3$. Portanto, vamos dividir a prova em três etapas.

(ii).1 Seja $u \in Q_1 = \{0\} \oplus (E_2 \cap B_{r_2})$. Observemos que, em particular, $u \in E_2$, donde $P_+u = 0$, e assim, do fato de $h(x), F(u(x)) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, temos

$$
I(u) = \frac{1}{2}(-||P_-u||^2) - \int_{\mathbb{R}^n} h(x)F(u(x))dx \leq 0, \ \ \forall r_2 \in \mathbb{R}.
$$

(ii).2 Dado $r_1 > 0$ arbitrário, consideremos $u \in Q_2 = \{re, r \in [0, r_1]\} \oplus (E_2 \cap \partial B_{r_2})$. Então $u = u_1 + u_2$, onde $u = re$, para $0 < r < r_1$, implicando que $||u_1|| = r \leq r_1$ e $||P_+u|| = ||u_1|| \leq r_1$. Da hipótese (V_3), decorre que $E_0 = \{0\}$, donde $E_2 = E_-$ e portanto, de $u_2 \in E_2$, temos $||P_-u_2|| = ||u_2|| = r_2 > r_1$. Assim, $u_2 = r_1 v$, para algum $v \in B_1$. Então

$$
\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2}(||P_+u||^2 - ||P_-u||^2) - \int_{\mathbb{R}^n} h(x)F(u(x))dx \\
&= \frac{1}{2}(||P_+u_1||^2 - ||P_-u_2||^2) - \int_{\mathbb{R}^n} h(x)F(u(x))dx \\
&= \frac{1}{2}(r^2 - r_2^2) - \int_{\mathbb{R}^n} h(x)F(u(x))dx \\
&\leq \frac{1}{2}(r_1^2 - r_2^2) - \int_{\mathbb{R}^n} h(x)F(u(x))dx \\
&\leq 0.
\end{aligned}
$$

(ii).3 Sejam r_1 arbitrário, e r_2 algum valor tal que $r_2 > r_1$ e $u \in Q_3 = \{r_1 e\} \oplus (E_2 \cap B_{r_2})$. Então $u = r_1 e + u_2$, em que $0 \leq ||u_2|| \leq r_2$. Temos duas possibilidades: ou ocorre que $r_1 \leq ||u_2|| \leq r_2$, ou $0 \leq ||u_2|| < r_1$.

Comecemos pelo caso em que $r_1 \leq ||u_2|| \leq r_2$. Portanto, $||P_+u_1|| = r_1$ e da hipótese (V_3), $||P_-u_2|| = ||u_2||$. Como $||P_-u_2|| = ||u_2|| \geq r_1$, segue

$$
\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2}(||P_+u||^2 - ||P_-u||^2) - \int_{\mathbb{R}^n} h(x)F(u(x))dx \\
&= \frac{1}{2}(||P_+u_1||^2 - ||P_-u_2||^2) - \int_{\mathbb{R}^n} h(x)F(u(x))dx \\
&= \frac{1}{2}(r_1^2 - ||P_-u_2||^2) - \int_{\mathbb{R}^n} h(x)F(u(x))dx \\
&\leq 0.
\end{aligned}
$$

Agora, se $0 \leq ||u_2|| < r_2$, podemos dizer que $u_2 = r_1 v$, para algum $v \in B_1 \cap E_2$. Assim, temos $||P_+u_1|| = r_1$ e $||P_-u_2|| \leq r_1$, donde

$$
\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2}(||P_+u||^2 - ||P_-u||^2) - \int_{\mathbb{R}^n} h(x)F(u(x))dx \\
&= \frac{1}{2}(||P_+u_1||^2 - ||P_-u_2||^2) - \int_{\mathbb{R}^n} h(x)F(u(x))dx \\
&\leq \frac{1}{2}(r_1^2) - \int_{\mathbb{R}^n} h(x)F(u(x))dx \\
&= \frac{1}{2}r_1^2\left[1 - \int_{\mathbb{R}^n} 2h(x)\frac{F(r_1(e(x)+v(x)))}{r_1^2}dx\right]. \qquad (5.37)
\end{aligned}
$$

Da arbitrariedade de r_1 (e de $r_2 > r_1$), podemos, para $r_1 = n$, construir uma sequência a partir de (5.37) e aplicar o item (ii) do Lema 35, donde temos que o limite

$$
\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} 2h(x)\frac{F(n(e(x)+v(x)))}{n^2}dx = a\int_{\mathbb{R}^n} h(x)(e(x)+v(x))^2dx
$$

é uniforme, para todo $v \in B_1 \cap E_2$. Portanto, dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que $0 < \epsilon < a$, e como $h(x)(e(x)+v(x))^2 \geq 0$, podemos escrever

$$
\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} 2h(x)\frac{F(n(e(x)+v(x)))}{n^2}dx > (a-\epsilon)\int_{\mathbb{R}^n} h(x)(e(x)+v(x))^2dx,
$$

ou seja, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$

$$
\int_{\mathbb{R}^n} 2h(x)\frac{F(n(e(x)+v(x)))}{n^2}dx > (a-\epsilon)\int_{\mathbb{R}^n} h(x)(e(x)+v(x))^2dx, \ \forall n > n_0.
$$

Definindo (finalmente) $r_1 = n_0 + 1$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} 2h(x)\frac{F(r_1(e(x)+v(x)))}{r_1^2}dx &> (a-\epsilon)\int_{\mathbb{R}^n} h(x)(e(x)+v(x))^2dx \\
&\geq (a-\epsilon)\int_{\mathbb{R}^n} h(x)(e(x)^2+v(x)^2)dx \\
&\geq (a-\epsilon)\int_{\mathbb{R}^n} h(x)e(x)^2dx.
\end{aligned}
$$

Portanto, concluindo o racioncínio, retomando o cálculo de I, temos

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}r_1^2\left[1 - \int_{\mathbb{R}^n} 2h(x)\frac{F(r_1^2(e(x)+v(x)))}{r_1^2}dx\right] \\ &< \frac{1}{2}r_1^2\left[1-(a-\epsilon)\int_{\mathbb{R}^n} h(x)e^2(x)dx\right] \leq 0, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade vem de (5.35), e o resultado está provado.

□

Lema 36. *Se $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $H^s(\mathbb{R}^n)$, para $s \in (0,1)$, então acontece um dos dois casos:*

(*i*) *Para todo $r > 0$,*

$$\limsup_{n\to+\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \int_{B_y(r)} |v_n(x)|^2 dx = 0.$$

(*ii*) *Existem $r, \mu > 0$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ tais que*

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_{B_y(r)} |v_n(x)|^2 dx > \mu.$$

Demonstração. Suponhamos que (i) não ocorra e mostremos que ocorre (ii). Com efeito, se (i) não ocorre, existe $r > 0$ tal que

$$\limsup_{n\to+\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \int_{B_y(r)} |v_n(x)|^2 dx = M > 0.$$

A partir do $\limsup$, podemos afirmar que

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n} \int_{B_y(r)} |v_n(x)|^2 dx \geq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seja $c = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \int_{B_y(r)} |v_n(x)|^2 dx$. Como $||v_n||_{L^2} \leq ||v_n||_{H^s}$, segue que $c < \infty$. Temos então $c > M$, donde, dado $n \in \mathbb{N}$ de forma que $c \geq M + 1/n$, podemos construir uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$c \geq \int_{B_{y_n}(r)} |v_n(x)|^2 dx > M + 1/n > M,$$

e assim, $\limsup_{n\to+\infty} \int_{B_{y_n}(r)} |v_n(x)|^2 dx > \mu$ para algum $\mu \leq M$. □

Lema 37. *Sejam o funcional I definido em (5.2), e $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cerami relativa a I sobre algum nível arbitrário c. Então $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em E.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ do enunciado seja ilimitada, ou seja, $||u_n|| \to \infty$ quando $n \to \infty$ e definimos $v_n = \frac{u_n}{||u_n||}$. Como, do Corolário 2, $E = H^s(\mathbb{R}^n)$ é um espaço reflexivo, então v_n converge (a menos de uma subsequência) fracamente para algum $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Como v_n é limitada em E, a partir do Lema 36, precisamos analisar separadamente os casos (i) e (ii). Provemos que nenhum dos dois casos é viável, o que nos dará a contradição desejada.

Suponhamos então que (v_n) seja do tipo (ii) do Lema 36 e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ a sequência de pontos também do Lema 36. Dado $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ arbitrário, construímos a sequência $\phi_n(\cdot) = \phi_n(\cdot + y_n)$, de forma que $||\phi_n||_{H^s} = ||\phi||_{H^s}$. Da equivalência entre as normas $||\cdot||$ e $||\cdot||_{H^s}$ em E, e além disso, de u_n ser uma sequência de Cerami, decorre que

$$|I'(u_n)\phi_n| \leq ||I'(u_n)||||\phi_n|| \leq c_1||I'(u_n)||||\phi_n||_{H^s} \leq c_2||I'(u_n)||||\phi_n|| \to 0,$$

onde c_1 e c_2 são as constantes oriundas da equivalêcia entre as normas. Como $||u_n|| \to \infty$, temos que $\Omega_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |u_n(x)| \neq 0\}$ tem medida não nula.

Considerando $v_n = v_{n0} + v_{n-} + v_{n+}$, para $v_{nj} \in E_j$, $j \in \{0, +, -\}$, obtemos, através de uma mudança de variável,

$$\begin{aligned}
\frac{I'(u_n)\phi_n}{||u_n||} &= \frac{1}{||u_n||}\int_{\mathbb{R}^n}(-\Delta)^{s/2}u_n(x)(-\Delta)^{s/2}\phi_n(x)dx \\
&\quad + \frac{1}{||u_n||}\int_{\mathbb{R}^n}(V(x)u_n(x)\phi_n(x) - h(x)f(u_n(x))\phi_n(x))dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}(-\Delta)^{s/2}v_n(x)(-\Delta)^{s/2}\phi(x-y_n)dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n}(V(x)v_n(x)\phi(x-y_n) - h(x)\frac{f(u_n(x))}{u_n(x)}v_n(x)\phi(x-y_n))dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}(-\Delta)^{s/2}\tilde{v}_n(x)(-\Delta)^{s/2}\phi(x)dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n}(V(x)\tilde{v}_n(x)\phi(x) - h(x+y_n)\frac{f(\tilde{u}_n(x))}{\tilde{u}_n(x)}\tilde{v}_n(x)\phi(x))dx,
\end{aligned} \tag{5.38}$$

onde $\tilde{v}_n(\cdot) = v_n(\cdot + y_n)$ e $\tilde{u}_n(\cdot) = u_n(\cdot + y_n)$. Observemos que, na verdade, temos dois subcasos, a saber, $|y_n| \to +\infty$ ou $(|y_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Tratemos inicialmente do subcaso $|y_n| \to +\infty$. Seja $K = supp(\phi)$, com K limitado. Como $v_n \rightharpoonup v$ em E (a menos de uma subsequência), então, das Imersões Compactas 10, temos $v_n \to v$ em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$, e também $v_n(x) \to v(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^n$. Em particular, de K ser fechado e da desigualdade de Holder, $v_n|_K \to v|_K$ em $L^1(K)$. Do Teorema de Vainberg 33, existe $\xi \in L^1(K)$ que limita v_n em K. Portanto

$$\left|h(\cdot + y_n)\frac{f(\tilde{u}_n(\cdot))}{\tilde{u}_n(\cdot)}\tilde{v}_n(\cdot)\phi(\cdot)\right| \leq ||h||_{L^\infty}k\xi(\cdot)\phi(\cdot) \in L^1(K),$$

onde k vem do Lema 33.

Por outro lado, da convergência pontual de $v_n(x) \to v(x)$ q.t.p. (em particular) em K, de $|f(s)/s| < k$ e da hipótese (h_1), $h(x) \to 0$ quando $|x| \to +\infty$, segue, para todo $x \in K$

$$\left|h(x+y_n)\frac{f(\tilde{u}_n(x))}{\tilde{u}_n(x)}\tilde{v}_n(\cdot)\phi(x)\right| \leq k|h(x+y_n)||\tilde{v}_n(x)\phi(x)| \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada 20

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x+y_n)\frac{f(\tilde{u}_n(x))}{\tilde{u}_n(x)}\tilde{v}_n(x)\phi(x)dx = \int_K h(x+y_n)\frac{f(\tilde{u}_n(x))}{\tilde{u}_n(x)}\tilde{v}_n(x)\phi(x)dx \to 0,$$

quando $n \to \infty$.

Usando (V_1), obtemos

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{n\to+\infty}\frac{I'(u_n)\phi_n}{||u_n||} &= \lim_{n\to+\infty}(\int_{\mathbb{R}^n}(-\Delta)^{s/2}\tilde{v}_n(x)(-\Delta)^{s/2}\phi(x)dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n}(V(x)\tilde{v}_n(x)\phi(x) - h(x+y_n)\frac{f(\tilde{u}_n(x))}{\tilde{u}_n(x)}\tilde{v}_n(x)\phi(x))dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}((-\Delta)^{s/2}\tilde{v}(x)(-\Delta)^{s/2}\phi(x) + V_\infty\tilde{v}(x)\phi(x))dx, \end{aligned}$$

mas isto significaria que $\tilde{v}$ seria solução fraca de $(-\Delta)^s u = V_\infty u$, e do Lema 23, $\tilde{v} \in H^{2s}(\mathbb{R}^n)$, com $(-\Delta)^s\tilde{v} = V_\infty\tilde{v}$. Mas isto significaria que $V_\infty \in \sigma_p((-\Delta)^s)$, porém, do Teorema 12, isto é um absurdo. Assim, $(|y_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ não pode ser ilimitada.

Partindo agora para o subcaso $(|y_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ seja $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : v(x) \neq 0\}$, onde, pela sua definição, Ω tem medida não nula. Agora, do Teorema de Imersões Compactas 10, segue que v_n possui subsequência convergindo fortemente em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$, donde obtemos também a convergência pontual de $v_n(x) \to v(x)$ q.t.p. em Ω. Da definição de v_n, segue que $|u_n(x)| = |||u_n||v_n(x)| \to \infty$, q.t.p. em Ω. Assim, de (f_3), segue que

$$Q(u_n(x)) \to \infty, \text{ e também } h(x)Q(u_n(x)) \to \infty, \text{ ambos q.t.p. em } \Omega.$$

Aplicando o Lema de Fatou 22, temos

$$\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega h(x)Q(u_n(x))dx \geq \int_{\mathbb{R}^n}\liminf_{n\to\infty} h(x)Q(u_n(x))dx = \infty. \tag{5.39}$$

Agora, do fato de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ser sequência de Cerami de nível c, segue, da Definição 17 que

$$I(u_n) \to c, \;\; (1+||u_n||)||I'(u_n)|| \to 0$$

e obtemos

$$|I'(u_n)u_n| \leq ||I'(u_n)||||u_n|| \leq ||I'(u_n)||(||u_n||+1) \to 0,$$

que implica que $|I'(u_n)u_n| \to 0$ quando $n \to \infty$. Segue do Lema 34 e da desigualdade (5.39) que

$$\begin{aligned} I(u_n) - \frac{1}{2}I'(u_n)u_n &= -\int_{\mathbb{R}^n} h(x)F(u_n(x))dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} h(x)f(u_n(x))dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\left(F(u_n(x)) - \frac{1}{2}f(u_n(x))\right)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} h(x)Q(u_n(x))dx \\ &\geq \int_\Omega h(x)Q(u_n(x))dx \to \infty, \end{aligned}$$

donde teriámos $c \geq \infty$, o que é um absurdo, sendo assim, não podemos ter v não nulo.

Só nos resta agora o caso em que v satisfaz (i) do Lema 36. Decompondo os elementos $v_n = v_{n+} + v_{n-} + v_{n0}$, e do mesmo argumento citado acima, $v_n \rightharpoonup v = v_- + v_+ + v_0$ implica em convergência de v_n para v (a menos de uma subsequência) em $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Como $v = 0$ e da ortogonalidade entre os espaços E_j, $j \in \{-, +, 0\}$, escrevemos $||v_j||^2 \leq ||v||^2 = 0$ e segue que $v_+ = v_- = v_0 = 0$. Portanto, as sequências v_{nj} convergem pontualmente para 0, para $j \in \{+, -, 0\}$. Em particular, como $(v_{n0})_{n\in\mathbb{N}} \subset E_0$ e E_0 tem dimensão finita, segue que $||v_{n0}|| \to ||v_0|| = 0$.

Como $||u_n|| \geq ||u_{n-}||, ||u_{n+}||$, obtemos

$$|I'(u_n)u_{n+}| \leq ||I'(u_n)|| ||u_{n+}|| \leq ||I'(u_n)||(||u_{n+}|| + 1) \leq ||I'(u_n)||(||u_n|| + 1) \to 0$$

e da mesma forma $|I'(u_n)u_{n-}| \to 0$. Mais ainda, de $||u_n||^2 \to \infty$, temos

$$\frac{I'(u_n)u_{n+}}{||u_n||^2} \to 0 \quad \text{e} \quad \frac{I'(u_n)u_{n-}}{||u_n||^2} \to 0 \tag{5.40}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{I'(u_n)u_{nj}}{||u_n||^2} &= \frac{1}{||u_n||^2}\int_{\mathbb{R}^n}(-\Delta)^{s/2}u_n(x)(-\Delta)^{s/2}u_{nj}(x)dx \\ &+ \frac{1}{||u_n||^2}\int_{\mathbb{R}^n}(V(x)u_n(x)u_{nj}(x) - h(x)f(u_n(x))u_{nj}(x))dx, \ \ j \in \{+, -\}.\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}\frac{I'(u_n)u_{n+}}{||u_n||^2} - \frac{I'(u_n)u_{n-}}{||u_n||^2} &= \frac{1}{||u_n||^2}\int_{\mathbb{R}^n}(-\Delta)^{s/2}u_n(x)((-\Delta)^{s/2}u_{n+}(x) - (-\Delta)^{s/2}u_{n-}(x))dx \\ +\frac{1}{||u_n||^2}&\int_{\mathbb{R}^n}(V(x)u_n(x)(u_{n+}(x) - u_{n-}(x)) - h(x)f(u_n(x))(u_{n+}(x) - u_{n-}(x)))dx\end{aligned}$$

e como $u_n = u_{n+} + u_{n-} + u_{n0}$, usando a "ortogonalidade"proveniente da Proposição 22,

$$\begin{aligned}\frac{I'(u_n)u_{n+}}{||u_n||^2} - \frac{I'(u_n)u_{n-}}{||u_n||^2} &= \frac{1}{||u_n||^2}\int_{\mathbb{R}^n}|(-\Delta)^{s/2}u_{n+}(x)|^2 - |(-\Delta)^{s/2}u_{n-}(x)|^2dx \\ +\frac{1}{||u_n||^2}\int_{\mathbb{R}^n}&(V(x)(u_{n+}(x)^2 - u_{n-}(x)^2) - h(x)f(u_n(x))(u_{n+}(x) - u_{n-}(x)))dx.\end{aligned}$$

Agora, como $P_+u_{n+} = u_{n+}$ e $P_-u_{n-} = u_{n-}$ e usando a Proposição 21, podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{I'(u_n)u_{n+}}{||u_n||^2} - \frac{I'(u_n)u_{n-}}{||u_n||^2} &= \frac{1}{||u_n||^2}\left(||P_+u_{n+}||^2 + ||P_-u_{n-}||^2)\right) \\ &- \frac{1}{||u_n||^2}\int_{\mathbb{R}^n}h(x)f(u_n(x))(u_{n+}(x) - u_{n-}(x))dx.\end{aligned}$$

Da definição de v_n, $v_n = u_n/||u_n||$, temos

$$\frac{I'(u_n)u_{n+}}{||u_n||^2} - \frac{I'(u_n)u_{n-}}{||u_n||^2} = ||P_+v_{n+}||^2 + ||P_-v_{n-}||^2 - \int_{\mathbb{R}^n}h(x)\frac{f(u_n(x))}{u_n(x)}(|v_{n+}(x)|^2 - |v_{n-}(x)|^2)dx.$$

De $1 = ||v_n||^2 = ||v_{n+}||^2 + ||v_{n-}||^2 + ||v_{n0}||^2$, e como $P_- v_{n-} = v_{n-}$ e $P_+ v_{n+} = v_{n+}$, segue que

$$0 \leftarrow \frac{I'(u_n)u_{n+}}{||u_n||^2} - \frac{I'(u_n)u_{n-}}{||u_n||^2} = 1 - ||v_{n0}||^2 - \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\frac{f(u_n(x))}{u_n(x)}(|v_{n+}(x)|^2 - |v_{n-}(x)|^2)dx,$$

ou seja

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\frac{f(u_n(x))}{u_n(x)}(|v_{n+}(x)|^2 - |v_{n-}(x)|^2)dx \to 1. \tag{5.41}$$

Agora, para $q = \frac{2_s^*}{2_s^* - p}$, seja $q' = \frac{2_s^*}{p}$, q e q' expoentes conjugados. Como $h \in L^q(\mathbb{R}^n)$, aplicando a desigualdade de Holder, obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\frac{f(u_n(x))}{u_n(x)}(|v_{n+}|^2 - |v_{n-}|^2)dx\right| &\leq k\left|\int_{\mathbb{R}^n} h(x)(|v_{n+}|^2 - |v_{n-}|^2)dx\right| \\
&\leq k||h||_{L^q}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^n}(|v_{n+}(x)^2|^{q'}dx\right)^{\frac{1}{q'}} + \left(\int_{\mathbb{R}^n}|v_{n-}(x)^2|^{q'})dx\right)^{\frac{1}{q'}}\right] \\
&\leq k||h||_{L^q}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^n}(|v_{n+}(x)^2|^{\frac{2_s^*}{p}}dx\right)^{\frac{1}{q'}} + \left(\int_{\mathbb{R}^n}|v_{n-}(x)^2|^{\frac{2_s^*}{p}})dx\right)^{\frac{1}{q'}}\right] \\
&\leq k||h||_{L^q}\left(||v_{n+}^2||_{L^{\frac{2_s^*}{p}}} + ||v_{n-}^2||_{L^{\frac{2_s^*}{p}}}\right) \\
&\leq k||h||_{L^q}\left(||v_{n+}||_{L^{2\frac{2_s^*}{p}}} + ||v_{n-}||_{L^{2\frac{2_s^*}{p}}}\right) \\
&\leq k||h||_{L^q}||v_n||_{L^{2\frac{2_s^*}{p}}}^{2\frac{2_s^*}{p}},
\end{aligned}$$

mas, usando o Teorema 34, segue que $||v_n||_{L^{2\frac{2_s^*}{p}}} \to 0$. Porém isto é um absurdo, pois a integral anterior converge para 0, mas de acordo com (5.41), deveria convergir para 1.

Portanto, v não pode ser como no item (i) do Lema 36, donde obtemos que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada.

□

Proposição 27. *O funcional I definido em* (5.2) *satisfaz* (I_4).

Demonstração. Com efeito, seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$, tal que existe $b > 0$, satisfazendo $(I(u_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset [c - b, b + c]$, para algum $c > 0$, e além disso, $(1 + ||u_n||)||I'(u_n)|| \to 0$, quando $n \to \infty$. Suponhamos por absurdo que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja ilimitada em E, donde existe uma subsequência $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ satisfazendo $||u_{n_k}|| \to \infty$.

Observemos então que, da compacidade de $[c-b, b+c]$, existe uma (sub)subsequência $(u_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$, de forma que, como $(I(u_{n_{k_j}}))_{j\in\mathbb{N}} \subset [c-b, c+b]$, tal que $I(u_{n_{k_j}}) \to d$, para algum $d \in [c - b, c + b]$. Assim, $(u_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cerami (do funcional I) de nível d. Do Lema 37, $(u_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em E. Retirando a subsequência $(u_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$, podemos repetir o argumento anterior e obter infinitas subsequências limitadas de $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, donde segue que a sequência é limitada, mas isto é a contradição que desejávamos. □

Teorema 17. *Sejam V satisfazendo* (V_1)*,* (V_2) *e* (V_3)*, h satisfazendo* (h_1) *e f satisfazendo* (f_1)-(f_3)*. Então o funcional I definido em* (5.2) *possui valor crítico.*

Demonstração. Inicialmente, notemos que, admitindo as hipóteses (V_1), (V_2), (h_1), (f_1)-(f_3), do Lema 34, o funcional I definido em (5.2) é $C^1(H^s(\mathbb{R}^n), \mathbb{R})$. Além disso, pelas Proposições 24, 25 e 27, segue que I satisfaz (I_1), (I_2) e (I_4). Adicionando a hipótese (V_3), decorre que I também satisfaz (I_3). Do Teorema Abstrato de Linking 16, segue que $c \geq \alpha > 0$ (α obtido na construção da Proposição 26) é valor crítico de I. Noutras palavras, c é valor crítico de (5.2), como desejávamos. $\square$

REFERÊNCIAS

1 AMARAL, C; G. S., FIGUEIREDO, G.M.; JUNIOR, J.C.D.O. A non-periodic indefinite variational problem in RN with critical exponent. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 66(2), 579-612, 2023.

2 BARTLE, R. G. Elements of Integration and Lebesgue Measure. John Wiley Sons, Inc., 1966.

3 BENCI, V.; FORTUNATO, D. Variational methods in nonlinear field equations. Solitary waves, hylomorphic solitons and vortices. Springer Monographs in Mathematics, 2014.

4 BENCI, V.; RABINOWITZ, P. H. Critical Point Theorems for Indefinite Functionals. Inventiones Math. 52, 241-273, 1979.

5 BISCI, G. M.; RADULESCU, V.; SERVADEI R. Variational methods for nonlocal fractional problems, Volume 162, Cambridge University Press, 2016.

6 BORTHWICK, D. Spectral Theory - Basic Concepts and Applications. Graduate Texts in Mathematics, Springer, Cham 2020.

7 BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. Fundamentos de Análise Funcional. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Textos Universitários, 2014

8 BREZIS, H. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. New York: Universitext, Springer, 2011.

9 COSTA, D.; TEHRANI, H. Existence and multiplicity results for a class of Schrödinger equations with indefinite nonlinearities. Adv. in Differential Equations 8, 1319-1340, 2003.

10 DEIMLING, K. Nonlinear Functional Analysis. New York, Springer-Verlag, 1985.

11 DEMENGEL, F.; DEMENGEL, G. Functional Spaces for the Theory of Elliptic Partial Differential Equations. London: Universitext, Springer, 2012.

12 DI NEZZA, E.; PALATUCCI, G. ; VALDINOCI, E. Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces. Bull. Sci. Math. 136(5), 521-573, 2012.

13 FELMER, P.; QUAAS A.; TAN J. Positive solutions of the nonlinear Schrödinger equation with the fractional Laplacian. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics. 142(6), 1237-1262, 2012.

14 FOLLAND, G. B. A guide to advanced Real Analysis. The Mathematical Association of America, 2009.

15 LASKIN, N. Fractional quantum mechanics and Lévy path integrals. Phys Lett A. 268(4–6), 298–305, 2000.

16 LI, Q.; ZOU, W. The existence and multiplicity of the normalized solutions for fractional Schrödinger equations involving Sobolev critical exponent in the -subcritical and -supercritical cases. Adv. Nonlinear Anal. 11, 1531–1551, 2022.

17 LUO, H.; ZHANG, Z. Normalized solutions to the fractional Schrödinger equations with combined nonlinearities. Calc. Var. 59, 143, 2020.

18 MAIA, L.; SOARES, M. An abstract linking theorem applied to indefinite problems via spectral properties. Advanced Nonlinear Studies, Volume 19, Issue 3, Pages 545–567, 2019.

19 RUBIM, C.; TOON, E. Spectral Decomposition of $H^s(\mathbb{R}^n)$ applied to asymptotically linear fractional elliptic problems. Em fase de elaboração.

20 RUDIN, W. Real and Complex Analysis. New York, McGraw-Hill Inc., 1987.

21 SCHILLING, R. Measures, Integrals and Martingales. Cambridge University Press, 2005.

22 SCHMÜDGEN, K. Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space. New York: Graduate Texts in Mathematics, 2014.

23 SHANG, X. ZHANG, J. Ground states for fractional Schrödinger equations with critical growth. Nonlinearity. 27(2):187–207, 2014.

24 STUART, C. An Introduction to Elliptic Equations on RN. Trieste Notes, 1998.

25 TOON, E. UBILLA, P. Existence of positive solutions of Schrödinger equations with vanishing potentials. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 40(10), 5831-5843, 2020.

26 WEIDMANN, J. Linear Operatos in Hilbert Space. New York: Springer Graduate Text in Mathematics, Springer-Verlag, 1980.

APÊNDICE A – RESULTADOS ADICIONAIS

Teorema 18. *[Teorema de Riesz]([7], Teorema 5.5.2, p.126) Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\phi : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então, existe um único $y_0 \in \mathcal{H}$ tal que*

$$\phi(x) = \langle x, y_0 \rangle.$$

Teorema 19. *[Teorema do Gráfico Fechado]([7], Teorema 2.5.1, p.45) Sejam E e F dois espaços de Banach e $T : E \to F$ um operador linear. Então T é contínuo se, e somente se o gráfico de T, $G(T)$, é fechado em $E \times F$.*

Teorema 20. *[Teorema da Convergência Dominada]([2], Teorema 5.6, p. 44) Sejam (Ω, Σ, μ) um espaço de medida, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções da forma $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ mensuráveis quanto a Σ, e uma função $g : \Omega \to \mathbb{R}$ com $g \in L^1(\Omega, \mu)$, satisfazendo*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ $\mu-$*q.t.p. em* Ω;

(ii) $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\mu-$*q.t.p. em* Ω.

Então $f \in L^1(\Omega, \mu)$ e

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x) d\mu = \int_\Omega f(x) d\mu.$$

Teorema 21. *[Teorema da Convergência Monótona]([2], Teorema 4.6, p. 31) Sejam (Ω, Σ, μ) um espaço de medida, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções da forma $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, mensuráveis quanto a Σ, satisfazendo*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ $\mu-$*q.t.p. em* Ω;

(ii) $0 < f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ $\mu-$*q.t.p. em* Ω.

Então

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x) d\mu = \int_\Omega f(x) d\mu.$$

Teorema 22 (Lema de Fatou)**.** *([2], Teorema 4.8, p. 33) Sejam (Ω, Σ, μ) um espaço de medida, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções da forma $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, mensuráveis quanto a Σ, tais que $f_n(x) > 0$ $\mu-$ q.t.p. em Ω. Então*

$$\lim \inf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x) d\mu \geq \int_\Omega \lim \inf_{n\to\infty} f_n(x) d\mu.$$

Teorema 23. *([21] Teorema 8.8, p.61) Sejam (Ω, Σ) um espaço mensurável e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então existe uma sequência de funções simples $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mensuráveis, tal que $f_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em Ω, e mais ainda, $|f_n| \leq |u|$. Mais ainda, se $u \geq 0$, é possível tomar a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$.*

Definição 18. *([11], Definição 2.65, p.91) O aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é dito domínio de Lipschitz se*

(1) Existe uma cobertura aberta $(\Omega_i)_{i\geq 0}$ tal que $d(\Omega_0, \Omega) > 0$, para todo $i \geq 1$, Ω_i é limitado, $\Omega_i \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, e ou a família $\{\Omega_i\}$ é finita, ou

$$\exists k \geq 2, \ \ |i-j| \geq k \implies \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset.$$

(2) Existe um subconjunto aberto O_i' de $\mathbb{R}^{n-1}$, uma função a_i Lipschitz em O_i', e um sistema de coordenadas tal que, após uma permutação de coordenadas se necessário, satisfaz

$$\Omega_i \cap \Omega \subset \{(x', x_n) : x' \in O_i', \ x_n > a_i(x')\},$$
$$\Omega_i \cap \partial\Omega = \{(x', a_i(x')) : x' \in O_i'\}.$$

(3) Existe uma partição da unidade $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ subordinada à cobertura Ω e constantes C_1 e C_2 tais que

$$||\phi_i||_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \ \ e \ \ ||a_i||_{W^{1,\infty}(O_i^1)} \leq C_2, \ \ \forall i$$

Teorema 24. *[Teorema de Riesz para medidas]([20], Teorema 6.19) Sejam Ω um espaço de Hausdorff compacto e $C(\Omega, \mathbb{R})$ o espaço de Banach das funções contínuas definidas sobre Ω, equipadado com a norma do supremo. Para cada funcional $F \in C(\Omega, \mathbb{R})$, então existe uma única medida μ complexa definida sobre a σ-álgebra de Borel de Ω, tal que*

$$F(f) = \int_\Omega f d\mu, \ \ \forall f \in C(\Omega, \mathbb{R}.)$$

Teorema 25. *([7], Corolário 5.4.5, p.125) Todo espaço de Hilbert é separável.*

Teorema 26. *[Teorema de Fubini]([8], Teorema 4.5, p.91) Sejam $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ dois espaços de medida. Se $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$, então*

$$\int_{\Omega_1} d\mu_1 \int_{\Omega_2} F(x,y) d\mu_2 = \int_{\Omega_2} d\mu_2 \int_{\Omega_1} F(x,y) d\mu_1 = \int d\mu_1 \int_{\Omega_1\times\Omega_2} F(x,y) d\mu_1 \times d\mu_2$$

Teorema 27 (Formula de Plancharel)**.** *([14], Teorema 6.14, p.93) Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, vale*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} F(f)(\xi)\overline{F(g)(\xi)} d\xi.$$

Teorema 28. *([10], Teorema 26.1, p.333) Sejam X, Y espaços de Banach definidos sobre $\mathbb{R}$, $B_r(x_0) \subset X$, $\phi : B_r(x_0) \to \mathbb{R}$ e $F : B_r(x_0) \to Y$ aplicações continuamente diferenciáveis. Suponhamos ainda que $F(x_0) = 0$, $R(F'(x_0))$ seja um conjunto fechado e*

$$\phi(x_0) = min\{\phi(x) : x \in B_r(x_0), F(x) = 0\}.$$

Então, existe um "multiplicador de Lagrange"$\lambda \in \mathbb{R}$ e $y^* \in Y^*$ não todos nulos, tal que

$$\lambda\phi'(x_0) + (F'(x_0))^* y^* = 0. \tag{.1}$$

Teorema 29. *([26], Teorema 24, p.76) Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $(\mathcal{H}$ e $\langle f_n, g\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy para todo $g \in M$, onde M é um subconjunto denso de $\mathcal{H}$, então existe $f \in \mathcal{H}$ tal que $f_n \rightharpoonup f$.*

Teorema 30. *([26], Teorema 4.25, p.77) Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $\mathcal{H}$, então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ fracamente convergente.*

Teorema 31. *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador linear limitado. Então, dado $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$, $R(T - \lambda I)$ é um conjunto fechado em $\mathcal{H}$.*

Definição 19. *Seja E um espaço de Banach e $\phi : E \to \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que ϕ é fracamente contínuo se, para toda sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$, tal que $u_n \rightharpoonup u$, para algum $u \in E$, então $\phi(u_n) \to \phi(u)$.*

Definição 20. *Seja E um espaço de Banach e $\phi : E \to \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que ϕ é uniformemente diferenciável em subconjuntos limitados de E se, para quaisquer $R, \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, independente de u, tal que*

$$|\phi(u + v) - \phi(u) - \phi'(u)v| < \epsilon||v||, \quad \forall u, u + v \in B_R, \ e \ ||v|| < \delta.$$

Teorema 32. *[Lema de Brézis-Lieb] Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ subconjunto aberto e $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$, para $1 \leq p < \infty$. Se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^p(\Omega)$ e $u_n \to u$, q.t.p. em Ω, então*

$$\lim_{n\to+\infty}(||u_n||^p_{L^p(\Omega)} - ||u - u_n||^p_{L^p(\Omega)}) = ||u||^p_{L^p(\Omega)}.$$

Teorema 33. *[Teorema de Vainberg]([8], Teorema 4.9, p.94) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto Lebesgue mensurável, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, tais que $f_n \to f$ em $L^p(\Omega)$. Então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $g \in L^p(\Omega)$, tais que*

(i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω*;*

(ii) $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ *q.t.p. em* Ω*, para todo* $k \in \mathbb{N}$*.*

Teorema 34. *([13], Lema 2.2) Sejam $n \geq 2$ e $s \in (0, 1)$. Se $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $H^s(\mathbb{R}^n)$ que satisfaz*

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \int_{B_r(y)} |u_k(x)|^2 dx = 0$$

para algum $r > 0$, então $u \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$, para $2 < p < 2^*_s = \dfrac{2n}{n - 2s}$.

Teorema 35. *([5], Proposição 3.1, p.64) Sejam $s \in (0, 1)$, $n > 2s$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado e aberto, $K : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} :\to (0, +\infty)$ uma função satisfazendo*

- $mK \in L^1(\mathbb{R}^n)$*, onde* $m(x) = \min\{|x|^2, 1\}$*,*

- *existe $\theta > 0$ tal que $K(x) \geq \theta |x|^{-(n+2s)}$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,*

e

$$X_0^s(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) : ||u||_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} |u(x) - u(y)|^2 K(x-y)dxdy < \infty, u|_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} = 0 \right\}.$$

Então existe um escalar λ_1 positivo tal que

$$\lambda_1 = \min u \in X_0^s(\Omega), ||u||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1 \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} |u(x) - u(y)|^2 K(x-y)dxdy < \infty, u|_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} = 0.$$

Além disso, existe uma função $e_1 \in X_0^s(\mathbb{R}^n)$ não negativa, com $||e_1||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1$ tal que

$$\lambda_1 = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n} |e_1(x) - e_1(y)|^2 K(x-y)dxdy.$$