

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Modelo Cosmológico Kantowski-Sachs com Radiação e Gás de Chaplygin

Marcela M Rodrigues

JUIZ DE FORA
AGOSTO, 2021

Modelo Cosmológico Kantowski-Sachs com Radiação e Gás de Chaplygin

MARCELA M RODRIGUES

Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Física

Mestrado em Física

Orientador: Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto

JUIZ DE FORA

AGOSTO, 2021

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Medeiros Rodrigues, Marcela.

Modelo cosmológico Kantowski-Sachs com radiação e gás de Chaplygin / Marcela Medeiros Rodrigues. -- 2021.
105 f. : il.

Orientador: Gil de Oliveira Neto

Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2021.

1. Cosmologia. 2. Métrica de Kantowski-Sachs. 3. Gás de Chaplygin. 4. Parametrização de Misner. I. de Oliveira Neto, Gil, orient. II. Título.

Marcela Medeiros Rodrigues

"Modelo cosmológico Kantowski-Sachs com radiação e gás de Chaplygin".

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física, da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial a obtenção do grau de Mestre em Física. Área de concentração: Física

Aprovada em 19 de agosto de 2021.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF

p/



Prof. Dr. Germano Amaral Monerat
Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ

p/



Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro
Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF

Aos meus amigos e professores.

A minha mãe, pelo apoio e força.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo resolver as equações de Einstein para a métrica de Kantowski-Sachs e para a métrica de Kantowski-Sachs com a parametrização de Misner. Inicialmente, as equações de Einstein para a métrica de Kantowski-Sachs foram resolvidas. No primeiro modelo, o conteúdo é um fluido perfeito de radiação e no segundo é um gás de Chaplygin. Apesar de a radiação já ter sido estudada na literatura, fizemos um estudo mais detalhado de suas soluções. Por outro lado, o modelo com o gás de Chaplygin corresponde à contribuição original da presente dissertação. Conseqüentemente, iniciamos calculando os tensores momento-energia, os tensores de Riemann e Ricci, e as equações de Einstein na métrica de Kantowski-Sachs. Com o objetivo de compreender melhor a métrica de Kantowski-Sachs, investigamos e discutimos os cálculos dos artigos de Kantowski-Sachs para um modelo com poeira e de Gron para um modelo com constante cosmológica. Depois, apresentamos análises das soluções dessas equações para os modelos com o fluido perfeito de radiação e com o gás de Chaplygin. Em seguida, desenvolvemos os mesmos passos para a métrica de Kantowski-Sachs com a parametrização de Misner, tanto para radiação quanto para gás de Chaplygin. Analisamos o comportamento do fator de escala médio e a evolução da anisotropia, e foi possível notar que, para um universo preenchido por gás de Chaplygin, a anisotropia desaparecerá, levando a um universo regido pela métrica de FRW.

Palavras-chave: Cosmologia, Métrica de Kantowski-Sachs, Gás de Chaplygin, Parametrização de Misner.

Abstract

This study seeks to solve Einstein's equations for a model with the Kantowski-Sachs metric and for a Misner parameterized Kantowski-Sachs metric. Initially, the Einstein's equations for the Kantowski-Sachs metric were determined. In the first model, the content is a perfect fluid of radiation and the second one is a Chaplygin gas. Although the radiation model has already been studied, we made a deeper review of its solutions. On the other side, the Chaplygin gas model corresponds to the original contribution of this dissertation. Hence, we initiated by calculating energy-momentum tensors, Ricci and Riemann tensors and the Einstein equations for the Kantowski-Sachs metric. In order to better understand the Kantowski-Sachs universe, we investigated and discussed the calculation presented in the Kantowski-Sachs article for a model filled with dust, and Gron, for a model filled with cosmological constant. Thereafter, we presented the analysis for the solutions of these equations for the models with radiation and Chaplygin gas. Thereafter, we followed the same steps for the Misner parameterized Kantowski-Sachs metric with radiation and Chaplygin gas. We analyzed the behaviour of the average scale factor and the evolution of the anisotropy, and it was possible to notice that for an universe filled with Chaplygin gas, the anisotropy will vanish, leading to a universe ruled by the FRW metric.

Keywords: Cosmology, Kantowski-Sachs Metrics, Chaplygin Gas, Misner Parametrization.

Agradecimentos

A toda minha família, pelo força, perseverança e apoio.

Ao meu professor Gil pela orientação, pela paciência, compreensão e amizade.

A meus amigos, Wellerson e Lucca, pela coragem e por sempre me emprestarem um ouvido pra desabafar.

“To the people who look at the stars and wish. To the stars that listen and the dreams that are answered”.

Sarah J Maas

Conteúdo

Lista de Figuras	8
Lista de Tabelas	10
Lista de Convenções	11
1 Introdução	12
2 Cosmologia Relativística	15
2.1 Princípio Cosmológico	15
2.2 Princípio de Weyl	15
2.3 Alicerce da Relatividade Geral	16
2.3.1 O Princípio de Mach	16
2.3.2 O Princípio da Equivalência	17
2.3.3 O Princípio da Covariância	18
2.3.4 O Princípio da Correspondência	18
2.4 Relatividade Especial	19
2.4.1 Transformações de Lorentz	19
2.5 Teoria da Relatividade Geral de Einstein	23
2.5.1 Tensor Métrico	23
2.5.2 Geodésica	24
2.5.3 Tensor de Riemann	27
2.5.4 Identidades de Bianchi	28
2.5.5 Tensor Energia-Momento	29
2.6 Equações de Campo de Einstein	31
2.7 Cosmologia Relativística e o Modelo Cosmológico Padrão	31
3 Modelo Cosmológico Kantowski-Sachs	35
3.1 Fluidos	37
3.1.1 Poeira	37
3.1.2 Vácuo	37
3.1.3 Radiação	38
3.1.4 Gás de Chaplygin	38
3.2 Equações para cosmologia do tipo Kantowski-Sachs	39
3.3 Soluções de Poeira	41
3.4 Soluções com Constante Cosmológica (Λ)	43
3.5 Soluções de Radiação	46
3.5.1 Variação da Constante de Integração C_1	47
3.5.2 Variação de $a(0)$	48
3.5.3 Variação de $b(0)$	48
3.5.4 Variação de $\dot{a}(0)$	50
3.5.5 Variação de $\dot{b}(0)$	50
3.6 Soluções de Gás de Chaplygin	53
3.6.1 Variação da constante A do fluido	55
3.6.2 Variação da constante de integração C_2	55

3.6.3	Varição de $a(0)$	56
3.6.4	Varição de $b(0)$	58
3.6.5	Varição de $\dot{a}(0)$	60
3.6.6	Varição de $\dot{b}(0)$	62
4	Parametrização de Misner	66
4.1	Parâmetros de Anisotropia	66
4.2	Equações para Cosmologia do tipo Kantowski-Sachs Parametrizada	67
4.3	Soluções de Radiação	70
4.3.1	Varição da Constante de Integração C'_1	71
4.3.2	Varição de $\gamma(0)$	72
4.3.3	Varição de $\beta(0)$	73
4.3.4	Varição de $\dot{\gamma}(0)$	74
4.3.5	Varição de $\dot{\beta}(0)$	75
4.4	Soluções de Gás de Chaplygin	77
4.4.1	Varição da constante A do fluido	78
4.4.2	Varição da constante de integração C'_2	79
4.4.3	Varição de $\gamma(0)$	80
4.4.4	Varição de $\beta(0)$	81
4.4.5	Varição de $\dot{\gamma}(0)$	82
4.4.6	Varição de $\dot{\beta}(0)$	85
5	Conclusão	87
A	Grupos de Lie	92
A.1	Definições	92
A.2	Álgebra de Lie de um Grupo de Lie	93
A.2.1	Campos Invariantes	94
A.3	Derivada de Lie	96
A.4	Grupos de Isometria	101
A.5	Espaço-tempo Quadridimensional e Grupos de Isometria	102
A.5.1	Isotropia	103
A.5.2	Homogeneidade	103

Lista de Figuras

3.1	Comportamento dos fatores de escala a e b em função de η	43
3.2	Comportamento dos fatores de escala a e b em função de t para cosntante cosmológica	45
3.3	Comportamento do fator de escala a com radiação com variação de C_1	47
3.4	Comportamento do fator de escala b com radiação com variação de C_1	48
3.5	Comportamento do fator de escala a com radiação com variação de $a(0)$	49
3.6	Comportamento do fator de escala b com radiação com variação de $a(0)$	49
3.7	Comportamento do fator de escala a com radiação com variação de $b(0)$	50
3.8	Comportamento do fator de escala b com radiação com variação de $b(0)$	51
3.9	Comportamento do fator de escala a com radiação com variação de $\dot{a}(0)$	51
3.10	Comportamento do fator de escala b com radiação com variação de $\dot{a}(0)$	52
3.11	Comportamento do fator de escala a com radiação com variação de $\dot{b}(0)$	52
3.12	Comportamento do fator de escala b com radiação com variação de $\dot{b}(0)$	53
3.13	Comportamento do fator de escala a com gás de Chaplygin com variação de A	55
3.14	Comportamento do fator de escala b com radiação com variação de A	56
3.15	Comportamento do fator de escala a com gás de Chaplygin com variação de C_2	57
3.16	Comportamento do fator de escala b com gás de Chaplygin com variação de C_2	57
3.17	Comportamento do fator de escala a com gás de Chaplygin com variação de $a(0)$	58
3.18	Comportamento do fator de escala b com gás de Chaplygin com variação de $a(0)$	59
3.19	Comportamento do fator de escala a com gás de Chaplygin com variação de $b(0)$ entre 0.1 e 0.9	59
3.20	Comportamento do fator de escala b com gás de Chaplygin com variação de $b(0)$ entre 0.1 e 0.9	60
3.21	Comportamento do fator de escala a com gás de Chaplygin com variação de $b(0)$ entre 1 e 5	61
3.22	Comportamento do fator de escala b com gás de Chaplygin com variação de $b(0)$ entre 1 e 5	61
3.23	Comportamento do fator de escala a com gás de Chaplygin com variação de $\dot{a}(0)$ entre 0.01 e 0.2	62
3.24	Comportamento do fator de escala b com gás de Chaplygin com variação de $\dot{a}(0)$ entre 0.01 e 0.2	63
3.25	Comportamento do fator de escala a com gás de Chaplygin com variação de $\dot{a}(0)$ entre 0.5 e 4	63
3.26	Comportamento do fator de escala b com gás de Chaplygin com variação de $\dot{a}(0)$ entre 0.5 e 4	64
3.27	Comportamento do fator de escala a com gás de Chaplygin com variação de $\dot{b}(0)$	64
3.28	Comportamento do fator de escala b com gás de Chaplygin com variação de $\dot{b}(0)$	65

4.1	Comportamento da função γ com radiação com variação de C_1'	71
4.2	Comportamento da função β com radiação com variação de C_1'	72
4.3	Comportamento da função γ com radiação com variação de $\gamma(0)$	73
4.4	Comportamento da função β com radiação com variação de $\gamma(0)$	73
4.5	Comportamento da função γ com radiação com variação de $\beta(0)$	74
4.6	Comportamento da função β com radiação com variação de $\beta(0)$	75
4.7	Comportamento da função γ com radiação com variação de $\dot{a}(0)$	75
4.8	Comportamento da função β com radiação com variação de $\dot{a}(0)$	76
4.9	Comportamento da função γ com radiação com variação de $\dot{b}(0)$	76
4.10	Comportamento da função β com radiação com variação de $\dot{b}(0)$	77
4.11	Comportamento da função γ com gás de Chaplygin com variação de A	79
4.12	Comportamento da função β com radiação com variação de A	80
4.13	Comportamento da função γ com gás de Chaplygin com variação de C_2'	80
4.14	Comportamento da função β com gás de Chaplygin com variação de C_2'	81
4.15	Comportamento da função γ com gás de Chaplygin com variação de $\gamma(0)$	82
4.16	Comportamento da função β com gás de Chaplygin com variação de $\gamma(0)$	82
4.17	Comportamento da função γ com gás de Chaplygin com variação de $\beta(0)$	83
4.18	Comportamento da função β com gás de Chaplygin com variação de $\beta(0)$	83
4.19	Comportamento da função γ com gás de Chaplygin com variação de $\dot{\gamma}(0)$	84
4.20	Comportamento da função β com gás de Chaplygin com variação de $\dot{\gamma}(0)$	84
4.21	Comportamento da função γ com gás de Chaplygin com variação de $\dot{b}(0)$	85
4.22	Comportamento da função β com gás de Chaplygin com variação de $\dot{b}(0)$	86

Lista de Tabelas

3.1	Comportamento de b em $t = 5$ com variação de C_2	56
4.1	Comportamento de β em $t = 4$ com variação de C'_1	72

Lista de Convenções

- Índices gregos $\{\alpha, \beta, \mu, \dots\}$ assumem valores $(0, 1, 2, 3)$. Índices latinos $\{i, j, k, \dots\}$ assumem valores $(1, 2, 3)$;
- Derivação simples é denotada por \prime e derivação covariante é denotada por $;$. Assim,

$$V_{,\nu}^{\mu} = \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \qquad V_{;\nu}^{\mu} = V_{,\nu}^{\mu} - \Gamma_{\nu\alpha}^{\mu} V^{\alpha}; \qquad (1)$$

- Consideramos que as constantes assumem valores $8\pi G = c = 1$;
- A assinatura da métrica é $(+ - - -)$

1 Introdução

A relatividade geral de Albert Einstein alterou o prévio entendimento de universo e de teoria gravitacional. Além de Einstein, outros nomes conceberam a teoria da gravitação, como, Copérnico, que propôs a teoria do heliocentrismo; Galileu, que propôs a lei da queda dos corpos e que descobriu que Vênus apresenta fases, como as da Lua, e o levou a concluir a teoria heliocêntrica de Copérnico; Kepler, que provou o movimento elíptico dos planetas ao redor do Sol; e Newton, que introduziu a teoria da gravitação universal que diz que existe uma força de atração entre duas massas quaisquer.

Na teoria da relatividade restrita, Einstein evidenciou que a velocidade da luz é constante e, portanto, é possível observar o céu como se estivesse olhando para o passado. Sendo capaz de observar o passado, surgem dúvidas sobre os estágios iniciais do universo, como sua estrutura, suas características e como elas influenciarão o estágio atual durante sua expansão. A cosmologia investiga a evolução do universo, sua constituição e sua origem para determinar as leis que o governam.

Segundo Bertone [9], a fim de elaborar um modelo cosmológico são indispensáveis três elementos derivados da teoria da relatividade geral de Einstein:

- as equações de Einstein que relacionam a energia e a matéria do universo com sua geometria;
- a métrica;
- e a equação de estado da matéria e da energia que constituem o universo.

A fim de iniciar a concepção de um modelo cosmológico, é necessário citar o modelo que é atualmente declarado como o que melhor retrata o universo atual, o modelo cosmológico padrão que utiliza a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson Walker (FLRW). Tal modelo procura resolver as equações de Einstein para essa métrica, na presença de um fluido perfeito. Partindo de uma métrica do espaço-tempo esféricamente simétrico, inicialmente, obtêm-se a métrica FLRW e destaca-se suas propriedades homogêneas e isotrópicas. Para

se determinar as equações de Einstein, nesse modelo, faz-se uso dos símbolos de Christoffel, do tensor de Riemann e do tensor de Ricci. Finalmente, obtêm-se as equações de Einstein, que para esse modelo, são denominadas de equações de Friedmann.

Essa dissertação tem como objetivo abordar o modelo relativístico cosmológico Kantowski-Sachs (KS), que é espacialmente homogêneo e anisotrópico. O modelo cosmológico padrão assume que o universo atual é homogêneo e isotrópico quando observado em largas escalas. Entretanto, nos estágios iniciais do universo, assume-se a possibilidade da existência de grandes quantidades de anisotropia que, por algum processo físico, foi reduzida ao ponto que é observado no modelo padrão atualmente.

O modelo de KS tem sua relevância em estudos sobre energia escura [1], sobre gravitação quântica em *loop* [15] e o Big Bang [6], sendo considerado menos complexo que outros modelos anisotrópicos pois possui soluções clássicas e quânticas reconhecidas [alvarenga].

O modelo KS foi proposto por Robert Kantowski e Rainer Sachs em 1966 [13], com o propósito de sugerir uma nova métrica para a equação de Einstein com o tensor momento-energia para o fluido perfeito, onde $p = 0$, isto é, poeira.

Inúmeros estudos sobre esse modelo cosmológico foram realizados numa grande variedade de cenários, tal como espaço-tempo de Kantowski-Sachs com poeira (com equação de estado $p = 0$) foi inicialmente considerado por Kantowski e Sachs [13], e por Kantowski [12], no caso em que o conteúdo é composto por poeira, radiação (gás de Fermi ultrarelativístico, com equação de estado $p = \frac{\rho}{3}$) ou matéria rígida de Zeldovich (com equação de estado $p = \rho$). Apesar da nomenclatura, tal modelo cosmológico foi aparentemente estudado primeiro por Kompaneets e Chernov [14], no caso com poeira e radiação. Estudos complementares dos modelos KS, incluindo soluções exatas, foram fornecidos no caso de Ellis [7] e Thorne [21], de matéria de Zeldovich por Thorne [21], de um fluido perfeito indefinido por Stewart e Ellis [20], de um fluido perfeito e um campo eletromagnético por Doroshkevich [5], Thorne [22], e Stewart e Ellis [20], e de um campo eletromagnético puro por Bertotti [3], Robinson [18], Stewart e Ellis [20]. Ellis [8] abordou as várias estruturas topológicas que são possíveis nos modelos KS.

O segundo capítulo apresenta uma introdução à cosmologia relativística, que auxiliará a determinar os elementos que nos levarão ao sistema de equações de Einstein a serem solu-

cionadas para um universo anisotrópico. No terceiro capítulo, será introduzida a métrica do modelo cosmológico Kantowski-Sachs de um universo homogêneo e anisotrópico. Iniciamos descrevendo algumas propriedades físicas para o vácuo, poeira, radiação e gás de Chaplygin e, então, deduzimos as soluções com a métrica de KS para tais fluidos. No quarto capítulo, será abordado o conceito da parametrização de Misner da métrica de Kantowski-Sachs e a introdução dos parâmetros de anisotropia. Para resolvermos os sistemas de equações diferenciais, sem soluções algébricas, na presente dissertação, fizemos integrações numéricas usando o método de Runge-Kutta Fehlberg que produz soluções precisas de quinta ordem.

2 Cosmologia Relativística

2.1 Princípio Cosmológico

Na cosmologia moderna, o princípio cosmológico é a concepção de que a distribuição espacial da matéria no universo é homogênea e isotrópica quando vista em grande escala, já que espera-se que a ação das forças seja uniforme através do universo, e, portanto, não deveria produzir irregularidades observáveis na estrutura em larga escala na evolução da matéria que foi inicialmente estabelecida pelo Big Bang.

O princípio cosmológico é formalmente declarado como “Visto numa escala suficientemente grande, as propriedades do universo são as mesmas para todos os observadores.” Isso denota que a parte do universo que é visível para nós é apenas uma pequena amostra, e que as mesmas leis físicas se aplicam por toda sua extensão.

As duas consequências estruturais testáveis do princípio cosmológico são homogeneidade e isotropia. Homogeneidade significa que a mesma evidência observável está disponível para observadores em diferentes posições no universo. Já a isotropia significa que a mesma evidência observável está disponível ao olhar para qualquer direção do universo. Os princípios são distintos, mas profundamente relacionados, porque um universo aparentemente isotrópico visto a partir de duas posições diferentes deve ser também homogêneo.

2.2 Princípio de Weyl

As linhas de mundo das partículas do fluido formam uma congruência de geodésicas do tipo timelike, divergindo em um ponto no infinito passado ou futuro.

A base desse princípio está na hipótese de que toda a matéria presente no universo compõe um fluido que pode ser considerado perfeito, isto é, não há interação entre as moléculas. Em larga escala, os aglomerados e superaglomerados de galáxias se movimentam como partículas fundamentais. Suas trajetórias são descritas por geodésicas que nunca se in-

terceptam, a não ser em um único ponto no passado ou no futuro, e conseqüentemente a matéria em qualquer ponto possui uma velocidade única. Essas geodésicas são ortogonais a uma família de hiper'-superfícies do tipo *spacelike*.

2.3 Alicerce da Relatividade Geral

Relatividade geral é uma teoria geométrica da gravitação criada por Albert Einstein. Há quatro princípios que guiaram Einstein em sua pesquisa:

1. O princípio de Mach;
2. O princípio da equivalência;
3. O princípio da covariância;
4. O princípio da correspondência.

2.3.1 O Princípio de Mach

Esse princípio foi proposto em 1883 por Ernst Mach em seu livro “The Science of Mechanics” [17].

O princípio de Mach postula que as forças inerciais que um corpo experiencia num movimento não-uniforme são determinadas pela quantidade e distribuição de matéria no universo. Por exemplo, um corpo num universo vazio não pode ser dito em movimento de acordo com Mach, já que não há nada a que o movimento do corpo possa ser referido, ou seja, a aceleração não deve ser considerada uma grandeza absoluta, mas uma grandeza relativa. A partir do ponto de vista de Mach, em um universo ocupado por matéria, a interação entre toda a substância do universo é a responsável pela inércia individual de cada sistema físico. Visto que grande parte da matéria que preenche o universo está localizada em objetos a largas distâncias de um dado sistema estudado, concluímos que a inércia dos objetos se devem às chamadas “estrelas fixas”. Dessa forma, concluímos que um referencial inercial é um referencial em algum estado privilegiado de movimento relativo ao movimento médio de “estrelas fixas”. Portanto, o que determina os referenciais inerciais locais são as “estrelas fixas”, através das suas massas, distribuição e movimento.

Os seguintes resultados do princípio de Mach serão relevantes na formulação da relatividade geral:

1. a distribuição de matéria determina a geometria;
2. se não há matéria, não há geometria;
3. um corpo num universo vazio não deveria possuir propriedades inerciais.

Contudo, de acordo com a formulação de Einstein em 1915, o princípio de Mach afirma que a métrica do espaço-tempo é completamente determinada pela distribuição massa-energia no universo; já que a métrica determina a geometria e, conseqüentemente, a geodésica. Assim, como consequência, o espaço-tempo sem uma distribuição massa-energia torna-se trivial. Apesar dessa idéia de Mach parecer bastante razoável, temos como um contra-exemplo o espaço de Minkowski que se torna incompatível com esse princípio.

2.3.2 O Princípio da Equivalência

O princípio de equivalência de Einstein possui sérias implicações sobre a relação entre luz e gravidade criadas por grandes massas. Em geral, há duas maneiras de definir a massa de um objeto. Massa pode ser definida como uma medida ou quantidade de inércia que um objeto tem para resistir a mudança no movimento, explicada pela segunda lei de Newton. Outra maneira de definir massa é como uma quantidade que determina a força gravitacional exercida por um corpo em outro corpo. O princípio de equivalência afirma que não há diferenças perceptíveis entre ambas definições e que, de fato, a massa gravitacional é idêntica à massa inercial.

É possível também dizer que não há experimentos que possam ser feitos para distinguir se um objeto acelera por causa da atração gravitacional ou porque o referencial inercial está acelerando e, portanto, fazendo com que pareça que o objeto está se mexendo, ou seja, os dois casos devem ser equivalentes.

No intuito de explicar a curvatura da luz, suponha que um elevador está posicionado no espaço onde a força da gravidade é negligenciável. Enquanto o elevador permanecer estacionário, é permitido que a luz passe por um pequeno buraco nele. Em tal caso, a luz irá viajar em linha reta para a outra extremidade do elevador. Agora, se é permitido

que a luz passe pelo buraco enquanto o elevador estiver acelerando, para cima ou para baixo (perpendicular à direção da luz), a luz dará a impressão de seguir um caminho curvo porque o referencial está acelerando. De acordo com o princípio de equivalência, um referencial acelerado para baixo é idêntico à atração gravitacional para cima. Isso implica que a gravidade tem capacidade de exercer uma força não somente na massa, mas também na própria luz.

2.3.3 O Princípio da Covariância

O termo covariância implica um formalismo no qual as leis da física são mantidas as mesmas após um conjunto específico de transformações.

O princípio da covariância afirma que “As leis gerais da natureza são expressas por equações que valem para todos os sistemas de coordenadas, ou seja, são covariantes frente a quaisquer transformações de coordenadas”. Ou seja, assume que qualquer sistema Gaussiano é válido como um sistema de coordenadas espaço-tempo.

Aplicar tal princípio significava que as coordenadas do espaço-tempo num campo gravitacional deveriam operar exatamente da mesma maneira que as coordenadas do espaço-tempo de uma nave em aceleração. Se a nave está acelerando através de um espaço vazio (onde o espaço-tempo é plano), a geometria do espaço-tempo pareceria ser curvo. Isso sugere que se há um objeto com massa gerando um campo gravitacional, ele teria que curvar o espaço-tempo similarmente.

2.3.4 O Princípio da Correspondência

O princípio da correspondência afirma que o comportamento de sistemas descritos pela teoria da relatividade geral, deve tender ao comportamento descrito pela gravitação Newtoniana no limite em que o campo gravitacional é fraco e para velocidades muito menores que a velocidade da luz.

2.4 Relatividade Especial

Apesar da mecânica Newtoniana fornecer uma excelente descrição da natureza, não é universalmente válida. Ao atingir condições extremas, como muito pequenas, muito rápidas, etc, essa mecânica precisa ser substituída. Um dos extremos é quando a velocidade das partículas é extremamente rápida. A teoria que substitui a mecânica Newtoniana é devido a Einstein, denominada Relatividade Especial. Os efeitos da relatividade especial se tornam evidentes apenas quando as partículas viajam a velocidades próximas a da velocidade da luz no vácuo, $c = 2,997925 \times 10^8 \frac{m}{s}$.

A teoria da relatividade especial repousa em dois postulados:

- **Postulado 1:** O princípio da relatividade: as leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais;
- **Postulado 2:** A velocidade da luz no vácuo é a mesma em todos os referenciais inerciais.

O segundo postulado é uma consequência do primeiro, porque se as equações de Maxwell são satisfeitas em todos referenciais inerciais, então o único valor possível para a velocidade da luz é c .

O princípio da relatividade vai além da mecânica Newtoniana, que lida apenas com as leis da mecânica. Essa teoria afirma que é impossível designar um sistema inercial como estacionário ou em movimento. É possível apenas abordar o movimento relativo de dois sistemas. Conseqüentemente, nenhum experimento físico feito inteiramente dentro de um sistema inercial pode dizer ao observador qual o movimento de seu sistema é com respeito a outro sistema.

O objetivo agora é encontrar uma lei de transformações que satisfazem ambos postulados acima. Essas equações de transformação entre dois referenciais irão manter a velocidade da luz constante.

2.4.1 Transformações de Lorentz

Todo processo físico consiste de um conjunto de eventos. Todo evento acontece num dado ponto (x, y, z) do espaço num instante de tempo t . Essas quatro quantidades (x, y, z) e t

definem um ponto no espaço tempo (espaço-tempo de Minskowski). A trajetória de uma partícula no espaço-tempo é denominada linha do mundo. Até mesmo uma partícula em repouso traçará uma linha do mundo já que o tempo sempre flui.

As transformações de Lorentz relacionam as coordenadas (x, y, z, t) de um dado evento num sistema de referência inercial O às coordenadas (x', y', z', t') do mesmo evento em outro sistema inercial O' .

Seja (x, y, z, t) as coordenadas em O de um evento E . A projeção de E no eixo x é dada pelo ponto P , que possui as coordenadas $(x, 0, 0, t)$. Assuma que o observador em O' se move com uma velocidade constante no eixo x com respeito ao observador em O . Em $t = 0$, ambos observadores coincidem. Após tempo t , o observador O' anda uma distância vt no eixo x . Seja d a distância entre O' e P medida por O . Logo,

$$x = d + vt. \quad (2.1)$$

Perante a Teoria da Relatividade Especial, a coordenada x' do evento E no sistema referencial O' é considerada igual à distância d . Assim, obtemos as leis de transformações

$$x' = x - vt; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = t. \quad (2.2)$$

Essas são conhecidas como as transformações de Galileu.

Os postulados da Relatividade Especial conduzem à contração de Lorentz. Em outras palavras, a distância entre O' e P medida pelo observador O' , que é a coordenada x' , é maior que d . Mais precisamente,

$$x' = \gamma d. \quad (2.3)$$

Consequentemente,

$$x' = \gamma(x - vt). \quad (2.4)$$

Os postulados de Einstein nos conduzem para a dilatação do tempo e a relatividade da simultaneidade. Assim, o tempo do evento E medido por O' é diferente de t . Já que o observador O se move com velocidade v na direção negativa do eixo x com respeito a O' ,

teremos que

$$x = \gamma(x' + vt'). \quad (2.5)$$

Assim,

$$t' = \gamma\left(t - x\frac{v}{c^2}\right). \quad (2.6)$$

Dessa maneira, as leis de transformação são dadas por

$$x' = \gamma(x - vt); \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \gamma\left(t - x\frac{v}{c^2}\right). \quad (2.7)$$

Essas são conhecidas como as transformações de Lorentz.

Olhando para o relógio posicionado na origem do sistema inercial O' , definimos $x' = 0$ nas equações acima. Imediatamente, obtemos o efeito de dilatação do tempo

$$t' = \frac{t}{\gamma}. \quad (2.8)$$

Em $t = 0$, o relógio em O' apresentam tempos diferentes dependendo de sua posição já que

$$t' = -\gamma x \frac{v}{c^2}. \quad (2.9)$$

Logo, relógios em movimento não podem ser sincronizados.

Considere agora dois eventos A e B com coordenadas (x_A, t_A) e (x_B, t_B) em O e coordenadas (x'_A, t'_A) e (x'_B, t'_B) em O' . Assim, podemos calcular

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \Delta x \frac{v}{c^2}\right). \quad (2.10)$$

Assim, se os dois eventos são simultâneos em O , ou seja, $\Delta t = 0$, eles não são simultâneos em O' , já que

$$\Delta t' = -\gamma \Delta x \frac{v}{c^2}. \quad (2.11)$$

Considere uma partícula no referencial O que percorre uma distância dx na direção x durante um intervalo de tempo dt . A velocidade com respeito a O é

$$u = \frac{dx}{dt}. \quad (2.12)$$

No referencial O' , a partícula percorre uma distância dx' num intervalo de tempo dt' dada por

$$dx' = \gamma(dx - vdt); \quad (2.13)$$

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right). \quad (2.14)$$

Logo, a velocidade com respeito a O' é

$$u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}. \quad (2.15)$$

Intervalo

As transformações de Lorentz acima podem ser reescritas como

$$x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x^1); \quad x^{1'} = \gamma(x^1 - \beta x^0); \quad x^{2'} = x^2; \quad x^{3'} = x^3, \quad (2.16)$$

onde

$$x^0 = ct; \quad x^1 = x; \quad x^2 = y; \quad x^3 = z;$$

$$\beta = \frac{v}{c}; \quad \gamma = \sqrt{1 - \beta^2}.$$

A transformação de Lorentz pode ser reescrita como

$$x^{\mu'} = \sum_{\nu=0}^4 \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu}, \quad (2.17)$$

onde

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

A matriz Λ é a matriz de transformações de Lorentz. Uma transformação de Lorentz generalizada pode ser obtida se o movimento relativo de dois referenciais O e O' é ao longo de uma direção arbitrária no espaço. A lei de transformação das coordenadas x^{μ} ainda será dada pela equação (2.17), mas com matriz Λ um pouco mais complicada.

A distância ao quadrado entre os dois eventos que é denominada como o intervalo entre A e B é definida por

$$\Delta s^2 = \Delta x_\mu \Delta x^\mu = -c^2 \Delta t^2 + \Delta \vec{x}^2. \quad (2.19)$$

Essa é uma quantidade invariante de Lorentz. Entretanto, ela pode ser positiva, negativa ou igual a zero. Assim, as possibilidades são

- $\Delta s^2 < 0$: o intervalo é definido como tipo tempo. Há um referencial inercial no qual dois eventos acontecem no mesmo lugar, mas são separados temporariamente;
- $\Delta s^2 > 0$: o intervalo é definido como tipo espaço. Há um referencial inercial no qual dois eventos acontecem ao mesmo tempo, mas são separados espacialmente;
- $\Delta s^2 = 0$: o intervalo é definido como tipo luz. Os dois eventos estão conectados por um sinal viajando na velocidade da luz.

2.5 Teoria da Relatividade Geral de Einstein

Relatividade geral é uma teoria gravitacional que trata o espaço-tempo como um variedade quadridimensional. O princípio de equivalência de Einstein sugere que uma descrição apropriada da interação gravitacionais deve ser dada em termos de um tensor métrico $g_{\mu\nu}$ (e suas derivadas espaciais e temporais até segunda ordem) que pode ser relacionado à métrica de Minkowski, apenas localmente, via uma transformação de coordenadas adequada.

A teoria da Relatividade Geral vai além da teoria da Relatividade Especial, pois leva em conta a aceleração dos corpos. Logo, ela é válida para referenciais não-inerciais, isto é, que possuem aceleração.

2.5.1 Tensor Métrico

Em relatividade geral, a quantidade fundamental é a métrica, que descreve a geometria do espaço-tempo ao fornecer a distância entre pontos vizinhos. Em coordenadas cartesianas,

a distância entre os dois pontos adjacentes (x, y, z) e $(x + dx, y + dy, z + dz)$ é dada por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.20)$$

Ao permitir que o espaço-tempo seja curvo, a distância entre eventos no espaço-tempo quadridimensional pode ser escrita como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.21)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico, x^0 é a coordenada temporal, e x^1 , x^2 e x^3 são as três coordenadas espaciais.

O tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é um tensor covariante de rank 2, simétrico. Além de ser usado para subir e abaixar índices, ele também é usado para gerar as conexões que serão usadas para construir as equações de movimento da geodésica e o tensor de curvatura de Riemann.

2.5.2 Geodésica

Uma geodésica pode ser definida como a curva que dá a menor distância entre dois eventos e que preserva a tangência sob transporte paralelo.

Considere uma partícula livre em queda livre em um campo gravitacional. De acordo com o princípio da equivalência, há um sistema de coordenadas $\sigma^\alpha = (x^0, \mathbf{x})$ no qual uma partícula segue uma linha reta. É conveniente escrever a linha parametricamente, como uma função, por exemplo, do tempo próprio τ , $\sigma^\alpha(\tau)$. Uma linha reta possui a seguinte propriedade,

$$\frac{d^2 \sigma^\alpha}{d\tau^2} = 0. \quad (2.22)$$

Agora considere um sistema de coordenadas qualquer no qual as coordenadas da partícula são $x^\mu(\tau)$. Usando a regra da cadeia

$$d\sigma^\alpha = \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu, \quad (2.23)$$

a equação (2.22) se torna

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = 0 \\
\Rightarrow & \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial x^\mu} \right) = 0 \\
\Rightarrow & \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \sigma^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

A aceleração será zero se σ^α forem funções lineares das novas coordenadas x^μ , já que $\partial^2 \sigma^\alpha / \partial x^\nu \partial x^\mu$ desaparece.

A fim de determinar a aceleração no novo referencial, multiplica-se por $\partial x^\lambda / \partial \sigma^\alpha$ e usa a regra do produto:

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\lambda, \tag{2.25}$$

onde δ_μ^λ é o delta de Kronecker.

Logo, a equação para uma partícula livre, ou seja, a equação da geodésica é dada por

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \tag{2.26}$$

onde $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ é

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial^2 \sigma^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu}. \tag{2.27}$$

Note que Γ é simétrico em seus índices mais baixos e não é considerado um tensor. O intervalo de tempo próprio pode ser expresso em termos de dx^μ :

$$\begin{aligned}
c^2 d\tau^2 &= \eta_{\alpha\beta} d\sigma^\alpha d\sigma^\beta \\
&= \eta_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \right) \left(\frac{\partial \sigma^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu \right) \\
&= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,
\end{aligned} \tag{2.28}$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico:

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \sigma^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}, \tag{2.29}$$

e $\eta_{\alpha\beta}$ é a métrica do espaço-tempo de Minskowski dado por

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Da equação (2.29), nota-se que

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial^2 \sigma^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial \sigma^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \sigma^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \quad (2.31)$$

e da definição de Γ , a equação (2.27), tem-se que

$$\frac{\partial^2 \sigma^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial x^\lambda} \quad (2.32)$$

dessa forma, (2.31) torna-se

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial \sigma^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho \frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \sigma^\beta}{\partial x^\rho} \eta_{\alpha\beta}. \quad (2.33)$$

Usando a equação (2.29), isso se simplifica para

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\mu\rho}. \quad (2.34)$$

Assim, obtém-se a seguinte equação

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\gamma = \frac{1}{2} g^{\nu\gamma} (g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\lambda,\nu}). \quad (2.35)$$

Esses são conhecidos como os símbolos de Christoffel que Einstein considerava como os componentes do campo gravitacional.

2.5.3 Tensor de Riemann

Agora é possível escrever o tensor de curvatura, isto é, o tensor de Riemann

$$R_{\nu\lambda\gamma}^{\mu} = \Gamma_{\nu\gamma,\lambda}^{\mu} - \Gamma_{\nu\lambda,\gamma}^{\mu} + \Gamma_{\lambda\alpha}^{\mu} \Gamma_{\gamma\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\gamma\alpha}^{\mu} \Gamma_{\lambda\nu}^{\alpha} \quad (2.36)$$

$$= \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} [g_{\alpha\gamma,\nu\lambda} - g_{\alpha\lambda,\nu\gamma} + g_{\nu\lambda,\alpha\gamma} - g_{\nu\gamma,\alpha\lambda}] \quad (2.37)$$

ou com o índice μ abaixado

$$R_{\mu\nu\lambda\gamma} = g_{\mu\alpha} R_{\nu\lambda\gamma}^{\alpha} \quad (2.38)$$

$$= \frac{1}{2} [g_{\mu\gamma,\nu\lambda} - g_{\mu\lambda,\nu\gamma} + g_{\nu\lambda,\mu\gamma} - g_{\nu\gamma,\mu\lambda}]. \quad (2.39)$$

Esse tensor de rank 4 informa se há curvatura real no espaço-tempo, ele governa todos aspectos da curvatura do espaço-tempo. Se qualquer componente do tensor de curvatura for diferente de zero em qualquer ponto ou em qualquer região do espaço, então o espaço é curvo. O tensor de Riemann descreve uma força gravitacional, que não é local, e, conseqüentemente, não pode ser eliminada mesmo no referencial localmente inercial.

A partir da equação (2.38), é possível verificar as simetrias do tensor de Riemann. Isto é,

$$R_{\mu\nu\lambda\gamma} = -R_{\nu\mu\lambda\gamma} = -R_{\mu\nu\gamma\lambda} = R_{\gamma\lambda\nu\mu} \quad (2.40)$$

$$R_{\mu\nu\lambda\gamma} = R_{\lambda\gamma\mu\nu} \quad (2.41)$$

$$R_{\mu\nu\lambda\gamma} + R_{\mu\lambda\gamma\nu} + R_{\mu\gamma\nu\lambda} = 0. \quad (2.42)$$

Logo, notamos a partir da equação (2.40) que o tensor é anti-simétrico no primeiro e segundo pares de índices, e simétrico pela trocas dos dois pares de índices. De (2.42), temos que a soma das componentes do tensor de Riemann formadas pela permutação cíclica dos seus três últimos índices é nula. Já que o tensor de Riemann é um tensor, essas propriedades de simetrias são válidas em qualquer sistema de coordenadas. As simetrias do tensor de Riemann reduzem o número de componentes independentes de 256 para 20, em um espaço-tempo com quatro dimensões.

O tensor de Riemann é um tensor com quatro índices e devido a sua simetria, é possível

criar um novo tensor através de contrações entre alguns desses índices, isto é, o tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} := R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha} = g^{\alpha\beta} R_{\beta\mu\alpha\nu}. \quad (2.43)$$

Este tensor é obtido da contração entre o primeiro e o terceiro índices do tensor de Riemann. Inicialmente, poderíamos considerar outras contrações, como por exemplo, entre o primeiro e o segundo índices, o primeiro e quarto índices, etc. Entretanto, já que as propriedades do tensor de curvatura mostram que ele é um tensor anti-simétrico, tais contrações mostram-se nulas ou se reduzem a $+R_{\mu\nu}$ ou $-R_{\mu\nu}$. Logo, é possível dizer que o tensor de Ricci é a única contração possível entre dois índices do tensor de Riemann. Podemos, ainda, contrair o próprio tensor de Ricci, para obter o que é denominado escalar de Ricci ou escalar de curvatura,

$$R := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (2.44)$$

que é um campo escalar no espaço-tempo relacionado à curvatura Gaussiana.

2.5.4 Identidades de Bianchi

Outra relação do tensor de Riemann envolve a derivada covariante desse tensor e é conhecida como Identidade de Bianchi. A derivada covariante do tensor tomada em um evento onde possamos adotar um referencial inercial tal que os símbolos de Christoffel sejam nulos, se escreve,

$$\nabla_{\tau} R_{\mu\nu\lambda\gamma} = \frac{1}{2} (\partial_{\tau} \partial_{\lambda} \partial_{\nu} g_{\gamma\mu} + \partial_{\tau} \partial_{\gamma} \partial_{\mu} g_{\nu\lambda} - \partial_{\tau} \partial_{\lambda} \partial_{\mu} g_{\nu\gamma} - \partial_{\tau} \partial_{\gamma} \partial_{\nu} g_{\lambda\mu}). \quad (2.45)$$

As identidades são obtidas permutando-se o índice da derivada com os dois últimos índices do tensor de curvatura, tal que

$$\nabla_{\tau} R_{\mu\nu\lambda\gamma} + \nabla_{\gamma} R_{\mu\nu\tau\lambda} + \nabla_{\lambda} R_{\mu\nu\gamma\tau} = 0. \quad (2.46)$$

Façamos uma contração com $g^{\mu\lambda}$, logo o primeiro termo dará origem ao tensor de Ricci. No segundo termo, aplicamos a propriedade de anti-simetria em seus terceiro e quarto índices, e então contraímos. Para o terceiro termo, lembramos que a derivada covariante

da métrica é nula. Logo,

$$\nabla_{\tau}R_{\nu\gamma} + \nabla_{\gamma}R_{\nu\tau} + \nabla_{\lambda}R_{\nu\gamma\tau}^{\lambda} = 0. \quad (2.47)$$

Contraindo com $g^{\nu\gamma}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{\tau}R - \nabla_{\gamma}R_{\tau}^{\gamma} - \nabla_{\lambda}R_{\tau}^{\lambda} \\ 0 &= \nabla_{\alpha}R_{\tau}^{\alpha} - \frac{1}{2}\nabla_{\tau}R \\ 0 &= \nabla_{\alpha}\left(R_{\tau}^{\alpha} - \frac{1}{2}R\delta_{\tau}^{\alpha}\right). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Multiplicando os termos por $g^{\tau\beta}$:

$$\nabla_{\alpha}\left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg^{\alpha\beta}\right) = 0. \quad (2.49)$$

A quantidade dentro do parênteses é denominada tensor de Einstein:

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg^{\alpha\beta} \quad (2.50)$$

$$\nabla_{\alpha}G^{\alpha\beta} = 0. \quad (2.51)$$

Por construção esse tensor é simétrico. Embora o quadri-divergente do tensor de curvatura não seja nulo, através das identidades de Bianchi, pudemos encontrar um outro tensor que o seja, o tensor de Einstein. Como visto acima, ele é derivado apenas a partir do tensor de Riemann e da métrica e possui a divergência igual a zero.

2.5.5 Tensor Energia-Momento

Em Relatividade Geral, o tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ é um tensor contravariante, de rank 2, simétrico que descreve o fluxo da componente μ do quadri-momento p^{μ} através de uma hipersuperfície. Tal tensor, que representa a energia, o momento e as tensões, pode ser escrito para qualquer objeto físico que contenha energia e será a fonte da curvatura do espaço-tempo da relatividade geral.

Considerando o significado das componentes do tensor momento-energia, temos

1. $T^{\mu 0}$: definido como “fluxo” da componente μ do quadri-vetor momento linear através de uma hiper-superfície com t constante.

- T^{00} : densidade de energia;
- T^{i0} : densidade de momento linear;

2. $T^{\mu i}$: definido como o “fluxo” da componente μ do quadri-vetor momento linear através de uma hiper-superfície com umas das coordenadas espaciais constantes.

- T^{ii} : tensão normal na direção i , pressão;
- T^{ik} ($i \neq k$): tensão de cisalhamento.

Uma importante propriedade desse tensor é sua simetria:

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}. \quad (2.52)$$

Um exemplo do tensor energia-momento é para o tensor de um fluido perfeito que, por definição, é um fluido que não tem viscosidade e não conduz calor:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}. \quad (2.53)$$

onde ρ e p são a densidade e a pressão do fluido, respectivamente, e $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ é a quadri-velocidade do fluido em relação a um observador inercial que se move com o fluido. Em Relatividade Especial, a lei de conservação do momento e da energia de partículas ou sistema de partículas é dada pela conservação do quadri-vetor momento linear do sistema de partículas:

$$P^\mu = \text{constante} \Rightarrow P_{,\mu}^\mu = 0. \quad (2.54)$$

A generalização dessa lei de conservação para o caso de fluidos e campos é trivial, já que a energia e o momento desses sistemas são componentes do tensor momento-energia. Assim, num referencial qualquer do espaço-tempo curvo, haverá conservação do tensor energia-momento:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda T^{\mu\lambda} = 0 \quad (2.55)$$

2.6 Equações de Campo de Einstein

As equações de campo de Einstein são um conjunto de equações que determinam a dinâmica do universo. De acordo com a Relatividade Geral, as equações são dadas ao igualar as equações (2.49) e (2.55):

$$G_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu}, \quad (2.56)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento. Dessa maneira, as equações de campo de Einstein são dadas por:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -T_{\mu\nu}. \quad (2.57)$$

Essas são equações diferenciais que relacionam a curvatura do espaço-tempo ao conteúdo de matéria e energia do universo. Elas são formuladas de maneira que energia-momento é uma quantidade conservada, devido à identidade de Bianchi. Dessa maneira, a relatividade especial pode ser recuperada na vizinhança de cada ponto no espaço-tempo.

Esse conjunto de equações possui soluções exatas para alguns problemas físicos, como por exemplo as soluções de Schwarzschild e de Kerr que descrevem o estado final colapsado de corpos massivos, e soluções não-exatas para outros problemas físicos, tais como campos gravitacionais de estrelas rotativas estacionárias e o problema de dois corpos.

2.7 Cosmologia Relativística e o Modelo Cosmológico

Padrão

O modelo cosmológico padrão toma por postulado a homogeneidade e a isotropia espacial do universo, isto é, não há posição ou orientação privilegiada no universo. Esta é a base do Princípio Cosmológico. A relatividade geral é o suporte teórico para construção do modelo cosmológico padrão a partir das equações de campo de Einstein.

O princípio cosmológico implica na possibilidade de definição de um tempo universal, de modo que os relógios possam ser sincronizados para todos os observadores. Isto ocorre nos referenciais comoventes, localmente inerciais, em queda livre no campo gravitacional cos-

mológico. Ele também impõe severas restrições à métrica do espaço-tempo, implicando na isometria, pois a geometria do espaço-tempo deve ser a mesma para todos os observadores em quaisquer outros referenciais comoventes

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}. \quad (2.58)$$

De um modo geral, os tensores devem ser invariantes na forma

$$T'_{\mu\nu\dots} = T_{\mu\nu\dots}. \quad (2.59)$$

Dentro dessas restrições, a métrica de Friedmann-Robertson-Walker é a métrica usada no modelo cosmológico padrão. Para um sistema de coordenadas com tempo cósmico t e coordenadas espaciais (r, θ, ϕ) , onde r é a distância radial comovente de um corpo, a métrica será

$$d\tau^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (2.60)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala que delinea a expansão do universo e a constante k define sua geometria através da curvatura espacial.

Esta constante depende do conteúdo de matéria e energia do universo e pode assumir os valores:

- $k = -1$: espaço infinito de curvatura negativa, hiperbólica;
- $k = 0$: espaço infinito, plano;
- $k = 1$: espaço finito, porém limitado.

A métrica (2.60) define as componentes do tensor métrico

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = -\frac{1}{1 - kr^2} a^2(t), \quad g_{22} = -r^2 a^2(t), \quad g_{33} = -r^2 \text{sen}^2 \theta a^2(t). \quad (2.61)$$

No modelo cosmológico padrão, assume-se que o universo se comporte como um gás perfeito, cujo tensor energia-momento é dado pela equação (2.53). Uma vez definida a métrica do sistema, é possível obter as equações de movimento. Inicialmente, calcula-se

os símbolos de Christoffel através da equação (2.35), e, utilizando-os, encontra-se o tensor de Ricci através das equações (2.36) e (2.43). Por fim, o escalar de curvatura com ajuda da equação (2.44)

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right). \quad (2.62)$$

A equação de campo, na forma tensorial (2.57), fornece dez equações diferenciais linearmente independentes. Contudo, para a métrica (2.60), obtem-se apenas duas. A componente 00,

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = -T_{00}, \quad (2.63)$$

fornece a seguinte equação diferencial

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{1}{3}\rho, \quad (2.64)$$

onde ρ é a densidade de energia total do sistema, englobando todas os componentes envolvidos. Essa equação é intitulada equação de Friedmann e relaciona o parâmetro de Hubble, $H = \frac{\dot{a}}{a}$, com as densidades de energia.

Para as componentes espaciais ii , obtem-se somente uma equação independente,

$$R_{ii} - \frac{1}{2}g_{ij}R = -T_{ii} \quad (2.65)$$

que resulta na seguinte equação diferencial

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = -p, \quad (2.66)$$

onde p representa a pressão total de todos componentes envolvidos.

Subtraindo as equações (2.64) e (2.66),

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p). \quad (2.67)$$

Essa equação é intitulada equação da aceleração, porque relaciona a derivada segunda temporal do fator de escala com a densidade de energia e pressão dos componentes do universo.

A conservação do tensor energia-momento, dada pela equação (2.55), renderá apenas uma equação

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (2.68)$$

Essa equação é conhecida como equação do fluido, porque assume a mesma forma da equação da continuidade para um fluido em um sistema comovente. De acordo com a equação (2.68), a variação do volume espacial e o trabalho realizado pela pressão com a expansão contribuem com a variação da densidade de energia.

3 Modelo Cosmológico Kantowski-Sachs

Neste capítulo, será estudado modelos cosmológicos com a métrica de Kantowski-Sachs (KS). Nosso objetivo será solucionar as equações de Einstein para modelos KS, cujos conteúdos materiais serão descritos por um fluido perfeito de radiação e um gás de Chaplygin.

O universo de Kantowski-Sachs [13] é um dos muitos modelos cosmológicos anisotrópicos investigados. Parte do interesse nesse universo é devido ao grande conjunto de soluções analíticas que admite, mesmo se determinados tipos de matéria estão acoplados à gravidade.

Suponha que um modelo cosmológico é espacialmente homogêneo. Então, é invariante sob um grupo de isometria de parâmetro r , G_r , cujas órbitas são hipersuperfícies espaciais ($r \geq 3$). Em qualquer ponto q em qualquer hipersuperfície S , há 3 campos vetoriais de Killing linearmente independentes tangentes à S , e, se $r > 3$, há campos vetoriais de Killing linearmente independentes tangentes à S adicionais, mas que desaparecem em q . Neste último caso, há um grupo de isotropia contínuo H_q , que consiste de transformações que são isometrias deixando o ponto q fixo. Cada uma dessas transformações irá gerar uma transformação de Lorentz no espaço tangente, T_q , de q e isso deixará invariante todos os vetores definidos intrinsecamente em T_q . Assim, h age no subespaço de T_q ortogonal ao campo vetorial u , e então H_q é unidimensional ou tridimensional; conseqüentemente, se $r > 3$, então $r = 4$ ou $r = 6$.

Se $r = 6$, o espaço-tempo não é apenas espacialmente homogêneo, mas também espacialmente isotrópico, e pertence à classe de FRW. Se $r = 4$, o espaço-tempo é simétrico rotacional localmente. Se $r = 4$ ou $r = 6$, então o grupo de isometria G_r admite um subgrupo de três parâmetros que age transitivamente em hipersuperfícies espaciais e os espaço-tempo correspondentes podem ser considerados modelos Bianchi que possuem simetrias adicionais.

Qualquer grupo de Lie de quatro parâmetros, G_4 , admite um subgrupo de três parâmetros, G_3 , cujas órbitas são bidimensionais ou tridimensionais. No último caso, o espaço-tempo

pertence à classe de Bianchi. No caso anterior, as órbitas são necessariamente de curvatura constante. Se essa curvatura for nula ou negativa, então pode ser mostrado que o grupo G_4 admite um segundo subgrupo de três parâmetros, cujas órbitas são tridimensionais, mas se a curvatura for positiva, não há nenhum subgrupo e G_3 é isomórfico para $SO(3, \mathbb{R})$.

Há quatro vetores de Killing linearmente independentes ξ_1, ξ_2, ξ_3 e η que podem ser admitidos de forma que a álgebra de Lie é dada por

$$\begin{aligned} [\xi_1, \xi_2] &= \xi_3; & [\xi_2, \xi_3] &= \xi_1; & [\xi_3, \xi_1] &= \xi_2; \\ [\eta, \xi_1] &= 0; & [\eta, \xi_2] &= 0; & [\eta, \xi_3] &= 0. \end{aligned}$$

Esses vetores de Killing geram um subgrupo G_3 com órbitas bidimensionais.

A solução de Schwarzschild é um espaço-tempo que admite um grupo de Lie de quatro parâmetros com álgebra de Lie. Os vetores ξ_1, ξ_2 e ξ_3 geram uma simetria esférica do modelo.

O modelo cosmológico Kantowski-Sachs é conhecido por possuir localmente as mesmas simetrias da solução estendida de Schwarzschild. Já que o espaço-tempo é simétrico esféricamente, segue que há coordenadas t, r, θ, ϕ tais que as órbitas dos vetores de Killing ξ_2 e ξ_3 são superfícies bi-dimensionais onde $\{t, r = \text{const.}\}$, nas quais a métrica toma a forma,

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t)dr^2 + b^2(t)d\omega^2; \quad (3.1)$$

$$d\omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2.$$

onde $a(t)$ e $b(t)$ são os fatores de escala e $N(t)$ é a função lapso e pode ser definida igual a 1.

Assumindo que $N = 1$, temos que:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dr^2 + b^2(t)d\omega^2; \quad (3.2)$$

$$d\omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2$$

3.1 Fluidos

Antes de apresentar as soluções das equações de Einstein para o modelo cosmológico Kantowski-Sachs, é interessante introduzir os conteúdos materiais, que serão discutidos daqui em diante, e suas principais características.

3.1.1 Poeira

A equação de estado para a poeira, isto é, matéria não-relativística sem pressão, é

$$p_p = 0. \quad (3.3)$$

Quando a pressão nula está em consideração, é necessário notar que o gás e as partículas que compõem o meio não estão sobre a influência de uma força externa.

Podemos considerar essa poeira como um conjunto de partículas pontuais. De acordo com [2], a poeira é descrita como um fluido de partículas frias e pesadas, particularmente, matéria escura fria (CDM) - *cold dark matter*- e bárions, para os quais a pressão é negligenciável.

3.1.2 Vácuo

Vácuo, ou energia do vácuo, corresponde a um fluido com pressão negativa com a seguinte equação de estado:

$$p_v = -\rho. \quad (3.4)$$

A energia do vácuo corresponde à constante cosmológica, Λ . Como já visto, sua equação de estado possui pressão negativa, que neutraliza o efeito gravitacional atrativo da matéria e, portanto, causará a aceleração da expansão do universo.

Uma justificativa da pressão ser negativa procede da termodinâmica clássica. Dentro de um recipiente que realiza trabalho sobre o meio, a energia deve ser perdida dentro dele para que seu volume cresça. Isto é, uma variação no volume dV requer trabalho igual a variação da energia, $-pdV$, onde p é a pressão. Quando há um aumento no volume do recipiente contendo apenas vácuo, há também um aumento na energia, pois a energia é

igual a ρV , onde ρ é a densidade de energia da constante cosmológica. Logo, a pressão p deve ser negativa e vemos de fato que $p = -\rho$.

3.1.3 Radiação

De acordo com Beringer [2], a radiação pode ser descrita como partículas relativísticas quentes, tal como fótons ou partículas a temperaturas muito altas.

A equação de estado da radiação é dada por

$$p_r = \frac{1}{3}\rho_r. \quad (3.5)$$

Nos estágios iniciais do Big Bang, a maior parte da energia estava na forma de radiação, que era a influência principal para a expansão do universo. Considerando um universo plano dominado por radiação e que obedece a equação de Friedmann (citar), este universo irá expandir, mas com aceleração negativa. Isso nos diz que a pressão não ajuda a neutralizar a desaceleração devido à gravidade.

3.1.4 Gás de Chaplygin

O gás de Chaplygin é um fluido perfeito caracterizado pela seguinte equação de estado

$$p_g = -\frac{A}{\rho_g},$$

onde A é uma constante positiva. Essa equação de estado nos leva a um componente que se comporta como poeira nos estágios iniciais do universo e como uma constante cosmológica nos estágio finais [10].

O gás de Chaplygin foi introduzido por Chaplygin [4] como uma aproximação matemática adequada para o cálculo da força de elevação numa asa de um avião em aerodinâmica. Sua pressão negativa também pode ser usada para descrever alguns efeitos em sólidos que podem ser deformados [19].

Os modelos cosmológicos que contém o gás de Chapygin apresentam pelo menos três importantes características:

- eles descrevem uma transição suave de um universo que possui expansão desacelerada para um que apresenta a atual época de aceleração cósmica;
- eles tentam unificar a matéria escura e a energia escura em uma única equação de estado;
- e representam a deformação mais simples dos tradicionais modelos de Λ CDM.

3.2 Equações para cosmologia do tipo Kantowski-Sachs

De agora em diante, usando a métrica (3.2), é possível determinar as equações de Einstein para o modelo KS.

A partir da equação (2.35), podemos obter os símbolos de Christoffel não-nulos:

$$\begin{aligned}\Gamma_{01}^1 &= \frac{\dot{a}}{a}; & \Gamma_{11}^0 &= \dot{a}a; & \Gamma_{23}^3 &= \cot\theta \\ \Gamma_{02}^2 &= \frac{\dot{b}}{b}; & \Gamma_{22}^0 &= \dot{b}b; & \Gamma_{33}^2 &= -\sin\theta \cos\theta \\ \Gamma_{03}^3 &= \frac{\dot{b}}{b}; & \Gamma_{33}^0 &= \dot{b}b \sin^2\theta\end{aligned}$$

Dos símbolos de Christoffel, obtemos os tensores de Ricci:

(i) para $\mu = 0$ e $\nu = 0$:

$$R_{00} = -\frac{\ddot{a}}{a} - 2\frac{\ddot{b}}{b}; \quad (3.6)$$

(ii) para $\mu = 1$ e $\nu = 1$:

$$R_{11} = \ddot{a}a + 2\dot{a}\frac{\dot{b}}{b} \quad (3.7)$$

(iii) para $\mu = 2$ e $\nu = 2$:

$$R_{22} = \ddot{b}b + \dot{b}^2 + \dot{b}b\frac{\dot{a}}{a} + 1 \quad (3.8)$$

(iv) para $\mu = 3$ e $\nu = 3$:

$$R_{33} = \sin^2\theta \left[\ddot{b}b + \dot{b}^2 + \dot{b}b\frac{\dot{a}}{a} + 1 \right]. \quad (3.9)$$

Assim sendo, podemos obter o escalar de Ricci:

$$R = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} \quad (3.10)$$

$$= 2\frac{\ddot{a}}{a} + 4\frac{\ddot{b}}{b} + 4\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + 2\frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{2}{b^2}. \quad (3.11)$$

Agora podemos finalmente determinar os tensores de Einstein, $G_{\mu\nu}$:

(i) para $\mu = 0$ e $\nu = 0$:

$$G_{00} = 2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{1}{b^2} \quad (3.12)$$

(ii) para $\mu = 1$ e $\nu = 1$:

$$G_{11} = -2a^2\frac{\ddot{b}}{b} - a^2\frac{\dot{b}^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} \quad (3.13)$$

(iii) para $\mu = 2$ e $\nu = 2$:

$$G_{22} = -\dot{b}b\frac{\dot{a}}{a} - b^2\frac{\ddot{a}}{a} - \ddot{b}b \quad (3.14)$$

(iv) para $\mu = 3$ e $\nu = 3$:

$$G_{33} = \text{sen}^2\theta \left[-\dot{b}b\frac{\dot{a}}{a} - b^2\frac{\ddot{a}}{a} - \ddot{b}b \right] \quad (3.15)$$

Em um sistema de coordenadas comoventes, as equações de campo de Einstein (2.56) para a métrica (3.2) com a ajuda da equação (2.53) geram

$$2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{1}{b^2} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} = \rho \quad (3.16)$$

$$-a^2 \left[\frac{\dot{b}^2}{b^2} + 2\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{1}{b^2} \right] = pg_{11} \quad (3.17)$$

$$-b^2 \left[\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} \right] = pg_{22} \quad (3.18)$$

$$-b^2 \text{sen}^2\theta \left[\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} \right] = pg_{33} \quad (3.19)$$

onde o ponto sobre as variáveis ($\dot{\cdot}$) denota a derivada com respeito ao tempo cósmico t .

Em um espaço-tempo curvo da Relatividade Geral

$$\Delta_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (3.20)$$

Isso significa que

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\nu T^{\mu\alpha} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu T^{\alpha\nu} = 0. \quad (3.21)$$

Para o elemento de linha (3.2), obtemos

$$\dot{\rho} + (\rho + p) \left[\frac{\dot{a}}{a} + 2\frac{\dot{b}}{b} \right] = 0 \quad (3.22)$$

3.3 Soluções de Poeira

Nessa subseção vamos apresentar os resultados obtidos na Referência [13].

A equação de estado para a poeira é dada pela equação (3.3). Substituindo a equação (3.3) em (3.22), obtemos

$$\rho_p = \frac{C_p}{ab^2}, \quad (3.23)$$

onde C_p é uma constante de integração. Logo, podemos reescrever as equações de campo de Einstein

$$2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{1}{b^2} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} = \frac{C_p}{ab^2} \quad (3.24)$$

$$\frac{\dot{b}^2}{b^2} + 2\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{1}{b^2} = 0 \quad (3.25)$$

$$\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = 0 \quad (3.26)$$

$$\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = 0. \quad (3.27)$$

Note que as equações (3.26) e (3.27) são idênticas. Logo, o sistema será

$$2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{1}{b^2} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} = \frac{C_p}{ab^2} \quad (3.28)$$

$$\frac{\dot{b}^2}{b^2} + 2\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{1}{b^2} = 0 \quad (3.29)$$

$$\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = 0 \quad (3.30)$$

Considere agora a seguinte substituição

$$\dot{b} = \nu, \ddot{b} = \nu \frac{d\nu}{db}. \quad (3.31)$$

Introduzindo esta substituição em (3.25), obtemos

$$2b\left(\nu\frac{d\nu}{db}\right) + 1 + \nu^2 = 0 \quad (3.32)$$

$$\Rightarrow \frac{2\nu}{1 + \nu^2}d\nu = -\frac{1}{b}db \quad (3.33)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{|1 + \nu^2|}{C}\right) = -\ln|b|, \quad (3.34)$$

onde C é uma constante de integração. Rearranjando os termos, obtemos

$$\frac{db}{dt} = \sqrt{\frac{C}{b} - 1}. \quad (3.35)$$

No artigo [13], Kantowski e Sachs sugerem uma segunda substituição

$$b = C \cos^2(\eta), \quad (3.36)$$

onde η é conhecido como um parâmetro temporal. Logo,

$$\frac{db}{dt} = -2C \cos(\eta) \operatorname{sen}(\eta) \frac{d\eta}{dt}. \quad (3.37)$$

Substituindo (3.36) e (3.37) em (3.35), obtemos

$$-2C \cos(\eta) \operatorname{sen}(\eta) \frac{d\eta}{dt} = \sqrt{\frac{C}{C \cos^2(\eta) - 1}} \quad (3.38)$$

$$-2C \cos(\eta) \operatorname{sen}(\eta) \frac{d\eta}{dt} = \tan(\eta) \quad (3.39)$$

$$-2C \cos^2(\eta) d\eta = dt. \quad (3.40)$$

Integrando (3.40) de t_0 a t , teremos

$$t - t_0 = C\left(\eta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\eta)\right). \quad (3.41)$$

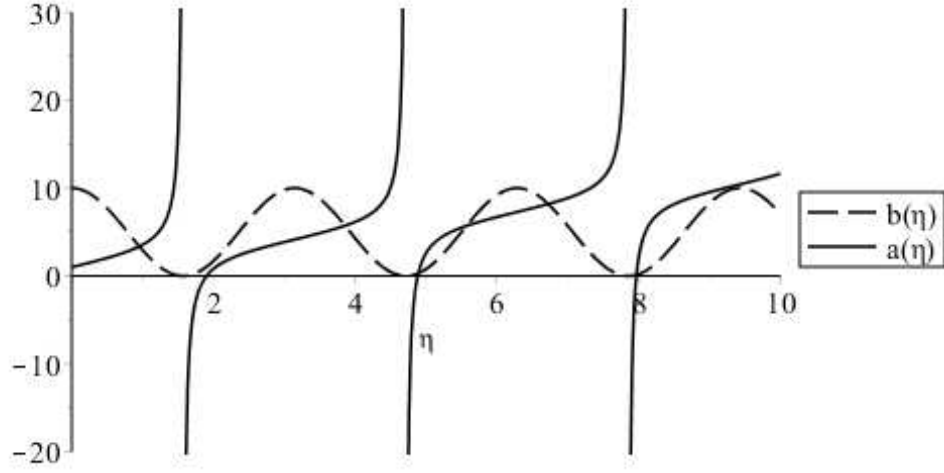


Figura 3.1: Comportamento dos fatores de escala a e b em função de η

O segundo fator de escala, $a(t)$, Kantowski e Sachs o fornecem em seu artigo [13]. Portanto, obtemos que os dois fatores de escala serão

$$b = C \cos^2(\eta) \quad (3.42)$$

$$a = \epsilon + (\epsilon\eta + l) \tan(\eta), \quad (3.43)$$

onde ϵ é um parâmetro que pode tomar valores iguais a 0 ou 1 e l é uma constante.

Na Figura 3.1, é apresentado o comportamento dos fatores de escala a e b em função do parâmetro temporal η . Os valores dos parâmetros usados foram $C = 10$, $\epsilon = 1$ e $l = 0$.

3.4 Soluções com Constante Cosmológica (Λ)

O caso a seguir foi apresentado por Gron [11] em seu estudo sobre o modelo cosmológico Kantowski-Sachs com constante cosmológica. As equações de Einstein para a métrica KS com constante cosmológica, Λ , serão dadas por

$$2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{1}{b^2} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} = \Lambda \quad (3.44)$$

$$\frac{\dot{b}^2}{b^2} + 2\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{1}{b^2} = \Lambda \quad (3.45)$$

$$\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = \Lambda \quad (3.46)$$

$$(3.47)$$

Teremos essas três equações, pois o que seria a quarta é igual a terceira. Por um processo de integração, a equação (3.45) se torna

$$\dot{b}^2 = \frac{\Lambda}{3}b^2 - 1 + \frac{C_c}{b}, \quad (3.48)$$

onde C_c é uma constante de integração. Assumindo $C_c = 0$, obtemos

$$\dot{b}^2 = \frac{\Lambda}{3}b^2 - 1 \quad (3.49)$$

$$\frac{db}{dt} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}b^2 - 1} \quad (3.50)$$

$$\Rightarrow dt = \frac{db}{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}b^2 - 1}}. \quad (3.51)$$

Integrando ambos os lados dessa equação, obtemos

$$t = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \ln \left| \sqrt{\frac{\Lambda}{3}b^2 - 1} + \sqrt{\frac{\Lambda}{3}b} \right|. \quad (3.52)$$

Para tentar simplificar essa expressão, usaremos a seguinte relação trigonométrica

$$\cosh^{-1}(kx) = \ln |\sqrt{k^2x^2 - 1} + kx|. \quad (3.53)$$

Logo, a equação (3.52) pode ser reescrita

$$t = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \cosh^{-1} \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}b} \right) \quad (3.54)$$

$$\Rightarrow b(t) = b_0 \cosh \frac{t}{b_0}, \quad (3.55)$$

onde $b_0 = \sqrt{3/\Lambda}$.

Agora queremos encontrar o segundo fator de escala, $a(t)$. Para isso, substituiremos as

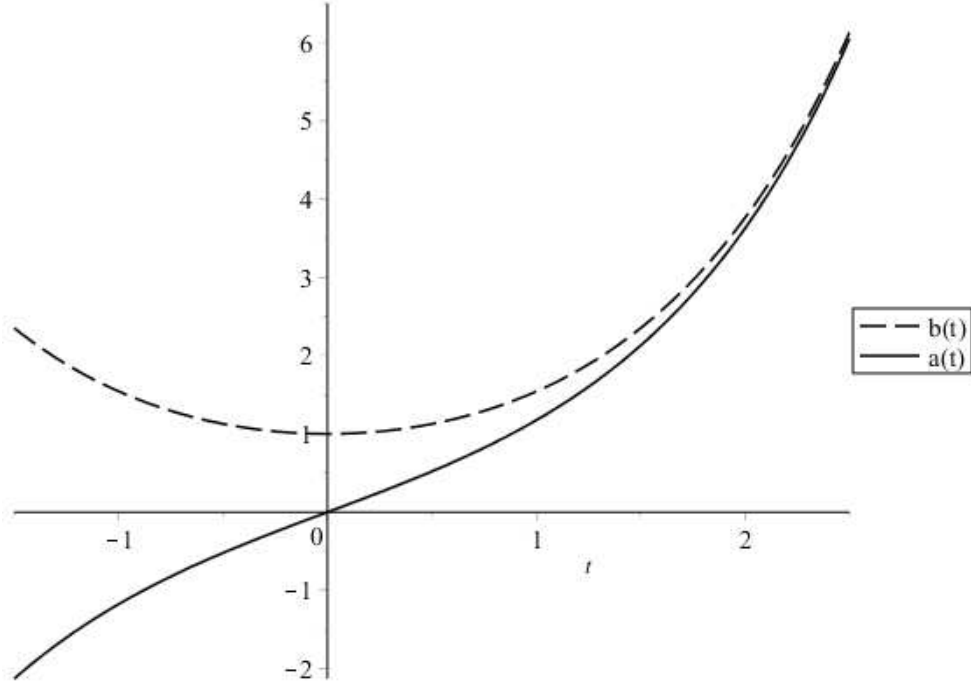


Figura 3.2: Comportamento dos fatores de escala a e b em função de t para constante cosmológica

equações (3.49) e (3.55) em (3.44)

$$2\frac{\dot{a}}{a} \frac{\sqrt{b^2/b_0^2 - 1}}{b} + \frac{1}{b_0^2} = \Lambda \quad (3.56)$$

$$\Rightarrow 2\frac{\dot{a}}{a} \frac{\sqrt{\cosh^2(t/b_0) - 1}}{b_0 \cosh(t/b_0)} + \frac{1}{b_0^2} = \Lambda \quad (3.57)$$

$$\Rightarrow 2\frac{\dot{a}}{a} \frac{\tanh(t/b_0)}{b_0} = \Lambda \quad (3.58)$$

Assim, teremos que

$$\frac{da}{a} = \frac{b_0}{2}(\Lambda - 1/b_0^2) \coth(t/b_0) dt. \quad (3.59)$$

Integrando ambos os lados dessa equação, vamos obter o fator de escala $a(t)$:

$$a(t) = b_0 \sinh \frac{t}{b_0}. \quad (3.60)$$

Na Figura 3.2, é apresentado o comportamento dos fatores de escala a e b em função de t para um universo regido pelo modelo cosmológico de Kantowski-Sachs com constante cosmológica. O valor do parâmetro b_0 usado foi $b_0 = 1$.

3.5 Soluções de Radiação

Esta seção será dedicada ao estudo de um universo preenchido com apenas radiação que obedece a métrica (3.2). A equação de estado para a radiação é dada pela equação (3.5) e substituindo-a em (3.22), obtemos

$$\rho_r = \left[\frac{C_1}{a^4 b^8} \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (3.61)$$

onde C_1 é uma constante de integração. Logo, podemos reescrever as equações de campo de Einstein, (3.16) até (3.19):

$$2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{1}{b^2} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} = \left[\frac{C_1}{a^4 b^8} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (3.62)$$

$$\frac{\dot{b}^2}{b^2} + 2\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{1}{b^2} = -\frac{1}{3} \left[\frac{C_1}{a^4 b^8} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (3.63)$$

$$\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = -\frac{1}{3} \left[\frac{C_1}{a^4 b^8} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (3.64)$$

$$\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = -\frac{1}{3} \left[\frac{C_1}{a^4 b^8} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (3.65)$$

Note que as equações (3.64) e (3.65) são idênticas. Ao subtrair as equações (3.63) e (3.64), obtemos o seguinte sistema de equações:

$$2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{1}{b^2} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} = \left[\frac{C_1}{a^4 b^8} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (3.66)$$

$$\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = 0. \quad (3.67)$$

O sistema de equações acima não possui solução analítica, apenas soluções numéricas. Ao variar os parâmetros e as condições iniciais, obtemos diversos conjuntos de soluções. Usamos a equação (3.66) para determinar as condições iniciais apropriadas para estudarmos como cada parâmetro e condição inicial influenciam na dinâmica dos fatores de escala. As soluções numéricas do sistema foram implementadas no software *Maplesoft*, usando o método de solução *rk45*.

3.5.1 Variação da Constante de Integração C_1

Nosso propósito agora é apresentar as soluções encontradas ao variar parâmetros e condições iniciais nas equações de Einstein. Com esse objetivo, iremos apresentar as soluções encontradas ao variar o parâmetro C_1 de 1 a 5 e com as condições iniciais fixas $a(0) = 0.1, b(0) = 0.1$ e $\dot{a}(0) = 1$. Na Figura 3.3, é apresentado o comportamento do fator de escala a . Note que ele apresenta um comportamento expansivo acelerado e que quanto menor o valor de C_1 , mais rápido será sua expansão. Ao variar o parâmetro C_1 , notamos que quanto menor o valor de C_1 , menor seria a derivada inicial de a . Porém, ao decorrer do tempo, vemos que os que possuem menor derivada inicial irão ultrapassar os de maior derivada inicial e se expandirão mais rapidamente.

Na Figura 3.4, é apresentado o comportamento do fator de escala b . Note que quanto menor o valor de C_1 , menor será a expansão de b e ele atingirá a singularidade (*Big Crunch*) mais rapidamente. Isto é, o universo irá expandir, alcançar um valor máximo e recolapsará. Esse resultado é correspondente a um universo de FLRW preenchido apenas com radiação [2].

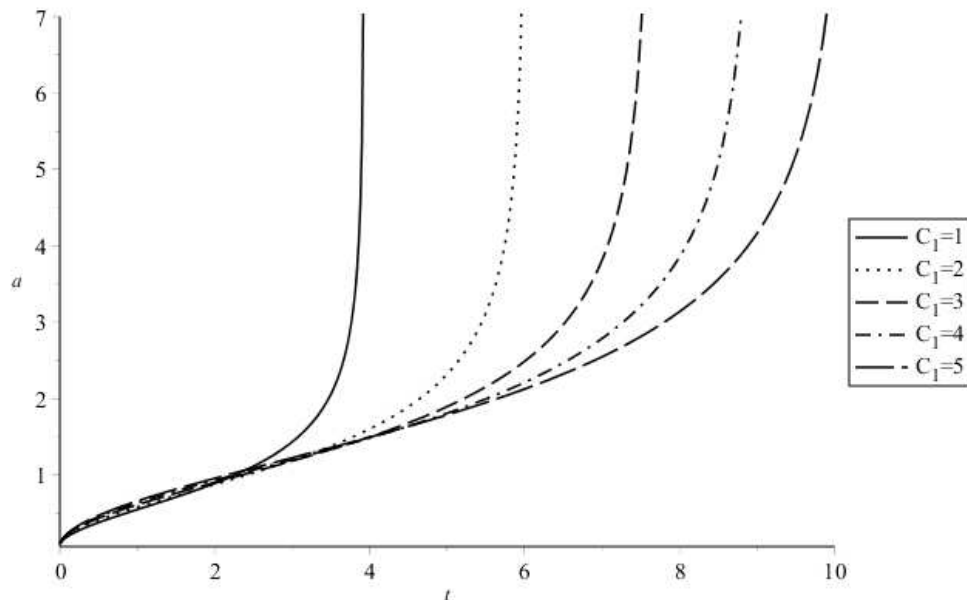


Figura 3.3: Comportamento do fator de escala a com radiação com variação de C_1

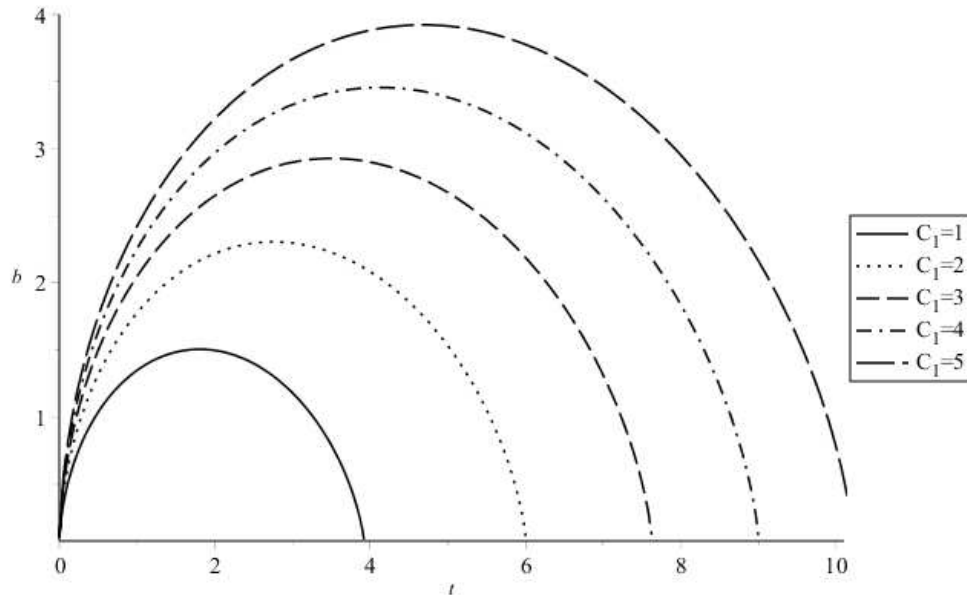


Figura 3.4: Comportamento do fator de escala b com radiação com variação de C_1

3.5.2 Variação de $a(0)$

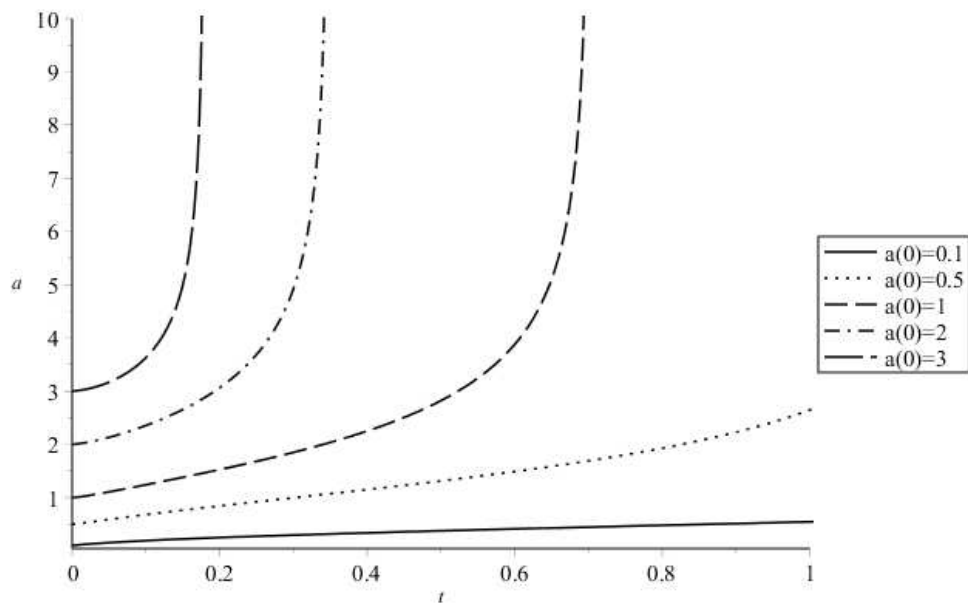
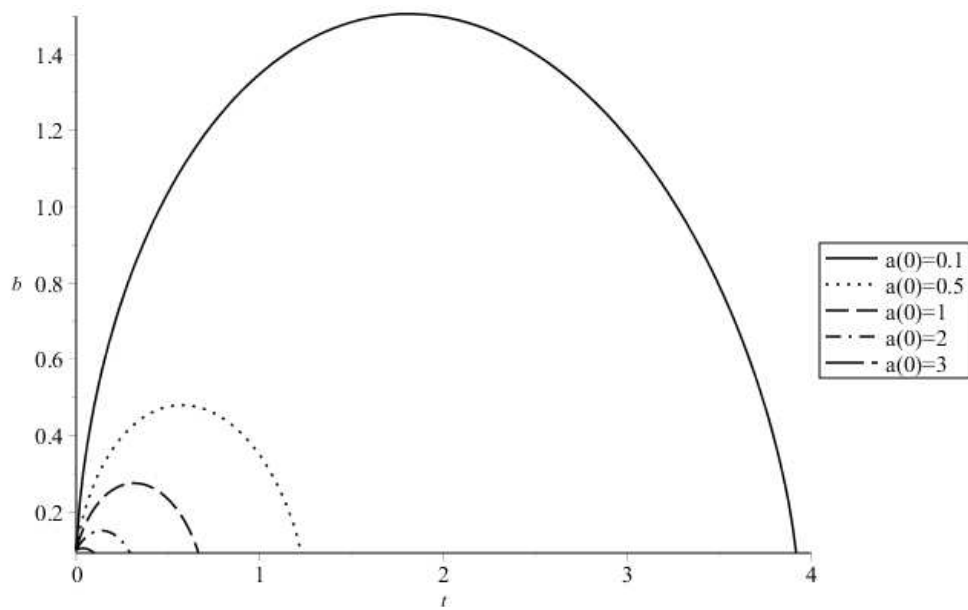
Nosso objetivo nessa seção é apresentar e discutir o comportamento dos fatores de escala a e b com a variação da condição inicial de a . Para esses resultados, escolhemos $C_1 = 1, b(0) = 0.1$ e $\dot{a}(0) = 1$. Na Figura 3.5, é apresentado o comportamento de a sob essas condições. Ele apresenta um comportamento expansivo acelerado e quanto maior seu valor inicial, mais rápido ele irá expandir.

Na Figura 3.6, vemos o comportamento do fator de escala b . Note que ele é limitado para todos os valores de $a(0)$ e quanto maior esse valor, mais rápido ele alcançará a singularidade, *Big Crunch*. Ele irá expandir até certo ponto, atingirá seu ponto máximo e, então, irá recolapsar.

3.5.3 Variação de $b(0)$

Nesta seção estão apresentados os comportamentos dos fatores de escala a e b com a variação da condição inicial $b(0)$. Para esses resultados, escolhemos $C_1 = 1, a(0) = 0.1$ e $\dot{b}(0) = 1$. Na Figura 3.7, podemos ver que o comportamento do fator de escala a é expansivo acelerado. Note que quanto menor o valor inicial de b , mais rápida será a expansão de a .

Já na Figura 3.6, vemos que o comportamento do fator de escala b é limitado. Ou seja,

Figura 3.5: Comportamento do fator de escala a com radiação com variação de $a(0)$ Figura 3.6: Comportamento do fator de escala b com radiação com variação de $a(0)$

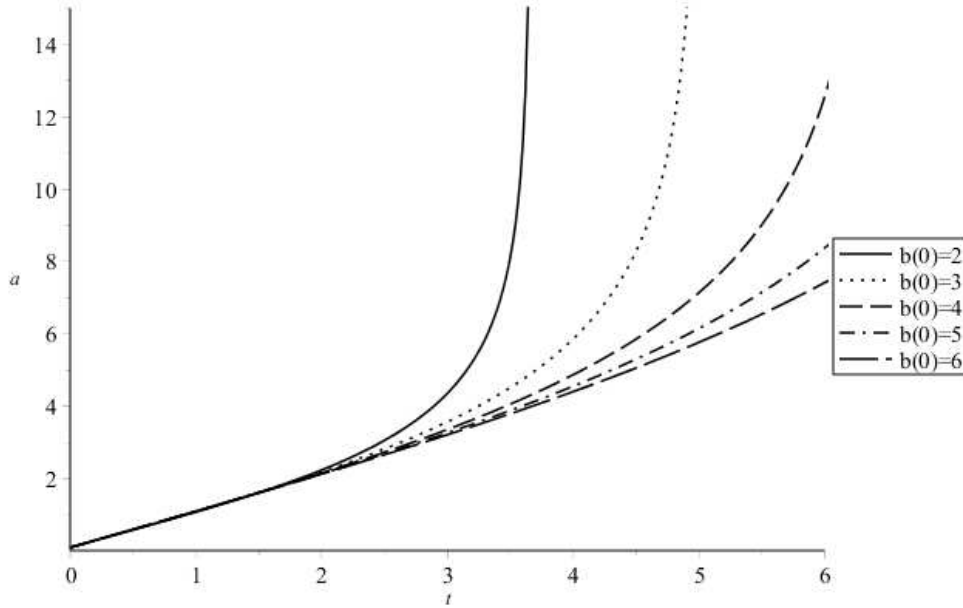


Figura 3.7: Comportamento do fator de escala a com radiação com variação de $b(0)$

ele irá sempre recolapsar. Note que quanto maior o valor inicial de b , maior será a sua expansão.

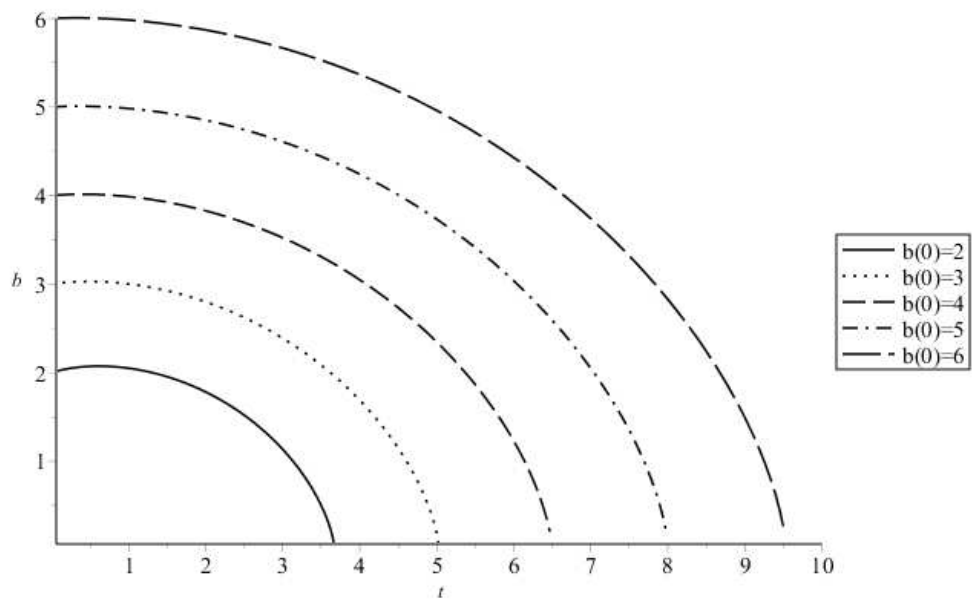
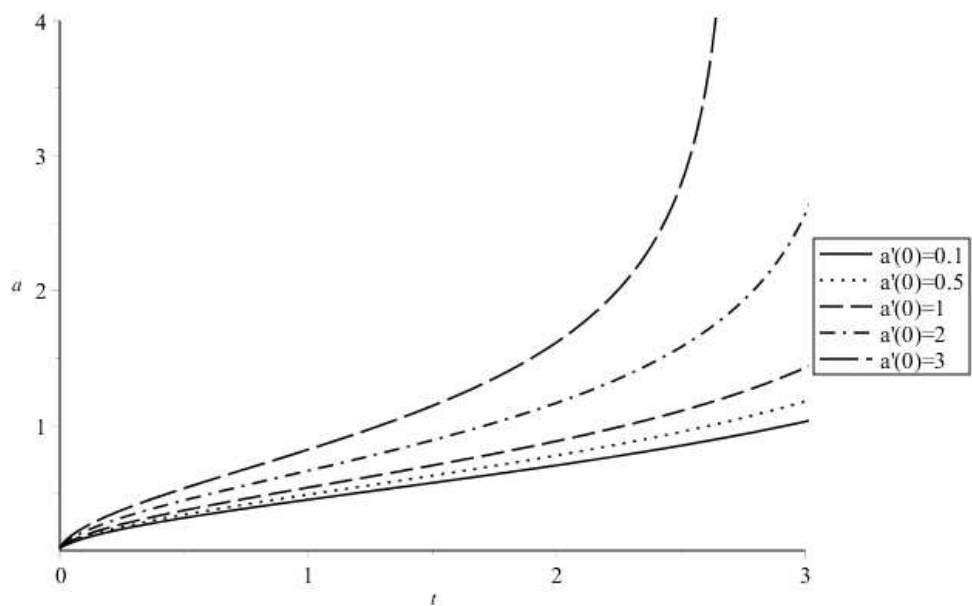
3.5.4 Variação de $\dot{a}(0)$

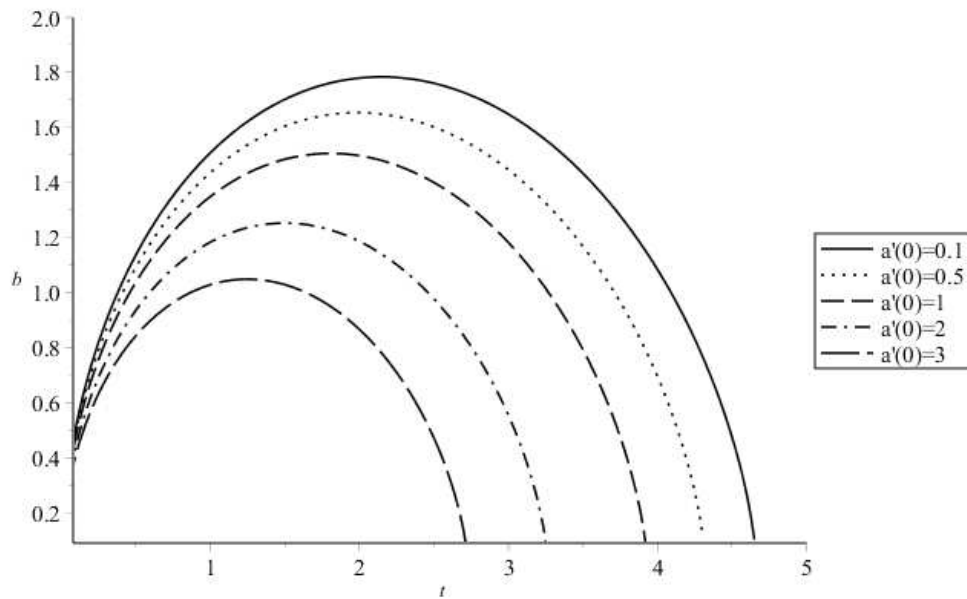
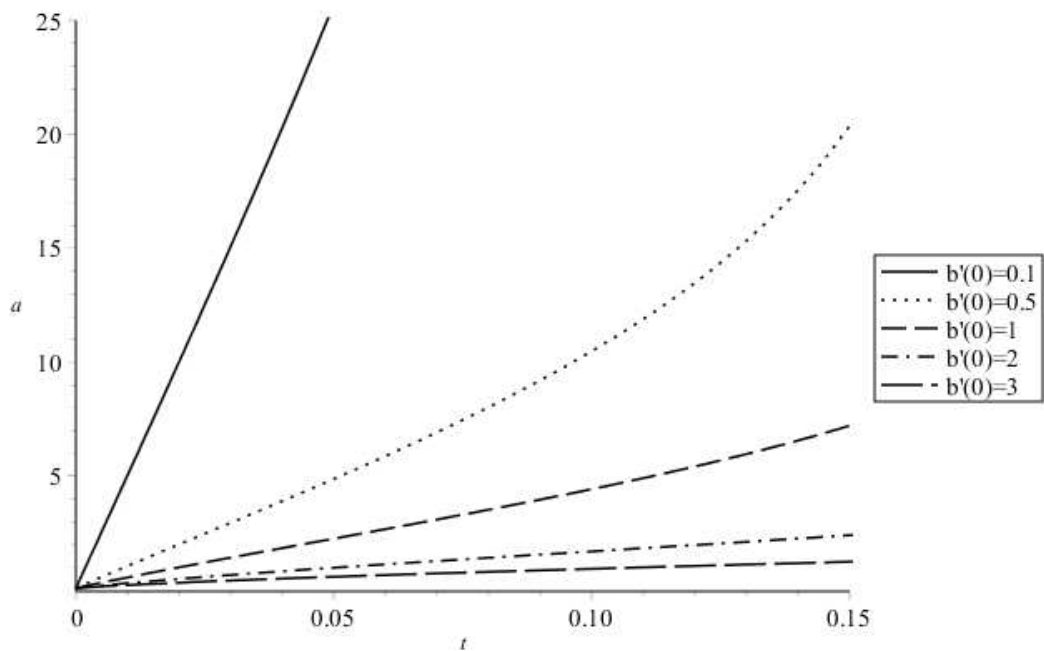
Nos dedicaremos agora a mostrar os resultados obtidos variando o valor da condição inicial $\dot{a}(0)$. Para esses resultados, escolhemos que $C_1 = 1$, $a(0) = 0.1$ e $b(0) = 0.1$. Na Figura 3.9, podemos observar o comportamento do fator de escala a . O fator de escala a apresenta um comportamento expansivo acelerado e quanto maior sua derivada inicial, mais rápido ele irá expandir. Já na Figura 3.10, vemos o comportamento do fator de escala $b(t)$. Note que quanto maior o valor da derivada inicial de a , mais rápido ele alcançará a singularidade, *Big Crunch*. Ele se expandirá até seu limite máximo e, então, irá recolapsar.

3.5.5 Variação de $\dot{b}(0)$

Nos dedicaremos agora a mostrar os resultados obtidos variando o valor da condição inicial $\dot{b}(0)$. Para esses resultados, escolhemos que $C_1 = 1$, $a(0) = 0.1$ e $b(0) = 0.1$.

Na Figura 3.11, vemos o comportamento do fator de escala $a(t)$ para um universo KS preenchido apenas com radiação. O fator de escala a apresenta um comportamento

Figura 3.8: Comportamento do fator de escala b com radiação com variação de $b(0)$ Figura 3.9: Comportamento do fator de escala a com radiação com variação de $a'(0)$

Figura 3.10: Comportamento do fator de escala b com radiação com variação de $\dot{a}(0)$ Figura 3.11: Comportamento do fator de escala a com radiação com variação de $\dot{b}(0)$

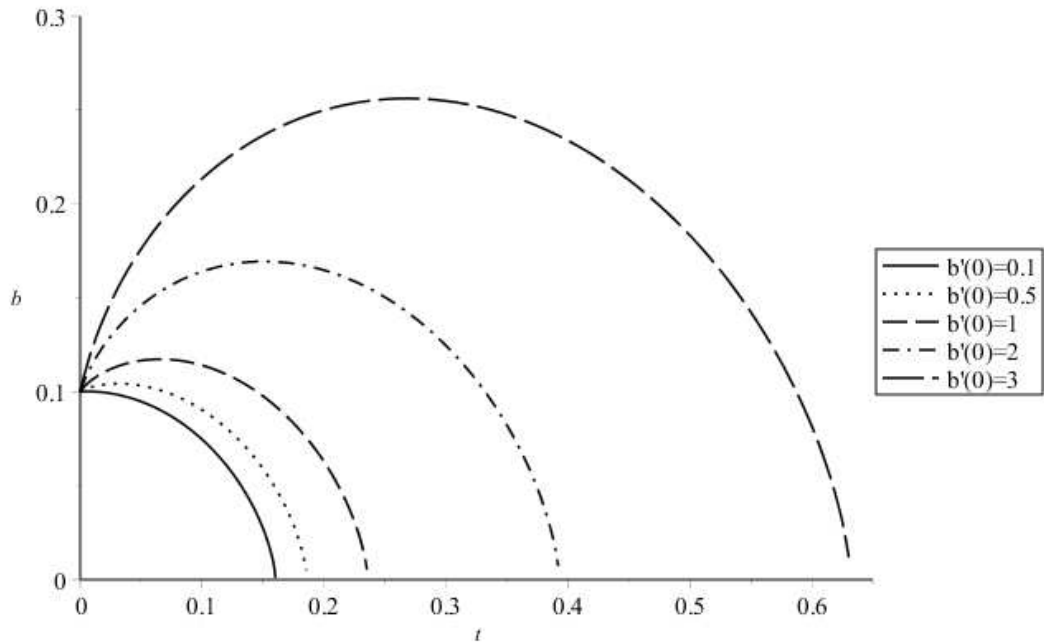


Figura 3.12: Comportamento do fator de escala b com radiação com variação de $\dot{b}(0)$

expansivo acelerado e sua derivada inicial varia de maneira inversa a derivada inicial do segundo fator de escala $b(t)$, isto é, quanto menor a derivada inicial de b , maior será a derivada inicial de a . Com isso, vemos que quanto menor o valor de $b(0)$, mais rápida será a expansão de a .

Já na Figura 3.12, vemos o comportamento do fator de escala $b(t)$. Note que quanto menor o valor da derivada inicial de b , mais rápido o fator de escala b irá atingir a singularidade, conhecida como *Big Crunch*. O fator de escala inicia o processo de expansão, onde todos possuem um momento de expansão máxima, e, então, começam a recolapsar.

3.6 Soluções de Gás de Chaplygin

O estudo feito na presente subseção é o resultado original dessa dissertação. A equação de estado para o gás de Chaplygin é dada por

$$p_{cg} = \frac{-A}{\rho_{cg}}, \quad (3.68)$$

onde A é uma constante. Substituindo a equação (3.68) em (3.22), obtemos

$$\rho_{cg} = \left[A + \frac{C_2}{a^2 b^4} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.69)$$

onde C_2 é uma constante de integração. Logo, podemos reescrever as equações de campo de Einstein, (3.16) até (3.19):

$$2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{1}{b^2} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} = \left[A + \frac{C_2}{a^2 b^4} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.70)$$

$$\frac{\dot{b}^2}{b^2} + 2\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{1}{b^2} = \frac{A}{\left[A + \frac{C_2}{a^2 b^4} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.71)$$

$$\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = \frac{A}{\left[A + \frac{C_2}{a^2 b^4} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.72)$$

$$\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = \frac{A}{\left[A + \frac{C_2}{a^2 b^4} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.73)$$

Note que as equações (3.72) e (3.73) são idênticas. Ao subtrair as equações (3.71) e (3.72), obtemos o seguinte sistema de equações:

$$2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{1}{b^2} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} = \left[A + \frac{C_2}{a^2 b^4} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.74)$$

$$\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = 0 \quad (3.75)$$

Para o sistema de equações acima, não encontramos solução analítica, apenas soluções numéricas. Logo, ao variar os parâmetros e as condições iniciais, obtemos diversos conjuntos de soluções. Usamos a equação (3.74) para determinar as condições iniciais apropriadas para estudarmos como cada parâmetro e condição inicial influenciam na dinâmica dos fatores de escala.

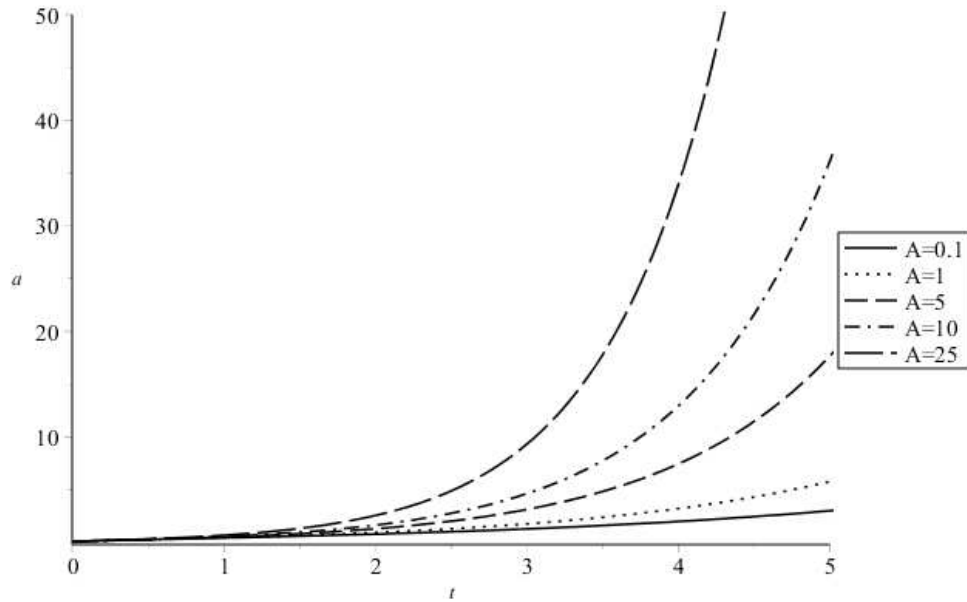


Figura 3.13: Comportamento do fator de escala a com gás de Chaplygin com variação de A

3.6.1 Variação da constante A do fluido

Ao variar a constante A do fluido de 0.1 a 25, mas mantendo o parâmetro $C_2 = 1$ e as condições iniciais $a(0) = 0.1$, $b(0) = 1$ e $\dot{b}(0) = 1$, obtemos um conjunto de soluções do sistema de equações de Einstein para o gás de Chaplygin.

Na Figura 3.13, podemos ver o comportamento do fator de escala a com a variação de A . Note que para todos os valores de A , a apresenta comportamento expansivo acelerado e que quanto maior o valor de A , mais rápida será sua expansão.

Já na Figura 3.14, temos o gráfico do comportamento do fator de escala b quando A varia. Note que o comportamento de b também é acelerado para todos os valores de A e quanto maior o seu valor, mais rápida será a expansão de b .

3.6.2 Variação da constante de integração C_2

Nesta seção, analisaremos o comportamento dos fatores de escala a e b quando há a variação do parâmetro C_2 , mantendo a constante do fluido $A = 1$ e as condições iniciais $a(0) = 0.1$, $b(0) = 1$ e $\dot{b}(0) = 1$. Na Figura 3.15, é possível ver o comportamento expansivo acelerado de a . Note que quanto maior o valor de C_2 , mais rápida será a expansão. Na Figura 3.16, vemos que o fator de escala b também possui comportamento expansivo acelerado. Porém, quanto à velocidade da expansão, é praticamente imperceptível a

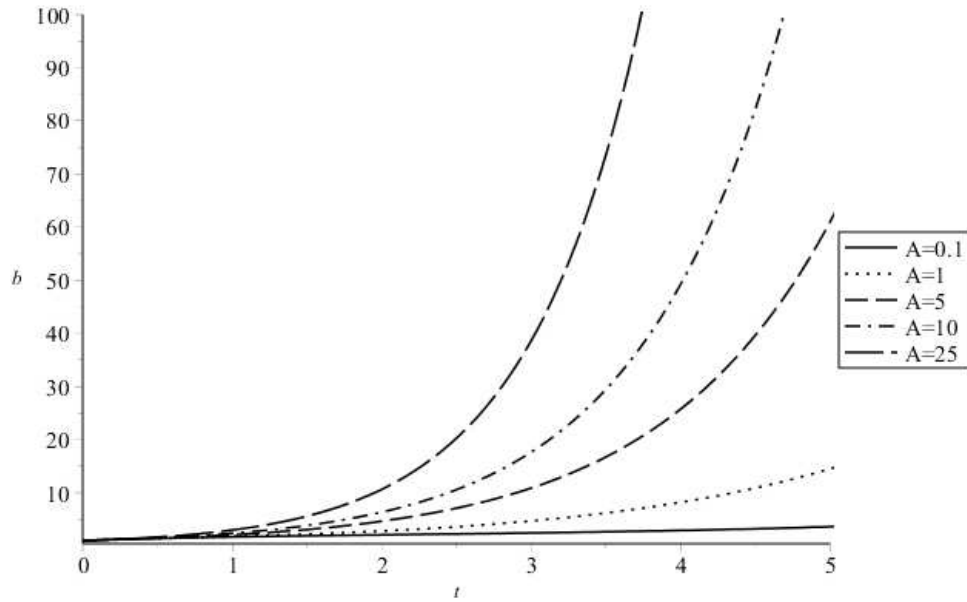


Figura 3.14: Comportamento do fator de escala b com radiação com variação de A

diferença entre os diferentes valores de C_2 . Para evidenciar o comportamento de b ,

C_2	$b(t=5)$
1	14.52787
2	14.34393
3	14.26052
4	14.21026
5	14.17574

Tabela 3.1: Comportamento de b em $t = 5$ com variação de C_2

expomos os valores de b em $t = 5$ para todos os valores de C_2 na tabela 3.1. Com isso, notamos que, apesar de quase imperceptível, a expansão de b se torna mais rápida quanto menor o valor de C_2 .

3.6.3 Variação de $a(0)$

Nesta seção, serão apresentados os resultados das equações de Einstein quando há variação da condição inicial $a(0)$ de 0.1 a 3, mantendo os parâmetros $A = 1, C_2 = 1$ e as condições iniciais $b(0) = 1$ e $\dot{b}(0) = 1$ fixos. Na Figura 3.17, vemos o comportamento do fator de escala a quando há a variação de $a(0)$. Note que para todos os valores de $a(0)$, a possui comportamento expansivo acelerado e quanto menor o valor de $a(0)$, mais rápida será sua expansão.

Na Figura 3.18, temos o comportamento do fator de escala b . Veja que, apesar de possuir

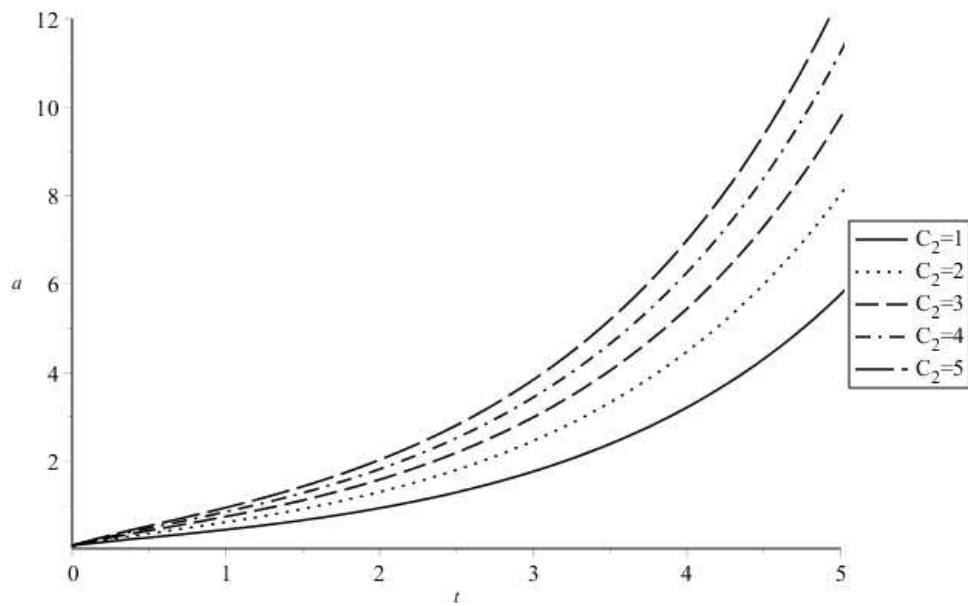


Figura 3.15: Comportamento do fator de escala a com gás de Chaplygin com variação de C_2

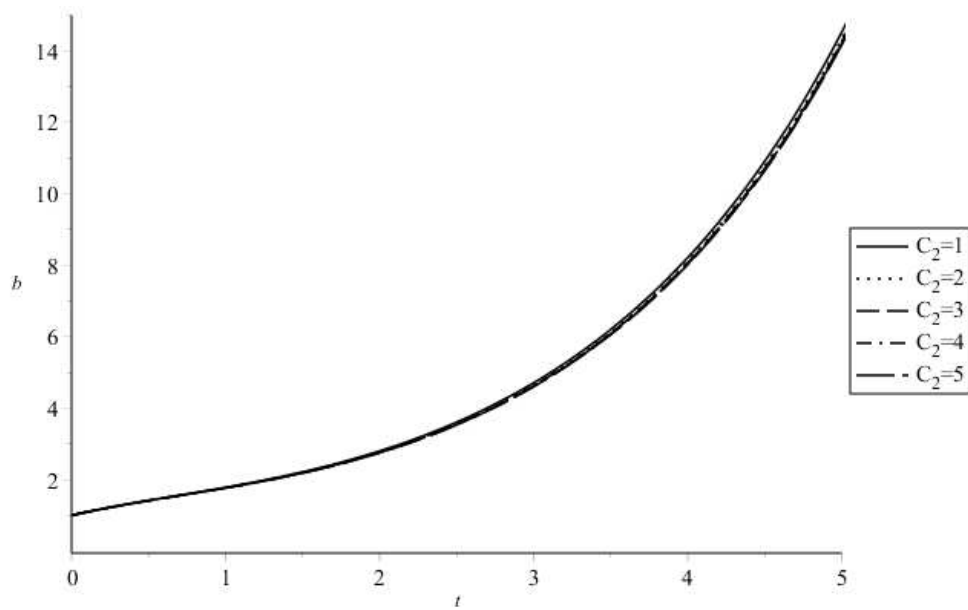


Figura 3.16: Comportamento do fator de escala b com gás de Chaplygin com variação de C_2

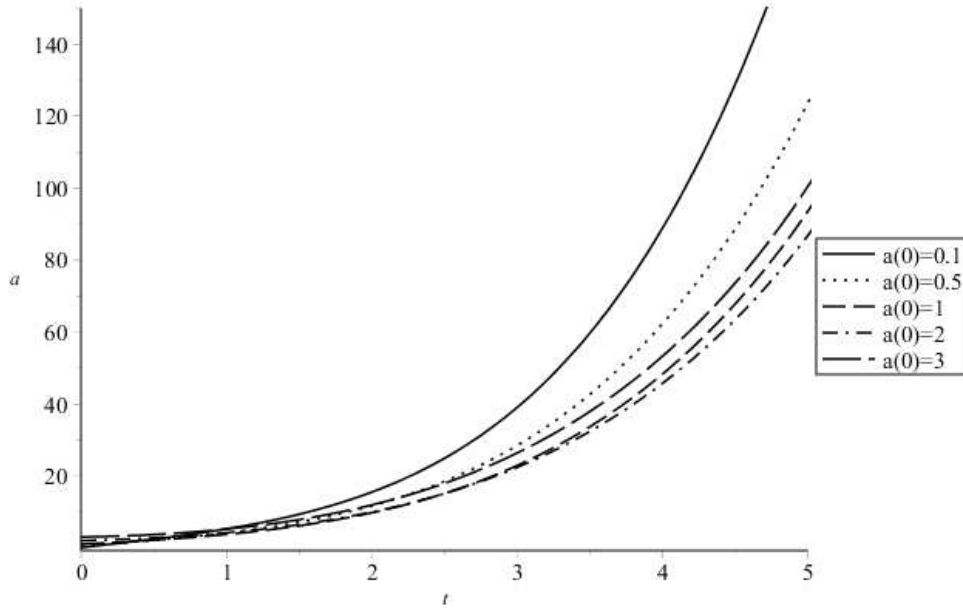


Figura 3.17: Comportamento do fator de escala a com gás de Chaplygin com variação de $a(0)$

o mesmo comportamento expansivo acelerado de a , quanto maior o valor de $a(0)$ mais rápida será a sua expansão.

3.6.4 Variação de $b(0)$

Nesta seção, serão apresentados os resultados das equações de Einstein quando há variação da condição inicial $b(0)$ de 0.1 a 5, mantendo os parâmetros $A = 1$, $C_2 = 1$ e as condições iniciais $a(0) = 0.1$ e $\dot{b}(0) = 1$ fixos. Ao analisar os comportamentos dos fatores de escala para valores de $b(0)$, notamos que houve diferença quando $b(0) < 1$ e quando $b(0) \geq 1$, logo, dividimos esse estudo em duas partes:

- $b(0) < 1$

Na Figura 3.19, observamos o comportamento expansivo acelerado de a . Note que quanto mais $b(0)$ se aproxima de 1, mais lenta será a expansão de a . Já na Figura 3.20, vemos o comportamento de b . Note que esse comportamento é limitado, isto é, sua evolução apresenta uma parte onde se expande, atinge seu máximo e, então, começa a contrair até recolar. Este fenômeno é conhecido como *Big Crunch*. Veja, também, que quanto menor o valor de $b(0)$, mais rápido será o recolapso.

- $b(0) \geq 1$

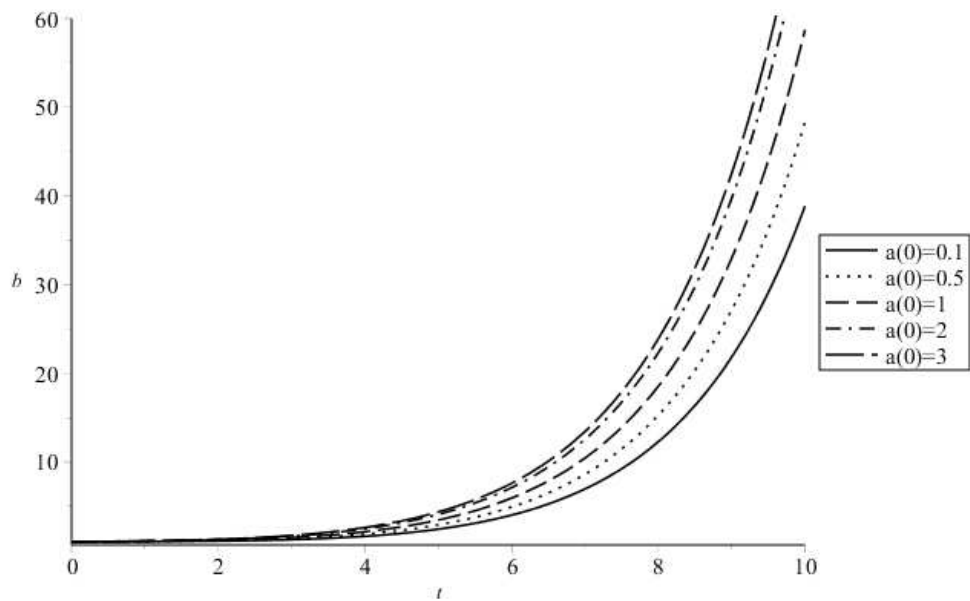


Figura 3.18: Comportamento do fator de escala b com gás de Chaplygin com variação de $a(0)$

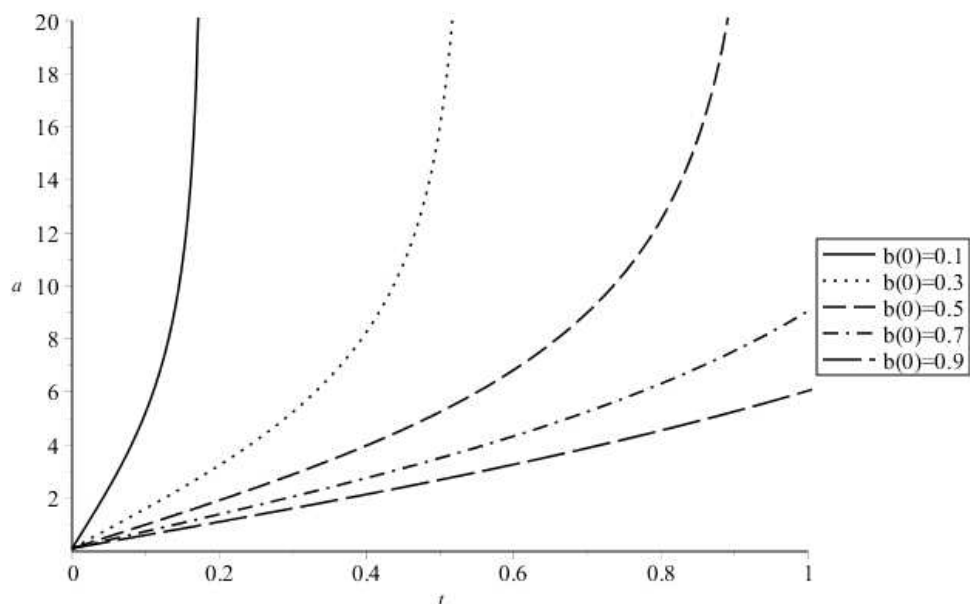


Figura 3.19: Comportamento do fator de escala a com gás de Chaplygin com variação de $b(0)$ entre 0.1 e 0.9

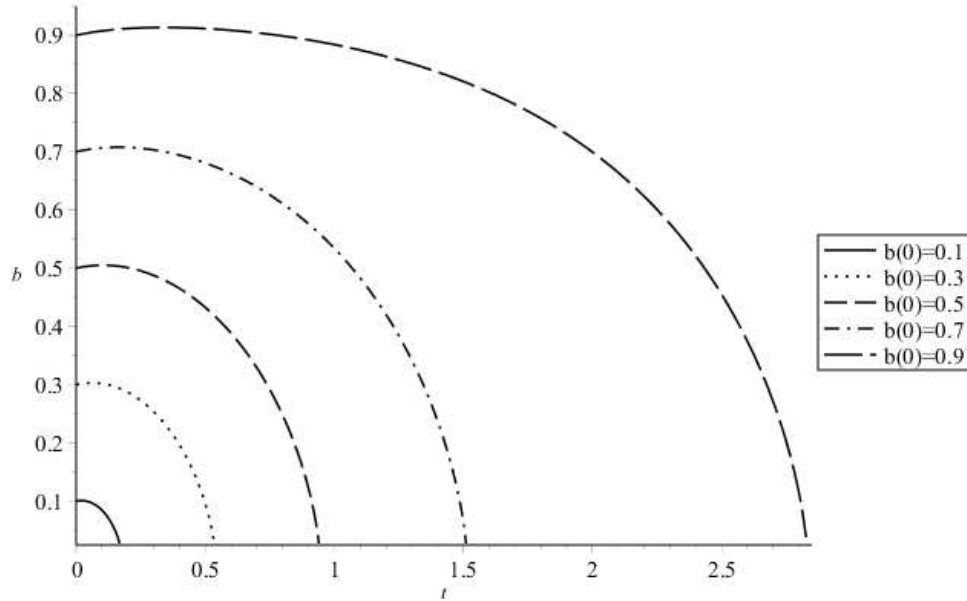


Figura 3.20: Comportamento do fator de escala b com gás de Chaplygin com variação de $b(0)$ entre 0.1 e 0.9

Na Figura 3.21, vemos a evolução do fator de escala a . Note que ele apresenta um comportamento expansivo para todos os valores de $b(0)$ entre 1 e 5, e, quanto menor o valor de $b(0)$, mais rápida será sua expansão. Já Figura 3.22, temos a evolução de b e, diferentemente da expansão limitada de b para $b(0) < 1$, ele possui comportamento expansivo acelerado. Note que quanto maior o valor de $b(0)$, mais rápida será sua expansão.

3.6.5 Variação de $\dot{a}(0)$

Nesta seção, serão apresentados os resultados das equações de Einstein quando há variação da condição inicial $\dot{a}(0)$ de 0.01 a 4, mantendo os parâmetros $A = 1, C_2 = 1$ e as condições iniciais $a(0) = 0.1$ e $b(0) = 0.1$ fixos. Ao analisar os comportamentos dos fatores de escala para valores de $\dot{a}(0)$, notamos que houve diferença quando $\dot{a}(0) < 0.5$ e quando $\dot{a}(0) \geq 0.5$, logo, dividimos esse estudo em duas partes:

- $\dot{a}(0) < 0.5$.

Na Figura 3.23, observamos o comportamento do fator de escala a . Podemos ver que ele apresenta evolução acelerada e quanto maior o valor de $\dot{a}(0)$, mais rápida será a expansão de a . Já na Figura 3.24, temos o comportamento de b , o qual possui expansão acelerada. Note que, diferentemente de a , quanto menor o valor de $\dot{a}(0)$, mais rápida será a expansão

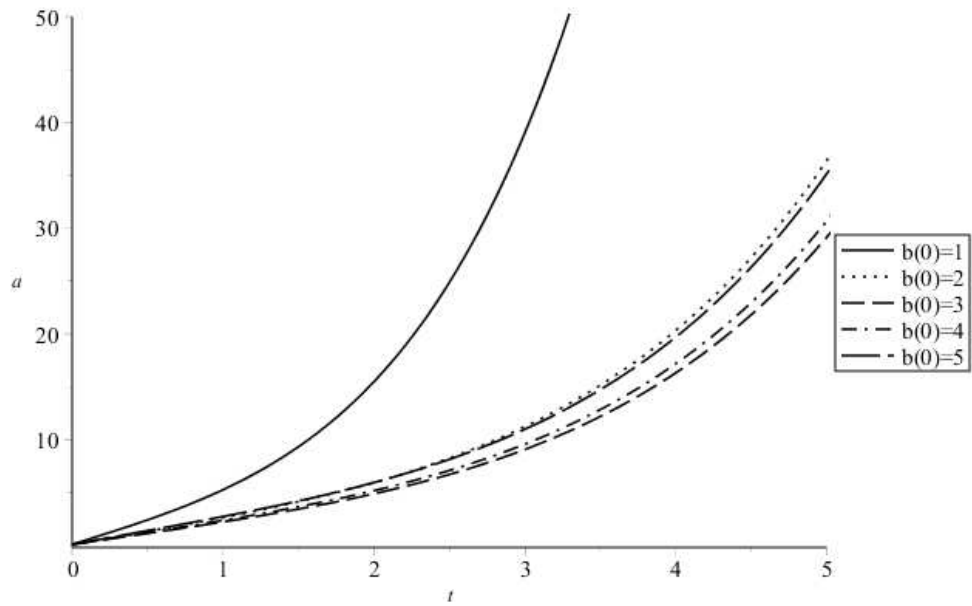


Figura 3.21: Comportamento do fator de escala a com gás de Chaplygin com variação de $b(0)$ entre 1 e 5

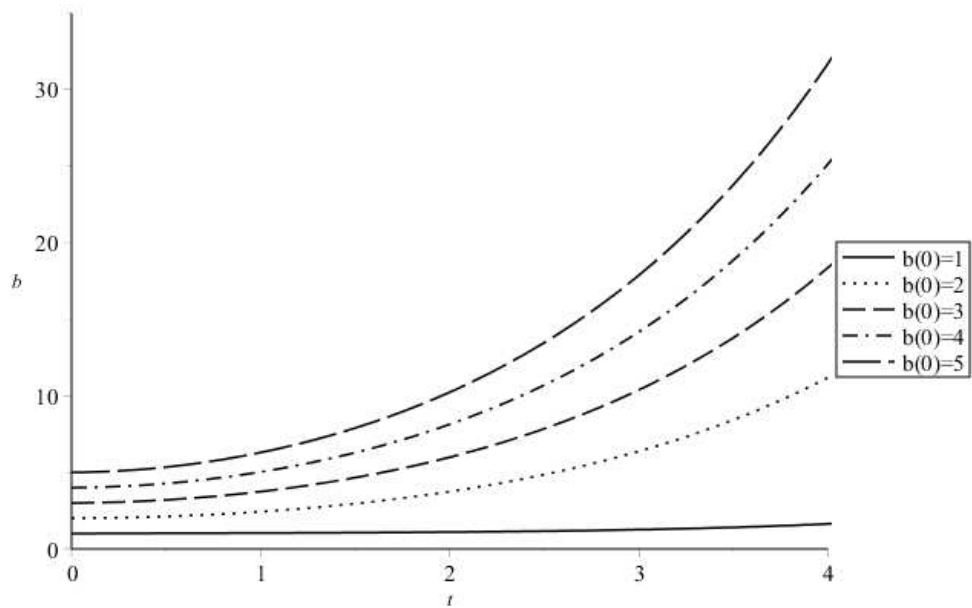


Figura 3.22: Comportamento do fator de escala b com gás de Chaplygin com variação de $b(0)$ entre 1 e 5

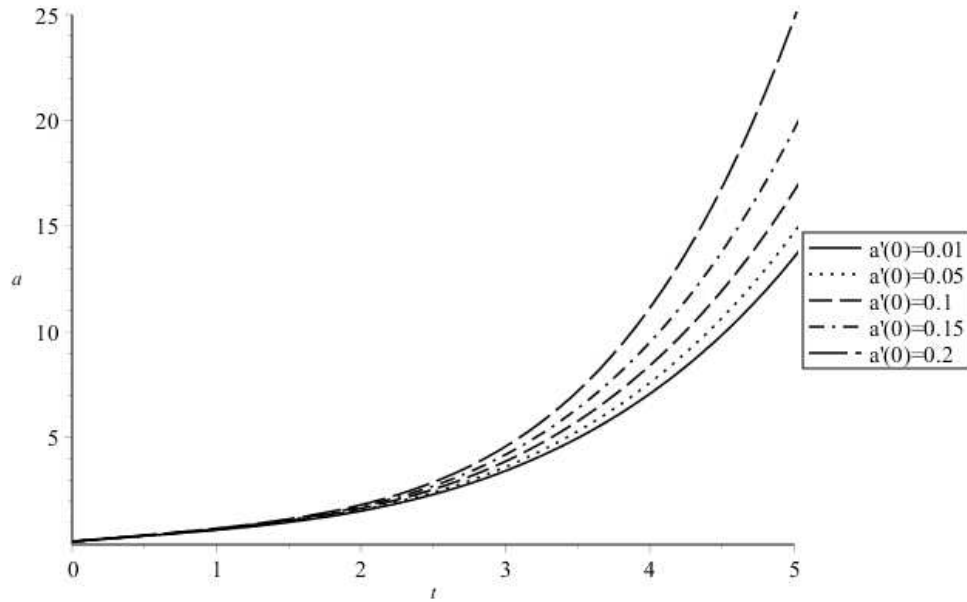


Figura 3.23: Comportamento do fator de escala a com gás de Chaplygin com variação de $\dot{a}(0)$ entre 0.01 e 0.2

de b .

- $\dot{a}(0) \geq 0.5$

Na Figura 3.25, vemos que o fator de escala a possui expansão acelerada, e a medida que aumentamos o valor de $\dot{a}(0)$ maior será a expansão desse fator de escala. Enquanto que b (Figura 3.26) possui comportamento limitado. Isto é, irá ocorrer o recolapso de b . Note que quanto maior o valor de $\dot{a}(0)$, mais rápido b irá recolapsar.

3.6.6 Variação de $\dot{b}(0)$

Ao variar a condição inicial $\dot{b}(0)$ de 0.1 a 3, mas mantendo o parâmetro $A = 1, C_2 = 1$ e as condições iniciais $a(0) = 0.1, b(0) = 0.1$ fixos, obtemos um novo conjunto de soluções do sistema de equações de Einstein para o gás de Chaplygin. Na Figura 3.27, vemos que o fator de escala a possui evolução acelerada e, quanto menor o valor de $\dot{b}(0)$, mais rápida será essa expansão. Já na Figura 3.28, vemos que o fator de escala b possui expansão limitada para $\dot{b}(0) < 2.7$ e expansão acelerada para $\dot{b}(0) \geq 2$.

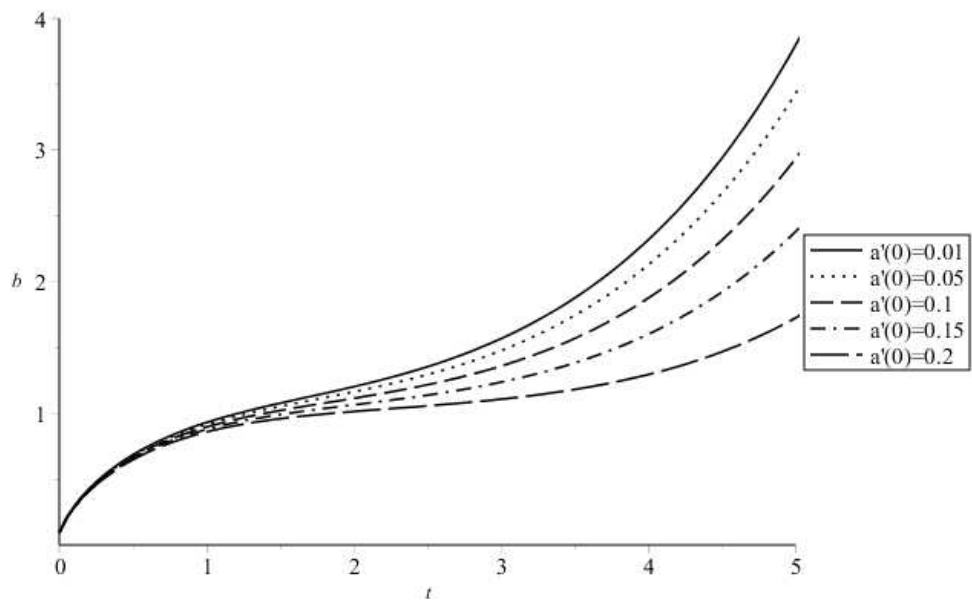


Figura 3.24: Comportamento do fator de escala b com gás de Chaplygin com variação de $\dot{a}(0)$ entre 0.01 e 0.2

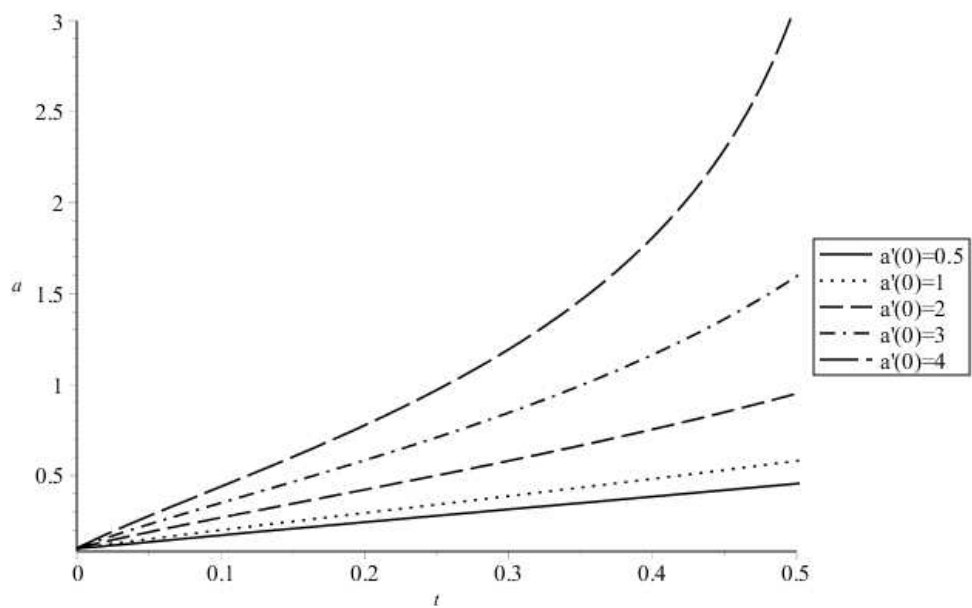


Figura 3.25: Comportamento do fator de escala a com gás de Chaplygin com variação de $\dot{a}(0)$ entre 0.5 e 4

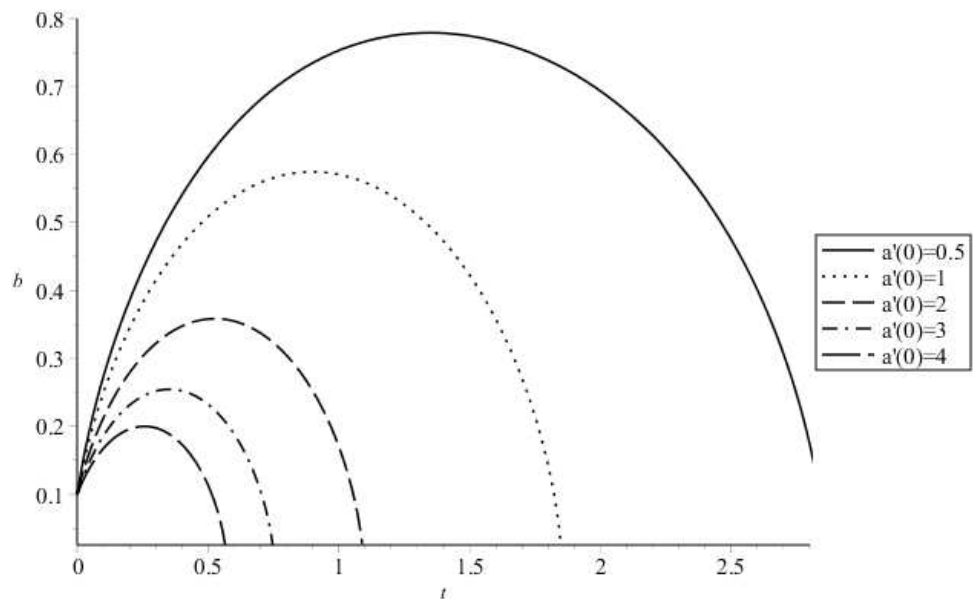


Figura 3.26: Comportamento do fator de escala b com gás de Chaplygin com variação de $\dot{a}(0)$ entre 0.5 e 4

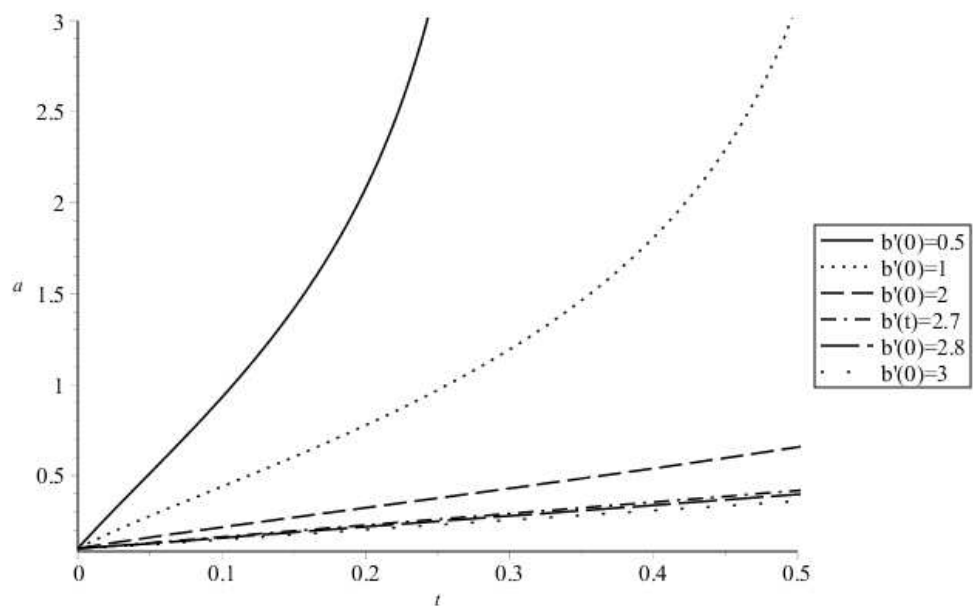


Figura 3.27: Comportamento do fator de escala a com gás de Chaplygin com variação de $\dot{b}(0)$

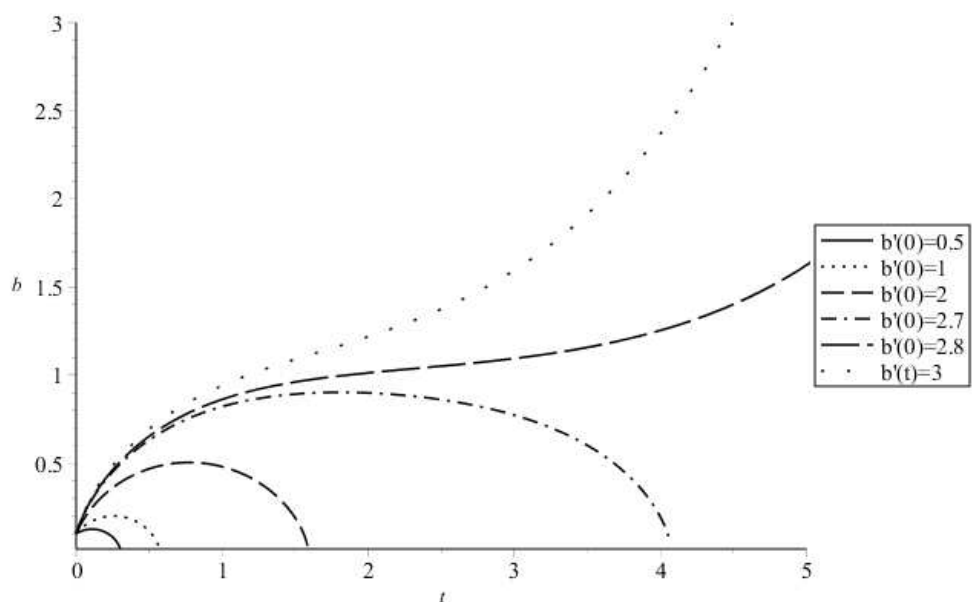


Figura 3.28: Comportamento do fator de escala b com gás de Chaplygin com variação de $\dot{b}(0)$

4 Parametrização de Misner

Ao tentar encontrar uma melhor explicação para o postulado que o universo, desde o início, é simétrico, Misner mostra que, para uma classe de modelos cosmológicos homogêneos e anisotrópicos que satisfazem as equações de Einstein, a anisotropia se dissipa rapidamente.

Considere a métrica

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + g_{ij}(t) dx^i dx^j \quad (4.1)$$

onde assume-se, por simplicidade, que $g_{00} = -N^2$ e g_{ij} são funções dependentes apenas de t e g_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) é diagonal.

4.1 Parâmetros de Anisotropia

A fim de descrever a anisotropia do universo independente de sua expansão geral, Misner escreveu as componentes espaciais da métrica na forma

$$g_{ij}(t) = e^{2\Omega} (e^{2\beta})_{ij}, \quad (4.2)$$

onde $2\beta_{ij}$ é uma matriz 3×3 simétrica e sem traço. Então, $\det(e^{2\beta}) = e^{tr(2\beta)} = e^0 = 1$. Portanto, $\det(g)^{1/2} = e^{3\Omega}$.

Uma solução para (4.1) é a função de onda $\psi(g_{ij})$. Note que ψ depende das três componentes da métrica g_{ij} , mas não depende de g_{00} ou de t . Para enfatizar isso, temos que

$$\begin{aligned} g_{11} &= \exp\{2(-\Omega + \beta_+ + \sqrt{3}\beta_-)\} \\ g_{22} &= \exp\{2(-\Omega + \beta_+ - \sqrt{3}\beta_-)\} \\ g_{33} &= \exp\{2(-\Omega - 2\beta_+)\} \end{aligned} \quad (4.3)$$

e $\psi = \psi(\Omega, \beta_+, \beta_-)$.

O objetivo de Misner é abordar a cosmologia relativística sob um novo ponto de vista. Ao invés de considerar o problema da cosmologia relativística como sendo a coleção e

correlação de dados observacionais suficiente para distinguir entre um pequeno número de soluções cosmológicas simples das equações de Einstein. Logo, ele sugere que seja dedicado um esforço teórico aos cálculos que tentam prever o universo observado atualmente.

Para isso, Misner e alguns colaboradores [16] escreveram a seguinte métrica parametrizada, correspondente à equação (4.3),

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + e^{-2\Omega+4\beta} dr^2 + e^{-2\Omega-2\beta} d\omega^2, \quad (4.4)$$

$$d\omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2.$$

4.2 Equações para Cosmologia do tipo Kantowski-Sachs Parametrizada

Buscando uma forma mais simples de analisar a métrica (4.4), a escrevemos da seguinte forma,

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \gamma^2 e^{2\beta} dr^2 + \gamma^2 e^{-2\beta} d\omega^2; \quad (4.5)$$

$$d\omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2$$

onde N é a função lapso e pode ser definida igual a 1, e γ , o fator de escala médio, e β , o parâmetro de medida da anisotropia, são funções que podem ser expressas em termos dos fatores de escala a e b :

$$\gamma = \sqrt{ab}; \quad (4.6)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{a}{b} \right). \quad (4.7)$$

A isotropização do universo a partir da métrica de Kantowski-Sachs parametrizada ocorrerá quando o parâmetro de medida da anisotropia β tender a zero ou permanecer constante, isto é, a métrica de Kantowski-Sachs tenderá à métrica de FRW.

Assumindo que $N = 1$, temos que

$$ds^2 = dt^2 + \gamma^2 e^{2\beta} dr^2 + \gamma^2 e^{-2\beta} d\omega^2; \quad (4.8)$$

$$d\omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2$$

A partir da equação (2.35), podemos obter os símbolos de Christoffel não-nulos:

$$\begin{aligned}\Gamma_{01}^1 &= \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} + \dot{\beta}; & \Gamma_{11}^0 &= \gamma [\dot{\gamma} + \gamma\dot{\beta}] e^{2\beta}; & \Gamma_{23}^3 &= \text{cotg}\theta \\ \Gamma_{02}^2 &= \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} - \dot{\beta}; & \Gamma_{22}^0 &= \gamma [\dot{\gamma} - \gamma\dot{\beta}] e^{2\beta}; & \Gamma_{33}^2 &= -\text{sen}\theta \cos\theta \\ \Gamma_{03}^3 &= \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} - \dot{\beta}; & \Gamma_{33}^0 &= \gamma [\dot{\gamma} - \gamma\dot{\beta}] e^{2\beta} \text{sen}^2\theta.\end{aligned}$$

Dos símbolos de Christoffel, obtemos os tensores de Ricci:

(i) para $\mu = 0$ e $\nu = 0$:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} + 2\dot{\beta}\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} + \ddot{\beta} - 3\dot{\beta}^2; \quad (4.9)$$

(ii) para $\mu = 1$ e $\nu = 1$:

$$R_{11} = e^{2\beta} \left[2\dot{\gamma}^2 + \ddot{\gamma}\gamma + 2\dot{\beta}\dot{\gamma}\gamma + \gamma^2\ddot{\beta} - \gamma^2\dot{\beta}^2 \right] \quad (4.10)$$

(iii) para $\mu = 2$ e $\nu = 2$:

$$R_{22} = e^{-2\beta} \left[2\dot{\gamma}^2 + \ddot{\gamma}\gamma - 4\dot{\beta}\dot{\gamma}\gamma - \gamma^2\ddot{\beta} + \gamma^2\dot{\beta}^2 \right] + 1 \quad (4.11)$$

(iv) para $\mu = 3$ e $\nu = 3$:

$$\begin{aligned}R_{33} &= e^{-2\beta} \text{sen}^2\theta \left[2\dot{\gamma}^2 + \ddot{\gamma}\gamma - 4\dot{\beta}\dot{\gamma}\gamma - \gamma^2\ddot{\beta} + \gamma^2\dot{\beta}^2 \right] \\ &\quad + \text{sen}^2\theta.\end{aligned} \quad (4.12)$$

Assim sendo, podemos obter o escalar de Riemann:

$$R = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} \quad (4.13)$$

$$= 6\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - 8\dot{\beta}\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} - 2\ddot{\beta} + 4\dot{\beta}^2 + 6\frac{\dot{\gamma}^2}{\gamma^2} + 2\frac{e^{2\beta}}{\gamma^2}. \quad (4.14)$$

Agora podemos finalmente determinar os tensores de Einstein, $G_{\mu\nu}$:

(i) para $\mu = 0$ e $\nu = 0$:

$$G_{00} = \frac{e^{2\beta}}{\gamma^2} - 2\dot{\beta}\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} - \dot{\beta}^2 + 3\frac{\dot{\gamma}^2}{\gamma^2} \quad (4.15)$$

(ii) para $\mu = 1$ e $\nu = 1$:

$$G_{11} = e^{2\beta} \left[-\dot{\gamma}^2 - 2\ddot{\gamma}\gamma + 6\dot{\beta}\dot{\gamma}\gamma + 2\gamma^2\ddot{\beta} - 3\gamma^2\dot{\beta}^2 - e^{2\beta} \right] \quad (4.16)$$

(iii) para $\mu = 2$ e $\nu = 2$:

$$G_{22} = e^{-2\beta} \left[-\dot{\gamma}^2 - 2\ddot{\gamma}\gamma - \gamma^2\dot{\beta}^2 \right] \quad (4.17)$$

(iv) para $\mu = 3$ e $\nu = 3$:

$$G_{33} = e^{-2\beta} \text{sen}^2\theta \left[-\dot{\gamma}^2 - 2\ddot{\gamma}\gamma - \gamma^2\dot{\beta}^2 \right] \quad (4.18)$$

Num sistema de coordenadas comoventes, as equações de campo de Einstein (2.56) para a métrica (4.8) com a ajuda da equação (2.53) geram

$$-2\dot{\beta}\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} - \dot{\beta}^2 + 3\frac{\dot{\gamma}^2}{\gamma} + \frac{e^{2\beta}}{\gamma^2} = \rho \quad (4.19)$$

$$\gamma^2 e^{2\beta} \left[-\frac{\dot{\gamma}^2}{\gamma^2} - 2\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} + 6\dot{\beta}\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} + 2\ddot{\beta} - 3\dot{\beta}^2 - \frac{e^{2\beta}}{\gamma^2} \right] = pg_{11} \quad (4.20)$$

$$\gamma^2 e^{-2\beta} \left[-\frac{\dot{\gamma}^2}{\gamma^2} - 2\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \dot{\beta}^2 \right] = pg_{22} \quad (4.21)$$

$$\gamma^2 e^{-2\beta} \text{sen}^2\theta \left[-\frac{\dot{\gamma}^2}{\gamma^2} - 2\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \dot{\beta}^2 \right] = pg_{33} \quad (4.22)$$

onde o ponto sobre as variáveis (\cdot) denota a derivada com respeito ao tempo cósmico t .

Em um espaço-tempo curvo da Relatividade Geral

$$\Delta_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (4.23)$$

Isso significa que

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\nu T^{\mu\alpha} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu T^{\alpha\nu} = 0. \quad (4.24)$$

Para o elemento de linha (4.8), obtemos

$$\dot{\rho} + (\rho + p) \left[3 \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} - \dot{\beta} \right] = 0 \quad (4.25)$$

4.3 Soluções de Radiação

Esta seção será dedicada ao estudo de um universo preenchido com apenas radiação que obedece à métrica (4.8). A equação de estado para a radiação é dada pela equação (3.5) e substituindo-a em (4.25) obtemos

$$\rho_r = \frac{C'_1}{\gamma^4} e^{\frac{4}{3}\beta}, \quad (4.26)$$

onde C'_1 é uma constante de integração. Logo, podemos reescrever as equações de campo de Einstein, (4.19) até (4.22):

$$-2\dot{\beta} \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} - \dot{\beta}^2 + 3 \frac{\dot{\gamma}^2}{\gamma} + \frac{e^{2\beta}}{\gamma^2} = \frac{C'_1}{\gamma^4} e^{\frac{4}{3}\beta} \quad (4.27)$$

$$-\frac{\dot{\gamma}^2}{\gamma^2} - 2 \frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} + 6\dot{\beta} \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} + 2\ddot{\beta} - 3\dot{\beta}^2 - \frac{e^{2\beta}}{\gamma^2} = -\frac{1}{3} \frac{C'_1}{\gamma^4} e^{\frac{4}{3}\beta} \quad (4.28)$$

$$-\frac{\dot{\gamma}^2}{\gamma^2} - 2 \frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \dot{\beta}^2 = -\frac{1}{3} \frac{C'_1}{\gamma^4} e^{\frac{4}{3}\beta} \quad (4.29)$$

$$-\frac{\dot{\gamma}^2}{\gamma^2} - 2 \frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \dot{\beta}^2 = -\frac{1}{3} \frac{C'_1}{\gamma^4} e^{\frac{4}{3}\beta} \quad (4.30)$$

Note que as equações (4.29) e (4.30) são idênticas. Ao subtrair as equações (4.28) e (4.29), obtemos o seguinte sistema de equações:

$$-2\dot{\beta} \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} - \dot{\beta}^2 + 3 \frac{\dot{\gamma}^2}{\gamma} + \frac{e^{2\beta}}{\gamma^2} = \frac{C'_1}{\gamma^4} e^{\frac{4}{3}\beta} \quad (4.31)$$

$$3\dot{\beta} \frac{\dot{\gamma}}{\gamma^2} - \dot{\beta}^2 + \ddot{\beta} - \frac{1}{2} \frac{e^{2\beta}}{\gamma^2} = 0. \quad (4.32)$$

Para o sistema de equações acima, não encontramos solução analítica, apenas soluções numéricas. Logo, ao variar os parâmetros e as condições iniciais, obtemos diversos con-

juntos de soluções. Usamos a equação (4.31) para determinar as condições iniciais apropriadas para estudarmos como cada parâmetro e condição inicial influenciam na dinâmica das funções γ e β .

4.3.1 Variação da Constante de Integração C'_1

Nesta seção, serão apresentadas as soluções encontradas ao variar parâmetros e condições iniciais nas equações de Einstein. Ao variar a constante de integração C'_1 de 1 a 5 e com as condições iniciais fixas $a\gamma(0) = 10$, $\beta(0) = 10$ e $\dot{\beta}(0) = 1$, encontramos soluções para as funções γ e β apresentadas nas Figuras 4.1 e 4.2. Note que, na Figura 4.1, a solução para γ , que representa o fator de escala médio, apresenta recolapso, conhecido com a singularidade *Big Crunch*. Esse resultado é compatível com os resultados obtidos para a métrica sem a parametrização de Misner.

Na Figura 4.2, podemos ver o comportamento da função β , que representa a evolução da anisotropia. Note que, neste universo, a isotropia não será alcançada ao longo do tempo. Ao estudar o comportamento das duas funções, não conseguimos discernir

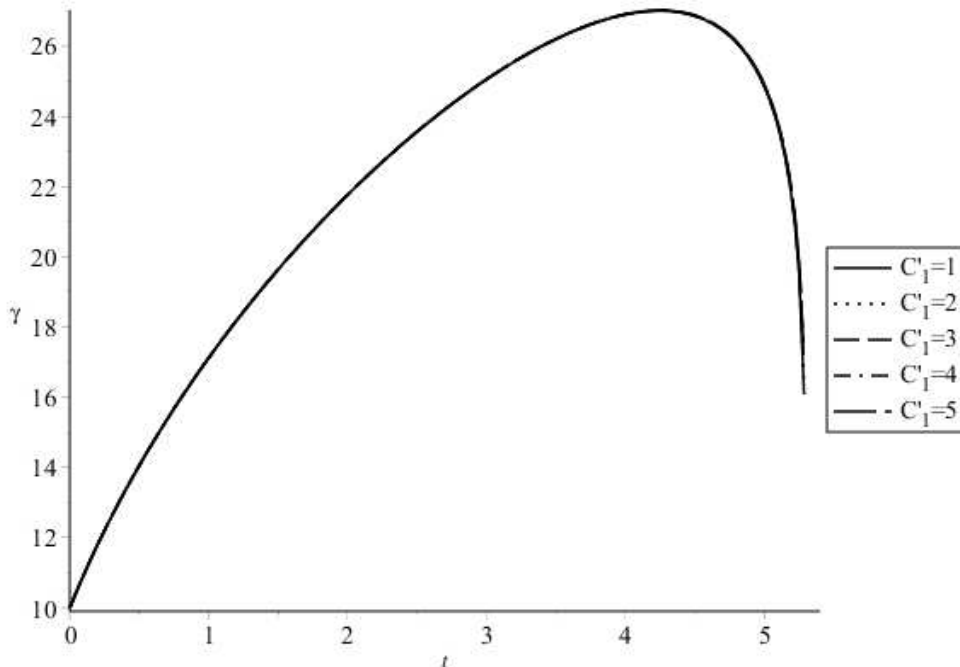


Figura 4.1: Comportamento da função γ com radiação com variação de C'_1

o comportamento com a variação de C'_1 . Para evidenciar o comportamento de γ e β , expomos os valores de γ e β em $t = 4$ para todos os valores de C'_1 na Tabela 4.1. Com

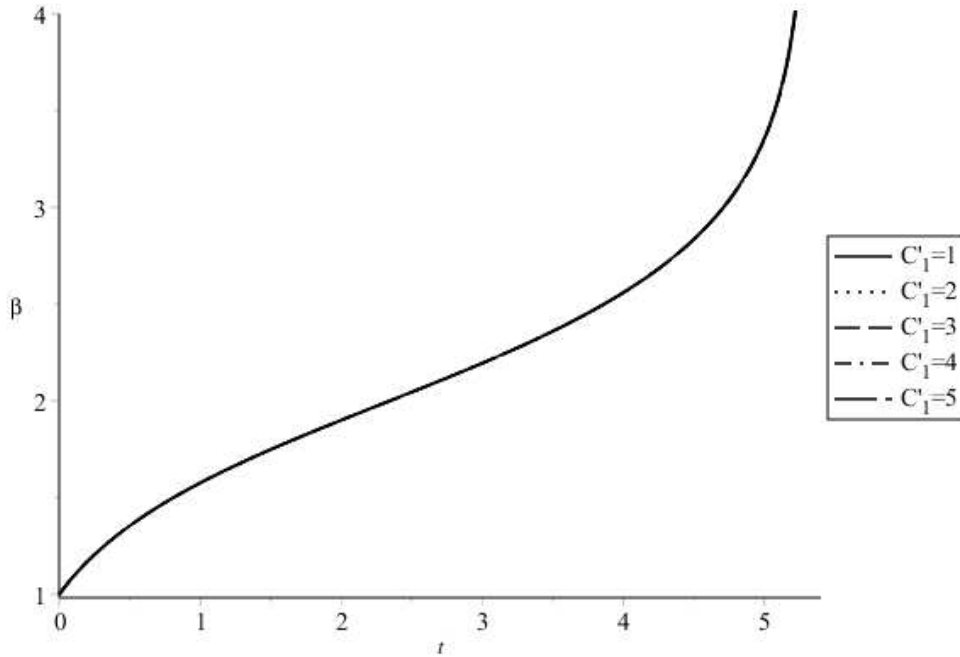


Figura 4.2: Comportamento da função β com radiação com variação de C'_1

isso, notamos que, apesar de quase imperceptível, a expansão de γ aumenta quanto maior o valor de C'_1 . Já para a função β , vemos que sua expansão diminui quanto maior o valor de C'_1 .

C'_1	$a(t=4)$	$b(t=4)$
1	26.8975	2.5607
2	26.9012	2.5602
3	26.9049	2.5597
4	26.9087	2.5592
5	26.9124	2.5587

Tabela 4.1: Comportamento de β em $t = 4$ com variação de C'_1

4.3.2 Variação de $\gamma(0)$

Ao variar a condição inicial $\gamma(0)$ de 3 a 20 e com as condições iniciais fixas $C'_1 = 1, \beta(0) = 1$ e $\dot{\beta}(0) = 1$, encontramos soluções para as funções γ e β apresentadas nas Figuras 4.3 e 4.4. Na Figura 4.3, a solução para γ também apresenta recolapso. Esse resultado é compatível com os resultados obtidos para a métrica sem a parametrização de Misner. Note que quanto maior o valor de $\gamma(0)$, maior será a expansão do universo antes de entrar em colapso.

Na Figura 4.4, podemos ver o comportamento da função β e que a isotropia não é atingida

nesse universo.

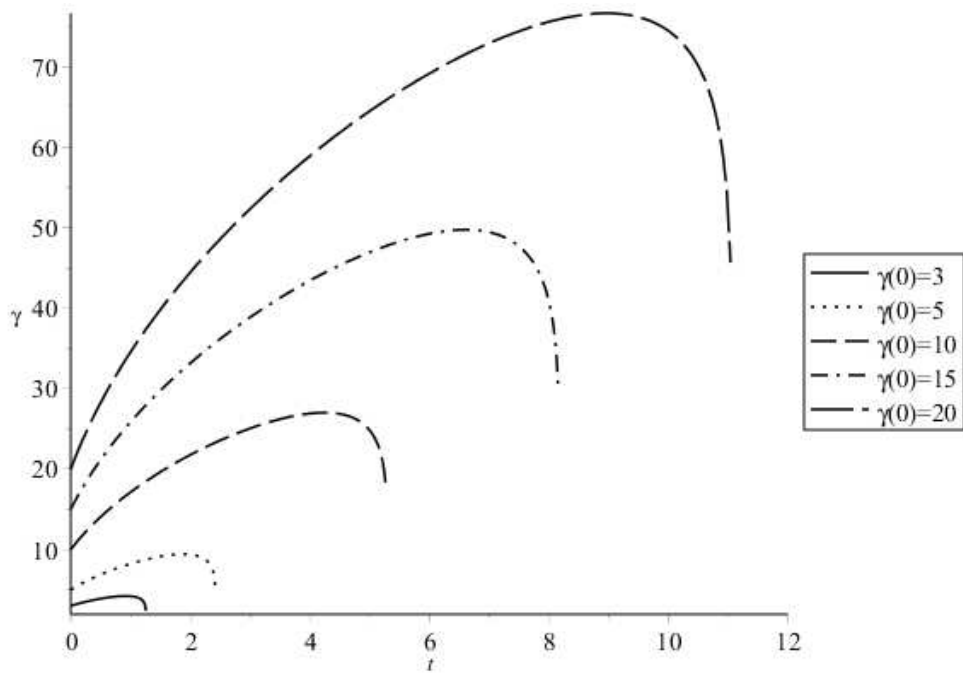


Figura 4.3: Comportamento da função γ com radiação com variação de $\gamma(0)$

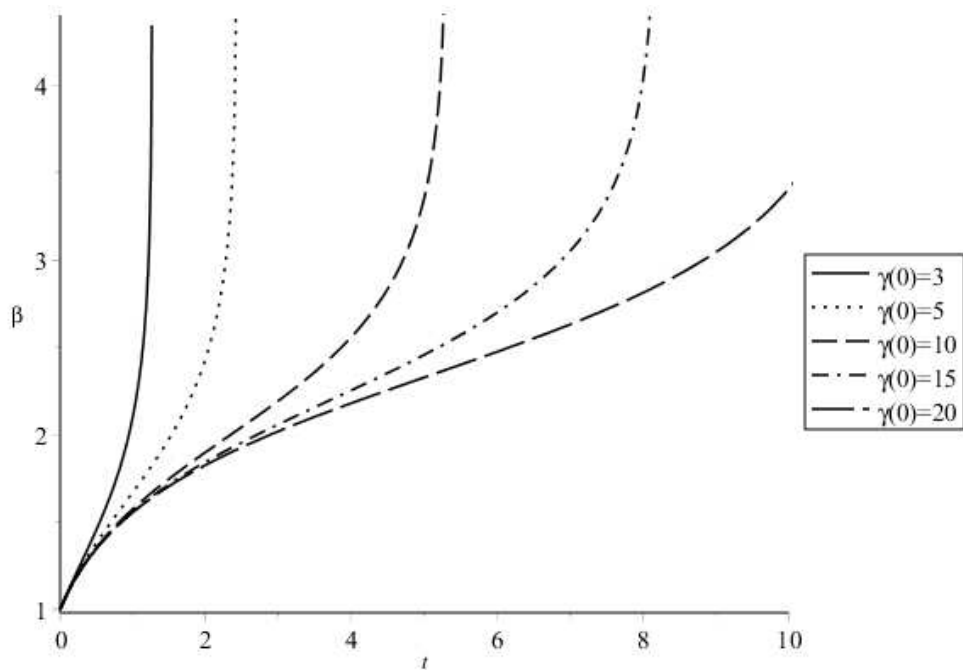


Figura 4.4: Comportamento da função β com radiação com variação de $\gamma(0)$

4.3.3 Variação de $\beta(0)$

Ao variar a condição inicial $\beta(0)$ de 0.1 a 2 e com as condições iniciais fixas $C'_1 = 1$, $\gamma(0) = 10$ e $\dot{\beta}(0) = 1$, encontramos soluções para as funções γ e β apresentadas nas Figuras 4.5

e 4.6. Na Figura 4.5, a solução para γ também apresenta recolapso. Esse resultado é compatível com os resultados obtidos para a métrica sem a parametrização de Misner. Note que quanto maior o valor de $\gamma(0)$, menor será a expansão do universo antes de entrar em colapso.

Na Figura 4.6, podemos ver o comportamento da função β e que a isotropia não é atingida nesse universo.

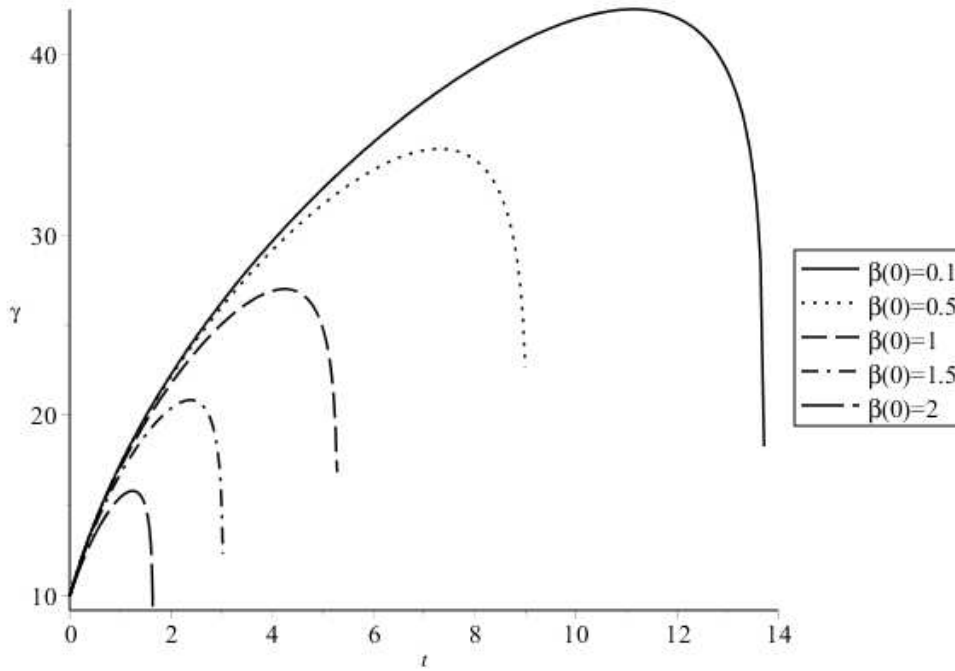


Figura 4.5: Comportamento da função γ com radiação com variação de $\beta(0)$

4.3.4 Variação de $\dot{\gamma}(0)$

Ao variar a condição inicial $\dot{\gamma}(0)$ de 10 a 100 e com as condições iniciais fixas $C'_1 = 1$, $\gamma(0) = 10$ e $\beta(0) = 1$, encontramos soluções para as funções γ e β apresentadas nas Figuras 4.7 e 4.8. Na Figura 4.7, a solução para γ também apresenta recolapso. Esse resultado é compatível com os resultados obtidos para a métrica sem a parametrização de Misner. Note que quanto maior o valor de $\dot{\gamma}(0)$, maior será a expansão do universo antes de entrar em colapso.

Na Figura 4.8, podemos ver o comportamento da função β e que a isotropia não é atingida nesse universo.

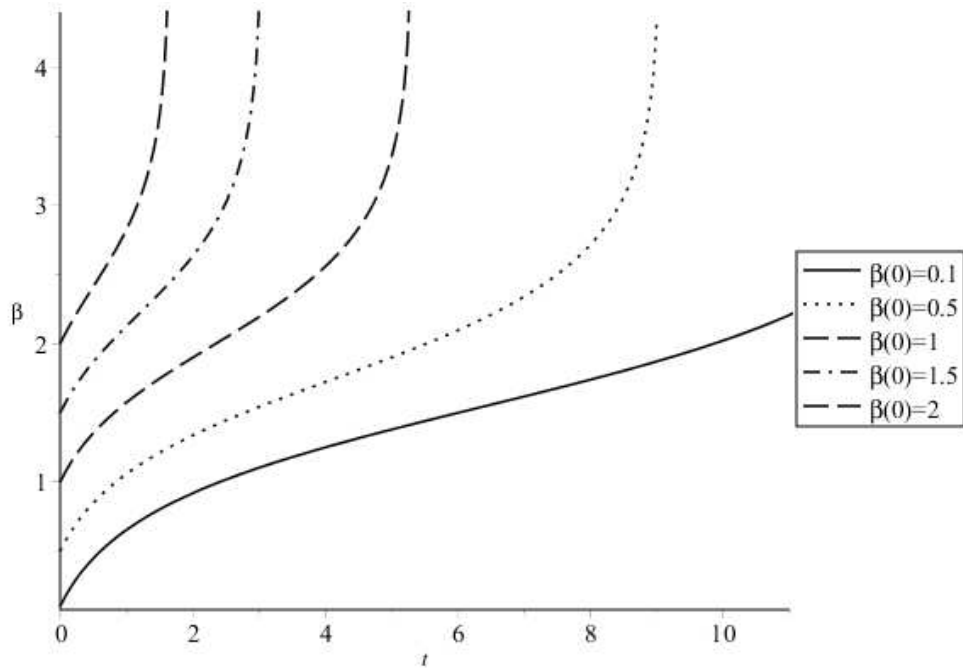


Figura 4.6: Comportamento da função β com radiação com variação de $\beta(0)$

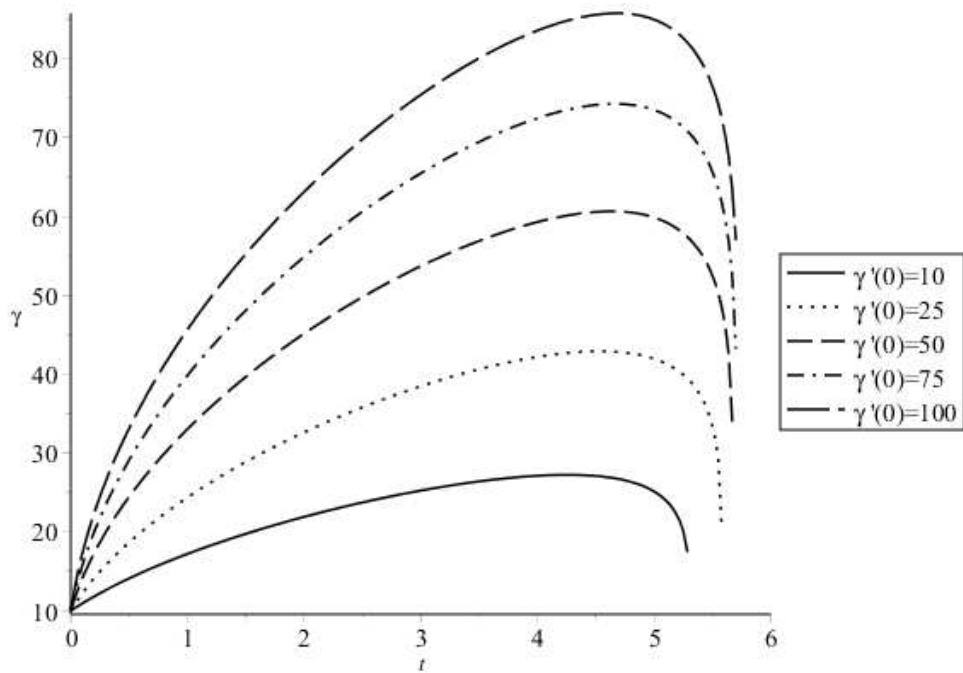


Figura 4.7: Comportamento da função γ com radiação com variação de $\dot{\alpha}(0)$

4.3.5 Variação de $\dot{\beta}(0)$

Ao variar a condição inicial $\dot{\beta}(0)$ de 1 a 5 e com as condições iniciais fixas $C'_1 = 1$, $\gamma(0) = 10$ e $\beta(0) = 1$, encontramos soluções para as funções γ e β apresentadas nas Figuras 4.9 e 4.10. Na Figura 4.9, a solução para γ também apresenta recolapso. Esse resultado é compatível com os resultados obtidos para a métrica sem a parametrização de Misner.

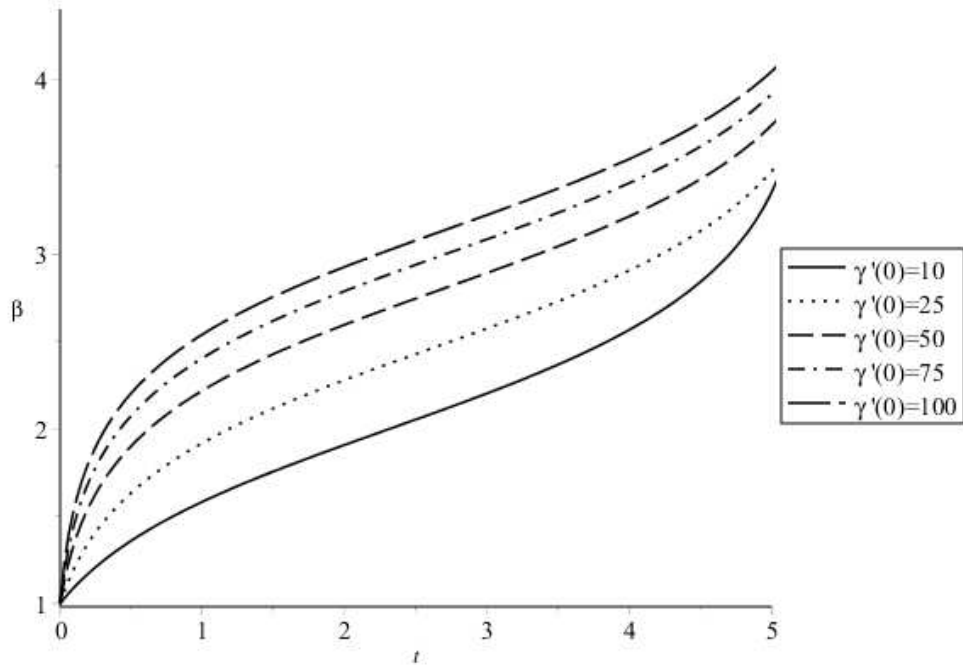


Figura 4.8: Comportamento da função β com radiação com variação de $\dot{\gamma}(0)$

Note que quanto maior o valor de $\gamma(0)$, maior será a expansão do universo antes de entrar em colapso.

Na Figura 4.10, podemos ver o comportamento da função β e que a isotropia não é atingida nesse universo. Com esses resultados, vimos que independentemente da esco-

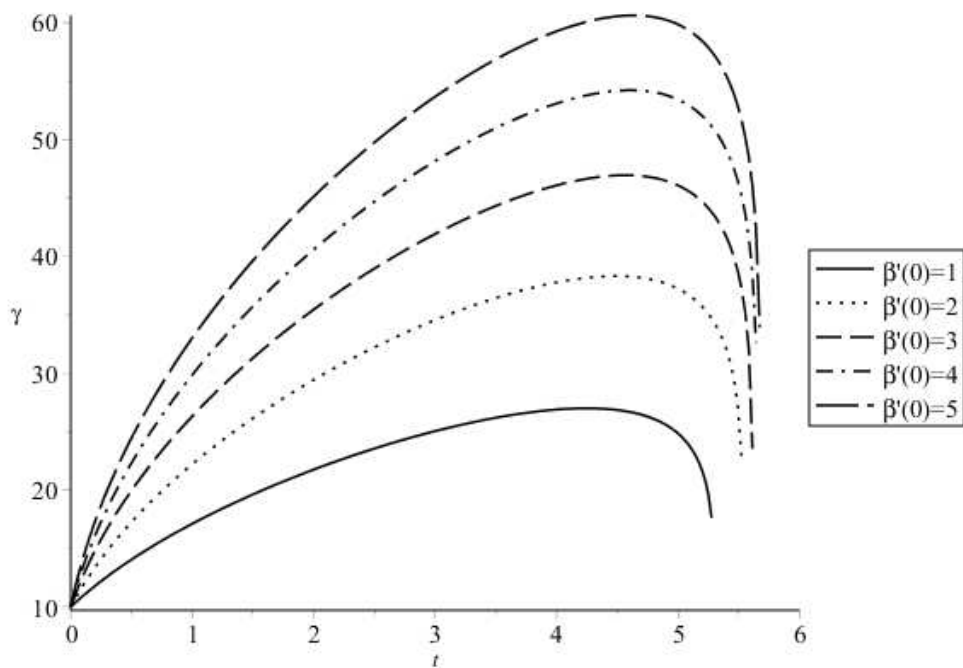


Figura 4.9: Comportamento da função γ com radiação com variação de $\dot{\beta}(0)$

lha de parâmetros e condições iniciais, o universo regido pela métrica parametrizada de

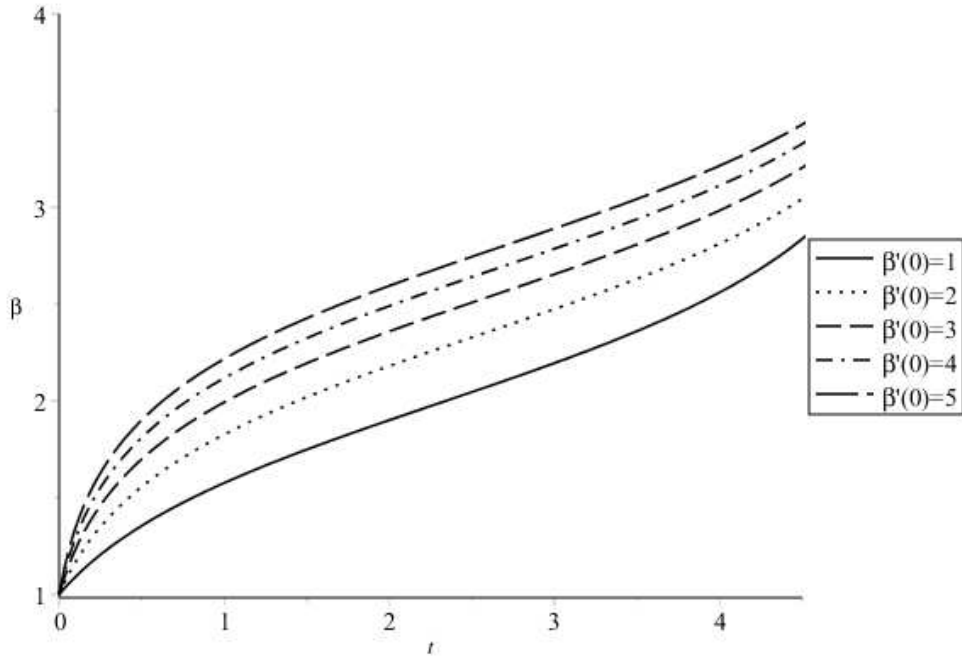


Figura 4.10: Comportamento da função β com radiação com variação de $\dot{b}(0)$

Kantowski-Sachs com radiação irá expandir até atingir seu ponto máximo e entrará em colapso, atingindo uma singularidade do tipo *Big Crunch*, e não alcançará a isotropia ao longo do tempo.

4.4 Soluções de Gás de Chaplygin

Esta seção será dedicada ao estudo de um universo preenchido com apenas gás de Chaplygin que obedece à métrica (4.8). A equação de estado do gás de Chaplygin é dada pela equação (3.68) e substituindo-a em (4.25) obtemos

$$\rho_{cg} = \left[A + \frac{C'_2}{\gamma^6} e^{2\beta} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.33)$$

onde C'_2 é uma constante de integração. Logo, podemos reescrever as equações de campo de Einstein, (4.19) até (4.22):

$$-2\dot{\beta}\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} - \dot{\beta}^2 + 3\frac{\dot{\gamma}^2}{\gamma} + \frac{e^{2\beta}}{\gamma^2} = \left[A + \frac{C'_2}{\gamma^6} e^{2\beta} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.34)$$

$$-\frac{\dot{\gamma}^2}{\gamma^2} - 2\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} + 6\dot{\beta}\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} + 2\ddot{\beta} - 3\dot{\beta}^2 - \frac{e^{2\beta}}{\gamma^2} = \frac{A}{\left[A + \frac{C'_2}{\gamma^6} e^{2\beta} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (4.35)$$

$$-\frac{\dot{\gamma}^2}{\gamma^2} - 2\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \dot{\beta}^2 = \frac{A}{\left[A + \frac{C'_2}{\gamma^6} e^{2\beta} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (4.36)$$

$$-\frac{\dot{\gamma}^2}{\gamma^2} - 2\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \dot{\beta}^2 = \frac{A}{\left[A + \frac{C'_2}{\gamma^6} e^{2\beta} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (4.37)$$

Note que as equações (4.36) e (4.37) são idênticas. Ao subtrair as equações (4.35) e (4.36), obtemos o seguinte sistema de equações:

$$-2\dot{\beta}\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} - \dot{\beta}^2 + 3\frac{\dot{\gamma}^2}{\gamma} + \frac{e^{2\beta}}{\gamma^2} = \left[A + \frac{C'_2}{\gamma^6} e^{2\beta} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.38)$$

$$3\dot{\beta}\frac{\dot{\gamma}}{\gamma^2} - \dot{\beta}^2 + \ddot{\beta} - \frac{1}{2}\frac{e^{2\beta}}{\gamma^2} = 0. \quad (4.39)$$

Para o sistema de equações acima, não encontramos solução analítica, apenas soluções numéricas. Logo, ao variar os parâmetros e as condições iniciais, obtemos diversos conjuntos de soluções. Usamos a equação (4.38) para determinar as condições iniciais apropriadas para estudarmos como cada parâmetro e condição inicial influenciam na dinâmica das funções γ e β .

4.4.1 Variação da constante A do fluido

Nesta seção, serão apresentadas as soluções encontradas ao variar parâmetros e condições iniciais nas equações de Einstein. Ao variar a constante do fluido A de 0.1 a 25 e com as condições iniciais fixas $C'_2 = 1$, $\gamma(0) = 10$, $\beta(0) = 1$ e $\dot{\beta}(0) = 1$, encontramos soluções para as funções γ e β apresentadas nas Figuras 4.11 e 4.12. Note que, na Figura 4.11,

a solução para γ , que representa o fator de escala médio, apresenta solução expansiva acelerada. Esse resultado é compatível com os resultados obtidos para a métrica sem a parametrização de Misner. Note que quanto maior o valor de A , mais rápida será a velocidade de expansão do universo.

Na Figura 4.12, podemos ver o comportamento da função β , que representa a evolução da anisotropia. Note que, neste universo, a isotropia será alcançada ao longo do tempo e, que quanto maior o valor de A , a isotropia será alcançada mais rapidamente.

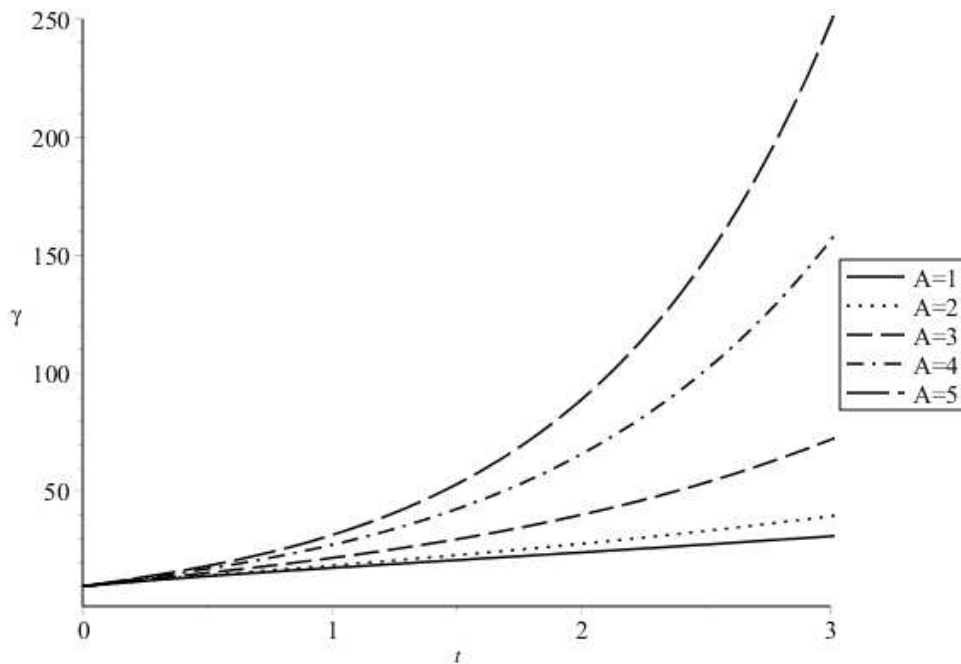


Figura 4.11: Comportamento da função γ com gás de Chaplygin com variação de A

4.4.2 Variação da constante de integração C'_2

Ao variar a constante de integração C'_2 de 1 a 5 e com as condições iniciais fixas $A = 1$, $\gamma(0) = 10$, $\beta(0) = 1$ e $\dot{\beta}(0) = 1$, encontramos soluções para as funções γ e β apresentadas nas Figuras 4.13 e 4.14. Note que, na Figura 4.13, a solução para γ , que representa o fator de escala médio, apresenta solução expansiva acelerada. Esse resultado é compatível com os resultados obtidos para a métrica sem a parametrização de Misner. Note que quanto maior o valor de C'_2 , mais rápida será a velocidade de expansão do universo.

Na Figura 4.14, podemos ver o comportamento da função β , que representa a evolução da anisotropia. Note que, neste universo, a isotropia será alcançada ao longo do tempo e,

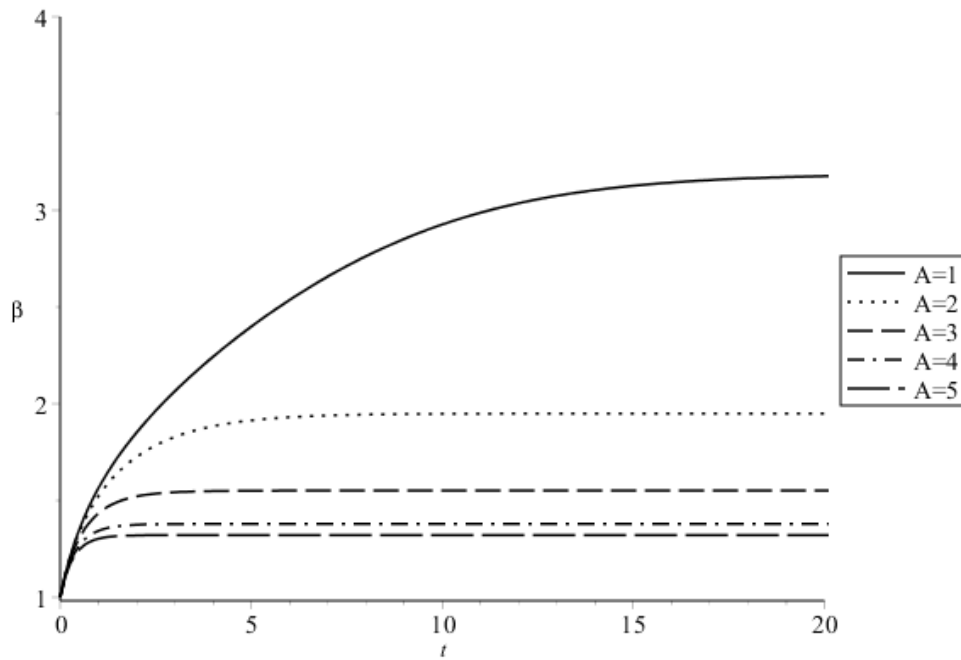


Figura 4.12: Comportamento da função β com radiação com variação de A

que quanto maior o valor de C'_2 , a isotropia será alcançada mais rapidamente.

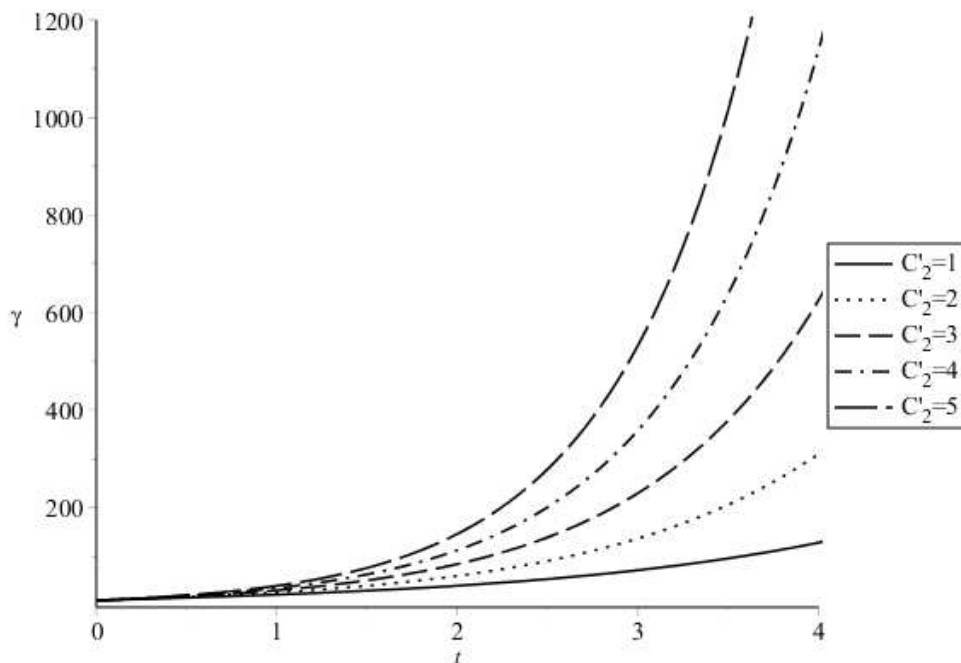


Figura 4.13: Comportamento da função γ com gás de Chaplygin com variação de C'_2

4.4.3 Variação de $\gamma(0)$

Ao variar a condição inicial $\gamma(0)$ de 3 a 20 e com as condições iniciais fixas $A = 1, C'_2 = 1, \beta(0) = 1$ e $\dot{\beta}(0) = 1$, encontramos soluções para as funções γ e β apresentadas nas

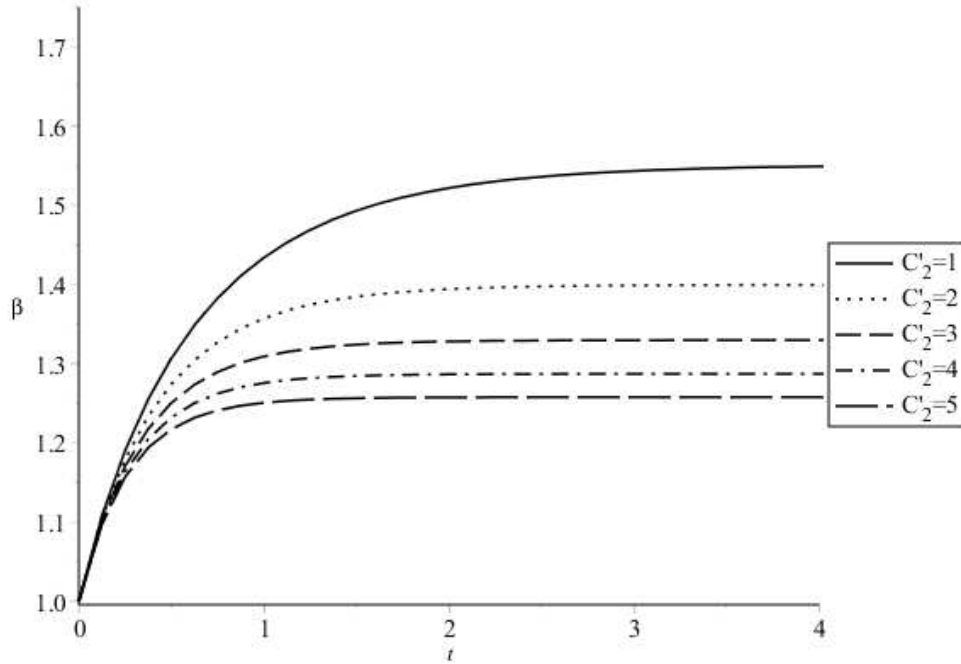


Figura 4.14: Comportamento da função β com gás de Chaplygin com variação de C'_2

Figuras 4.15 e 4.16. Note que, na Figura 4.15, a solução para γ , que representa o fator de escala médio, apresenta solução expansiva acelerada. Esse resultado é compatível com os resultados obtidos para a métrica sem a parametrização de Misner. Note que quanto maior o valor de $\gamma(0)$, mais rápida será a velocidade de expansão do universo.

Na Figura 4.16, podemos ver o comportamento da função β , que representa a evolução da anisotropia. Note que, neste universo, a isotropia será alcançada ao longo do tempo e, que quanto maior o valor de $\gamma(0)$, a isotropia será alcançada mais rapidamente.

4.4.4 Variação de $\beta(0)$

Ao variar a condição inicial $\beta(0)$ de 0.1 a 2 e com as condições iniciais fixas $A = 1, C'_2 = 1, \gamma(0) = 10$ e $\dot{\beta}(0) = 1$, encontramos soluções para as funções γ e β apresentadas nas Figuras 4.17 e 4.18. Note que, na Figura 4.17, a solução para γ , que representa o fator de escala médio, apresenta solução expansiva acelerada. Esse resultado é compatível com os resultados obtidos para a métrica sem a parametrização de Misner. Note que quanto maior o valor de $\beta(0)$, mais rápida será a velocidade de expansão do universo.

Na Figura 4.18, podemos ver o comportamento da função β , que representa a evolução da anisotropia. Note que, neste universo, a isotropia será alcançada ao longo do tempo e,

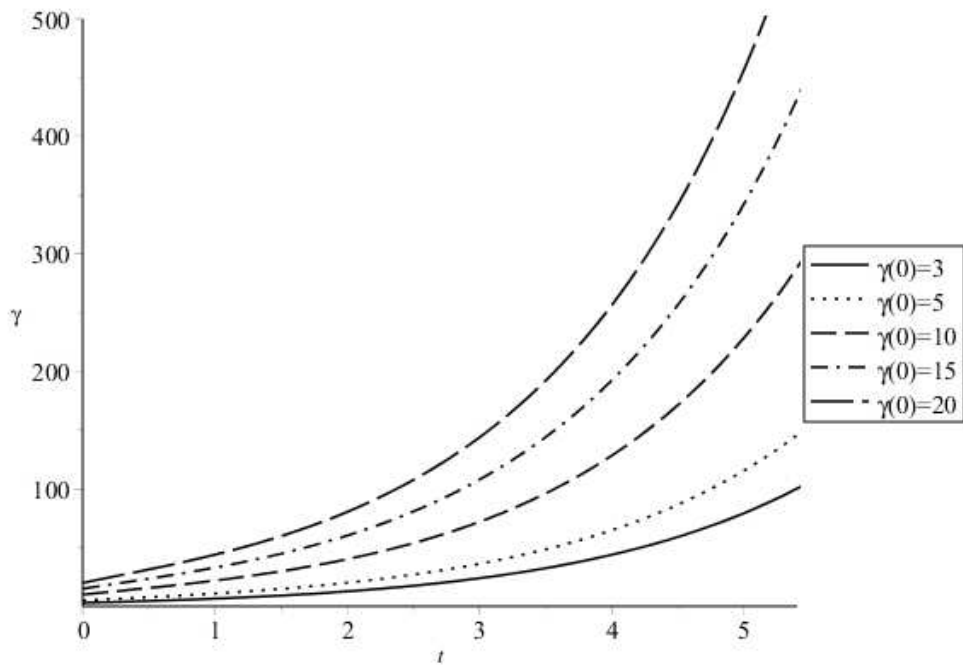


Figura 4.15: Comportamento da função γ com gás de Chaplygin com variação de $\gamma(0)$

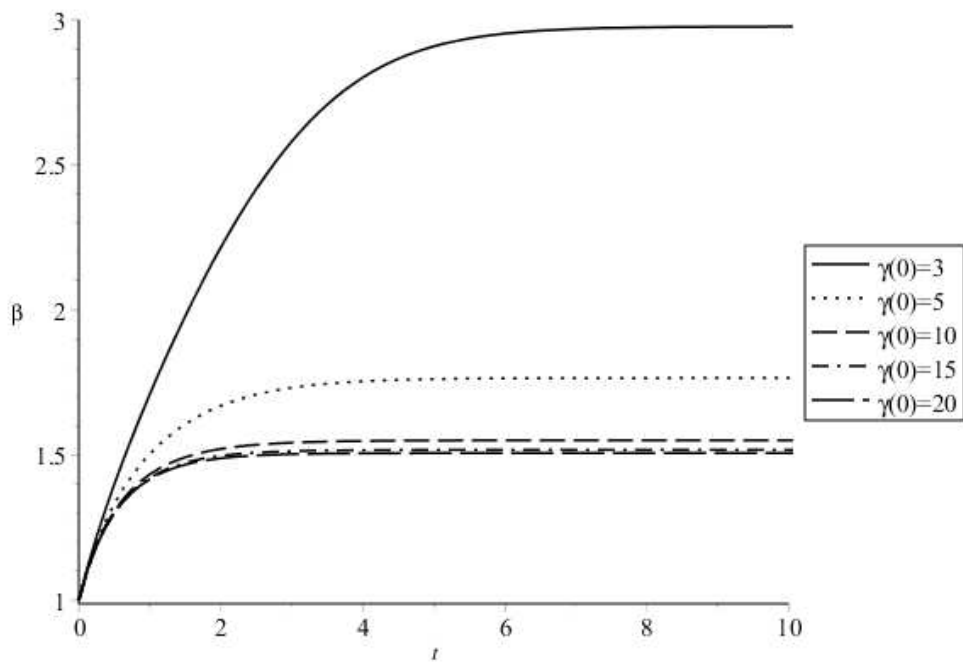


Figura 4.16: Comportamento da função β com gás de Chaplygin com variação de $\gamma(0)$

que quanto menor o valor de $\beta(0)$, a isotropia será alcançada mais rapidamente.

4.4.5 Variação de $\dot{\gamma}(0)$

Ao variar a condição inicial $\dot{\gamma}(0)$ de 10 a 100 e com as condições iniciais fixas $A = 1, C'_2 = 1, \gamma(0) = 10$ e $\beta(0) = 1$, encontramos soluções para as funções γ e β apresentadas nas

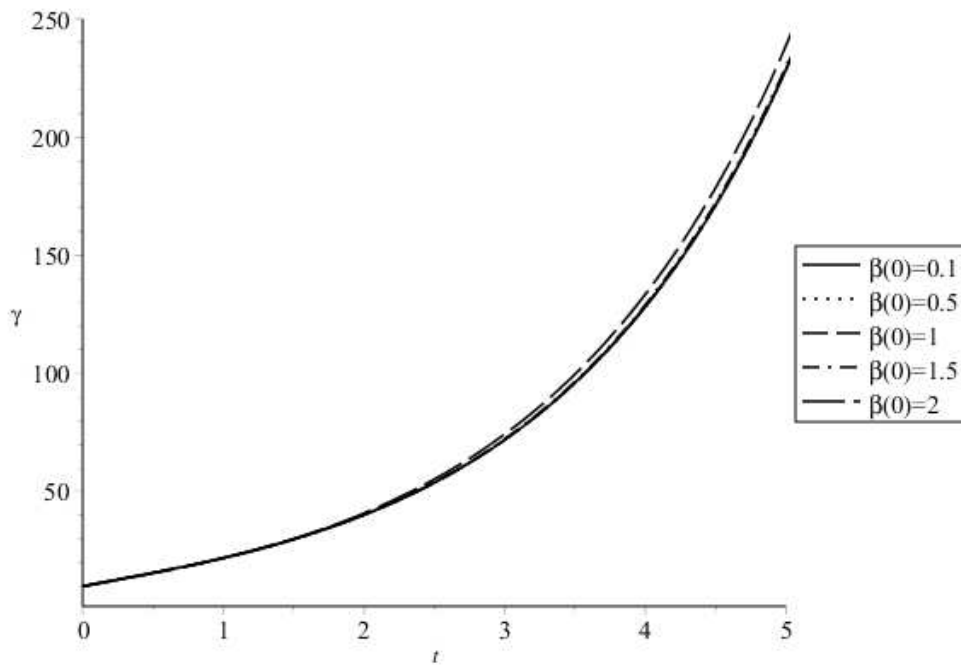


Figura 4.17: Comportamento da função γ com gás de Chaplygin com variação de $\beta(0)$

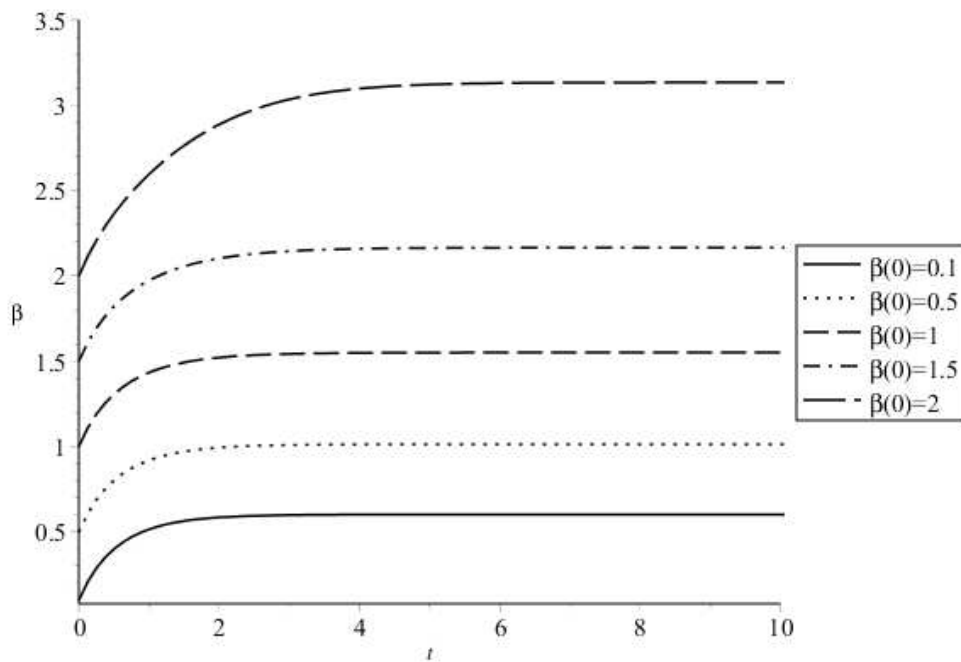


Figura 4.18: Comportamento da função β com gás de Chaplygin com variação de $\beta(0)$

Figuras 4.19 e 4.20. Note que, na Figura 4.19, a solução para γ , que representa o fator de escala médio, apresenta solução expansiva acelerada. Esse resultado é compatível com os resultados obtidos para a métrica sem a parametrização de Misner. Note que quanto maior o valor de $\dot{\gamma}(0)$, mais rápida será a velocidade de expansão do universo.

Na Figura 4.20, podemos ver o comportamento da função β , que representa a evolução

da anisotropia. Note que, neste universo, a isotropia será alcançada ao longo do tempo e, que quanto menor o valor de $\dot{\gamma}(0)$, a isotropia será alcançada mais rapidamente.

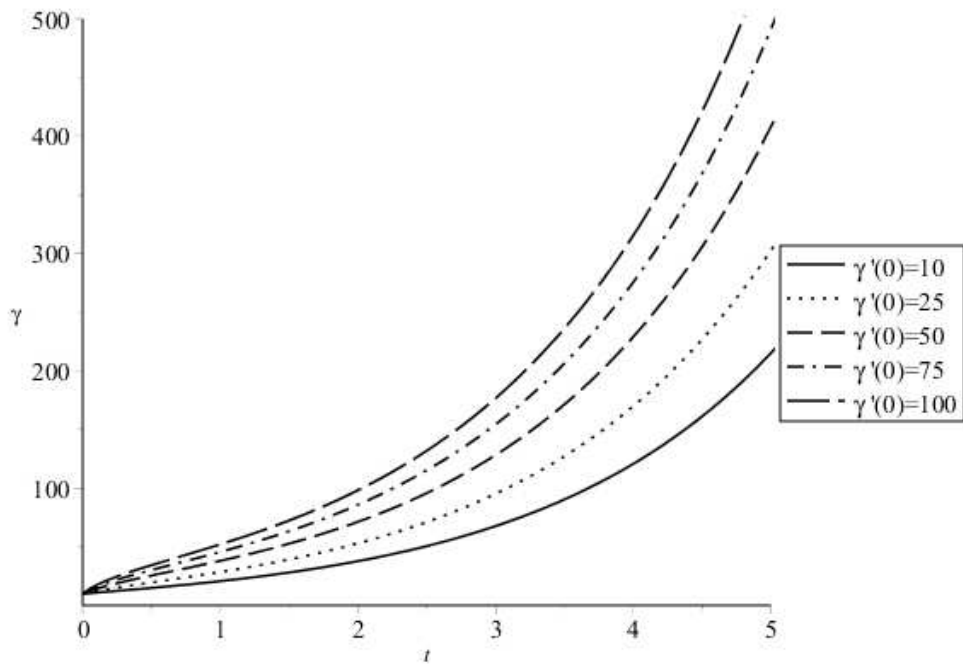


Figura 4.19: Comportamento da função γ com gás de Chaplygin com variação de $\dot{\gamma}(0)$

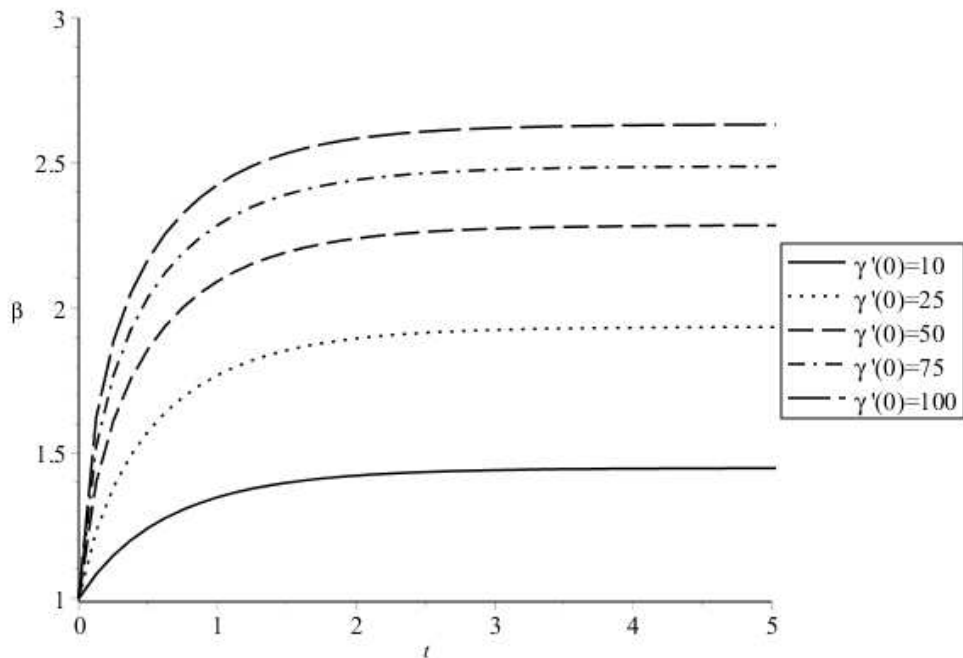


Figura 4.20: Comportamento da função β com gás de Chaplygin com variação de $\dot{\gamma}(0)$

4.4.6 Variação de $\dot{\beta}(0)$

Ao variar a condição inicial $\dot{\beta}(0)$ de 0.1 a 3 e com as condições iniciais fixas $A = 1, C_2' = 1, \gamma(0) = 10$ e $\beta(0) = 1$, encontramos soluções para as funções γ e β apresentadas nas Figuras 4.21 e 4.22. Note que, na Figura 4.21, a solução para γ , que representa o fator de escala médio, apresenta solução expansiva acelerada. Esse resultado é compatível com os resultados obtidos para a métrica sem a parametrização de Misner. Note que quanto maior o valor de $\dot{\beta}(0)$, mais rápida será a velocidade de expansão do universo.

Na Figura 4.22, podemos ver o comportamento da função β , que representa a evolução da anisotropia. Note que, neste universo, a isotropia será alcançada ao longo do tempo e, que quanto menor o valor de $\dot{\beta}(0)$, a isotropia será alcançada mais rapidamente. Com esses

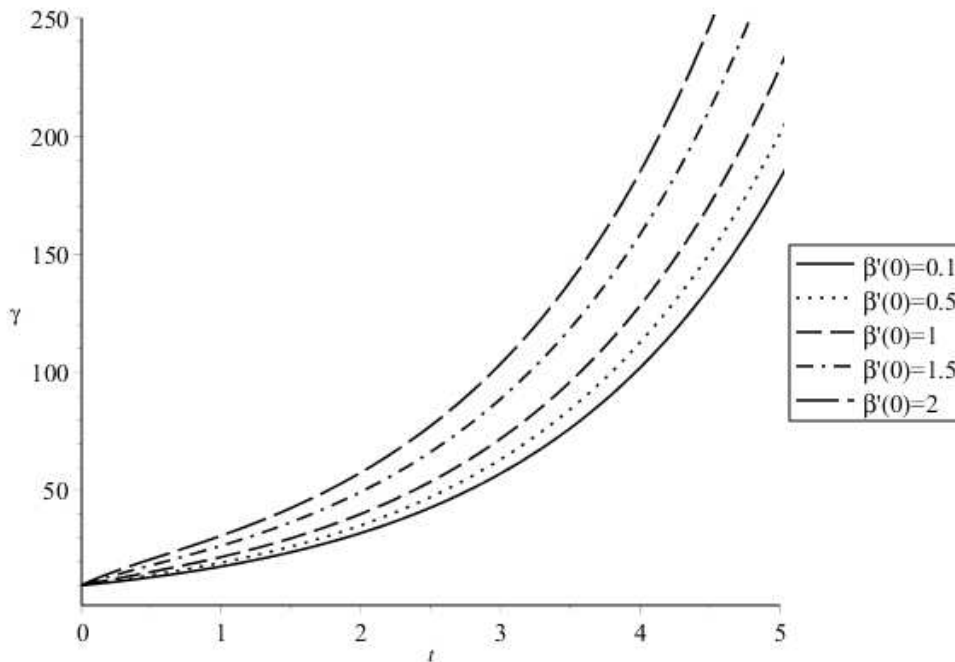


Figura 4.21: Comportamento da função γ com gás de Chaplygin com variação de $\dot{\beta}(0)$

resultados, vimos que independentemente da escolha de parâmetros e condições iniciais, o universo regido pela métrica parametrizada de Kantowski-Sachs com gás de Chaplygin irá expandir com aceleração positiva e alcançará a isotropia ao longo do tempo.

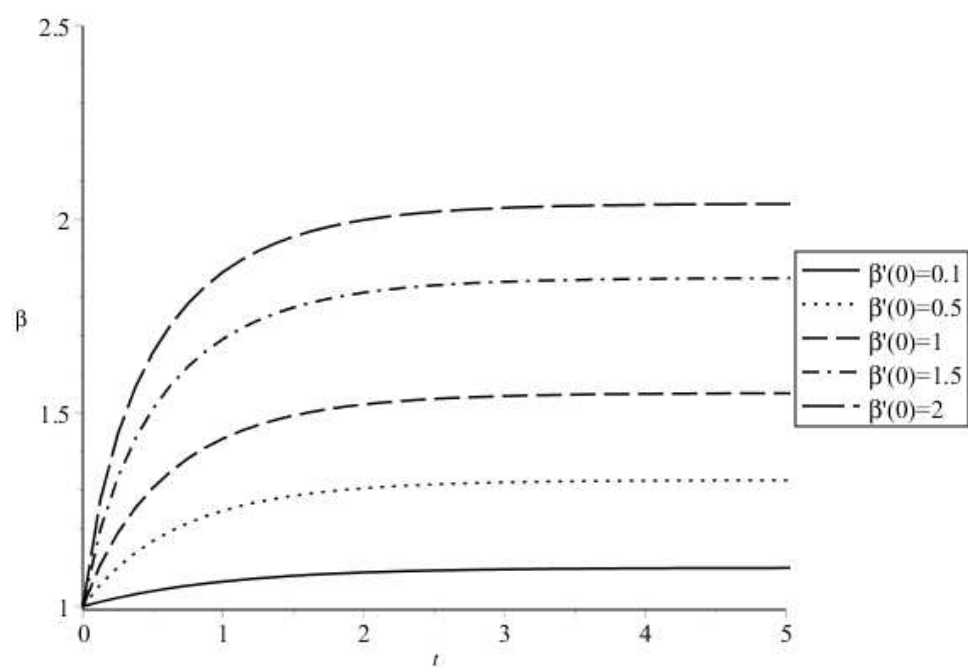


Figura 4.22: Comportamento da função β com gás de Chaplygin com variação de $\dot{\beta}(0)$

5 Conclusão

A concepção desse trabalho baseia-se na relatividade geral de Einstein. A contribuição de Einstein para a Física mudou a forma de assimilar a gravidade. Por esse motivo, esse estudo começa tratando os elementos das equações de Einstein, desde a métrica até o tensor de Ricci com o intuito de nos auxiliar na resolução das equações de Einstein.

Assim como a geometria, o fluido que compõe o universo estudado é de extrema importância para as equações de Einstein. À vista disso, introduzimos suas equações de estado e as principais características da poeira, constante cosmológica (vácuo), radiação e gás de Chaplygin. Depois de analisar toda a metodologia para investigar o modelo cosmológico Kantowski-Sachs, apresentamos os cálculos estudados em dois artigos. Inicialmente, estudamos o artigo de Kantowski e Sachs [13], cujo universo é preenchido por poeira. O segundo artigo estudo foi de Gron [11] que introduz um modelo cosmológico Kantowski-Sachs com constante cosmológica.

A proposta desse trabalho foi estudar a métrica de Kantowski-Sachs e solucionar as equações de Einstein para a radiação e o gás de Chaplygin como fluidos. A partir dos sistemas de equações obtidos, não foi possível realizar um estudo analítico do problema, apenas numérico. Com isso, foi necessário escolher algumas condições prévias, como parâmetros e condições iniciais, para termos uma ampla visão de como esse universo se comporta.

Nas soluções das equações de Einstein para a radiação, havia cinco variáveis com que pudéssemos trabalhar, eram elas: $C_1, a(0), b(0), \dot{a}(0)$ e $\dot{b}(0)$. Uma vasta análise foi feita para cada variável, alternando seus valores e encontrando soluções plausíveis para as equações de Einstein. Nos gráficos dos fatores de escala, vimos que, para qualquer valor de $C, a(0), b(0), \dot{a}(0)$ e $\dot{b}(0)$, a e b apresentaram o mesmo comportamento. O fator de escala a apresentou comportamento expansivo em todos os momentos e o fator de escala b apresentou comportamento limitado em todas as soluções. Isto, é, expandiu até seu ponto máximo e recolapsou. Esse comportamento dá origem a singularidade conhecida como *Big Crunch*.

Já nas soluções das equações de Einstein para o gás de Chaplygin, haviam seis variáveis com que pudéssemos trabalhar, eram elas: A , C_2 , $a(0)$, $b(0)$, $\dot{a}(0)$ e $\dot{b}(0)$. Com o mesmo procedimento das soluções para radiação, aspiramos soluções plausíveis para o novo sistema de equações de Einstein. Nas soluções das equações, que determinamos, para os fatores de escala, encontramos soluções expansivas e limitadas. O fator de escala a apresentou apenas soluções expansivas que se expandiam tão rapidamente que, depois de um tempo finito, alcançaram uma singularidade *Big Rip*. Por outro lado, o fator de escala b apresentou soluções tanto aceleradas quanto limitadas. Em grande parte, ele apresentou soluções expansivas, com exceção dos casos em que houve a variação de $b(0)$, $\dot{a}(0)$ e $\dot{b}(0)$, onde apresentou singularidade do tipo *Big Crunch*.

Em seguida, introduzimos a parametrização de Misner para a métrica de Kantowski-Sachs. O objetivo de Misner era mostrar que pela parametrização veríamos que o universo mesmo que, em seus estágio iniciais, fosse anisotrópico, com o decorrer do tempo, a anisotropia do universo de dissiparia se tornando o universo atual regido pela métrica de FLRW. Seguindo a metodologia da relatividade geral de Einstein, fomos capazes de obter o sistema de equações de Einstein para a métrica parametrizada para os fluidos radiação e gás de Chaplygin.

Nas soluções das equações de Einstein com a métrica parametrizada com radiação, havia cinco variáveis com as quais lidamos, eram elas: C'_1 , $\gamma(0)$, $\beta(0)$, $\dot{\gamma}(0)$ e $\dot{\beta}(0)$. Uma vasta análise foi feita para cada variável, alternando seus valores e encontrando soluções plausíveis para as equações de Einstein. Nos gráficos das funções γ e β , vimos que, para qualquer valor C'_1 , $\gamma(0)$, $\beta(0)$, $\dot{\gamma}(0)$ e $\dot{\beta}(0)$, γ e β apresentaram o mesmo comportamento. O fator de escala médio γ apresentou comportamento limitado em todos os momentos, o que corresponde aos resultados obtidos nas equações de Einstein da métrica sem a parametrização de Misner. A função β , que mede quantitativamente a anisotropia, nos mostrou que a isotropia não é alcançada em nenhum modelo com radiação como fluido.

Já nas soluções das equações de Einstein com a métrica parametrizada com gás de Chaplygin, haviam seis variáveis com as quais lidamos, eram elas: A , C'_2 , $\gamma(0)$, $\beta(0)$, $\dot{\gamma}(0)$ e $\dot{\beta}(0)$. Seguindo o mesmo procedimento das soluções da radiação para o gás de Chaplygin, procuramos soluções plausíveis para esse novo sistema de equações de Einstein. Nessas

soluções, vimos que o fator de escala médio γ apresentou expansão acelerada, que também corresponde com os resultados obtidos nas equações de Einstein da métrica sem a parametrização de Misner. A função β nos mostrou que todas as soluções alcançam a isotropia em todas as soluções, independente da variação dos parâmetros e condições iniciais.

Bibliografia

- [1] Adhav K.S. et al. “Kantowski-Sachs cosmological models with anisotropic dark energy”. Em: *Central European Journal of Physics* 9 (2011), pp. 919–925.
- [2] J. Beringer et al. “Review of Particle Physics (RPP)”. Em: *Phys. Rev. D* 86 (2012), p. 010001.
- [3] B. Bertotti. “Uniform Electromagnetic Field in the Theory of General Relativity”. Em: *Physics Review* 116 (1959), p. 133.
- [4] S. A. Chaplygin. “O gazovykh struiakh [On gas jets]”. Em: *Moscow-Leningrad: Hosudarstvennoe izdatelstvo tekhniko-teoreticheskoi literatury (in Russian)* (1949).
- [5] A.G. Doroshkevich. “Model of a Universe with Uniform Magnetic Field”. Em: *Astrophysics* 1 (1965), pp. 138–142.
- [6] Weber E. “Kantowski-Sachs Cosmological Models as Big Bang models”. Em: *Journal of Mathematical Physics* 26 (1985), p. 1308.
- [7] G.F.R. Ellis. “Dynamics of Pressure-Free Matter in General Relativity”. Em: *Journal of Mathematical Physics* 8 (1967), p. 1171.
- [8] G.F.R. Ellis. “Relativistic Cosmology”. Em: *General Relativity and Gravitation* 2 (1971), p. 7.
- [9] J. Silk G. Bertone D. Hooper. “Particle dark matter: evidence, candidates and constraints”. Em: *Physics reports, Elsevier* 405 (2005), pp. 279–390.
- [10] V. Gorini et al. “The Chaplygin Gas as a Model for the Dark Energy”. Em: *The Tenth Marcel Grossmann Meeting* 1 (2006), p. 12.
- [11] O. Gro/n. “Transition of a Kantowski-Sachs cosmological model into an inflationary era”. Em: *Journal of Mathematical Physics* 27 (1986), p. 1490.
- [12] R. Kantowski. “Some Relativist Cosmological Models”. Em: *General Relativity and Gravitation* 30 (1998), pp. 1665–1700.
- [13] R. Kantowski e R.K. Sachs. “Some Spatially Homogeneous Anisotropic Relativistic Cosmological Models”. Em: *Journal of Mathematical Physics* 7 (1966), pp. 443–446.
- [14] A.S. Kompaneets e A.S. Chernov. “Solution of the Gravitation Equations for a Homogeneous Anisotropic Model”. Em: *Soviet Physics JETP* 20 (1965), pp. 1303–1306.
- [15] Modesto L. “Kantowski-Sachs spacetime in loop quantum gravity”. Em: *Journal of Theoretical Physics* 45 (2006), pp. 2235–2246.
- [16] Y. Nutku L. Fishbone C. W. Misner. “Quantum Cosmology”. Em: *Physics Review* 186 (1969), pp. 1319–1327.
- [17] E. Mach. “The science of mechanics - a critical and historical account of its development.” Em: *Leipzig: F.A. Brockhaus* (1883).
- [18] I. Robinson. “A Solution of the Maxwell-Einstein Equations”. Em: *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astron. Phys.* 7 (1959), pp. 351–352.
- [19] K. Stanyukovich. “Unsteady Motion of Continuous Media”. Em: *Oxford, UK Published by Pergamon Press* (1960).

-
- [20] J.M. Stewart e G.F.R. Ellis. “Solutions of Einstein’s Equations for a Fluid which Exhibit Local Rotational Symmetry”. Em: *Journal of Mathematical Physics* 9 (1968), p. 1072.
- [21] K.S. Thorne. “Geometrodynamics of Cylindrical Systems”. Em: *PhD Thesis* (1965).
- [22] K.S. Thorne. “Primordial Element Formation, Primordial Magnetic Fields, and the Isotropy of the Universe”. Em: *Astrophysics Journal* 148 (1967), p. 51.

A Grupos de Lie

Este apêndice tem como objetivo introduzir os conceitos dos grupos de Lie e suas álgebras de Lie.

A.1 Definições

Um grupo de Lie é um grupo contínuo cujo conjunto subjacente tem uma estrutura de variável diferenciável, onde as operações de grupo, multiplicação e inversa, são funções compatíveis com esta estrutura, de tal forma que a aplicação produto

$$p : (g, h) \in G \times G \mapsto gh \in G \tag{A.1}$$

é diferenciável.

Assume-se que G é de classe C^∞ assim como o produto p .

Dado $g \in G$, as translações à esquerda e à direita $E_g : G \rightarrow G$ e $D_g : G \rightarrow G$, são definidas respectivamente por $E_g(h) = gh$ e $D_g(h) = hg$. Ambas as transformações são difeomorfismos, já que $E_g \circ E_{g^{-1}} = D_g \circ D_{g^{-1}} = id$, onde id é a identidade. Da mesma forma, os automorfismos internos $C_g = E_g \circ D_{g^{-1}}$, $g \in G$, são difeomorfismos.

Definição 1.1. *Um homomorfismo entre grupos de Lie G e H é uma função suave $\Phi : G \rightarrow H$ que também é um homomorfismo de grupos. Um isomorfismo é um homomorfismo bijetivo cuja inversa também é um homomorfismo de grupos de Lie.*

Uma vez que a função inversa de um homomorfismo de grupos sempre é um homomorfismo, para que um homomorfismo de grupos de Lie bijetivo seja um isomorfismo é suficiente que a sua inversa seja diferenciável.

Definição 1.2. *Sejam G um grupo de Lie e M uma variedade diferenciável. Uma ação à esquerda de G sobre M é uma função diferenciável $\alpha : G \times M \rightarrow M$ tal que*

$$(i) \ \alpha(gh, p) = \alpha(g, \alpha(h, p)), \forall g, h \in G, \forall p \in M;$$

(ii) $\alpha(e, p) = p, \forall p \in M$. Analogamente, uma ação à direita de G sobre M é uma função suave $\alpha : M \times G \rightarrow M$ que satisfaz

(iii) $\alpha(p, gh) = \alpha(\alpha(p, g), h), \forall g, h \in G, \forall p \in M$;

(iv) $\alpha(p, e) = p, \forall p \in M$.

Dada uma ação à esquerda $\alpha : G \times M \rightarrow M$, para cada $g \in G$ considere a função $\alpha_g : M \rightarrow M$ dada por $\alpha_g(p) = \alpha(g, p)$. A condição (i) significa que $\alpha_{gh} = \alpha_g \circ \alpha_h$, $\forall g, h \in G$, e a condição (ii), que $\alpha_e = id$. Note que cada α_g é um difeomorfismo em M , pois

- $\alpha_g = \alpha \circ i_g^2, \forall g \in G$, em que $i_g^2 : M \rightarrow G \times M$ é dada por $i_g^2(p) = (g, p)$. Como i_g^2 é diferenciável, segue que α_g é suave.
- $\alpha_{g^{-1}} = (\alpha_g)^{-1}$ é diferenciável.

O mesmo vale para ações à direita, com a única diferença de que, neste caso, $\alpha_{gh} = \alpha_h \circ \alpha_g$.

Definição 1.3. Uma representação de um grupo de Lie G é um homomorfismo de grupos de Lie

$$\Phi : G \rightarrow GL(E),$$

em que E é um espaço vetorial real ou complexo de dimensão finita. Caso Φ seja injetiva, dizemos que ela é fiel.

A.2 Álgebra de Lie de um Grupo de Lie

O estudo de álgebras de Lie é uma ferramenta muito poderosa para entender a geometria dos grupos de Lie. Todo grupo de Lie possui uma álgebra de Lie associada.

Definição 2.1. Uma álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial \mathfrak{g} munido de um produto $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ que satisfaz as propriedades:

(i) $[\cdot, \cdot]$ é bilinear, isto é, linear em cada uma das variáveis;

(ii) Anti-simetria: $[A, B] = -[B, A]$, para $A, B \in \mathfrak{g}$;

(iii) *Identidade de Jacobi:* $[A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]]$, para $A, B, C \in \mathfrak{g}$.

Um subespaço de \mathfrak{g} de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é uma subálgebra de Lie se fechado pelo colchete. Logo, o subespaço é também uma álgebra de Lie. Duas álgebras de Lie \mathfrak{g} e \mathfrak{h} são isomórficas quando há um isomorfismo linear entre eles o que preserva o colchete.

Definição 2.2. Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é dita comutativa se $[A, B] = 0, \forall A, B \in \mathfrak{g}$

A.2.1 Campos Invariantes

Definição 2.2. Seja G um grupo de Lie. Um campo de vetores X em G é dito

- invariante à direita se para todo $g \in G$, $(D_g)_*X = X$;
- o campo de vetores X é invariante à esquerda se para todo $g \in G$, $(E_g)_*X = X$.

Proposição 2.4. Seja G um grupo de Lie.

- (i) Todo campo vetorial invariante à esquerda é de classe C^∞ ;
- (ii) Se $x, Y \in \mathfrak{X}(G)$ são campos vetoriais invariantes à esquerda, então $[X, Y]$ também é invariante à esquerda;
- (iii) O conjunto dos campos vetoriais invariantes à esquerda é um subespaço vetorial de $\mathfrak{X}(G)$, de dimensão igual a $\dim(G)$

Demonstração. Para verificar (ii), basta observar que, se X e Y são campos vetoriais invariantes à esquerda, então:

$$(E_g)_*[X, Y] = [(E_g)_*X, (E_g)_*Y] = [X, Y], \quad \forall g \in G,$$

onde, $[X, Y]$ é invariante à esquerda.

Indicaremos por e o elemento neutro de G . Seja $\mathfrak{X}_{inv}(G)$ o conjunto dos campos vetoriais invariantes à esquerda, onde $\mathfrak{X}_{inv}(G) \subset \mathfrak{X}(G)$ é um subespaço linear. A aplicação da restrição

$$\mathfrak{X}_{inv}(G) \rightarrow T_eG, \quad X \mapsto X_e$$

é um isomorfismo linear. De fato, se $\mathbf{v} \in T_e G$, então definimos um campo vetorial X em G por:

$$X_g = dE_g \cdot \mathbf{v}.$$

Este campo vetorial invariante à esquerda e $X_e = \mathbf{v}$. Logo, a aplicação de restrição $\mathfrak{X}(G) \rightarrow T_e G$ é invertível. Assim,

$$\dim \mathfrak{X}_{inv}(G) = \dim T_e G = \dim G.$$

Um campo invariante à esquerda fica completamente determinado quando se conhece X_e .

Vimos que \mathfrak{g} é um campo vetorial e temos o seguinte:

Proposição 2.4. *A aplicação*

$$\begin{aligned} \alpha : \mathfrak{g} &\rightarrow T_e G \\ \chi &\mapsto \alpha(\chi) = \chi_e, \end{aligned}$$

onde $T_a G$ indica o espaço tangente a G no ponto a , é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Se $X \in \mathfrak{g}$, então X é diferenciável.

Demonstração. Vejamos que α é linear e bijetora.

(i) α é linear;

Sejam $X, Y \in \mathfrak{g}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ então:

$$\alpha(X + \lambda Y) = (X + \lambda Y)_e = (X + \lambda Y)(e) = X(e) + \lambda Y(e) = X_e + \lambda Y_e = \alpha(X) + \lambda \alpha(Y);$$

(ii) α é injetora;

Sejam $X, Y \in \mathfrak{g}$ com $\alpha(X) = \alpha(Y)$, então temos que $X_e = Y_e$. Dado $g \in G$, então:

$$X_g = X_{ge} = d(E_g)_e(X_e) = d(E_g)_e(Y_e) = Y_{ge} = Y_g, \text{ portanto } X = Y;$$

(iii) α é sobrejetora;

Tome $W \in T_e G$. Seja $(dE_a)_e : T_e G \rightarrow T_{E_a(e)} G$ tal que $(dE_a)_e X_e = X_{E_a(e)} = X_{ae} = X_a$.

Portanto, basta definir um campo X em G por $X_a = (dE_a)_e(W)$. Vejamos que

$X \in \mathfrak{g}$ e que $\alpha(X) = W$:

Seja $a \in G$, logo, para todo $g \in G$,

$$X_{ag} = (dE_{ag})_e(W) = (dE_a \circ dE_g)_e(W) = (dE_a)_g(dE_g)_e(W) = (dE_a)_g(X_g).$$

Portanto, $X \in \mathfrak{g}$, e $\alpha(X) = X_e = (dE_e)_e(W) = Id(W) = W$.

Assim, concluímos que α é um isomorfismo entre espaços vetoriais.

Dados $Z \in T_e G$, denotaremos X^Z o único campo invariante à esquerda tal que $X_e^Z = Z$.

Através deste isomorfismo, definimos o colchete de Lie no espaço tangente por:

para $U, V \in \mathfrak{g}$, então $U = X_e^U$ e $V = X_e^V$, logo $[U, V] = [X_e^U, X_e^V] = [X^U, X^V]_e$.

Note que assim o isomorfismo entre \mathfrak{g} e $T_e G$ torna-se um isomorfismo entre álgebras de Lie.

A.3 Derivada de Lie

Enquanto a derivada covariante requer uma conexão em todo espaço-tempo, a derivada de Lie requer apenas uma curva.

Seja $C : R \rightarrow \mathcal{M}$ uma curva em \mathcal{M} com vetores tangentes, $\xi = \frac{d}{d\lambda}$, com componentes

$$\xi = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (\text{A.2})$$

onde λ parametriza a curva. A derivada de Lie generaliza uma derivada direcional de uma função

$$\frac{df}{d\lambda} = \xi^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \quad (\text{A.3})$$

a tensores de maiores ranks. Inicialmente, considere um campo vetorial v definido em \mathcal{M} .

Definimos a derivada de Lie de v num ponto P ao longo de C como

$$\mathcal{L}_\xi v = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{v(P + \varepsilon \xi) - v(P)}{\varepsilon}, \quad (\text{A.4})$$

onde $v(P + \varepsilon \xi)$ é o transporte de Lie de v ao longo de uma curva. Por simplicidade, considere $P = C(\lambda = 0)$. O transporte de Lie envolve em pegar o valor do campo vetorial num ponto em C , $v(\lambda)$, e executar uma transformação de coordenada para trazer o ponto

$C(\lambda)$ de volta para $P = C(0)$. A transformação de coordenada necessária, para $\lambda = \varepsilon$ infinitesimal,

$$y^\alpha = x^\alpha - \varepsilon \xi^\alpha(0) \quad (\text{A.5})$$

As componentes de v^α variam como

$$\begin{aligned} v^\alpha &= v^\beta(\lambda) \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta} \\ &= [v^\beta(x^\mu(0) + \varepsilon \xi^\mu)] (\delta_\beta^\alpha - \varepsilon \partial_\beta \xi^\alpha) \\ &= [v^\beta(0) + \varepsilon \xi^\mu \partial_\mu v^\beta(0)] (\delta_\beta^\alpha - \varepsilon \partial_\beta \xi^\alpha) \\ &= v^\alpha(0) + \varepsilon \xi^\mu \partial_\mu v^\alpha(0) - \varepsilon v^\beta(0) \partial_\beta \xi^\alpha. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

A derivada é então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi v &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{v(P + \varepsilon \xi) - v(P)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{v^\alpha(0) + \varepsilon \xi^\mu \partial_\mu v^\alpha(0) - \varepsilon v^\beta(0) \partial_\beta \xi^\alpha - v(0)}{\varepsilon} \\ &= \xi^\mu \partial_\mu v^\alpha(0) - v^\beta(0) \partial_\beta \xi^\alpha \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

A covariância desse resultado é que é igual ao comutador de dois vetores

$$\mathcal{L}_\xi v = [\xi, v], \quad (\text{A.8})$$

que tem a mesma forma quando ξ e v são expandidos em componentes

$$\begin{aligned} [\xi, v] &= [\xi^\alpha \partial_\alpha, v^\beta \partial_\beta] \\ &= \xi^\alpha \partial_\alpha v^\beta \partial_\beta - v^\beta \partial_\beta \xi^\alpha \partial_\alpha \\ &= (\xi^\beta \partial_\beta v^\alpha - v^\beta \partial_\beta \xi^\alpha) \partial_\alpha. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

A generalização para tensores de ranks maiores é imediata porque derivações devem satisfazer a lei de Leibnitz. Assim, para um produto de dois vetores

$$T^{\alpha\beta} = u^\alpha v^\beta, \quad (\text{A.10})$$

temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi T^{\alpha\beta} &= \mathcal{L}_\xi(u^\alpha v^\beta) \\
&= (\mathcal{L}_\xi u^\alpha)v^\beta + u^\alpha(\mathcal{L}_\xi v^\beta) \\
&= (\xi^\mu \partial_\mu u^\alpha - u^\mu \partial_\mu \xi^\alpha)v^\beta + u^\alpha(\xi^\mu \partial_\mu v^\beta - v^\mu \partial_\mu \xi^\beta) \\
&= \xi^\mu \partial_\mu(u^\alpha v^\beta) - u^\mu v^\beta \partial_\mu \xi^\alpha - u^\alpha v^\mu \partial_\mu \xi^\beta \\
&= \xi^\mu \partial_\mu T^{\alpha\beta} - T^{\mu\beta} \partial_\mu \xi^\alpha - T^{\alpha\mu} \partial_\mu \xi^\beta.
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Usando a derivada direcional de um escalar

$$\mathcal{L}_\xi \phi = \xi^\mu \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \tag{A.12}$$

juntamente com $\phi = v^\alpha \omega_\alpha$, para um v^α arbitrário,

$$\begin{aligned}
\xi^\mu \frac{\partial(v^\alpha \omega_\alpha)}{\partial x^\mu} &= \mathcal{L}_\xi(v^\alpha \omega_\alpha) \\
\xi^\mu (\partial_\mu v^\alpha) \omega_\alpha + v^\alpha \xi^\mu \partial_\mu \omega_\alpha &= (\mathcal{L}_\xi v^\alpha) \omega_\alpha + v^\alpha \mathcal{L}_\xi \omega_\alpha \\
\xi^\mu (\partial_\mu v^\alpha) \omega_\alpha + v^\alpha \xi^\mu \partial_\mu \omega_\alpha &= \xi^\beta (\partial_\beta v^\alpha) \omega_\alpha - v^\beta (\partial_\beta \xi^\alpha) \omega_\alpha + v^\alpha \mathcal{L}_\xi \omega_\alpha \\
v^\alpha \xi^\mu \partial_\mu \omega_\alpha &= -v^\beta (\partial_\beta \xi^\alpha) \omega_\alpha + v^\alpha \mathcal{L}_\xi \omega_\alpha \\
v^\alpha \mathcal{L}_\xi \omega_\alpha &= v^\alpha \xi^\mu \partial_\mu \omega_\alpha + v^\alpha (\partial_\alpha \xi^\beta) \omega_\beta.
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Já que isso deve ser satisfeito para todo v^α ,

$$\mathcal{L}_\xi \omega_\alpha = \xi^\mu \partial_\mu \omega_\alpha + \omega_\beta \partial_\alpha \xi^\beta. \tag{A.14}$$

Através da derivada de Lie, podemos determinar a simetria de uma métrica. A derivada de Lie do tensor métrico é dada por

$$\mathcal{L}_\xi g_{\alpha\beta} = \xi^\mu \partial_\mu g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta} \partial_\alpha \xi^\mu + g_{\alpha\mu} \partial_\beta \xi^\mu. \tag{A.15}$$

Suponha que há uma congruência de curvas, tal que os vetores tangentes formam um campo vetorial. Suponha também que λ é uma das coordenadas, x^{α_0} , onde α_0 é a única

direção fixa. Assim, as componentes de ξ^μ são constantes,

$$\begin{aligned}\xi^\mu &= \frac{dx^\mu}{d\lambda} \\ &= \delta_{\alpha_0}^\mu.\end{aligned}\tag{A.16}$$

Por exemplo, se a curva é do tipo tempo, então escolhemos $t = \lambda$ e $\xi^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Para essa escolha, temos que $\partial_\beta \xi^\mu = 0$ e a derivada de Lie da métrica é

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\xi g_{\alpha\beta} &= \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu g_{\alpha\beta} \\ &= \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \lambda}.\end{aligned}\tag{A.17}$$

Isto é, se a derivada de Lie desaparece, a métrica é independente de λ . Já que a métrica não varia ao longo da congruência de curvas, temos uma simetria do espaço-tempo. Qualquer direção que haja variação na métrica é chamada de isometria.

Podemos encontrar uma equação diferencial a fim de descrever tais direções de simetria ao definir a derivada de Lie da métrica igual a zero,

$$\begin{aligned}0 &= \xi^\mu \partial_\mu g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta} \partial_\alpha \xi^\mu + g_{\alpha\mu} \partial_\beta \xi^\mu \\ &= \xi^\mu \partial_\mu g_{\alpha\beta} + [\partial_\alpha (g_{\mu\beta} \xi^\mu) - \xi^\mu \partial_\alpha g_{\mu\beta}] + [\partial_\beta (g_{\alpha\mu} \xi^\mu) - \xi^\mu \partial_\beta g_{\alpha\mu}] \\ &= \xi^\mu \partial_\mu g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \xi_\beta - \xi^\mu \partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\beta \xi_\alpha - \xi^\mu \partial_\beta g_{\alpha\mu} \\ &= \partial_\alpha \xi_\beta + \partial_\beta \xi_\alpha - \xi^\mu \partial_\alpha g_{\mu\beta} - \xi^\mu \partial_\beta g_{\alpha\mu} + \xi^\mu \partial_\mu g_{\alpha\beta} \\ &= \partial_\alpha \xi_\beta - \xi^\mu \frac{1}{2} (\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\alpha\beta}) + \partial_\beta \xi_\alpha - \xi^\mu \frac{1}{2} (\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\alpha\beta}) \\ &= \partial_\alpha \xi_\beta - \xi^\mu \Gamma_{\mu\beta\alpha} + \partial_\beta \xi_\alpha - \xi^\mu \Gamma_{\mu\alpha\beta} \\ &= \partial_\alpha \xi_\beta - \xi_\mu \Gamma_{\beta\alpha}^\mu + \partial_\beta \xi_\alpha - \xi_\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \\ &= D_\alpha \xi_\beta + D_\beta \xi_\alpha,\end{aligned}\tag{A.18}$$

o que resulta na equação de Killing,

$$\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0.\tag{A.19}$$

As soluções dessa equação representam a direção de simetrias do espaço-tempo, isto é, direções nas quais a métrica é invariante.

Considere o espaço-tempo plano, para o qual a métrica é a métrica de Minkowski, (2.30).

Os símbolos de Christoffel desaparecem, $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = 0$, logo, podemos substituir as derivadas covariantes por derivadas parciais, e a equação de Killing será simplesmente

$$\xi_{\alpha,\beta} + \xi_{\beta,\alpha} = 0. \quad (\text{A.20})$$

Tomando mais uma derivada,

$$\xi_{\alpha,\beta\mu} + \xi_{\beta,\alpha\mu} = 0. \quad (\text{A.21})$$

Deslocando ciclicamente os índices duas vezes, obtemos

$$\begin{aligned} \xi_{\alpha,\beta\mu} + \xi_{\beta,\alpha\mu} &= 0 \\ \xi_{\beta,\mu\alpha} + \xi_{\mu,\beta\alpha} &= 0 \\ \xi_{\mu,\alpha\beta} + \xi_{\alpha,\mu\beta} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Somando os dois primeiros e subtraindo o terceiro,

$$\begin{aligned} 0 &= \xi_{\alpha,\beta\mu} + \xi_{\beta,\alpha\mu} + \xi_{\beta,\mu\alpha} + \xi_{\mu,\beta\alpha} - \xi_{\mu,\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\mu\beta} \\ &= 2\xi_{\beta,\alpha\mu} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

de maneira que a segunda derivada de ξ_{β} desaparece. Isto é, ξ_{β} deve ser linear em suas coordenadas

$$\xi_{\alpha} = a_{\alpha} + b_{\alpha\beta}x^{\beta}. \quad (\text{A.24})$$

Agora temos 10 campos vetoriais independentes para 10 escolhas independentes das constantes a_{α} e $b_{\alpha\beta} = -b_{\beta\alpha}$. Definindo $a_{\alpha} = 0$ e escolhendo uma das seis matrizes antisimétricas $b_{\alpha\beta}$, como por exemplo, $b_{21} = -b_{12} = 1$, com o restante igual a zero, o campo

vetorial é

$$\begin{aligned}
 \xi &= \xi^\alpha \partial_\alpha \\
 &= (\eta^{\alpha\beta} b_{\beta\mu} x^\mu) \partial_\alpha \\
 &= x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}.
 \end{aligned} \tag{A.25}$$

Esse é o gerador de rotações ao longo do eixo z . Similarmente, $b_{23} = -b_{32}$ e $b_{31} = -b_{13}$ levam aos geradores de rotações ao longo dos eixos x e y . Assim,

$$\xi_1 = y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \tag{A.26}$$

$$\xi_2 = z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \tag{A.27}$$

$$\xi_3 = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}. \tag{A.28}$$

Escolhendo uma coordenada ϕ , tal que

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \tag{A.29}$$

é um vetor de Killing.

É importante ressaltar que a combinação linear de ξ_1 e ξ_2 , $a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2$, é também um vetor de Killing, se a_1 e a_2 são constantes. Isso é óbvio conforme a equação (A.20). Contudo, se a_1 e a_2 são funções das coordenadas, então $a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2$ é um campo vetorial, mas não necessariamente um vetor de Killing. Isso sugere que o conjunto de campos vetoriais de Killing formam uma álgebra. Como por exemplo, o comutador $[\xi_i, \xi_j]$ também é um vetor de Killing.

A.4 Grupos de Isometria

O conjunto de isometrias numa variedade M forma um grupo, onde um produto associativo é definido, um inverso existe para cada elemento e há uma identidade.

O grupo de isometrias é o grupo de simetria de uma variedade M e será denotado por G ou G_r , onde r é a dimensão do grupo. A dimensão de G_r pode ser maior ou menor do que

a dimensão n da variedade. Os vetores de Killing considerados acima formam a álgebra de Lie do grupo de Lie de transformações. As isometrias de M podem ser obtidas a partir das isometrias infinitesimais pela exponenciação.

A fim de determinar as isometrias infinitesimais num *manifold* M , é necessário resolver as equações de Killing para a determinada métrica. É necessário encontrar todas as soluções linearmente independentes dessas equações e o número de tais soluções é a dimensão r do grupo G_r . Determinar r não é um processo trivial, mas é possível, porque acontece que espaços com curvatura constante admitem o número máximo possível para a variedade M

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

Teorema *Uma condição necessária e suficiente para que uma variedade admita um grupo de isometrias unidimensional G_1 é que exista um sistema de coordenadas para o qual todos os componentes da métrica não envolvam uma coordenada, por exemplo x^1 ; então as curvas do parâmetro x^1 são trajetórias de movimento.*

As isometrias de 2-esfera, uma hipersuperfície do espaço euclidiano \mathbb{R}^3 notada em geral \mathbb{S}^2 , demonstram essa ideia claramente. Considere \mathbb{S}^2 embutido no espaço euclidiano plano E^3 . E^3 possui uma métrica $ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}^2\theta d\phi^2$. \mathbb{S}^2 é a região $r = \text{const.}$ e, escolhendo, $r = 1$, de forma que a métrica de \mathbb{S}^2 é $ds^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2$. Os componentes da métrica são $g_{11} = 1$, $g_{22} = \text{sen}^2\theta$ e $g_{21} = g_{12} = 0$. É visível que a métrica é independente de ϕ , e então $\frac{\partial}{\partial\phi}$ é um vetor de Killing. Contudo, a métrica depende de θ , mas $\frac{\partial}{\partial\theta}$ não é um vetor de Killing, pois ele não preserva o comprimento no transporte da curva.

A.5 Espaço-tempo Quadridimensional e Grupos de Isometria

O espaço-tempo admite um número r de campos vetoriais de Killing independentes. Ele é dito ser invariante sob um grupo de isometria G_r de dimensão r .

Há diferentes tipos de grupos de isometria. Até no caso onde há dois espaço-tempo com o mesmo número de vetores de Killing independentes r , os dois G_r podem possuir propriedades completamente diferentes com relação à simetria do espaço-tempo. É correto dizer

que um espaço-tempo deve admitir uma certa isometria a fim de possuir uma simetria específica, isto é, homogeneidade, isotropia, etc.

Um grupo de isometrias pode admitir subgrupos, cada um dos quais pode refletir uma propriedade de simetria diferente do espaço-tempo ou o grupo de isometria inteiro pode corresponder a apenas uma simetria.

Inicialmente, define-se o grupo transitivo (subgrupo) e o grupo de isotropia (subgrupo).

Um grupo de isometria G_r é dito ser transitivo numa variedade M se para quaisquer dois pontos distintos $p, q \in M$, existe uma isometria $g \in G$ tal que $g(p) = q$.

Considere um grupo transitivo de isometria. Sua transitividade é refletida na natureza dos vetores de Killing correspondentes, é possível construir um vetor de Killing $a^i \xi_i$ (combinação linear dos vetores de Killing da base) que possui componentes em todas as n direções. Isso assegura que o elemento correspondente do grupo $I + a^i \xi_i$ leva todo ponto para qualquer outro ponto do *manifold*.

Um grupo simplesmente transitivo é um grupo transitivo que possui a mesma dimensão da variedade M no qual está agindo, isto é, $n = r$. Neste caso, os r vetores de Killing linearmente independentes podem ser usados como uma base para os campos vetoriais. Um grupo multiplamente transitivo é um grupo transitivo que possui uma dimensão maior do que a dimensão da variedade, isto é, $n > r$.

A.5.1 Isotropia

Um espaço-tempo ser isotrópico significa que ele possui as mesmas propriedades físicas independentemente da direção considerada. Note que se o espaço-tempo é considerado isotrópico em torno de um ponto, então refere-se a esse espaço-tempo como esféricamente simétrico. O grupo de isotropia I_p de um ponto p é o conjunto de todas as isometrias que deixam p fixo. I_p é um subgrupo do grupo de isometria G_r . Se G_r é simplesmente ou multiplamente transitivo, ou seja, $n \geq r$, então todos I_p são isomórficos.

A.5.2 Homogeneidade

Um espaço-tempo é considerado homogêneo se ele "é o mesmo em todos os pontos". Ou seja, um espaço-tempo é homogêneo se há um grupo transitivo de isometrias no espaço-

tempo. Isso é o equivalente a dizer que há uma isometria que mapeia cada ponto no espaço-tempo em qualquer outro ponto no espaço-tempo.

A descrição de um espaço-tempo homogêneo quadridimensional é fácil de interpretar se imaginar um espaço-tempo quadridimensional sendo folheado por hipersuperfícies tipo espaço tridimensionais Σ_t (parametrizadas por t , coordenada temporal) que satisfazem os critérios de homogeneidade, como por exemplo os modelos de FRW.

Definição *Um espaço-tempo é dito ser espacialmente homogêneo se existe uma família de hipersuperfícies tipo espaço de parâmetro único Σ_t folheando o espaço-tempo tal que a métrica g tem um grupo de isometrias em Σ_t .*

Há dois tipos de espaço-tempo espacialmente homogêneo, com grupos de isometria simplesmente transitivos ou grupos de isometria multiplamente transitivos.

1. O espaço-tempo com grupos de isometria simplesmente transitivos são classificados de acordo com a álgebra de Lie dos componentes do grupo. Essa classificação é devido a Bianchi e há nove tipos distintos de álgebra de Lie;
2. O espaço-tempo com grupos de isometria multiplamente transitivos são chamados de modelos de Kantowski-Sachs.

Modelos cosmológicos nos quais a métrica é a mesma em todos os pontos do espaço e tempo são modelos cosmológicos homogêneos. Tal modelo é um *manifold* quadridimensional M_4 no qual um grupo de isometrias (simplesmente ou multiplamente) transitivo G_r , isto é, $r \geq 4$. Isso significa que é possível definir um *manifold* quadridimensional que irá mapear cada ponto em qualquer outro ponto no espaço-tempo.