

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

RAONY ANTONIO DE ALMEIDA AMORIM

INTRODUÇÃO À TEORIA MOND E TEORIA DO POTENCIAL

Juiz de Fora
Agosto de 2016

RAONY ANTONIO DE ALMEIDA AMORIM

INTRODUÇÃO À TEORIA MOND E TEORIA DO POTENCIAL

Monografia apresentada ao Curso de Física da
Universidade Federal de Juiz de Fora como
requisito para obtenção do título de Bacharel
em Física.

Orientador: Prof. Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes

Juiz de Fora
Agosto de 2016

RAONY ANTONIO DE ALMEIDA AMORIM

INTRODUÇÃO À TEORIA MOND E TEORIA DO POTENCIAL

Monografia apresentada ao Curso de Física da
Universidade Federal de Juiz de Fora como
requisito para obtenção do título de Bacharel
em Física.

Aprovada em de 2016.

Banca examinadora:

.....
Prof. Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes (Orientador)
Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

.....
Prof. Dr. Jorge Ananias Neto
Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

.....
Prof. Dr. Everton C. Murilo de Abreu
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço à minha família que é a minha maior fonte de inspiração, força e determinação. Em especial à minha mãe por cultivar a minha curiosidade sobre o mundo desde criança.

Agradeço imensamente ao meu orientador Prof. Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes pela orientação deste trabalho, por toda paciência, por toda compreensão e por todo conhecimento transmitido a mim.

Agradeço a todos os professores com quem tive contato e que contribuíram para o meu amadurecimento científico. Um agradecimento especial ao Prof. Dr. Wilson Oliveira, que me orientou inicialmente neste projeto e que também me ensinou muito, que descanse em paz.

Agradeço também aos meus amigos, os quais dividi muitos momentos nessa longa jornada que jamais esquecerei. Todas as longas horas de estudos, longos debates sobre ciência e sobre a vida, certamente contribuíram para o meu desenvolvimento como pessoa e como cientista.

Agradeço à Deus, da maneira que acredito, por todo suporte espiritual e mental.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	6
2. DINÂMICA NEWTONIANA.....	8
2.1 Leis de Newton.....	8
2.2 Gravitação Newtoniana.....	10
2.3 Limites da Mecânica Newtoniana.....	11
3. MODIFICAÇÃO NA DINÂMICA NEWTONIANA.....	15
3.1 Introdução	15
3.2 Teoria MOND.....	17
3.3 Distribuição de Massa para Galáxias Espirais.....	22
4. O POTENCIAL	24
4.1 Introdução à Teoria do Potencial.....	24
4.2 Potencial em uma Distribuição Esférica.....	27
4.3 Potencial em uma Distribuição Discoidal.....	28
5. CONCLUSÃO.....	34
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	36

1. INTRODUÇÃO

Uma descrição bem elaborada das massas das galáxias é de fundamental importância para entendermos a formação e a evolução das galáxias, assim como o nosso Universo. Afim de investigar tais propriedades, no início da década de 30, o físico suíço Fritz Zwicky teve a ideia de calcular a massa do aglomerado de galáxias de COMA [1]. Ele registrou um problema interessante: a quantidade de matéria necessária para que o aglomerado tivesse a dinâmica constatada por dados observacionais era muito inferior à quantidade encontrada em seus cálculos. Ele denominou essa massa faltante de “matéria invisível” e posteriormente de “matéria escura”, já que não se detectava por meio de nenhuma faixa do espectro eletromagnético, apenas por interações gravitacionais. Mas como na época, ele não era tão reconhecido, a comunidade científica não deu grande importância para tal feito.

Anos depois, uma astrônoma chamada Vera Rubin, ao analisar as curvas de rotação de várias galáxias espirais [2], constatou que não estavam de acordo com o previsto pela lei da gravitação universal. Uma vez que a massa das galáxias está situada predominantemente em seu centro, esperava-se que a velocidade orbital das estrelas fosse proporcional ao inverso do quadrado da distância ($v \propto r^{-1/2}$). Observou-se, porém, que as curvas se mantinham constantes após um aumento inicial, o que significava que as estrelas distantes do centro galáctico se moviam tão rápido quanto as estrelas mais próximas. Claro que algo deveria estar causando esse fenômeno na velocidade e baseado nas leis da dinâmica, faltava massa nessas galáxias além da quantidade observada e tal interação apenas gravitacionalmente. Foi então que a ideia da matéria exótica nomeada como matéria escura voltou à tona. Mas como ainda nos dias atuais não foi detectada a não ser por meio da interação gravitacional, tentativas para explicar o fenômeno das velocidades orbitais foram surgindo.

Na década de 80, o físico israelense Mordehai Milgrom propôs um modelo que pretendia explicar as curvas de rotação das galáxias espirais, modelo esse

desenvolvido como uma alternativa à matéria escura. Milgrom propôs alterar a dinâmica newtoniana de forma que descrevesse em boa aproximação a curva de rotação sem perder a validade na física clássica. Tal modelo ficou conhecido como “*Modified Newtonian Dynamics*” (MOND) [3], que é melhor traduzida para o português como “Dinâmica Newtoniana Modificada” e que veremos com mais detalhes adiante.

A monografia está estruturada da seguinte forma: o segundo capítulo trata-se de uma revisão da Segunda Lei de Newton e da sua Lei da Gravitação, assim como suas limitações; o terceiro capítulo trata-se de uma revisão de algumas evidências observacionais que levaram ao surgimento da teoria da matéria escura. Aqui também apresentaremos a Dinâmica Newtoniana Modificada (MOND) e fazemos um comentário sobre a massa das galáxias espirais para analisar a dinâmica nas mesmas. No quarto capítulo, introduzimos a Teoria de Potencial proposto por Binney & Tremaine em *Galactic Dynamics* e utilizamos as distribuições esférica e discoidal de massa para calcular os potenciais gravitacionais no regime da dinâmica newtoniana. No quinto capítulo apresentamos nossas conclusões e considerações finais sobre nosso estudo.

2. DINÂMICA NEWTONIANA

2.1. Leis de Newton

A mecânica pode ser considerada a ciência física mais antiga. Nela trata-se de estudos sobre condições de equilíbrio e movimento. E quem elaborou de maneira organizada e sistemática esses estudos foi Isaac Newton. Ele contribuiu muito para a ciência quando formulou as suas leis do movimento, publicada nos seus três livros conhecidos como “*Principia*”. Nesses livros ele constrói a base para a dinâmica estabelecendo relações entre a massa do corpo e seu movimento.

A Primeira Lei de Newton, conhecida como Lei da Inércia, diz que em ausência de forças externas, um corpo em repouso permanece em repouso e um corpo em movimento permanece em movimento até que alguma força atue sobre o corpo mudando seu estado. Deu-se o nome de Inércia para essa propriedade do corpo de resistir à mudança de seu movimento. A relação da inércia de um corpo foi descrita com a seguinte relação:

$$\vec{p} \propto \vec{v}. \quad (2.1.1)$$

Que nos diz que a grandeza denominada *momentum* (ou momento) é proporcional à velocidade do corpo. Sendo assim, a constante de proporcionalidade é a propriedade do corpo chamada massa. Logo, a expressão (2.1.1) fica:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (2.1.2)$$

A Segunda Lei de Newton, também conhecida como Princípio Fundamental da Dinâmica, relaciona a força resultante aplicada ao corpo e a variação de sua velocidade. A essa mudança na velocidade, ele associa uma grandeza chamada aceleração, que é a grandeza física que nos diz a que taxa a velocidade do corpo está sendo alterada. Então temos que:

$$\vec{F} \propto \vec{a}. \quad (2.1.3)$$

Logo, a constante de proporcionalidade que transforma a relação acima em uma equação é novamente a propriedade do corpo chamada massa. Então temos que:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (2.1.4)$$

E como sabemos que a aceleração é a grandeza que relaciona a que taxa a velocidade do corpo varia, podemos escrever a força resultante em termos do momento do corpo, como:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (2.1.5)$$

A Terceira Lei de Newton, conhecida como par ação e reação, estabelece que quando dois corpos interagem entre si, o primeiro corpo exerce uma força no segundo corpo (ação) e o segundo corpo exerce uma força com mesma magnitude, direção, porém sentido oposto à força do primeiro (reação). Mesmo com o fato da força do par ação e reação ter a mesma intensidade, seus efeitos serão estabelecidos dependendo da massa e das características de cada corpo. Esta força pode ser oriunda de um contato direto ou por interação à distância, como iremos ver a seguir.

Newton deu muitas contribuições por meio de suas leis. Pois com elas é possível estudar vários fenômenos e a criar várias outras teorias científicas. Na época, Newton acreditou que suas leis se aplicaria a todo o universo, contudo, sabemos nos dias atuais que em altas velocidades ou para dimensões atômicas, suas previsões falham. Esse fato não mostra que Newton estava errado, mas que sua teoria apesar de parecer completa, tem limites para aplicações.

2.2. Lei da Gravitação Newtoniana

Isaac Newton, conseguiu explicar com suas leis desde a dinâmica de corpos pequenos à atração entre os corpos celestes. Estudando movimentos celestes ele concluiu que a interação entre tais era a mesma interação que nos prendia à superfície terrestre. E esta força, denominada força gravitacional era válida entre quaisquer corpos no universo.

Newton estudou as leis de Kepler e aplicou as considerações em suas leis [4]. Ele concluiu que para uma órbita circular de raio R , a Segunda Lei de Kepler implica que o movimento é uniforme, a aceleração é centrípeta (central) e de velocidade angular $\omega = \frac{2\pi}{T}$, onde T é o período. Então:

$$\vec{a} = -\omega^2 R \hat{r} = -4\pi^2 \frac{R}{T^2} \hat{r}, \quad (2.2.1)$$

onde \hat{r} é o vetor unitário na direção radial. Se m é a massa do planeta, a força que atua sobre ele é dada pela Segunda Lei de Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a} = -4\pi^2 \frac{R}{T^2} \hat{r}, \quad (2.2.2)$$

que é uma força atrativa central. Usando a Terceira Lei de Kepler, juntamente com sua Terceira Lei, Newton chegou à seguinte relação:

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r}, \quad (2.2.3)$$

onde $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{Nm}^2 \text{Kg}^{-2}$ é a constante universal característica da gravitação, m e M são as massas, r é a distância radial e \hat{r} é o vetor unitário na direção radial. Essa é a conhecida Lei da Gravitação de Newton. Que pode ser enunciada como: “a interação gravitacional entre dois corpos pode ser expressa por uma força central atrativa, proporcional às massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles”.

2.3 Limites da Mecânica Newtoniana

Como já havíamos dito, a mecânica newtoniana não descreve bem fenômenos em escalas diminutas (de nível atômico) e nem fenômenos que as velocidades são próximas à da luz. Para estudar tais situações, devemos utilizar a Mecânica Quântica para pequenas escalas e a Relatividade de Einstein para sistemas com velocidades próximas à da luz.

Velten, em seu artigo “MOND: Uma alternativa à Mecânica Newtoniana” [5], evidencia a limitação da Mecânica Newtoniana no estudo do movimento dos corpos celestes orbitando ao redor do centro de uma galáxia ou aglomerado de galáxias. Ele faz também a observação de que a Relatividade de Einstein utiliza o fator de Lorentz para a dinâmica dos corpos em questão. Ele utiliza do seguinte exemplo para demonstrar a não necessidade da utilização da correção relativística, fazendo o seguinte cálculo: Consideremos uma galáxia qualquer no aglomerado de galáxias de COMA. Sabendo que sua velocidade típica é $v \sim 7000 \text{ m/s}$ e utilizando o fator de Lorentz:

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (2.3.1)$$

Velten chega a um valor de $\gamma \sim 0,9997$ e com isso, a uma correção relativística de somente 0,03%, a qual apesar da clareza, pode ser dispensável sem perda de coerência.

Sabendo então que podemos negligenciar a correção relativística na velocidade dada pelo fator de Lorentz, podemos utilizar em nossos estudos o tratamento clássico por Newton.

Considerando um sistema com um corpo celeste de massa m orbitando outro de massa M , podemos tratar esse sistema como um caso de força central, no caso força gravitacional. Se $M \gg m$, sendo r a distância orbital entre eles, aplicando a Terceira Lei de Newton para esse sistema, temos:

$$\vec{F} = m \vec{a},$$

$$\frac{GMm}{r^2} = m \frac{v^2}{r}, \quad (2.3.2)$$

onde foi utilizado que $a = \frac{v^2}{r}$. Podemos ainda encontrar a velocidade orbital do corpo de massa m :

$$\frac{GM}{r^2} = \frac{v^2}{r},$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (2.3.3)$$

Podemos fazer um outro cálculo simples. Tomemos como exemplo o problema da curva de rotação proposto em [5]. Simplificaremos o problema se modelarmos a galáxia como uma distribuição esfericamente simétrica de massa M , de raio R , com densidade constante e igual a ρ , assim pela Fig. 1, temos:

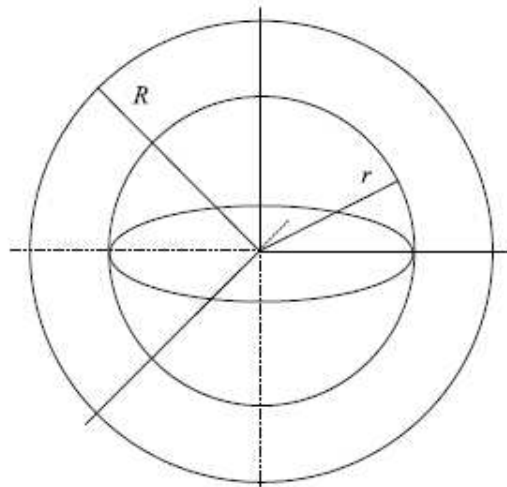


Figura 1 – Representação Esfericamente Simétrica para uma galáxia de raio R .

Fonte: VELTEN, 2008, p.3314-2.

Então devemos estudar dois casos: $r < R$ e $r > R$:

Para $r < R$:

Vamos imaginar um corpo de massa de prova m' situado a uma distância r do centro da galáxia de raio R , cuja densidade é constante e igual a ρ . A simetria esférica desta galáxia nos permite escrever a massa interior ao raio r como $m = \rho \frac{4\pi}{3} r^3$. Assim garantimos que a força gravitacional sentida pelo corpo de prova é devida somente à atração gravitacional exercida pela massa no interior ao raio r . Então temos que:

$$\frac{Gmm'}{r^2} = \frac{m'v_{ni}^2}{r}, \quad (2.3.4)$$

sendo v_{ni} a velocidade do corpo de prova de massa m' no interior da galáxia na abordagem newtoniana. Considerando a massa da galáxia constante, podemos relacionar a massa m com M por meio de $m = \frac{Mr^3}{R^3}$ e substituir na expressão (2.3.4), teremos então:

$$v_{ni} = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} r. \quad (2.3.5)$$

Esse resultado nos mostra que a velocidade de rotação de um corpo na região $r < R$ cresce linearmente conforme a distância r ao centro da galáxia.

Para $r > R$:

Essa região se trata do exterior da galáxia, situação onde o corpo de prova de massa m' está a uma distância $r > R$. Nesse caso podemos considerar que toda massa M da galáxia está concentrada no seu centro. Então, a expressão da força gravitacional fica:

$$\frac{GMm'}{r^2} = \frac{m'v_{ne}^2}{r}, \quad (2.3.6)$$

onde v_{ne} é a velocidade do corpo de prova de massa m' no exterior da galáxia na abordagem newtoniana. Que podemos explicitar da seguinte forma:

$$v_{ne} = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (2.3.7)$$

Desta forma, concluímos que a velocidade do corpo diminui à medida que ele se afasta da órbita na região $r > R$.

Quando $r = R$, as duas expressões para a velocidade do corpo fornecem o mesmo valor:

$$v_{ni} = v_{ne} = \sqrt{\frac{GM}{R}}, \quad (2.3.8)$$

isto significa que na fronteira da galáxia, a expressão da velocidade no interior é igual à velocidade no exterior, como é de se esperar.

3. MODIFICAÇÃO DA DINÂMICA NEWTONIANA

3.1. Introdução

O matemático francês Urbain Le Verrier previu a existência de um corpo que exercia alguma influência gravitacional sobre Urano. Mais tarde, essa influência foi atribuída a Netuno e observações posteriores da órbita dos dois planetas indicava a presença de outro corpo ainda não identificado, o que levou à descoberta de Plutão. Este fato remonta a cena do problema da matéria escura, onde a influência gravitacional foi o agente identificador de uma quantidade de matéria ainda não detectada.

Historicamente, a ideia da matéria escura foi proposta pelo físico Fritz Zwicky no início da década de 30. Essa proposta foi uma consequência após calcular a massa gravitacional do aglomerado de galáxias de COMA. Para esse feito, ele usou o Teorema do Virial [1], pois como não temos certeza das verdadeiras distâncias das galáxias orbitando em torno do centro do aglomerado e suas verdadeiras velocidades, teve-se a ideia de usar médias para ambas as grandezas, logo o Teorema do Virial foi de grande valia.

Zwicky percebeu que as velocidades das galáxias individuais dentro do aglomerado de galáxias de COMA eram grandes, e este aglomerado só poderia estar gravitacionalmente ligado se a massa total do aglomerado fosse superior à soma das massas das galáxias individuais [6]. Parte da matéria não luminosa nos aglomerados de galáxias estaria em torno das galáxias, região denominada halo, enquanto que outra parte estaria distribuída em outras regiões. Ele constatou também que essa massa que deveria existir só interagiria de forma gravitacional, sendo assim a única forma de detectá-la. Desde então, cientistas vem tentando descobrir mais sobre a natureza dessa possível massa invisível ao espectro eletromagnético.

Anos mais tarde, uma astrônoma chamada Vera Rubin teve a ideia de estudar a curva de rotação de galáxias espirais [2]. Curva de rotação se refere à velocidade que uma estrutura (no caso estrelas pela fácil detecção) orbita uma região. Sabemos que de acordo com a dinâmica Newtoniana que a velocidade orbital das estrelas em uma galáxia deveria ser proporcional ao inverso do quadrado da distância ($v \propto r^{-1/2}$). Porém, Rubin observou que as curvas se mantinham constantes após determinada distância do centro de todas as galáxias espirais que ela investigou, ou seja, todas tinham o mesmo comportamento (Fig.2).

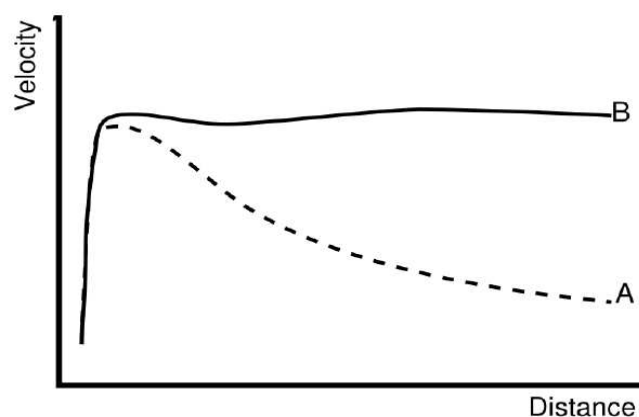


Figura 2 – Curva de Rotação das estrelas em uma galáxia espiral prevista pela Mecânica Newtoniana (A) e curva de rotação observada (B)

Fonte: ANGÉLIL, 2008, p. 4

Este fato retomou a ideia da matéria invisível proposta por Zwicky. A quantidade de matéria escura evidenciada era de proporções consideráveis mesmo após a descoberta da presença de um gás que permeia os aglomerados. Evidentemente a quantidade de massa calculada por Zwicky foi maior, pois até então, esse gás ainda não havia sido estudado. Mesmo assim, devido à quantidade de massa e às curvas de rotação, a matéria escura não foi descartada.

A natureza dessa matéria escura ainda continua um mistério. Sabe-se que ela não emite radiação eletromagnética, logo não é detectada em nenhuma faixa

do espectro eletromagnético entre as frequências de rádio até raios X. Sabe-se também que ela não é bariônica (classe de partículas onde os prótons e nêutrons estão incluídos).

A ideia da matéria escura beneficiou não somente a explicação das curvas de rotação, bem como o processo de formação de galáxias. Pois a sua existência teria possibilitado uma maior velocidade de crescimento das aglomerações primordiais de matéria e viabiliza o surgimento de estruturas como galáxias e aglomerados de galáxias em um tempo próximo daquele que conhecemos como a idade do universo. Porém, como a natureza das partículas que compõe essa matéria ainda não foi detectada, novas teorias alternativas estão surgindo cada vez mais na tentativa de explicar esse fenômeno.

3.2. Teoria MOND

Uma maneira alternativa de compreender o problema das curvas planas de rotação de galáxias, sem invocar a presença de matéria escura em volta das galáxias, é o de alterar a gravidade Newtoniana. Os primeiros modelos empíricos enfatizavam uma modificação da gravitação em largas escalas, mas Milgrom demonstrou que para um modelo ser consistente, a modificação deveria ocorrer a partir de uma escala aceleração e não a partir de uma escala distância [8]. A primeira proposta satisfatória, na forma de uma lei empírica, em modificar a dinâmica Newtoniana foi feita por Mordehai Milgrom no início dos anos 80 e ficou conhecida como MOND (Modified Newtonian Dynamics) [3], na qual a dinâmica Newtoniana deve ser modificada nas regiões onde a aceleração das partículas testes que se encontram na periferia das galáxias e é menor que a_0 [3]. Onde $a_0 = 1,2 \times 10^{-8} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$, é uma constante e tem dimensão de aceleração. A Teoria MOND prediz que a familiar igualdade entre a aceleração \vec{a} da partícula teste e o campo Newtoniano \vec{g}_N não se mantém necessariamente. Milgrom considerou a possibilidade da Segunda Lei de Newton não estar completa, e que o termo de inércia não fosse proporcional à aceleração do corpo, mas uma função mais geral que engloba os efeitos para a aceleração a_0 . Então ele sugeriu que invés de $\vec{F} = m\vec{a}$, escrevêssemos:

$$\vec{F} = m\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)\vec{a}. \quad (3.2.1)$$

Apesar de várias tentativas, não se sabe a forma exata da função μ . Mas sabemos que seu comportamento assintótico é descrito por [8]:

$$\begin{aligned} \mu(x) &\approx 1, \text{ se } x \gg 1 \\ \mu(x) &\approx x, \text{ se } x \ll 1, \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

onde $x = a/a_0$.

Por essa expressão podemos observar que quando $a \gg a_0$, a razão $x = a/a_0$ é grande, o que nos leva a $\mu(x) \approx 1$, o que retoma a Segunda Lei de Newton. No caso de pequenas acelerações $a \ll a_0$, observamos que $\mu(x) \approx x$, e isso implica em uma dinâmica quadrática do tipo $F \propto a^2$. Então temos que:

$$F = m\frac{a^2}{a_0}. \quad (3.2.3)$$

Podemos observar então que a aceleração representa um valor crítico a qual a dinâmica Newtoniana deixa de valer e passamos a utilizar o regime MOND.

Observa-se que na relação (3.2.3), que implica no regime MOND, para produzir uma aceleração é necessário menos força do que no regime newtoniano, já que a aceleração é quadrática. A Fig.3 ilustra esse comportamento.

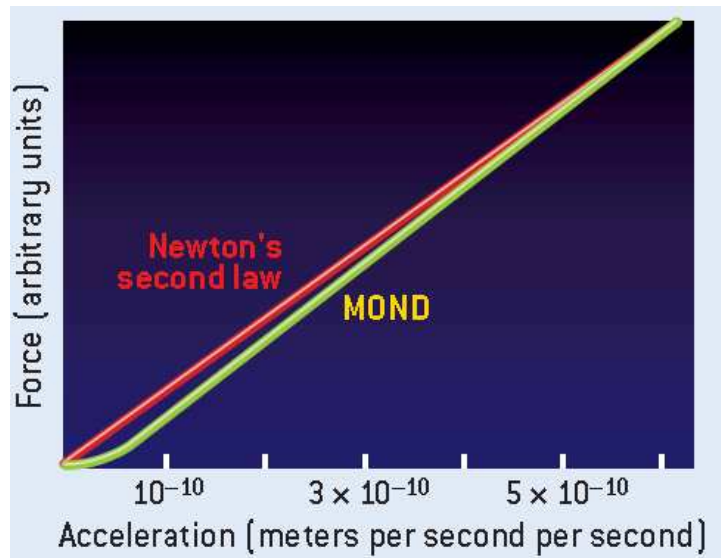


Figura 3 – Relação entre força e a aceleração segundo a Mecânica Newtoniana e MOND

Fonte: Milgrom, 2002, p.44

Se retomarmos o cálculo feito anteriormente para uma distribuição esférica como em [5], e fizermos os cálculos novamente para os dois casos, como feito anteriormente, teremos:

Para $r < R$:

Agora no regime MOND, sabemos que a lei da dinâmica passa a ser expressa pela equação (3.2.3). Essa forma não modifica os conceitos cinemáticos, como por exemplo a aceleração centrípeta. Com isso, precisamos apenas de utilizar a equação (2.3.6) e (3.2.3) e considerar novamente a massa total no interior do raio r através, de $m = Mr^3/R^3$. Encontraremos então:

$$v_{mi} = \left(\frac{GMa_0 r^3}{R^3} \right)^{1/4}. \quad (3.2.4)$$

O índice “ mi ” na velocidade se refere a velocidade determinada pelo regime MOND no interior da galáxia. Esse é o resultado da órbita de uma estrela na região $r < R$. A velocidade é uma função crescente que cresce em função do raio da galáxia seguindo a proporção de $r^{3/4}$.

Para $r > R$:

Neste caso teremos uma estrela orbitando uma região externa da galáxia, novamente podemos considerar a galáxia com sua massa concentrada na origem. Então substituindo a equação (3.2.3) em (2.3.8), temos que:

$$v_{me} = (Gma_0)^{1/4}. \quad (3.2.5)$$

Onde o índice “ me ” se refere à velocidade no regime MOND no exterior da galáxia. Este resultado nos mostra que a velocidade das estrelas na região externa da galáxia não depende da distância, caracterizando um comportamento assintótico plano para a curva de rotação de galáxias. Vemos isso pelo fato de G , M e a_0 serem constantes. Este resultado é o comportamento observado nas curvas de rotação das galáxias espirais e aglomerados de galáxias. Nas referências [9, 10] os autores comprovam a validade do comportamento demonstrado.

Um parâmetro muito utilizado para conferir a validade da teoria MOND é a Relação Tully-Fisher [11]. Ela relaciona a velocidade v de rotação da galáxia e sua luminosidade L . Uma dedução intuitiva pode ser encontrada na referência [12], e que pode ser expressa como:

$$L \propto v^4 \quad (3.2.6)$$

Esta relação é válida para galáxias espirais, pois galáxias mais luminosas tem em média velocidade de rotação maiores que as de outro tipo, implicando serem mais massivas que as demais. Caso a galáxia fosse composta na maior parte por matéria escura, sua massa total teria pouco a ver com a luminosidade e a razão massa-luminosidade deveria ser variável. Utilizando a teoria MOND, é possível notar que a relação (3.2.6) permanece válida.

Podemos ilustrar o problema da curva de rotação de galáxias, testando a velocidade de rotação contra os dados observados para a galáxia UCG4329, situada no aglomerado de Câncer [5].

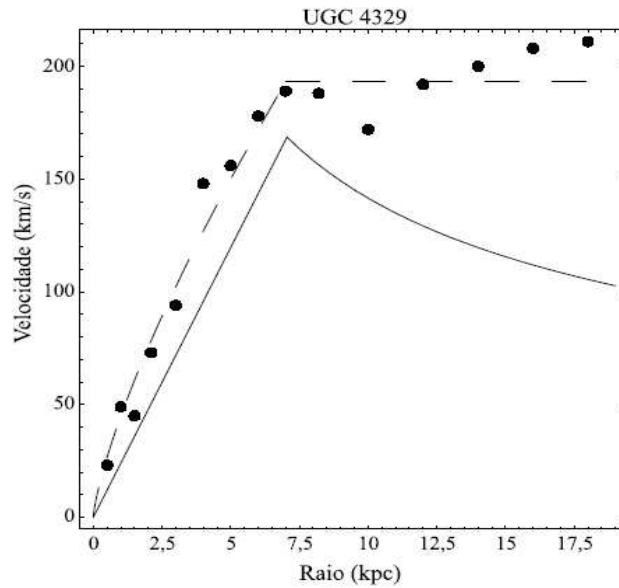


Figura 4 – Curva de rotação para a galáxia UGC4329. A teoria MOND (linha tracejada) e a teoria Newtoniana (linha sólida) são comparadas com os dados observacionais (pontos).
Fonte: Velten, 2008, p.3314/4.

O modelo simplificado que usamos é apenas uma aproximação para uma configuração esfericamente simétrica. Galáxias reais apresentam morfologias bastante distintas. Porém, mesmo sendo um modelo simplificado, percebe-se que a curva fitada com o uso da teoria MOND apresenta melhor concordância com os dados observacionais do que a curva calculada via teoria newtoniana.

Uma outra grandeza física muito importante para o estudo da dinâmica de galáxias é o potencial gravitacional. Utilizando o potencial, podemos encontrar uma expressão para a velocidade circular, como mostraremos adiante no estudo da Teoria do Potencial. Mesmo a relação entre a força e a aceleração não sendo linear, podemos obter o campo gravitacional a partir do potencial gravitacional.

$$\vec{g}_N = -\vec{\nabla}\Phi_N, \quad (3.2.7)$$

onde \vec{g}_N é o campo gravitacional newtoniano e Φ_N é o potencial gravitacional newtoniano. Isto implica que o potencial também pode ser modificado.

O potencial gravitacional newtoniano, pode ser determinado pela equação de Poisson que relaciona o campo gravitacional com a distribuição de massa ρ :

$$\nabla^2 \Phi_N = 4\pi G \rho , \quad (3.2.8)$$

que mostraremos mais adiante. Outro ponto de extrema importância para o estudo do potencial é a distribuição da massa. A morfologia da galáxia e uma função para sua distribuição de massa devem ser determinadas para garantir que o potencial nos forneça resultados mais próximos do observado.

3.3 Distribuição de Massa para Galáxias Espirais

Para estudar uma galáxia, é de fundamental importância entendermos como sua massa está distribuída e isso depende de sua morfologia. Neste trabalho nos concentraremos em galáxias espirais. Uma das melhores maneiras de fazer esse estudo sobre a massa das galáxias é a partir da velocidade das estrelas devido a atração gravitacional entre elas.

Galáxias espirais tem, em boa aproximação, grande parte das suas estrelas confinadas no plano do disco com órbitas aproximadamente circulares e velocidades dependentes da distância ao centro. A obtenção dessas velocidades de rotação $v(R)$ são feitas a partir da análise do efeito Doppler para o deslocamento das linhas espectrais. Sendo que quando o desvio espectral é para o vermelho significa que a estrutura está se afastando e quando o desvio é para o azul significa que está se movendo no sentido de se aproximar.

Outro ponto importante é que nas galáxias espirais, o movimento das estrelas no disco é dominante sobre o movimento desordenado das estrelas do bojo. Então pode-se assumir que a massa se concentra no bojo interno e montar um gráfico de curva de rotação $v(x) \times R$ para analisar a distribuição de massa com relação à distância do centro da galáxia. Fazendo cálculos análogos aos feitos na seção 2.3, chegamos a:

$$M = \frac{Rv^2(R)}{G} . \quad (3.3.1)$$

À medida que o raio diminui, segundo a equação (3.3.1), a massa deveria diminuir. E é conhecido que nas regiões periféricas das galáxias espirais se tem menos matéria luminosa, indicando menos massa. Porém, os gráficos de curva de rotação observadas, indicam uma região em que a velocidade não diminui como deveria, permanece constante. Isso implicou uma massa faltante causando esse aumento da velocidade de rotação na região que deveria cair. Posteriormente conhecido como problema da matéria escura, como já havíamos comentado.

4. O POTENCIAL

4.1. Introdução à Teoria do Potencial

Devido ao enorme número de estrelas em uma galáxia espiral ($\sim 10^{11}$), seria inviável calcular o potencial de cada estrela, somar todos eles e obter um potencial total. Para contornar esse obstáculo, podemos obter um potencial sugerindo uma densidade proporcional à densidade local de estrelas. Nessa próxima etapa seguimos as sugestões da referência [13].

A partir de agora, nos concentraremos em encontrar um potencial a partir da força gravitacional $\vec{F}(\vec{x})$ por unidade de massa na posição \vec{x} que é gerada pela atração gravitacional de uma distribuição de massa $\rho(\vec{x})$. Esta força gravitacional, segundo Newton, pode ser obtida pela soma das contribuições infinitesimais dado por:

$$\begin{aligned}\delta\vec{F}(\vec{x}) &= G \frac{(\vec{x}'-\vec{x})}{|\vec{x}'-\vec{x}|^3} \delta m(\vec{x}) \\ \delta\vec{F}(\vec{x}) &= G \frac{(\vec{x}'-\vec{x})}{|\vec{x}'-\vec{x}|^3} \rho(\vec{x}) \delta^3(\vec{x}').\end{aligned}\tag{5.1.1}$$

Esta é a força total para cada elemento de volume $\delta^3(\vec{x}')$ localizada na posição \vec{x}' . Então temos que:

$$\vec{F}(\vec{x}) = G \int \frac{(\vec{x}'-\vec{x})}{|\vec{x}'-\vec{x}|^3} \rho(\vec{x}) d^3\vec{x}'.\tag{5.1.2}$$

Definindo um potencial como $\Phi(\vec{x})$ como:

$$\Phi(\vec{x}) = -G \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}'-\vec{x}|} d^3\vec{x}',\tag{5.1.3}$$

usando que:

$$\vec{\nabla}_x \left(\frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}|} \right) = \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3}, \quad (5.1.4)$$

a força gravitacional $\vec{F}(\vec{x})$ pode ser escrita como:

$$\vec{F}(\vec{x}) = G \int \vec{\nabla}_x \left(\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}' - \vec{x}|} \right) d^3 \vec{x}'$$

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \Phi(\vec{x}). \quad (5.1.5)$$

Uma consequência de (5.1.5) é que a força gravitacional é conservativa, pois ela pode ser determinada pelo gradiente do potencial. Em muitos casos determinar a força de maneira direta pode ser uma tarefa não muito simples. Um caminho que facilita a obtenção da força gravitacional é encontrar o potencial e aplicar o gradiente.

Se aplicarmos o operador divergência em ambos os lados da equação (5.1.5), teremos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{x}) = G \int \vec{\nabla}_x \cdot \left(\frac{(\vec{x}' - \vec{x})}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \right) \rho(\vec{x}') d^3 \vec{x}', \quad (5.1.6)$$

e sabendo que:

$$\vec{\nabla}_x \cdot \left(\frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \right) = -\frac{3}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} + \frac{3(\vec{x}' - \vec{x})(\vec{x}' - \vec{x})}{|\vec{x}' - \vec{x}|^5}. \quad (5.1.7)$$

Quando $\vec{x}' - \vec{x} \neq 0$, nós podemos cancelar o fator $|\vec{x}' - \vec{x}|^2$ e então conclui-se que para $\vec{x}' \neq \vec{x}$ teremos:

$$\vec{\nabla}_x \cdot \left(\frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \right) = 0. \quad (5.1.8)$$

Pela equação (5.1.8) podemos perceber que qualquer contribuição da integral da equação (5.1.6) deverá vir somente do ponto $\vec{x}' = \vec{x}$. Devemos restringir o volume de integração para uma esfera pequena de raio h centrada neste ponto. Desde que h seja suficientemente pequeno, podemos assumir que

a densidade será constante dentro deste pequeno volume e retirá-la de dentro da integral da equação (5.1.6). Logo, teremos:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{x}) &= G\rho(\vec{x}) \int_{|\vec{x}'-\vec{x}| \leq h} \vec{\nabla}_x \cdot \left(\frac{\vec{x}'-\vec{x}}{|\vec{x}'-\vec{x}|^3} \right) d^3\vec{x}' , \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{x}) &= -G\rho(\vec{x}) \int_{|\vec{x}'-\vec{x}| \leq h} \vec{\nabla}'_x \cdot \left(\frac{\vec{x}'-\vec{x}}{|\vec{x}'-\vec{x}|^3} \right) d^3\vec{x}' \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{x}) &= -G\rho(\vec{x}) \int_{|\vec{x}'-\vec{x}|=h} \left(\frac{\vec{x}'-\vec{x}}{|\vec{x}'-\vec{x}|^3} \right) d^2\vec{S}' . \quad (5.1.9)\end{aligned}$$

No último passo de (5.1.9) usamos o Teorema da Divergência,

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \int_S \vec{F} d\vec{S} . \quad (5.1.10)$$

Agora que usamos $|\vec{x}' - \vec{x}| = h$ na equação (5.1.9), podemos escrever:

$$d^2\vec{S}' = (\vec{x}' - \vec{x}) h d^2\Omega, \quad (5.1.11)$$

Sendo que $d^2\Omega$ é o elemento infinitesimal de ângulo sólido. Então podemos reescrever a (5.1.9) como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{x}) = -G \rho(\vec{x}) \int d^2\Omega = -4\pi G \rho(\vec{x}), \quad (5.1.12)$$

que usando (5.1.5) também pode ser reescrita como:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho , \quad (5.1.13)$$

que é a conhecida **Equação de Poisson** já mencionada anteriormente na sessão 3.3. Esta equação estabelece a relação entre o potencial Φ e a densidade ρ . Para o caso em que $\rho = 0$, temos:

$$\nabla^2 \Phi = 0 , \quad (5.1.14)$$

que é conhecida como a **Equação de Laplace**.

4.2 Potencial em uma Distribuição Esférica

Os potenciais de diferentes cascas esféricas somam-se linearmente. Para calcularmos o potencial gravitacional em \vec{r} gerado por uma densidade de distribuição arbitrária com simetria esférica $\rho(\vec{r})$, devemos dividir a região em duas partes fazendo a adição das contribuições para o potencial produzido por cascas em $r' < r$ e $r' > r$. Desse modo teremos:

$$\Phi(r) = -4\pi G \left[\frac{1}{r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' + \int_r^\infty \rho(r') r' dr' \right]. \quad (5.2.1)$$

Em uma distribuição de densidade esférica $\rho(\vec{r})$ de uma massa de teste unitária de raio r , a atração gravitacional é inteiramente determinada pela massa no interior de r :

$$\vec{F}(r) = -\frac{GM(r)}{r^2} \hat{e}_r, \quad (5.2.2)$$

onde \hat{e}_r é um vetor unitário com sentido positivo do centro da distribuição para fora dela e $M(r)$ é dado por:

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'. \quad (5.2.3)$$

Outra grandeza muito importante de uma distribuição de massa é sua velocidade circular, $v_c(r)$. Que é definida como sendo a velocidade de uma partícula teste em uma órbita circular de raio r . Esta velocidade é dada por:

$$v_c^2 = r \frac{d\phi}{dr} = \frac{GM(r)}{r}. \quad (5.2.4)$$

Com a equação (5.2.4) podemos estimar a massa de galáxias, aglomerados de galáxias, entre outras.

4.3 Potencial em uma Distribuição Discoidal

A maior parte da luz emitida por uma galáxia espiral típica, vem de um disco fino [14]. Se a massa de uma galáxia é distribuída de maneira homogênea dentro de um disco, podemos resolver o problema apenas com o estudo dinâmico. Porém, uma fração substancial de massa luminosa da galáxia está centrada no disco, isso torna útil o cálculo de um campo gravitacional gerado por um disco idealizado de espessura nula [13].

Podemos calcular o potencial gravitacional de um disco através de algumas técnicas [13], como Integrais Elípticas, Esferóide Achatado ou Funções de Bessel. Neste presente trabalho utilizaremos as Funções de Bessel para encontrar o potencial em um disco. Essa escolha foi feita por sua simplicidade nos cálculos e por ser uma ferramenta já conhecida. Seguiremos os passos de [13] para fazer esses cálculos.

Considerando um disco infinitamente fino e de simetria axial, Toomre em 1962 [15] chegou à uma expressão para o potencial gravitacional $\Phi(R, z)$ resolvendo a Equação de Laplace (5.1.14) utilizando condições de contorno apropriadas. A equação (5.1.14) em coordenadas cilíndricas é:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 . \quad (5.3.1)$$

Utilizando o método de separação de variáveis, podemos escrever:

$$\Phi(R, Z) = J(R)Z(z) , \quad (5.3.2)$$

usando (5.3.2) em (5.3.1), temos:

$$\frac{1}{J(R)R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dJ}{dR} \right) = - \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2 , \quad (5.3.4)$$

onde k é um número arbitrário real ou complexo. Então podemos separar a equação (5.3.4) em:

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0 , \quad (5.3.5)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dJ}{dR} \right) + k^2 J(R) = 0. \quad (5.3.6)$$

Resolvendo a equação (5.3.5), temos:

$$Z(z) = S \exp(\pm kz), \quad (5.3.7)$$

onde S é uma constante que aparece devido à integração. Para resolver a equação (5.3.6), devemos fazer a substituição $u = kR$, logo:

$$\frac{1}{u} \frac{d}{du} \left(u \frac{dJ}{du} \right) + J(u) = 0. \quad (5.3.8)$$

A equação (5.3.8) permanece finita em $u = 0$ e vai a zero para valores grandes de u . Comumente essa solução é escrita como $J_0(u) = J_0(kR)$ e é chamada de função cilíndrica de Bessel de ordem zero [13]. Utilizando esses resultados, temos:

$$\Phi_{\pm}(R, z) = \exp(\pm kz) J_0(kR). \quad (5.3.9)$$

Essas funções são Soluções da equação de Laplace $\nabla^2 \Phi = 0$.

Agora vamos considerar a função:

$$\Phi_k(R, z) = \exp(-k|z|) J_0(kR), \quad (5.3.10)$$

onde k é real e positiva. Temos que $\Phi_k \rightarrow 0$ quando $|z| \rightarrow \infty$ e também temos que $\Phi_k \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$, além disso $J_0(u) \rightarrow 0$ quando $u \rightarrow \infty$. Então Φ_k satisfaz todas as condições necessárias pelo potencial gerado por uma distribuição de densidade isolada: Φ_k é solução $\nabla^2 \Phi = 0$ tanto para $z > 0$ quanto para $z < 0$. A dificuldade se encontra em $z = 0$, pois o gradiente sofre uma descontinuidade, assim, não satisfazendo a Equação de Laplace. Entretanto, podemos contornar esse problema utilizando o teorema de Gauss para avaliar a densidade superficial $\Sigma_k(R)$ da fina camada de distribuição de densidade, que produz essa descontinuidade. Podemos integrar ambos os lados da Equação de Poisson sobre um volume arbitrário contendo uma massa M , aplicar o teorema da divergência e teremos:

$$\int \nabla^2 \Phi d^3 \vec{x} = \int \nabla \Phi \cdot d^2 \vec{S} = 4\pi G \int \rho d^3 \vec{x} = 4\pi G M. \quad (5.3.11)$$

$$\begin{aligned} \int \nabla \Phi \cdot d^2 \vec{S} &= \int \left(\left. \frac{d\Phi}{dz} \right|_{z \rightarrow +0} - \left. \frac{d\Phi}{dz} \right|_{z \rightarrow -0} \right) \vec{k} \cdot \vec{k} dS = 4\pi G \int \rho dS dz \\ &= 4\pi G \int \Sigma(R) dS, \\ &= \left. \frac{d\Phi}{dz} \right|_{z \rightarrow +0} - \left. \frac{d\Phi}{dz} \right|_{z \rightarrow -0} = -kJ_0(kR) - kJ_0(kR) = 4\pi G \Sigma(R), \end{aligned}$$

logo,

$$\Sigma_k(R) = -\frac{k}{2\pi G} J_0(kR), \quad (5.3.12)$$

que representa a densidade superficial. Agora utilizando as equações (5.3.7) e (5.3.10) iremos encontrar o potencial gerado por um disco de densidade superficial arbitrária $\Sigma(R)$. Para isso, devemos achar uma função $S(k)$, de modo que

$$\Sigma(R) = \int_0^\infty S(k) \Sigma_k(R) dk = -\frac{1}{2\pi G} \int_0^\infty k J_0(kR) S(k) dk, \quad (5.3.13)$$

então teremos:

$$\Phi(R, z) = \int_0^\infty S(k) \Phi_k(R, z) dk = \int_0^\infty S(k) J_0(kR) e^{-|z|} dk. \quad (5.3.14)$$

A equação (5.3.14) mostra que $S(k)$ é a Transformada de Hankel de $(-2\pi G \Sigma)$, ver [13]. A Transformada de Hankel tem propriedades que são bastante similares às conhecidas Transformadas de Fourier. Elas obedecem a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} g(k) &= \int_0^\infty f(r) J_\nu(kr) r dr \\ f(r) &= \int_0^\infty g(k) J_\nu(kr) k dk, \end{aligned} \quad (5.3.15)$$

então podemos explicitar $S(R)$ como:

$$S(k) = -2\pi G \int_0^\infty J_0(kR) \Sigma(R) R dR . \quad (5.3.16)$$

Substituindo a equação (3.30) em (3.28), obteremos finalmente o potencial, que será:

$$\Phi(R, z) = -2\pi G \int_0^\infty dk e^{-k|z|} J_0(kR) \int_0^\infty \Sigma(R') J_0(kR') R' dR'. \quad (5.3.17)$$

Se fizermos $z = 0$ em (5.3.14), diferenciarmos ambos os lados e usando a identidade $\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x)$, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial R} &= \int_0^\infty S(k) \frac{\partial J_0(kR)}{\partial R} dk = - \int_0^\infty S(k) J_1(kR) k dk \\ v_c^2(R) &= R \left. \frac{d\Phi}{dR} \right|_{z=0} = -R \int_0^\infty S(k) J_1(kR) k dk . \end{aligned} \quad (5.3.18)$$

Agora precisamos encontrar uma função de distribuição $S(k)$ que depende da forma da expressão da densidade superficial $\Sigma(R)$. Em [13], os autores mostram algumas formas para essa função. Seguindo uma de suas sugestões iremos usar o modelo para um disco exponencial dado por Freeman em 1970 [17]. Esse modelo é:

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 e^{-R/R_d} , \quad (5.3.19)$$

onde R_d é o comprimento de escala do disco. Deste modo, temos:

$$S(k) = -2\pi G \int_0^\infty J_0(kR) \Sigma_0 e^{-R/R_d} R dR . \quad (5.3.20)$$

Os passos para resolver essa integral são mostrados em [16] e resulta em:

$$S(k) = - \frac{2\pi G \Sigma_0 R_d^2}{[1+(kR_d)^2]^{3/2}} . \quad (5.3.21)$$

Esta equação é a forma que $S(k)$ tem para uma distribuição exponencial no disco. Substituindo este resultado em (5.3.17), teremos:

$$\Phi(R, z) = -2\pi G \Sigma R_d^2 \int_0^\infty \frac{J_0(kR) e^{-k|z|}}{[1+(kR_d)^2]^{3/2}} dk, \quad (5.3.22)$$

fazendo $z = 0$, temos:

$$\Phi(R, 0) = -2\pi G \Sigma R_d^2 \int_0^\infty \frac{J_0(kR)}{[1+(kR_d)^2]^{3/2}} dk. \quad (5.3.23)$$

Em [18] são dadas sugestões para resolver a equação (5.3.23). E fazendo a seguinte mudança $y \equiv R/2R_d$ e substituindo em (5.3.23), teremos de acordo com [13] o seguinte resultado:

$$\Phi(R, 0) = -2\pi G \Sigma_0 R_d^2 (2y)^3 \int_0^\infty \frac{J_0(kR) dk}{[4y^2 + (kR)^2]^{3/2}}. \quad (5.3.24)$$

Com o auxílio de [16] e [13], chegamos a:

$$\Phi(R, 0) = -\pi G \Sigma_0 R (I_0 K_1 - I_1 K_0 + 2R_d/R). \quad (5.3.25)$$

Que é o potencial gerado por um disco com distribuição exponencial. Para encontrar a velocidade circular, basta derivar a equação anterior. Derivando em relação a y , temos:

$$\frac{\partial \Phi(y, 0)}{\partial y} = -2\pi G \Sigma_0 R_d [I_0 K_1 - I_1 K_0 + I_0' K_1 + I_0' K_1' - I_1' K_0 - I_1' K_0']. \quad (5.3.26)$$

E utilizando [16] chegamos a seguinte velocidade circular:

$$v_c^2 = \frac{\pi G \Sigma_0 R^2}{R_d} \left[I_0 \left(\frac{R}{2R_d} \right) K_0 \left(\frac{R}{2R_d} \right) - I_1 \left(\frac{R}{2R_d} \right) K_1 \left(\frac{R}{2R_d} \right) \right]. \quad (5.3.27)$$

Essa é a velocidade quadrática de uma distribuição de massa dada por um disco exponencial. Em [13] os autores traçam um gráfico utilizando os resultados de (5.3.27) mostrado na Fig. 5.

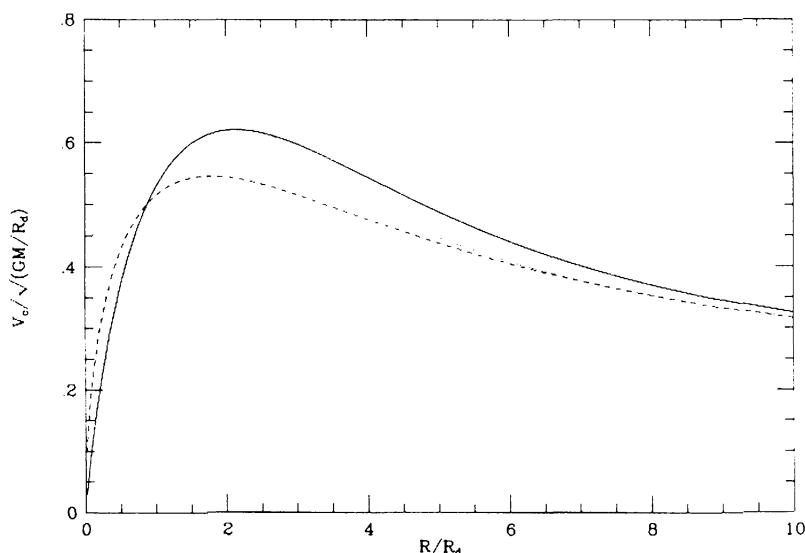


Figura 5 – Velocidade circular dada pelo disco exponencial (curva cheia) e velocidade dada por uma distribuição esférica (curva tracejada).

Fonte: *Galactic Dynamics*, Binney & Tremaine.

Os autores em [13] ainda destacam que a curva do disco exponencial tem um pico que supera em quase 15% o da distribuição esférica e também decresce mais suavemente à medida que o raio aumenta, que por sua vez, se aproxima mais com os dados observacionais de curvas de rotação de galáxias espirais.

Isso sugere que a utilização de um potencial Newtoniano dado por uma distribuição de massa tipo disco e juntamente com a determinação dos parâmetros de uma galáxia espiral (densidade, distribuição de massa, espessura e etc.) tem como propósito reduzir mais ainda a necessidade de se ter uma matéria exótica (matéria escura) para explicar o problema das curvas de rotação de galáxias. Apesar desse modelo ser simplificado, ele já exprime bons resultados de acordo com o observado.

Se na mesma abordagem que foi feito para o potencial no disco for acrescentada a modificação da dinâmica newtoniana (MOND), espera-se reduzir mais ainda a distância entre as curvas de rotação observadas com as dos modelos teóricos, mostrada na Figura 2.

5. CONCLUSÃO

Zwicky ao perceber a massa faltante no estudo do aglomerado de galáxias de COMA, que ele denominou de matéria escura, abriu portas para a seguinte pergunta: Existe uma massa ainda não detectada nas galáxias e aglomerados de galáxias ou existe um problema com as leis de gravitação?

Neste presente trabalho introduzimos o conceito de matéria escura prevista por Zwicky na década de 30, que mais tarde foi notada também pela astrônoma Rubin ao estudar curvas de rotação de galáxias espirais. Essa matéria escura deveria ser a causa do aumento da velocidade circular nas galáxias e aglomerados de galáxias onde a mesma deveria diminuir. Como ainda não foi detectada a composição dessa matéria exótica, isso possibilitou o surgimento de teorias alternativas de gravitação para explicar o problema.

Na década de 80, Milgrom propôs uma modificação na gravitação newtoniana que ficou conhecida como Teoria MOND (*Modified of Newtonian Dynamics*). Essa modificação ajusta bem a curvas de rotação observada com o modelo teórico. Nesse trabalho apresentamos uma introdução à essa teoria de dinâmica modificada.

Na sequência do estudo da dinâmica de galáxias, introduzimos a Teoria do Potencial (Binney & Tremaine, *Galactic Dynamics*) muito utilizada para estudar dinâmica de galáxias. Essa teoria tem como objetivo aproximar cada vez mais o estudo da dinâmica de galáxias com casos reais, abordando cálculos para simetria discoidal, distribuição de massa exponencial e etc. Cada parâmetro abordado tende a aproximar ainda mais o estudo dos casos reais. Mesmo sendo uma introdução ao assunto, apresentamos bons resultados para o potencial em um disco.

Após apresentarmos a introdução à Teoria MOND e à Teoria do Potencial, podemos concluir que como ambos apresentam bons resultados no estudo de dinâmica de galáxias e análise de curva de rotação de galáxias espirais. Isso

sugere que a Teoria MOND combinada com o potencial gravitacional no disco calculado usando a Teoria do Potencial irá fornecer resultados mais próximos ainda dos dados observacionais [16].

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] F. Zwicky, *Astrophys. J.* **86**, 217 (1937).
- [2] V.C. Rubin, N Thonnard and W.K. Ford, Jr., *Astrophys. J.* **225**, L107 (1978).
- [3] M. Milgrom, *Astrophys. J.* **270**, 365 (1983); *Astrophys. J.* **270**, 371 (1983); *Astrophys. J.* **270**, 384 (1983).
- [4] NUSSENZVEIG, Herch M. **Curso de Física Básica**. 4. ed. São Paulo: Edgard Blücher, v.1, 2002.
- [5] VELTEN, H. E. S. MOND: uma alternativa à mecânica newtoniana. **Revista Brasileira de Física**, v. 30,n. 3, p. 3314/1 - 3314/5, 2008.
- [6] V. Sahni [arXiv: astro-ph0403324].
- [7] ANGÉLIL, Raymond. **The MOND paradigma**: from Law to Theory. 2008. 23 f. Mestrado em Física-Teórica – ETH Zurique, 2008.
- [8] M. Milgrom, *New Astron. Rev.* **46**, 741-753 (2002).
- [9] Sanders and E. Noordermeer, arxiv:astroph/0703352v1 (2007).
- [10] M. Milgrom and R.H. Sanders, arxiv:astroph/0611494v1 (2006)
- [11] K.S. Oliveira Filho e M.F. Oliveira Saraiva, *Astronomia & Astrofísica* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2004).
- [12] Sergio Scarano Jr, Notas de Aula, Astronomia Extragaláctica, semestre 2015.02, 02/04/2016.
- [13] J. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics* (Princeton University Press, New Jersey, 1987).
- [14] Bradley W. Carroll e Dale A. Ostlie. 1996. *An Introduction to Modern Astrophysics*, ed. Companhia Addison-Wesley.
- [15] Toomre, A. 1962. *Astrophys. J.* ,**138**, 385.

[16] CAMPOS, J. P. **Correção Logarítmica no Potencial Newtoniano e sua Aplicação a Galáxias Espirais**, Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2007. Disponível em [http://portais4.ufes.br/posgrad/teses/tese_3020 .pdf](http://portais4.ufes.br/posgrad/teses/tese_3020.pdf).

[17] Freeman. K. C. 1970. *Astrophys. J.*, **160**, 811.

[18] K. C. Freeman. *On the Disk of Spiral and S0 Galaxies*, *Ap. J.*, **160**, 811-830 (1970).

[19] FURTADO, C.M.F., **Introdução à Dinâmica Newtoniana Modificada**, Monografia (Graduação em Física) – Universidade Federal de Juiz de Fora, MG, 2012.

