

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
FACULDADE DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Alessandro de Lima Castro

Análise Multifractal do Mercado Brasileiro de Eletricidade

Juiz de Fora

2023

Alessandro de Lima Castro

Análise Multifractal do Mercado Brasileiro de Eletricidade

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito à obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Energia

Orientador: D.Sc. Prof. André Luís Marques Marcato

Coorientador: D.Sc. Prof. Eduardo Pestana de Aguiar

Juiz de Fora

2023

Alessandro de Lima Castro

Análise Multifractal do Mercado Brasileiro de Eletricidade

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito à obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Energia

Alessandro de Lima Castro

Análise Multifractal do Mercado Brasileiro de Eletricidade

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Sistemas de Energia Elétrica

Aprovada em 21 de novembro de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. André Luis Marques Marcato - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Eduardo Pestana de Aguiar - Coorientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. João Alberto Passos Filho
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Leonardo de Mello Honório
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Fernando Luiz Cyrino Oliveira
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Prof. Dr. José Francisco Moreira Pessanha

Centro de Pesquisas de Energia Elétrica - Rio de Janeiro

Juiz de Fora, 18/10/2023.



Documento assinado eletronicamente por **Fernando Luiz Cyrino Oliveira, Usuário Externo**, em 21/11/2023, às 16:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Andre Luis Marques Marcato, Professor(a)**, em 21/11/2023, às 16:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Joao Alberto Passos Filho, Coordenador(a)**, em 21/11/2023, às 17:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Leonardo de Mello Honorio, Professor(a)**, em 22/11/2023, às 10:16, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Eduardo Pestana de Aguiar, Professor(a)**, em 22/11/2023, às 11:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **José Francisco Moreira Pessanha Pessanha, Usuário Externo**, em 13/12/2023, às 11:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Uffj (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **1531351** e o código CRC **66063E11**.

Dedico este trabalho, em primeiro lugar, a Família! Tudo em nossas vidas!

Minha esposa, por sua ajuda incondicional. Meus filhos, por terem paciência comigo.

A Deus, por tudo...

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, gostaria de expressar minha gratidão à Universidade Federal de Juiz de Fora, à Faculdade de Engenharia e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica por proporcionarem um ambiente acadêmico enriquecedor e os recursos necessários para a realização deste trabalho.

Um agradecimento especial ao meu orientador, Prof. André Luís Marques Marcato, cuja orientação, conhecimento e paciência foram fundamentais para o desenvolvimento desta tese. Sua disponibilidade e apoio incondicional foram essenciais para superar os desafios enfrentados durante esta jornada.

Estendo meus agradecimentos ao meu coorientador, Prof. Eduardo Pestana de Aguiar, por suas valiosas contribuições, dicas e orientação ao longo deste projeto. Sua expertise foi crucial para aprimorar a qualidade desta pesquisa.

Agradeço ao Prof. Fernando Luiz Cyrino Oliveira, da PUC-Rio, pelos valiosos comentários que enriqueceram o resultado final deste trabalho.

Meus agradecimentos ao Dr. José Francisco Moreira Pessanha, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro e Cepel-Rio, por suas dicas e contribuições para o fechamento desta tese.

Expresso minha gratidão ao Prof. João Alberto Passos Filho e ao Prof. Leonardo de Mello Honório, ambos da Universidade Federal de Juiz de Fora, por seu apoio acadêmico, críticas construtivas e valiosos conselhos que ajudaram a guiar este trabalho.

Agradeço também à minha família e amigos, cujo amor, incentivo e confiança foram a força motriz por trás do meu comprometimento e dedicação. Sem o apoio de vocês, esta jornada não seria possível.

A todos vocês, meu sincero obrigado.

“... os cientistas encontram cada vez mais evidências de que somos especificamente projetados pela mãe natureza para nos enganarmos.”

(Nassim Nicholas Taleb, *Iludidos pelo Acaso*, 2019, p.12).

RESUMO

No mercado atacadista de eletricidade do Brasil, os preços dos contratos de longo prazo são estabelecidos por meio de negociações entre geradoras e comercializadoras de energia com consumidores de médio e grande portes. Ao contrário dos mercados convencionais, a determinação dos preços não é regida diretamente pelas forças de mercado, mas sim por modelos computacionais complexos conhecidos como Modelos de Otimização de Despacho Hidrotérmico. Além da programação de despacho de usinas com operação centralizada, esses modelos são responsáveis por calcular o Preço de Liquidação das Diferenças (PLD), que atua como referência para os preços de mercado de curto prazo da eletricidade. O mercado brasileiro é dividido em quatro submercados interligados: Sudeste, Nordeste, Norte e Sul. Este estudo contribui significativamente para a literatura existente ao investigar a multifractalidade de mercados, onde os preços não são formados pela interação entre oferta e demanda, mas sim por modelos computacionais, empregando a Análise de Flutuação Multifractal Detrendida (MFDFDA) em séries temporais de retornos logarítmicos de preços dessazonalizados. O objetivo é caracterizar as propriedades multifractais dos preços da eletricidade, identificar as causas fundamentais dessa multifractalidade e examinar a eficiência do mercado ao longo do tempo. A análise histórica dos preços revelou que todos os submercados exibem um comportamento anti-persistente, também conhecido como reversão à média, além de apresentarem multifractalidade. Este resultado é consistente com observações em mercados financeiros internacionais. Destaca-se que o submercado Sul apresentou o maior nível de multifractalidade e a menor eficiência de mercado, enquanto o submercado Norte registrou os menores índices de multifractalidade e maior eficiência. Utilizando uma técnica de janela deslizante, foram exploradas as variações temporais no expoente de Hurst e na Magnitude de Memória Longa, um indicador da ineficiência de mercado. Observou-se um comportamento anti-persistente uniforme em todos os submercados, com o submercado Sul apresentando maior volatilidade no seu índice de ineficiência. Estas conclusões proporcionam informações relevantes para tomadores de decisão e reguladores que visam promover arranjos de mercado mais eficientes. Além de examinar a multifractalidade no setor elétrico brasileiro, esta pesquisa avança na aplicação da teoria da multifractalidade para validar séries temporais sintéticas produzidas por modelos preditivos. Abordando uma lacuna significativa identificada na literatura, o estudo realça a falta de um método padronizado para a validação de séries sintéticas geradas por modelos estatísticos, redes neurais adversariais generativas e redes neurais probabilísticas. O método proposto recorre à distância de Hausdorff para contrastar os espectros multifractais das séries sintéticas, obtidos via método MFDFDA, com o espectro multifractal da série histórica. Essa metodologia possibilita a distinção de quais séries sintéticas manifestam atributos multifractais similares aos da série real, permitindo a seleção de modelos preditivos que gerem resultados mais precisos e confiáveis.

Palavras-chave: Mercado Brasileiro de Energia Elétrica. Preço de Liquidação de Diferenças. Multifractal Detrended Fluctuation Analysis. Hipótese do Mercado Eficiente. Espectro Multifractal. Multifractal Detrended Cross-Correlation Analysis. Distância de Hausdorff. Validação de Séries Sintéticas.

ABSTRACT

In the Brazilian wholesale electricity market, long-term contract prices are established through negotiations between energy generators and marketers with medium and large consumers. Unlike conventional markets, price determination is not directly governed by market forces but by complex computational models known as Hydrothermal Dispatch Optimization Models. In addition to the centralized operation dispatch programming, these models are responsible for calculating the Short-term Settlement Price (PLD), which serves as a reference for short-term market prices for electricity. The Brazilian market is divided into four interconnected submarkets: Southeast, Northeast, North, and South. This study significantly contributes to the existing literature by investigating the multifractality of markets where prices are not formed by the interaction between supply and demand but by computational models, employing Detrended Multifractal Fluctuation Analysis (MFDFA) on time series of seasonally adjusted price returns. The goal is to characterize the multifractal properties of electricity prices, identify the underlying causes of this multifractality, and examine market efficiency over time. Historical price analysis revealed that all submarkets exhibit anti-persistent behavior, also known as mean reversion, in addition to multifractality. This result is consistent with observations in international financial markets. Notably, the South submarket exhibited the highest level of multifractality and the lowest market efficiency, while the North submarket recorded the lowest levels of multifractality and higher efficiency. Using a sliding window technique, temporal variations in the Hurst exponent and Long-term Memory Magnitude, an indicator of market inefficiency, were explored. Consistent anti-persistent behavior was observed across all submarkets, with the South submarket showing greater volatility in its inefficiency index. These conclusions provide relevant information for decision-makers and regulators aiming to promote more efficient market arrangements. In addition to examining multifractality in the Brazilian electric sector, this research advances the application of multifractality theory to validate synthetic time series produced by predictive models. The study highlights the need for a standardized method to validate synthetic series generated by statistical models and neural networks. The proposed method uses the Hausdorff distance to contrast the multifractal spectra of the synthetic series, obtained via the MFDFA method, with the multifractal spectrum of the historical series. This methodology distinguishes which synthetic series exhibit multifractal attributes similar to those of the observed series, allowing the selection of predictive models that generate more accurate and reliable results.

Keywords: Brazilian Electricity Market. Difference Settlement Price. MFDFA. Efficient Market Hypothesis. Multifractal Spectrum. MFDCCA. Hausdorff Distance. Validation Methods. Energy Time Series Scenarios.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– Número de publicações por ano.	30
Figura 2	– Documentos mais citados globalmente.	31
Figura 3	– Mapa temático.	32
Figura 4	– Exemplos de serie temporal multifractal, monofractal e ruído branco.	47
Figura 5	– Gráficos mostrando a diferença entre uma série temporal persistente, ruído branco ou anti-persistente.	48
Figura 6	– Gráficos mostrando os passos iniciais do algoritmo R/S.	50
Figura 7	– Gráfico $\log - \log$ pelas estatísticas R/S em função da escala. O expoente de Hurst é dado pelo coeficiente angular da linha azul.	51
Figura 8	– Gráficos mostrando os passos iniciais para cálculo do algoritmo DFA.	55
Figura 9	– Submercados que compõem o Mercado Brasileiro de Eletricidade.	73
Figura 10	– Séries históricas de Custo Marginal de Operação por submercado. Os quatro gráficos à esquerda representam os dados históricos horários e, os quatro gráficos à direita representam os dados históricos semanais.	76
Figura 11	– Custo Marginal de Operação do submercado SE entre 01/04/2021 e 31/01/2022, período que mostra os impactos da crise energética.	77
Figura 12	– Gráfico com CMO Negativo. A marca o vermelha representa os valores da energia vertida quando $CMO < 0$. A marca + verde representa a energia vertida turbinável quando $CMO = 0$. A marca x laranja representa energia vertida turbinável quando $0 < CMO \leq 0.5$ A linha azul representa a energia vertida turbinável ao longo do período de análise (2019 a 2022)	79
Figura 13	– Comportamento do CMO ao longo das horas do dia. A curva preta indica a curva média para as horas de um dia útil e a curva vermelha apresenta a curva média para as horas de um final de semana.	83
Figura 14	– Gráficos de densidade espectral de potência para as séries temporais de CMO Horário por submercado. Picos mais intensos próximos às frequências correspondentes a 1 dia (0.04167), 7 dias (0.00595) e 1 ano (0,00011) indicam a presença de ciclo sazonal.	84
Figura 15	– Decomposição da série temporal de CMO Horário. O primeiro gráfico apresenta a série original (linha preta) e a componente de tendência (linha vermelha). O segundo, terceiro e quarto gráficos representam as componentes sazonais 24 horas (linha verde), 168 horas (linha amarela) e 8760 horas (linha laranja). Nos gráficos de componentes sazonais, a linha azul representa o resíduo.	85
Figura 16	– Séries históricas de energia natural afluyente diária para os quatro submercados do SIN.	89
Figura 17	– Séries contendo a média mensal de energia natural afluyente diária, para cada ano do histórico e para cada submercado.	93
Figura 18	– Decomposição das séries históricas diárias de ENA por submercado usando STL com período igual a 365 dias (sazonalidade anual).	94

Figura 19 – Séries históricas de carga, em base horária, para os quatro submercados do SIN. Para melhorar a visualização dos dados, o histórico de 2019 a 2022.	98
Figura 20 – Histograma cumulativo para os dados de carga Horária, para os quatro subsistemas.	100
Figura 21 – Curva de Carga ao longo das 24 horas do dia. A curva preta indica a curva média para as horas de um dia útil e a curva vermelha apresenta a curva média para as horas de um final de semana.	101
Figura 22 – Comportamento da Carga ao longo das 168 horas que compõe uma semana. A curva preta indica a curva média para as horas de um dia útil e a curva vermelha apresenta a curva média para as horas de um final de semana.	102
Figura 23 – Gráficos de densidade espectral de potência para as séries temporais de Carga Horária por submercado. Picos mais intensos próximos às frequências correspondentes a 1 dia (0.04167), 7 dias (0.00595) e 1 ano (0,00011) indicam a presença de ciclo sazonal.	103
Figura 24 – Decomposição da série temporal de Carga Horária. Para o submercado Sudeste, o primeiro gráfico apresenta a série original (linha preta) e a componente de tendência. O segundo, terceiro e quarto gráficos representam as componentes de sazonais de 24 horas (linha verde), 168 horas (linha amarela) e 8760 horas (linha laranja). A linha azul nos gráficos de componentes sazonais representa o resíduo.	104
Figura 25 – Histórico do PLD Horário para cada submercado, iniciando em 01/01/2019 e finalizando em 31/12/2022	106
Figura 26 – Decomposição da série de PLD Horário usando MSTL. No primeiro gráfico a curva preta apresenta a série original e a curva vermelha a componente de tendência. No segundo gráfico as curvas verde, amarela e laranja apresentam as componentes sazonais e a curva azul o resíduo.	111
Figura 27 – Gráficos de densidade espectral de potência para as séries temporais de CMO Horário por submercado. Picos mais intensos próximos às frequências correspondentes a 1 dia (0.04167), 7 dias (0.00595) e 1 ano (0,00011) indicam a presença de ciclo sazonal.	112
Figura 28 – Fluxograma das etapas para analisar séries temporais com MF DFA.	120
Figura 29 – Log da Vazão Natural Afluente Histórica da usina hidrelétrica de Jirau. Força da sazonalidade é dada por 0.9318.	128
Figura 30 – Log da Vazão Natural Afluente Histórica da usina hidrelétrica de Promissão. Força da sazonalidade é dada por 0.7014.	129
Figura 31 – Log da Vazão Natural Afluente Histórica da usina hidrelétrica de Machadinho. Força da sazonalidade é dada por 0.1977.	129

Figura 32 – Série temporal histórica do preço de liquidação de diferenças horário e retorno logarítmico do preço sazonal ajustado. Os gráficos (A1), (B1), (C1) e (D1) representam o PLD Histórico em base horária para o período compreendido entre 2019 e 2022. Os gráficos (A2), (B2), (C2) e (D2) representam as séries de log-retorno para os correspondentes preços à esquerda.	133
Figura 33 – Gráficos MF DFA aplicados ao retorno dos PLDs de cada submercado. A figura apresenta um conjunto de 4 gráficos para cada submercado, mostrando (1) o comportamento de escala das funções de flutuação, (2) o expoente de Hurst generalizado, (3) o expoente de escala ou expoente de <i>Reyni</i> , e (4) o espectro multifractal. No gráfico da função de flutuação (1), cores variando de azul para verde indicam valores de q variando de -5 a +5.	135
Figura 34 – Espectro multifractal ou espectro de singularidade para cada submercado.	139
Figura 35 – Gráficos do expoente de Hurst generalizado (1), expoente de escala (2) e espectro multifractal (3) para cada submercado. Cada um dos gráficos apresentam três curvas que representam as medidas para a série original (azul), série embaralhada (laranja) e a série substituta (verde).	141
Figura 36 – Os gráficos apresentam o comportamento dinâmico do coeficiente de Hurst (H_2) para os quatro submercados usando uma janela de 1500 horas e um passo de 168 horas (1 semana). As duas linhas verticais tracejadas indicam o início e o fim do pior período hidrológico enfrentado pelo Brasil nos últimos 90 anos. O PLD atingiu seu valor máximo em setembro de 2021, voltando ao preço mínimo em fevereiro de 2022. A linha horizontal tracejada representa o valor de H_2 calculado para a série completa, conforme apresentado na Tabela 27.	145
Figura 37 – Os gráficos exibem a evolução do comprimento do espectro multifractal para cada submercado ao longo do período analisado. As duas linhas verticais tracejadas representam o início e o término do pior período hidrológico vivenciado pelo Brasil. A linha horizontal tracejada indica o valor de $\Delta\alpha$ calculado para a série total, conforme apresentado na Tabela 27.	147
Figura 38 – Comparativo entre os valores do CMO e do PLD do submercado SE, para o período de abr/2021 a fev/2022, considerado o pior intervalo hidrológico do Brasil.	148
Figura 39 – Comparação dos log-retornos das séries de CMO e PLD.	149
Figura 40 – Comparativo da análise multifractal entre CMO e PLD, considerando o log dos retornos das séries dessazonalizadas.	150
Figura 41 – Gráfico comparando as séries históricas entre variação logarítmica de ENA e retorno logarítmico de PLD, das séries dessazonalizadas.	153
Figura 42 – Gráfico mostrando as funções de flutuação em função da escala (s) e dos momentos (q) para a análise de correlação cruzada entre a ENA Semanal e o PLD Semanal.	154
Figura 43 – Gráficos dos expoentes de correlação cruzada generalizados, dos coeficientes de escala e do espectro multifractal para a análise de correlação cruzada entre a ENA Semanal e o PLD Semanal, por submercado.	155

Figura 44 – Gráfico exibindo os valores de ρ_{DCCA} para cada submercado.	156
Figura 45 – Gráfico mostrando os valores de ρ_{DCCA} para cada submercado e o intervalo de confiança para os valores críticos.	157
Figura 46 – Gráficos dos testes estatísticos para significância ρ_{DCCA} entre diversos conjuntos de séries temporais.	159
Figura 47 – Gráficos dos testes estatísticos para significância ρ_{DCCA} entre Carga e PLD para dados horários.	160
Figura 48 – Gráficos das séries sintéticas de vazão geradas pelo modelo PAR(p) para cada uma das usinas hidrelétricas.	162
Figura 49 – Gráficos dos RMSE das séries sintéticas de vazão em relação ao valores observado durante o período de testes.	163
Figura 50 – Gráficos com os histogramas da distância de Hausdorff entre cada uma dos 500 espectros multifractais provenientes da aplicação do MF DFA na séries sintéticas e o espectro multifractal proveniente da série histórica.	164
Figura 51 – Gráficos com os espectros multifractais descartados (gráficos da esquerda) e não descartados (gráficos da direita) para cada uma das usinas hidrelétricas. . .	165

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Sumário bibliometria preço de eletricidade no Brasil...	26
Tabela 2 – Sumário bibliometria multifractalidade nos mercados de eletricidade...	27
Tabela 3 – Sumário bibliometria multifractalidade nos mercados de eletricidade...	28
Tabela 4 – Métodos baseados em funções de flutuação para análise correlações de longo alcance e multifractalidade	38
Tabela 5 – Resumo dos coeficientes de Hurst, Mercados de Eletricidade e Artigos	43
Tabela 6 – Intervalos de confiança empíricos para o valor de H estimado através do método Anis-Lloyd corrigido, com $L = 2^N$ amostras (séries temporais) de tamanho $T > 50$	52
Tabela 7 – Tabela 7: Prós e Contras da Análise R/S	53
Tabela 8 – Tabela 8: Prós e Contras da Análise DFA	56
Tabela 9 – Estatísticas descritivas...	80
Tabela 10 – Estatísticas descritivas...	82
Tabela 11 – Coeficiente de Hurst do CMO Horário...	86
Tabela 12 – Multifractalidade do CMO Horário...	87
Tabela 13 – Estatística descritiva da ENA...	90
Tabela 14 – Teste de Dickey-Fuller aumentado para ENA...	92
Tabela 15 – Força das componentes de decomposição da ENA...	95
Tabela 16 – Coeficiente de Hurst do CMO Horário...	96
Tabela 17 – Multifractalidade da ENA Diária...	97
Tabela 18 – Valores horários da carga por submercado...	99
Tabela 19 – Teste de Dickey-Fuller Aumentado...	101
Tabela 20 – Coeficiente de Hurst do CMO Horário...	104
Tabela 21 – Multifractalidade do CMO Horário...	105
Tabela 22 – Estatísticas descritivas preços horários...	108
Tabela 23 – Teste Dickey-Fuller aumentado para o PLD...	109
Tabela 24 – Coeficiente de Hurst do PLD Horário...	112
Tabela 25 – Multifractalidade do PLD Horário...	113
Tabela 26 – Conclusão do capítulo 4...	117
Tabela 27 – Coeficientes de multifractalidade log-retornos...	137
Tabela 28 – Coeficientes de multifractalidade log-retornos do PLD e CMO...	151
Tabela 29 – Tabela apresenta a comparação dos RMSE das séries sintéticas no período de teste, das séries reprovadas, das séries aprovadas em relação à séries histórica para cada uma das usinas.	166

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ACR	Ambiente de Contratação Livre
ACI	Ambiente de Contratação Regulada
ANEEL	Agência Nacional de Energia Elétrica
ANFIS	Adaptive Neuro Fuzzy Inference System
AR	Autoregressive
ARIMA	Autoregressive Integrated Moving Average
CCEE	Câmara de Comercialização de Energia Elétrica
CNN	Convolutional Neural Network
FFA	Firefly Algorithm
FIS	Fuzzy Inference System
GAN	Generative Adversarial Networks
LSTM	Long-Short Term Memory
MA	Moving Average
ONS	Operador Nacional do Sistema
PMO	Programa Mensal de Operação
SARIMA	Seasonal Autoregressive Integrated Moving Average
SMAP	Soil Moisture Accounting Procedure
SIN	Sistema Interligado Nacional
STL	Seasonal Trend Decomposition with Loess
MF DFA	Multifractal Detrended Fluctuation Analysis
MF DCCA	Multifractal Detrended Cross Correlation Analysis
DFA	Detrended Fluctuation Analysis
DCCA	Detrended Cross Correlation Analysis
MME	Ministério de Minas e Energias
DWT	Discrete Wavelet Transformer
CWT	Continuous Wavelet Transformer
EMD	Empirical Mode Decomposition
PARP	Periodic Autoregressive
PLD	Preço de Liquidação de Diferenças
CMO	Custo Marginal de Operação
CMA	Custo Marginal da Água
PDDE	Programação Dinâmica Dual Estocástica
PAR _p	Periodic Autoregressive Model
ENA	Energia Natural Afluente
EAR	Energia Armanazenada
R/S	Rescaled Range
fGn	Fractional Gaussian Noise
fBm	Fractional Brownian Motion
MRW	Multifractal Random Walk

SUMÁRIO

1	Introdução	19
2	Revisão Bibliográfica	25
2.1	Análise Bibliométrica	25
2.1.1	Preço de Eletricidade no Mercado Atacadista do Brasil	25
2.1.2	Análise Multifractal dos Mercados de Eletricidade	27
2.2	Mercado Brasileiro de Eletricidade	32
2.2.1	Preços à vista de eletricidade no Brasil	34
2.3	Multifractalidade de Séries Temporais	35
2.4	Comportamento fractal e multifractal dos mercados de eletricidade	39
3	Referencial Teórico	46
3.1	Memória de Séries Temporais e o Expoente de Hurst	47
3.1.1	Rescaled Range (R/S)	48
3.1.2	Expoente de Hurst Variável no Tempo	53
3.1.3	Detrended Fluctuation Analysis - DFA	54
3.1.4	Detrended Cross-Correlation Analysis (DCCA)	56
3.1.5	DCCA Test	57
3.2	Multifractalidade	59
3.2.1	Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MFDFA)	59
3.2.2	Multifractal Detrended Crosscorrelation Analysis (MFDCCA)	62
3.2.3	Fontes de multifractalidade	65
3.2.4	Fontes de Multifractalidade Aparente	66
<i>3.2.4.1</i>	Tamanho da Amostra	67
<i>3.2.4.2</i>	Componentes Sazonais	67
3.2.5	Métricas de Grau de Multifractalidade e a Eficiência do Mercado	68
3.3	Decomposição de Séries temporais	70
3.3.1	Seasonal and Trend Decomposition with Loess - STL	70
3.3.2	Medindo a Força da Tendência e Sazonalidade	71
4	Dados	72
4.1	Introdução	72
4.2	Custo Marginal de Operação	74
4.2.1	Fatos Estilizados	77
<i>4.2.1.1</i>	Picos ou <i>Spikes</i>	77
<i>4.2.1.1.1</i>	Custo Marginal Negativo	78
<i>4.2.1.2</i>	Distribuição dos Valores	79
<i>4.2.1.3</i>	Estacionariedade	81
<i>4.2.1.4</i>	Sazonalidade	82
<i>4.2.1.5</i>	Reversão para a média	85
<i>4.2.1.6</i>	Multifractalidade	87
4.3	Energia Natural Afluente	88

4.3.1	Distribuição dos Valores	89
4.3.2	Estacionariedade	91
4.3.3	Sazonalidade	92
4.3.4	Reversão para a Média	95
4.3.5	Multifractalidade	96
4.4	Curva de Carga	97
4.4.1	Distribuição dos Valores	98
4.4.2	Estacionariedade	100
4.4.3	Sazonalidade	101
4.4.4	Reversão para a média	104
4.4.5	Multifractalidade	105
4.5	Preço de Liquidação de Diferenças Horário	105
4.5.1	Distribuição de Valores	107
4.5.2	Estacionariedade	109
4.5.3	Sazonalidade	110
4.5.4	Reversão para a Média	112
4.5.5	Multifractalidade	113
4.6	Comparação do PLD com o CMO	113
4.7	Conclusão	115
5	Metodologia	119
5.1	Avaliação da Multifractalidade do Mercado Brasileiro de Eletricidade	119
5.1.1	Preprocessamento	120
5.1.2	Análise do Tipo de Série: Ruído ou Passeio Aleatório	122
5.1.3	Aplicação do MFDFA	122
5.1.4	Origens da Multifractalidade	123
5.1.5	Análise por Janela Deslizante	124
5.2	Validação de Séries Sintéticas	126
5.2.1	Distância de Hausdorff	126
5.2.2	Modelo PAR(p)	126
5.2.3	Dados	128
5.2.4	O Algoritmo	129
6	Resultados	132
6.1	Análise Multifractal dos Retornos Horários no Mercado Brasileiro de Eletricidade	132
6.1.1	Pré-processamento	132
6.1.2	MFDFA	134
6.1.2.1	Análise das funções de flutuação	134
6.1.3	Expoente de Hurst Generalizado	135
6.1.4	Espectro de Singularidade ou Espectro Multifractal	137
6.1.5	Origens da multifractalidade	139
6.1.6	Análise variável no tempo	143

6.1.7	Impacto dos Preços Mínimo e Tetos	148
6.2	Análise Multifractal usando Correlações Cruzadas (MFDCCA)	151
6.2.1	ENA x PLD Semanal	152
<i>6.2.1.1</i>	Testes Estatísticos	155
6.3	Multifractalidade como validador de séries sintéticas	160
6.4	Conclusão	166
7	Conclusões e Trabalhos Futuros	170
A	Artigo Publicado	175
A.1	Abstract	175
A.2	Artigo	175
	REFERÊNCIAS	195

1 Introdução

O mercado de eletricidade brasileiro consiste em dois ambientes comerciais: (i) o ambiente de contratação regulado (ACR) e o ambiente de contratação livre (ACL). No ACR, os distribuidores compram eletricidade por meio de leilões públicos para atender às demandas de seus consumidores cativos. Contratos de longo prazo e estruturas de preços fixos regem esse processo. Por outro lado, o ACL permite que produtores e grandes consumidores negociem os termos de seus contratos de fornecimento, onde os preços são influenciados por fatores como oferta e demanda, custo de produção e avaliação de riscos. A Câmara de Comercialização de Energia Elétrica (CCEE) realiza a liquidação mensal das transações dos agentes no mercado de curto prazo (ou mercado à vista). A câmara calcula a diferença entre o que foi produzido ou consumido e o que foi inicialmente contratado (compra x venda). Essas diferenças, ou desequilíbrios, são reconciliadas no Preço de Liquidação das Diferenças (PLD). O PLD é usado para precificar o balanço contratual dos agentes, garantindo o equilíbrio entre oferta e demanda, sendo muitas vezes chamado de preço de curto prazo. Sua natureza dinâmica oferece percepções valiosas sobre a eficiência e dinâmica operacional do mercado de eletricidade brasileiro, posicionando-o como um elemento importante na análise de mercado.

Por mais de 20 anos, o preço de curto prazo foi estabelecido semanalmente por modelos computacionais sofisticados que consideravam informações técnicas fornecidas pelo Operador Nacional do Sistema Elétrico (ONS). Ao contrário da maioria dos outros países, o modelo brasileiro é do tipo "tight-pool", onde o PLD é determinado pelo Custo Marginal Operacional (CMO) sem exigir lances de geradores. O CMO é calculado a partir de uma cadeia complexa de modelos de otimização de despacho hidrotérmico, que visam minimizar o custo operacional total esperado, considerando uma série de restrições, conforme descrito por [1]. O PLD é calculado para cada submercado (Norte, Nordeste, Sul e Sudeste) e nível de carga, estando sujeito a um preço máximo e mínimo, que a agência reguladora define anualmente e aplica a cada período de liquidação. Uma vez que o PLD era calculado antecipadamente (uma semana antes), os dados de entrada dos modelos eram baseados em previsões disponíveis antes da operação real do sistema. Essas previsões incluíam valores como as disponibilidades de geração declaradas e as demandas antecipadas para cada submercado, detalhadas por [2] e [3].

Em janeiro de 2021, o Brasil implementou oficialmente o sistema de precificação horária, calculado um dia antes (day-ahead) para cada uma das 24 horas do dia seguinte. Essa transição significativa foi viabilizada por intensas discussões técnicas entre entidades e agentes do mercado em 2017. O modelo DESSEM foi escolhido como o modelo oficial para calcular o despacho de usinas hidrotérmicas, considerando restrições de rede de curto prazo para sistemas de grande escala com restrições hidrelétricas, térmicas e de rede muito detalhadas, conforme descrito em [4]. De abril de 2018 a dezembro de 2020, uma operação sombra foi implementada para visualizar os possíveis impactos do novo sistema de precificação horária no mercado. Esse período significativo de teste permitiu que o ONS, CCEE e agentes do mercado testassem o novo modelo em tempo real. Além disso, essa fase possibilitou avaliar o impacto na formação de preços de curto prazo e

propor vários ajustes na metodologia de cálculo.

Apesar do aperfeiçoamento progressivo do sistema de precificação no setor de eletricidade brasileiro, a relação entre o preço e a cadeia de modelos continua a gerar muitas discussões. Em 2019, o Ministério de Minas e Energia (MME) estabeleceu um Grupo de Trabalho para desenvolver propostas de modernização do setor elétrico brasileiro. Entre os vários tópicos abordados, o subgrupo responsável pelo tema "Mecanismos de Formação de Preços" explorou a literatura existente e experiências internacionais para buscar alternativas ao modelo de precificação atualmente em vigor no Brasil, conforme relatado em [3]. No entanto, implementar uma mudança de mercado tão significativa requer um entendimento profundo das dinâmicas dos preços à vista de eletricidade no Brasil.

As séries temporais do preço da eletricidade apresentam vários fatos estilizados, incluindo sazonalidade, reversão à média, picos de preço e multifractalidade. A sazonalidade nos preços é uma característica dos dados intrínseca em alguns mercados, onde o preço pode variar de acordo com as horas do dia, dias da semana e estações do ano (por exemplo, países europeus apresentam preços mais altos no inverno quando comparados ao verão devido ao uso de recursos energéticos para aquecimento). Reversão à média ou anti-persistência é uma característica dos preços à vista em alguns países, onde movimentos ascendentes (descendentes) têm maior probabilidade de serem seguidos por movimentos de preço descendentes (ascendentes). Quando movimentos ascendentes e descendentes têm maior probabilidade de serem seguidos pelo mesmo tipo de movimento, essas séries apresentam persistência ou memória longa. O tipo de persistência em uma série temporal pode ser caracterizado pelo coeficiente de Hurst (H_2) que mede se uma série é aleatória ou não apresenta correlação temporal ($H_2 = 0.5$), anti-persistente ($0.0 < H_2 < 0.5$) ou persistente ($0.5 < H_2 < 1.0$). Picos de preço são uma das principais características dos preços à vista de eletricidade em vários mercados ao redor do mundo, caracterizados por um aumento substancial e queda de preço em um curto período, [5]. Muitos estudos relacionam picos de preço ao fato de que a eletricidade é uma mercadoria não armazenável, implicando características mais complexas do que outros mercados.

A multifractalidade em séries temporais é reconhecida por uma distribuição complexa e heterogênea de comportamentos auto-similares, ou fractais, manifestados em diversas escalas. Esta heterogeneidade multifractal traduz-se em vários graus de regularidade e irregularidade emergindo em diferentes segmentos da mesma série temporal, refletindo a presença de múltiplos expoentes de escala. A análise multifractal tem sido usada para decodificar as complexidades inerentes às escalas em sistemas dinâmicos desequilibrados. Tais sistemas abrangem uma ampla gama de domínios, incluindo, mas não se limitando a, campos biológicos, geológicos e hidrológicos, bem como vários mercados econômicos, como mercados financeiros, mercados de commodities, mercados de cripto-moedas e mercados de eletricidade. Em contraste com a análise monofractal, a análise multifractal requer a consideração de múltiplos expoentes de escala para capturar de forma abrangente os comportamentos latentes em um sistema dinâmico, conforme revelado por sua série temporal. Na literatura, uma revisão desta metodologia aplicada aos mercados financeiros e de eletricidade pode ser encontrada em [6].

Dentre os vários métodos usados para análise multifractal de séries temporais, a Análise Multifractal de Flutuações Detrendidas (MF DFA, sigla em inglês para *Multifractal Detrended Fluctuation Analysis*) se destaca, [7]. O MF DFA é uma técnica estatística sofisticada, porém fácil de implementar, usada para analisar o comportamento de escala de séries temporais não estacionárias. O objetivo é revelar e entender padrões complexos geralmente ocultos nesses conjuntos de dados. Com este método, é possível calcular os expoentes generalizados de Hurst (H_q) e o espectro de singularidade, que revelam a multifractalidade da série. A existência de múltiplos expoentes de Hurst e uma forma mais ampla e assimétrica do espectro de singularidade indicam que a série temporal é multifractal, mostrando uma complexidade subjacente que inclui múltiplos regimes de correlação e heterogeneidade intrínseca.

Vários estudos estabelecem uma correlação significativa entre multifractalidade e a teoria do mercado eficiente. Um grau mais elevado de multifractalidade nos retornos de preços de mercado indica uma ineficiência mais significativa nesse mercado. Quando avaliados através de uma técnica de janela deslizante, os indicadores associados à eficiência (ou ineficiência) do mercado fornecem um meio eficaz de quantificar a influência de eventos externos na eficiência do mercado. Tal abordagem permite um monitoramento contínuo das mudanças na eficiência do mercado ao longo do tempo, em vez de uma análise pontual baseada em períodos fixos, possibilitando uma melhor compreensão do comportamento dinâmico dos mercados.

Através de pesquisas em bases de dados acadêmicos, como Scopus e Web of Science, não foram encontrados estudos que investigassem a multifractalidade do preço spot de eletricidade no Brasil. Esse hiato na literatura sugere que essa característica específica do mercado brasileiro ainda não foi suficientemente explorada, representando uma oportunidade significativa para novas pesquisas e contribuições nesse campo de estudo. Dois trabalhos que se aproximaram de tópicos relacionados ao setor elétrico brasileiro empregaram conceitos de auto-similaridade: um para analisar as vazões afluentes das usinas hidrelétricas no Rio São Francisco [8] e outro para examinar os níveis de água de treze rios brasileiros [9]. Esta lacuna na literatura pode ser parcialmente justificada pelo tamanho reduzido da série de preços semanais, que só ultrapassou a marca de mil observações em 2021. O tamanho limitado da amostra pode apresentar um desafio, pois, dependendo do tipo de análise aplicada, amostras pequenas podem levar a conclusões imprecisas devido à insuficiência de significância estatística dos dados. Portanto, é essencial considerar as limitações impostas pelo tamanho da amostra na interpretação dos resultados da análise.

A pesquisa conduzida neste trabalho propõe analisar a dinâmica das séries de preço spot no Brasil sob a perspectiva da teoria da multifractalidade. Quando um processo estocástico é identificado por um único expoente de escala (como o coeficiente de Hurst), esse processo é denominado monofractal ou simplesmente fractal. Contudo, quando mais de um expoente de escala é necessário para descrever a dinâmica do processo estocástico, este é classificado como multifractal. Além de avaliar o impacto da sazonalidade e dos picos de preços na multifractalidade do processo, essa metodologia permite determinar se as propriedades multifractais estão associadas à distribuição não Gaussianas (cauda longa) dos dados, à correlação de longo alcance

presente nas séries ou a ambas. Dessa forma, é possível mapear a complexidade de uma série temporal devido aos diversos coeficientes de escala requeridos para caracterizar sua dinâmica.

O estudo foi dividido em duas fases: (i) análise com dados semanais e (ii) análise com dados horários. Na primeira fase, as análises foram realizadas considerando os preços semanais estabelecidos no período de 07/2001 a 12/2022. A abordagem multifractal pode ter limitações com um volume menor de dados (cerca de 1100), mas se beneficia ao avaliar o mercado brasileiro com preços a longo prazo (mais de 20 anos de registros), que possui uma rica gama de eventos que impactaram a dinâmica e complexidade do PLD. Durante esse período, o PLD foi influenciado por variados eventos com distintos efeitos sobre a formação de preços, incluindo: racionamento de energia; escassez de gás natural; alterações metodológicas nos modelos de preço; intervenções governamentais no mercado através da imposição de limites ao CMO; pandemia da COVID-19; e o desafiador cenário hidrológico vivenciado pelo mercado em 2021/2022. A multifractalidade observada no mercado brasileiro com dados semanais foi classificada como aparente, requerendo análises adicionais em conjuntos de dados com menor granularidade, como os horários, mesmo que em períodos distintos. Esta fase resultou em um artigo, cuja relevância foi comprovada pela aprovação do artigo *Multifractal Analysis of the Brazilian Electricity Market* para publicação no IEEE Access em setembro de 2023, incluso no Apêndice A.

Na segunda etapa do trabalho, as análises da primeira fase foram aprofundadas, considerando o histórico de preços de liquidação de diferenças em base horária. O MF DFA foi empregado para investigar a multifractalidade do mercado de eletricidade brasileiro por meio das séries de log-retorno sobre preços dessazonalizados. Dessa forma, estabeleceu-se uma conexão direta entre as análises das duas etapas, já que os resultados obtidos com os dados horários foram utilizados para corroborar a multifractalidade aparente identificada nos dados semanais, atribuída ao tamanho reduzido da amostra. Adicionalmente, examinaram-se as relações cruzadas entre o PLD e variáveis cruciais para a formação de preços, tais como Energia Natural Afluente (ENA), Energia Armazenada (EAR) e Demanda por Energia Elétrica (Carga). Esses estudos basearam-se na Análise Multifractal de Correlações Cruzadas Detrendidas (MF DCCA, sigla em inglês para *Multifractal Detrended Cross-Correlation Analysis*) e a robustez dos resultados foi assegurada através de testes estatísticos. Este trabalho apresenta uma contribuição pioneira para a literatura sobre multifractalidade e eficiência dos mercados de eletricidade, ao analisar a multifractalidade em um contexto inovador - um mercado onde os preços são gerados a partir de modelos matemáticos e não apenas determinados pelas convencionais forças de oferta e demanda. Esta pesquisa proporciona uma perspectiva única e fornece informações valiosas sobre a dinâmica de preços em um contexto de mercado menos tradicional.

Além da análise multifractal do setor elétrico brasileiro, esta Tese explora a aplicação da teoria da multifractalidade ao processo de validação de séries sintéticas geradas por modelos de previsão. A pesquisa aborda uma lacuna na literatura acadêmica, destacando a ausência de um método consolidado para a validação da existência de multifractalidade em séries sintéticas criadas por Modelos Estatísticos, Redes Neurais Adversariais Generativas (GANs) e Redes Neurais Probabilísticas baseada em séries históricas com características multifractais, [10].

No método proposto, a distância de Hausdorff é adotada como uma ferramenta analítica para comparar os espectros multifractais. Esses espectros são obtidos pela aplicação do método MFDFA nas séries sintéticas, sendo posteriormente confrontados com o espectro multifractal da série histórica correspondente. Esta abordagem permite identificar quais séries sintéticas exibem características multifractais mais próximas daquelas observadas na série temporal real, facilitando, assim, a seleção de modelos de previsão que produzam saídas mais realistas e verossímeis.

O documento está estruturado da seguinte maneira:

- No capítulo 2, é apresentada uma revisão bibliográfica que engloba (i) o mercado de eletricidade no Brasil, (ii) estudos sobre avaliação de preço spot no Brasil e (iii) multifractalidade nos mercados de eletricidade. Uma análise bibliométrica é realizada para destacar a relevância do tema.
- No capítulo 3, o referencial teórico necessário para o desenvolvimento da Tese foi apresentado. O conceito de memória longa é introduzido através do método Rescaled Range, do método Análise das Flutuações Detrendidas (DFA, do inglês *Detrended Fluctuation Analysis*) e do método Análise de Correlações Cruzadas Detrendidas (DCCA), utilizado para calcular e testar a significância do coeficiente de correlação cruzada entre duas séries. Posteriormente, a multifractalidade e as distinções entre um processo monofractal e um multifractal são discutidas. O algoritmo MFDFA e MFDCCA, seus procedimentos e etapas necessárias para implementações e aplicações, são detalhados. As duas fontes de multifractalidade são debatidas, assim como dois métodos amplamente usados para identificar tais fontes. Além disso, a relação entre multifractalidade e a teoria do mercado eficiente é explorada. Finalmente, o algoritmo STL (Seasonal and Trend Decomposition with Loess) e sua versão MSTL são abordados, enfatizando a importância da decomposição de séries temporais para a dessazonalização.
- No capítulo 4, os dados referentes ao PLD horário, CMO Horário, Curva de Carga Horária e ENA diária são apresentados. Aspectos cruciais para a análise multifractal são detalhados. Ao término do capítulo, um resumo com os principais resultados de cada conjunto de dados é fornecido.
- O Capítulo 5 apresenta a metodologia empregada para a análise da multifractalidade no mercado brasileiro de eletricidade e a metodologia proposta para validação de séries sintéticas provenientes de modelos de previsão.
- No capítulo 6, os resultados da aplicação da metodologia sobre o conjunto de dados de PLD horário são revelados, destacando sua multifractalidade e comportamento dinâmico. A multifractalidade do PLD em comparação com o CMO é explorada. A correlação cruzada entre as séries de PLD e outras séries como carga, ENA e EAR foi explorada através do método MFDCCA. A última Seção apresenta os resultados obtidos a partir da aplicação da metodologia proposta para validação de séries sintéticas provenientes

de modelos de previsão. As séries sintéticas foram geradas utilizando o modelo PAR(p) (Modelo Autoregressivo Periódico de Ordem p) amplamente utilizado no setor elétrico em séries de hidrológicas (vazões) e de energias (ENA).

- O capítulo 7 oferece as conclusões do estudo e sugere direções para pesquisas futuras.

2 Revisão Bibliográfica

2.1 Análise Bibliométrica

A bibliometria é uma área de estudo que aplica métodos matemáticos e estatísticos para analisar e quantificar processos de produção, disseminação e uso de informações, especialmente padrões de autoria, publicação e citação em fontes de literatura acadêmica e científica. A metodologia visa a identificação, rastreamento e análise de padrões dentro de conjuntos de dados bibliográficos, fornecendo informações importantes para pesquisadores, bibliotecários, acadêmicos e tomadores de decisão.

Os estudos bibliométricos têm se mostrado ferramentas essenciais para avaliar o impacto da pesquisa, mapear o desenvolvimento de disciplinas específicas ao longo do tempo e identificar tendências emergentes em campos científicos. Por exemplo, uma análise bibliométrica pode revelar quais autores ou instituições são mais produtivos em uma área particular, quais tópicos estão ganhando ou perdendo popularidade e como as redes de colaboração estão evoluindo.

As bases de dados eletrônicas, como Scopus e Web of Science, têm facilitado a coleta, análise e visualização de grandes volumes de dados bibliográficos, contribuindo para a produção e publicação de artigos bibliométricos em variadas áreas do conhecimento científico.

Nesta seção, serão apresentados os resultados de duas pesquisas por artigos que servem como referência para o tema deste estudo: Multifractalidade e Mercados de Eletricidade. A primeira pesquisa enfocou artigos sobre preço no mercado brasileiro de eletricidade. Dado o reduzido número de artigos encontrados, não se realizou uma análise mais detalhada, optando-se por apenas mencionar as referências identificadas.

A segunda pesquisa abordou temas como multifractalidade e mercados de eletricidade. Os resultados obtidos possibilitaram uma análise mais detalhada, utilizando recursos da bibliometria para avaliar, por exemplo a relevância do tema.

2.1.1 Preço de Eletricidade no Mercado Atacadista do Brasil

A pesquisa na base de publicações Scopus, utilizando o termo TITLE-ABS-KEY (electricity AND brazilian AND price) AND TITLE-ABS-KEY (weekly OR hourly OR spot) AND (LIMIT-TO (DOCTYPE, "ar")) AND (LIMIT-TO (LANGUAGE, "English")), revelou um número limitado de estudos sobre o preço spot no mercado brasileiro de eletricidade ao longo dos últimos 20 anos. A busca resultou em 20 publicações, conforme sumarizado na tabela 1.¹

¹ A pesquisa foi realizada nas bases Scopus e Web of Science, porém os resultados da segunda eram um subconjunto da primeira. Desta forma, somente os resultados da pesquisa Scopus foram considerados nesta seção.

Tabela 1: Sumário dos artigos encontrados sobre preço de eletricidade no mercado brasileiro.

Assunto	Título	Ano
Spot and Forward Prices	Analysis of the dynamics of the Brazilian forward market of electricity.	2012
	Trading forward in the Brazilian electricity market.	2013
	Cointegration to estimate long-term electricity prices in periods of rationing: The case of the Brazilian hydrothermal system	2015
	Considering Forward Electricity Prices for a Hydro Power Plant Risk Analysis in the Brazilian Electricit.	2023
	Analysis of hourly price granularity implementation in the Brazilian deregulated electricity contracting environment.	2023
Bioeletricidade	Opportunity costs for bioelectricity sales in Brazilian sucro-energetic industries.	2012
	Risk-conscious optimization model to support bioenergy investments in the Brazilian sugarcane industry.	2020
Renewable	Risk-averse portfolio selection of renewable electricity generator investments in Brazil: An optimised multi-market commercialisation strategy.	2016
	Wind farm generation forecast and optimal maintenance schedule model.	2019
	Economic evaluation of wind power projects in a mix of free and regulated market environments in Brazil.	2021
	Financial risk control of hydro generation systems through market intelligence and stochastic optimization.	2021
	Estimating the adequacy revenue considering long-term reliability in a renewable power system.	2022
	A soft robust methodology to devise hedging strategies in renewable energy trading based on electricity options.	2022
Options Pricing	The impact of hourly pricing for renewable generation projects in Brazil.	2022
	A primer on the pricing of electric energy options in Brazil via mean-reverting stochastic processes.	2019
Gerenciamento da Demanda	Distribution charges for consumers and microgeneration considering load elasticity sensitivity	2012
	A new proposal for demand response program and its impacts on the spot price in the Brazilian electricity market.	2015
	A comprehensive analysis of the Demand Response Program proposed in Brazil based on the Tariff Flags mechanism.	2017
	Labview development for an intelligent management system of the electrical energy free market.	2019
Market Design	The stochastic effects on the Brazilian Electrical Sector.	2015

Dos 20 trabalhos encontrados, cinco abordaram questões sobre o mercado spot e a termo de eletricidade no Brasil ou propuseram modelos de previsão; dois trataram da bioeletricidade proveniente do aproveitamento do bagaço de cana; sete outros trataram de diversos temas relativos às fontes renováveis (solar e eólica); um usou o processo estocástico de reversão para a

média para modelar o preço de opções sobre contratos de energia elétrica; quatro abordaram temas ligados ao gerenciamento da demanda; e , por último, um descreveu o impacto da estocasticidade no mercado de eletricidade.

Dois artigos haviam sido excluídos da pesquisa após a aplicação dos filtros de tipo de documento e idioma, uma vez que foram apresentados em conferências. Porém, devido ao pequeno número de publicações sobre o tema, foi considerado relevante incluí-los novamente na pesquisa: [11] e [12].

A seção 2.2 apresenta a revisão de cada um dos artigos referenciados nesta pesquisa e alguns outros que foram considerados relevante para o trabalho.

2.1.2 Análise Multifractal dos Mercados de Eletricidade

A identificação de trabalhos referência na literatura mundial foi feita através de uma pesquisa na base *Web of Science*, uma das principais bases globais de publicações acadêmicas. Esta pesquisa envolveu busca por palavras-chave que relacionam o trabalho a outros trabalhos sobre o mesmo tema (multifractalidade e o mercado de eletricidade). Além de ser uma das principais bases, *Web of Science* propicia salvar os artigos citados em cada uma das publicações encontradas, permitindo análises mais profundas.²

A pesquisa foi realizada em 16 de maio de 2023, e iniciou-se com o uso de palavras-chave para identificar trabalhos sobre multifractalidade, conforme ilustrado na linha *First search terms* da tabela 2. A primeira busca resultou em mais de 100 mil publicações, destacando desenvolvimento teórico sobre multifractalidade e suas aplicações em diversas áreas do conhecimento. A sequência subsequente de termos focalizou trabalhos que empregam multifractalidade no setor elétrico, mais especificamente, aqueles que exploram multifractalidade e memória longa em séries temporais de preço de eletricidade, como demonstrado na linha *Second search terms* da tabela 2. A combinação da segunda sequência de termos com o operador lógico **AND** resultou em 92 publicações. Por fim, os resultados foram filtrados para incluir apenas publicações do tipo *artigo* ou *revisões* em língua inglesa, reduzindo a lista para 74 documentos.

Tabela 2: Sumário dos passos necessários para busca de artigos e filtros utilizados.

Tópico	Resultado
Database:	Web of Science
Date of collection:	May 16, 2023
Search applied to:	Topics

[Continua na próxima página](#)

² Nesta pesquisa, também foi utilizada a base Scopus, porém a mesma apresentou um subconjunto dos artigos encontrados na Web of Science. Desta forma, os resultados da Scopus não foram apresentados nesta seção.

Tabela 2: Sumário dos passos necessários para busca de artigos e filtros utilizados. (Continuação)

Tópico	Resultado
First search terms:	*fractal* OR "self affin*" OR "long memor*" OR "long range dependen*" OR "hurst exponent*" OR "holder exponent" OR "scaling exponent"
First result:	111,714 publications
Second search terms:	"electricity market" OR "electricity pric*" OR "electricity spot" OR "power market" OR "power pric"
Second result:	92 publications
Filters applied:	Article language OR Review Article English writing only
Final Results:	74 publications

Realizou-se uma análise bibliométrica dos dados usando o ambiente de desenvolvimento integrado RStudio (versão 2022.12.0+353), a linguagem de programação R (versão 4.2.2 (2022-10-31)), juntamente com o aplicativo *Biblioshiny* que acompanha o pacote *Bibliometrix* (versão 4.1.2). Esse aplicativo, de código aberto, é recomendado para mapeamentos científicos, conforme citado por [13], e é reconhecido como uma das ferramentas mais abrangentes em pesquisas relacionadas à bibliometria e cientometria, apresentando interface intuitiva e vasta gama de funcionalidades, análises e gráficos.

A tabela 3 apresenta um sumário dos principais resultados da pesquisa na base *Web of Science*, já trabalhados pelo *Bibliometrix*. O período de busca compreende o intervalo entre 2003 e 2023, de forma a capturar os trabalhos que utilizaram técnicas multifractais para analisar os mercados de eletricidade. Foram encontrados 74 artigos provenientes de 37 fontes (artigos provenientes de jornais e capítulos de livros, etc).

Tabela 3: Sumário das principais informações obtidas através da busca na base *Web of Science* sobre multifractalidade nos mercados de eletricidade.

Descrição	Resultados
Principais informações sobre os dados	
Timespan	2003-2023
Sources (Journals, Books, ect)	37
Documents	74
Annual Growth Rate %	3.53
Document Average Age	8.07
Average citations per doc	20.39
References	2408
Conteúdo dos Documentos	

[Continua na próxima página](#)

Tabela 3: Sumário das principais informações obtidas através da busca na base Web of Science sobre multifractalidade nos mercados de eletricidade. (Continuação)

Descrição	Resultados
Keyword Plus (ID)	238
Author's Keyword (DE)	305
Autores	
Authors	172
Authors of single-authored docs	10
Colaboração dos Autores	
Single-authored docs	10
Co-Authors per Doc	2.76
International co-authorships %	36.49
Tipos de Documentos	
Article	68
Article; Early Access	1
Article; Proceedings Paper	4
Review	1

O gráfico da Figura 1 mostra a produção anual. Os anos de 2013 e 2018 tiveram as maiores quantidades de publicações, com 9 e 8 respectivamente. O período de 2003 a 2022 não revela nenhuma tendência significativa. [14] representa o primeiro artigo identificado pela pesquisa, publicado em 2003. Este estudo aplicou o método *Average Wavelet Coefficient* (AWC) aos dados do Mercado Spot de Eletricidade Nórdico de 1992 a 2000. Concluiu-se que os preços spot horários são descritos por um processo anti-persistente (reversão para a média) com um coeficiente de Hurst de 0.41. Identificou a existência de múltiplos coeficientes de Hurst, o que levou os pesquisadores a avaliar o mercado Nórdico usando métodos que estimem vários expoentes, como a transformada de ondeleta contínua. Em escalas menores que 1 dia, o preço segue um processo persistente com $H > 0.5$, enquanto a anti-persistência é observada em escalas maiores que 1 dia ³.

O gráfico da Figura 2 exibe o ranking dos artigos mais citados na literatura global. Tal classificação pode ser determinada pelo número total de citações ou pelo número de citações por ano. O artigo com a maior quantidade de citações foi [15], acumulando um total de 157 citações. Esse estudo introduziu extensões periódicas de modelos dinâmicos de regressão de memória longa com erros heterocedásticos condicionais autorregressivos na análise dos preços spot diários de eletricidade em quatro mercados energéticos europeus: NordPool, EEX Alemanha, PowerNext França e APX Holanda. [16] obteve a segunda posição com 132 citações; os pesquisadores

³ No Capítulo 3 serão apresentados conceitos como memória longa e coeficiente de Hurst

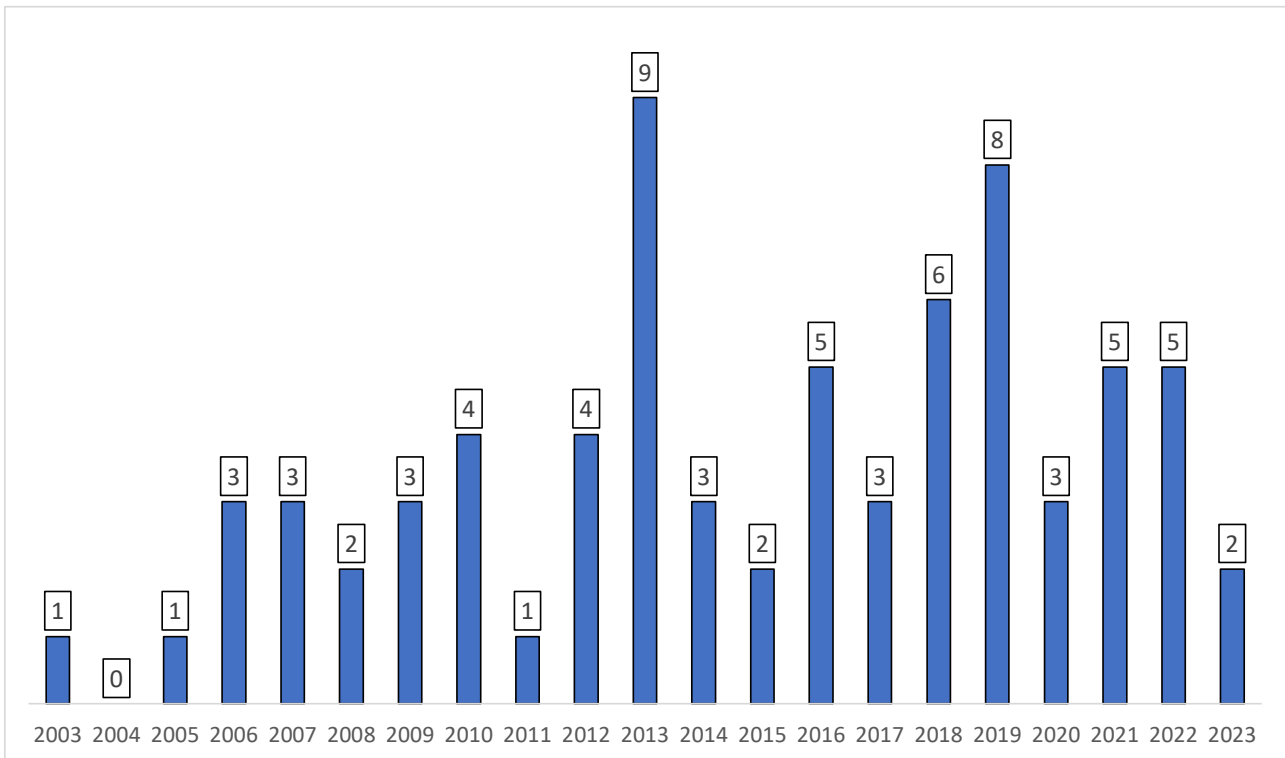


Figura 1 – Número de publicações por ano.

propuseram um modelo de mudança de regime que mantém as características de memória longa em cada estado de regime. Esse modelo foi empregado em dados do mercado spot de energia elétrica Nórdico, que evidenciava elevado grau de memória longa, demonstrando que a transição de regime e a memória longa são pertinentes para coexistir. O artigo [14] ocupou a quarta posição com 78 citações. [15] e [14] mantiveram-se proeminentes quando as citações foram avaliadas considerando apenas os artigos da amostra, posicionando-se em primeiro e segundo lugares, respectivamente.

Os dois artigos mais citados dentre as 74 publicações obtidas da pesquisa foram [17] e [7], que introduziram os métodos Análise de Flutuações Detrendidas (Detrended Fluctuation Analysis - DFA) e Análise Multifractal de Flutuações Detrendidas (Multifractal Detrended Fluctuation Analysis - MFDFA), respectivamente. Esses dois métodos permanecem como as principais referências para estudos sobre características monofractais e multifractais de séries temporais em diversas áreas do conhecimento. Era esperado que artigos introduzindo metodologias para a estimação de multifractalidade estivessem entre os mais citados. Até a publicação de [7], a principal metodologia para calcular a multifractalidade era baseada no algoritmo *Wavelet Transform Modulus Maxima* ([18], [19], [20], [21]). Contudo, este método possuía um alto custo de implementação, e poucos estudos foram publicados usando tal metodologia. Isso pode explicar por que não foi listado entre os 50 mais citados ([18] na posição 76, [19] na posição 317, [20] e [21] não foram citados). [22] é um artigo que apresentou o método de Análise de Correlação Cruzada Detrendida (Detrended Cross-Correlation Analysis - DCCA) para investigar correlações cruzadas de lei de potência entre diferentes séries temporais registradas simultaneamente na presença de não estacionariedade. Diversos estudos utilizaram variações deste método para

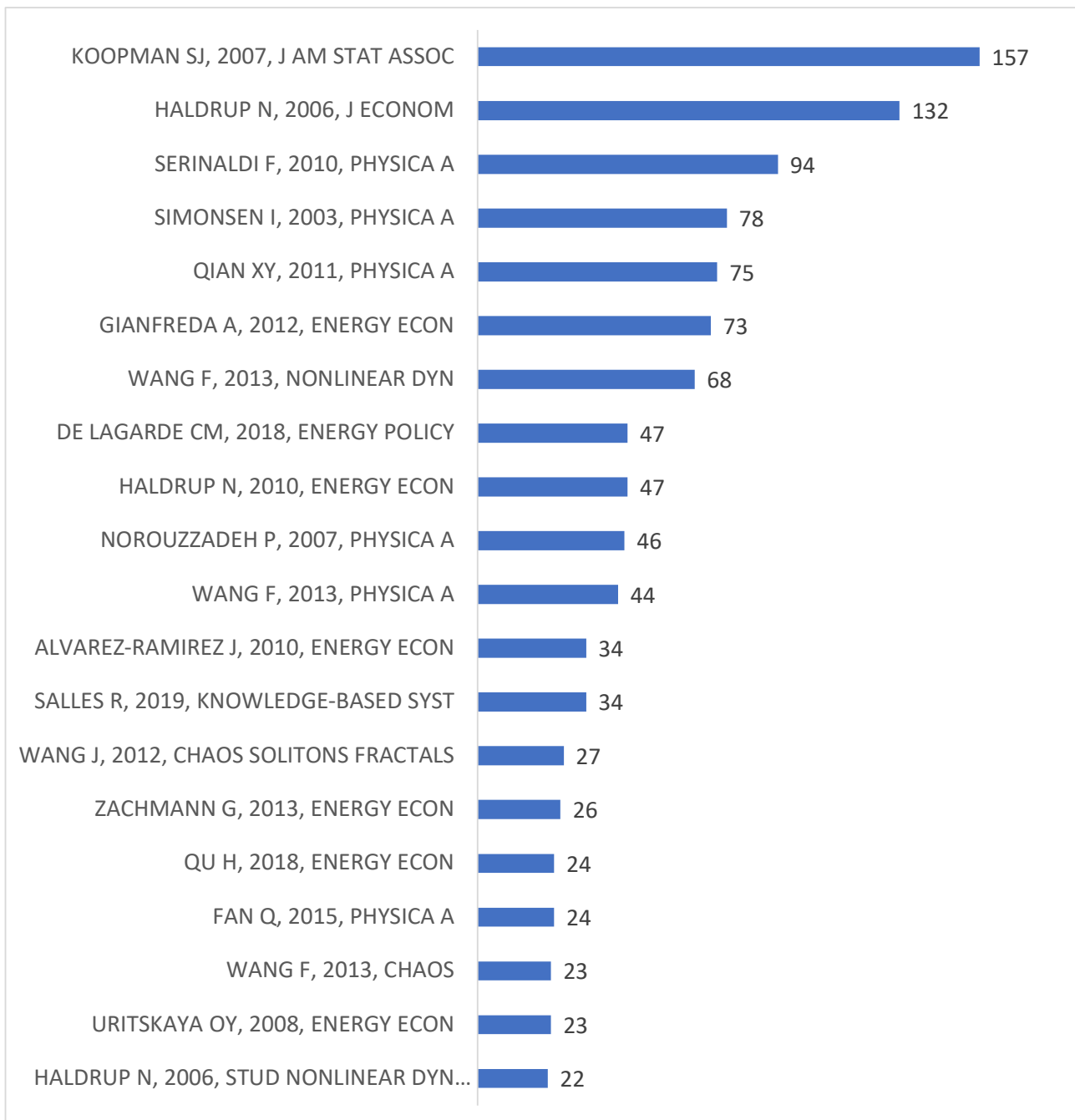


Figura 2 – Documentos mais citados globalmente.

investigar propriedades multifractais de correlações cruzadas entre séries temporais de preços de eletricidade e outras séries (commodities, ações, carbono, etc.).

Na análise do mapeamento temático, os *clusters* da rede de coocorrência foram representados como bolhas em um gráfico, conforme a centralidade de Callon e a classificação de densidade ([23]). As ocorrências de palavras dos *clusters* determinam o tamanho da bolha. O eixo X ilustra a centralidade do *cluster* na rede, refletindo o grau de interação com outros *clusters*, e mede a importância de um tema de estudo. O eixo Y demonstra a densidade, indicador da coesão interna de uma rede de *cluster* e da evolução do tema ([24]; [25]). Ao representar os temas graficamente, identificamos: (a) temas centrais (primeiro quadrante, superior direito), com alta centralidade e densidade, indicando que os temas são consolidados e essenciais para

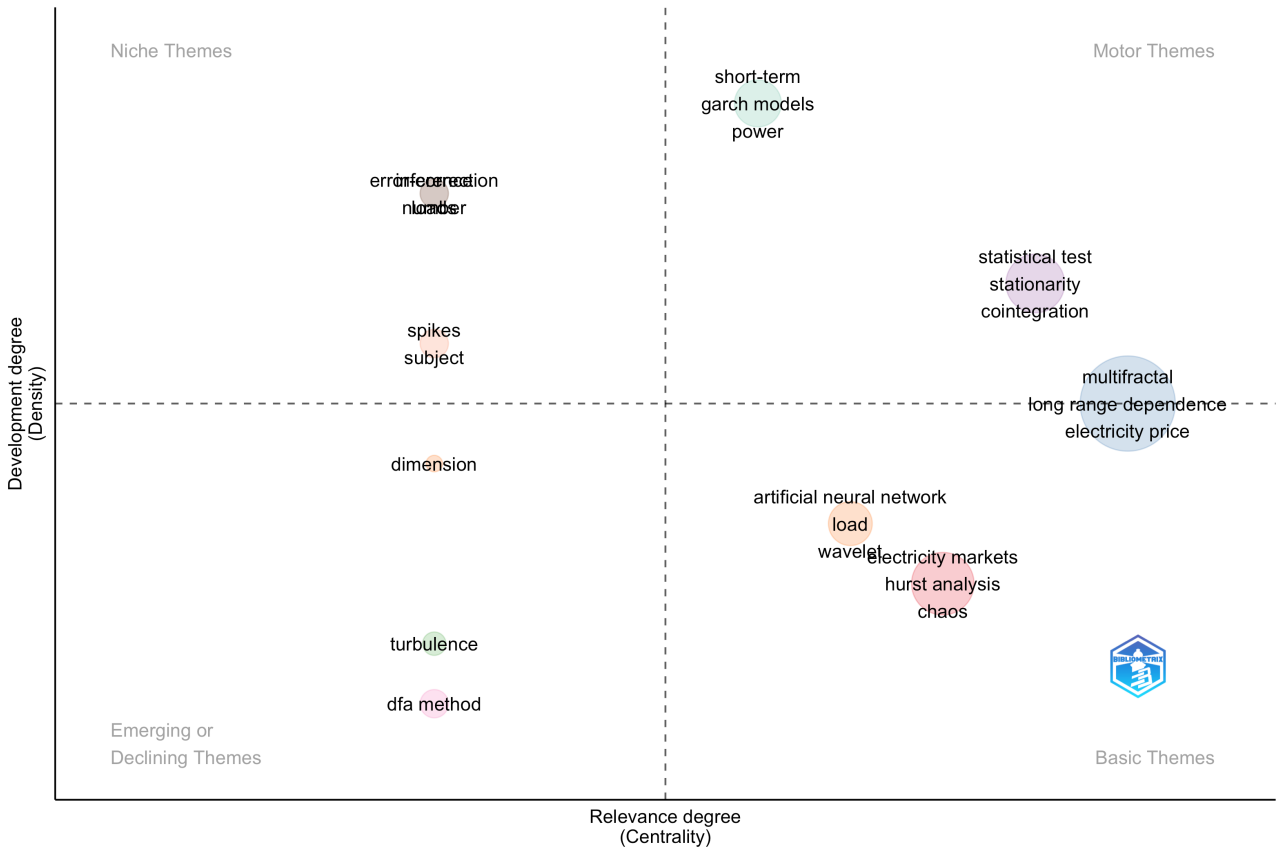


Figura 3 – Mapa temático.

a estruturação de um objeto de pesquisa; (b) temas de nicho (segundo quadrante, superior esquerdo), com alta densidade e baixa centralidade, mostrando relevância específica; (c) temas emergentes ou em declínio (terceiro quadrante, inferior esquerdo), com baixa centralidade e densidade, indicando serem incipientes e periféricos; e (d) temas básicos (quarto quadrante, inferior direito), com alta centralidade e baixa densidade, cruciais para questões de pesquisa transdisciplinar.

O tema Multifractalidade e preços de eletricidade enquadra-se no *cluster Electricity Markets, Long Range Dependence, Electricity Price*, estando entre os quadrantes *Motor Themes* e *Basic Themes*, com alto grau de relevância e grau de desenvolvimento médio.

2.2 Mercado Brasileiro de Eletricidade

Os preços da eletricidade dependem fundamentalmente do equilíbrio entre oferta e demanda, independentemente do modelo em vigor. A significativa volatilidade do preço à vista e os picos de preço estão ligados à impossibilidade de armazenar eletricidade e à demanda inelástica, conforme discutido em [26] e [27]. Contudo, a constante integração de fontes renováveis intermitentes tem impactado cada vez mais a dinâmica de formação de preços no mercado à vista nos últimos anos. Somadas às incertezas relacionadas à oferta (flutuações hidrológicas e preços de combustíveis) e à demanda (crescimento econômico e variações de temperatura), as

plantas intermitentes adicionaram novas incertezas associadas a fatores climáticos, como direção e intensidade do vento e irradiância solar. Diversos estudos, como [28], [29] e [30], sugerem que essas fontes resultam em uma redução nos preços do mercado à vista devido ao seu custo marginal próximo ou igual a zero. Esses mesmos estudos também apontam para um aumento na volatilidade do mercado à vista, com preços à vista frequentemente mais baixos quando os recursos renováveis são abundantes. Contudo, picos de preço surgirão quando tais recursos estiverem em escassez.

No Brasil, o governo federal tem incentivado a implementação de plantas intermitentes (eólicas e solares) desde o início dos anos 2010, reduzindo a predominância da hidreletricidade. A energia hidrelétrica representou mais de 90% da capacidade instalada em 2001 e atualmente representa menos de 70%, conforme [31]. Como em outros países, o aumento na produção de energia a partir de fontes intermitentes levou a um aumento nas incertezas na operação do sistema elétrico e na formação de preços no mercado, conforme discutido em [32].

A formação de preços da eletricidade no mercado está ligada à operação do sistema coordenada pelo Operador Nacional do Sistema Elétrico (ONS). A CCEE é responsável por calcular o preço à vista ou PLD, usando os mesmos modelos matemáticos que o operador usa para otimizar o despacho hidrotérmico, conforme explicado em [1]. Uma série de modelos utiliza programação dinâmica para otimizar o despacho hidrotérmico a médio prazo (até cinco anos), curto prazo (até dois meses) e curtíssimo prazo (até sete dias).

Como o setor elétrico brasileiro depende predominantemente de energia hidrelétrica, os fluxos e volumes armazenados nos reservatórios das usinas desempenham um papel essencial na estocasticidade do sistema. Os modelos de médio e curto prazo calculam o valor futuro da água, indicando o custo intrínseco da água para a operação do sistema. Períodos futuros mais propensos a falta deste recurso têm valores futuros de água mais altos, tornando a operação do sistema mais cara devido ao despacho de termelétricas com custos variáveis unitários altos. Por outro lado, quando há uma oferta abundante de água no futuro, o valor futuro da água será menor, reduzindo o despacho térmico e o Custo Marginal de Operação (CMO).

O valor futuro da água é repassado ao longo da cadeia de modelos, do longo/médio prazo para o curto e curtíssimo prazo, garantindo que modelos com menos estocasticidade (curto prazo) ou determinísticos (curtíssimo prazo) considerem esta fonte de incerteza. Após a convergência do problema, o CMO é dado pelo multiplicador de Lagrange (ou variável dual) associado às restrições de demanda, conforme [1], [4], [33]. O valor do PLD para cada submercado é igual ao CMO, limitado por um preço máximo e mínimo definido pelo agente regulador (ANEEL) e válido para cada período de verificação. Assim, o preço à vista no Brasil não é formado por um processo competitivo entre oferta e demanda, mas é calculado através da complexa cadeia de modelos matemáticos previamente explicada. Por cerca de 20 anos (de 2001 a dezembro de 2020), o PLD foi calculado semanalmente por submercado (Sudeste, Sul, Nordeste e Norte) e por nível de carga (representando cargas leves, médias e pesadas), conforme discutido em [34] e [35]. O preço começou a ser calculado com um dia de antecedência para as próximas 24 horas em 01 de janeiro de 2021, conforme mostrado em [4], [36], [37].

2.2.1 Preços à vista de eletricidade no Brasil

O comportamento e os principais fatos estilizados caracterizando o PLD têm sido relativamente inexplorados nos últimos 20 anos. Queiroz et al. [11] propuseram um modelo de rede neural para simular preços à vista de eletricidade mensais no Brasil. Segundo os autores, este modelo poderia substituir o modelo oficial (otimização do despacho hidrotérmico usando programação dinâmica estocástica dual) com vantagens em termos de esforço computacional sem gerar desvios que comprometeriam algoritmos de análise de risco.

Oliveira et al. [38] introduziram uma metodologia para estimar os preços dos contratos de opções para mercados de eletricidade no Brasil. Segundo os autores, uma contribuição teórica significativa feita no trabalho foi demonstrar que um processo estocástico de reversão à média (Ornstein–Uhlenbeck Vasicek) representa com precisão o preço à vista no Brasil quando comparado a modelos geométricos Brownianos.

Gontijo et al. [12] utilizaram a Previsão Dinâmica por Varredura Temporal (DTSF, na sigla em inglês) para prever preços à vista de eletricidade no Brasil, uma metodologia inicialmente formulada para prever a geração de vento e energia em plantas industriais. O método envolve a varredura de uma série temporal e a identificação de padrões passados (denominados "correspondências") semelhantes às observações mais recentes disponíveis. Os valores futuros são previstos a partir das correspondências mais semelhantes usando funções de agregação, como a mediana. Os autores compararam os resultados obtidos com DTSF a oito outras metodologias da M4-Competition. Segundo eles, o DTSF superou todas as outras metodologias em desempenho, exceto ao dividir a série de preços por estações.

Daglish et al. [39] analisaram o impacto da reforma do setor elétrico de 2004 na volatilidade dos preços à vista de eletricidade no Brasil. Eles ajustaram um modelo *Markov Switching* à série temporal de preços mensais amostrados de janeiro de 2000 a outubro de 2016. Os autores consideraram o *Markov Switching* ideal para modelar preços à vista no Brasil, uma vez que os preços se comportam em dois regimes distintos de volatilidade.

Lauro et al. [40] propuseram uma metodologia para simular o processo de tomada de decisão para contratação de energia a partir de uma usina hidrelétrica, considerando incertezas sobre o preço à vista, preços de contratos futuros e fator de escala de geração. Os autores consideraram os preços mensais e a programação dinâmica estocástica em duas etapas para modelar a incerteza nos preços futuros.

Com o início da publicação de preços horários em 2021, surgiram novas pesquisas sobre o preço da eletricidade no mercado brasileiro. Marchetti e Rego [41] demonstraram o impacto da adoção da nova metodologia de formação de preços (semanal para horária) no valor justo de uma planta genérica de energia eólica e solar. Segundo os autores, a adoção de preços horários impactou negativamente o valor justo de uma fazenda eólica. Alguns projetos mostraram uma desvalorização de cerca de 9% do valor total da empresa devido à negociação de contratos com sazonalidade plana e modulação. Plantas solares experimentaram impactos positivos no Sudeste, mas sem impactos significativos no Nordeste. Nametala et al. [37] usaram os preços horários para

o ano de 2021 (média aritmética de todos os submercados) e investigaram aspectos estatísticos da série temporal, como caracterização de mudança de regime e as fontes de formação de picos de preço. Além disso, investigaram a relação do preço com variáveis exógenas e, finalmente, compararam mercados de eletricidade de outros países. Gontijo et al. [42] aplicaram o DTSTF para previsão de preços horários no Brasil. Eles consideraram preços horários a partir de 2019, levando em conta o período de teste até o final de 2021. A metodologia DTSTF já havia sido aplicada no outro artigo pelos mesmos autores para a previsão de preços de eletricidade semanais no Brasil, [43]. DTSTF mostrou melhor desempenho preditivo e menor variabilidade quando comparado a modelos estatísticos e de aprendizado de máquina.

2.3 Multifractalidade de Séries Temporais

Sistemas fractais e multifractais podem ser encontrados em diversos campos, incluindo física, geologia, hidrologia, biologia, ciências sociais, psicologia, economia e ciência da computação. Fractais são estruturas geométricas que exibem auto-similaridade, o que significa que sua estrutura complexa se repete em todas as escalas. Frequentemente, descreve-se essa característica como uma dimensão fractal, que pode ser considerada uma medida da rugosidade ou complexidade do fractal [44].

Embora se possa aplicar esses conceitos a objetos e imagens, este estudo foca, especificamente, na observação de comportamentos fractais e multifractais em séries temporais. A auto-similaridade de uma série temporal pode manifestar-se através da lei de potência, que descreve a relação entre as flutuações da série em diferentes escalas temporais. Isso indica que um único expoente de escala, responsável por medir a rugosidade, irregularidade ou complexidade da série temporal, vincula a variância ou outras estatísticas da série, medidas em várias escalas temporais, por uma lei de potência. Mandelbrot, além de introduzir o conceito de geometria fractal, também divulgou estudos pioneiros que aplicavam a análise fractal a séries temporais, conforme citado em [45] e [46].

As bases do método Rescaled Range (R/S) foram desenvolvidas por Harold Edwin Hurst [47] enquanto estudava as séries temporais de cheia do rio Nilo para determinar a capacidade ideal de reservatórios de água. Hurst também observou em séries temporais dos níveis de outros rios e também de outros fenômenos naturais que as flutuações poderiam ser dependentes da escala, diferindo da aleatoriedade simples. Ele introduziu a estatística não-paramétrica R/S para quantificar essa característica e, ao fazê-lo, identificou o que mais tarde seria conhecido como o "efeito Hurst" ou o "expoente de Hurst".

Mandelbrot e Wallis [45], [46] contribuíram significativamente para a compreensão das séries temporais em hidrologia e outras áreas. Eles abordaram a natureza de flutuações em registros hidrológicos e outros fenômenos naturais usando o método do Rescaled Range introduzido por Hurst. No contexto de suas pesquisas, Mandelbrot e Wallis reconheceram que muitos fenômenos naturais, incluindo níveis de rios, têm uma característica de memória de longo alcance que pode ser melhor modelada usando processos com propriedades de escala

fractal. Mandelbrot e Wallis reconheceram a importância das descobertas realizadas por Hurst e denominaram o expoente que caracteriza a lei de potência como expoente de Hurst. Suas descobertas estabeleceram as bases para a subsequente adoção de modelos fractais e multifractais em várias disciplinas e introduziram o conceito de movimento browniano fracionário.

Peters [48] aborda a complexidade e a natureza fractal dos mercados financeiros, oferecendo uma nova perspectiva sobre análise técnica e econômica. Considerando que os mercados financeiros são mais complexos do que as abordagens tradicionais podem entender, Peters introduz a teoria do caos e os conceitos fractais como ferramentas essenciais para a análise de mercados. Uma das técnicas-chave discutidas por Peters é o método R/S explorando como o coeficiente de Hurst pode ser aplicado aos mercados financeiros para identificar a natureza persistente ou anti-persistente de séries temporais de preços. A ideia fundamental é que mercados com memória de longo alcance exibem características fractais, que não podem ser completamente descritas por modelos de equilíbrio tradicionais.

Apesar de o método R/S ter sido amplamente aplicado para estudar a memória de longo alcance em séries temporais, diversas pesquisas salientaram sua dificuldade em lidar de maneira apropriada com séries temporais não-estacionárias. Esta característica é relevante porque, se uma série temporal possui uma tendência ou componente não-estacionário, isso pode conduzir a estimativas imprecisas ou tendenciosas do coeficiente de Hurst. Entre os diversos estudos, pode-se mencionar [49], que abordou a dificuldade do método R/S em distinguir entre memória de longo alcance e possíveis quebras estruturais ou outras manifestações de não-estacionariedade; [50] examinou empiricamente vários estimadores de dependência de longo alcance, incluindo R/S, e apontou suas falhas ao serem aplicados a dados não-estacionários; [48] evidenciou as limitações do método, sobretudo no contexto de séries temporais com tendências; e [51], que ofereceu uma revisão abrangente dos processos de memória de longo alcance, sublinhando a dificuldade do R/S em tratar séries temporais não-estacionárias.

Diante da necessidade de métodos para lidar com séries temporais não estacionárias, Peng et al [17] desenvolveram o método Detrended Fluctuation Analysis (DFA) como uma ferramenta robusta para estudar correlações de longo alcance nesses tipos de séries temporais. O método foi desenvolvido para superar limitações dos métodos tradicionais de análise de flutuação, como o Rescaled Range, que muitas vezes são confundidos por tendências não estacionárias inerentes a muitas séries temporais. A essência do DFA é a análise das flutuações de uma série temporal após a remoção de tendências locais em diferentes escalas de tempo. Inicialmente foi aplicada para investigar as correlações de longo alcance em sequências de DNA, porém ao longo dos anos da década de 1990 e 2000, foi utilizada em diversas outras áreas do conhecimento.

O conceito de multifractalidade surgiu quando o matemático francês estava estudando turbulência e percebeu que um único expoente de escala não podia descrever adequadamente esse fenômeno, como é típico de objetos fractais regulares. Em vez disso, ele observou que a turbulência exibia uma distribuição de dimensões fractais em uma variedade de escalas, conforme observado em [52]. Séries temporais multifractais mostram diferentes autocorrelações de grandes flutuações em relação à autocorrelação de pequenas flutuações, exigindo mais de um expoente

de escala para descrever completamente seu comportamento.

Os métodos R/S e DFA não eram aptos a capturar padrões complexos, como a multifractalidade, frequentemente ocultos nos conjuntos de dados. Embora já houvesse um método para análise de séries temporais multifractais utilizando a transformada de ondeleta ([53] e [20]), Kantelhardt et al. [7] propuseram o Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MFDFA), uma extensão da DFA para o cálculo de estatísticas multifractais, preservando a simplicidade matemática tanto nas operações quanto na implementação. Tal abordagem foi empregada no cálculo do expoente de Hurst generalizado $H(q)$ e do expoente de Rényi $\tau(q)$ para diferentes momentos q . Estes expoentes interpretam as propriedades estatísticas das variações em diversas escalas, facultando a investigação distinta da contribuição de escalas menores ($q < 0$) e de escalas maiores ($q > 0$). A análise multifractal por meio do método MFDFA tem sido adotada em várias áreas do saber que exibem correlações de lei de potência de longa duração. Para uma revisão extensiva das metodologias e áreas de aplicação, sugere-se a consulta ao trabalho de Kantelhardt et al. [54]. No âmbito do mercado financeiro, a análise multifractal tem recebido significativa atenção, e uma fonte valiosa para revisão sobre o tema pode ser localizada no artigo de Jiang et al. [6].

A proposição original dos métodos DFA e MFDFA foi para aplicação em uma única série temporal, de forma a analisar as correlações temporais para cada escala. O Detrended Cross-correlation Analysis (DCCA) foi introduzido por [22], como uma extensão do DFA, de forma a lidar com dois registros simultâneos, identificando as correlações cruzadas entre eles. O DCCA é particularmente útil para examinar correlações em séries temporais que possuem tendências ou são não-estacionárias. Tem sido amplamente utilizado em economia para entender correlações entre diferentes mercados ou ativos. Neste artigo, Podobnik e Stanley analisaram diferentes exemplos de séries do mundo real, como por exemplo, séries de umidade do ar e temperatura do ar; séries de eletroencefalograma, batimentos cardíacos e eletrocardiograma; e valores de fechamento entre os índices DJIA e NASDAQ.

A extensão do DCCA para estudar a multifractalidade em séries temporais, conhecida como Multifractal Detrended Cross-Correlation Analysis (MFDCCA), foi introduzida por [55]. Neste artigo, Zhou propôs a técnica MFDCCA para investigar as correlações multifractais entre duas séries temporais não-estacionárias. Ele generalizou o DFA e o MFDFA para abordar duas séries temporais, criando uma metodologia que tem sido amplamente aplicada em vários campos, incluindo física, finanças, mercados de commodities, biomedicina e geofísica. Neste trabalho, ele analisou as correlações multifractais entre os retornos diários de duas séries temporais de índices de ações, DJIA e NASDAQ, o período compreendido entre julho de 1993 a novembro de 2003.

A presença de correlações assimétricas em retornos de ações é fato estudado por muitos acadêmicos e, algumas vezes, esta assimetria está ligada à reação assimétrica às notícias por parte dos investidores. No entanto, a existência de assimetrias nas correlações de séries temporais em outros campos, como física e biologia, permaneceu inexplorada por muitos anos. Alvarez et al [56] propuseram uma modificação do método DFA e conseqüentemente MFDFA para detectar assimetrias no comportamento de escala das séries temporais. Esta nova versão do MFDFA separa

tendências positivas e negativas para estudar as contribuições individuais para o comportamento de escala geral. Foram introduzidos dois novos coeficientes de Hurst generalizados, H_q^+ e H_q^- para mensurar a correlação das flutuações com tendência positiva e negativa, respectivamente. Os resultados obtidos a partir de três séries temporais distintas revelaram que as assimetrias são influenciadas pela escala. Em determinadas escalas, observa-se um comportamento de escala simétrico ($H_q^+ = H_q^-$), enquanto em outras, ele é assimétrico ($H_q^+ \neq H_q^-$). De acordo com os autores, ficou evidente a presença de propriedades de correlações distintas dependendo se a o sinal da tendência é positivo ou negativo. A presença dessas correlações assimétricas lança luz sobre a complexidade das séries temporais oriundas de sistemas reais, indicando que os mecanismos que fundamentam um sistema complexo operam diferentemente conforme a direcionalidade da sua dinâmica.

Os métodos DFA e MF DFA utilizam os ajustes polinomiais para remover as tendências locais, em cada escala e segmentos analisados. Outros métodos de filtragem de tendência foram propostos para serem utilizados com os algoritmos MF DFA e MF DCCA. Como por exemplo MF DFA-MODWT utiliza a Transformada Wavelet de Máxima Sobreposição (MODWT) para decompor a série temporal em componentes de alta e baixa (representa a tendência) frequências em diversas escalas. O componente que representa a tendência é removido e a série temporal reconstruída sem esse componente. De forma semelhante, o MF DFA-EMD utiliza Empirical Mode Decomposition (EMD) para decompor a série temporal e extrair e eliminar as componentes que representam a tendência. Ambos os métodos surgiram como proposta para tratar tendências mais complexas que aquelas eliminadas pelo ajuste polinomial dos métodos DFA e MF DFA originais. [57] apresenta esses dois métodos com aplicações na análise de correlações cruzadas entre o retorno diário no mercado de carbono e os retornos diários de diversas commodities de energia (óleo, carvão, gás natural e eletricidade).

Tabela 4: Métodos baseados em funções de flutuação para análise correlações de longo alcance e multifractalidade

Método	Tipo de Série Temporal	Detecta Multifractalidade?	Autor
R/S	Estacionária, analise uma série temporal	Não	[58], [47], [45], [46], [48]
DFA	Não-estacionária, analisa uma série temporal e remoção de tendência polinomial	Não	[17], [59]
MF DFA	Não-estacionário, analisa uma série temporal e remoção de tendência polinomial	Sim	[7]
MF DCCA	Não-estacionário, analisa correlação cruzada entre duas séries e remoção de tendência polinomial	Sim	[22]
MF DFA MF DCCA +MODWT	Não estacionário, remove tendencias mais complexas com MODWT, usado com MF DFA e MF DCCA	Sim	[57]

Continua na próxima página

Tabela 4: Métodos baseados em funções de flutuação para análise correlações de longo alcance e multifractalidade (Continuação)

Método	Tipo de Série Temporal	Detecta Multifractalidade?	Autor
MFDFFA MFDCCA +EMD	Não estacionário, remove tendências mais complexas com EMD, usado com MFDFFA e MFDCCA	Sim	[57]

2.4 Comportamento fractal e multifractal dos mercados de eletricidade

Sistemas complexos como o mercado de eletricidade podem ser descritos analisando-se séries temporais de preço, retorno ou volatilidade que apresentam fatos estilizados como sazonalidade, memória longa, picos de preço e multifractalidade. Usando o método Rescaled Range (R/S), Weron e Przybyłowicz[60] avaliaram a série de retornos diários dos mercados de eletricidade na Califórnia e na Suíça. Eles calcularam os coeficientes de Hurst para ambos os mercados e concluíram que ambos exibem reversão à média. O coeficiente de Hurst do CalPX ($H_2 = 0.4193$) é menor que o do mercado suíço ($H_2 = 0.4391$), levando Weron e Przybyłowicz a concluir que o primeiro tem uma anti-persistência mais pronunciada em comparação ao segundo. Além disso, eles confirmaram uma conclusão de outro artigo [27], onde modelaram o retorno do preço à vista de eletricidade na Califórnia (CalPX) como um processo de reversão à média.

Simonsen [14] aplicou o método *Average Wavelet Coefficient* (AWC) aos dados de preços horários à vista do Mercado Nórdico de Eletricidade de 1992 a 2000, concluindo que estes preços se aproximam de um processo anti-persistente (reversão à média), caracterizado por um coeficiente de Hurst de 0.41. A presença de *crossover* próximo à escala de 1 dia indica múltiplos expoentes de escala, levando o autor a considerar a avaliação do mercado nórdico usando métodos que permitem estimar múltiplos expoentes (multifractalidade), como a transformada de ondeleta contínua. O preço exibe um processo persistente para escalas menores que um dia, com $H_2 > 0.5$, e a anti-persistência aparece para escalas maiores que um dia.

Norouzzadeh et al. [61] analisaram o retorno sobre o preço horário do mercado de eletricidade espanhol usando *Multifractal Detrended Fluctuation Analysis* (MFDFFA), obtendo um coeficiente de Hurst $H = 0.16 \pm 0.01$, indicando forte anti-persistência.

Serletis e Bianchi [62] usaram o método Detrended Moving Average (DMA) para analisar a eficiência informacional do mercado de eletricidade de Alberta e verificar se as transações de troca de energia (fluxos de energia entre mercados) estão se tornando cada vez mais significativas nos mercados de eletricidade. De acordo com os autores, os resultados mostraram que o mercado de eletricidade de Alberta é altamente ineficiente (anti-persistente), e o comércio transfronteiriço de eletricidade entre Alberta e jurisdições vizinhas ajuda a prever a dinâmica de preços no mercado de eletricidade de Alberta.

Erzgraber et al. [63] analisaram os preços do sistema no mercado nórdico usando diferentes técnicas para estimar o expoente de Hurst. Eles concluíram que a variação observada nos expoentes de Hurst poderia ser considerada um sinal de multifractalidade nos preços da

eletricidade.

Uriskaya e Serletis [64] aplicaram o método DFA em diferentes escalas para confirmar a presença de múltiplos coeficientes de Hurst (multifractalidade) nos preços diários da eletricidade nos mercados de Alberta (Canadá) e Mid-Columbia (Estados Unidos), bem como no mercado de gás natural de Alberta. Usando os resultados do DFA para os três mercados, Uriskaya et al. analisaram a eficiência do mercado, considerando aqueles que exibiam longa memória, $H_2 = 0.5$ (fGn) e $H_2 = 1.5$ (fBm) ⁴, como menos eficientes. Eles confirmaram a anti-persistência e consequente ineficiência dos mercados de Alberta e Mid-Columbia, com $H_2(\text{Alberta}) = 1.22 \pm 0.01$ e $H_2(\text{Mid} - C) = 1.32 \pm 0.05$.

Malo [65] propôs modelar a dinâmica dos preços à vista e futuros da Nordpool usando Copula-MSM (*Markov Switching Multifractal*). Embora a proposta deste artigo esteja fora do nosso objetivo, Malo analisou os expoentes de escala (expoente de Hurst) dos preços de fechamento diários da Nord Pool para contratos à vista entre março de 1998 e janeiro de 2006. Ele usou vários métodos para calcular o expoente, e o valor médio encontrado foi $H = 0.32$.

Conforme visto na seção 2.4, Alvarez et al [56] propuseram uma modificação do método DFA para detectar assimetrias no comportamento de escala das séries temporais. Uma das séries estudadas neste trabalho foi o preço spot de eletricidade para a região de Victoria, na Austrália, amostrada a cada 30 minutos, nos primeiros seis meses do ano de 2008. Para escalas de tempo menores que uma semana, as correlações são simétricas ($H_2^+ = H_2^-$). Porém, em escalas maiores, a dinâmica de queda de preços é menos correlacionada do que a de aumento ($H_2^+ > H_2^-$). A distribuição dos retornos de preços para escalas maiores que 10 dias não é nem gaussiana nem simétrica, tendo uma assimetria à esquerda. Esta assimetria pode explicar, ao menos parcialmente, o escalonamento assimétrico observado.

Serinaldi [66] conduziu um estudo sobre as precauções a serem tomadas ao aplicar a metodologia para calcular o coeficiente de Hurst, especialmente em relação à natureza do sinal: fBm (Movimento Browniano Fracionado) ou fGn (Ruído Gaussiano Fracionado). Além das séries financeiras, Serinaldi usou séries de preços de quatro mercados de eletricidade: preço médio diário para Alberta (persistente, $H_2 > 0.5$) e Mid-Columbia (anti-persistente, $H_2 < 0.5$), preços horários para Alberta (persistente, $H_2 > 0.5$), preços horários para Ontário (persistente, $H_2 > 0.8$) e preços horários para o mercado italiano (persistente, $H > 0.5$).

Qian et al. [67] propuseram uma modificação no algoritmo MF DFA, substituindo o processo de remoção de tendências locais usando um polinômio de grau m pela Decomposição de Modo Empírico (EMD). Para provar sua eficácia, eles aplicaram o método proposto no índice Composite da Bolsa de Valores de Xangai, com uma frequência de 1 minuto, e nos preços diários

⁴ Existem situações, conforme será apresentado no Capítulo 3, onde a etapa de integração no início dos métodos baseados em DFA e MF DFA devem ser empregadas ou não. Quando a série temporal a ser analisada é do tipo fGn então deve-se empregar a integração e o coeficiente de Hurst varia no intervalo $(0, 1)$. Quando a série é do tipo fBm, então não há necessidade de integrá-la. Caso a mesma seja integrada, então o coeficiente de Hurst irá variar dentro do intervalo $(1, 2)$ que é o caso analisado por [64].

do Mercado de Eletricidade Australiano, confirmando a anti-persistência.

Rypdal e Lovsletten [68] introduziram dois modelos de reversão à média baseados no passeio aleatório multifractal (MRW, do inglês Multifractal Random Walk). O primeiro modelo descreve a anti-persistência dos preços à vista da Noruega (Nordpool) através do decaimento exponencial das correlações (MRW amortecido), enquanto o segundo modelo descreve o decaimento das correlações por lei de potência (MRW fracionário). O conjunto de dados consistia no preço à vista horário medido em Coroas Norueguesas (NOK) de 4 de maio de 1992 a 27 de agosto de 2011. Os autores apresentaram métodos de máxima verossimilhança para estimar os parâmetros desses modelos. Eles concluíram que o modelo MRW amortecido é mais adequado para prever preços à vista do que o modelo MRW fracionário. No entanto, os modelos multifractais exploram mais eficazmente os efeitos de memória na volatilidade para a previsão futura de preços.

Liu et al. [69] investigaram a viabilidade de aplicar a teoria multifractal para analisar as flutuações dos preços da eletricidade. Eles usaram séries de preços horários do mercado de eletricidade Pennsylvania-New Jersey-Maryland (PJM) para demonstrar a eficácia do método de estimação VaR proposto para avaliar o risco de volatilidade dos preços da eletricidade a curto prazo.

Ghosh et al. [70] analisaram o comportamento multifractal dos preços de oferta de energia em cinco áreas diferentes da Índia, amostrados em intervalos de 15 minutos, usando o método MF DFA. A análise foi feita mensalmente de abril de 2012 a março de 2014, confirmando a multifractalidade dos preços estimados pela largura do espectro de singularidade, $\Delta\alpha$. A análise multifractal utilizou preços, não retornos.

Ali et al. [71] investigaram e compararam a multifractalidade geral, variando ao longo do tempo, e a eficiência de quatro regiões elétricas nos Estados Unidos. Eles aplicaram o método MF DFA ao retorno logarítmico diário dos preços da eletricidade dos mercados MASS Hub, Mid-C, Palo Verde e PJM West, amostrados de 2001 a 2021. A eficiência dos mercados foi estimada usando o índice MLM (*Magnitude of Long Memory*), também conhecido como MDM (*Market Deficiency Measure*). Como resultado, mostraram que todos os mercados exibiam anti-persistência ($H(q = 2) < 0.5$) e comportamento multifractal estimado pela força da multifractalidade Δh , com PJM West sendo o mercado mais eficiente.

Han et al. [72] analisaram as séries temporais dos preços de eletricidade na Alemanha e Áustria indexados no mercado europeu (EPEX), focando especificamente nos preços de mercado um dia à frente (day-ahead) por hora, intradiários por hora e intradiários de 15 minutos. Eles usaram o MF DFA para confirmar uma forte anti-persistência nas séries de preços para escalas de tempo maiores que 12 horas ($H_2 \sim 0.16$). Para escalas de tempo menores que 12 horas, tanto os preços intradiários por hora quanto os preços de um dia à frente por hora mostraram persistência, com $H_2 \sim 0.63$ e $H_2 \sim 0.61$, respectivamente. Em contraste, os preços intradiários de 15 minutos permaneceram anti-persistentes com $H_2 \sim 0.31$. A força da multifractalidade, calculada através da largura do espectro multifractal ($\Delta\alpha$), foi mais intensa para as menores escalas de tempo em

todas as séries de preços. Finalmente, eles descobriram que o comportamento de longo prazo é fortemente influenciado pela evolução de padrões climáticos de grande escala, com uma escala de tempo típica de quatro dias.

Cramer et al. [73] sugeriram usar a análise multifractal (MFDFA) como um método de validação adicional para características mais complexas em cenários gerados por modelos generativos. Séries sintéticas produzidas por Redes Adversariais Generativas (GANs), Wasserstein GANs (WGANs) e Codificadores Automáticos Variacionais (VAEs) treinados com séries temporais de geração de plantas fotovoltaicas e eólicas na Alemanha (entre 2013 e 2015), e séries temporais de preços de eletricidade intradiários do Mercado Europeu de Energia (entre 2017 e 2019) foram submetidas a vários tipos de validação, incluindo características multifractais como a largura do espectro de singularidade.

Cuperk [74] explorou a maturidade do mercado intradiário de eletricidade da República Tcheca durante a pandemia da COVID-19, usando análise multifractal (MFDFA) em preços médios intradiários por hora e o índice *Magnitude of Long Memory* (MLM). Eles observaram uma relação não linear entre a política da COVID-19 do governo tcheco e o expoente de Hurst em longas escalas de tempo, a largura do espectro de singularidade e o índice MLM em escalas de tempo curtas, indicando que políticas flexíveis contra a COVID-19 estão associadas a um mercado mais maduro e vice-versa.

Tabela 5: Resumo dos coeficientes de Hurst, Mercados de Eletricidade e Artigos

Referência	Método	Tipo de série	Mercado	Período	Comportamento	Hurst
Weron [75]	Rescaled Range (R/S)	Retornos diários	Califórnia (CALPX)		antipersistente	0.4193
			Suíça		Antipersistente	0.4391
Simonsen [14]	Average Wavelet Coefficient (AWC)	Preços Horários do Mercado à Vista	Nordpool	1992-2000	antipersistente escalas maiores que um dia	0.4100
	Wavelet Transform Modulus Maxima (WTMM)				antipersistente escalas menores que um dia	
Norouzzadeh et al. [61]	MFDFA	Preço Horário	Mercado de Eletricidade Espanhol		antipersistente	0.16
Serletis and Rosenberg [76]	Detrended Moving Average (DMA)		Mercado de Eletricidade de Alberta (Canadá)		antipersistente	
Erzgräber et al. [63]		Preços horário	Nordpool			
Uritskaya and Serletis [64]	Dentrended Fluctuation Analysis (DFA)	Preços diários de eletricidade	Alberta (Canadá)	antipersistente	0.22	
			Mid-Columbia (EUA)	Antipersistente	0.32	
Malo [65]	Média de diversos métodos	Preços de fechamento diários de contratos à vista	Nordpool	03/1998 a 01/2006	antipersistente	0.32
Alvarez-Ramirez et al. [56]	Asymmetric DFA (A-DFA)	Preço spot de eletricidade 30-30min	Victoria (Austrália)	01/01/2008 a 30/06/2008	escalas menores que uma semana apresentam correlações simétricas	-

Continua na próxima página

Tabela 5: Resumo dos coeficientes de Hurst, Mercados de Eletricidade e Artigos (Continuação)

Referência	Método	Tipo de série	Mercado	Período	Comportamento	Hurst
					escalas maiores que uma semana apresentam correlações assimétricas	-
Serinaldi [66]	MF DFA	Preço médio diário	Alberta (Canadá)		persistente	
		Preço médio diário	Mid-Columbia (EUA)	antipersistente		
		Preço horários	Alberta (Canadá)		persistente	
		Preço horários	Ontário (Canadá)		persistente	
Qian et al. [67]	MF DFA + EMD	Preço diário	Mercado Australiano		antipersistente	
Liu et al. [69]		Preços horário	Mercado Pennsylvania, New Jersey e Maryland (PJM)			
Ghosh et al. [70]		Preços 15-15 min	(Índia)	01/04/2012 a 31/03/2014		
Ali et al. [71]	MF DFA	Retorno logarítmico diário	MASS Hub (EUA)	01/01/2001 a 31/12/2021	antipersistente	
			Mid-Columbia (EUA)	01/01/2001 a 31/12/2021	antipersistente	
			Palo Verde (EUA)	01/01/2001 a 31/12/2021	antipersistente	
			PJM West (EUA)	01/01/2001 a 31/12/2021	antipersistente	

Continua na próxima página

Tabela 5: Resumo dos coeficientes de Hurst, Mercados de Eletricidade e Artigos (Continuação)

Referência	Método	Tipo de série	Mercado	Período	Comportamento	Hurst
Han et al. [72]	MFDEFA	Preços horário um dia à frente	Alemanha			
		Preços intradiário por hora				
		Preços intradiário para cada 15 min				
		Preços horário um dia à frente	Áustria			
		Preços intradiário por hora				
		Preços intradiário para cada 15 min				
Čurpek [74]	MFDEFA	Mercado intradiário médio por hora	República Theca			

3 Referencial Teórico

Este capítulo aborda os métodos que serão utilizados como referencial teórico para caracterização de propriedades monofractais ou multifractais em séries temporais. Porém, antes de entrar em detalhes sobre cada um dos métodos que serão empregados nesta Tese, algumas definições devem estabelecidas de forma a facilitar o entendimento.

1. Relação de Escala descreve como uma quantidade varia com o tamanho ou a escala em que é medida. Um fenômeno F segue uma relação de escala se existe uma constante $a > 1$ e um expoente b tal que $F(a \times s) = a^b \times F(s)$, onde s é a escala.
2. A lei de potência é um tipo específico de relação funcional entre duas quantidades, onde uma quantidade varia como uma potência da outra. Leis de potência são comuns em fenômenos que exibem relações de escala e são geralmente expressas na forma $y = Ax^\alpha$, onde A é uma constante e α é o expoente da potência. Uma relação $y(x)$ segue uma lei de potência se $y(x) = Ax^\alpha$, para A e α constantes.
3. Uma série temporal é dita auto-similar se cada parte da série é semelhante à série como um todo. Essa semelhança é exata nas formas matematicamente ideais, mas pode ser aproximada em formas reais. A auto-similaridade é uma propriedade dos objetos fractais ou monofractais.
4. Uma série temporal é dita ser monofractal se ele exibe auto-similaridade em todas as escalas, ou seja, é caracterizada por uma única dimensão fractal ou expoente de escala ao longo de todas as escalas de tempo e espaço. Matematicamente, um objeto fractal F pode ser definido através da relação de escala:

$$F(\lambda s) = \lambda^\alpha F(s) \quad (3.1)$$

onde λ é um fator de escala, α é o coeficiente de similaridade e s é a escala. Para uma série temporal monofractal, o coeficiente de similaridade é constante, significando que suas partes, quando ampliadas ou reduzidas, permanecem semelhantes ao todo.

5. A auto-afinidade é uma generalização da auto-similaridade. Enquanto a auto-similaridade implica que uma parte do objeto é semelhante ao todo sob transformações de escala isotrópicas (ou seja, a mesma escala em todas as direções), a auto-afinidade permite transformações de escala anisotrópicas (ou seja, diferentes escalas em diferentes direções).
6. Multifractais são uma generalização de fractais. Em séries temporais multifractais, diferentes partes da série podem ter diferentes propriedades de escala. Isso é muitas vezes caracterizado por uma distribuição de expoentes de similaridade ou coeficientes de escala, em vez de um único valor. A relação de escala em um conjunto multifractal pode ser expressa matematicamente como:

$$F(\lambda s) = \lambda^{\alpha(s)} F(s) \quad (3.2)$$

Agora, $\alpha(s)$ é uma função da escala s , significando que diferentes regiões podem ter diferentes propriedades de escala.

7. O ruído branco é uma série temporal onde cada ponto é independente e identicamente distribuído (i.i.d.) e, portanto, não apresenta correlações temporais ou características de escala.

O gráfico da figura 4 mostra as diferenças entre séries temporais multifractal, monofractal e ruído branco. A linha preta apresenta a série em forma de ruído e a linha verde a série acumulada (na forma de movimento). A série multifractal apresenta comportamento mais complexo em relação às demais séries.

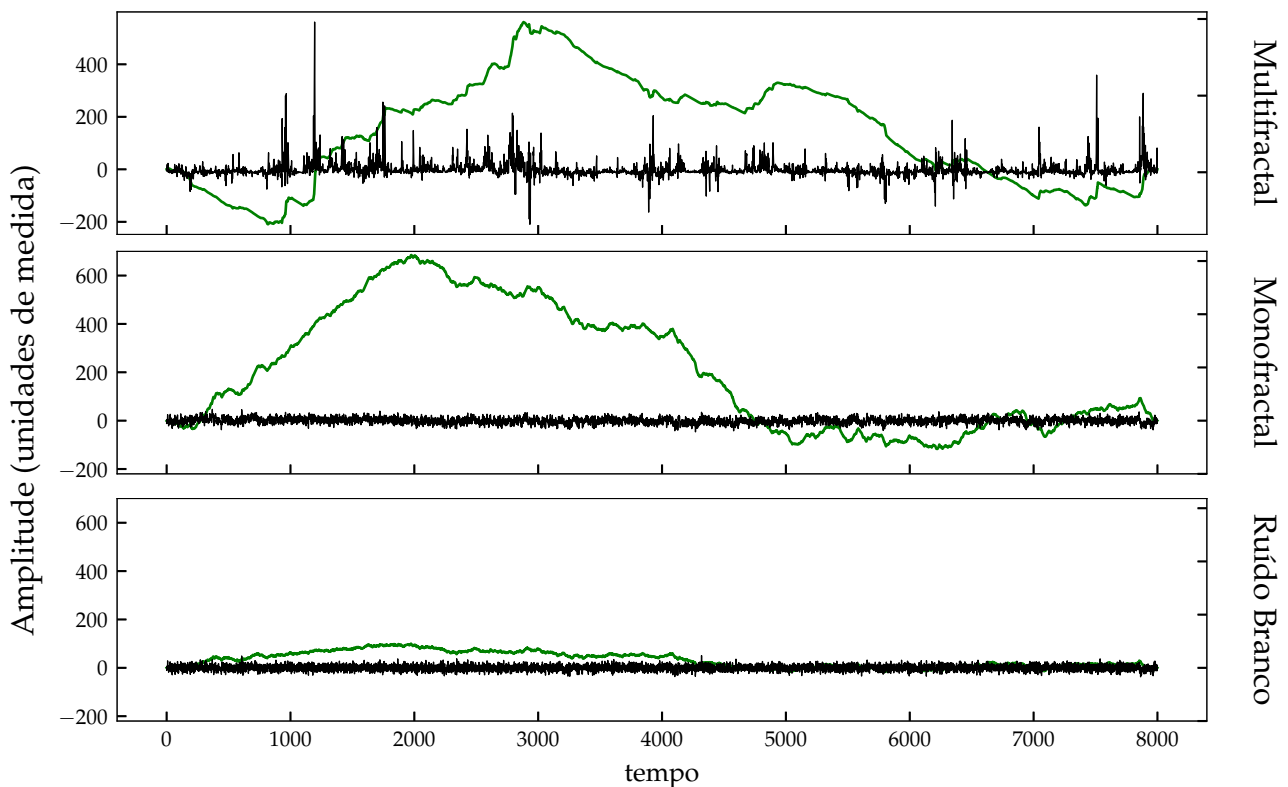


Figura 4 – Exemplos de serie temporal multifractal, monofractal e ruído branco.

Existem diversas referencias que tratam em detalhe cada um dos itens apresentados anteriormente. Recomenda-se a leitura de [44], [54] e [77].

3.1 Memória de Séries Temporais e o Expoente de Hurst

Memória longa, frequentemente referida como dependência de longo alcance ou persistência de longo prazo, caracteriza-se pela capacidade de uma série temporal manter dependências temporais ao longo de extensos períodos, desafiando a escala de observação. Esta propriedade implica que a função de autocorrelação da série abrange uma vasta sequência de defasagens, decrescendo a um ritmo mais lento quando comparada a processos padrões, como o ruído branco ou o modelo autorregressivo AR(1) de primeira ordem. Em contrapartida, séries com memória

curta exibem uma função de autocorrelação que decai exponencialmente em um intervalo temporal reduzido. Este comportamento pode ser visto nos gráficos da figura 5.

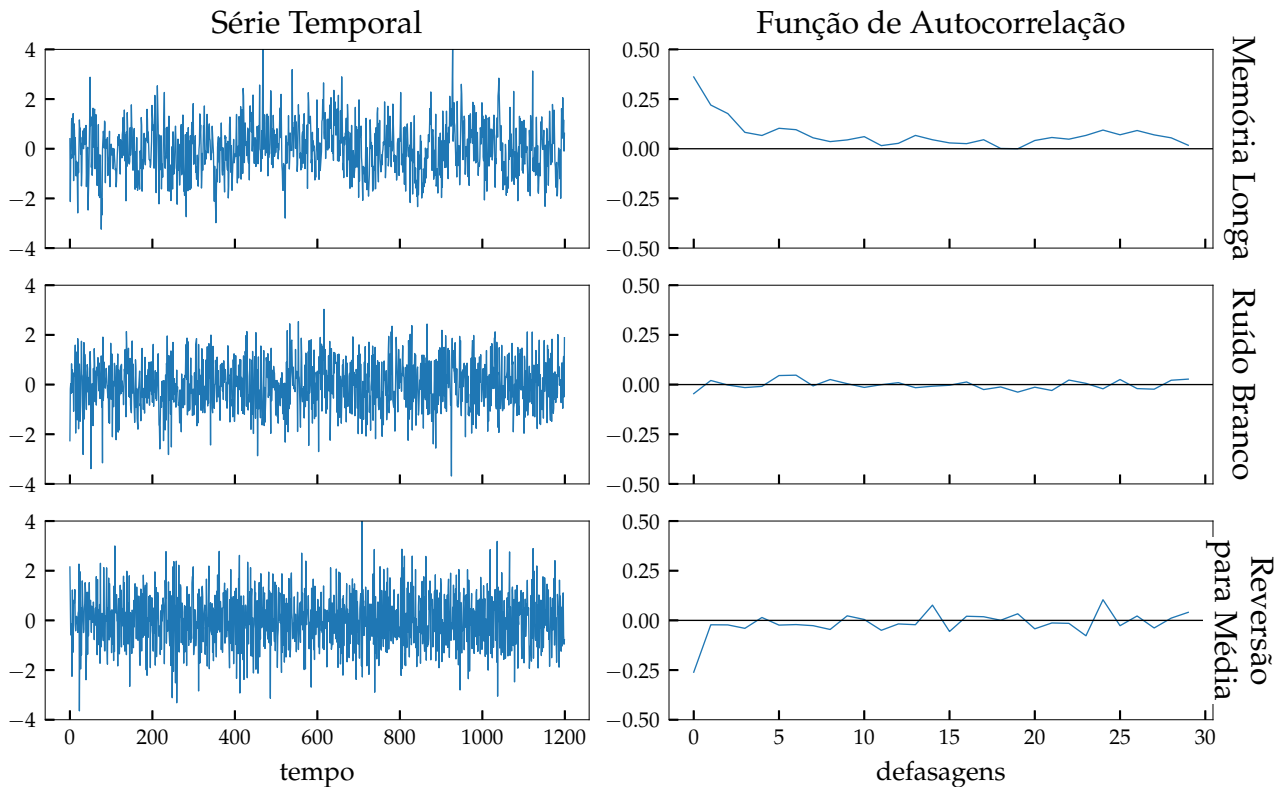


Figura 5 – Gráficos mostrando a diferença entre uma série temporal persistente, ruído branco ou anti-persistente.

Como será apresentado ao longo deste capítulo, o coeficiente de Hurst, simbolizado como H , é uma ferramenta importante para caracterizar a presença de memória longa em uma série temporal. Além de quantificar o nível de persistência na série, H desempenha um papel importante nas análises multifractais, por meio do coeficiente de Hurst generalizada. Juntamente com o espectro multifractal, proporcionam uma visão ampla da variação e heterogeneidade da memória longa em escalas da série temporal.

Vários métodos foram desenvolvidos para diagnosticar a presença de memória longa em uma série temporal estimando o H . Este capítulo, irá se concentrar em dois dos principais métodos: Rescaled Range e DFA. Para uma visão geral sobre outros métodos, [78] comparou treze estimadores do coeficiente de Hurst, sete no domínio do tempo e outros seis no domínio da frequência.

3.1.1 Rescaled Range (R/S)

Os primeiros estudos sobre memória em processos estocásticos datam da década de 1950, devido à persistência de um hidrólogo inglês, Harold Hurst, que dimensionava reservatórios ao longo do rio Nilo para acumular água contra as piores secas e expandir a área agrícola para a coroa britânica. Em 1951, aos 70 anos, Hurst publicou um artigo intitulado *The Long-Term Storage Capacity of Reservoirs.* ([47]) que tratava da modelagem de projetos de reservatórios.

Hurst estendeu suas descobertas para outras áreas dos sistemas naturais, estando convicto que havia encontrado uma constante universal que poderia caracterizar fenômenos naturais.

Conforme [79] e [75], a análise R/S foi proposta por Mandelbrot e Wallis [80] e baseada nas investigações de Hurst sobre grandezas hidrológicas do Rio Nilo. Esta análise permite que seja calculado o expoente H , uma medida da intensidade da dependência de longo prazo de uma série temporal. Uma das grandes vantagens de se utilizar este método para estimar H é a simplicidade de sua implementação computacional, permitindo que diversas heurísticas sejam testadas, algoritmo 1.

Seja $Z(t)$ uma série temporal de tamanho T , definida para $t = 1, 2, \dots, T$. Agora, considere um vetor $d = (d_{min}, \dots, d_{max})$ contendo n escalas que serão utilizadas para dividir a série temporal Z em d_i segmentos de tamanho $m_i = \lfloor T/d_i \rfloor$.

Algorithm 1 Algoritmo de cálculo do coeficiente de Hurst (H) usando *Rescaled Range Analysis*.

Data: Série temporal $Z(t)$ Vetor d com as escalas

Result: Plote $\log F \times \log d$ Coeficiente de Hurst: coeficiente angular da reta

for cada escala d_i em d **do**

Divida a série $Z(t)$ em d_i segmentos de tamanho $m_i = \lfloor T/d_i \rfloor$

for cada segmento k dos d_i segmentos **do**

Calcule a Média (E_k) e o Desvio Padrão (S_k)

Subtraia o valor de cada ponto por sua Média

Calcule a Série Acumulada

Calcule os valores Máximo (Max_k) e Mínimo (Min_k) da Série Acumulada

Calcule o intervalo $R_k = Max_k - Min_k$

Calcule a Estatística $(R/S)_k = R_k/S_k$

Calcule a Média da Estatística R/S para todos os d_i segmentos

Plote $\log(R/S)_{d_i} \times \log d_i$

Ajuste um polinômio de ordem um para os pontos do gráfico $\log - \log$

Expoente de Hurst é dado pelo coeficiente angular da reta ajustada

Os gráficos da figura 6 mostram os passos relativos à segmentação, remoção da média, integração e estatística R/S para uma escala d_i do conjunto de escalas d de uma série sintética que representa uma série temporal com reversão para a média (anti-persistência), conforme algoritmo 1.

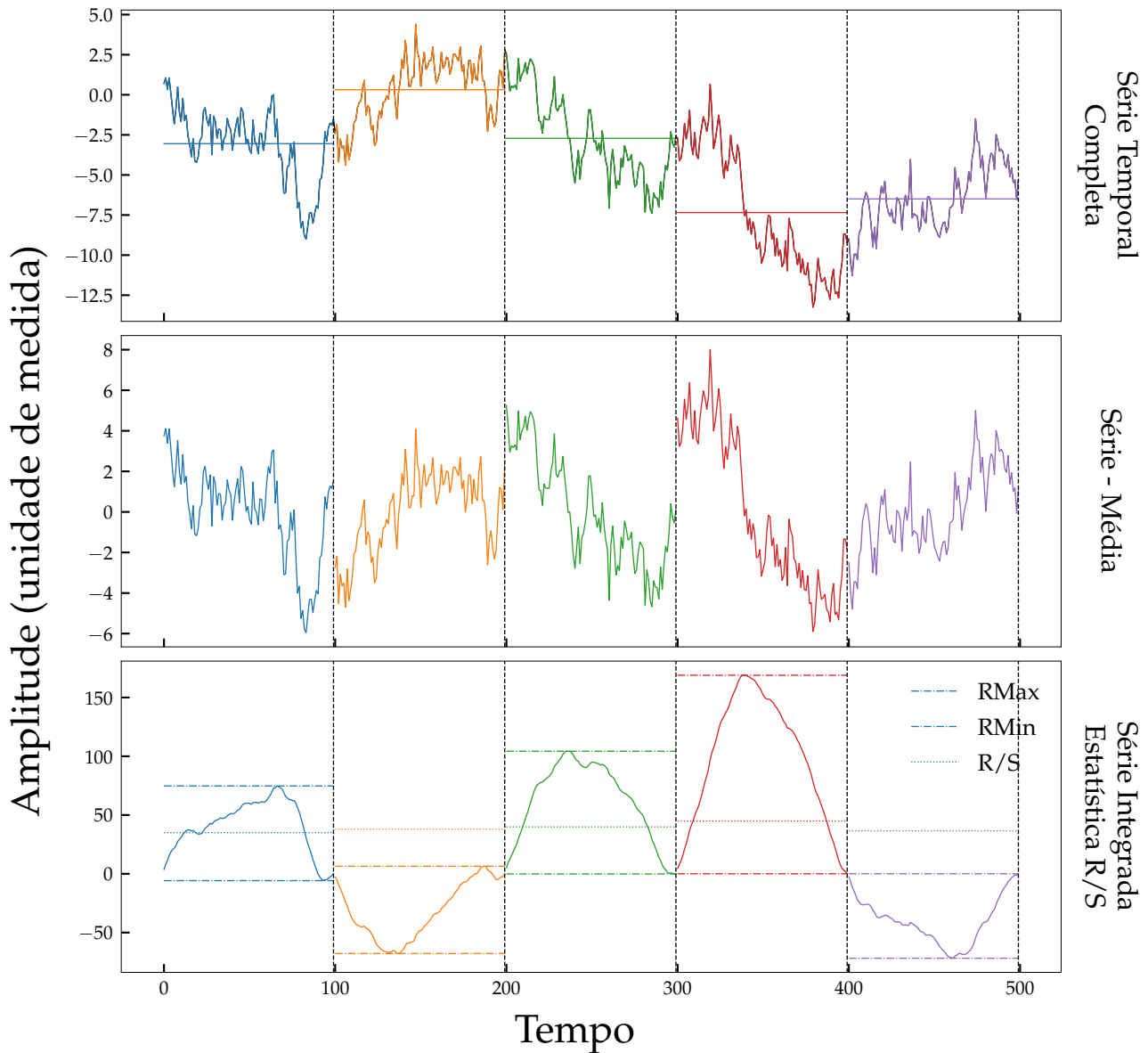


Figura 6 – Gráficos mostrando os passos iniciais do algoritmo R/S.

Após aplicar todos os passos do algoritmo 1 obtém-se os valores de (R/S) para cada uma das escalas d_i , subséries de tamanho m_i . Mandelbrot [81] demonstrou que a estatística $(R/S)_d$ segue assintoticamente a relação dada pela equação 3.3:

$$(R/S)_d \sim cd^H \quad (3.3)$$

onde H é o expoente de Hurst e c uma constante. H é obtido por aproximação ao calcular os coeficientes de uma regressão linear sobre uma amostra de horizontes de tempo crescente, Equação 3.4, onde H é a declividade da reta do gráfico $\log - \log$.

$$\log(R/S)_d = \log c + H \times \log d \quad (3.4)$$

A figura 7 apresenta o gráfico $\log - \log$ para uma série sintética gerada com $H = 0.8$. Os pontos vermelhos indicam o logaritmo da estatística R/S calculado para cada escala d de divisão

da série temporal. O conjunto de escalas é constituído de 28 valores, iniciando em $d_{min} = 10$ e finalizando na escala $d_{max} = 990$. A linha azul representa o ajuste de um polinômio de ordem 1, com coeficiente angular $H = 0.82$.

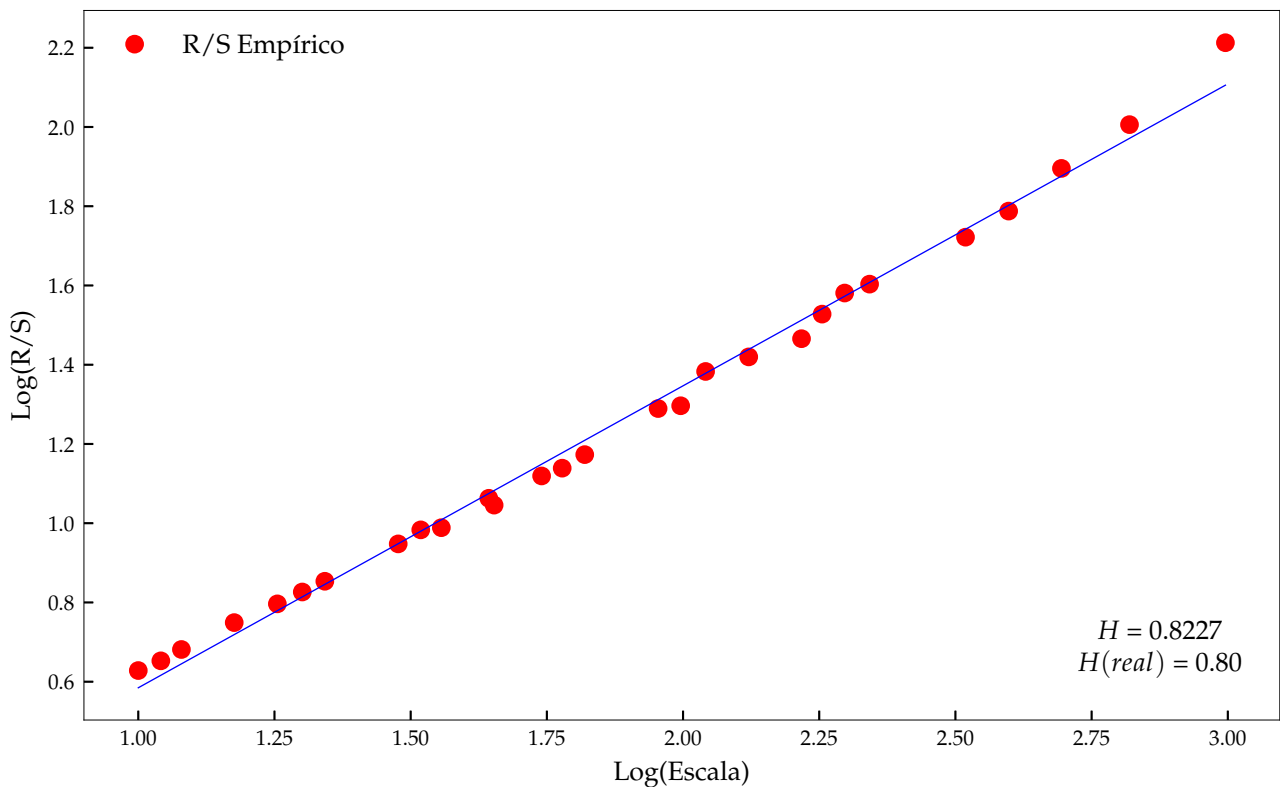


Figura 7 – Gráfico $\log - \log$ pelas estatísticas R/S em função da escala. O expoente de Hurst é dado pelo coeficiente angular da linha azul.

De acordo com a teoria original, H é definido no intervalo $0 < H < 1$ onde.

- $0.5 < H < 1$: o processo é dito persistente ou de memória longa, onde as observações passadas têm um efeito positivo nas observações futuras. Isso significa que uma elevação (ou queda) em um determinado ponto da série é seguida por elevações (ou quedas) em pontos subsequentes com uma probabilidade maior do que a média. Para um processo persistente, a função de autocorrelação decai mais lentamente do que para um processo estacionário de memória curta. Processos persistentes são caracterizados por tendências ou ciclos de longo prazo.
- $0 < H < 0.5$: processo é dito anti-persistente, memória curta ou de reversão para a média quando as observações passadas têm um efeito negativo nas observações futuras. Isso implica que uma elevação (ou queda) em um determinado ponto da série é seguida por quedas (ou elevações) em pontos subsequentes com uma probabilidade maior do que a média. Para um processo anti-persistente, há uma tendência a retornar à média ou a alternar entre valores.

- $H = 0.5$: o processo é tipicamente equivalente a um ruído branco ou movimento Browniano, onde as observações são essencialmente independentes e não apresentam nenhum tipo de persistência ou memória

A distinção entre processos persistentes e anti-persistentes é fundamental para a compreensão e modelagem adequada de séries temporais, especialmente em campos onde a memória longa desempenha um papel importante, como financeiro, hidrologia e telecomunicações.

A estatística R/S tornou-se uma ferramenta amplamente utilizada para estimar o coeficiente de Hurst e analisar memória em séries temporais. No entanto, essa estatística apresentava certas limitações, especialmente quando aplicada a séries temporais com um número limitado de observações. Anis e Lloyd [82] estudaram o comportamento assintótico da estatística R/S para ruído branco gaussiano e introduziram uma correção para esta estatística. Eles mostraram que, para pequenas amostras, a estatística R/S tende a ser enviesada e, portanto, propuseram uma correção baseada na equação (3.5).

Posteriormente, [83] introduziu o fator $\frac{T-1/2}{T}$ já apresentado na equação (3.5), uma correção empírica da equação de $E[R/S]$, onde T é o número de observações na série temporal.

Conforme explicação de [75], o coeficiente de Hurst é calculado somando-se 0.5 ao coeficiente angular de $(R/S)_d - E[(R/S)_d]$.

$$E(R/S)_d = \begin{cases} \frac{T-1/2}{T} \times \frac{\Gamma((T-1)/2)}{\sqrt{\pi} \times \Gamma(T/2)} \sum_{i=1}^{T-1} \sqrt{\frac{T-i}{i}} & \text{se } T \leq 340 \\ \frac{T-1/2}{T} \times \frac{1}{\sqrt{T\pi/2}} \sum_{i=1}^{T-1} \sqrt{\frac{T-i}{i}} & \text{se } T > 340 \end{cases} \quad (3.5)$$

Usando simulação Monte Carlo, [75] obteve intervalos de confiança para diversos tamanhos de amostra n . As curvas para os intervalos de confiança de 99%, 95% e 90% foram traçadas e mostrou um comportamento assintótico a medida que o número de amostras n aumentava. Com estas curvas [75] foi possível ajustar uma equação para cada intervalo de confiança em função de n . Segundo [75], estes intervalos de confiança calculados de forma empírica podem ser utilizados em aplicações práticas, ou seja para estimar o nível de confiança de um H calculado com método Anis-Lloyd.

As fórmulas obtidas por [75] estão reproduzidas na tabela 6.

Tabela 6: Intervalos de confiança empíricos para o valor de H estimado através do método Anis-Lloyd corrigido, com $L = 2^N$ amostras (séries temporais) de tamanho $T > 50$.

Level	Confidence intervals for $T > 50$	
	Lower bound	Upper bound
90%	$0.5 - \exp(-7.35 \log(\log N) + 4.06)$	$\exp(-7.07 \log(\log N) + 3.75) + 0.5$

Continua na próxima página

Tabela 6: Intervalos de confiança empíricos para o valor de H estimado através do método Anis-Lloyd corrigido, com $L = 2^N$ amostras (séries temporais) de tamanho $T > 50$. (Continuação)

Level	Confidence intervals for $T > 50$	
	Lower bound	Upper bound
95%	$0.5 - \exp(-7.33 \log(\log N) + 4.21)$	$\exp(-7.20 \log(\log N) + 4.04) + 0.5$
99%	$0.5 - \exp(-7.19 \log(\log N) + 4.34)$	$\exp(-7.51 \log(\log N) + 4.58) + 0.5$

Como qualquer outra técnica estatística, a tabela 7 apresenta os pontos fortes e fracos desta metodologia.

Tabela 7: Prós e Contras da Análise R/S

Prós	Contras
Simplicidade: A Análise R/S é relativamente simples de entender e aplicar.	Viés para amostras pequenas: A estatística R/S pode ser enviesada, especialmente para séries temporais com poucas observações.
Robustez: A técnica é bastante robusta contra diferentes tipos de distribuições de dados.	Sensibilidade a tendências: Pode ser sensível a tendências determinísticas.
Identificação de memória longa: Permite identificar e quantificar o comportamento de memória longa.	Assume estacionariedade: A série temporal deve ser estacionária.
Aplicável a diversas disciplinas: Tem sido aplicada em diversas áreas.	Interpretação de resultados: A interpretação dos valores de \hat{H} pode não ser sempre direta.

^a Mais detalhes podem ser encontrados na literatura, [47], [84], [80], [82], [83], [75], [5]

3.1.2 Expoente de Hurst Variável no Tempo

[85] utilizou o método *Rescaled-Range* para mostrar que os índices de bolsa de valores de mercado emergentes estavam se tornando mais eficientes ao longo do tempo. Para isso, os autores calcularam o expoente de Hurst sobre uma janela temporal de 4 anos, permitindo que seu comportamento fosse analisado. De acordo com a literatura financeira, mercados eficientes não deve apresentar memória, ou seja, toda a informação passada está contida no valor presente da ação. Em termos de expoente de Hurst, seu valor deveria convergir para 0.5, implicando que a série temporal tem comportamento similar ao passeio aleatório (*random walk*).

De acordo com a formulação apresentada em [86], o expoente de Hurst variável no tempo (H_t) é calculado considerando uma série temporal

$$z = z_{t-w+1}, z_{t-w+2}, \dots, z_t \quad (3.6)$$

, onde w é o comprimento da janela temporal. O expoente $H_t + i$ pode ser obtido da série

$$z = z_{t-w+i+1}, z_{t-w+i+2}, \dots, z_t + i \quad (3.7)$$

, usando o método *Rescaled-Range*, conforme Subseção 3.1.1.

3.1.3 Detrended Fluctuation Analysis - DFA

Metodologia desenvolvida por [17] como uma extensão da análise R/S de Hurst, visando superar algumas das limitações associadas à presença de tendências não estacionárias em séries temporais. Inicialmente foi aplicada para investigar as correlações de longo alcance em sequências de DNA, porém ao longo dos anos da década de 1990, foi utilizada em diversas outras áreas do conhecimento.

O primeiro passo do algoritmo é calcular o perfil integrado $Y(i)$ a partir da série temporal $Z(t)$ de tamanho T , de acordo com a equação (3.8). A proposta de [17] foi converter uma série de valores (que pode ser interpretada como uma "taxa de mudança" ou diferença) para uma série cumulativa ou "perfil" da série. Este perfil integrado revela tendências e flutuações cumulativas ao longo do tempo.

$$Y(i) = \sum_{t=1}^i (Z(t) - \langle Z \rangle), \quad i = 1, 2, \dots, T \quad (3.8)$$

onde $\langle Z \rangle = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Z(t)$ é a média aritmética simples.

O objetivo do DFA é investigar as correlações de longo alcance em séries temporais não estacionárias. Muitas séries temporais possuem tendências ou componentes não estacionários que podem obscurecer as correlações de longo alcance. Ao estudar o perfil integrado em vez da série original, o DFA procura remover os efeitos de qualquer tendência polinomial global da série.

De forma semelhante ao algoritmo R/S, considere um vetor $d = (d_{min}, \dots, d_{max})$ contendo n escalas, o segundo passo consiste em dividir o perfil Y em d_i segmentos não-sobrepostos de tamanho $p_i = \lfloor T/d_i \rfloor$, $X(d_i, p_i)$. Para cada escala e cada conjunto de segmentos, calcula-se a tendência local através do polinômio $P(i, j)$ de grau m ajustado pelo método dos mínimos quadrados sobre os dados, $k = 1, 2, \dots, p_i$. Para cada segmento j calcula-se $X'(i, j)$, o polinômio subtraído de $X(i, j)$ para remover a tendência local. A ideia por trás do procedimento é que, ao remover tendências locais (em várias escalas) do perfil integrado, o que resta reflete as correlações de longo alcance ou a memória longa da série original. A análise subsequente das flutuações ao redor das tendências locais fornece informações sobre a natureza dessa memória.

No quarto passo é feito o cálculo das flutuações. Dentro de cada segmento de tamanho d_i , após a remoção da tendência, a série resultante representa as flutuações em torno da tendência, cuja magnitude é dada pelo desvio quadrático médio desses resíduos em relação a zero, conforme equação (3.9).

$$F^2(i, j) = \frac{1}{p_i} \sum_{k=1}^{p_i} (X(i, j, k) - P(i, j))^2 \quad (3.9)$$

No quinto e último passo, calcula-se o valor médio da flutuação quadrática, $F(i)$, para cada uma das n subséries de tamanho d_i , conforme equação 3.10. Um valor maior de $F(i)$ indica flutuações maiores na escala d_i , enquanto um valor menor indica flutuações menores.

$$F(i) = \frac{1}{d_i} \sum_{j=1}^{d_i} [F^2(i, j)]^{1/2} \quad (3.10)$$

Os gráficos da figura 8 mostram os passos iniciais do DFA em uma série sintética com 500 observações. Esta série foi dividida em duas escalas (somente para efeito de visualização), 50 e 100 e então aplicado os procedimentos discutidos anteriormente em cada uma das escalas.

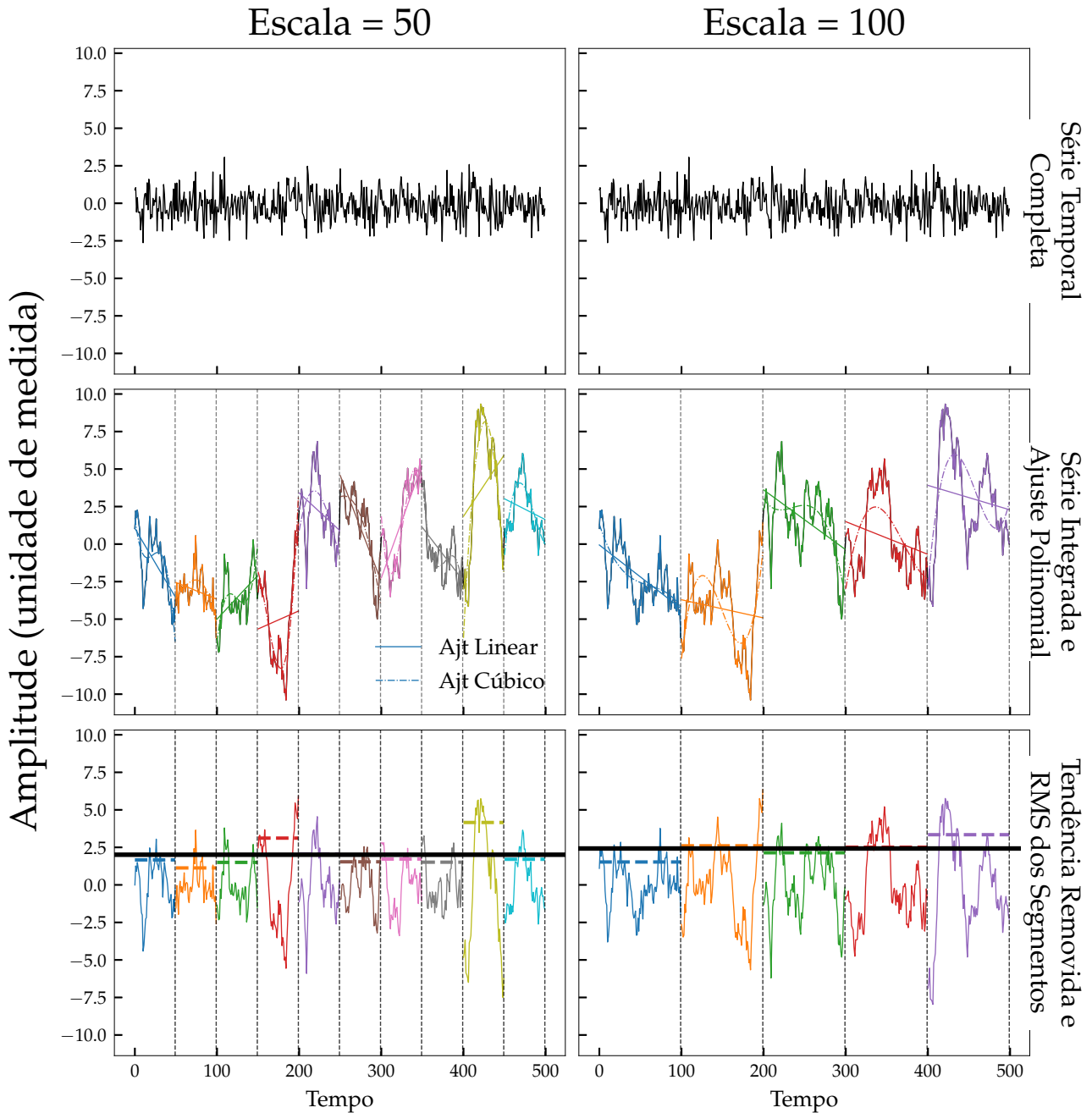


Figura 8 – Gráficos mostrando os passos iniciais para cálculo do algoritmo DFA.

Da mesma forma que na análise R/S, se $F(i)$ e d_i escalam de acordo com a lei da potência, então a relação dada pela equação 3.11 deve ser verificada:

$$F(i) \sim cd_i^H \quad (3.11)$$

onde H é o expoente de Hurst e c uma constante. Quando se plota $F(i)$ por meio de um gráfico $\log - \log$ e se observa uma relação de potência, isso é indicativo de comportamento de memória na série temporal original. H é obtido através do coeficiente angular da reta que se ajusta aos pontos do gráfico $\log - \log$ de $F(i)$ e d_i . O algoritmo 2 apresenta todos os passos do método DFA descrito nos parágrafos anteriores.

Algorithm 2 Algoritmo Detrended Fluctuation Analysis (DFA)

Data: Série temporal $Z(t)$ Grau do Polinômio m vetor de escalas d

Result: Plote $\log F(i) \times \log d_i$ Coeficiente de Hurst: coeficiente angular da reta

Calcule o perfil integrado $Y(t)$ a partir de $Z(t)$

for $i = 1, 2, \dots, n$ **do**

 Calcule $d_i = d(i)$ e $p_i = \lfloor T/d_i \rfloor$

 Divida o perfil $Y(t)$ em d_i segmentos de tamanho $p_i \rightarrow X(d_i, p_i)$

for $j = 1, 2, \dots, d_i$ **do**

 Calcule o polinômio local $P(i, j)$ de ordem m do segmento j , ajustado sobre todos os dados do segmento j ($k = 1, \dots, p_i$)

 Calcule o segmento detrendido, $X'(d_i, p_i) = X(d_i, p_i) - P(i, j)$

 Calcule $F^2(i, j) = \frac{1}{p_i} \sum_{k=1}^{p_i} X'(i, j, k)^2$

 Calcule $F(i)$ fazendo a média das flutuações sobre todos os segmentos $F(i) = \frac{1}{d_i} \sum_{j=1}^{d_i} F^2(i, j)$

Plote $\log F(i) \times \log d(i)$

A tabela 8 apresenta os pontos positivos e negativos do algoritmo DFA.

Tabela 8: Prós e Contras da Análise DFA

Prós	Contras
Robustez contra tendências não estacionárias: DFA é projetado para lidar com séries temporais com tendências.	Dependência de parâmetros: A escolha do tamanho da janela e a ordem do polinômio podem afetar os resultados.
Flexibilidade: O DFA pode ser adaptado para ordens mais altas usando polinômios de ordem superior.	Limites para tendências muito fortes: tendências muito fortes ou complexas podem ainda assim afetar o expoente de escala.
Aplicação em várias disciplinas: Usado em campos como física, medicina, economia e biologia.	Interpretação de múltiplos regimes: Pode ter dificuldade em distinguir múltiplos regimes de escala.
Identificação de memória longa: Eficaz na determinação da presença e natureza da memória longa.	Necessidade de grandes conjuntos de dados: Para estimativas confiáveis, um grande conjunto de dados pode ser necessário.

^a Mais detalhes podem ser encontrados na literatura, [17], [59], [5], [87], [88].

3.1.4 Detrended Cross-Correlation Analysis (DCCA)

O Detrended Cross-Correlation Analysis (DCCA) é uma metodologia desenvolvida para investigar as correlações cruzadas existentes entre duas séries temporais não estacionárias. Introduzido por Podobnik e Stanley em 2008, o DCCA generaliza a técnica DFA adaptando-a para duas séries simultâneas [22].

Sejam $x(t)$ e $y(t)$ duas séries temporais de tamanho N . As séries integradas $X(t)$ e $Y(t)$ são definidas como:

$$\begin{aligned} X(t) &= \sum_{i=1}^k (x(i) - \langle x \rangle), \\ Y(t) &= \sum_{i=1}^k (y(i) - \langle y \rangle) \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde $k = 1, 2, 3, \dots, N$ e $\langle x \rangle$ e $\langle y \rangle$ são as médias das respectivas séries.

As séries integradas são divididas em segmentos de tamanho s . Para cada segmento, um polinômio de grau m é ajustado aos dados através de método dos mínimos quadrados. As tendências locais p_k e p'_k são obtidas deste ajuste.

Os resíduos detrendidos são dados pelas equações:

$$\begin{aligned} \epsilon_k &= Y_k - p_k, \\ \epsilon'_k &= Y'_k - p'_k \end{aligned} \quad (3.13)$$

A função de flutuação de correlação cruzada para um segmento é:

$$F^2(s, \nu) = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s [\epsilon_{\nu s+k} \times \epsilon'_{\nu s+k}] \quad (3.14)$$

onde ν é o número do segmento.

A flutuação global é então a média das flutuações em todas as janelas:

$$F(s) = \sqrt{\frac{1}{N_s} \sum_{\nu=1}^{N_s} F^2(s, \nu)} \quad (3.15)$$

onde N_s é o número total de segmentos de tamanho s .

O DCCA pode se expresso em forma de algoritmo, resumindo os itens apresentados nesta seção.

O DCCA tem sido aplicado em diversos campos, desde a física até a economia, para investigar correlações entre séries temporais. Seu poder reside na capacidade de desvendar correlações em dados não estacionários, onde técnicas tradicionais podem não ser aplicáveis.

3.1.5 DCCA Test

Podobnik e Stanley [89], em trabalhos subsequentes ao artigo inicial sobre DCCA, introduziram um teste estatístico para avaliar a significância da correlação cruzada de duas séries temporais não estacionárias calculada pelo DCCA. Este teste foi desenvolvido para diferenciar entre correlações cruzadas intrínsecas ao sistema e correlações espúrias, proveniente do acaso.

Para realizar o teste são necessários alguns passos, que serão descritos a seguir.

- (a) Cálculo da Estatística: Eles propuseram uma estatística ρ baseada na correlação cruzada de DCCA:

$$\rho = \frac{\text{DCCA}(N)}{\sqrt{\text{DFA}(x(N)) \times \text{DFA}(y(N))}} \quad (3.16)$$

Algorithm 3 Algoritmo Detrended Cross-Correlation Analysis (DCCA)

Data: Séries temporais $x(t)$ e $y(t)$ Grau do Polinômio m vetor de escalas d

Result: Plote $\log F(i) \times \log d_i$ Coeficiente de Correlação Cruzada: coeficiente angular da reta

for para cada escala **do**

for Para cada segmento **do**

 Calcular as séries integradas Y_k e Y'_k

 Dividir as séries em segmentos de tamanho s

 Ajustar um polinômio de grau m em cada segmento para obter as tendências locais p_k e p'_k

 Calcular os resíduos detrendidos ϵ_k e ϵ'_k

 Calcular a função de flutuação de correlação cruzada $F^2(s, \nu)$ para cada segmento

 Calcular a flutuação global $F(s)$ para a escala s

A lei da potência é obtida através do gráfico $\log(F(s))$ versus $\log(s)$ quando apresentam relação aproximadamente linear. Com isso, é possível calcular a inclinação da reta, obtendo o expoente de correlação cruzada

Onde: - DCCA(N) é o coeficiente de correlação cruzada de DCCA entre as séries temporais x e y . - DFA($x(N)$) é o coeficiente de correlação temporal (H) calculado com o algoritmo DFA da série temporal x . - DFA($y(N)$) é o coeficiente de correlação temporal (H) calculado com o algoritmo DFA da série temporal y .

- (b) A avaliação da significância de ρ é realizada fazendo o embaralhamento das séries temporais diversas vezes, reorganizando seus valores aleatoriamente, e então recalculando ρ para estas séries embaralhadas. Ao embaralhar as séries, todas as correlação existentes na séries são destruídas, preservando a distribuição de probabilidades.
- (c) A estatística ρ original (calculada para as séries temporais originais) é então comparada com a distribuição de ρ obtida das séries embaralhadas. Se o ρ original estiver fora do intervalo de confiança (por exemplo, 95%) da distribuição obtida pelo embaralhamento, a correlação cruzada é considerada significativa.
- Quando o ρ original está acima do limite superior do intervalo de confiança, isso indica uma correlação cruzada positiva e significativa entre as duas séries temporais. Em outras palavras, as duas séries tendem a se mover na mesma direção mais do que seria esperado por acaso.
 - Se o ρ original estiver abaixo do limite inferior do intervalo de confiança, isso indica uma correlação cruzada negativa significativa entre as duas séries temporais. Isso significa que as duas séries tendem a se mover em direções opostas mais do que seria esperado por acaso.
 - Se o ρ original for igual a zero, então as duas séries temporais não apresentam correlação cruzada.

Este teste de significância serve para validar a presença de correlação cruzada entre duas séries temporais não-estacionárias. É uma ferramenta importante pois, em muitos sistemas complexos, pode-se detectar correlação cruzada mesmo quando ela ocorre por acaso ou devido a tendências compartilhadas nas séries. Este teste estatístico ajuda a diferenciar entre esses cenários, proporcionando uma medida mais robusta e confiável da correlação cruzada. Porém, este teste não consegue inferir a direção de transmissão entre as duas variáveis. Caso não exista conhecimento prévio sobre a dinâmica dos sistemas de onde foram amostradas as séries, então é necessário utilizar o Teste de Causalidade de Granger ou outro teste como Entropia de Transferência.

3.2 Multifractalidade

As metodologias descritas na Subseção **3.1.1** e na Subseção **3.1.3** são indicadas para processos que apresentem características monofractais, ou seja, o expoente H não varia com a escala. Mandelbrot descreveu pela primeira vez os processos multifractais, onde H varia com a escala, [90]. Segundo Mandelbrot, muitas séries temporais provenientes de fenômenos naturais não podem ser explicadas por somente um expoente de escala. Muitos trabalhos foram desenvolvidos para calcular o espectro de potência ao longo de diversas escalas.

3.2.1 Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MF DFA)

A Análise Multifractal das Flutuações Detrendidas (MF DFA) é um algoritmo usado para analisar o comportamento de multiescala de séries temporais não-estacionárias. Esta abordagem visa revelar e entender padrões complexos, como a multifractalidade, que geralmente estão ocultos nestes conjuntos de dados. Desenvolvida por Kantelhardt et al. [7] como uma generalização da Análise de Flutuações Detrendidas proposta por Peng et al. [17], o MF DFA calcula o expoente de Hurst generalizado $H(q)$ e o expoente de Rényi $\tau(q)$ para diferentes momentos q . Estes expoentes capturam as propriedades estatísticas das flutuações em diferentes escalas, permitindo a investigação separada da contribuição de escalas menores ($q < 0$) e de escalas maiores ($q > 0$).

A análise multifractal utilizando o método MF DFA tem sido aplicada em várias áreas do conhecimento que apresentam correlações de lei de potência de longo alcance. Para uma revisão abrangente das metodologias e áreas de aplicação da análise multifractal, recomenda-se a leitura do trabalho de Kantelhardt et al. [54]. Além disso, no contexto do mercado financeiro, a análise multifractal tem sido amplamente explorada, e uma excelente fonte para uma revisão sobre o assunto pode ser encontrada no artigo de Jiang et al. [6].

O método de Análise Multifractal de Flutuações Detrendidas pode ser usado para detectar os comportamentos de escala e as propriedades multifractais de séries temporais não estacionárias. De acordo com [7], o método MF DFA consiste de cinco passos, onde os três primeiros passos são baseados no método DFA, [17] e apresentado na subseção **3.1.3**.

Seja p_t uma série temporal onde $t = 1, \dots, N$, sendo N o número total de observações.

Define-se a série de retorno r_{t+1} pela diferença logarítmica do preço, de acordo com a Equação (3.17).¹

$$r_t = \log(r_t) - \log(r_{t-1}) \quad (3.17)$$

1. Determine a série integrada Y através do desvio acumulado conforme a equação 3.18, onde \bar{r} é a média da série de retorno r .

$$Y(i) = \sum_{k=1}^i [r_k - \bar{r}], \quad i = 1, \dots, N \quad (3.18)$$

2. Divida a série integrada em intervalos não sobrepostos de tamanho igual s , onde $N_s = \lfloor N/s \rfloor$. Quando N não é um múltiplo inteiro da escala s , alguns pontos no final da série não serão computados. A série integrada é novamente dividida de fim a começo para evitar esta perda de informação. Isso resulta em $2N_s$ segmentos.
3. Nesta etapa, a remoção da tendência local em cada um dos $2N_s$ segmentos é feita por meio de um ajuste polinomial de grau m , escolhido considerando a capacidade de eliminação de tendência. Para cada segmento $i = 1, \dots, s$, a variância é calculada de acordo com a Equação (3.19), onde $y_v(i)$ é o polinômio de grau m calculado pelo método dos mínimos quadrados.

$$F^2(s, v) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s Y[(v-1)s + i] - y_v(i)^2 \quad (3.19)$$

para qualquer v , $v \in (1, \dots, N_s)$

$$F^2(s, v) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s Y[N - (v - N_s)s + i] - y_v(i)^2 \quad (3.20)$$

onde $v \in (N_s + 1, \dots, 2N_s)$

4. A função de flutuação de ordem q para cada um dos $2N_s$ segmentos é dada pela Equação (3.21) para qualquer q real diferente de zero e pela Equação (3.22) quando $q = 0$.

$$F_q(s) = \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} [F^2(s, v)]^{\frac{q}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}} \quad (3.21)$$

$$F_0(s) = \exp \left\{ \frac{1}{4N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} \ln[F^2(s, v)] \right\} \quad (3.22)$$

5. Determine o comportamento de escala das funções de flutuação analisando o gráfico log-log $F_q(s) \times s$ para cada valor de q . Se as séries são correlacionadas pela lei de potência de longo alcance, então $F_q(s)$ aumenta para valores elevados de s pela lei de potência, conforme mostrado na Equação (3.23), onde o expoente de escala é calculado como a inclinação da regressão linear de $\log F_q(s)$ contra $\log s$, para cada q .

$$F_q(s) \sim s^{h(q)} \quad (3.23)$$

¹ É comum utilizar o retorno logarítmico quando está sendo feita análise de preços. Para análise de outras medidas como carga, ena e vazão pode-se utilizar o próprio valor, a primeira diferença ou logaritmo.

O espectro de singularidade, também conhecido como espectro multifractal, fornece uma forma alternativa de descrever a multifractalidade de uma série temporal. Kantelhardt et al. [7] demonstraram que o expoente de escala ou coeficiente de Rényi, τ_q , pode ser obtido através da relação entre o formalismo de contagem de caixas e a função de partição $Z_q(s)$, conforme mostrado na Equação (3.24). Esta abordagem oferece uma caracterização detalhada das flutuações em diferentes escalas e permite uma análise mais abrangente das propriedades multifractais da série temporal.

$$\tau(q) = qh(q) - 1 \quad (3.24)$$

A Equação (3.24) ilustra a relação entre o coeficiente de Hurst generalizado $h(q)$ e o expoente de escala $\tau(q)$. Esta relação é crítica, pois permite que o formalismo multifractal demonstre uma ligação entre $\tau(q)$ e o espectro multifractal $f(\alpha)$. Aplicando a transformada de Legendre à Equação (3.24), obtém-se $f(\alpha)$:

$$\text{Espectro de Singularidade} = \begin{cases} \alpha = \tau'(q) \\ f(\alpha) = q\alpha - \tau(q) \end{cases} \quad (3.25)$$

Onde α é o coeficiente de Hölder e $f(\alpha)$ é a dimensão do subconjunto da série caracterizado por α .

Alguns pontos importantes que podem ser destacados sobre o algoritmo MFDFA são:

- (a) Polinômios de grau m são usados para remover tendências de ordem $m - 1$ na série original.
- (b) A escolha do grau do polinômio para remoção da tendência local deve ser feita comparando diferentes ordens. Na maioria dos casos, a tendência pode ser eliminada com polinômios de grau 3 ou inferior.
- (c) Os resultados obtidos pelo método DFA são reproduzidos para $q = 2$ na equação (3), que é a flutuação quadrática.
- (d) Por construção, a função $F_q(s)$ é definida apenas para valores de $s \geq m + 2$.
- (e) Para escalas muito grandes, $s > N/4$, a função $F_q(s)$ torna-se estatisticamente não confiável devido ao número limitado de segmentos N_s . Portanto, escalas maiores que $N/4$ devem ser excluídas do procedimento de ajuste para determinar o coeficiente de escala $h(q)$.
- (f) O coeficiente de escala $h(q)$ também é conhecido como o expoente de Hurst generalizado.
- (g) Para séries temporais estacionárias, o expoente $h(2)$ é conhecido como o expoente de Hurst (H_2) e varia entre 0 e 1. A série temporal é considerada não correlacionada quando $H_2 = 0.5$, anti-persistente quando $0 < H_2 < 0.5$, e persistente (memória longa) quando $0.5 < H_2 < 1$.

- (h) Uma série temporal é considerada monofractal quando o coeficiente de escala $h(q)$ é constante e independente de q .
- (i) Uma série é considerada multifractal quando há uma forte dependência entre $h(q)$ e q . Para $q > 0$, $h(q)$ descreve o comportamento de escala dos segmentos com grandes flutuações, enquanto para $q < 0$, $h(q)$ descreve o comportamento de escala dos segmentos com pequenas flutuações.
- (j) O método MF DFA apenas calcula expoentes de Hurst generalizados positivos, tornando-se impreciso para séries temporais fortemente anti-persistentes, ou seja, quando $h(q)$ está próximo de zero. Nestes casos, é recomendado integrar a série temporal antes de aplicar o algoritmo MF DFA, resultando em $\bar{h}(q) = h(q) + 1$ para a nova série integrada.
- (k) A precisão do método MF DFA depende do tamanho N da série temporal. Séries com menos de 10.000 valores podem exibir multifractalidade aparente, conforme discutido em [91].

3.2.2 Multifractal Detrended Crosscorrelation Analysis (MF DCCA)

O MF DCCA, sigla para Multifractal Detrended Cross-Correlation Analysis, é um método desenvolvido para explorar as correlações multifractais existentes entre duas séries temporais distintas. Essa técnica integra os princípios do MF DFA — que se dedica ao estudo da multifractalidade em uma única série temporal — com os da DCCA, focada na análise de correlações cruzadas entre duas séries temporais. O método MF DCCA foi introduzido por [92] e, embora seus passos computacionais se assemelhem fortemente aos do MF DFA, há uma distinção fundamental: ao invés de empregar momentos destinados ao cálculo da variância de uma única variável, o MF DCCA utiliza momentos específicos para determinar a covariância entre duas variáveis.

A seguir, serão apresentados os passos necessários para calcular o MF DCCA, as funções de flutuação, os coeficientes de escala e o espectro multifractal.

- (a) Integração das Séries Temporais: Dadas duas séries temporais, $X(t)$ e $Y(t)$, suas séries integradas são:

$$X_i = \sum_{t=1}^i (X(t) - \bar{X}) \quad (3.26)$$

$$Y_i = \sum_{t=1}^i (Y(t) - \bar{Y}) \quad (3.27)$$

- (b) Divisão dos segmentos: as séries integradas são divididas em $N_s = \lfloor N/s \rfloor$ janelas não sobrepostas de igual tamanho s . Da mesma forma que no MF DFA, quando N e s não são múltiplos, a divisão não é inteira e os pontos ao final da série serão deixados de fora da avaliação. Para isso, faz-se a divisão em segmentos começando do final para o início. Com isso, tem-se $2N_s$ segmentos para serem analisados.

- (c) Remoção da tendência em cada um dos $2N_s$ segmentos, através da subtração do polinômio de ordem m ajustado aos dados do segmento s , através do método dos mínimos quadrados. As tendências locais para cada uma das séries são dadas por $x_v(i)$ e $y_v(i)$, onde $v = 1, 2, \dots, 2N_s$. A remoção para os segmentos diretos é dada por $(X((v-1)s+i) - x_v(k))$ e para os segmentos inversos $(X(N - (v - N_s)s + i) - x_v(k))$.
- (d) A flutuação de flutuação em função da escala (s) e do segmento (v) para o caso MFDCCA é dado por:

$$F_{XY}^q(s, v) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s |X((v-1)s+i) - x_v(i)| \times |Y((v-1)s+i) - y_v(i)|^q \quad (3.28)$$

para cada segmento v , tal que $v = 1, 2, \dots, N_s$, e

$$F_{XY}^q(s, v) = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s |X(N - (v - N_s)s + i) - x_v(i)| \times |Y(N - (v - N_s)s + i) - y_v(i)|^q \quad (3.29)$$

para cada segmento v , tal que $v = N_s + 1, \dots, 2N_s$, e

Quando $q = 2$, isso se reduz ao caso da flutuação quadrática.

- (e) A função de flutuação em função da escala s e do momento q é:

$$F_{XY}(q, s) = \frac{1}{2N} \sum_{v=1}^{2N/s} [F_{XY}^2(s, v)]^{\frac{1}{q}} \quad (3.30)$$

- (f) O comportamento de escala das flutuações é determinado por meio do gráfico $\log - \log$ entre $F_q(s)$ e a escala s , para cada valor de q . Se as duas séries $X(t)$ e $Y(t)$ apresentam correlação cruzada de longo alcance, $F_{XY}(q, s)$ aumentará para grandes valores de s através da lei da potência, onde:

$$F_{XY}(q, s) \sim s^{H_{xy}(q)} \quad (3.31)$$

então o gráfico $\log - \log$ deverá apresentar relações lineares entre $F_{XY}(q, s)$ e s , para cada q , e $H_{xy}(q)$ é dado pelo coeficiente angular da reta representada pela equação:

$$\log F_{XY}(q, s) = H_{xy}(q) \times \log(s) + \log A \quad (3.32)$$

Assim, a relação de potência entre as séries $X(t)$ e $Y(t)$ é descrita pelo expoente de escala $H_{xy}(q)$, conhecido como o expoente de correlação cruzada generalizado. A monofractalidade ou a multifractalidade da correlação cruzada entre as séries temporais é obtida quando $H_{xy}(q)$ é dependente de q , ou quando $H_{xy}(q)$ é dependente de q , respectivamente. Para valores positivos de q , $H_{xy}(q)$ descreve o comportamento de escala para segmentos com grandes flutuações e para valores negativos de q , descreve o comportamento de escala para segmentos com pequenas flutuações.

De acordo com [93], $H_{xy}(q = 2)$ é o equivalente bivariado do coeficiente de Hurst univariado H_2 . Quando $H_{xy}(q = 2) > 0.5$ então a correlação cruzada entre as duas séries temporais

apresenta memória longa, ou persistência de longo prazo. Caso $H_{xy}(q = 2) < 0.5$ então a correlação cruzada apresenta anti-persistência ou reversão para a média. E, quando $H_{xy}(q = 2) = 0.5$ então não existe correlação cruzada ente as séries.

Para [22], a correlação cruzada de longo termo entre duas séries temporais (no caso, duas ações) implicam que cada série temporal separadamente apresenta memória de seus próprios valores anteriores e também apresenta memória longa de valores anteriores da segunda série. Neste mesmo contexto, memória longa ou persistência de longo prazo indica que um incremento em uma série, tem maior probabilidade de ser seguido por um incremento na outra série. Memória curta, anti-persistência ou reversão para a média pode ser entendido como um movimento de incremento em uma série possuir maior probabilidade de ser seguido por um movimento de decremento na outra.

Para confirmar a significância do nível de correlação cruzadas entre duas séries temporais não-estacionárias, o teste proposto por [22] será aplicado.

- (g) Coeficiente de escala dado pela relação entre $\tau_{xy}(q)$ e q é dado pela equação

$$\tau_{xy}(q) = qH_{xy}(q) - 1 \quad (3.33)$$

conforme apresentado em [94]. De forma similar a sua versão univariada, se a relação entre $\tau_{xy}(q)$ e q for não linear, então a correlação cruzada entre as séries é multifractal; monofractal, caso a relação seja linear.

- (h) Espectro Multifractal é dado pelas equações de α e $f(\alpha)$ (3.34), obtidas através da transformação de Legendre.

$$\begin{aligned} \alpha &= H_{xy}(q) + q \times \frac{dH_{xy}(q)}{dq}, \\ f(\alpha) &= q \times (\alpha - H_{xy}(q)) + 1 \end{aligned} \quad (3.34)$$

- (i) $\Delta\alpha$ e ΔH são duas medidas da força da multifractalidade usadas no caso univariado e que possuem versões similares para o caso bivariado. Quanto maior ΔH e $\Delta\alpha$ maior será a multifractalidade da correlação cruzada entre as séries $X(t)$ e $Y(t)$.

$$\Delta H_{xy} = H_{xy}^m ax(q) - H_{xy}^m in(q) \quad (3.35)$$

$$\Delta\alpha_{xy} = \alpha_{xy}^m ax - \alpha_{xy}^m in(q) \quad (3.36)$$

O espectro $h(q)$ resultante fornece uma visão completa das propriedades multifractais da correlação entre as duas séries temporais.

3.2.3 Fontes de multifractalidade

Kantelhardt et al. [7] apresentaram um procedimento para analisar dois diferentes tipos de multifractalidade: (i) multifractalidade devido a uma função densidade de probabilidade heterogênea; e (ii) multifractalidade devido a diferentes correlações de longo alcance (lineares e não lineares) para pequenas e grandes flutuações.

Quando os dados de uma série temporal são embaralhados, as correlações temporais (memórias de curto e longo alcance) são destruídas, mantendo intacta a distribuição de probabilidade. De acordo com [7], a Equação (3.37) fornece o impacto da correlação na multifractalidade aparente.

$$h_{corr}(q) = h(q) - h_{shuf}(q) \quad (3.37)$$

onde $h_{shuf}(q)$ indica o coeficiente de Hurst generalizado para a série embaralhada e $h_{corr}(q)$ é o coeficiente de Hurst generalizado devido às correlações lineares e não lineares da série. Se apenas a multifractalidade do tipo (i) estiver presente, então $h_{corr}(q) = 0$ e $h_{shuf}(q) = h(q)$. Quando $h_{corr}(q) \neq 0$, indica a presença de correlações, e se $h_{corr}(q)$ depender de q , então se tem a presença de multifractalidade do tipo (ii). Se apenas existir correlação do tipo (ii), então $h_{shuf}(q) = 0.5$ e $h(q) = 0.5 + h_{corr}(q)$. Se ambos os tipos de multifractalidade estiverem presentes, então $h_{corr}(q)$ e $h_{shuf}(q)$ dependerão de q .

Outros trabalhos mostraram uma formulação equivalente considerando Δh , Equação (3.40), e $\Delta\alpha$, Equação (3.41), ao invés de $h(q)$, como em [6] Seção 7.2.

$$\begin{aligned} \Delta h_{corr} &= \Delta h - \Delta h_{shuf} \\ \Delta\alpha_{corr} &= \Delta\alpha - \Delta\alpha_{shuf} \end{aligned} \quad (3.38)$$

O método da Transformada de Fourier Ajustada por Amplitude (AAFT) [95] é aplicado para analisar o impacto de uma função densidade de probabilidade heterogênea na multifractalidade das séries de retorno. No entanto, existem vários métodos para eliminar o componente não linear de séries temporais, conforme discutido em [6]. O método AAFT envolve a criação de séries substitutas, preservando a estrutura de correlação temporal, mas eliminando o componente não linear. Aplica-se o seguinte procedimento: (i) transforma a série temporal original no domínio da frequência usando a transformada de Fourier; (ii) embaralha aleatoriamente as fases destes componentes; (iii) aplica a transformada de Fourier inversa para obter a série substituta. Esta técnica preserva as características estatísticas lineares da série original, como média e variância, enquanto elimina a correlação temporal não linear. Portanto, séries substitutas são usadas para investigar a influência da função densidade de probabilidade na multifractalidade da série de retorno. Se H_q da série substituta for independente de q então a amplitude da função densidade de probabilidade desempenha um papel importante na multifractalidade da série de retorno. Da mesma forma que no caso da série embaralhada, caso a série substituta apresente multifractalidade, porém mais fraca que a série original então a multifractalidade da

série original é proveniente de ambas correlação temporal e amplitude da função densidade de probabilidade.

3.2.4 Fontes de Multifractalidade Aparente

A multifractalidade aparente em uma série temporal não estacionária pode ser originada de várias fontes. Uma série temporal multifractal exibe flutuações em muitas escalas, onde diferentes segmentos da série têm propriedades estatísticas distintas. A multifractalidade real é inerente à própria série, enquanto a multifractalidade aparente pode ser induzida por fatores externos ou características da série que não estão relacionadas à multifractalidade intrínseca. Aqui estão algumas fontes de multifractalidade aparente:

- **Tendências e Não Estacionariedade:** Uma das fontes mais comuns de multifractalidade aparente é a presença de tendências ou componentes não estacionários na série temporal. Isso pode dar a ilusão de multifractalidade quando, na verdade, a série é monofractal ou possui características de escala mais simples.
- **Mudanças de Regime:** Mudanças abruptas ou transições de fase em uma série temporal, onde diferentes segmentos têm propriedades estatísticas distintas, podem levar a uma análise multifractal aparente.
- **Ruído Aditivo:** Certos tipos de ruído, quando adicionados a uma série, podem conferir características multifractais à série resultante.
- **Superposição de Processos com Diferentes Exponentes:** A combinação ou superposição de várias séries temporais, cada uma com seu próprio comportamento de escala, pode resultar em uma série multifractal aparente.
- **Artefatos de Medição:** Em algumas circunstâncias, o próprio processo de medição ou coleta de dados pode introduzir características multifractais na série.
- **Condições de Contorno ou Eventos Externos:** Em sistemas físicos ou econômicos, certas condições de contorno ou eventos externos (como choques externos) podem induzir multifractalidade aparente.

É importante diferenciar entre multifractalidade inerente e aparente ao analisar séries temporais. Uma análise adequada muitas vezes envolve tentar remover ou levar em consideração as fontes de multifractalidade aparente para obter uma compreensão clara das propriedades de escala da série.

Neste estudo, analisou-se a influência do tamanho da amostra, sazonalidade e tendências sob a perspectiva da multifractalidade. O objetivo era investigar métodos que pudessem ser usados para mitigar essas fontes de multifractalidade aparente, permitindo a extração das características multifractais intrínsecas do processo estocástico subjacente.

3.2.4.1 Tamanho da Amostra

O tamanho finito da amostra é uma fonte significativa de multifractalidade aparente. Quando a série temporal é curta ou limitada, a estimação de propriedades de escala e, em particular, de características multifractais pode ser imprecisa e influenciada por flutuações estatísticas aleatórias.

Os métodos MF DFA e DFA são fortemente influenciados pelo tamanho da amostra devido ao seu procedimento de remoção da tendência, que envolve o ajuste polinomial aos dados de cada segmento. A escolha do intervalo de escala e o tamanho da amostra podem resultar em ajustes polinomiais baseados em um número limitado de observações, levando a estimativas potencialmente imprecisas.

Weron [75] discute as propriedades da amostra finita de estimadores comuns usados para determinar a dependência de longo alcance em séries temporais e fornece uma análise abrangente sobre a confiabilidade desses estimadores em contextos de tamanho finito da amostra. Gerou um grande número de realizações independentes (10.000) para diversos comprimentos (variando de 256 a 65536) de um ruído Gaussiano branco. Computou os intervalos de confiança para cada um dos comprimentos de amostras e plotou os quantis das amostras em relação ao tamanho e ajustou alguma função. Ele mostrou empiricamente que o intervalo de confiança depende do tamanho da amostra e do intervalo de escala utilizado. Kantelhardt et al. [7] realizaram uma análise empírica sobre a robustez das estimativas obtidas pelo método MF DFA, especialmente no contexto de séries temporais de tamanho finito. Eles enfatizaram a necessidade de cautela ao interpretar e inferir propriedades multifractais em séries temporais curtas. Na ausência de conjuntos de dados de maior extensão que poderiam fornecer estimativas mais robustas, é prudente reservar julgamento sobre se uma série temporal manifesta multifractalidade intrínseca ou simplesmente exibe multifractalidade aparente devido a limitações amostrais.

3.2.4.2 Componentes Sazonais

Uma série temporal pode possuir diversas características devido ao seu processo estocástico subjacente. Dentre as componentes não-observáveis mais comuns estão a tendência, os ciclos, a sazonalidade e os ruídos. Os modelos mais usados na literatura fazem a decomposição das séries temporais em tendência, sazonalidade e resíduo. Nestes modelos, os ciclos são obtidos juntamente com a tendência, [96], [79], [97].

A **sazonalidade** explica o comportamento cíclico (ao longo de um ano) das grandezas, muitas vezes, sendo resultado de suas variações em função de fenômenos exógenos ao processo estocástico subjacente, tendo como exemplo as estações do ano que influenciam o comportamento das vazões afluentes do consumo de energia elétrica e do próprio preço.

Como a sazonalidade é uma forma de tendência não estacionária, acaba distorcendo a análise multifractal, dando uma ilusão de multifractalidade aparente quando, na realidade, a série é dominada por essas flutuações sazonais. Assim, é comum, especialmente em séries temporais econômicas ou climáticas, remover ou pelo menos considerar a sazonalidade antes de

realizar análises multifractais para garantir que os resultados reflitam as propriedades intrínsecas da série e não sejam simplesmente um artefato da sazonalidade.

A **tendência** é uma grandeza que é avaliada em relação à variável tempo, e revela um comportamento que tende a ser maior ou menor à medida que o tempo passa. Neste caso, a tendência pode ser consequência de uma série de fatores inerentes aos processos físicos subjacentes ao movimento estocástico que gera a série temporal, como por exemplo, aumento da população, evolução técnico-científica, fenômenos climáticos (como El Nino e La Nina), variação da temperatura, etc.

O **ciclo** manifesta-se na forma de flutuações semelhantes a ondas em torno das tendências, apresentando duração superior a um ano, porém não tendo a exata periodicidade que caracteriza o padrão sazonal.

Os modelos DFA e MF DFA consideram a remoção de tendência dentro da própria metodologia, conforme discutido nas seções **3.1.3** e **3.2.1**.

Ao expurgar os efeitos sazonais, cíclicos e de tendência de uma série temporal, o que resta da sua variação é chamada de **flutuação residual** e pode ser considerada como proveniente de componentes aleatórios. Esse componente captura eventos aleatórios ou anômalos que não são explicados pelos outros dois componentes.

3.2.5 Métricas de Grau de Multifractalidade e a Eficiência do Mercado

A Teoria do Mercado Eficiente, proposta por Fama em 1970 [98], estabelece uma relação entre a disponibilidade de informação e o preço de mercado. Em um mercado eficiente, o preço reflete todas as informações disponíveis, tornando-o imprevisível, pois ele se comporta de maneira aleatória. Segundo Fama, o preço em um mercado eficiente segue um processo estocástico *markoviano*, no qual as probabilidades associadas ao processo em um dado tempo futuro dependem apenas do estado presente, independentemente de eventos passados. Portanto, um processo *markoviano* não exibe uma correlação temporal entre seus dados e é considerado sem memória.

Recentemente, estudos conduzidos por Cajueiro e Tabak [99, 100] analisaram a eficiência de mercado usando o coeficiente de Hurst (H_2), calculado ao longo do período de amostragem em uma janela deslizante, usando as metodologias R/S ou DFA como proxies. No entanto, esses estudos adotaram métodos monofractais para calcular o coeficiente de Hurst sem considerar as possíveis características multifractais dos mercados analisados. Ao utilizar métodos multifractais, como MF DFA, pode-se capturar nuances adicionais na estrutura de escala dos preços de mercado e explorar a presença de multifractalidade, que pode fornecer informações importantes sobre a complexidade e eficiência do mercado de eletricidade.

Kristoufek e Vosvrda [101] empregaram o coeficiente de Hurst, a dimensão fractal e a autocorrelação do lag um para propor uma medida combinada de ineficiência de mercado dada pela Equação (3.39):

$$IE = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{M_i - M_i^*}{M_{i,max} - M_{i,min}} \right)^2} \quad (3.39)$$

onde M_i é a medida i -th estimada pelo método i , M_i^* é o valor teórico para séries não correlacionadas, e a distância $M_i - M_i^*$ é um índice de ineficiência de mercado. Várias publicações aplicaram esse índice em diversos mercados, e os resultados consistentemente mostraram que os mercados emergentes eram menos eficientes. Em contraste, os mercados desenvolvidos eram mais eficientes, ou seja, apresentavam um nível menor de ineficiência. Esta observação alinha-se com a Hipótese do Mercado Eficiente, que postula que os preços refletem todas as informações disponíveis nos mercados eficientes, enquanto nos mercados menos eficientes, a informação pode não estar totalmente incorporada aos preços, criando oportunidades de arbitragem e, potencialmente, resultando em maior ineficiência. Essas descobertas destacam a importância de investigar a eficiência dos mercados financeiros, de commodities e de eletricidade e seu impacto nos preços dos ativos, fornecendo informações importantes para investidores, reguladores e formuladores de políticas.

Como visto na seção **3.2.1**, $h(q)$ é independente de q para séries temporais monofractais com suporte compacto. Se pequenas e grandes flutuações escalonam de maneira diferente, então $h(q)$ mostra uma forte dependência em q , caracterizando a série temporal como multifractal. A variabilidade de $h(q)$ está diretamente relacionada ao grau de multifractalidade que o sinal apresenta e pode ser medida pela Equação (3.40), conforme [102]:

$$\Delta h = h(q_{min}) - h(q_{max}) \quad (3.40)$$

A força da multifractalidade, medida através de Δh , foi aplicada aos retornos de índices de 32 mercados de ações em diferentes países. Além desta medida, [102] usou outra medida de força de multifractalidade, baseada no comprimento do espectro multifractal $f(\alpha)$, chamado $\Delta\alpha$, onde α representa o coeficiente de Hölder, como pode ser visto na equação (3.41). Essas medidas fornecem uma avaliação abrangente da multifractalidade presente nos mercados de ações, permitindo uma compreensão das características complexas e não lineares destas séries temporais. Ao considerar diferentes medidas de força de multifractalidade, é possível obter uma perspectiva completa sobre a estrutura e dinâmica desses mercados, contribuindo para a compreensão dos processos subjacentes e auxiliando na tomada de decisão de investimentos.

$$\Delta\alpha = \alpha(q_{min}) - \alpha(q_{max}) \quad (3.41)$$

Numerosos artigos estudaram a eficiência dos mercados de eletricidade. Para uma revisão de artigos que abordaram esta questão, veja [103]. Mais recentemente, [71] estimou a eficiência do mercado de eletricidade dos EUA (MASS, MIDC, PALO e PJM) através do índice *Magnitude of Long Memory* ([104]) dado pela Equação (3.42)

$$MLM = \frac{1}{2} (|h(q_{min}) - 0.5| + |h(q_{max}) + 0.5|) = \frac{1}{2} \Delta h \quad (3.42)$$

onde um mercado é eficiente quando as pequenas flutuações ($q = q_{min} < 0$) e as grandes flutuações ($q = q_{max} > 0$) seguem processos estocásticos *markovianos* (caminhada aleatória) e o valor de MLM tende a zero. Quanto maior o valor de MLM , maior o grau de multifractalidade do processo e menor a eficiência do mercado subjacente. Por outro lado, quanto menor o MLM , mais eficiente é o mercado.

3.3 Decomposição de Séries temporais

O modelo de decomposição de uma série temporal $\{Z_t, t = 1, \dots, N\}$ pode ser dado pela soma de três componentes (modelo aditivo) não-observáveis, conforme Equação 3.43, ou pelo produto das mesmas três componentes (modelo multiplicativo), conforme Equação 3.44:

$$Z_t = T_t + S_t + \alpha_t \quad (3.43)$$

$$Z_t = T_t \times S_t \times \alpha_t \quad (3.44)$$

onde T_t representa a tendência da série; S_t , a sazonalidade e α_t , o resíduo.

Desde que a variação sazonal em torno do ciclo da tendência não varie com o nível da série temporal, a decomposição aditiva é mais recomendada. Já, se a variação sazonal em torno do ciclo de tendência variar com o nível da série temporal, a decomposição multiplicativa é recomendada. Decomposições multiplicativas são comuns em séries temporais econômicas.

Existem diversos modelos na literatura para decomposição de séries temporais. O modelo clássico, talvez o mais simples, é baseado no uso da média móvel para estimar o componente tendência. Para o modelo aditivo, o componente sazonal é obtido subtraindo o componente de tendência da série temporal original e calculando as médias mensais destes resíduos. A série remanescente obtida pela remoção da tendência é conhecida como série detrendida ou *detrended* em inglês. Após a estimação do componente sazonal é possível aplicar a decomposição completa à série temporal, de acordo com o modelo adotado, [96] e [79].

3.3.1 Seasonal and Trend Decomposition with Loess - STL

Nesta Tese, será utilizado o método *Seasonal and Trend Decomposition with Loess* (STL) e sua variante MSTL (Multiple STL) quando for necessário remover mais de um tipo de sazonalidade, como, por exemplo, séries em base horária que apresentam sazonalidade diária e semanal. Loess (Locally Estimated Scatterplot Smoothing) é uma técnica de suavização de dados que combina múltiplas regressões em um processo adaptativo, onde a suavização é realizada sobre pontos locais na série temporal ou distribuição de dados. Devido à sua natureza adaptativa, o Loess é especialmente útil para modelar relações não lineares e não paramétricas entre variáveis, [105], [106], [96].

O STL foi escolhido, pois apresenta os seguintes critérios:

- Os componentes de tendência e sazonalidade não são distorcidos por comportamento transitório e aberrante nos dados;
- Cálculo rápido, mesmo para séries temporais longas.
- Disponibilidade de implementações eficientes como na biblioteca Statsmodels, [107] do Python ou no pacote Forecast [108] do R.

3.3.2 Medindo a Força da Tendência e Sazonalidade

De acordo com [96], a decomposição de séries temporais pode ser utilizada para medir a força da tendência e da sazonalidade. Considere a Equação 3.43, para calcular a força da tendência, a série ajustada pela sazonalidade deve ter muito mais variação do que a série remanescente. Assim, a Equação 3.45 define a força da tendência e a equação 3.46, a força da sazonalidade de uma série temporal.

$$F_T = \max\left(0, 1 - \frac{\text{Var}(\alpha_t)}{\text{Var}(T_t + \alpha_t)}\right) \quad (3.45)$$

$$F_S = \max\left(0, 1 - \frac{\text{Var}(\alpha_t)}{\text{Var}(S_t + \alpha_t)}\right) \quad (3.46)$$

As medidas de força são valores que variam entre 0 (pouca força) e 1 (muita força). Estas medidas são importantes para classificar as séries quanto à força da sazonalidade e da tendência.

- Sazonalidade:

Baixa: $F_S \rightarrow 0$

Alta: $F_S \rightarrow 1$

- Tendência:

Baixa: $F_T \rightarrow 0$

Alta: $F_T \rightarrow 1$

Estas medidas são importantes para classificação de séries temporais e serão utilizadas na comparação entre a força da sazonalidade e as propriedades multifractais de uma série temporal.

4 Dados

4.1 Introdução

No Brasil, os modelos de despacho hidrotérmico consideram as vazões afluentes às usinas hidrelétricas como a principal fonte de incerteza. A otimização é realizada por meio da metodologia de programação dinâmica dual estocástica. Essa metodologia opta entre despachar energia das usinas hidrelétricas a curto prazo, deplecionando os reservatórios, ou conservar água para futuras operações [109, 110]. Se a energia hidrelétrica for escolhida para suprir a demanda atual e ocorrer uma seca posteriormente, pode ser necessário utilizar a geração térmica, que possui um custo mais elevado, ou até mesmo interromper o fornecimento de energia. Por outro lado, se houver uma escolha por uma utilização mais intensa da geração térmica, mantendo os reservatórios em níveis elevados, e houver um alto influxo de água subsequente, pode haver vertimento, resultando em desperdício de energia [1].

A operação do sistema em escalas mensal, semanal e diária é estruturada por meio de uma série de modelos de despacho hidrotérmico. Esses modelos equilibram o detalhamento das incertezas com a representação do sistema eletro-energético. Nos modelos de médio prazo, as incertezas são mais enfatizadas, enquanto a representação do sistema é mais simplificada. No entanto, à medida que se avança para o modelo de curtíssimo prazo, o foco se desloca para uma representação mais detalhada do sistema eletro-energético, e as incertezas se tornam secundárias [1].

Nos modelos de médio (mensal) e curto (semanal) prazos, as vazões afluentes são a principal fonte de incerteza para a otimização estocástica. No modelo de curtíssimo prazo (horário), a otimização é determinística e integrada ao modelo de curto prazo, absorvendo os riscos calculados no modelo estocástico.

As previsões ou gerações de cenários futuros de variáveis de entrada como vazão (ou energia natural afluyente) e mercado são vitais para o planejamento da operação do sistema e, conseqüentemente, para a determinação do custo marginal de operação. No caso das variáveis hidrológicas ou energéticas, o modelo de médio prazo emprega técnicas estatísticas para projetar cenários mensais de energia natural afluyente até 60 meses à frente, baseando-se em modelos auto-regressivos desenvolvidos por Box e Jenkins, que consideram a periodicidade das séries históricas (Modelo Autoregressivo Periódico de Ordem p - PAR(p)) [111, 112]. O modelo de curto prazo combina modelos estatísticos auto-regressivos periódicos com modelos hidrológicos do tipo chuva-vazão [113]. O modelo de curtíssimo prazo utiliza previsões de vazão de modelos hidrológicos chuva-vazão para até 10 dias à frente [114, 115]. A sazonalidade dos padrões de chuva em cada bacia influencia diretamente as previsões energéticas e hidrológicas.

A modelagem do despacho hidrotérmico consiste numa sequência de modelos matemáticos que contemplam projeções de médio (até 5 anos, mensalmente), curto (até 2 meses, semanalmente) e curtíssimo prazos (até 1 semana, em base horária). As condições do sistema são determinadas pelo balanço de oferta e demanda de cada submercado e para cada período do horizonte

de planejamento. O Sistema Interligado Nacional é segmentado em quatro submercados, correspondendo às regiões geo-elétricas do país. Apesar de interconectadas, essas regiões apresentam características distintas e restrições de transmissão. Essas restrições são refletidas em cada modelo através das capacidades de intercâmbio. A Figura 9 ilustra a divisão geo-elétrica do Brasil em quatro submercados.¹

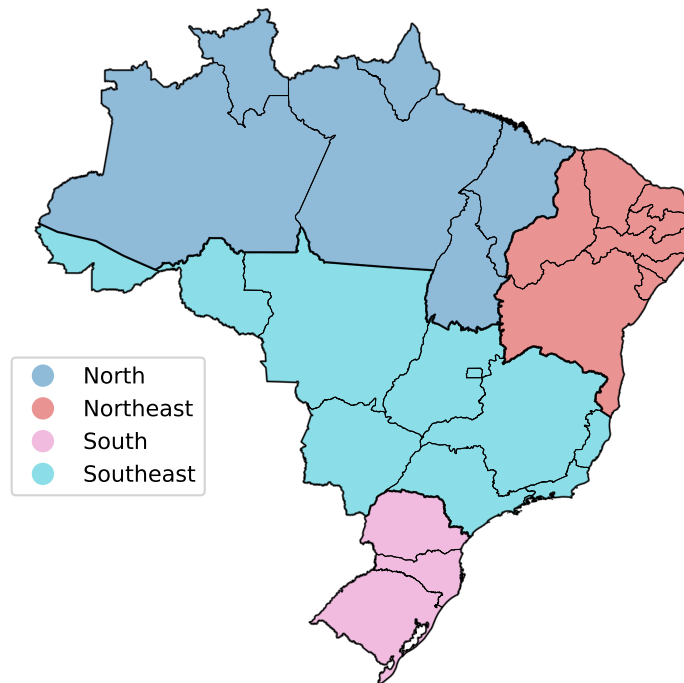


Figura 9 – Submercados que compõem o Mercado Brasileiro de Eletricidade.

Diversas restrições são aplicadas à oferta, incluindo restrições elétricas e hidráulicas, que em determinados momentos podem reduzir a disponibilidade de geração das usinas, afetando a operação e o CMO. Além da geração hidráulica, a oferta do SIN abrange geração termelétrica (nuclear, gás natural, carvão, óleo combustível e óleo diesel), eólica, solar, pequenas centrais hidrelétricas e biomassa. O número de restrições aumenta à medida que se passa do modelo de longo prazo para o de curto prazo.

O CMO é determinado para cada barra do sistema, utilizando o multiplicador de Lagrange nas restrições de demanda, após a convergência do algoritmo de otimização em busca de uma política ótima de despacho hidrotérmico que minimize o custo de operação esperado. O CMO

¹ Apesar do mapa da Figura 9 não estar indicando, o Brasil ainda apresenta áreas não conectadas ao SIN, principalmente na região Norte. Estas áreas em conjunto formam o Sistema Isolado e são atendidas primordialmente por usinas termelétricas (óleo diesel ou óleo combustível) e, mais recentemente, por geração fotovoltaica.

por submercado é calculado a partir de uma média ponderada dos custos marginais de cada barra pertencente ao submercado, usando suas cargas como pesos. Mesmo que os dados de entrada hidro-energéticos (cargas, vazões ou ENAs) mostrem sazonalidade, o CMO também sofre influência de outros fatores, como a curva de despacho termelétrico, que é não-linear e apresenta regiões de descontinuidade. Assim, a sazonalidade do CMO, seja ela horária, diária, semanal ou mensal, não é imediatamente evidente e requer uma análise detalhada para ser compreendida.

Depois de determinados os valores do CMO, são aplicados limites inferiores e superiores no cálculo do PLD, conforme homologação por parte da ANEEL. Antes de analisar o comportamento do PLD, é essencial compreender como o CMO é obtido e identificar quais variáveis influenciam mais sua estocasticidade.

4.2 Custo Marginal de Operação

Nesta seção, serão apresentados os fatos estilizados do CMO. Weron [5] cita 4 fatos estilizados para preços e demanda por eletricidade: *price spikes*, sazonalidade, reversão para a média e distribuição de preços. Multifractalidade foi acrescentada a este trabalho como outro fato estilizado tanto para preços, quanto para demanda por eletricidade.

Neste trabalho, foram utilizadas as séries temporais de CMO em base horária e Semanal, ambas disponibilizados pelo ONS. Apesar do CMO ser disponibilizado em base semi-horária, será convertido para base horária calculando-se a média dos dois valores para cada hora. Porém, foi verificada a existência de 1200 dados faltantes na base semi-horária (25 dias). Essas lacunas foram preenchidas utilizando o valor do CMO do mesmo dia e da mesma meia hora da semana anterior. Após este ajuste, os dados foram convertidos para base horária.

No conjunto de dados referente ao CMO semanal, não foram identificados dados faltantes. Uma correção adicional foi necessária nos dados do CMO horário para os submercados Norte em 10/10/2020 às 22:30 hs e Nordeste em 17/04/2021 às 05:00 hs. Os valores registrados nos arquivos fornecidos pelo ONS foram de R\$ 54.729,62/MWh e R\$ 11.505,02 /MWh, respectivamente. Não há justificativa plausível para estes valores, sugerindo erros de imputação. Assim, os valores foram substituídos pelas médias aritméticas simples dos valores de CMO das horas anterior e posterior do mesmo dia.

Ao aplicar transformações logarítmicas nos dados de CMO, valores menores ou iguais a zero podem gerar problemas, visto que a função logarítmica não é definida para tais valores no conjunto dos números reais. Para solucionar esta questão, o seguinte procedimento foi adotado: (i) identificar o valor mínimo do histórico; (ii) se este valor for menor ou igual a zero, armazená-lo em uma variável; (iii) adicionar a todos os valores observados o valor mínimo histórico mais uma unidade; (iv) aplicar o logaritmo; e (v) para retornar aos dados originais, utilizar a transformação inversa do logaritmo e subtrair uma unidade, [116].

Os gráficos da Figura 10 apresentam as séries temporais históricas do CMO semanal (desde 2005) e CMO Horário (desde 2019, incluindo o período da operação sombra) e com

ajustes necessários para dados faltantes e dados discrepantes.

Os dados semanais do CMO, registrados desde 01/01/2005, revelam variações ao longo de quase vinte anos de registros. Durante esses anos, diversos fatores, tanto internos quanto externos ao setor elétrico, influenciaram os modelos de despacho hidrotérmico responsáveis por calcular os valores do CMO. Essas influências podem ter se originado de ajustes nos dados de entrada ou de modificações na própria metodologia de cálculo do despacho hidrotérmico. Assim, essa série temporal semanal serve como um rico repositório de informações, fundamental para análises preditivas no setor. Em contrapartida, o CMO horário, apesar de sua vasta quantidade de dados, com mais de 35.000 registros, possui um recorte temporal de somente 4 anos, não abrangendo, portanto, a gama completa de situações e nuances presentes nos registros semanais do CMO. Porém, a grande quantidade de dados permite que avaliações complexas, como a multifractalidade, seja aplicada ao setor. Métodos como MF DFA dependem de grandes quantidades de dados para que seus resultados sejam relevantes.

Os gráficos semanais apresentam diversos picos com intensidade e duração diferentes. O primeiro pico observado em janeiro de 2008 foi gerado por dois fatos distintos: ajustes da oferta termelétrica realizados ao longo de 2007, com o termo de compromisso da Petrobrás²; e atraso no início do período úmido 2007/2008. Fora este momento de instabilidade entre a oferta e demanda por eletricidade, o período compreendido entre 2005 e 2011 apresentou pouca variabilidade no CMO. A partir de 2012, devido a condições climáticas desfavoráveis, houve uma redução das afluições aos reservatórios do SIN, impactando fortemente a variabilidade do CMO em todos os submercados. Esta variabilidade atingiu o ápice no período 2021/2022, quando o CMO semanal atingiu o maior valor histórico (R\$ 3000 / MWh)³. Como pode ser verificado nos dados horários, este pico apresentou valores máximos entre setembro e outubro de 2021 e duração superior a 6 meses. Além disso, o submercado Nordeste apresentou a maior variabilidade dentre os 4 submercados, com valores superiores a R\$ 5.000,00 / MWh em setembro de 2021.

² Redução da disponibilidade de gás natural para as usinas termelétricas flexíveis, ou seja, usinas que não apresentavam contratos firmes de venda de energia.

³ O período úmido 2021/2022 foi considerado o pior da série histórica de vazões com registros de mais de 90 anos

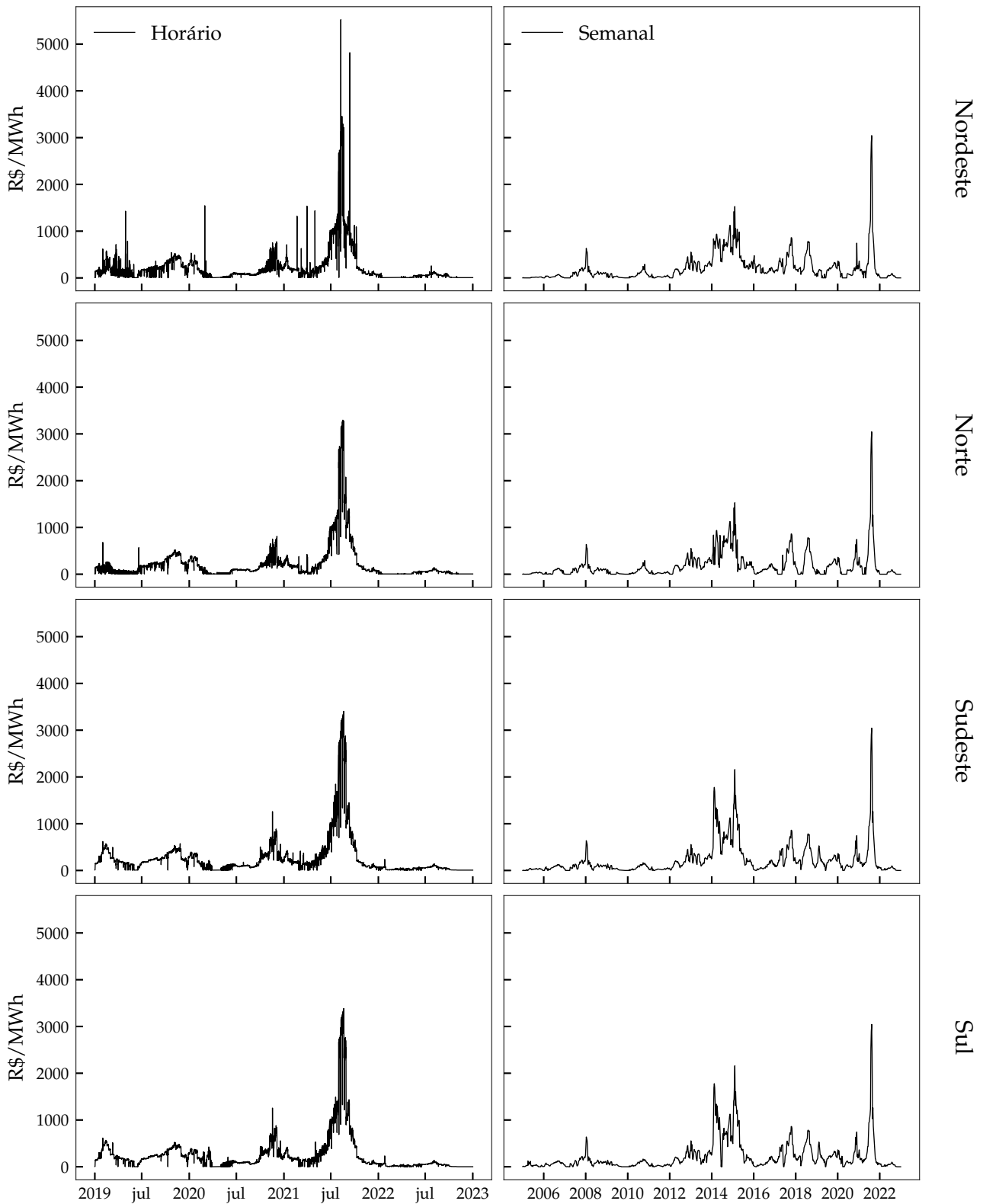


Figura 10 – Séries históricas de Custo Marginal de Operação por submercado. Os quatro gráficos à esquerda representam os dados históricos horários e, os quatro gráficos à direita representam os dados históricos semanais.

4.2.1 Fatos Estilizados

4.2.1.1 Picos ou *Spikes*

Analisando os gráficos da Figura 10, tanto os dados semanais quanto os dados horários, apresentam picos acentuados, dado que os valores do CMO podem excursionar até o custo de deficit. Deng [26], Weron [27, 5] apresentam evidências que os picos estão ligados à natureza de não armazenabilidade da energia, que pode justificar os *spike prices* que ocorrem em diversos mercados de eletricidade do mundo. Porém, no caso Brasileiro, os picos nos gráficos de CMO estão ligados a desequilíbrios no balanço de oferta e demanda devido a questões como crise econômica (CMO ↓), retomada da economia (CMO ↑), crise hidrológica (CMO ↑) e chuvas acima da média histórica aumentado a disponibilidade de oferta hidráulica (CMO↓). Estes são fatores que impactam o balanço de oferta e demanda num horizonte de tempo que pode durar meses ou anos. É possível destacar que variáveis climáticas, tais como temperatura, velocidade e direção do vento, e irradiância solar, exercem influência significativa sobre o equilíbrio de oferta e demanda no curto prazo.⁴ O pico mais acentuado dos gráficos de CMO ocorreu entre agosto e setembro de 2021, no auge da maior crise energética que o Brasil enfrentou, desde o início dos registros dos dados de vazão em 1931. O ciclo completo deste pico foi de quase 12 meses, iniciando em 04/2021 e finalizando em 01/2022, conforme pode ser visto no gráfico da Figura 11.

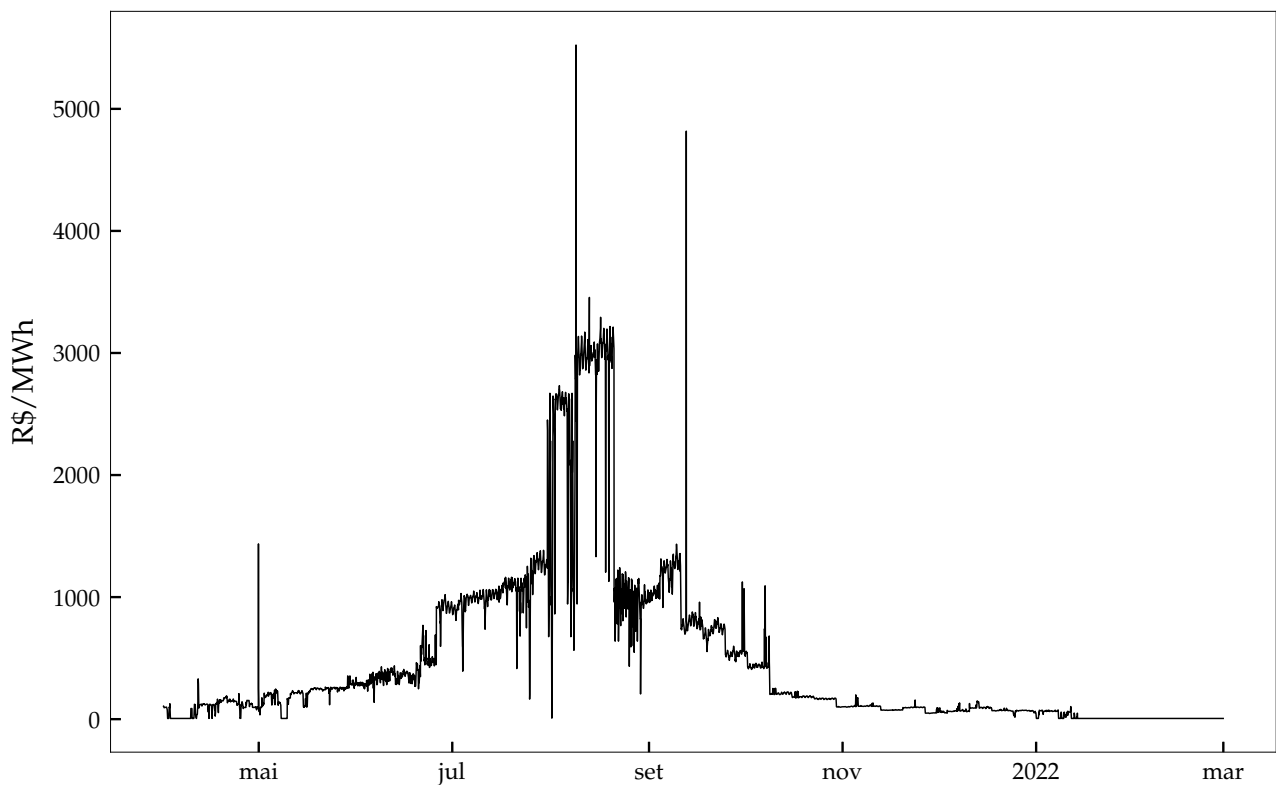


Figura 11 – Custo Marginal de Operação do submercado SE entre 01/04/2021 e 31/01/2022, período que mostra os impactos da crise energética.

⁴ A título ilustrativo, uma onda de calor atípica pode elevar substancialmente a demanda de energia no curto prazo, impactando o CMO. Contudo, ao término dessa variação anômala e o retorno da temperatura aos valores normais, observa-se redução do CMO.

4.2.1.1.1 Custo Marginal Negativo

O custo marginal de operação (CMO) refere-se ao custo adicional incorrido ao produzir uma unidade adicional de energia. No contexto do mercado de eletricidade, um CMO negativo resulta de uma interação complexa de fatores econômicos, técnicos e regulatórios. Ele pode ser justificado por várias razões técnicas e econômicas. Neste contexto, serão listadas algumas que podem estar mais relacionadas ao mercado brasileiro.

1. Geração Renovável e Custos Marginais Próximos de Zero: As fontes de energia renovável, como a eólica e a solar, têm custos marginais de produção próximos de zero uma vez que, após o investimento inicial, a energia do vento e do sol é gratuita. Quando há excesso de geração dessas fontes em relação à demanda, os preços podem se tornar negativos para incentivar o consumo e desincentivar a produção adicional, [117, 30].
2. Incapacidade de Desligar Plantas de Energia Rapidamente: Algumas usinas, especialmente as nucleares e as térmicas, podem ter altos custos para desligar e ligar. Assim, pode ser mais econômico para essas usinas continuar operando (mesmo a preços de mercado negativos) do que desligar e reativar posteriormente [117].
3. Restrições de Transmissão: Em algumas situações, pode existir energia em excesso em uma área devido à capacidade limitada de transmissão para outras regiões. Como resultado, os preços podem se tornar negativos para incentivar a utilização local da energia e evitar congestionamentos no sistema de transmissão [30].

Analisando o caso Brasileiro, durante o período em que o modelo Decomp foi o último da cadeia fornecendo a programação para o despacho semanal, o CMO não apresentou valores negativos. Porém, ao introduzir o modelo Dessem e a programação horária, o CMO passou a apresentar valores negativos, muitas vezes influenciados pelo vertimento de usinas hidrelétricas, conforme pode ser visto no gráfico da Figura 12. O submercado Nordeste apresentou 66 valores negativos de CMO, seguido pelo Sudeste com 18, Norte com 12 e Sul com nenhum. A medida que operação de usinas intermitentes como solar fotovoltaica e eólica, que apresentam custos marginais de operação próximos a zero, aumente sua participação na matriz energética brasileira, os vertimentos se tornarão mais comum aumentando a possibilidade de $CMO < 0$.

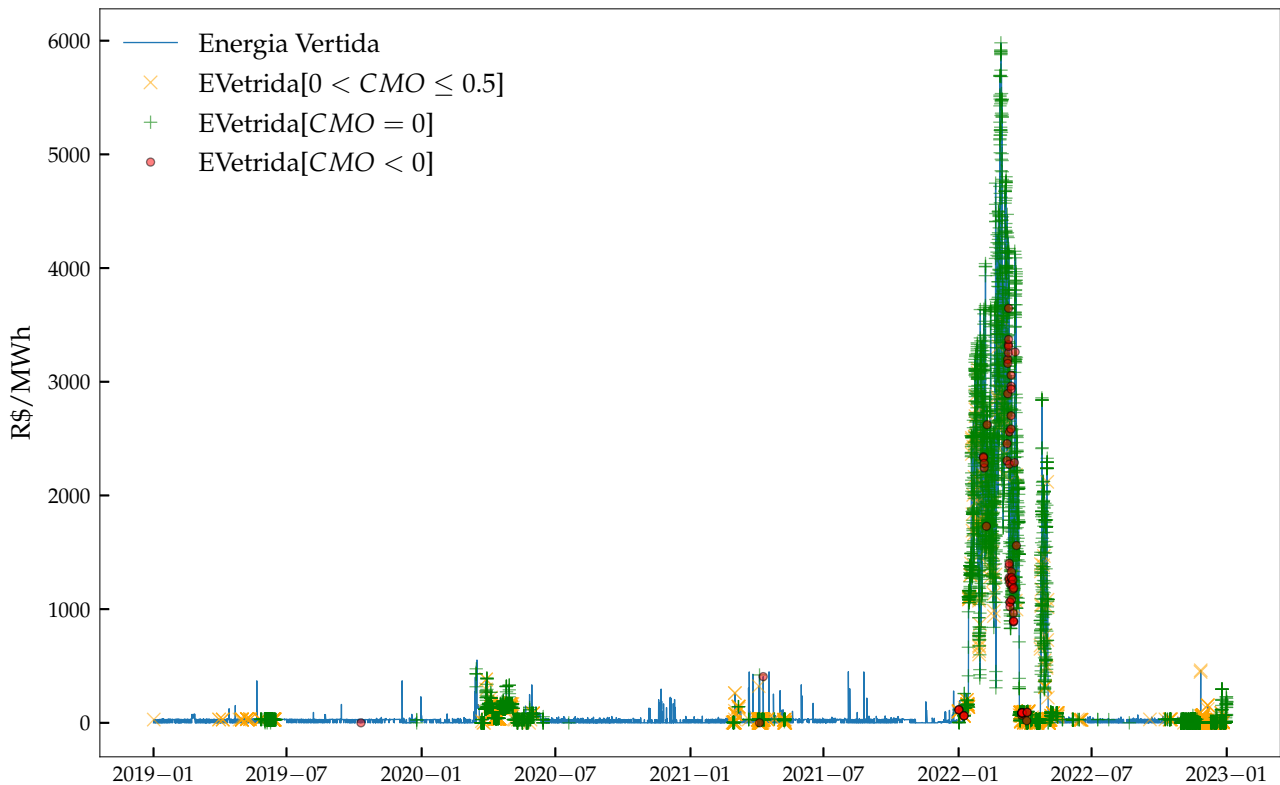


Figura 12 – Gráfico com CMO Negativo. A marca o vermelha representa os valores da energia vertida quando $CMO < 0$. A marca + verde representa a energia vertida turbinável quando $CMO = 0$. A marca x laranja representa energia vertida turbinável quando $0 < CMO \leq 0.5$. A linha azul representa a energia vertida turbinável ao longo do período de análise (2019 a 2022)

4.2.1.2 Distribuição dos Valores

A tabela 9 fornece uma visão detalhada das características distributivas do CMO Horário em diferentes submercados. Estas estatísticas podem ajudar a entender o comportamento dos preços e a identificar tendências e *outliers* em cada submercado.

Os submercados SE e S têm valores médios de CMO Horário mais próximos (245.71 e 248.44 R\$/MWh, respectivamente) em comparação com NE e N (205.15 e 203.65 R\$/MWh, respectivamente), indicando que, em média, o CMO tende a ser maior nos submercados SE e S⁵. A volatilidade do CMO, representada pelo desvio padrão (std), é mais alta nos submercados SE e S do que NE e N, indicando que há mais flutuação nos preços nestes submercados. O submercado N tem o maior coeficiente de variação (coef_var), sugerindo que a flutuação relativa dos custos marginais é mais alta neste submercado em relação à média. O submercado NE tem a maior amplitude (range), mostrando que ele experimentou a maior diferença entre o valor mínimo e máximo de CMO.

Todos os submercados apresentam assimetria positiva, com o submercado NE mostrando o maior valor. Isso indica que a distribuição de custos marginais nestes submercados é enviesada

⁵ Na medida em que reforços no sistema de transmissão entre SE/S e NE/N ocorrem, as diferenças do CMO entre as regiões tende a diminuir. A diferença acentuada de valores é um indicativo de investimentos para reforçar a interligação entre as regiões.

à direita, com uma cauda longa à direita. Todos os submercados apresentam curtose significativamente maior que três, o que indica uma distribuição leptocúrtica, isto é, a distribuição tem caudas mais pesadas e um pico mais afiado que a distribuição normal.

O teste Jarque-Bera é usado para testar se uma série tem o terceiro e quarto momentos iguais a uma distribuição normal, sendo que todos os submercados rejeitaram a hipótese nula, indicando que não são normalmente distribuídos. As medianas dos submercados variam, com SE e S tendo os valores mais altos, sugerindo que pelo menos 50% dos valores observados nestes submercados estão acima de 132.74 e 141.43 R\$/MWh, respectivamente. Os percentis 1%, 5%, e 10% em todos os submercados são muito baixos, sugerindo que uma pequena proporção de observações tem CMO muito baixos. No entanto, o 99% percentil mostra valores consideravelmente altos em todos os submercados, indicando que os preços podem atingir valores elevados em situações extremas.

O Intervalo Interquartil (IQR) mede a dispersão dos valores, fornecendo a diferença entre o terceiro quartil (75%) e o primeiro quartil (25%). Ele é uma métrica robusta que ajuda a compreender a variabilidade dos dados e a identificar possíveis *outliers*. Nesta tabela, o submercado NE tem o menor IQR (R\$192.31/MWh), enquanto o submercado N tem o maior (R\$209.81/MWh). Isso indica que o submercado N tem uma maior dispersão de valores em torno da mediana em comparação com o submercado NE. O `iqr_normal` fornece uma comparação da dispersão dos dados com a de uma distribuição normal. Pode-se notar que, em todos os submercados, o IQR é significativamente maior do que seria esperado em uma distribuição normal, indicando uma distribuição mais dispersa dos dados.

Por último, o Desvio Médio Absoluto (MAD) é uma medida da variabilidade dos dados e é menos sensível a *outliers* do que o desvio padrão. Os submercados SE e S têm MADs muito semelhantes (221.96 e 221.19 R\$/MWh, respectivamente), enquanto o submercado NE tem o menor MAD (195.68). O submercado N tem um MAD de R\$204.71/MWh. O `mad_normal` compara o MAD com o de uma distribuição normal. Pode-se observar que, para todos os submercados, o MAD é menor do que o esperado em uma distribuição normal, exceto no submercado N.

Tabela 9: Estatísticas descritivas das séries temporais do CMO Horário para cada submercado (valores são medidos em R\$/MWh)

Estatísticas	Submercados			
	Sudeste	Sul	Nordeste	Norte
nobs	35064.00	35064.00	35064.00	35064.00
mean	245.71	248.44	205.15	203.65
std	419.53	418.35	375.70	390.99
iqr	208.22	210.64	192.31	209.81

Continua na próxima página

Tabela 9: Estatísticas descritivas das séries temporais do CMO Horário para cada submercado (valores são medidos em R\$/MWh) (Continuação)

Estatísticas	Submercados			
	Sudeste	Sul	Nordeste	Norte
iqr_normal	154.36	156.15	142.56	155.53
mad	221.96	221.19	195.68	204.71
mad_normal	278.19	277.23	245.25	256.56
coef_var	1.71	1.68	1.83	1.92
range	3403.53	3378.91	5521.78	3294.14
max	3397.52	3378.91	5517.26	3289.68
min	-6.00	0.00	-4.52	-4.46
skew	4.46	4.46	4.95	4.68
kurtosis	26.36	26.42	34.05	29.65
median	132.74	141.43	93.23	86.84
jarque_bera	913539.50	917265.04	1551618.29	1165351.04
jarque_bera_pval	0.00	0.00	0.00	0.00
1%	0.00	0.00	0.00	0.00
5%	0.00	0.00	0.00	0.00
10%	0.90	1.34	0.00	0.01
25%	50.69	51.96	31.75	12.86
50%	132.74	141.43	93.23	86.84
75%	258.91	262.60	224.06	222.67
90%	470.47	470.92	421.13	417.67
95%	905.66	905.31	865.06	901.51
99%	2648.45	2647.90	2591.97	2611.76

4.2.1.3 Estacionariedade

O Teste Dickey-Fuller aumentado é utilizado para testar a presença de raiz unitária em uma série temporal, o que, por sua vez, é uma indicação de não estacionariedade. Uma série temporal que é não estacionária pode ter propriedades estatísticas que mudam ao longo do tempo, o que pode ser problemático para muitos modelos de previsão. No caso da análise multifractal, a estacionariedade das séries temporais não é um quesito relevante, já que o o MF DFA e suas variações foram concebidos para serem aplicados em séries estacionárias ou não-estacionárias.

A tabela 10 apresenta os resultado do teste de Dickey-Fuller aumentado aplicado às

séries temporais de CMO horário, para os quatro submercados.

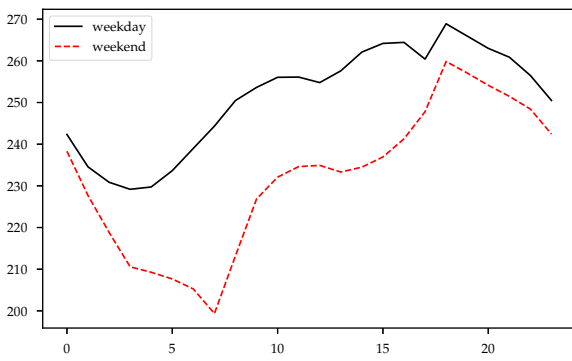
Tabela 10: Teste de Dickey-Fuller Aumentado aplicado às séries temporais de CMO horário, para testar hipóteses de presença de raiz unitária indicando não-estacionariedade.

Teste Dickey-Fuller Aumentado	Submercados			
	Sudeste	Sul	Nordeste	Norte
Valor da Estatística de Teste	-2.9506	-2.9646	-4.1455	-3.1541
valor-p	0.0398	0.0383	0.0008	0.0228
# de <i>Lags</i> Usado	52	52	51	52
# de Observações Usado	35011	35011	35012	35011
Valor Crítico (1%)	-3.4305	-3.4305	-3.4305	-3.4305
Valor Crítico (5%)	-2.8616	-2.8616	-2.8616	-2.8616
Valor Crítico (10%)	-2.5668	-2.5668	-2.5668	-2.5668

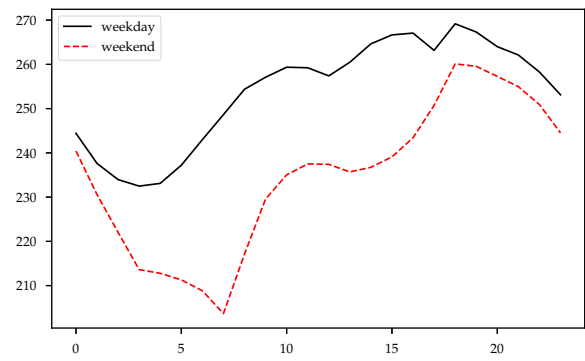
Concluindo, o submercado NE é claramente estacionário a um nível de confiança de 1%; o submercado N é estacionário a um nível de confiança de 5%. Já os submercados S e SE mostram evidência mais fraca de estacionariedade e podem ser considerados estacionários a um nível de confiança de 10%, mas não a 5%.

4.2.1.4 Sazonalidade

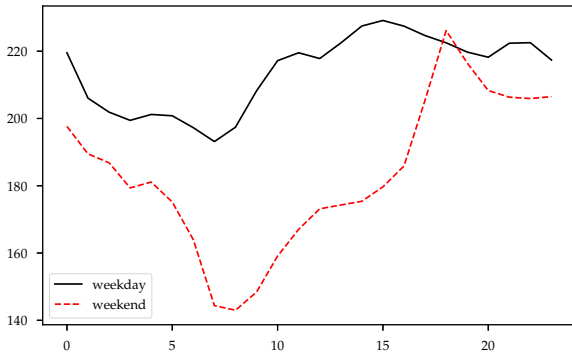
Através de análise visual, os gráficos da Figura 10 indicam a possibilidade de sazonalidade anual, não permitindo especulações sobre as sazonalidades semanal e diária. Os gráficos da Figura 13 apresentam o comportamento do CMO horário ao longo das 24 horas do dia. A curva preta apresenta os valores médios para cada hora referentes a um dia útil e a curva vermelha apresenta os valores médio para o final de semana. Dois comportamentos podem ser inferidos: (i) o primeiro, o CMO apresenta comportamento sazonal durante as horas do dia, indicando sazonalidade diária; (ii) os CMOs do final de semana tendem a ser menores que os CMO de dia útil. Estes comportamentos são herdados das cargas horárias.



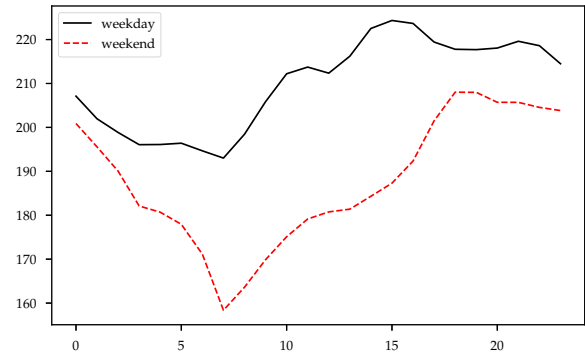
(a) Sudeste, CMO Horário



(b) Sul, CMO Semanal



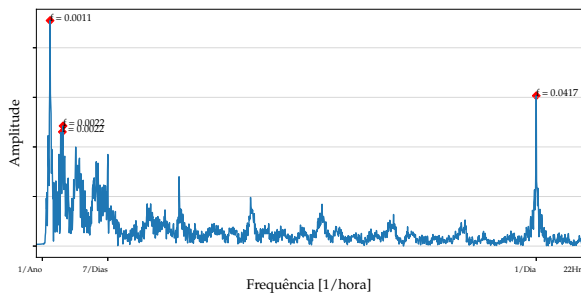
(c) Nordeste, CMO Horário



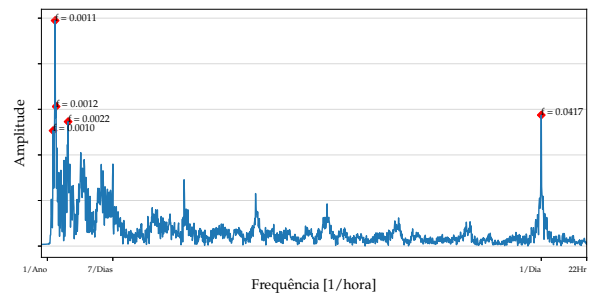
(d) Norte, CMO Semanal

Figura 13 – Comportamento do CMO ao longo das horas do dia. A curva preta indica a curva média para as horas de um dia útil e a curva vermelha apresenta a curva média para as horas de um final de semana.

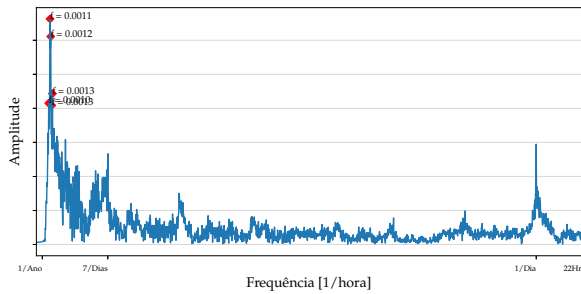
A densidade espectral de potência, também conhecida como espectro de potência, representa as componentes de frequência de uma série junto com suas respectivas intensidades. Matematicamente, é definida como o módulo ao quadrado da Transformada de Fourier da série em questão. Ao examinar o espectro de potência de uma série temporal, busca-se por picos proeminentes que sinalizem as frequências predominantes ou sazonalidades na série. A localização destes picos no espectro aponta a frequência da sazonalidade, enquanto a altura (ou magnitude) do pico oferece uma indicação da intensidade dessa sazonalidade. Assim, a análise espectral facilita a identificação de múltiplas sazonalidades. A Figura 14 mostra os gráficos de densidade espectral de potência das séries temporais do CMO Horário em cada submercado. Os quatro espectros sugerem uma sazonalidade dupla, com picos marcantes próximos a 1 dia e 1 ano, e, com menor intensidade, um pico próximo a 7 dias.



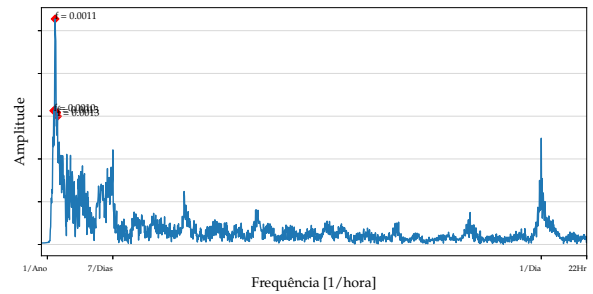
(a) Sudeste



(b) Sul



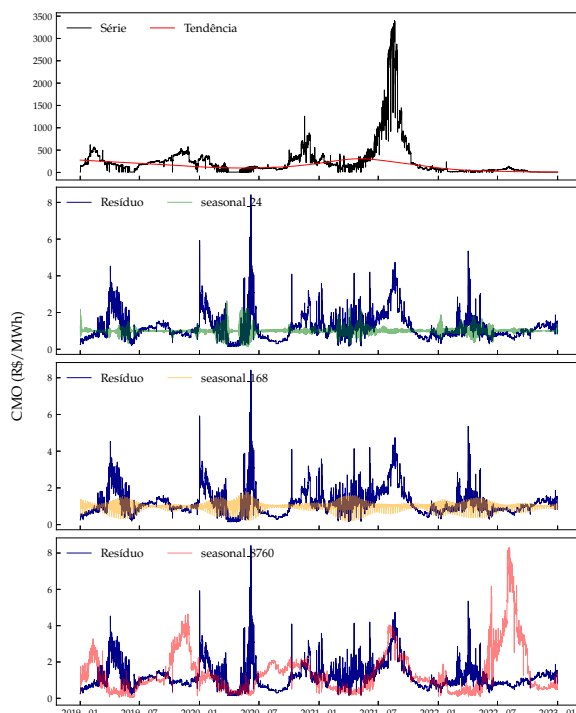
(c) Nordeste



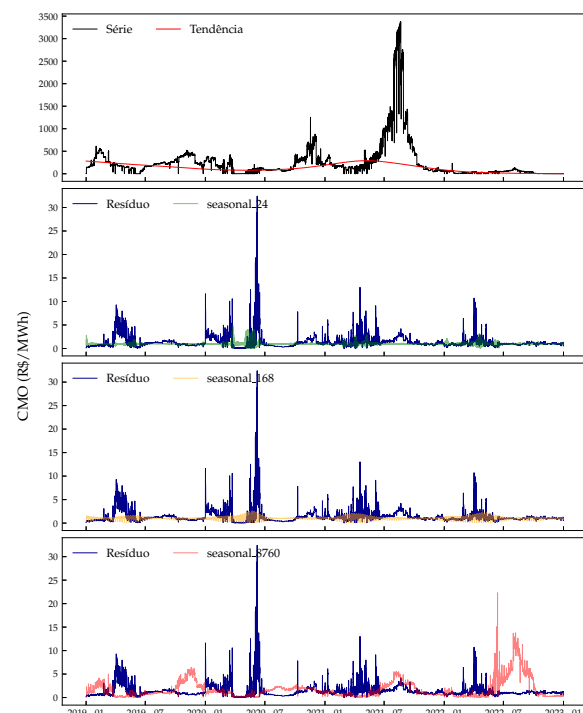
(d) Norte

Figura 14 – Gráficos de densidade espectral de potência para as séries temporais de CMO Horário por submercado. Picos mais intensos próximos às frequências correspondentes a 1 dia (0.04167), 7 dias (0.00595) e 1 ano (0,00011) indicam a presença de ciclo sazonal.

Identificados os tipos de sazonalidade, aplica-se o algoritmo MSTL conforme apresentado na seção 3.3. Porém, antes da aplicação do MSTL, a série foi transformada usando a função logaritmo através do método Box-Cox, com parâmetro lambda igual a 1. O gráfico da Figura 15 apresenta a decomposição para o submercado Sudeste.

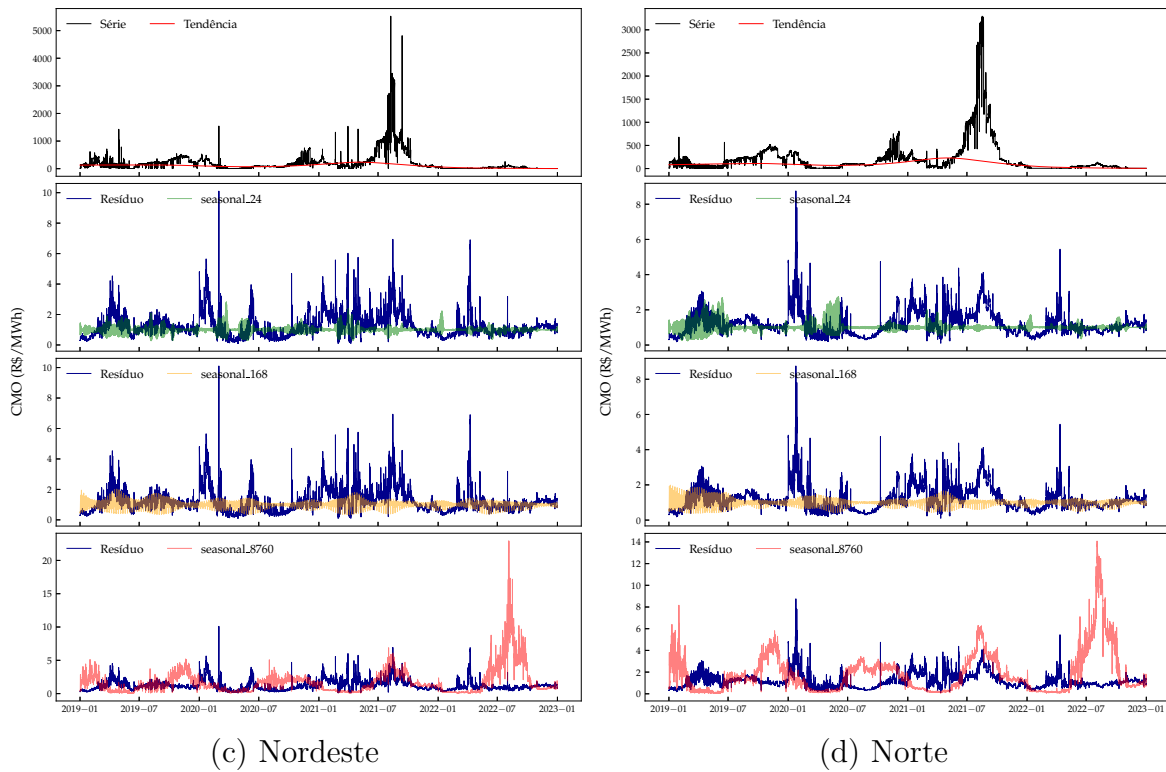


(a) Sudeste



(b) Sul

Conforme discutido na seção 3.2.4, a sazonalidade introduz artefatos nas séries temporais,



(c) Nordeste

(d) Norte

Figura 15 – Decomposição da série temporal de CMO Horário. O primeiro gráfico apresenta a série original (linha preta) e a componente de tendência (linha vermelha). O segundo, terceiro e quarto gráficos representam as componentes sazonais 24 horas (linha verde), 168 horas (linha amarela) e 8760 horas (linha laranja). Nos gráficos de componentes sazonais, a linha azul representa o resíduo.

implicando em detecção de multifractalidade aparente por parte dos algoritmos baseados em funções de flutuação (DFA, MF DFA, MF DCCA etc). A remoção da sazonalidade antes da análise multifractal é um passo importante para que as avaliações possam ser conduzidas de forma adequada. Caso a sazonalidade não seja removida, os algoritmos multifractais apresentam *crossovers* no gráfico *log-log* das funções de flutuação (em função de q) versus escalas. Estes *crossovers* indicam a mudança de inclinação das retas, nas escalas correspondentes às sazonalidades. Quando as sazonalidades são removidas adequadamente, os *crossovers* tendem a desaparecer. Para mais detalhes, veja o capítulo 6.

4.2.1.5 Reversão para a média

Como discutido no Capítulo 3, os preços da energia elétrica em vários mercados costumam apresentar reversão à média, também denominada anti-persistência. Como revisado no Capítulo 2, existem várias evidências que indicam que a anti-persistência, apesar de ser recorrente nos mercados de eletricidade, varia dependendo do mercado e, dentro do mesmo mercado, em diferentes escalas temporais.

Diversas ferramentas estatísticas podem ser utilizadas para detectar a reversão à média em uma série temporal. Contudo, neste estudo, foram utilizados métodos multifractais, especificamente o MF DFA. Conforme mencionado na Seção 3.1, um indicador crucial dessa persistência

(ou memória longa) em uma série temporal é o coeficiente de Hurst. Quando $H > 0.5$, há persistência, enquanto que, para $H < 0.5$, verifica-se anti-persistência. Se H estiver próximo de 0.5, a série é basicamente um processo estocástico aleatório, similar a um ruído branco.

A Tabela 11 apresenta os valores do coeficiente de Hurst para o CMO Horário dessazonalizado de cada submercado. Estes valores foram obtidos usando o algoritmo MF DFA e a remoção de tendência com um polinômio de quarto grau.

Tabela 11: Coeficiente de Hurst referente às séries temporais originais e dessazonalizadas do CMO Horário em cada submercado, usando MF DFA4.

Submercado	Série Temporal	
	Original	Dessazonalizada
Sudeste	0.4454 anti-persistência fraca	0.3040 anti-persistência moderada
Sul	0.4472 anti-persistência fraca	0.2948 anti-persistência moderada
Nordeste	0.2837 anti-persistência moderada	0.2552 anti-persistência moderada
Norte	0.4037 anti-persistência fraca	0.2435 anti-persistência moderada

A remoção das sazonalidades revelou aspectos importantes no comportamento anti-persistente das séries temporais de CMO Horário, em cada submercado. As séries originais dos submercados Sudeste e Sul tendem a se aproximar de um movimento aleatório não correlacionado. Entretanto, após a remoção das sazonalidades, a anti-persistência torna-se mais pronunciada. Os submercados NE e N, que já indicavam características de anti-persistência em suas séries originais, sendo reforçada após a remoção das sazonalidades. Notavelmente, todas as séries, após a exclusão dos componentes sazonais, exibem gradações variadas de anti-persistência, sendo o submercado Norte o mais anti-persistente.

A constatação de anti-persistência apresenta várias implicações importantes:

- **Previsibilidade:** Séries anti-persistentes indicam que aumentos (ou reduções) tendem a ser seguidos por reduções (ou aumentos), o que pode ser utilizado para melhorar as previsões de preços futuros no mercado de eletricidade. Isso é crucial para operadores e planejadores.
- **Gestão de Riscos:** A anti-persistência pode influenciar estratégias de hedge e gestão de riscos para empresas do setor. Compreender essa característica pode ajudar a mitigar riscos associados a flutuações de preços.
- **Política Energética:** Para formuladores de política e reguladores, entender a natureza anti-persistente pode ser útil no desenvolvimento de políticas energéticas mais eficazes e no estabelecimento de marcos regulatórios que estabilizem o mercado.

4.2.1.6 Multifractalidade

A tabela 12 resume os achados sobre multifractalidade do CMO para cada submercado. Conforme indicado pelo comprimento do espectro multifractal, $\Delta\alpha$, e pela equação (3.41), o CMO Horário dessazonalizado do submercado Sul mostra a maior multifractalidade, seguido pelos submercados Sudeste, Norte e Nordeste. Da mesma forma, quando a multifractalidade é medida por ΔH , Sul apresenta-se como mais multifractal e Nordeste como o submercado menos multifractal.

A multifractalidade no submercado Sul indica um sistema mais complexo em relação às flutuações do CMO Horário. Esta característica pode ser atribuída às peculiaridades desse submercado, com um regime hidrológico mais instável e menor sazonalidade. As usinas hidrelétricas nesta área não têm capacidade de armazenamento, e sua produção está vinculada às variações do fluxo do rio. Essa flutuação na produção de energia hidrelétrica é refletida nos modelos de otimização do despacho hidrotérmico, resultando em um custo marginal de operação mais volátil.

Tabela 12: Multifractalidade das séries temporais dessazonalizadas do CMO Horário em cada submercado, usando MF DFA4.

Submercado	Indicadores de Multifractalidade	
	ΔH	$\Delta\alpha$
Sudeste	0.4602	0.6321
Sul	0.5549	0.7551
Nordeste	0.2968	0.4938
Norte	0.3745	0.5615

Embora a determinação do CMO se baseie em modelos matemáticos de otimização do despacho hidrotérmico, os fatos estilizados que moldam este componente do mercado brasileiro de eletricidade seguem padrões identificados na literatura internacional. Os principais fatos estilizados observados incluem:

- (i) Em todos os submercados, as séries temporais manifestam propriedades de não-estacionariedade. Além disso, a distribuição dessas séries é assimétrica e exibe caudas longas, distanciando-se consideravelmente da distribuição normal padrão;
- (ii) Picos de preços, que possuem uma duração mais prolongada quando comparada a outros mercados, atribuída ao desequilíbrio de longo prazo entre oferta e demanda, os quais são influenciados por fatores climáticos, hidrológicos e econômicos;
- (iii) Sazonalidades diária, semanal e anual, ainda que em uma magnitude menos intensa que em outros mercados;

- (iv) Uma tendência de reversão para a média ou anti-persistência, evidenciando a autocorrelação negativa de curto prazo; e
- (v) Multifractalidade, refletindo a complexidade inerente das flutuações do CMO no contexto do mercado de eletricidade brasileiro.

4.3 Energia Natural Afluente

A Energia Natural Afluente (ENA) é uma variável importante para a realização de estudos energéticos e financeiros no mercado brasileiro de eletricidade. Tradicionalmente, a ENA é disponibilizada pelo ONS em vários produtos como relatórios diários da operação, acompanhamentos hidro-energéticos etc. Recentemente, essa informação passou a ser divulgada de forma mais estruturada e abrangente, contemplando todas as escalas temporais (diária, semanal e mensal) e espaciais (por usina, bacia e submercado). Estes dados, além de serem fundamentais para cálculo do custo marginal de operação e conseqüentemente o preço de liquidação de diferenças, são rotineiramente utilizados por empresas do setor elétrico, com destaque para geradores e comercializadores, para elaboração de cenários futuros de PLD.

A variável estocástica dos modelos de médio e curto prazos é dada pela vazão natural afluente aos empreendimentos hidrelétricos e transformada em geração levando-se em consideração a produtibilidade individual de cada usina, as características da cascata onde estão localizados os empreendimentos, capacidade de regulação da vazão em cada usina definindo se uma usina é fio d'água (não possui capacidade de armazenamento e sua geração é diretamente proporcional à vazão afluente) ou de reservatório (possui capacidade de armazenamento e sua geração é proporcional à quantidade de água em estoque), [1, 118, 112].

Os dados históricos são disponibilizados pelo ONS desde 01/01/2000, sendo a base diária, a menor discretização temporal. Os gráficos da Figura 16 mostram o comportamento das séries para cada submercado. Como o ONS considerou ENA negativa para o submercado Sul, foi feito um ajuste, substituindo estes valores negativos pela interpolação linear.

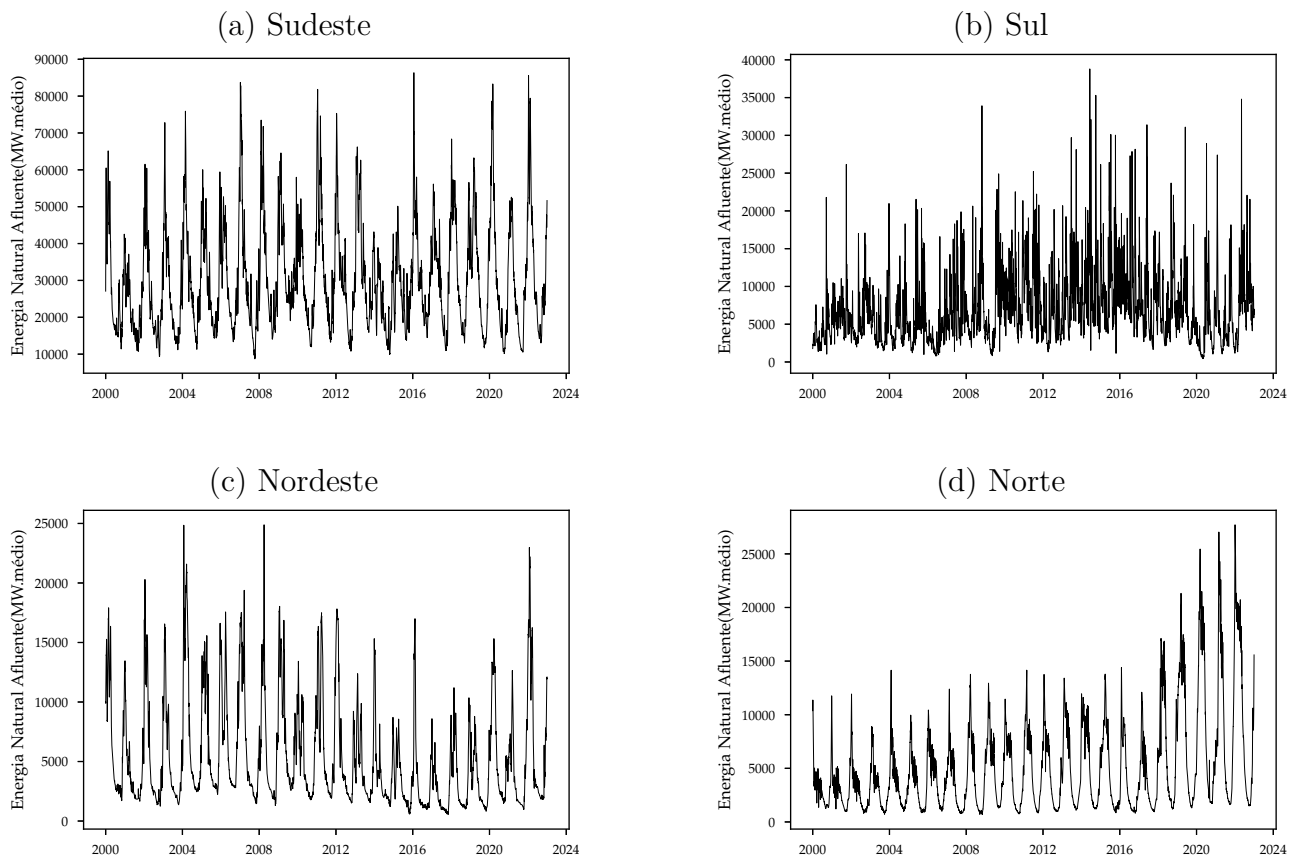


Figura 16 – Séries históricas de energia natural afluyente diária para os quatro submercados do SIN.

De acordo com os dados históricos, conforme gráficos da Figura 16, a ENA (Energia Natural Afluyente) apresenta características sazonais bem acentuadas para os submercados Nordeste e Norte, um pouco mais moderada para o submercado Sudeste e menor para o submercado Sul.

A decomposição das séries históricas em componentes sazonais, tendência e resíduos usando STL, conforme discutido na seção 3.3, permite que sejam realizados os cálculos de força da sazonalidade e da tendência de forma a corroborar a segmentação apresentada, 15.

4.3.1 Distribuição dos Valores

A tabela 13 apresenta estatísticas descritivas relacionadas à Energia Natural Afluyente (ENA) dos quatro submercados. Todos os submercados possuem 8.401 observações sem valores faltantes.

Para o submercado Sudeste, a média da ENA é de 30.354,26 MWmed, com mediana de 27.034,00 MWmed e um desvio padrão de 14.468,50 MWmed. O valor mínimo observado foi de 8.717,00 MWmed e o máximo de 86.357,00 MWmed, com uma amplitude total de 77.640,00 MWmed. O coeficiente de variação é de 0,48, indicando uma dispersão moderada. A assimetria é positiva em 0,99 e a curtose é de 3,65, indicando uma distribuição ligeiramente leptocúrtica.

O teste Jarque-Bera tem um valor de 1.507,77, com um p-valor associado de 0,00, rejeitando a hipótese de normalidade.

Para o Sul, a média da ENA é de 7.052,35 MWmed, com uma mediana de 5.935,00 MWmed e um desvio padrão de 4.611,05 MWmed. O valor mínimo foi de 432.88,00 MWmed e o máximo de 38.795,00 MWmed, com uma amplitude de 38.362,12 MWmed. O coeficiente de variação é mais alto, 0,65 dentre todos os submercados. A assimetria é de 1,49 e a curtose de 6,30, mostrando uma distribuição mais inclinada à direita e leptocúrtica. O teste Jarque-Bera indica um valor de 6.913,63 e um p-valor de 0,00, rejeitando a normalidade.

No Nordeste, a ENA tem média de 5.394,74 MWmed, mediana de 3.590,00 MWmed e desvio padrão de 4.430,44 MWmed. Os valores variam entre 542,00 MWmed e 24.886,00 MWmed, resultando em uma amplitude de 24.344,00 MWmed. O coeficiente de variação é de 0,82. A distribuição apresenta uma assimetria de 1,39 e uma curtose de 4,19. O valor do Jarque-Bera é 3.214,20 com p-valor de 0,00, indicando não normalidade.

Finalmente, no Norte, a média é de 5.102,79 MWmed, a mediana de 3.586,00 MWmed e o desvio padrão é de 4.539,19 MWmed. A ENA varia entre 686,00 MWmed e 27.709,99 MWmed, com uma amplitude de 27.023,99 MWmed. O coeficiente de variação é o mais alto dos quatro submercados, 0,89. A assimetria é de 1,73 e a curtose é de 6,16, indicando uma distribuição mais inclinada à direita e leptocúrtica. O teste Jarque-Bera apresenta um valor de 7.676,93, e um p-valor de 0,00, confirmando a rejeição da normalidade.

Em todos os submercados, os valores demonstram variabilidade na ENA, e as distribuições não são normais, com tendências à direita e formas variáveis de leptocurticidade.

Tabela 13: Estatística descritiva da Energia Natural Afluente dos submercados

Estatísticas	Submercados			
	Sudeste	Sul	Nordeste	Norte
nobs	8401	8401	8401	8401
mean	30354.26	7052.35	5394.74	5102.79
median	27034.00	5935.00	3590.00	3586.00
std	14468.50	4611.05	4430.44	4539.19
iqr	20365.00	5569.00	4992.67	5270.21
iqr_normal	15096.60	4128.31	3701.07	3906.81
mad	11592.37	3519.05	3483.96	3418.71
mad_normal	14528.88	4410.50	4366.49	4284.72
coef_var	0.48	0.65	0.82	0.89
range	77640.00	38362.12	24344.00	27023.99
max	86357.00	38795.00	24886.00	27709.99

Continua na próxima página

Tabela 13: Estatística descritiva da Energia Natural Afluyente dos submercados (Continuação)

Estatísticas	Submercados			
	Sudeste	Sul	Nordeste	Norte
min	8717.00	432.88	542.00	686.00
skew	0.99	1.49	1.39	1.73
kurtosis	3.65	6.30	4.19	6.16
Teste Jarque Bera				
Estatística de Teste	1507.77	6913.63	3214.20	7676.93
valor-p	0.00	0.00	0.00	0.00
Percentil				
1%	10906.14	1049.00	867.00	865.00
5%	13089.64	1776.00	1231.00	1028.00
10%	14683.00	2411.00	1541.00	1181.00
25%	18785.00	3682.00	2217.42	1736.79
50%	27034.00	5935.00	3590.00	3586.00
75%	39150.00	9251.00	7210.09	7007.00
90%	50868.41	13256.00	12870.32	11073.00
95%	58335.00	15960.00	15151.86	15127.52
99%	74352.00	22273.00	17887.00	20546.39

4.3.2 Estacionariedade

O teste de Dickey-Fuller aumentado foi aplicado às séries históricas de Energia Natural Afluyente dos quatro submercados. Esse teste é usado para verificar a presença de raiz unitária em uma série temporal, o que indica se a série é estacionária ou não. A tabela 14 apresenta os resultados da aplicação deste teste às séries histórica diária de ENA, para todos os submercados.

Para o submercado Sudeste, a estatística de teste foi de -2,7997, e o valor-p foi de 0,0583. Considerando os valores críticos a 1% (-3,4349), 5% (-2,8636) e 10% (-2,5678), a estatística de teste não é mais negativa que os valores críticos a 1% e 5%, mas é mais negativa que o valor crítico a 10%. Isso sugere que, a um nível de significância de 10%, pode-se rejeitar a hipótese de raiz unitária, indicando estacionariedade. No entanto, o mesmo não pode ser feito a 5% e 1%. O teste usou 22 lags e se baseou em 1.438 observações.

No submercado Sul, a estatística de teste foi de -6,9930, com um valor-p de 0,0000. Dada a magnitude da estatística de teste e o baixo valor-p, a série pode ser considerada estacionária em todos os níveis de significância, já que a estatística de teste é mais negativa que todos os valores críticos listados. O teste utilizou 2 lags e 1.458 observações.

Para o Nordeste, a estatística de teste foi de -2,6052 e o valor-p de 0,0919. A estatística de teste não é mais negativa que nenhum dos valores críticos, indicando que não se pode rejeitar a hipótese de raiz unitária a qualquer nível de significância. O teste foi baseado em 19 *lags* e 1.441 observações.

Finalmente, no Norte, a estatística de teste foi de -2,9408 e o valor-p de 0,0408. A estatística de teste é mais negativa que os valores críticos a 10% e 5%, mas não a 1%. Portanto, pode-se concluir que a série é estacionária a um nível de significância de 10% e 5%, mas não a 1%. O teste usou 23 *lags* e se baseou em 1.437 observações.

Tabela 14: Teste de Dickey-Fuller Aumentado aplicado às séries temporais de ENA diário, para testar hipóteses de presença de raiz unitária indicando não-estacionariedade.

Teste Dickey-Fuller Aumentado	Submercados			
	Sudeste	Sul	Nordeste	Norte
Valor da Estatística de Teste	-2.7997	-6.9930	-2.6052	-2.9408
valor-p	0.0583	0.0000	0.0919	0.0408
# de Lags Usado	22.0000	2.0000	19.0000	23.0000
# de Observações Usado	1438.0000	1458.0000	1441.0000	1437.0000
Valor Crítico (1%)	-3.4349	-3.4348	-3.4349	-3.4349
Valor Crítico (5%)	-2.8636	-2.8635	-2.8635	-2.8636
Valor Crítico (10%)	-2.5678	-2.5678	-2.5678	-2.5678

Enquanto o submercado Sul claramente demonstra estacionariedade em sua série temporal de ENA, os submercados Sudeste e Norte mostram evidências mais fracas de estacionariedade, dependendo do nível de significância escolhido. O submercado Nordeste não apresenta evidências suficientes para afirmar estacionariedade a qualquer nível de significância comum.

4.3.3 Sazonalidade

Os gráficos da Figura 17 apresentam as curvas de ENA mensal para cada um dos anos que compõe o histórico (curvas em cinza) e a média mensal de todos os anos (curva vermelha). Através destes gráficos, observa-se o comportamento sazonal mais significativo nos submercados Sudeste, Nordeste e Norte. O submercado Sul apresenta grande variabilidade ao longo dos meses do ano, indicando uma presença fraca de sazonalidade anual.

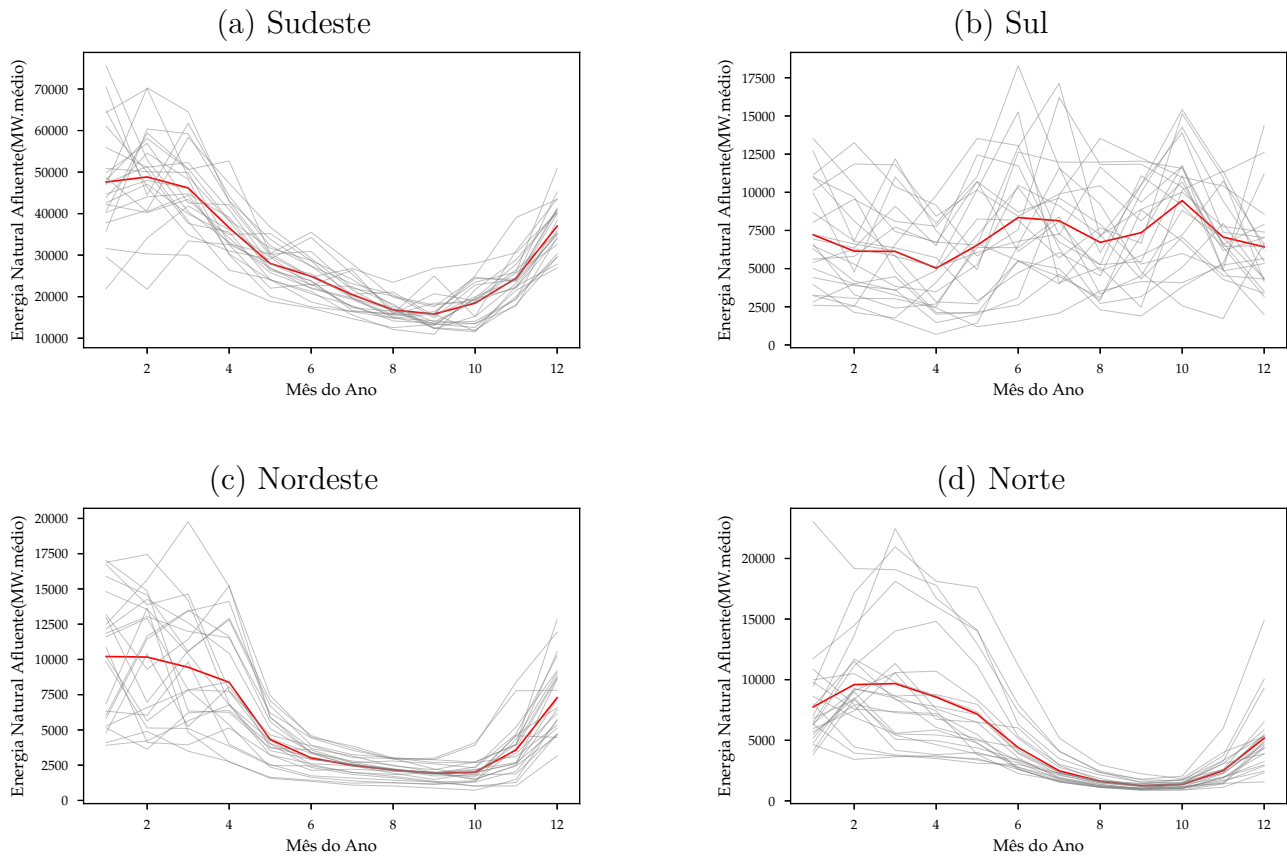


Figura 17 – Séries contendo a média mensal de energia natural afluente diária, para cada ano do histórico e para cada submercado.

Os gráficos da Figura 18 mostram a decomposição das séries históricas de ENA, usando STL com período igual a 365, indicando sazonalidade anual. A sazonalidade dos submercados Sudeste, Nordeste e Norte aparentam ser mais elevada, quando se comparam as linhas amarelas (componente sazonal) e as linhas verdes (resíduos). De acordo com a equação (3.46), a força da sazonalidade é dada pela diferença entre um e a razão entre a variância do resíduo e a variância do resíduo mais a componente sazonal. A componente sazonal do submercado Sul apresenta variação inferior ao resíduo, indicando baixa força da sazonalidade. Esta afirmação pode ser constatada na tabela 15.

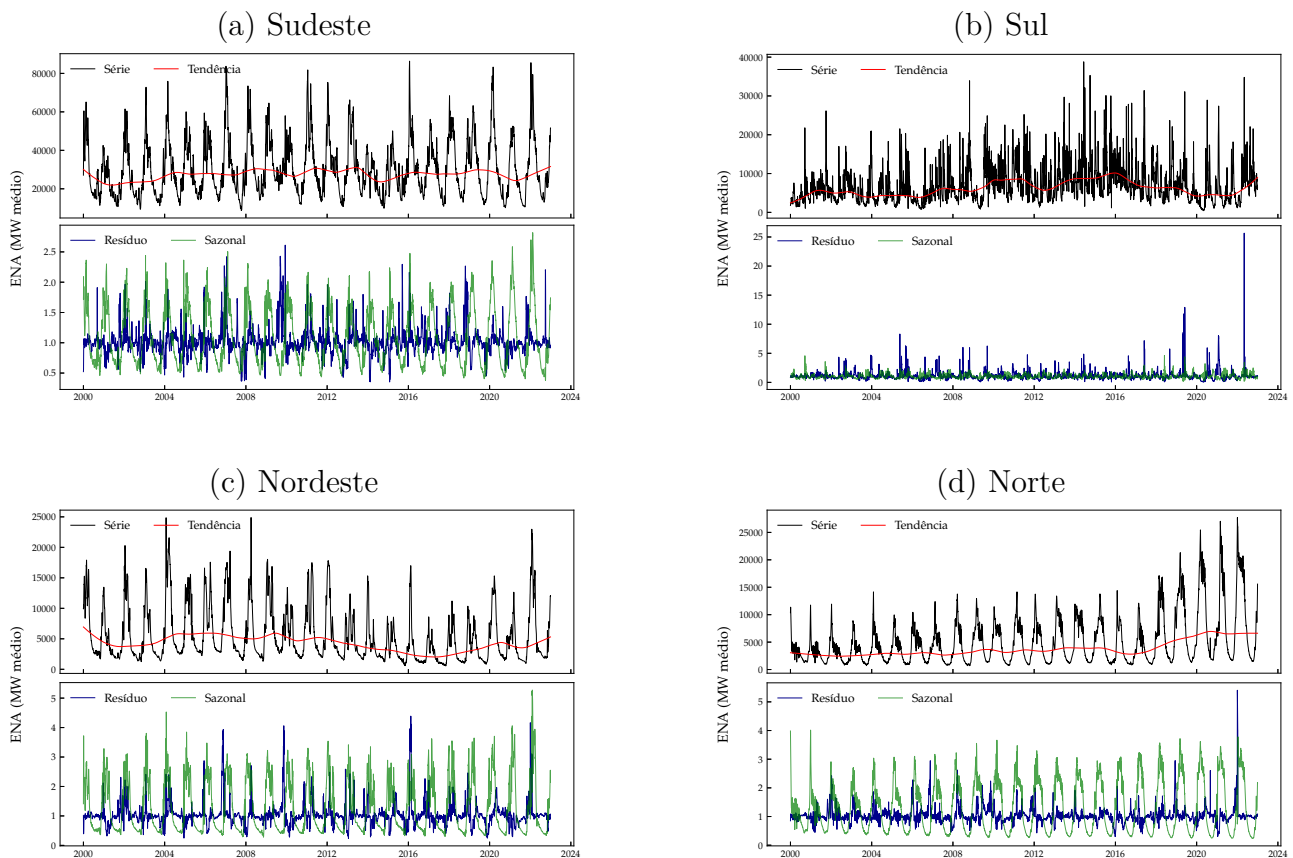


Figura 18 – Decomposição das séries históricas diárias de ENA por submercado usando STL com período igual a 365 dias (sazonalidade anual).

A força da tendência no submercado Sudeste foi estimada em 0,24, indicando uma presença moderada desta componente na série. Em contraste, a sazonalidade foi mais proeminentemente com um valor de 0,78, sugerindo uma forte influência sazonal nos dados de ENA deste submercado. A sazonalidade do Sudeste pode ser associada à sua clássica alternância entre períodos de chuvas e estiagem. O Sudeste brasileiro é marcado por verões chuvosos e invernos secos, principalmente devido ao regime de chuvas das frentes frias e do sistema de Zona de Convergência do Atlântico Sul. Assim, a forte sazonalidade observada pode ser consequência direta dessa variabilidade hidrológica anual.

O submercado Sul apresentou uma tendência mais acentuada, com um valor de 0,31, entretanto a sazonalidade foi consideravelmente mais baixa, registrando um valor de 0,14. Isso sugere que, embora exista uma tendência discernível na série do Sul, a sazonalidade tem um impacto relativamente menor nessa região, provavelmente devido a um regime de chuvas mais distribuído ao longo do ano em comparação com outras regiões do Brasil, embora ainda existam variações sazonais.

No Nordeste, a tendência mostrou ser mais forte em comparação com o Sudeste e o Sul, com um valor de 0,46. A elevada sazonalidade de 0,77 está fortemente ligada ao regime climático da região, que enfrenta longos períodos de seca seguidos por curtos períodos chuvosos. Esse padrão é agravado pelo fenômeno *El Niño*, que frequentemente induz a redução das chuvas

na região, levando a acentuadas variações sazonais na ENA..

Por fim, o submercado Norte revelou a tendência mais acentuada entre os submercados analisados, com um valor de 0,63. A sazonalidade também foi extremamente elevada, com um valor de 0,89, apontando para uma marcada periodicidade na série de dados deste submercado. A região Norte, onde se localiza a Amazônia, é caracterizada por um clima equatorial, com chuvas intensas e frequentes. Entretanto, ainda existe uma variabilidade sazonal marcada entre o período mais chuvoso e o menos chuvoso. A alta sazonalidade pode estar associada a essa distinção, bem como à variabilidade interanual de fenômenos climáticos, como o *El Niño* e *La Niña*, que podem afetar o regime de chuvas na região.

Tabela 15: Força da tendência e sazonalidade das séries históricas diárias de ENA após decomposição com algoritmo STL e período igual 365 dias (1 ano), para cada um dos submercados.

Componentes da Decomposição	Submercados			
	Sudeste	Sul	Nordeste	Norte
Tendência	0.24	0.31	0.46	0.63
Sazonalidade	0.78	0.14	0.77	0.89

A sazonalidade observada nas séries de ENA de cada submercado reflete, em grande medida, a variabilidade climática e hidrológica intrínseca de suas respectivas regiões. Essa análise reitera a importância de considerar fatores geográficos e meteorológicos ao analisar e prever comportamentos de ENA em diferentes regiões do Brasil.

4.3.4 Reversão para a Média

Para o submercado Sudeste, o coeficiente de Hurst da série original indica uma persistência fraca (0.5470). Isso sugere que as flutuações no passado têm uma tendência leve de continuar no mesmo sentido no futuro. No entanto, após a dessazonalização, o coeficiente cai para 0.2365, revelando uma anti-persistência moderada. Isso indica que, ao remover a sazonalidade, a série mostra uma propensão mais significativa para reverter para sua média ao longo do tempo.

O submercado Sul apresenta uma anti-persistência forte (0.1836) para a série original, implicando em flutuações que são mais propensas a reverter à média em curto prazo. A série dessazonalizada exibe um coeficiente de 0.2160, que denota uma anti-persistência moderada.

No Nordeste, a série original revela uma persistência moderada (0.5658), indicando uma tendência de continuação das flutuações no mesmo sentido por períodos mais longos. Contudo, ao dessazonalizar, observa-se uma redução do coeficiente passando para 0.2788, representando anti-persistência moderada.

Por fim, o submercado Norte possui uma persistência fraca (0.5987) na série original. A dessazonalização, entretanto, altera essa característica, resultando em um coeficiente de Hurst de 0.2534, o que sugere uma anti-persistência moderada.

A mudança dos expoentes de Hurst das séries originais para as séries dessazonalizadas nos submercados Sudeste, Nordeste e Norte sugere que a sazonalidade pode estar influenciando o comportamento da série original a ponto de mascarar sua natureza anti-persistente. Como o Sul apresenta baixa sazonalidade, o impacto foi menor.

Tabela 16: Coeficiente de Hurst referente às séries temporais originais e dessazonalizadas do CMO Horário em cada submercado, usando MF DFA4.

Submercado	Série Temporal	
	Original	dessazonalizada
Sudeste	0.5470 persistência fraca	0.2365 anti-persistência moderada
Sul	0.1836 anti-persistência forte	0.2160 anti-persistência moderada
Nordeste	0.5658 persistência fraca	0.2788 anti-persistência moderada
Norte	0.5987 persistência fraca	0.2534 anti-persistência moderada

Em resumo, a análise dos coeficientes de Hurst revela uma importante dinâmica das séries temporais de ENA. Enquanto as séries originais tendem a mostrar níveis variados de persistência, as séries dessazonalizadas tendem a ser majoritariamente anti-persistentes. Esse comportamento enfatiza a importância da sazonalidade e sua influência nas características temporais da ENA nos diferentes submercados brasileiros.

4.3.5 Multifractalidade

A análise do $\Delta\alpha$ revela diferenças significativas na complexidade e heterogeneidade das séries temporais dessazonalizadas dos quatro submercados. O Nordeste destaca-se como o submercado com a maior amplitude de singularidades, sugerindo a presença de uma gama mais ampla de flutuações e irregularidades. Esta alta multifractalidade sugere uma complexidade considerável nas séries temporais dessazonalizadas da ENA, podendo ser atribuído às características climáticas únicas do Nordeste, como a variabilidade das chuvas e o fenômeno da seca, que afetam a afluência dos rios de maneira complexa, conforme já dito na seção anterior.

A multifractalidade em séries históricas de variáveis hidrológicas ou energéticas é fundamental no contexto do mercado de eletricidade brasileiro, pois pode auxiliar na modelagem, previsão e na tomada de decisões relacionadas ao comportamento dinâmico e multifractal dessas séries temporais.

Tabela 17: Multifractalidade das séries temporais diárias de ENA em cada submercado, dessazonalizadas através da remoção da componente de sazonalidade obtidas como STL.

Submercado	Indicadores de Multifractalidade	
	ΔH	$\Delta \alpha$
Sudeste	0.4142	0.6413
Sul	0.2641	0.4535
Nordeste	0.5620	0.8242
Norte	0.4865	0.7638

4.4 Curva de Carga

No modelo de despacho hidrotérmico, a demanda é expressa pela carga esperada nos períodos de estudo para cada submercado. A projeção mensal da demanda para os modelos de médio prazo ocorre anualmente e é revisada a cada quatro meses pelo ONS e EPE. O mercado de energia elétrica é influenciado por variáveis como o crescimento econômico, estrutura da renda nacional, população, número de domicílios, projetos industriais, condições climáticas, progressos tecnológicos, e trocas entre diferentes fontes energéticas. As políticas de eficiência energética, entre outras ações relacionadas ao desenvolvimento econômico, também têm impacto significativo no setor [119].

Alterações tecnológicas e novos projetos industriais têm o potencial de modificar o perfil de consumo elétrico em longo prazo. Por exemplo, o racionamento de 2001 no Brasil, que impôs uma redução de carga de 20%, levou diversos segmentos de consumidores a optarem por equipamentos mais eficientes em termos energéticos. Estes investimentos resultaram em uma retração da carga que perdurou até 2007. Este declínio da demanda, ou crescimento moderado influenciou significativamente o mercado, resultando em preços mais acessíveis e favorecendo a migração de consumidores cativos para o mercado livre. Se um modelo de previsão não leva em consideração tais fenômenos, as previsões podem não ser precisas, afetando a formação de preço no mercado.

Entender a demanda histórica pode ser valioso para os tomadores de decisão, já que os dados passados podem carregar informações que ajudam a entender eventos correlacionados. Modelos de previsão necessitam de dados históricos representativos que são usados para ajustar ou treinar os mais diversos tipos de modelos. Os gráficos da Figura 19 apresentam o comportamento da carga horária dos submercados entre 01/01/2019 e 31/12/2022 (os dados iniciam-se em 2000, mas para melhorar a visualização, serão apresentados somente a partir de 2019).

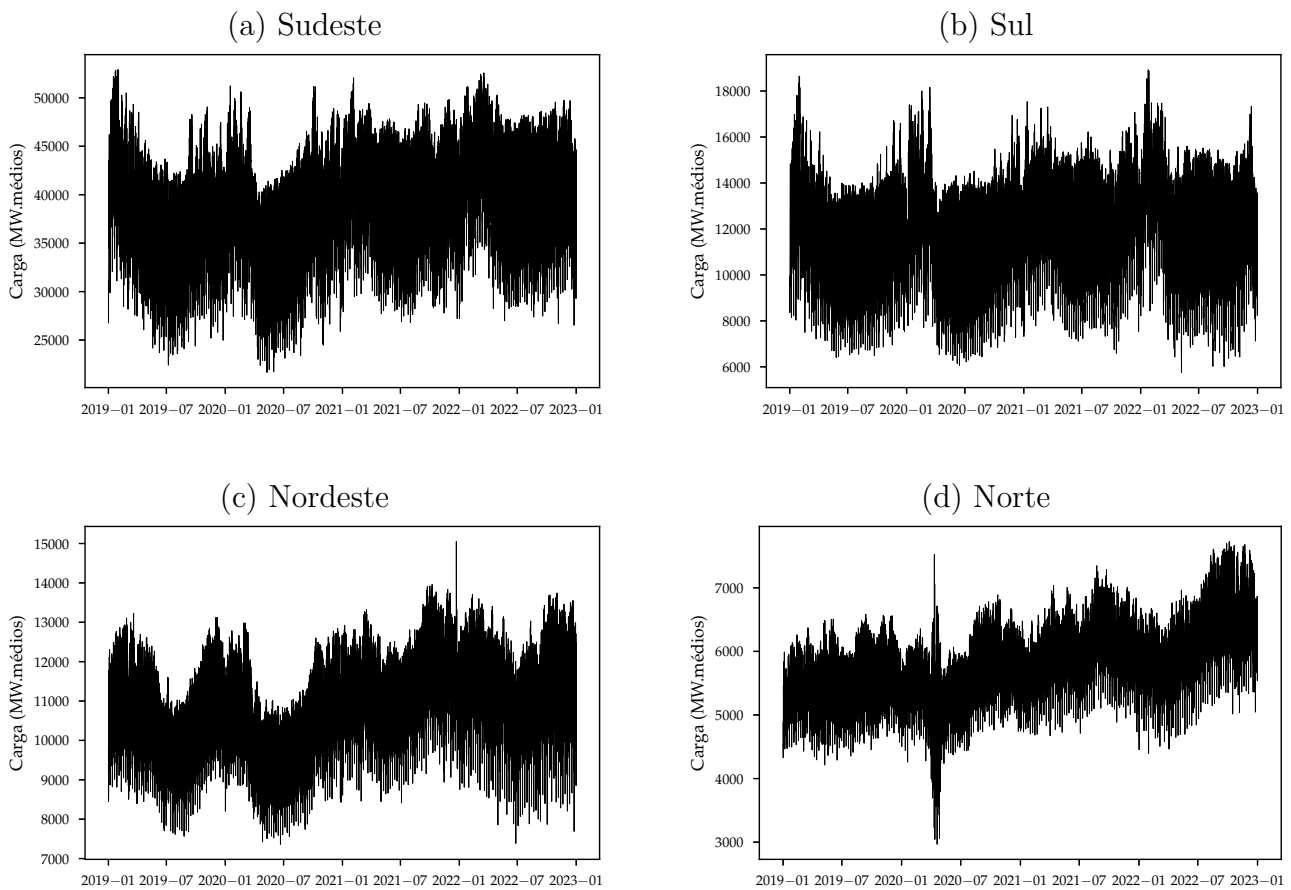


Figura 19 – Séries históricas de carga, em base horária, para os quatro submercados do SIN. Para melhorar a visualização dos dados, o histórico de 2019 a 2022.

4.4.1 Distribuição dos Valores

Os dados de carga horária para os diferentes subsistemas de energia elétrica foram analisados, e as estatísticas descritivas apresentadas na tabela 18 indicam características importantes para cada submercado. Todas as regiões possuem 201.624 observações, sem valores faltantes. Em termos de médias de demanda, o subsistema SE tem a maior com 32.581,67 MW, seguido por S com 9.271,76 MW, NE com 8.373,02 MW e N com 4.180,33 MW. Essas médias são consistentes com os intervalos de confiança, que são mais estreitos para cada subsistema devido ao grande número de observações.

A dispersão dos dados é capturada por medidas como o desvio padrão e o coeficiente de variação. O subsistema SE apresenta o maior desvio padrão de 6.849,80 MW, mas tem o menor coeficiente de variação (0,21), indicando uma dispersão relativamente menor em relação à sua média. Por outro lado, o subsistema N, embora tenha o menor desvio padrão de 1.260,69 MW, apresenta o maior coeficiente de variação de 0,30, sinalizando uma dispersão relativamente maior em comparação com sua média.

Tabela 18: Estatística descritiva para as séries temporais de carga em base horária, para todos os submercados.

Estatísticas	Submercados			
	Sudeste	Sul	Nordeste	Norte
nobs	201624	201624	201624	201624
mean	32581.67	9271.76	8373.02	4180.33
median	32316.58	8985.21	8324.06	3962.96
std	6849.80	2541.23	2099.44	1260.69
iqr	10248.31	3714.97	3483.41	2169.90
iqr_normal	7597.08	2753.91	2582.25	1608.55
mad	5681.74	2093.56	1789.55	1096.24
mad_normal	7121.00	2623.89	2242.86	1373.93
coef_var	0.21	0.27	0.25	0.30
range	44918.86	18924.74	14899.20	7116.68
max	52889.43	18924.74	15049.06	7727.08
min	7970.58	0.00	149.86	610.40
skew	0.07	0.35	0.08	0.17
kurtosis	2.36	2.50	2.06	1.93
jarque_bera	3554.72	6262.20	7672.92	10510.59
jarque_bera_pval	0.00	0.00	0.00	0.00
1%	18592.99	4691.82	4410.55	2021.50
5%	21647.44	5451.86	5150.00	2321.61
10%	23513.06	6048.38	5618.86	2528.00
25%	27535.43	7398.84	6626.22	3157.41
50%	32316.58	8985.21	8324.06	3962.96
75%	37783.74	11113.81	10109.62	5327.31
90%	41700.29	12816.70	11210.86	5848.10
95%	43905.17	13692.62	11756.59	6153.01
99%	47348.63	15280.61	12623.92	6764.59

^a Os valores da carga estão apresentados em MW.médios

Os valores extremos são refletidos nos valores mínimos e máximos. Por exemplo, o subsistema SE varia entre 7.970,58 MW e 52.889,43 MW, enquanto o subsistema N varia entre 610,40 MW e 7.727,08 MW. A assimetria dos dados é evidenciada pelos valores de assimetria.

Todos os subsistemas, exceto o S, têm valores de assimetria próximos de zero, indicando distribuições aproximadamente simétricas. A curtose, que fornece uma medida da "pesadez" das caudas da distribuição, mostra que todos os subsistemas têm valores próximos de 2, indicando distribuições ligeiramente leptocúrticas em comparação com uma distribuição normal. O teste de Jarque-Bera, uma medida de normalidade, rejeita a hipótese de normalidade para todos os subsistemas, como indicado pelo p-valor de 0,00.

Em resumo, essas estatísticas descritivas fornecem uma compreensão abrangente da distribuição da carga horária em diferentes subsistemas de energia elétrica. Ao considerar essas informações, é possível entender as variações, tendências e particularidades do consumo de energia em diferentes regiões do país.

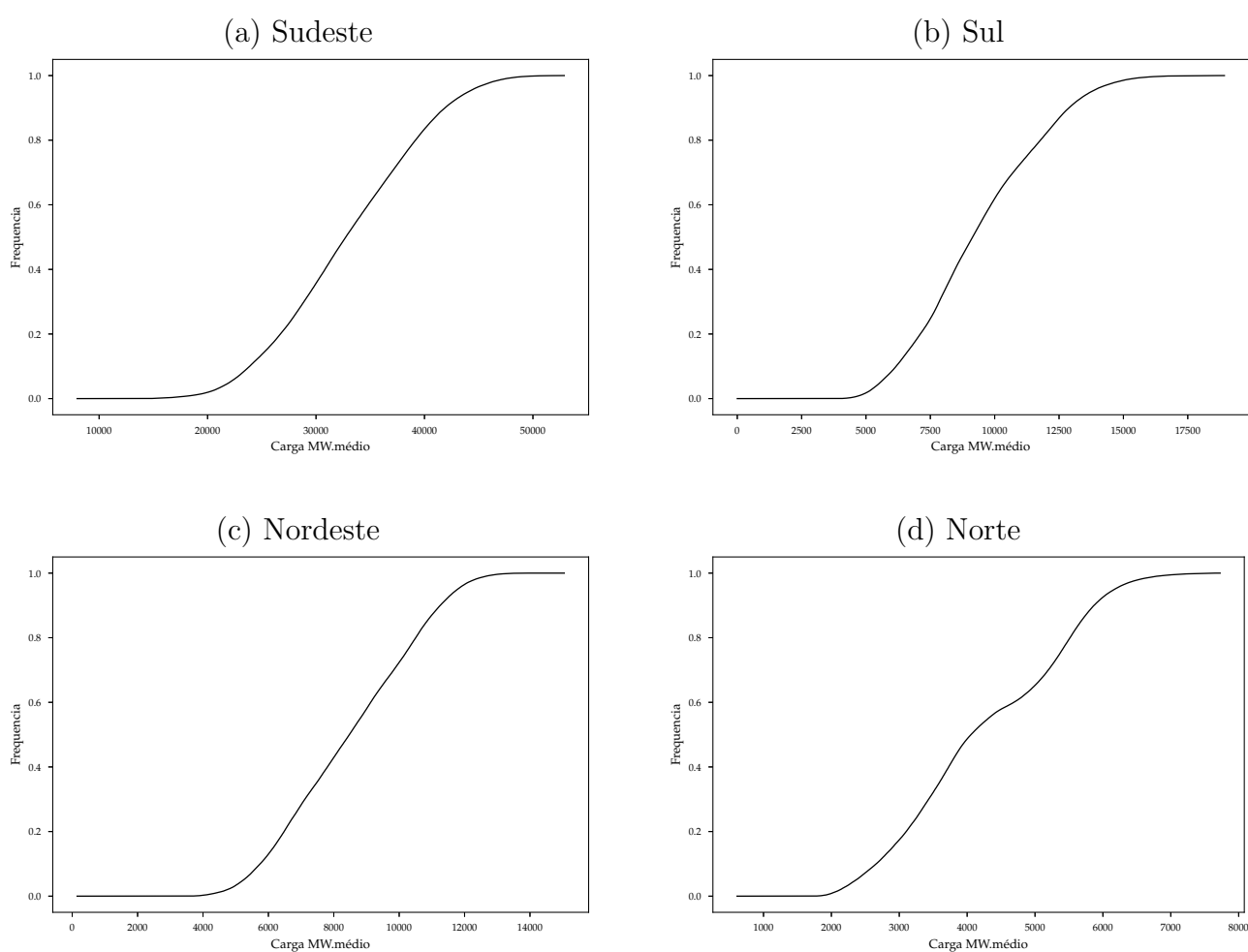


Figura 20 – Histograma cumulativo para os dados de carga Horária, para os quatro subsistemas.

4.4.2 Estacionariedade

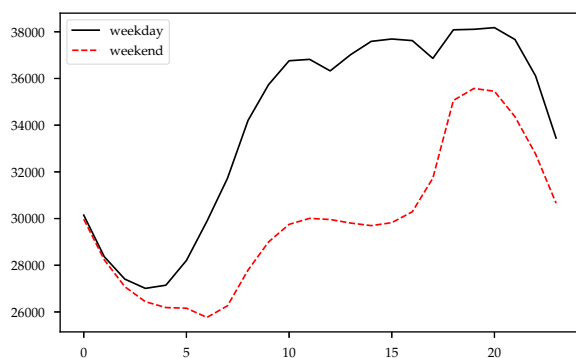
Comparando a estatística do teste com os valores críticos, observa-se que a estatística do teste é mais negativa do que os valores críticos para todos os níveis de significância (1%, 5% e 10%) em todos os submercados, conforme pode ser visto na tabela 19. Isso reforça a rejeição da hipótese nula e a afirmação de que as séries são estacionárias.

Tabela 19: Teste de Dickey-Fuller Aumentado aplicado às séries temporais de Carga Horária, para testar hipóteses de presença de raiz unitária indicando não-estacionariedade. Dados limitados ao período de 2019 a 2022.

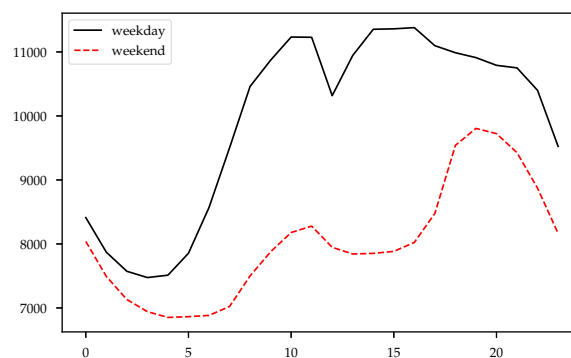
Teste Dickey-Fuller Aumentado	Submercados			
	Sudeste	Sul	Nordeste	Norte
Valor da Estatística de Teste	-14.6924	-18.7778	-13.4315	-9.0955
valor-p	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
# de <i>Lags</i> Usado	52	52	52	52
# de Observações Usado	35011	35011	35011	35011
Valor Crítico (1%)	-3.4305	-3.4305	-3.4305	-3.4305
Valor Crítico (5%)	-2.8616	-2.8616	-2.8616	-2.8616
Valor Crítico (10%)	-2.5668	-2.5668	-2.5668	-2.5668

4.4.3 Sazonalidade

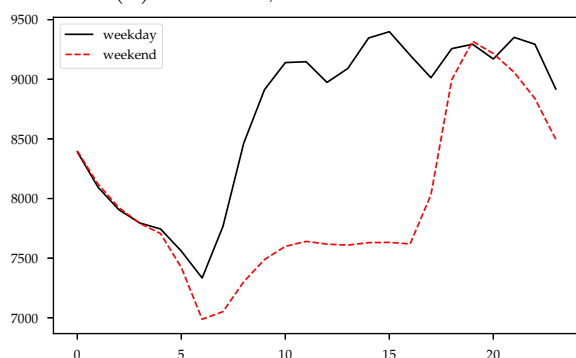
Os gráficos da Figura 21 apresentam as curvas de carga média para as 24 horas de um dia útil (linha preta) e final de semana (linha vermelha).



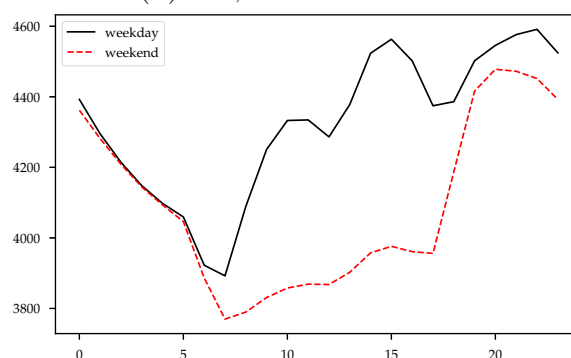
(a) Sudeste, CMO Horário



(b) Sul, CMO Semanal



(c) Nordeste, CMO Horário



(d) Norte, CMO Semanal

Figura 21 – Curva de Carga ao longo das 24 horas do dia. A curva preta indica a curva média para as horas de um dia útil e a curva vermelha apresenta a curva média para as horas de um final de semana.

Já os gráficos da 22 mostram o comportamento da carga ao longo das 168 horas que

compõe uma semana. As curvas azuis representam a semana média do mês de janeiro (mês pertencente ao período úmido) e as curvas laranja representam a semana média do mês de julho (mês pertencente ao período seco). Visualmente percebe-se que a carga horária apresenta sazonalidade semanal. Além disso, os gráficos ratificam a sazonalidade diária apresentada pelas curvas de carga diárias dos gráficos da Figura 21.

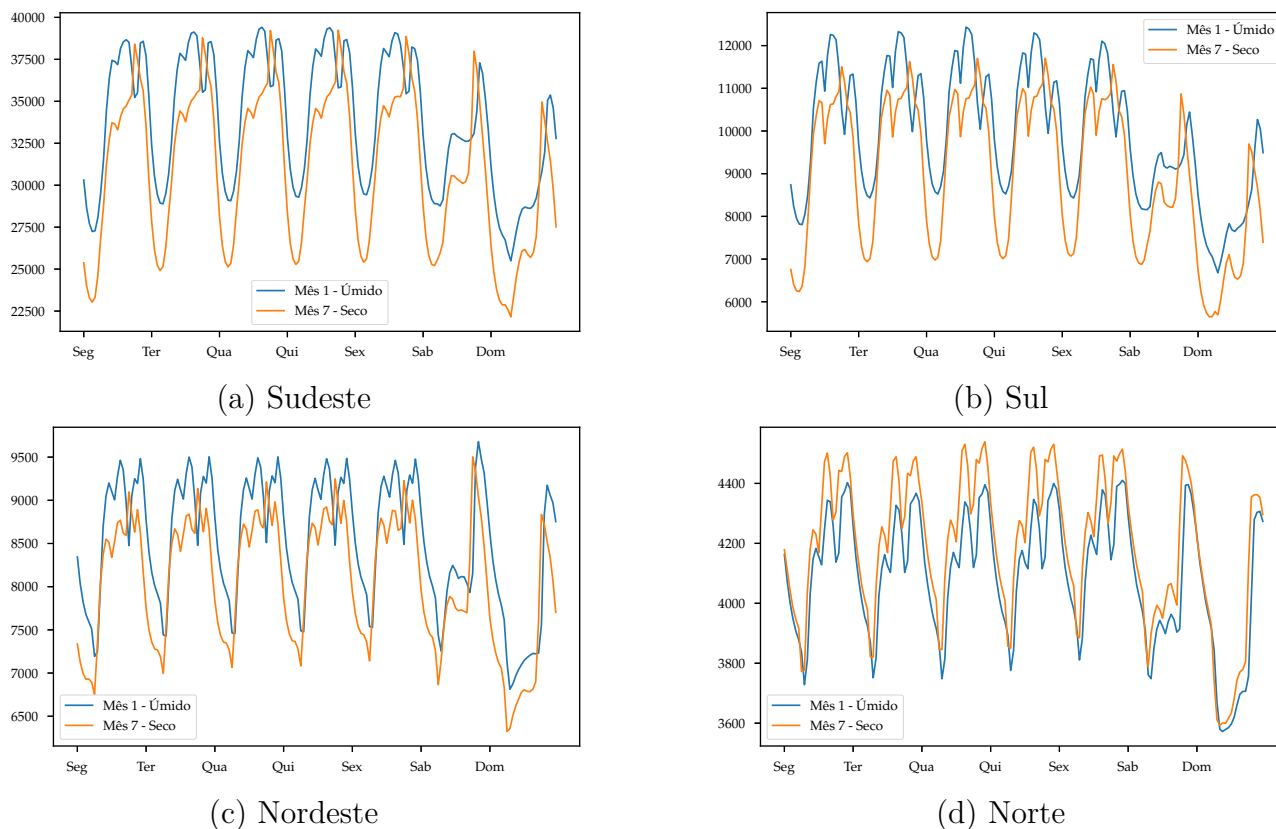


Figura 22 – Comportamento da Carga ao longo das 168 horas que compõe uma semana. A curva preta indica a curva média para as horas de um dia útil e a curva vermelha apresenta a curva média para as horas de um final de semana.

A carga apresenta sazonalidades diária, semanal e anual que pode ser comprovada por meio dos gráficos de densidade espectral de potência, onde os picos significativos que indicam as frequências dominantes, conforme pode ser visto na figura 23.

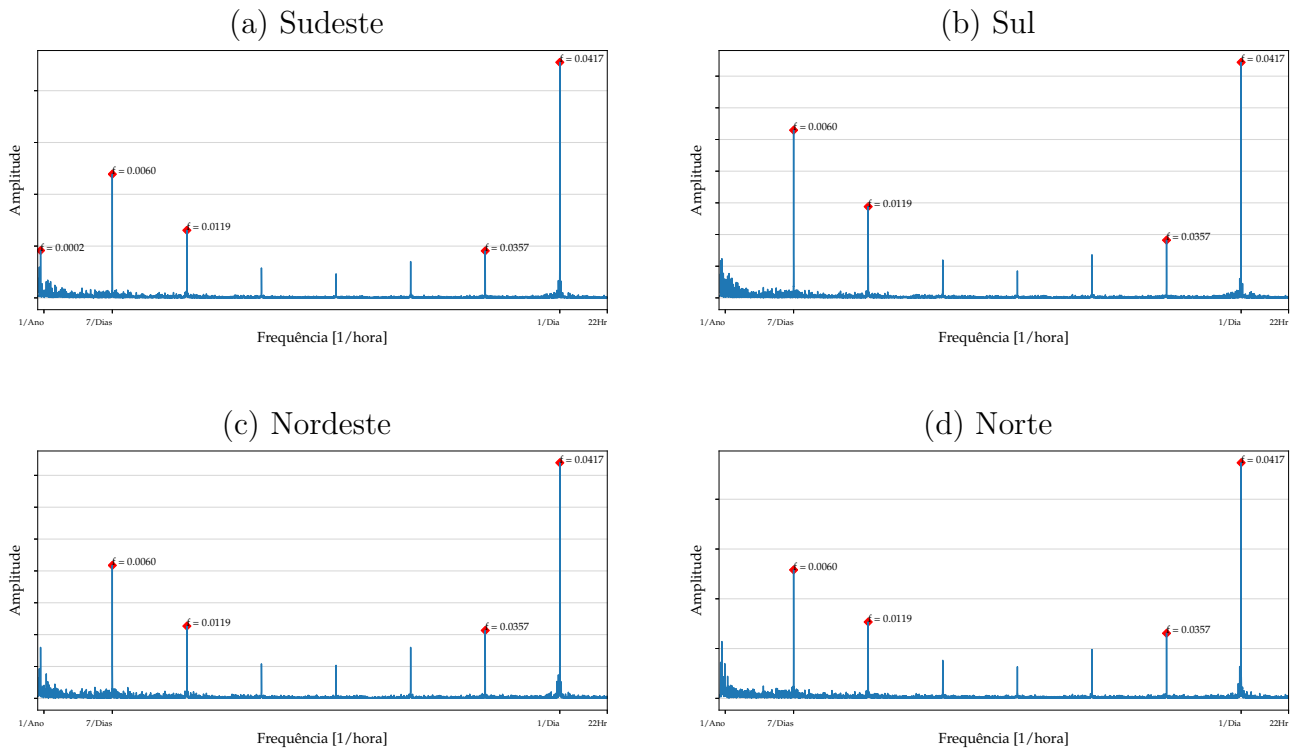
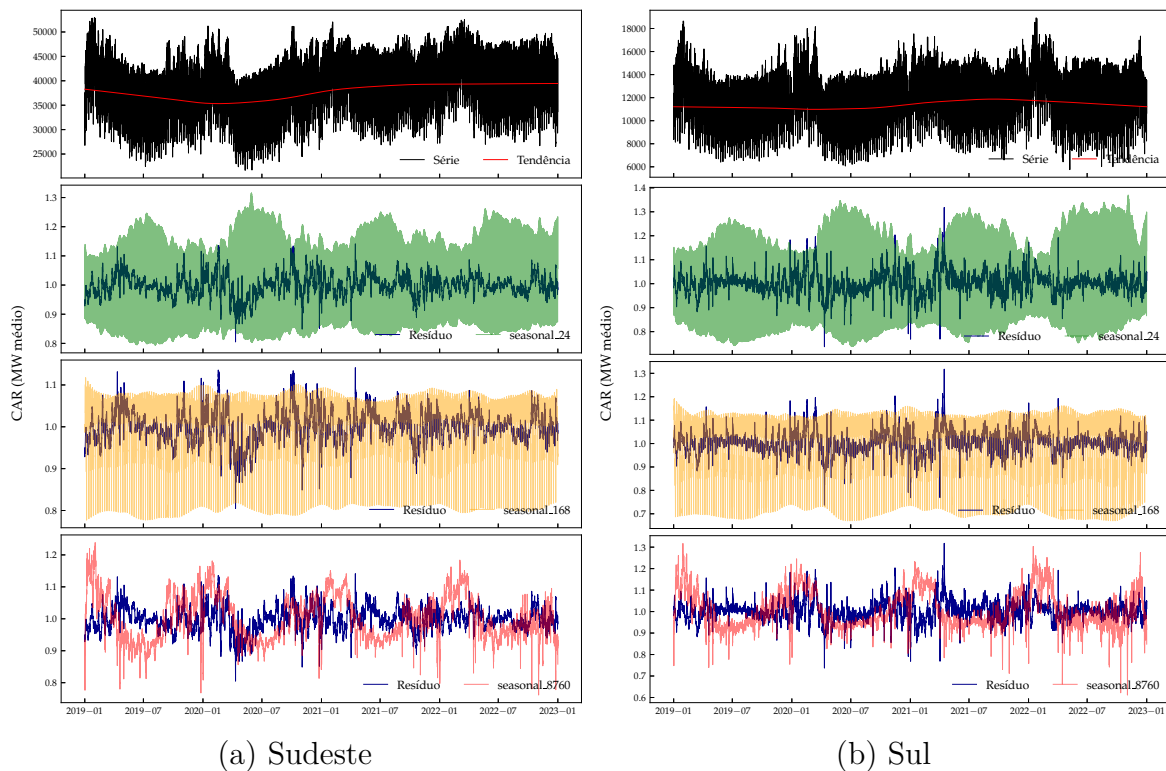


Figura 23 – Gráficos de densidade espectral de potência para as séries temporais de Carga Horária por submercado. Picos mais intensos próximos às frequências correspondentes a 1 dia (0.04167), 7 dias (0.00595) e 1 ano (0,00011) indicam a presença de ciclo sazonal.

Os gráficos da Figura 24 mostram a decomposição das séries temporais através do algoritmo MSTL.



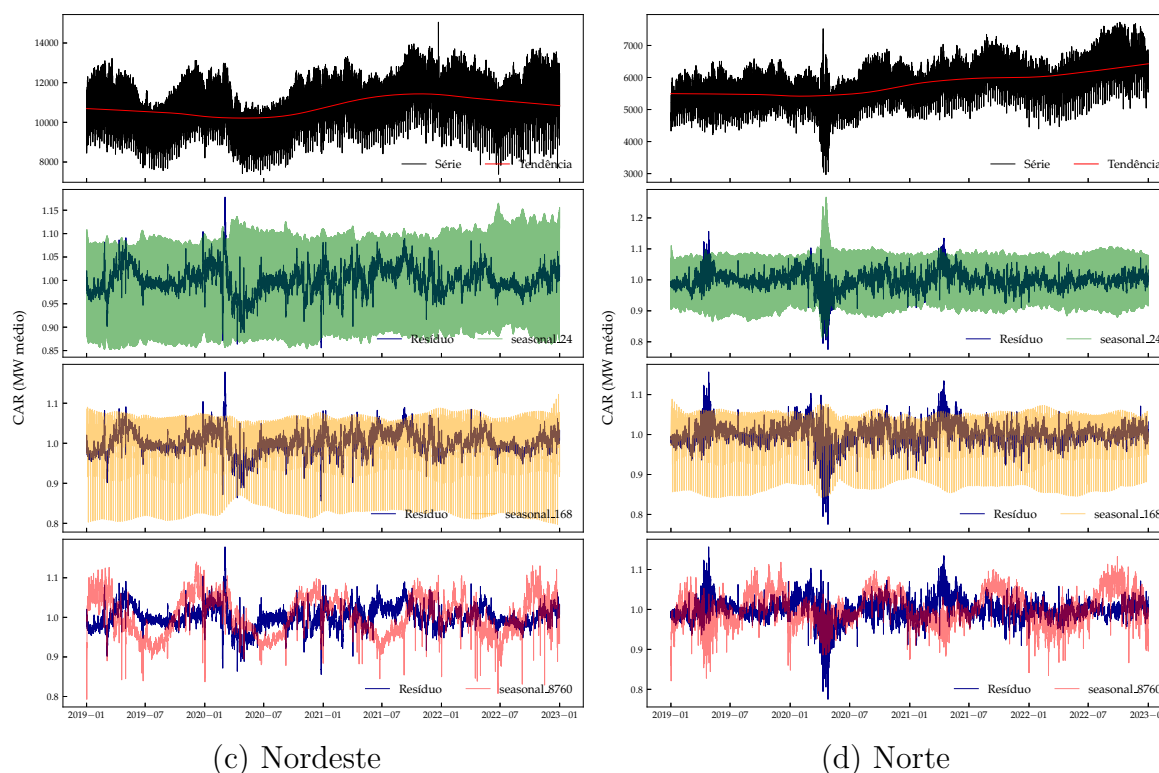


Figura 24 – Decomposição da série temporal de Carga Horária. Para o submercado Sudeste, o primeiro gráfico apresenta a série original (linha preta) e a componente de tendência. O segundo, terceiro e quarto gráficos representam as componentes de sazonais de 24 horas (linha verde), 168 horas (linha amarela) e 8760 horas (linha laranja). A linha azul nos gráficos de componentes sazonais representa o resíduo.

4.4.4 Reversão para a média

A verificação se as séries temporais de Carga Horária apresentam memória longa ou reversão para a média é feita através do método MF DFA. A tabela 20 apresenta os valores do coeficiente de Hurst para as séries originais e para as séries dessazonalizadas. As séries temporais dos quatro submercados apresentam um comportamento persistente para as séries originais e, um comportamento anti-persistente para as séries dessazonalizadas.

Tabela 20: Coeficiente de Hurst referente às séries temporais originais e dessazonalizadas do CMO Horário em cada submercado, usando MF DFA4.

Submercado	Série Temporal	
	Original	dessazonalizada
Sudeste	0.8362 persistência forte	0.3001 anti-persistência moderada
Sul	0.7662 persistência fraca	0.2554 anti-persistência moderada
Nordeste	0.8559 persistência forte	0.1545 anti-persistência forte

Continua na próxima página

Tabela 20: Coeficiente de Hurst referente às séries temporais originais e dessazonalizadas do CMO Horário em cada submercado, usando MF DFA4. (Continuação)

Submercado	Série Temporal	
	Original	dessazonalizada
Norte	0.8802 persistência forte	0.2389 anti-persistência moderada

4.4.5 Multifractalidade

A tabela 21 apresenta os valores de ΔH e $\Delta \alpha$ para as séries de carga horária dessazonalizadas, obtidos através da aplicação do MF DFA4 aos dados de carga horária, pode-se inferir que a série dessazonalizada do Sul é a mais multifractal (ou heterogênea e complexa), enquanto o Sudeste é o menos multifractal. Norte e Nordeste ocupam posições intermediárias.

Tabela 21: Multifractalidade das séries temporais dessazonalizadas do Carga Horária em cada submercado, usando MF DFA4.

Submercado	Indicadores de Multifractalidade	
	ΔH	$\Delta \alpha$
Sudeste	0.2249	0.3623
Sul	0.2361	0.3951
Nordeste	0.2075	0.3801
Norte	0.2343	0.3930

As cargas dos submercados representadas pelas séries temporais horárias, iniciando em 2000 e finalizando em 2022. Apesar das séries apresentarem distribuições mais simétricas, os testes de Jarque-Bera rejeitaram a hipótese de normalidade. Os testes de Dickey-Fuller aumentado rejeitaram a hipótese nula de presença de raiz unitária (não-estacionariedade das séries), sendo que todas as séries temporais podem ser consideradas estacionárias. As séries apresentam sazonalidade múltipla, sendo identificadas as componentes diária, semanal e anual através dos gráficos de densidade espectral de potência. Todas as séries originais apresentaram persistência forte, porém a remoção das componentes sazonais tornou as séries anti-persistentes. A multifractalidade medida pelo cumprimento do espectro multifractal pode ser considerada baixa. O Sul se destaca apresentando a maior multifractalidade, sugerindo uma maior heterogeneidade e complexidade em sua série dessazonalizada em comparação com os outros submercados.

4.5 Preço de Liquidação de Diferenças Horário

Após 2 anos de acompanhamento e aprendizado de agentes e órgãos do mercado, foi introduzido uma mudança significativa no cálculo dos PLDs: preço em base horária, por

submercado, para as 24 horas do dia seguinte, calculado um dia de antecedência. A operação do sistema para os anos de 2019 e 2020, ainda em base semanal, foi realizada em conjunto com a operação sombra, onde os preços e o despacho horário foram calculados. Foi possível ao longo deste período comparar os resultados obtidos por ambas as metodologias, de forma que os agentes de mercado pudessem compreender a dinâmica da nova formação de preço.

A série histórica de preços horários oficial inicia à 00 hora de 01 de janeiro de 2021, porém neste trabalho serão utilizados os dados horários disponibilizados durante o período do preço sombra, ou seja, iniciando à 00 hora de 01 de janeiro de 2019 e terminando às 23 horas de 31 de dezembro de 2022. Com isso, tornou-se possível usar os registros de mais de dois anos de preços horários, sendo que os anos de 2019 e 2020 foram importantes do ponto de vista de comportamento dos preços. O gráfico da Figura 25 permite visualizar o comportamento das séries horárias ao longo do período analisado.

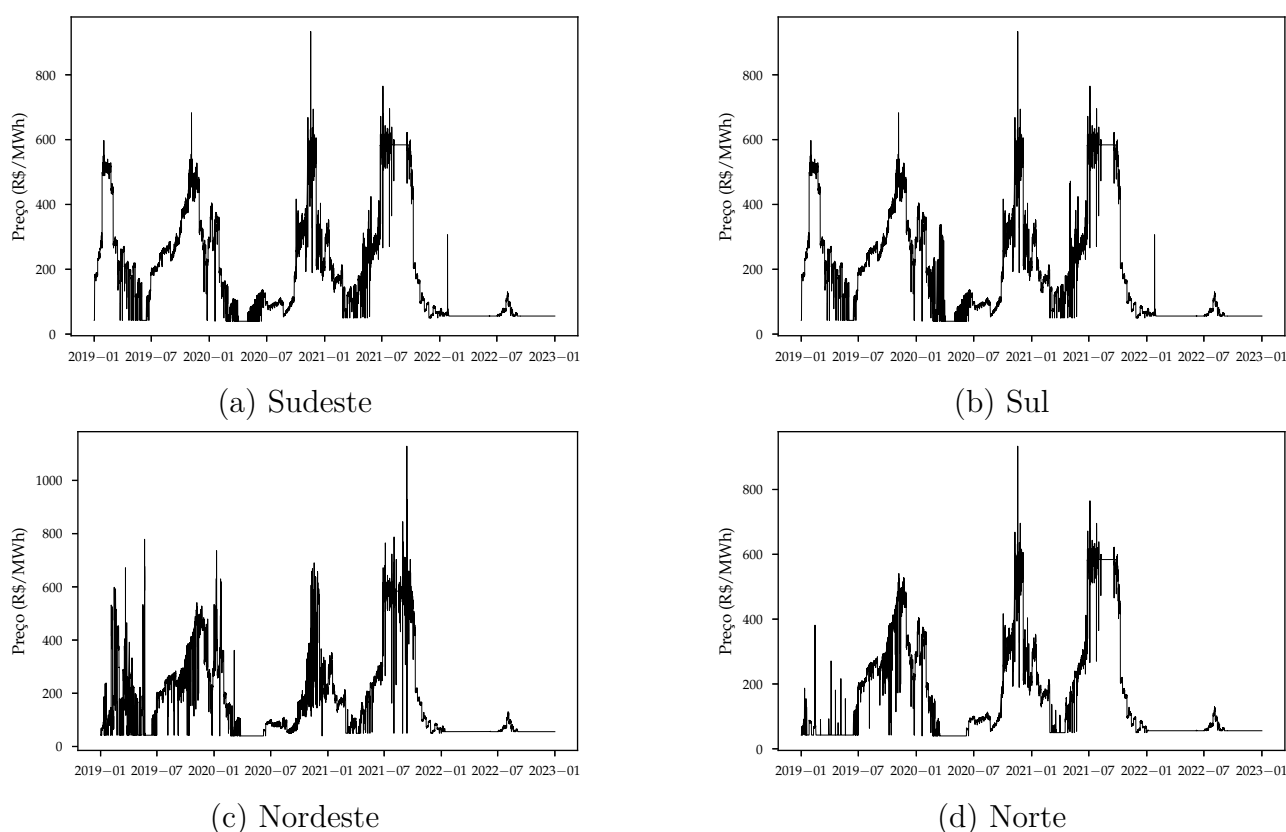


Figura 25 – Histórico do PLD Horário para cada submercado, iniciando em 01/01/2019 e finalizando em 31/12/2022

O ano de 2021 apresentou uma variação muito grande, pois o Brasil passou pela pior crise energética dos últimos 90 anos. O período úmido que inciou em novembro de 2020 e encerrou em abril de 2021 apresentou o pior nível de vazões afluentes aos reservatórios das usinas hidrelétricas o que levou a uma operação mais cara, através de usinas termelétricas com elevados custos variáveis unitários. A situação começou a virar em outubro de 2021 devido à antecipação do período úmido para setembro (incia-se normalmente em novembro) e aumento das vazões. Ao final do ano de 2021 e início de 2022 o nível de armazenamento dos reservatórios

das usinas atingiu patamares bastante confortáveis para a redução do custo de operação do sistema. O anos de 2022, apresentou pouca variação no preço horário, mantendo-se a maior parte do tempo próximo do preço mínimo.

4.5.1 Distribuição de Valores

A tabela 22 apresenta estatísticas descritivas do Preço de Liquidação das Diferenças (PLD) horário para quatro submercados. Cada submercado teve 35.064 observações, sem nenhuma observação faltante, representando o período de 01/01/2019 a 31/12/2022. Em média, o submercado Sudeste apresentou um PLD de R\$197,96/MWh, enquanto o Sul, um pouco superior, teve uma média de R\$200,21/MWh. O Nordeste e o Norte tiveram médias menores, com 174,24 e 168,78 R\$/MWh, respectivamente. Estas médias possuem um erro padrão de aproximadamente 0,88 para todos os submercados, com exceção do Nordeste que tem um erro padrão ligeiramente menor de 0,86. Quanto à mediana, que representa o valor central dos dados, o Sul teve o valor mais elevado com R\$144,09/MWh, seguido por Sudeste com R\$136,55/MWh, Nordeste com R\$93,00/MWh e Norte com R\$81,00/MWh.

O desvio padrão, uma medida da dispersão dos dados, para cada submercado ficou em torno de 165, com o Nordeste tendo o menor valor de R\$161,39/MWh e o Norte, um valor muito próximo ao do Sudeste e Sul, com R\$164,88/MWh. Isso indica uma variabilidade significativa nos preços em todos os submercados. O coeficiente de variação, que mede a dispersão relativa dos dados, foi maior no Norte com 0,98 e no Nordeste com 0,93. Sudeste e Sul tiveram coeficientes de 0,84 e 0,83, respectivamente, mostrando que a variabilidade relativa é ligeiramente menor nesses submercados. Os valores máximo e mínimo registrados foram bastante similares em três submercados (Sudeste, Sul e Norte), variando de 39,68 a 933,67 R\$/MWh. O Nordeste, no entanto, apresentou um valor máximo mais elevado de R\$1128,72/MWh, apesar de ter o mesmo valor mínimo.

No contexto do PLD, a assimetria apresenta-se positiva em todos os submercados (1,12 para Sudeste, 1,09 para Sul, 1,42 para Nordeste e 1,39 para Norte) sugerindo que há muitos períodos com preços mais baixos e alguns períodos com preços extremamente altos. O submercado Nordeste apresenta a assimetria mais acentuada, indicando que tem mais variações extremas de preço em comparação com os outros submercados. Os valores de curtose para os submercados são: 3,19 para Sudeste, 3,14 para Sul, 4,09 para Nordeste e 3,84 para Norte. Isso indica que todos os submercados apresentam caudas mais pesadas do que uma distribuição normal, com o Nordeste se destacando mais uma vez com a cauda mais pesada entre os quatro. Isso está alinhado com a maior assimetria observada para o Nordeste.

Tabela 22: Estatísticas descritivas da série temporal do preço da eletricidade horário para cada submercado (Preços são medidos em R\$/MWh)

Estatísticas	Submercados			
	Sudeste	Sul	Nordeste	Norte
nobs	35064.00	35064.00	35064.00	35064.00
mean	197.96	200.21	174.24	168.78
median	136.55	144.09	93.00	81.00
std	165.61	165.53	161.39	164.88
iqr	219.81	222.44	189.13	196.61
iqr_normal	162.94	164.90	140.20	145.74
mad	134.12	134.06	127.03	132.88
mad_normal	168.09	168.02	159.21	166.53
coef_var	0.84	0.83	0.93	0.98
range	893.99	893.99	1089.04	893.99
max	933.67	933.67	1128.72	933.67
min	39.68	39.68	39.68	39.68
skew	1.12	1.09	1.42	1.39
kurtosis	3.19	3.14	4.09	3.84
jarque_bera	7441.88	7023.58	13486.83	12329.20
jarque_bera_pval	0.00	0.00	0.00	0.00
1%	39.68	39.68	39.68	39.68
5%	42.35	42.35	39.68	39.68
10%	55.70	55.70	42.35	42.35
25%	55.70	55.70	55.70	55.70
50%	136.55	144.09	93.00	81.00
75%	275.50	278.14	244.83	252.31
90%	503.10	503.10	451.56	452.18
95%	583.88	583.88	577.16	583.88
99%	597.90	597.90	606.24	597.79

^a Os preços são apresentados em R\$/MWh

O teste de Jarque-Bera resultou em valores altamente significativos para todos os submercados, com um valor-p de 0,00. Isso sugere que a distribuição dos preços não segue uma distribuição normal em nenhum dos submercados.

A IQR apresentou os maiores valores para o submercado Sul com R\$222,44/MWh, seguido pelo Sudeste com 219,81. O Nordeste e Norte apresentaram valores mais baixos de 189,13 e 196,61 r\$/MWh, respectivamente. Isso indica que a gama média de variação dos preços, descartando os valores extremos, é mais ampla nos submercados Sudeste e Sul. Para o IQR normalizado, os submercados Sul e Sudeste ainda lideram com 164,90 e 162,94 R\$/MWh, respectivamente, enquanto Nordeste e Norte mostram menor dispersão com 140,20 e 145,74 R\$/MWh.

O Sul e o Sudeste apresentam valores do MAD muito próximos de 134,06 e 134,12 R\$/MWh, respectivamente. O Nordeste tem um valor ligeiramente mais baixo de R\$127,03/MWh, e o Norte se aproxima dos líderes com R\$132,88/MWh. Estes valores reforçam a ideia de que os preços no Sudeste e Sul têm uma variação similar e ligeiramente maior do que nos outros dois submercados. O MAD normalizado apresenta valores mais altos que o MAD regular. O Nordeste lidera com 159,21, seguido pelo Norte com R\$166,53/MWh, Sul com R\$168,02/MWh e Sudeste com R\$168,09/MWh. Isso indica que, quando se considera a variação dos preços em relação à mediana e se normaliza os resultados, o Nordeste e Norte apresentam uma variação relativa maior do que o Sudeste e Sul.

Essa análise revela diferenças significativas nos preços entre os submercados, com o Nordeste e o Norte frequentemente se distinguindo dos outros dois. A variabilidade dos preços é significativa em todos os submercados, e os dados indicam que a distribuição dos preços não segue uma distribuição normal em nenhum deles.

4.5.2 Estacionariedade

Os resultados do teste de Dickey-Fuller aumentado aplicado às séries temporais de PLD Horários estão apresentados na tabela 23.

Tabela 23: Teste de Dickey-Fuller Aumentado aplicado às séries temporais de PLD horário, para testar hipóteses de presença de raiz unitária indicando não-estacionariedade.

Teste Dickey-Fuller Aumentado	Submercados			
	Sudeste	Sul	Nordeste	Norte
Valor da Estatística de Teste	-2.6523	-2.8517	-4.6728	-2.4775
valor-p	0.0827	0.0513	0.0001	0.1211
# de Lags Usado	52.0000	52.0000	52.0000	51.0000
# de Observações Usado	35011.0000	35011.0000	35011.0000	35012.0000
Valor Crítico (1%)	-3.4305	-3.4305	-3.4305	-3.4305
Valor Crítico (5%)	-2.8616	-2.8616	-2.8616	-2.8616
Valor Crítico (10%)	-2.5668	-2.5668	-2.5668	-2.5668

Para o submercado Sudeste, **valor da estatística de teste** é -2.6523, que é maior que os valores críticos em todos os níveis de significância (1%, 5% e 10%). O **valor-p** é 0.0827, o que é maior que 0.05, indicando que não se pode rejeitar a hipótese nula de que a série possui uma raiz unitária no nível de significância de 5%. Portanto, a série do submercado Sudeste parece ser não-estacionária.

O **valor da estatística de teste** é -2.8517 para o submercado Sul, sendo superior que os valores críticos em 1% e 5%, mas inferior ao valor crítico em 10%. O **valor-p** é 0.0513, que é ligeiramente superior a 0.05, levando-nos a concluir que a série de PLD Horário do submercado Sul está no limite da estacionariedade no nível de 5%, mas pode ser considerada estacionária a 10% de significância.

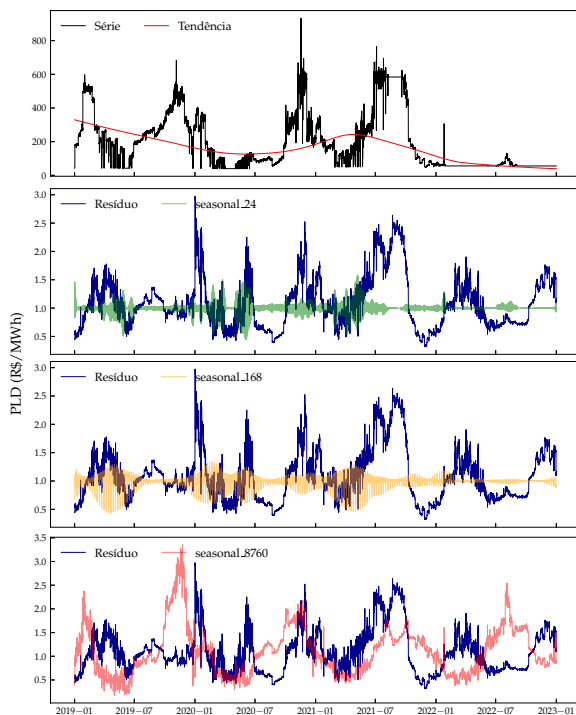
O Nordeste apresenta o menor valor da estatística de teste dentre os 4 submercado, -4.6728. Este valor é menor que os valores críticos em todos os níveis de significância, indicando que a série é estacionária. O **valor-p** é 0.0001, a 0,01 corroborando a conclusão anterior.

Já o submercado Norte apresenta o **valor da estatística de teste** de -2.4775, que é maior que os valores críticos em todos os níveis de significância. O **valor-p** valor superior ao nível crítico de 0.10 indicando que a hipótese nula não pode ser rejeitada e, portanto, a série do submercado Norte parecer ser não-estacionária.

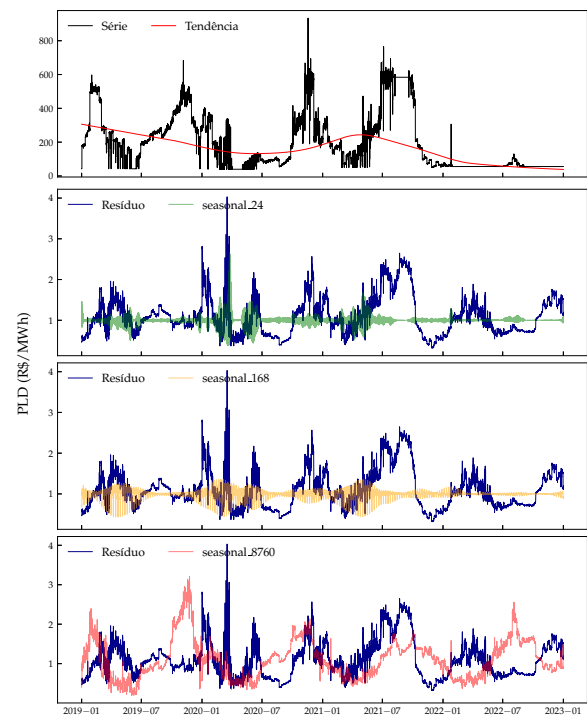
Em resumo, dentre os quatro submercados, apenas o Nordeste apresenta evidências claras de estacionariedade. O Sul está no limite, enquanto o Sudeste e o Norte parecem ter séries não estacionárias.

4.5.3 Sazonalidade

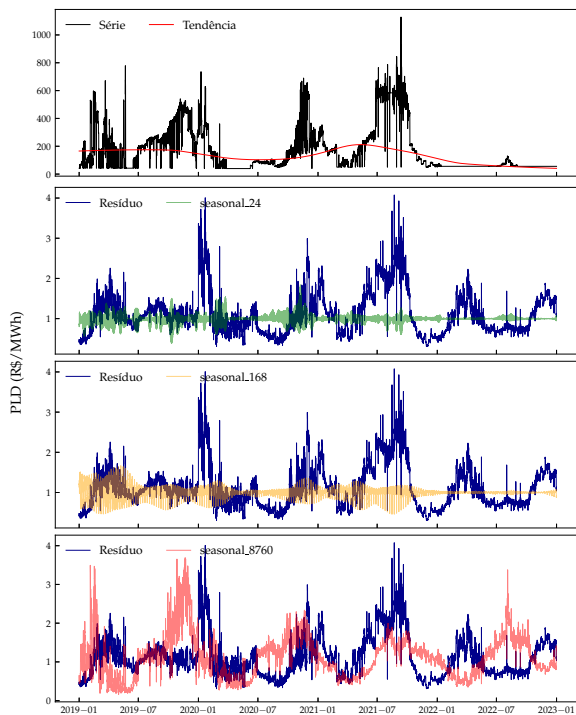
Assumindo que as séries históricas de PLD Horário dos quatro submercados apresentam sazonalidade diária, semanal e anual, os gráficos da Figura 26 apresentam a decomposição para os quatro submercados:



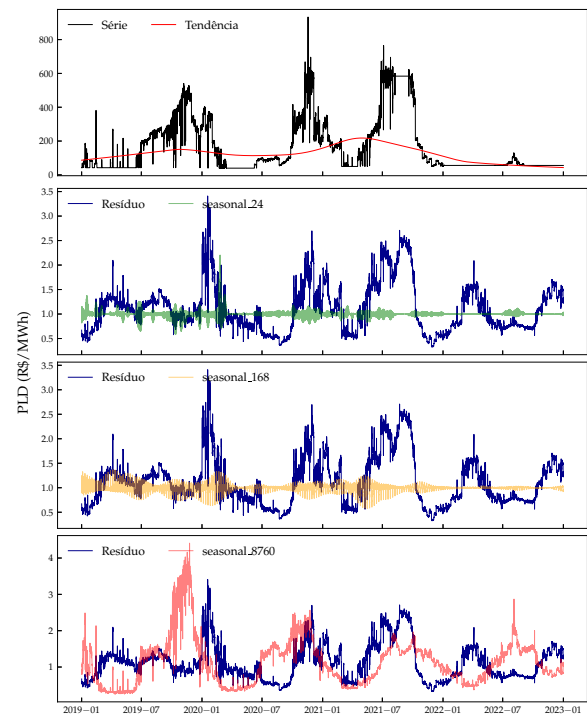
(a) Sudeste



(b) Sul



(c) Nordeste



(d) Norte

Figura 26 – Decomposição da série de PLD Horário usando MSTL. No primeiro gráfico a curva preta apresenta a série original e a curva vermelha a componente de tendência. No segundo gráfico as curvas verde, amarela e laranja apresentam as componentes sazonais e a curva azul o resíduo.

As componentes sazonais do PLD podem ser confirmadas através de análise do espectro de potência, conforme figura 27

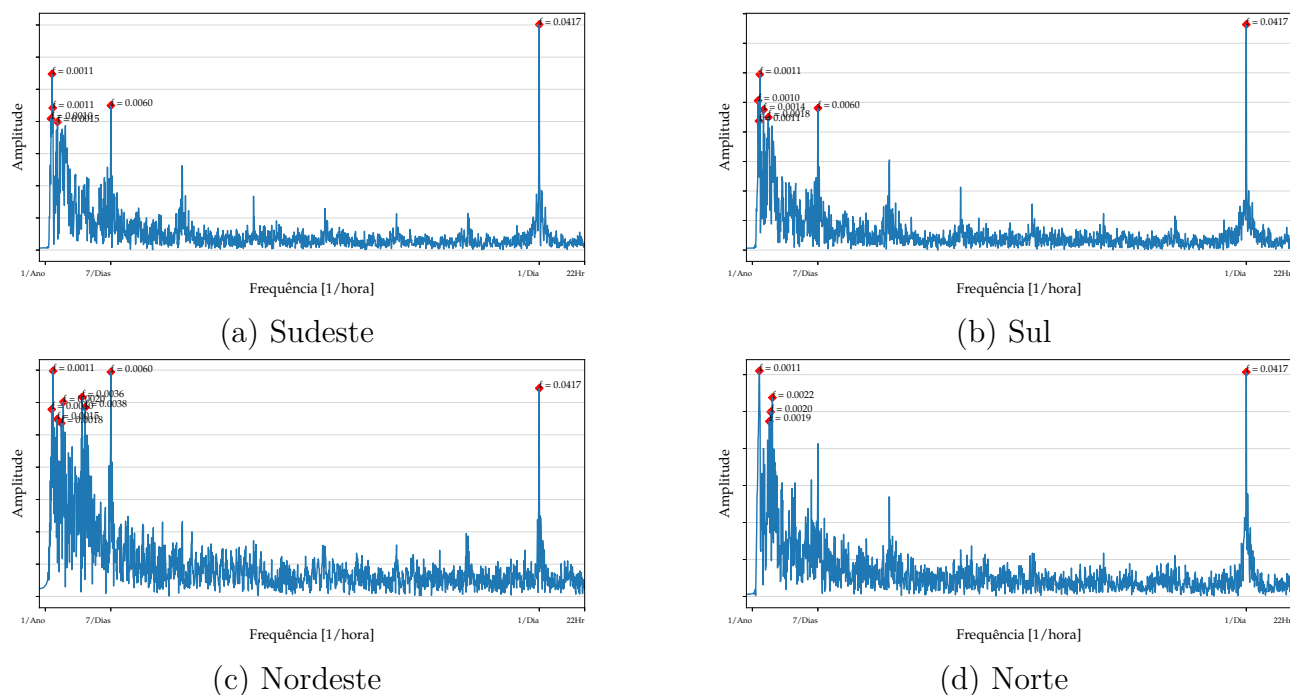


Figura 27 – Gráficos de densidade espectral de potência para as séries temporais de CMO Horário por submercado. Picos mais intensos próximos às frequências correspondentes a 1 dia (0.04167), 7 dias (0.00595) e 1 ano (0,00011) indicam a presença de ciclo sazonal.

4.5.4 Reversão para a Média

Da mesma forma que o CMO Horário, o PLD apresenta reversão para a média nos quatro submercados, mesmo após a dessazonalização das séries. Diferentemente do CMO, para o PLD, as mudanças após dessazonalização foram menos pronunciadas, mantendo-se geralmente na mesma categoria de anti-persistência, exceto para o submercado Nordeste que apresentou uma redução mais pronunciada da anti-persistência. Isso sugere que os efeitos sazonais têm uma influência mais substancial nas tendências temporais do CMO em comparação com o PLD.

Tabela 24: Coeficiente de Hurst referente às séries temporais originais e dessazonalizadas do PLD Horário em cada submercado, usando MF DFA4.

Submercado	Série Temporal	
	Original	dessazonalizada
Sudeste	0.3402 anti-persistência moderada	0.3697 anti-persistência moderada
Sul	0.3122 anti-persistência moderada	0.3564 anti-persistência moderada
Nordeste	0.1889 anti-persistência forte	0.2622 anti-persistência moderada
Norte	0.3233 anti-persistência moderada	0.3471 anti-persistência moderada

4.5.5 Multifractalidade

Para o submercado Sudeste, o PLD tem um $\Delta\alpha$ de 0.6478, indicando uma multifractalidade moderada, conforme tabela 25. Em um mercado de eletricidade, isso sugere que há uma variedade de dinâmicas de curto e longo prazo em jogo e essas dinâmicas podem ser o resultado de diferentes fatores, como balanço entre oferta e demanda, incidentes na geração ou transmissão, ou intervenções regulatórias.

No Sul, o $\Delta\alpha$ é de 0.7354. Esse valor é superior ao observado no Sudeste, indicando um grau mais acentuado de multifractalidade. Este submercado pode ter mais episódios de volatilidade ou eventos extremos, refletindo possivelmente um mercado mais complexo e dinâmico em comparação com o Sudeste.

O $\Delta\alpha$ do submercado Nordeste é de 0.4585. O valor está abaixo dos submercados Sudeste e Sul, indicando um grau de multifractalidade mais fraco, mas que ainda reflete uma série de comportamentos em diferentes escalas. A região Nordeste tem suas peculiaridades em termos de geração e demanda, o que pode influenciar esses padrões.

Finalmente, no Norte, apresenta o valor de 0.6153 para o $\Delta\alpha$, sendo semelhante ao do Sudeste. A multifractalidade moderada sugere que, enquanto existem variabilidades distintas presentes, elas podem não ser tão acentuadas como no Sul.

Tabela 25: Multifractalidade das séries temporais dessazonalizadas do PLD Horário em cada submercado, usando MF DFA4.

Submercado	Indicadores de Multifractalidade	
	ΔH	$\Delta\alpha$
Sudeste	0.4470	0.6478
Sul	0.5023	0.7354
Nordeste	0.3022	0.4585
Norte	0.3961	0.6153

Analisando o grau de multifractalidade do PLD nos diferentes submercados, observa-se que todos apresentam características multifractais moderadas, com o Sul tendo a multifractalidade mais pronunciada, o Norte e Sudeste os valores mais próximos entre si e o Nordeste com a menor multifractalidade. Essa multifractalidade no PLD reflete a complexidade do mercado de eletricidade, com diferentes dinâmicas atuando em diversas escalas de tempo. Embora o PLD tenha limites impostos, ainda capta uma gama significativa de comportamentos que são essenciais para entender e modelar o mercado de eletricidade.

4.6 Comparação do PLD com o CMO

Comparando os resultados do CMO Horário, 4.2.1 e do PLD Horário, observa-se vários pontos interessantes:

- (i) O CMO Horário apresenta médias ligeiramente superiores em relação ao PLD Horário para os submercados. Por exemplo, o submercado SE no CMO Horário tem uma média de R\$245,71/MWh, enquanto no PLD Horário é de R\$197,96/MWh.
- (ii) No CMO Horário, os desvios padrões são mais elevados, indicando maior volatilidade nos preços. O coeficiente de variação (std/mean) é consistentemente mais alto para o CMO em comparação com o PLD, indicando uma maior dispersão relativa dos dados no CMO.
- (iii) O IQR e o MAD, ambos indicadores de dispersão, são consistentemente mais altos para o CMO em comparação com o PLD. Isso sugere que a dispersão de preços em torno da mediana e média, respectivamente, é maior para o CMO.
- (iv) Ambas as séries apresentam assimetria positiva, indicando uma cauda direita mais longa. Contudo, o CMO parece ter uma assimetria mais pronunciada do que o PLD, especialmente para o submercado NE. Em relação à curtose, ambos apresentam valores acima de 3, indicando caudas mais pesadas do que a distribuição normal. O CMO, em especial no submercado NE, mostra uma curtose significativamente mais alta em comparação com o PLD, sugerindo uma presença ainda mais acentuada de *outliers* ou valores extremos.
- (v) Ambos os conjuntos de dados apresentam valores extremos, mas o CMO tem uma maior amplitude de variação nos seus valores extremos em comparação com o PLD.
- (vi) As medianas do CMO são geralmente mais altas do que as do PLD, indicando que o preço central tende a ser superior no CMO em comparação com o PLD.
- (vii) Em ambos os casos, o teste de Jarque-Bera rejeita a hipótese de normalidade, indicando que tanto o CMO quanto o PLD não seguem uma distribuição normal.

O CMO e o PLD exibem propriedades de séries temporais não gaussianas, caracterizadas por distribuições de caudas pesadas e assimetria positiva. No entanto, observa-se que o CMO manifesta maior dispersão, volatilidade e uma frequência mais elevada de valores extremos em comparação com o PLD. Isso pode ser atribuído aos limites superior e inferior impostos ao PLD, que restringem sua amplitude de flutuação.

Em relação à estacionariedade das séries temporais de CMO e PLD, conforme avaliado pelos testes de Dickey-Fuller Aumentados, constata-se que, no submercado do Nordeste, ambas as séries demonstram não estacionariedade a um nível de significância de 1%. Por outro lado, o submercado Norte apresenta estacionariedade para o PLD, mas revela não estacionariedade para o CMO a um nível de significância de 10%. Os submercados Sudeste e Sul, por sua vez, exibem não estacionariedade para ambas as séries, com níveis de significância de 10% para o PLD e de 5% para o CMO.

Adicionalmente, a análise do coeficiente de Hurst proporciona informações adicionais sobre as características intrínsecas das séries temporais de PLD e CMO. A multifractalidade, definida como uma distribuição complexa e hierárquica de momentos em uma série temporal, é

de particular relevância nos mercados de eletricidade. Isso se deve à possibilidade de alternância entre períodos de volatilidade extrema e fases de estabilidade relativa. O coeficiente de Hurst serve como um indicador dessa natureza multifractal.

É importante destacar que, embora o PLD seja derivado do CMO, a imposição de limites máximos e mínimos ao PLD introduz distorções que podem afetar sua estrutura multifractal. Essas distorções, conseqüentemente, influenciam a interpretação dos coeficientes de Hurst, refletindo as diferenças entre as características multifractais do CMO e as do PLD limitado.

A aplicação de técnicas de dessazonalização pode enfatizar as características multifractais de uma série temporal ao eliminar periodicidades regulares. Especificamente no contexto do CMO, observa-se uma diminuição nos coeficientes de Hurst subsequentes à dessazonalização. Esta redução, quando comparada aos valores correspondentes do PLD, revela que os coeficientes dessazonalizados do CMO são inferiores, denotando uma maior antipersistência no PLD após a dessazonalização. Tal fenômeno sugere que o CMO pode estar mais sujeito a influências sazonais em comparação ao PLD, que, por sua vez, devido à imposição de limites superiores e inferiores, pode exibir menor sensibilidade a variações sazonais.

Em termos de multifractalidade, medido pelo parâmetro $\Delta\alpha$, observam-se distinções entre o CMO e o PLD. Nos submercados Sudeste e Norte, há um incremento na multifractalidade do PLD em comparação com o CMO, indicando que as séries temporais do PLD nesses submercados são mais multifractais que as do CMO. Isso sugere que os limites aplicados ao PLD podem ter aumentado a complexidade das séries de preços dessazonalizados nessas regiões. Em contraste, nos submercados Sul e Nordeste, verifica-se uma diminuição da multifractalidade ao comparar o PLD dessazonalizado com o CMO. Isso implica que, nestes submercados, o CMO reflete uma variedade mais ampla de dinâmicas e volatilidades. Portanto, enquanto a imposição de limites no cálculo do PLD visa proteger os participantes do mercado contra variações de preços extremamente voláteis, tal mecanismo também pode reduzir a complexidade da série temporal, tornando-a menos multifractal e possivelmente menos representativa da complexidade subjacente ao mercado de energia elétrica.

4.7 Conclusão

Ao longo deste capítulo, foram realizadas diversas análises sobre as séries temporais associadas ao CMO, PLD, Carga e ENA para os diferentes submercados brasileiros. Inicialmente, foram extraídas estatísticas descritivas, como média, mediana, desvio padrão e coeficiente de variação, fornecendo uma visão geral sobre a distribuição e a variabilidade dos dados. Nestas estatísticas mais simples foi possível visualizar a grande variabilidade dos dados e, em muitos casos, apresentando comportamentos extremos.

A investigação dos parâmetros de assimetria e curtose revelou que as distribuições analisadas são assimétricas e se desviam significativamente de uma distribuição normal. Esta discrepância foi corroborada pelo teste estatístico de Jarque-Bera, resultando na rejeição das hipóteses nulas para todas as séries analisadas, indicando que nem o terceiro (assimetria) nem o

quarto momento (curtose) se alinham com os de uma distribuição normal. Notavelmente, as séries horárias de carga foram as únicas a exibir distribuições quase simétricas (com assimetria próxima de zero). Entretanto, uma cur

O teste de Dickey-Fuller aumentado foi utilizado para testar a presença de raiz unitária nas séries temporais, que é uma indicação de não estacionariedade. Os resultados variaram entre os submercados, com algumas séries apresentando evidências fortes de estacionariedade, enquanto outras requeriam diferenciação.

A decomposição das séries temporais revelou a importância da tendência e sazonalidade em cada submercado. A análise quantificou a força desses componentes nas flutuações das séries, permitindo uma compreensão mais profunda da natureza dos dados. A sazonalidade observada nas séries de ENA reflete, em grande medida, a variabilidade climática e hidrológica intrínseca de suas respectivas regiões. A carga apresenta três tipos de sazonalidade confirmadas pelo espectro de potência. Apesar da ENA e Carga serem variáveis de entrada para alguns modelos que compõem a cadeia de modelos de despacho hidrotérmico, o CMO apresenta uma sazonalidade menos significativa. Os limites impostos ao CMO para cálculo do PLD implica em menor força da sazonalidade, quando comparada ao CMO.

Adicionalmente, o coeficiente de Hurst, utilizado para entender a persistência ou anti-persistência das séries, revelou características interessantes sobre a natureza das séries temporais. Todos os submercados apresentaram anti-persistência em graus distintos, tanto no CMO quanto no PLD dessazonalizados.

Por fim, a análise do espectro de singularidade, representado por $\Delta\alpha$, forneceu informações importantes sobre a multifractalidade das séries. O comportamento multifractal varia entre os submercados, indicando uma complexidade intrínseca nas séries temporais após a remoção dos padrões sazonais.

A tabela 26 resume os principais indicadores estudados neste capítulo.

Tabela 26: Principais indicadores para os conjuntos de dados analisados no capítulo 4

Indicadores		Força da Tendência	Força da Sazonalidade	Normal	Estacionária	Hurst Original	Hurst Desazo	$\Delta\alpha$ Desazo
CMO	SE	0.64	0.46	Não	Não	0.45	0.30	0.63
	S	0.60	0.45	Não	Não	0.45	0.29	0.76
	NE	0.59	0.53	Não	Sim (1%)	0.28	0.26	0.49
	N	0.63	0.64	Não	Sim (5%)	0.40	0.24	0.56
PLD	SE	0.58	0.40	Não	Não	0.39	0.39	0.73
	S	0.57	0.38	Não	Não	0.35	0.37	0.81
	NE	0.49	0.41	Não	Sim	0.22	0.24	0.75
	N	0.53	0.52	Não	Não	0.36	0.37	0.72
Carga	SE			Não	Sim	0.84	0.30	0.36
	S			Não	Sim	0.77	0.35	0.40
	NE			Não	Sim	0.86	0.15	0.38
	N			Não	Sim	0.88	0.24	0.39
ENA	SE	0.24	0.78	Não	Não	0.55	0.24	0.64
	S	0.31	0.14	Não	Sim	0.18	0.22	0.45
	NE	0.46	0.77	Não	Não	0.57	0.28	0.82
	N	0.63	0.89	Não	Não	0.60	0.25	0.76

Este capítulo enfatizou a importância de uma análise detalhada e rigorosa das séries temporais no setor elétrico brasileiro. Ao compreender a natureza e a complexidade dessas séries, é possível obter informações importantes para a gestão, planejamento e tomada de decisões no mercado de eletricidade. Estas informações são cruciais para a otimização dos recursos, previsão de preços e, em última análise, para garantir a estabilidade e eficiência do sistema elétrico brasileiro.

5 Metodologia

Neste capítulo serão apresentados (i) arcabouço para avaliação da multifractalidade do mercado de eletricidade no Brasil, (ii) arcabouço para avaliação da correlação multifractal entre variáveis que impactam a formação de preços no mercado e (iii) metodologia para filtragem de séries temporais sintéticas geradas por modelos de previsão.

5.1 Avaliação da Multifractalidade do Mercado Brasileiro de Eletricidade

Conforme discutido no Capítulo 1, esta tese, juntamente com o artigo incluído no Anexo A, representam as primeiras iniciativas de investigação sobre a multifractalidade no mercado brasileiro de eletricidade. Os métodos empregados foram baseados em abordagens amplamente reconhecidas e debatidas na literatura especializada em multifractalidade aplicada a diversos mercados, incluindo financeiro, de commodities, eletricidade e criptomoedas, conforme detalhado no Capítulo 3.

O fluxograma da Figura 28 apresenta as etapas para análise multifractal do mercado brasileiro de eletricidade.

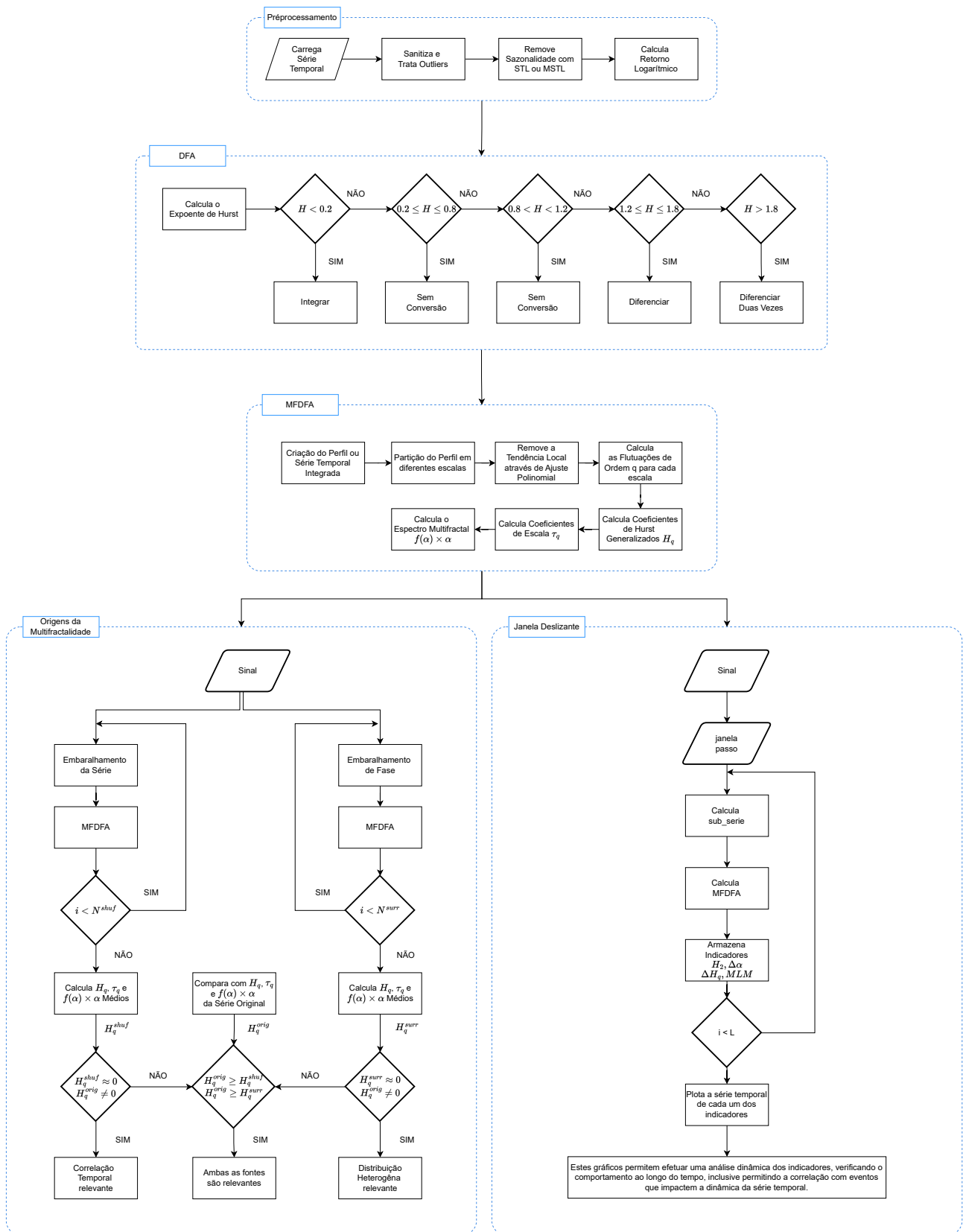


Figura 28 – Fluxograma das etapas para analisar séries temporais com MF DFA.

5.1.1 Préprocessamento

A etapa de pré-processamento é importante para assegurar a integridade e a qualidade dos dados analisados e consiste em carregar as séries temporais de preço, aplicar os tratamentos

necessários, como por exemplo a reposição de dados faltantes, o tratamento de *outliers* e a remoção da sazonalidade.

- **Carregamento dos Dados:** Inicialmente, os dados históricos referentes ao mercado de eletricidade brasileiro, incluindo o CMO, o PLD, a Carga e a ENA, são compilados e carregados a partir de fontes confiáveis¹
- **Sanitização:** Segue-se a fase de sanitização, na qual os dados são inspecionados para identificar e corrigir inconsistências, como formatos de data incompatíveis, erros de codificação ou discrepâncias nos nomes das variáveis. Esta etapa assegura a padronização dos formatos de dados, facilitando análises subsequentes.
- **Tratamento de *Outliers*:** Utiliza-se métodos estatísticos para identificar e tratar *outliers*, que podem distorcer os resultados da análise multifractal. Os *outliers* podem ser tratados através de técnicas como a imposição de limites baseados em intervalos interquartílicos ou a substituição por valores medianos, dependendo da natureza e da distribuição dos dados.
- **Tratamento de Dados Faltantes:** Os dados faltantes são tratados para evitar distorções na análise temporal. Métodos de imputação, como a imputação pela média, mediana ou por métodos mais sofisticados como a interpolação linear ou imputação múltipla, são aplicados conforme apropriado ao padrão e à natureza dos dados ausentes.
- **Desazonalização:** A desazonalização é realizada para remover influências sazonais que podem introduzir artefatos que mascaram as verdadeiras características multifractais dos dados. Conforme descrito na Seção 3.3, essa decomposição das séries temporais em componentes de Tendência, Sazonalidade e Resíduo facilita a análise de dados com padrões de sazonalidade simples ou múltiplos. Isso é realizado por meio dos algoritmos STL para sazonalidade simples e MSTL para múltiplas sazonalidades, respectivamente.
- **Cálculo do Log-retorno:** Finalmente, calculam-se os log-retornos da série temporal, que são utilizados na MF DFA para analisar as flutuações dos preços de maneira normalizada, conforme a equação (3.17). O log-retorno é calculado como o logaritmo natural da razão entre preços consecutivos, transformando a série temporal em uma representação que reflete melhor as variações percentuais e estabiliza a variância.

Esta etapa é fundamental para garantir a adequada aplicação do MF DFA e, por conseguinte, permitir uma avaliação confiável da natureza multifractal da série temporal. Ao eliminar as variações sazonais das séries temporais, pode-se examinar as flutuações intrínsecas dos dados e entender melhor suas características multifractais.

¹ CMO, Carga e ENA foram obtidos no Portal de Dados Abertos do ONS (<https://dados.ons.org.br/>); o PLD foi obtido no site da CCEE <https://ccee.org.br>.

5.1.2 Análise do Tipo de Série: Ruído ou Passeio Aleatório

Antes de aplicar MF DFA, deve-se verificar se a série temporal é semelhante a uma série tipo ruído ou a uma série tipo passeio aleatório, que são dois comportamentos que podem ser observados em séries temporais. Conforme apresentado na Seção 3.2, os algoritmos baseados em MF DFA apresentam melhor desempenho quando o sinal é uma série temporal semelhante a um ruído. Porém, a inspeção visual não garante a identificação correta de uma dessas características. Desta forma, nesta etapa será utilizada a proposta apresentada em [120], de forma a garantir que a série de entrada para o MF DFA esteja na forma correta, ou seja, semelhante a um ruído.

- Primeiro passo executa o algoritmo DFA monofractal para cálculo do expoente de Hurst (H_2).
- Se a série temporal é semelhante a um ruído onde $H_2 < 0.2$, então deve-se integrar a série antes de aplicar as técnicas baseada no algoritmo MF DFA.
- Se a série temporal é semelhante a um ruído onde $0.2 \leq H_2 \leq 0.8$, então as técnicas baseada no algoritmo MF DFA podem ser aplicadas diretamente sem a necessidade de transformação.
- Se a série temporal é semelhante a um passeio aleatório com H_2 entre 0.8 e 1.2, então, as técnicas baseada no algoritmo MF DFA também podem ser aplicadas diretamente sem a necessidade de transformação.
- Se a série temporal é semelhante a um passeio aleatório, porém com H_2 flutuando entre 1.2 e 1.8, então é recomendado diferenciá-las antes de aplicar MF DFA.
- Se a série temporal é semelhante a um passeio aleatório onde $H_2 > 1.8$. Para essas séries, é recomendado diferenciá-las duas vezes antes de aplicar MF DFA.

O procedimento descrito acima é importante para assegurar que a análise multifractal seja aplicada corretamente, proporcionando resultados precisos. A abordagem de realizar uma DFA monofractal antes do MF DFA ajuda a determinar a natureza da série temporal e a decidir sobre a necessidade de transformação antes da análise multifractal.

5.1.3 Aplicação do MF DFA

Nesta fase, procede-se à aplicação do algoritmo MF DFA na série temporal derivada da etapa precedente, conforme detalhado na Seção 3.2. Com a conclusão desta fase, finaliza-se a primeira parte da análise multifractal, que revela uma gama abrangente de informações pertinentes à série de retornos logarítmicos.

Os gráficos que relacionam q a $H(q)$, q a $\tau(q)$, e α a $f(\alpha)$ fornecem informações importantes sobre a multifractalidade das séries temporais em análise. Tais representações gráficas, fundamentais para a compreensão visual, podem ser enriquecidas com indicadores quantitativos

da intensidade da multifractalidade, como $\Delta\alpha$ e $\Delta H(q)$, que quantificam as variações e a complexidade dentro da estrutura multifractal das séries examinadas.

Se a série temporal exibe comportamento multifractal, então as seguintes características podem ser observadas:

- No gráfico do expoente de Hurst generalizado, H_q varia em função de q , indicando dependência do momento de ordem q .
- No gráfico do expoente de escala, observa-se uma relação não-linear entre τ_q e q , refletindo a complexidade multifractal da série.
- O espectro multifractal, quando representado graficamente, exibe uma curva com forma parabólica, caracterizada por uma concavidade voltada para baixo e uma abertura não nula, evidenciando a diversidade de singularidades na série temporal.

5.1.4 Origens da Multifractalidade

A Seção 3.2.3 apresenta os principais referenciais teóricos para investigação das origens da multifractalidade no mercado brasileiro de eletricidade. Foram apresentadas duas abordagens: (i) na primeira, a série temporal é embaralhada para destruir quaisquer correlações temporais (autocorrelações) sem, no entanto, alterar a distribuição de probabilidade dos valores; e (ii) na segunda, analisou-se a multifractalidade devido à função densidade de probabilidade heterogênea, aplicando o método substituto (surrogate) à série original, conforme descrito em [121].

O procedimento de embaralhamento às séries de retorno é feito permutando aleatoriamente os valores da série temporal, mantendo inalterada a distribuição de amplitude, mas eliminando qualquer estrutura de dependência temporal. Esse procedimento é realizado diversas vezes de forma a garantir remoção eficaz da dependência temporal. Já o método substituto envolve a criação de séries substitutas preservando a estrutura de correlação temporal, mas eliminando o componente não linear. Aplica-se o seguinte procedimento: (i) transforma a série temporal original no domínio da frequência usando a transformada de Fourier; (ii) as fases dos coeficientes da Transformada de Fourier Discreta (DFT) da série temporal são substituídas por um conjunto de quantidades pseudo-independentes distribuídas uniformemente no intervalo $(-,)$; (iii) aplica a transformada de Fourier inversa para obter a série substituta. As correlações na série substituta não se alteram, mas a função de probabilidade converge para a distribuição Gaussiana. O referencial teórico para ambos os procedimentos está detalhado na Seção 3.2.3.

Aplica-se o método MF DFA às séries embaralhadas e substitutas e as seguintes conclusões podem ser retiradas:

- Séries embaralhadas:
 - H_q^{orig} apresenta valores dependentes de q , indicando multifractalidade da série original e H_q^{shuf} apresenta valores constantes e iguais a 0.5, ou seja, toda a multifractalidade

foi eliminada durante o procedimento de embaralhamento, levando a concluir que a multifractalidade da série é totalmente originada das correlações temporais.

- $H_q^{shuf} = H_q^{orig}$ indica que a multifractalidade é totalmente originada distribuição de probabilidade heterogênea, sendo que as correlações temporais não apresentam nenhuma influência.
 - $H_q^{shuf} < H_q^{orig}$ indica que a série embaralhada continua sendo multifractal, porém mais fraca. Neste caso, a multifractalidade é originada tanto pelas correlações temporais (lineares e não-lineares), quanto da função densidade de probabilidade heterogênea.
- Séries Substitutas:
 - Se a multifractalidade na série temporal deve-se à amplitude da função densidade de probabilidade, o H_q^{surr} será independente de q .
 - Se ambos os tipos de multifractalidade estão presentes na série temporal, tanto as séries embaralhadas quanto as séries substitutas exibirão uma multifractalidade menos intensa do que a série original.

5.1.5 Análise por Janela Deslizante

De forma geral, a técnica de janela deslizante é comumente usada em análise de séries temporais, processamento de sinais, aprendizado de máquina e outras disciplinas que lidam com dados sequenciais. O conceito básico é simples: em vez de processar todos os dados de uma vez, uma "janela" de tamanho fixo é "deslizada" ao longo dos dados, processando apenas os dados dentro dessa janela em cada ponto. Esta técnica pode ser útil em várias tarefas, como suavização de dados, detecção de anomalias, cálculo de estatísticas móveis, etc.

A aplicação desta técnica em análise multifractal de séries temporais financeiras e econômicas foi proposta por Cajueiro e Tabak [100] e recentemente aplicada aos mercados de eletricidade nos Estados Unidos [71] e na República Tcheca [74].

Nesta etapa do arcabouço, a técnica de janela deslizante é apresentada com o intuito de investigar o comportamento dinâmico das métricas obtidas com o MF DFA, tais como, o coeficiente de Hurst (H_2) e as medidas de força da multifractalidade ($\Delta\alpha$ e ΔH_q). Essa abordagem permite identificar como as propriedades multifractais da série mudam ao longo do tempo, revelando dinâmicas subjacentes que poderiam permanecer ocultas em uma análise estática.

O algoritmo consiste em:

- Definição da Janela Deslizante:
 - Escolher um tamanho de janela fixo, que determinará o número de pontos de dados da série temporal a serem considerados em cada segmento da análise. O tamanho

da janela é selecionado com base na frequência dos dados e na escala temporal de interesse para a análise.

- A técnica da janela deslizante avança ao longo da série temporal mediante um **passo** predeterminado. A escolha deste parâmetro demanda uma avaliação criteriosa do equilíbrio entre custo e benefício: passos menores implicam um aumento no tempo de processamento devido ao número elevado de cálculos necessários, oferecendo, contudo, um detalhamento mais apurado da análise. Inversamente, passos maiores agilizam o processamento computacional, mas podem comprometer a granularidade e a precisão das análises conduzidas. Portanto, a determinação do tamanho do passo deve considerar as necessidades específicas da análise em questão, buscando um ponto ótimo entre eficiência computacional e profundidade analítica.
- Aplicação do MF DFA:
 - Para cada posição da janela, aplicar o MF DFA à série temporal contida na janela e calcular as métricas que serão utilizadas na análise temporal.
- Análise Temporal:
 - Registrar os valores de H_2 e $\Delta\alpha$ para cada passo, criando uma série temporal dessas métricas. Isso permite observar como a correlação temporal e a multifractalidade evoluem ao longo do tempo.
 - Identificar períodos de alta e baixa multifractalidade e associar essas variações a eventos externos, tendências ou mudanças estruturais na série original.
- Interpretação dos Resultado:
 - Analisar as variações temporais em H_2 e $\Delta\alpha$ para entender as mudanças no comportamento da série temporal. Por exemplo, um aumento em H_2 pode indicar um período de maior persistência ou tendência na série, enquanto um aumento em $\Delta\alpha$ pode indicar um período de maior complexidade ou heterogeneidade na estrutura dos dados.
 - Correlacionar as mudanças nessas métricas com eventos conhecidos, intervenções de política, mudanças regulatórias ou outros indicadores para interpretar as causas e consequências das dinâmicas multifractais observadas.

A aplicação dessa técnica ao MF DFA é particularmente útil para séries temporais financeiras (incluindo mercados de eletricidade), ambientais ou fisiológicas, onde as propriedades estatísticas **não** são estáticas, permitindo uma análise mais dinâmica e detalhada das características multifractais e suas variações ao longo do tempo.

5.2 Validação de Séries Sintéticas

Além da análise multifractal do setor elétrico brasileiro, esta Tese explora a aplicação da teoria da multifractalidade ao processo de validação de séries temporais sintéticas geradas por modelos de previsão. A pesquisa aborda uma lacuna significativa na literatura acadêmica, destacando a ausência de um método consolidado para a validação de séries sintéticas criadas por Redes Neurais Adversariais Generativas (GANs) e Redes Neurais Probabilísticas [10].

No método proposto, emprega-se a distância de Hausdorff como ferramenta para comparar os espectros multifractais derivados da aplicação do método MF DFA nas séries sintéticas, com o espectro multifractal correspondente à série histórica. Esta abordagem permite identificar quais séries sintéticas exibem características multifractais mais próximas daquelas observadas na série temporal real, facilitando, assim, a seleção de modelos de previsão que produzam saídas mais realistas e verossímeis.

5.2.1 Distância de Hausdorff

A distância de Hausdorff é uma métrica utilizada para quantificar o quão distintos são dois conjuntos submetidos a um espaço métrico. Nomeada em homenagem a Felix Hausdorff, um renomado matemático alemão, esta distância é fundamental na análise de formas geométricas, em particular na comparação de conjuntos de pontos. Matematicamente, a distância de Hausdorff entre dois conjuntos de pontos A e B em um espaço métrico M é definida como:

$$H(A, B) = \max\left\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a, b)\right\} \quad (5.1)$$

onde $d(a, b)$ denota a distância entre os elementos a e b , \sup representa o supremo e \inf indica o ínfimo [122]. A distância de Hausdorff captura a ideia de que para cada ponto em qualquer um dos dois conjuntos, existe um ponto no outro conjunto tal que a distância máxima entre esses pares de pontos é minimizada.

A importância da distância de Hausdorff se estende a diversas áreas, incluindo teoria dos conjuntos, geometria computacional, processamento de imagem e reconhecimento de padrões. Em processamento de imagens, por exemplo, a distância de Hausdorff é frequentemente utilizada para medir a semelhança entre diferentes formas ou contornos [123].

A distância de Hausdorff também encontra aplicações significativas no contexto de séries temporais, onde é empregada para medir a dissimilaridade entre duas sequências temporais. Neste âmbito, as séries temporais são frequentemente representadas como conjuntos de pontos em um espaço multidimensional, onde cada ponto pode representar, por exemplo, um instante no tempo e o valor correspondente da série nesse instante [124].

5.2.2 Modelo PAR(p)

Modelos autorregressivos periódicos são indicados para analisar séries temporais hidrológicas que apresentam intervalo de tempo inferior a um ano e comportamento sazonal em suas

propriedades estatísticas. Estes modelos são identificados pela sigla PAR(p), onde p representa a ordem do modelo, isto é, o número de termos autorregressivos presentes no modelo [125, 126]. p pode ser expresso como um vetor, $p = (p_1, p_2, \dots, p_{12})$, onde cada componente do vetor especifica a ordem correspondente a cada período. O modelo PAR(p_1, p_2, \dots, p_{12}) é matematicamente formulado conforme apresentado na Equação (5.2).

$$\left(\frac{z_t - \mu_m}{\sigma_m}\right) = \phi_1^m \left(\frac{z_{t-1} - \mu_{m-1}}{\sigma_{m-1}}\right) + \dots + \phi_{p_m}^m \left(\frac{z_{t-p_m} - \mu_{m-p_m}}{\sigma_{m-p_m}}\right) + a_t \quad (5.2)$$

onde

- z_t representa uma série sazonal com período s ,
- s o número de períodos (com $s = 12$ para séries mensais),
- N o número de anos,
- t o índice temporal, com $t = 1, 2, \dots, sN$, função do ano T (onde $T = 1, 2, \dots, N$) e do período m (onde $m = 1, 2, \dots, s$),
- μ_m a média sazonal do período s ,
- σ_m o desvio padrão sazonal do período s ,
- p_m a ordem do operador autorregressivo para o período m , e
- a_t uma série de ruído independente com média zero e variância $\sigma_a^{2(m)}$.

A metodologia de Box & Jenkins pode ser adaptada para a modelagem de séries temporais com a família de modelo periódicos autorregressivos, como o PAR(p). A metodologia consiste em 3 etapas: (i) identificação do modelo, ou seja, escolha do vetor de ordem p ; (ii) determinação dos parâmetros através de técnicas de estimação de máxima verossimilhança; e (iii) validação do modelo através de testes estatísticos para confirmar se as premissas adotadas nas etapas anteriores estão satisfeitas, caso não estejam satisfeitas, retorna-se à fase de identificação, [125, 126].

A geração de séries sintéticas pode ser interpretada como uma combinação linear de observações passadas, acrescidas de um termo aleatório denominado ruído. Para obter cenários de vazões futuras, basta gerar múltiplas instâncias desse ruído, com cada instância representando uma possível realização futura do processo estocástico modelado [125].

O objetivo desta Tese não é detalhar exhaustivamente a modelagem do PAR(p) já que o mesmo está sendo usado como um exemplo de algoritmo de geração de séries sintéticas. Além disso, esse modelo é amplamente reconhecido por agentes do Setor Elétrico Brasileiro, especialmente por sua aplicação no modelo Newave para a geração de cenários sintéticos de

Energia Natural Afluente. Para a elaboração deste trabalho, a geração de séries sintéticas será realizada por meio da implementação do PAR(p) disponibilizada na biblioteca PySDDP².

5.2.3 Dados

Embora o modelo PAR(p) possa ser aplicado em diversas áreas do conhecimento, no Brasil, sua utilização é primordialmente voltada para a previsão e a geração de cenários em séries temporais hidrológicas e energéticas.

Este estudo emprega séries temporais mensais de vazão natural afluente de três usinas integrantes do sistema interligado nacional: Jirau, Furnas e Machadinho. Essas usinas estão situadas em regiões que apresentam regimes hidrológicos distintos, o que resulta em níveis de sazonalidade e complexidade variados nas séries temporais de vazão.

Os dados de vazão natural afluente são fornecidos mensalmente pelo ONS e CCEE através do Deck de Dados do Modelo Newave. Dentro deste conjunto de dados está o arquivo VAZOES.DAT, que registra as séries históricas de vazão para cada posto associada às usinas hidrelétricas. Embora todas as séries comecem em janeiro de 1931 e continuem até o mês que antecede a publicação do Deck de Dados, este estudo considerou informações disponíveis até dezembro de 2022.

A Usina Hidrelétrica de Jirau, localizada na bacia do Rio Madeira, no estado de Rondônia, situa-se em uma região marcada pela divisão clara entre as estações seca e úmida, conferindo-lhe uma sazonalidade acentuada. Esta característica é corroborada por um índice de força da sazonalidade de 0.9318, o mais alto entre as usinas estudadas, refletindo a intensidade de sua sazonalidade.

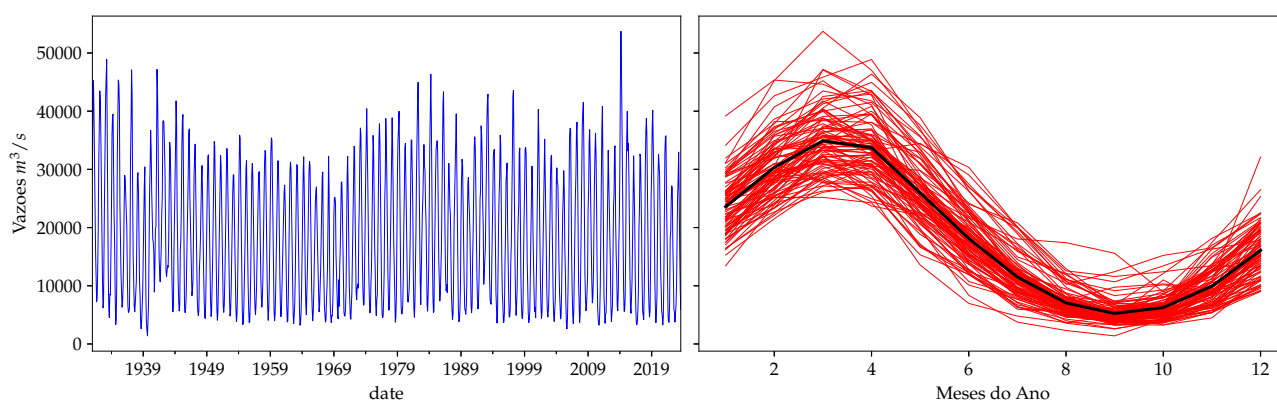


Figura 29 – Log da Vazão Natural Afluente Histórica da usina hidrelétrica de Jirau. Força da sazonalidade é dada por 0.9318.

A Usina Hidrelétrica de Promissão, situada na bacia do Rio Tietê em São Paulo, apresenta o índice de força da sazonalidade de 0.7014, indicando que as vazões apresentam sazonalidade, porém com uma variabilidade maior quando comparada a Jirau.

² A biblioteca PySDDP está acessível para instalação via gerenciador de pacotes do Python (pip) ou por meio de seu repositório no GitHub em <https://github.com/AndreMarcato/PySDDP>

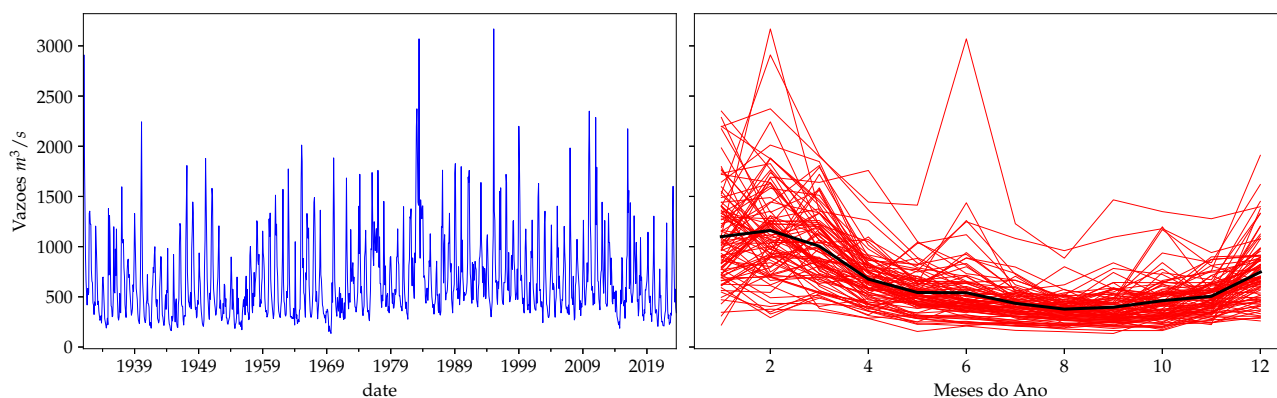


Figura 30 – Log da Vazão Natural Afluente Histórica da usina hidrelétrica de Promissão. Força da sazonalidade é dada por 0.7014.

A Usina Hidrelétrica de Machadinho está localizada na bacia do Rio Pelotas, divisa entre os estados do Rio Grande do Sul e Santa Catarina, apresentando sazonalidade baixa, comprovada pelo menor índice de força da sazonalidade dentre as três usinas, 0.1977. Esta região, caracterizada por um clima temperado, exibe sazonalidade baixa, com uma distribuição de precipitação relativamente equilibrada ao longo do ano, embora com picos durante os períodos mais chuvosos.

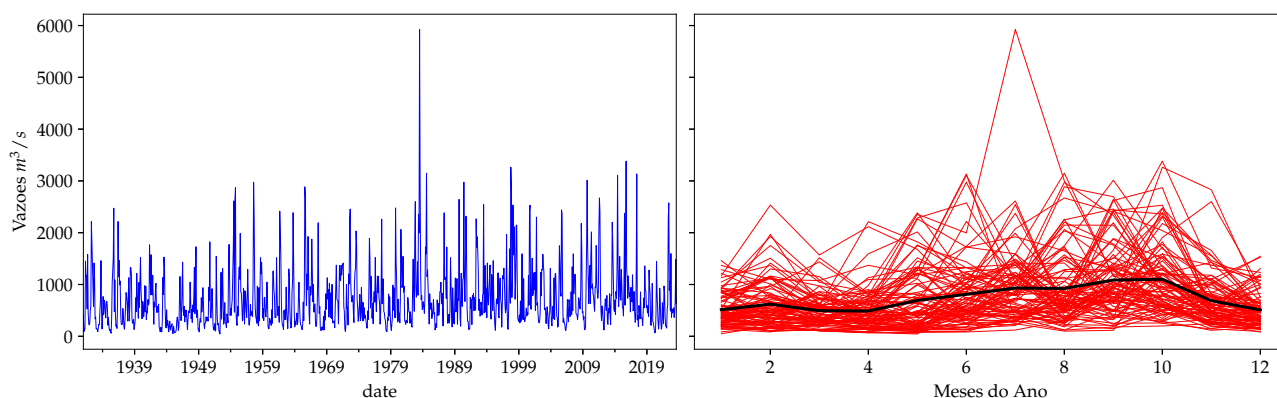


Figura 31 – Log da Vazão Natural Afluente Histórica da usina hidrelétrica de Machadinho. Força da sazonalidade é dada por 0.1977.

5.2.4 O Algoritmo

- Preparação dos Dados: realizada a leitura e preparação dos dados. Os dados de vazão das usinas do SIN são validadas e disponibilizadas pelo ONS para inclusão no deck de dados do Newave em todos os Programas Mensais de Operação. Desta forma, não existem dados faltantes e não há a necessidade de tratamento de outliers;
- Definição dos períodos de Treino e Teste;
- Geração das Séries Sintéticas usando o PAR(p): calcula a ordem do modelo, estima os coeficientes da equação (5.2), estima os resíduos para o período de treino e gera as séries sintéticas para o período de testes. Este passo do algoritmo pode ser substituído por

qualquer outro modelo que gere séries sintéticas, como outros Modelos Estatísticos, GANS, Redes Neurais Probabilísticas etc.

- Calcula e armazena o RMSE das séries sintéticas em relação ao histórico, para o período de testes.
- Decompõe a série histórica de vazões em Tendência, Sazonalidade e Resíduo usando STL. Aplica o procedimento de remoção da sazonalidade da série histórica e das séries sintéticas. Armazena estes valores.
- Realiza uma análise multifractal das séries históricas e sintéticas utilizando o método MF DFA. Essa abordagem permite armazenar os espectros multifractais tanto para as séries históricas quanto para cada uma das séries sintéticas geradas. Caso a série histórica demonstre multifractalidade, evidenciada pelo respectivo espectro multifractal, espera-se que as séries sintéticas exibam propriedades multifractais análogas. Assim, o procedimento consiste em identificar todas as séries sintéticas cujos espectros multifractais se assemelham ao da série histórica, utilizando um critério pré-definido de similaridade. As séries que não atendem a este critério de similaridade são conseqüentemente excluídas da análise, garantindo que apenas as séries sintéticas que refletem a complexidade multifractal da série histórica sejam consideradas para estudos subsequentes.
- Critério de Similaridade: Este critério é estabelecido pela comparação dos espectros multifractais entre a série histórica e as séries sintéticas, utilizando a distância de Hausdorff. Inicialmente, a distância de Hausdorff é calculada entre o espectro multifractal da série histórica e cada espectro das séries sintéticas, conforme descrito pela equação (5.1) na Seção 5.2.1. Após o cálculo, elabora-se o histograma das distâncias obtidas e define-se um intervalo de confiança. As séries cujas distâncias não se enquadram dentro deste intervalo são excluídas da análise, assegurando que apenas as séries sintéticas com características multifractais similares à série histórica sejam mantidas. Posteriormente, recalcula-se o RMSE para o conjunto filtrado das séries sintéticas. Ao comparar o RMSE original do conjunto completo com o RMSE do conjunto filtrado, espera-se observar uma redução, indicando que as séries removidas eram menos representativas da dinâmica multifractal da série histórica. Essa abordagem assegura que apenas as séries sintéticas que melhor refletem as propriedades multifractais observadas na série histórica sejam consideradas, melhorando a precisão e a confiabilidade dos modelos de previsão.

Algorithm 4 Geração e Validação de Séries Sintéticas de Vazões

- 1: **Preparação dos Dados:** Leitura e preparação dos dados de vazão fornecidos pelo ONS para inclusão no deck de dados do Newave. Assume-se a ausência de dados faltantes e a não necessidade de tratamento de outliers.
 - 2: **Definição dos Períodos de Treino e Teste:** Segmentar os dados em conjuntos de treino e teste.
 - 3: **Geração das Séries Sintéticas usando o PAR(p):**
 1. Calcula a ordem do modelo PAR(p).
 2. Estima os coeficientes da equação do modelo.
 3. Estima os resíduos para o período de treino.
 4. Gera as séries sintéticas para o período de testes.
 - 4: **Avaliação da Qualidade das Séries Sintéticas:** Calcula e armazena o RMSE das séries sintéticas em comparação à série de teste.
 - 5: **Decomposição STL das Séries de Vazões:** Aplica a decomposição em Tendência, Sazonalidade e Resíduo usando STL na série histórica e nas séries sintéticas, e remove a sazonalidade.
 - 6: **Análise Multifractal:** Realiza a análise multifractal das séries histórica e sintéticas dessazonalizadas usando MF DFA e armazena os espectros multifractais.
 - 7: **Critério de Similaridade:** Utiliza a distância de Hausdorff para comparar os espectros multifractais da série histórica com os espectros multifractais das séries sintéticas, estabelecendo um intervalo de confiança para as distâncias.

if as séries não atendem ao critério de similaridade **then**
 - 8:

Descarta as séries fora do intervalo de confiança.
 - 9: **Reavaliação do RMSE:** Calcula novamente o RMSE para as séries que atendem ao critério de similaridade, esperando-se uma redução no erro em comparação ao conjunto completo inicial.

=0
-

6 Resultados

6.1 Análise Multifractal dos Retornos Horários no Mercado Brasileiro de Eletricidade

A investigação da multifractalidade nas séries temporais dos retornos horários no mercado brasileiro de eletricidade será efetuada mediante a implementação do arcabouço metodológico detalhado na Seção 5.1. Este arcabouço esboça de maneira sistemática as principais etapas para a análise multifractal através do algoritmo MF DFA. O diagrama encontra-se exposto na Figura 28 do Capítulo 5.

Esta avaliação utiliza dados do PLD horário de 2019 a 2022, totalizando 35,064 observações. Com isso, os resultados obtidos neste capítulo podem ser utilizados para comprovar os resultados apresentados pelo artigo do Apêndice A, onde os autores utilizaram os dados de PLD semanal (de 2001 a 2022) para analisar a multifractalidade os retornos logarítmicos dos preços dessazonalizados.

Os procedimentos analíticos adotados neste capítulo foram desenvolvidos pelo autor utilizando a linguagem de programação Python (Python Software Foundation. Referência da Linguagem Python, versão 3.9, disponível em <http://www.python.org>). Estes procedimentos são fundamentados no método MF DFA proposto por Kantelhardt et al. [7] e adaptados a partir de sua implementação original em Matlab, conforme delineado em [127].

6.1.1 Pré-processamento

Conforme o arcabouço apresentado na Seção 5.1, a etapa de pré-processamento consiste em carregar as séries temporais de preço, aplicar os tratamentos necessários, como por exemplo a reposição de dados faltantes e o tratamento de *outliers*. No caso dos dados de PLD Horário a partir de 2019 não foram encontrados dados faltantes na base disponibilizada pela CCEE e nem houve a necessidade de se tratar a presença de *outliers*.

De acordo com as discussões realizadas no 4, as séries de preços horários são compostas de 35064 valores compreendendo o período de 01/01/2019 a 31/12/2022. Estas séries históricas apresentam diversas características tais como, não estacionariedade, distribuição com cauda longa, *spykes* de longa duração, anti-persistência (ou reversão para a média) e multifractalidade.

As avaliações feitas na seção 4.5 mostram que a sazonalidade não possui efeito significativo sobre o comportamento anti-persistente das séries. Este é um aspecto interessante, pois normalmente a sazonalidade cria artefatos levando a conclusões equivocadas sobre as características multifractais das séries temporais, como constatado por [7]. Ainda assim, a recomendação de remover os componentes sazonais das séries temporais antes de submetê-las à análise multifractal usando MF DFA foi seguida.

O PLD apresenta sazonalidade diária, semanal e anual caracterizadas por ciclos de 24, 168 e 8766 horas. Estes mesmos períodos serão aplicadas ao processo de decomposição dos dados de log-retorno, para efetivamente isolar componentes sazonais de tendências e flutuações

de longo prazo. Esta etapa de pré-processamento é fundamental para garantir a aplicação precisa do MFDFA e uma avaliação confiável da natureza multifractal da série temporal. Ao eliminar as variações sazonais das séries temporais, pode-se examinar as flutuações intrínsecas dos dados e entender melhor suas características multifractais. Após a remoção das componentes de sazonalidade, as séries de preços de liquidação de diferenças foram transformadas em séries de log-retornos r_{t+1} , obtidas aplicando a diferença logarítmica aos preços, conforme descrito na equação (3.17).

Os gráficos (A1), (B1), (C1) e (D1) na Figura 32 ilustram as variações dos preços para cada submercado. Já os gráficos (A2), (B2), (C2) e (D2) ilustram a variação das séries de log-retornos dos preços dessazonalizados. Ao longo deste capítulo, usou-se o termo "retorno" ou "série de retorno" para se referir a essa medida.

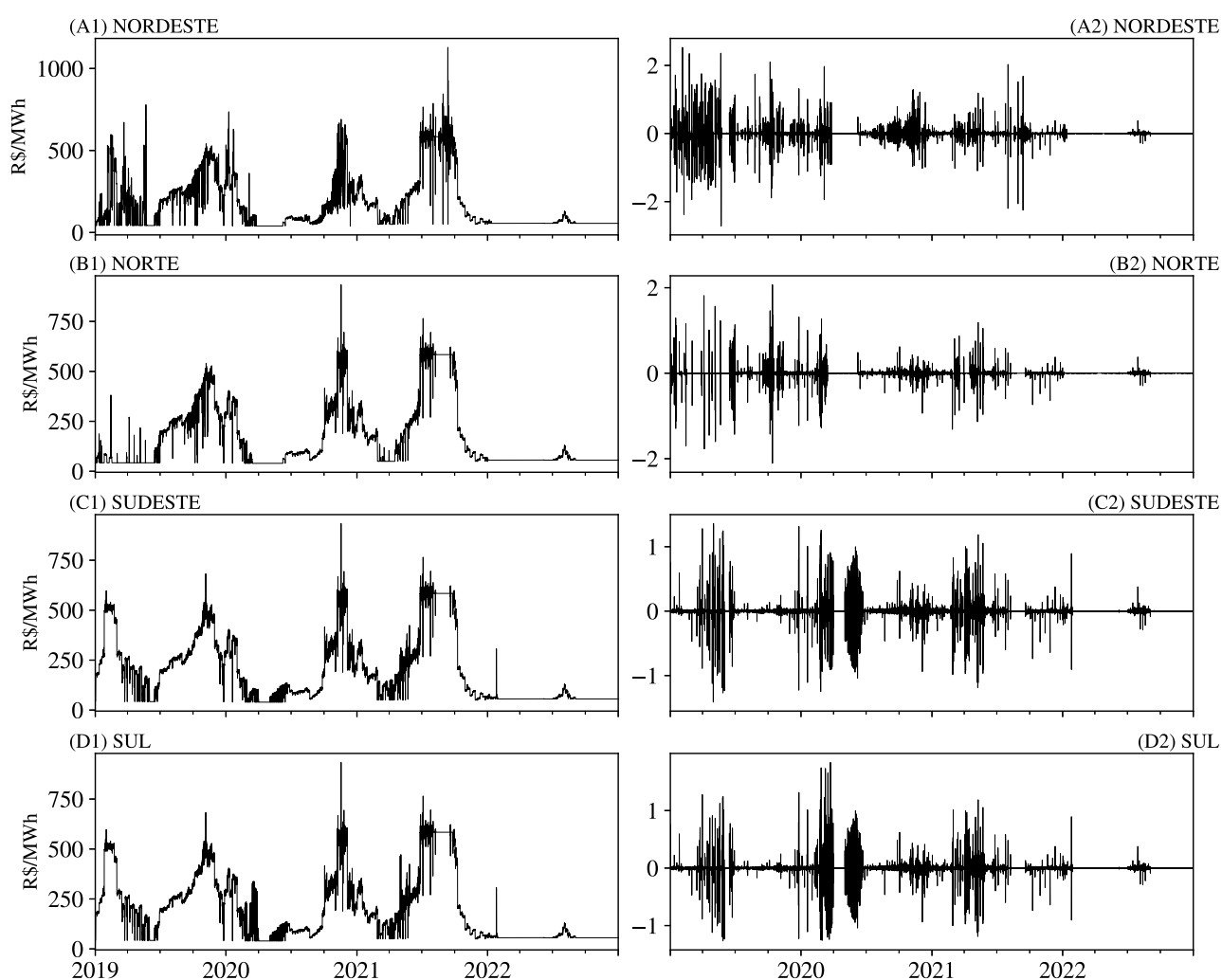


Figura 32 – Série temporal histórica do preço de liquidação de diferenças horário e retorno logarítmico do preço sazonal ajustado. Os gráficos (A1), (B1), (C1) e (D1) representam o PLD Histórico em base horária para o período compreendido entre 2019 e 2022. Os gráficos (A2), (B2), (C2) e (D2) representam as séries de log-retorno para os correspondentes preços à esquerda.

6.1.2 MF DFA

As séries de retorno logarítmico do preço dessazonalizado já se encontram no formato de ruído, conforme pode ser visto nos gráficos A(2), B(2), C(2) e D(2) da Figura 32. Desta forma, não há necessidade de transformação da série temporal em ruído, de acordo com os passos apresentados na Seção 5.1.2.

Após realizar uma série de testes, escolheu-se um polinômio de quarto grau ($m = 4$) para eliminar tendências locais nos dados. As recomendações de Kantelhardt [7] para escolha das escalas que serão utilizadas para cálculo das funções de flutuação foram seguidas. O intervalo $10 \leq s \leq \lfloor N/4 \rfloor$ foi ajustado somente no início da escala, passando de 10 para 16. Neste contexto, $N = 35063$ denota o número total de observações na série de retorno horário. Em relação ao parâmetro q , as recomendações de [7] foram novamente seguidas, empregando um intervalo de $-5 \leq q \leq 5$.

As séries de retorno para cada submercado foram submetidas ao algoritmo MF DFA com os parâmetros definidos no parágrafo, permitindo que as avaliações subsequentes fossem realizadas.

6.1.2.1 Análise das funções de flutuação

Analisou-se o gráfico $\log - \log$ de $F_q(s)$ versus s para cada q , conforme mostrado na Figura 33, para determinar o comportamento de escala das funções de flutuação. Se a série temporal x_i estiver correlacionada por uma lei de potência de longo alcance, $F_q(s)$ aumenta para valores grandes de s pela lei de potência, de acordo com a equação (3.23).

Embora o ajuste polinomial de ordem m usado pelo método MF DFA remova tendências de ordem $m - 1$ na série original, é essencial observar que esse procedimento não garante a eliminação de tendências oscilatórias, como a sazonalidade. A presença de fenômenos sazonais intrínsecos na série temporal analisada pode resultar em uma relação não-linear no gráfico $\log - \log$ de $F_q(s)$ em função de s . Essa não-linearidade pode ser observada através de cruzamentos que separam regiões com diferentes inclinações.

Após analisar os gráficos na Figura 33, observou-se indícios de multifractalidade na série de retornos dos quatro submercados. Esses indícios vem do fato das retas apresentarem inclinações diferentes, indicando coeficientes de Hurst diferentes para cada magnitude de flutuação. Caso as retas fossem paralelas, seus coeficientes angulares seriam idênticos, e a série não apresentaria características multifractais, mas sim monofractais.

De acordo com [91], a aplicação do método MF DFA em séries temporais finitas e não correlacionadas, pode apresentar detecção equivocada de multifractalidade onde se deveria detectar monofractalidade. Porém, para uma conclusão mais robusta e confiável sobre a presença de multifractalidade, necessitou-se de conjuntos de dados com dezenas de milhares de observações. A partir da disponibilização dos dados de PLD horário por parte da CCEE, e de outros conjuntos de dados por parte do ONS, atingiu-se número de observações desejável, permitindo análises multifractais mais robustas.

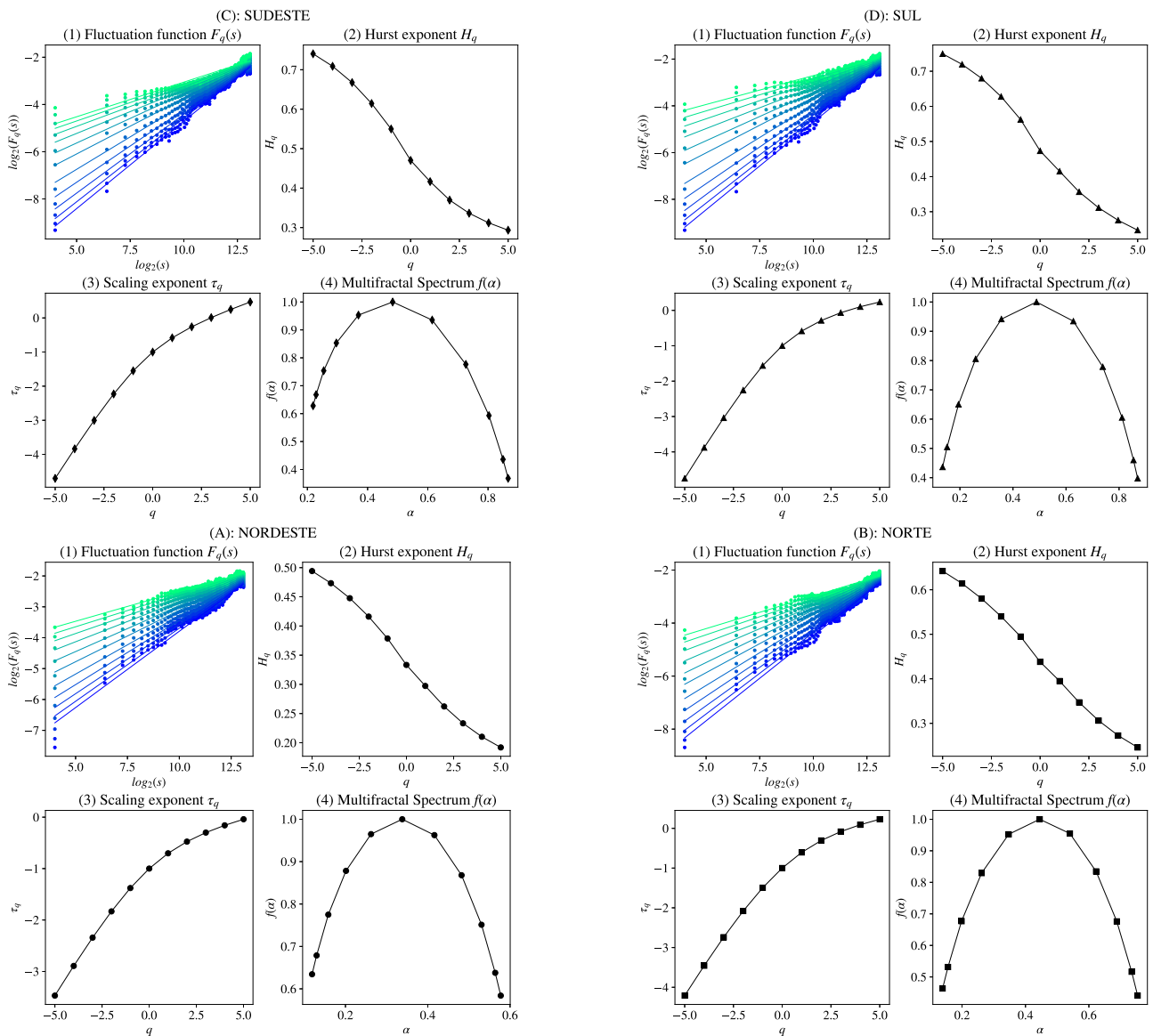


Figura 33 – Gráficos MFDFA aplicados ao retorno dos PLDs de cada submercado. A figura apresenta um conjunto de 4 gráficos para cada submercado, mostrando (1) o comportamento de escala das funções de flutuação, (2) o expoente de Hurst generalizado, (3) o expoente de escala ou expoente de *Reyni*, e (4) o espectro multifractal. No gráfico da função de flutuação (1), cores variando de azul para verde indicam valores de q variando de -5 a $+5$.

6.1.3 Expoente de Hurst Generalizado

Nas parcelas da função de flutuação apresentadas na Figura 33, observou-se os coeficientes de inclinação das linhas que melhor se ajustam aos pontos $\log_2(s)$ e $\log_2(F_q)$ para um dado momento q . Esses coeficientes de inclinação correspondem aos expoentes generalizados de Hurst H_q . Analisando as curvas, identificou-se que os valores de H_q variam de acordo com os valores de q , o que indica a presença de multifractalidade na série temporal. O coeficiente de Hurst é calculado quando $q = 2$ e equivale ao coeficiente obtido no modelo DFA, conforme equação (3.11). Neste trabalho, o coeficiente de Hurst será representado por $H_q(q = 2)$ ou simplesmente H_2 .

Como visto na seção anterior, calculou-se a força da multifractalidade aplicando a

equação (3.40) aos expoentes generalizados de Hurst de cada submercado. A coluna *delta_h* na Tabela 27 apresenta os resultados, indicando que o submercado do Sul exibe a maior força de multifractalidade ($\Delta h = 0.502274$), seguido pelo Sudeste ($\Delta h = 0.447003$), Norte ($\Delta h = 0.396140$) e Nordeste ($\Delta h = 0.302212$). A maior multifractalidade do Sul foi mantida, confirmando o resultado obtido no artigo do Apêndice A. Porém, para este período e frequência dos dados, o Sudeste apresentou a segunda maior (3o.) multifractalidade, seguido do Norte (4o.) e Nordeste (2o.).

Embora o processo de formação de preço de eletricidade no mercado atacadista de energia brasileiro não siga um equilíbrio de mercado tradicional, mas seja, em vez disso, resultado de modelos de otimização de despacho hidrotérmico, os coeficientes de Hurst indicam a presença de anti-persistência ou reversão à média ($H_2 < 0.5$) para todos os submercados. Este resultado corrobora a reversão à média como um fato estilizado encontrado em outros mercados de energia ao redor do mundo, conforme mencionado em estudos anteriores ([5], [27], [60], [14], [61], [62], [68]). A coluna "hurst" na Tabela 27 apresenta os valores de H_2 para todos os submercados, medindo o grau de reversão à média na série temporal analisada. Esta mesma conclusão foi apresentada para os coeficientes de Hurst do Apêndice A, onde todos os submercados apresentaram reversão para a média ou anti-persistência.

A multifractalidade, em particular a anti-persistência, pode ser entendida como uma representação da complexidade e interdependência inerentes ao mercado de eletricidade, que surgem de uma variedade de fatores, incluindo a interação entre oferta e demanda, fatores climáticos, hidrológicos e também a própria natureza da geração e da transmissão de energia elétrica. O fato de a anti-persistência ser observada em múltiplos mercados de eletricidade, independente do mecanismo de formação de preços, sugere que ela é uma característica fundamental desses mercados. Isso pode ser indicativo de que, enquanto os mecanismos específicos de formação de preços podem influenciar a dinâmica de curto prazo dos preços, há características universais de longo prazo no comportamento dos preços de eletricidade que surgem das complexidades inerentes do setor.

Pode-se abrir uma vasta frente de trabalhos para analisar eventos de natureza endógena e exógena ao mercado de eletricidade brasileiro que impactem na sua multifractalidade intrínseca. A natureza complexa da energia elétrica devido, por exemplo, a dificuldade em armazenar grandes quantidades de energia tornando o equilíbrio entre oferta e demanda crucial, introduz uma grande complexidade à dinâmica dos preços. Este assunto já foi estudado por alguns autores e apontado como uma das causas do comportamento anti-persistente (reversão para a média) dos preços, [26], [27] e [75].

As condições climáticas, especialmente em mercados com alta dependência de fontes renováveis como a hidroeletricidade, podem ter um impacto significativo nos preços. O clima não apenas influencia a oferta (por exemplo, através de níveis de chuva), mas também a demanda (por exemplo, temperaturas extremas levando ao uso aumentado de aquecimento ou resfriamento).

Além dos resultados da aplicação do MF DFA às séries originais, a tabela 27 também

exibe os resultados para as séries embaralhadas e substitutas. Cada coluna representa um indicador (coeficiente de Hurst, largura do espectro multifractal, força da multifractalidade e magnitude da memória longa), e as linhas representam o tipo de série (original, embaralhada e substituta). Agrupou-se os tipos de séries por submercados (Sudeste, Sul, Nordeste e Norte). Os valores correspondentes a cada indicador e tipo de série são preenchidos nas células apropriadas. Por exemplo, na célula "Hurst_original" do submercado Sudeste, tem-se o valor do coeficiente de Hurst para a série original; na célula "Hurst_shuffled", tem-se o valor do coeficiente de Hurst para a série embaralhada; e na célula "Hurst_surrogate", tem-se o valor do coeficiente de Hurst para a série substituta. Os mesmos princípios aos outros indicadores e tipos de série foram aplicados.

Tabela 27: Tabela apresenta Coeficiente de Hurst, Largura do Espectro Multifractal, Força da Multifractalidade e Magnitude da Memória Longa para cada submercado e tipo de avaliação (original, *shuffled* ou *surrogate*)

	Hurst H_2	Width $\Delta\alpha$	Delta_h ΔH	MLM MLM
Sudeste				
original	0.369667	0.647780	0.447003	0.223502
<i>shuffled</i>	0.496295	0.228077	0.134674	0.067337
<i>surrogate</i>	0.365979	0.260433	0.155556	0.077778
Sul				
original	0.356447	0.735423	0.502274	0.251137
<i>shuffled</i>	0.493829	0.221965	0.130280	0.065140
<i>surrogate</i>	0.360866	0.258241	0.155607	0.077804
Nordeste				
original	0.262160	0.458540	0.302212	0.151106
<i>shuffled</i>	0.490905	0.208513	0.121049	0.060525
<i>surrogate</i>	0.283831	0.213367	0.124715	0.062357
Norte				
original	0.347061	0.615280	0.396140	0.198070
<i>shuffled</i>	0.493756	0.246438	0.148056	0.074028
<i>surrogate</i>	0.353570	0.254027	0.153748	0.076874

6.1.4 Espectro de Singularidade ou Espectro Multifractal

O gráfico apresentado na Figura 34 ilustra o espectro de singularidade, demonstrando a relação entre o coeficiente de Hölder, denotado por α , e a função $f(\alpha)$, que representa a

dimensão fractal do subconjunto da série temporal caracterizado pelo valor específico de α , conforme estabelecido pela Equação (3.25).

A largura do espectro de singularidade, representado por $\Delta\alpha$ de acordo com a equação (3.41), mede a força da multifractalidade em cada série temporal. Conforme observado na Tabela 27, o submercado do Sul apresenta o maior valor de $\Delta\alpha = 0.735423$, seguido pelo Sudeste ($\Delta\alpha = 0.647780$), Norte ($\Delta\alpha = 0.615280$) e Nordeste ($\Delta\alpha = 0.458540$). Esta relação indica que o submercado do Sul tem a maior multifractalidade entre os quatro submercados brasileiros, confirmando a mesma conclusão obtida quando o Δh mediu a força da multifractalidade e, também, confirmando os resultados da avaliação com dados semanais do artigo do Apêndice A para a multifractalidade do submercado Sul.

A elevada multifractalidade detectada no submercado Sul sugere uma estrutura mais complexa em termos de flutuações do preço à vista. Isso se manifesta tanto nos dados semanais, quanto nos dados horários. Este fenômeno que pode ser atribuído às particularidades regionais, tais como um regime hidrológico mais instável e uma menor incidência de sazonalidade. Ademais, as centrais hidrelétricas neste submercado carecem de capacidade de armazenamento significativa, fazendo com que sua produção esteja intrinsecamente ligada às flutuações hídricas. Esta ampla variabilidade na geração de energia hidrelétrica é refletida pelos modelos de precificação, conduzindo a um custo marginal de operação mais instável e, por extensão, a preços à vista igualmente voláteis.

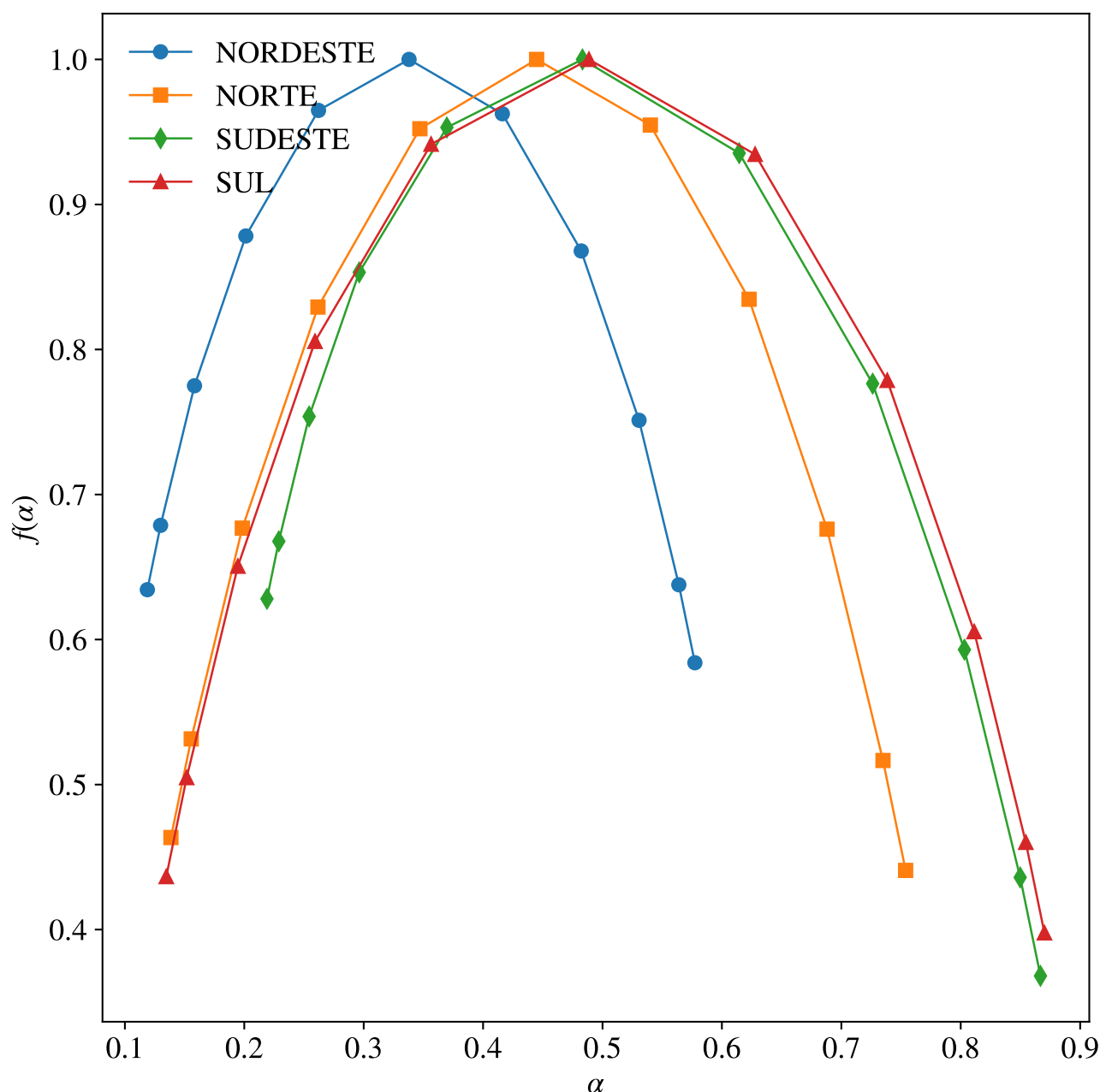


Figura 34 – Espectro multifractal ou espectro de singularidade para cada submercado.

6.1.5 Origens da multifractalidade

Os gráficos da Figura 35 ajudam a identificar as causas da multifractalidade da série de log-retornos dos preços de liquidação de diferenças para os quatro mercados brasileiros. Seguindo as diretrizes apresentadas na Seção 5.1.4, aplicou-se o algoritmo MF DFA nas séries embaralhadas e substitutas e se extraiu os expoentes de Hurst generalizados, os expoentes de escala e os espectros de singularidade. Para minimizar a influência da semente inicial na geração de números pseudo-aleatórios, foram realizadas 100 execuções do MF DFA (para cada tipo de série embaralhada e substituta por submercado), alterando somente a semente inicial. As curvas laranja e verde representam as médias dos resultados da aplicação das 100 execuções do MF DFA para cada parâmetro. As curvas azuis apresentam os resultados para a série original.

Como mencionado na Seção 3.2.3 e na Seção 5.1.4, eliminou-se somente as correlações

temporais lineares e não lineares ao embaralhar as séries, preservando a distribuição de probabilidade. Se a multifractalidade fosse exclusivamente do tipo (ii), então esperaria-se que $H_{shuf}(q)$ fosse independente de q , com um valor de $H_{shuf}(q) = 0.5$. No entanto, nos gráficos da Figura 35, observou-se que embaralhar as séries não eliminou a multifractalidade, pois $\Delta h_{shuf} \neq 0$ e $\Delta \alpha_{shuf} \neq 0$. Este resultado indica que ambos os tipos de multifractalidade mencionados em [7] são relevantes para o mercado elétrico brasileiro, estando de acordo com as conclusões de apresentadas no artigo presente no Apêndice A.

Além disso, analisou-se a multifractalidade do tipo (i) aplicando o método substituto (surrogate) à série original, conforme descrito em [121] e apresentado na Seção 3.2.3. Da mesma forma, o procedimento substituto não eliminou a multifractalidade da série, uma vez que $\Delta h_{surr} \neq 0$ e $\Delta \alpha_{surr} \neq 0$. A Tabela 27 apresenta os valores de H_2 , $\Delta \alpha$, ΔH e MLM para as séries original, embaralhada, substituta e por submercado. Para todos os submercados, os valores de Δh e $\Delta \alpha$ das séries de retorno horário substituta são maiores do que os das séries embaralhadas. Este resultado indica que a multifractalidade dos retornos horários é mais influenciada pelas correlações de longo alcance entre pequenas e grandes flutuações (relação temporal dos dados) do que pela função de densidade de probabilidade ampla.

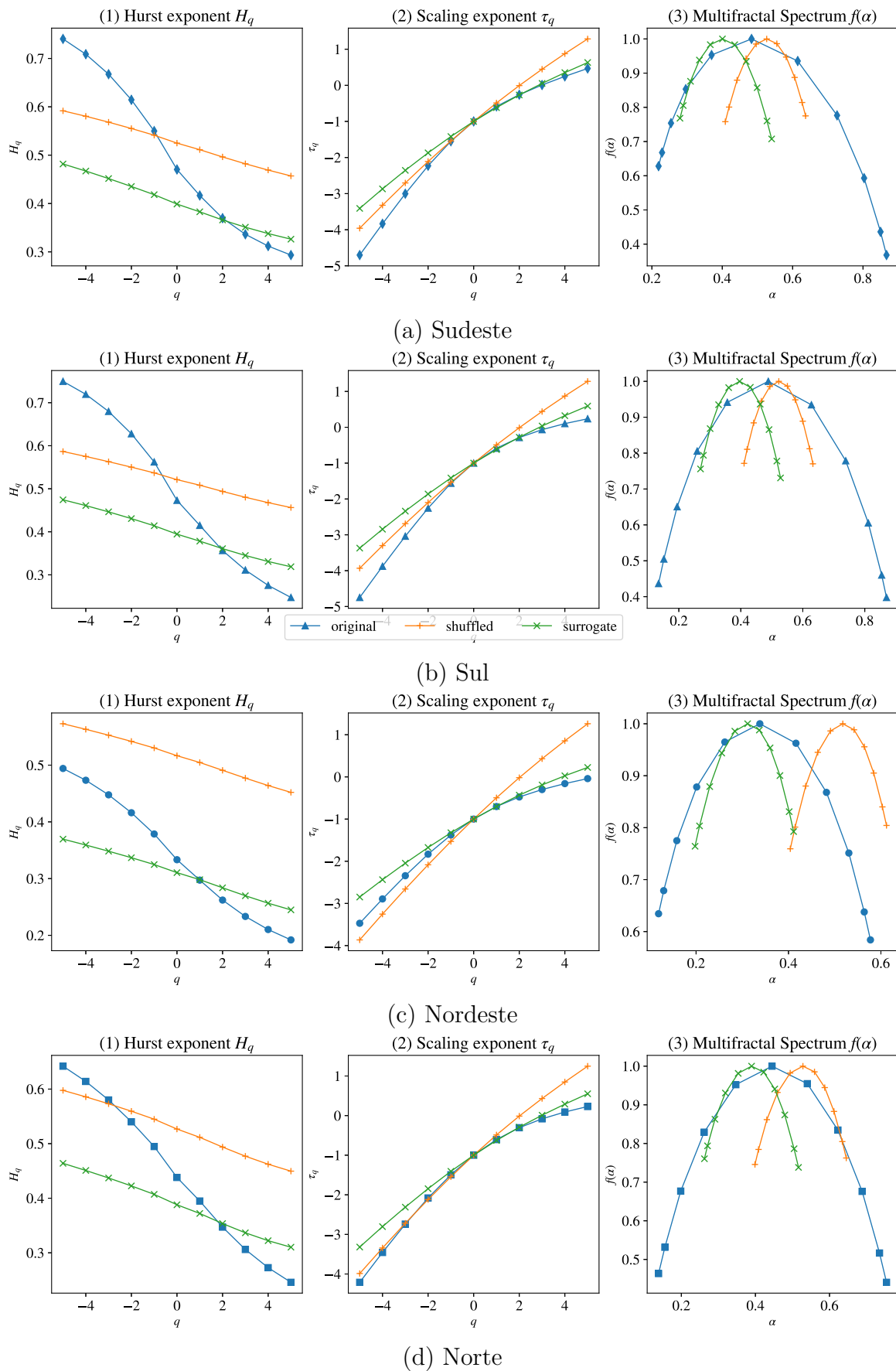


Figura 35 – Gráficos do expoente de Hurst generalizado (1), expoente de escala (2) e espectro multifractal (3) para cada submercado. Cada um dos gráficos apresentam três curvas que representam as medidas para a série original (azul), série embaralhada (laranja) e a série substituta (verde).

Nesta seção foram estudados dois tipos de fontes de multifractalidade, as correlações temporais e as distribuições de retornos. Do ponto de vista estatístico, foi mostrado que ambas as fontes são importantes para a multifractalidade dos retornos no mercado brasileiro de eletricidade, sendo que as correlações temporais apresentam uma maior magnitude (ou importância). Porém, as fontes de multifractalidade podem ser discutidas sobre outros aspectos, como por exemplo quais fatores são mais significantes para cada uma das fontes. Três dos mais importantes fatores que atuam no mercado de eletricidade foram destacados a seguir:

- Fatores Econômicos:
 - Correlações Temporais: Flutuações no mercado elétrico podem ser resultado de eventos econômicos, como recessões, políticas energéticas ou mudanças nas tarifas. Se os preços do mercado elétrico mostraram correlações temporais de longo alcance, isso pode indicar que os efeitos desses eventos persistem por um longo período.
 - Distribuição de Retornos: Uma distribuição de retornos de cauda pesada pode ser indicativa de eventos extremos ou choques econômicos, onde grandes flutuações de preço são mais comuns do que o esperado em uma distribuição normal.
- Fatores Hidrológicos:
 - Correlações Temporais: A geração de energia em mercados com forte dependência de energia hidrelétrica é sensível ao regime de chuvas. Ciclos hidrológicos de longa duração, como períodos de seca ou cheia, podem refletir-se nas correlações temporais dos preços.
 - Distribuição de Retornos: Em anos de seca severa ou inundações, pode haver picos significativos nos preços da eletricidade. Isso pode contribuir para uma distribuição de retornos de cauda pesada. Este item foi discutido na seção 4.2.1, quando foi mostrado que os picos observados no CMO (*spykes*) apresentam um ciclo mais longo quando comparado aos *spyke prices* observados em outros mercados mundiais. A duração entre o início da escalada do CMO até atingir os picos e a queda até o mínimo, pode levar meses ou anos. Na seção 4.2.1, foi apresentado um exemplo referente à crise energética iniciada ao final do período úmido do biênio 2020/2021 (abril/2021), onde o Brasil passou pela maior crise dos últimos 90 anos, superior inclusive àquela que deu início ao racionamento em 2001. O auge da crise ocorreu entre agosto e setembro de 2021, quando o CMO atingiu os maiores valores, porém reduziu fortemente durante os meses de outubro de 2021 a março de 2022, quando o período úmido foi mais favorável, permitindo um maior armazenamento de energia. No gráfico da Figura 10 mostra que o pico no CMO foi o maior do histórico de quase 20 de anos de registros de CMO semanal. Outros momentos de estresse hidrológico que levaram a escalada de CMO/PLD: 2000/2001, racionamento de energia; 2007/2008 falta de gás atrelado a baixa hidrologia no NE; 2014/2018 anos seguidos com baixa hidrologia no sistema.

- Fatores Climáticos:
 - Correlações Temporais: Mudanças climáticas ou padrões climáticos cíclicos, como El Niño ou La Niña, podem ter efeitos a longo prazo nos preços da eletricidade, especialmente se eles afetarem a disponibilidade de recursos hídricos.
 - Distribuição de Retornos: Eventos climáticos extremos, como ondas de calor ou frio, podem levar a picos de demanda e, conseqüentemente, a picos de preços, afetando a natureza da distribuição dos retornos. Apesar de não estar representado neste trabalho, que analisa os dados até 31/12/2022, houve uma escalada de preços entre 26 e 29 de setembro de 2023 devido a uma forte onda de calor que atingiu temperaturas recordes para essa época do ano. Essa onda de calor implicou em um aumento da carga acima do esperado devido a acionamento de sistemas de refrigeração de ar e teve como consequência o aumento do CMO e do PLD. O PLD saiu do valor mínimo e atingiu o máximo em 3 dias, voltando para o mínimo assim que as temperaturas voltaram ao normal. Neste caso a duração do *spyke price* foi de apenas 3 dias, já que a resposta da demanda ao evento climático extremo (forte onda de calor) não apresentou memória, pois se tratava de um fenômeno de curto prazo. A curva de preços foi reestabelecida assim que o evento cessou.

6.1.6 Análise variável no tempo

Nas seções anteriores, foram realizados cálculos de vários índices derivados da aplicação do MFDDFA na série de retornos dos preços *spot* dessazonalizados nos quatro submercados brasileiros. As análises mostraram que todos os submercados apresentam comportamento anti-persistente e multifractal. Nesta seção, utilizou-se a técnica de janela deslizante para investigar o comportamento dinâmico do coeficiente de Hurst (H_2) e do índice de magnitude de memória longa (MLM). A Seção 5.1.5 apresenta o arcabouço metodológico necessário para realização da análise em séries de retorno logarítmico dos preços dessazonalizados.

Como o tamanho da amostra de log-retornos pode ser considerado grande (36,063) o custo computacional para realização deste estudo pode ser proibitivo, levando-se em consideração que o mesmo deve ser repetido para cada um dos quatro submercados. Então, escolheu-se o **tamanho da janela** e o **passo** de forma reduzir ao máximo o custo computacional, sem no entanto haver perdas relevantes de informações. Realizou-se vários experimentos com tamanhos de janela entre 1000 e 3000 horas antes de decidir pelo valor final de 1500 horas (equivalente a 2 meses) e um passo de 168 horas (equivalente a uma semana). Assim, os cálculos dos índices iniciaram em 4 de março de 2019 e foram refeitos para cada semana até o final do período, mantendo o tamanho da janela fixo.

Os gráficos apresentados na Figura 36 evidenciam a evolução do coeficiente de Hurst (H_2) em cada submercado durante o período analisado. Em todos os submercados, os valores de H_2 demonstraram desvios consideráveis quando comparados ao valor do coeficiente de Hurst para a série total (representado pela linha horizontal tracejada preta). A linha tracejada vermelha

simboliza o coeficiente de Hurst igual a 0,5, que denota um comportamento aleatório (isto é, sem correlação de curto ou longo prazo). Observou-se um comportamento anti-persistente na maior parte do período de análise ($H_2 < 0.5$). Entretanto, houve ocasiões em que o coeficiente se aproximou ou ultrapassou 0,5, aludindo a um comportamento sem correlação temporal. Sob a ótica da teoria de eficiência de mercado, esse padrão sugere uma crescente eficiência dos mercados à medida que o coeficiente de Hurst converge para 0,5. As variações do coeficiente de Hurst nos submercados do Sudeste e Sul mostraram-se semelhantes, assim como as do Nordeste e Norte. Contudo, o Norte exibiu uma volatilidade mais acentuada. É relevante mencionar que, quando Sudeste/Sul alcançam seus picos de H_2 , Nordeste/Norte atingem seus valores mínimos, e vice-versa.

As linhas tracejadas verticais demarcam o começo e o fim do mais severo período hidrológico registrado no Brasil. Durante este intervalo, a variabilidade do coeficiente de Hurst intensificou-se em todos os submercados, sendo mais proeminente nos submercados do Nordeste e Norte. Esse padrão sugere que o período hidrológico desfavorável influenciou significativamente os preços da eletricidade, refletindo-se nas características multifractais do mercado elétrico brasileiro. Os submercados Sudeste e Sul apresentaram comportamentos similares, com variações expressivas em torno de 2021. O submercado Nordeste exibiu uma tendência decrescente do coeficiente de Hurst no começo deste período, atingindo o valor mínimo de H_2 próximo à data em que o PLD alcançou seu preço máximo (setembro de 2021).

Em síntese, os gráficos da Figura 36 sublinham a dinâmica multifractal do mercado elétrico, com fatores externos, tais como condições hidrológicas adversas, exercendo influência crucial nas características de longo alcance das séries temporais. A variação temporal do coeficiente de Hurst proporciona informações valiosas sobre como distintos eventos e intervalos podem afetar o comportamento de longa memória dos preços no mercado elétrico.

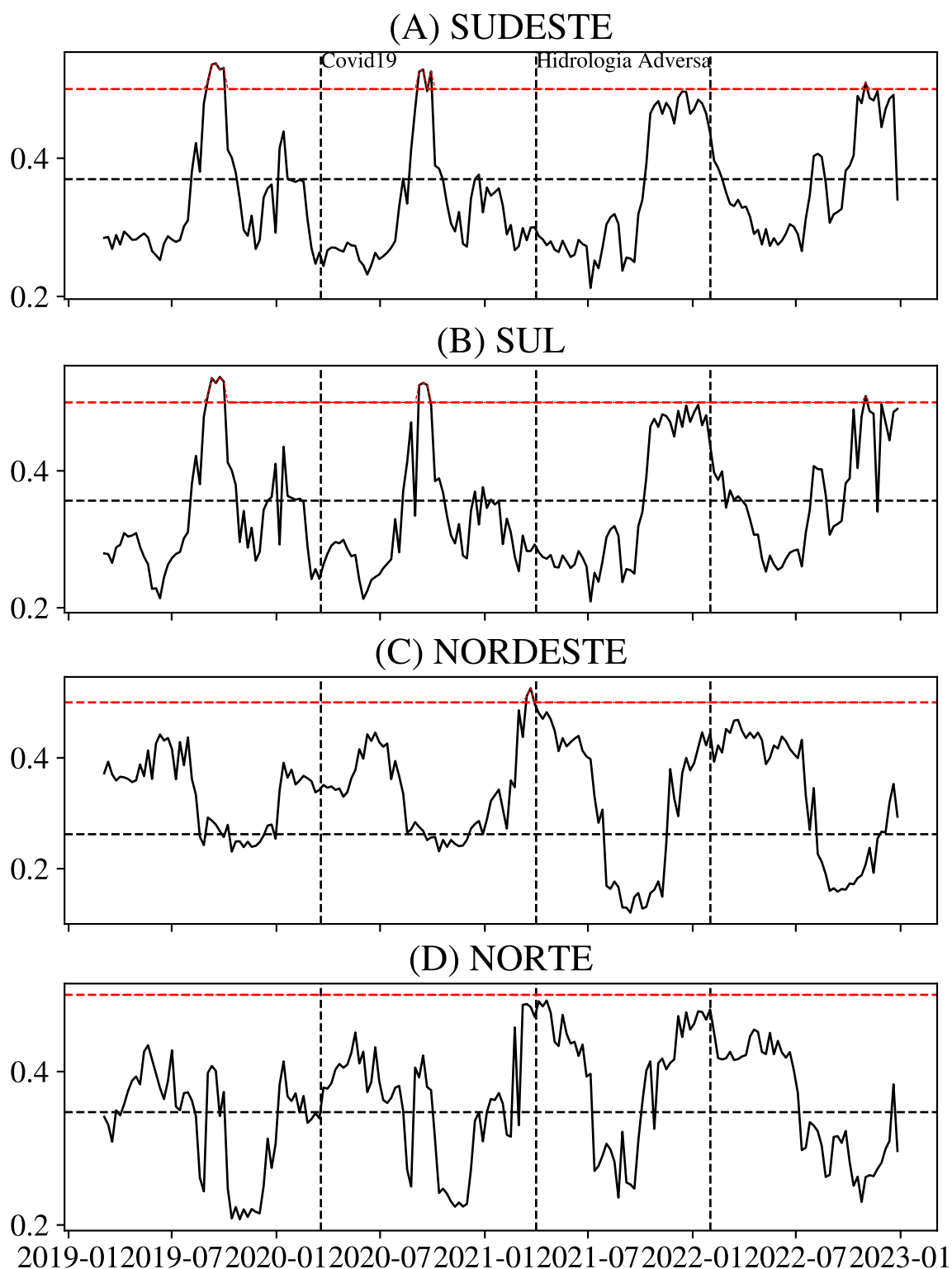


Figura 36 – Os gráficos apresentam o comportamento dinâmico do coeficiente de Hurst (H_2) para os quatro submercados usando uma janela de 1500 horas e um passo de 168 horas (1 semana). As duas linhas verticais tracejadas indicam o início e o fim do pior período hidrológico enfrentado pelo Brasil nos últimos 90 anos. O PLD atingiu seu valor máximo em setembro de 2021, voltando ao preço mínimo em fevereiro de 2022. A linha horizontal tracejada representa o valor de H_2 calculado para a série completa, conforme apresentado na Tabela 27.

Os gráficos da Figura 37 ilustram as variações da amplitude do espectro multifractal ($\Delta\alpha$) de cada submercado durante o período em análise. A reação dos submercados Sudeste e Sul ao

início da Covid-19 manifestou-se como uma diminuição da multifractalidade, que foi revertida a partir de julho de 2020. O impacto da Covid-19 nos preços foi evidenciado principalmente pela queda no consumo de energia, devido à incerteza inicial sobre a intensidade e duração da pandemia, levando à retração de atividades industriais e comerciais. Essa influência na multifractalidade também foi notada no Nordeste, mas com menor amplitude e duração em comparação com o Sudeste e Sul. Por outro lado, o submercado Norte mostrou uma tendência contrária, com um aumento na multifractalidade.

O período nomeado "Hidrologia Adversa" revelou um aumento na multifractalidade, sugerindo que circunstâncias hidrológicas desfavoráveis acrescentam complexidade às dinâmicas de preços. Sudeste, Sul e Nordeste alcançaram os picos de multifractalidade quando o PLD atingiu seu valor máximo em setembro de 2021. A partir de outubro de 2021, com a melhora das condições hidrológicas até abril de 2022, o PLD iniciou uma tendência de queda, atingindo seu ponto mais baixo em fevereiro de 2022. Durante esse período, os submercados Sudeste, Nordeste e Norte mostraram uma tendência de queda no $\Delta\alpha$. Apenas o Norte permaneceu estável, variando em torno de um valor médio de 0,25.

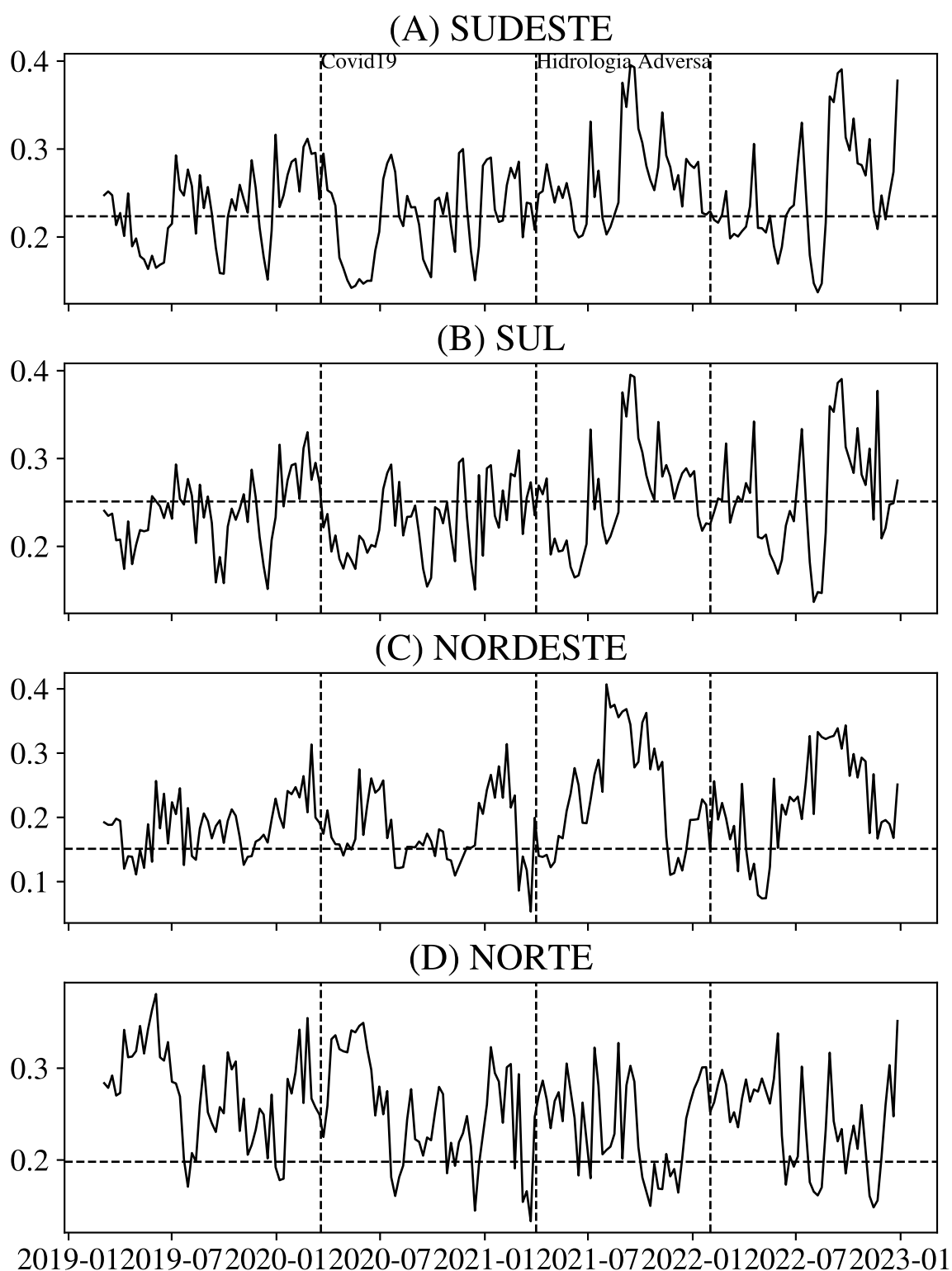


Figura 37 – Os gráficos exibem a evolução do comprimento do espectro multifractal para cada submercado ao longo do período analisado. As duas linhas verticais tracejadas representam o início e o término do pior período hidrológico vivenciado pelo Brasil. A linha horizontal tracejada indica o valor de $\Delta\alpha$ calculado para a série total, conforme apresentado na Tabela 27.

Estas observações destacam que determinados submercados possuem dinâmicas diferenciadas em termos de eficiência de mercado ou multifractalidade ao decorrer do tempo. As flutuações em $\Delta\alpha$ podem ser influenciadas por alterações na estrutura do mercado, na oferta

e demanda de energia, bem como por fatores regulatórios e climáticos. A multifractalidade, identificada pela amplitude do espectro multifractal, foi claramente afetada por eventos externos, com o surto de Covid-19 causando um impacto menor e as condições hidrológicas adversas um impacto maior. Cada submercado exibiu respostas multifractais específicas a esses eventos. Esta análise destaca a importância de levar em consideração a multifractalidade ao modelar e prever os preços da energia, sobretudo em momentos com eventos externos significativos.

6.1.7 Impacto dos Preços Mínimo e Tetos

Conforme detalhado em diversas seções deste estudo, o principal fator na determinação do PLD é o CMO. O valor do CMO decorre dos modelos de despacho hidrotérmico e, atualmente, é calculado em base horária. No cálculo do PLD, a CCEE aplica os limites inferior e superior ao CMO. Existem outras diferenças entre o CMO calculado pelo ONS e o CMO calculado pela CCEE para cálculo do PLD, porém não serão abordadas aqui. Do ponto de vista da multifractalidade, estes limites resultam em modificações significativas: embora tornem o PLD menos volátil que o CMO, eles introduzem complexidades à dinâmica de preços que podem dificultar as avaliações e previsões.

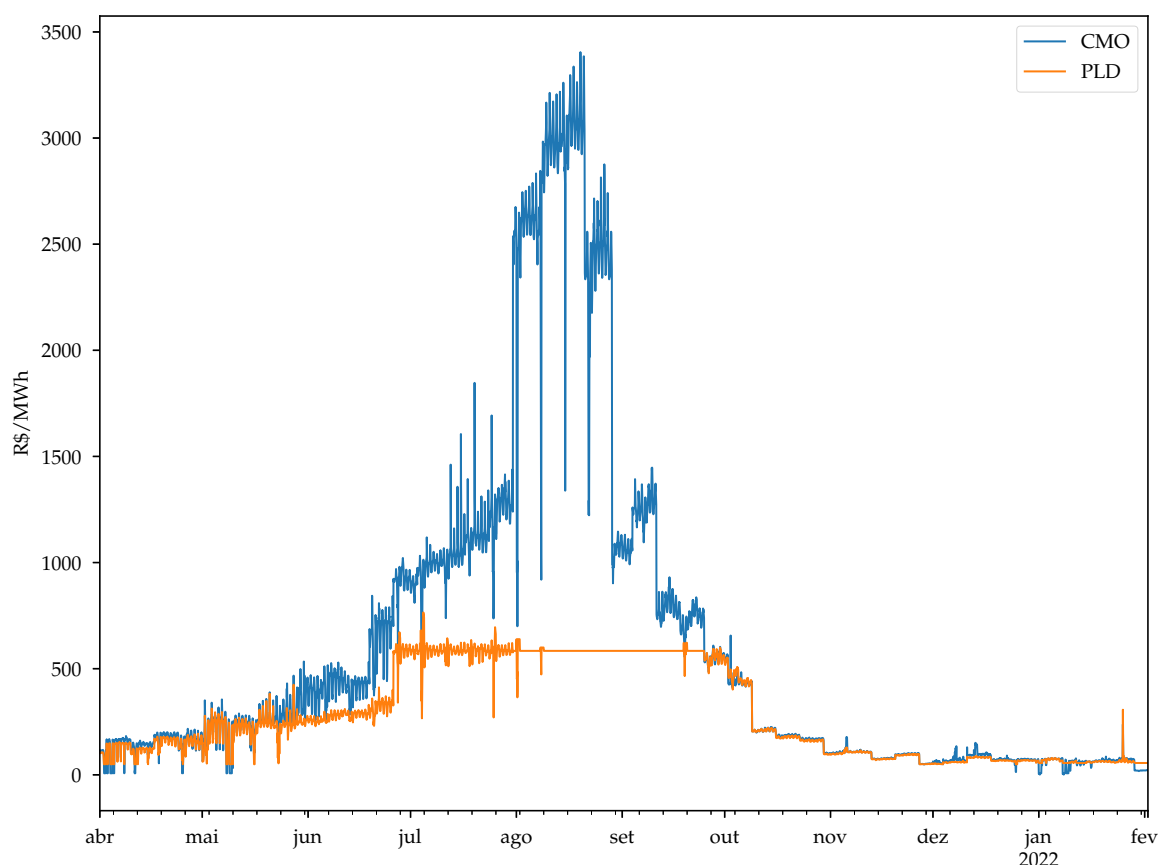


Figura 38 – Comparativo entre os valores do CMO e do PLD do submercado SE, para o período de abr/2021 a fev/2022, considerado o pior intervalo hidrológico do Brasil.

Os limites superiores estabelecidos ao CMO visavam proteger o mercado de preços excessivamente altos. Conforme ilustrado na figura 38, observou-se que o CMO do Sudeste

alcançou valores próximos a 3500 R\$/MWh, enquanto o PLD estabilizou-se em torno de 600 R\$/MWh. A figura 39 mostra o log-retorno das séries dessazonalizadas de PLD e CMO. Ambos os gráficos estão na mesma escala, destacando-se a maior flutuação do CMO em comparação ao PLD.

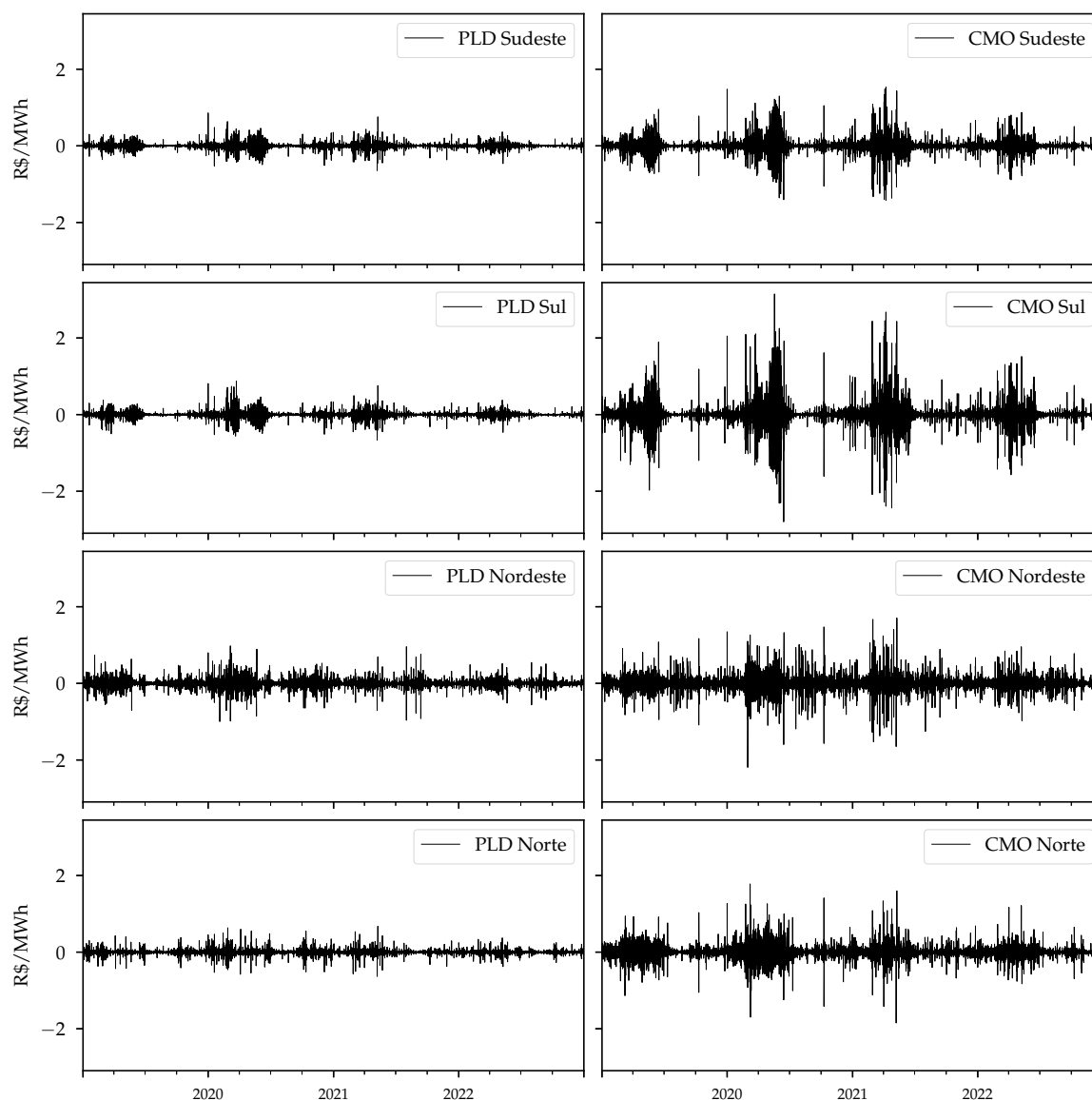


Figura 39 – Comparação dos log-retornos das séries de CMO e PLD.

No contexto da multifractalidade, qual foi a repercussão de estabelecer preços mínimos e máximos para o cálculo do PLD? Uma estratégia eficiente para investigar essa questão é através da comparação do espectro multifractal e do gráfico de coeficientes generalizados de Hurst entre o CMO e o PLD. A figura 40 apresenta as comparações multifractais por submercado.

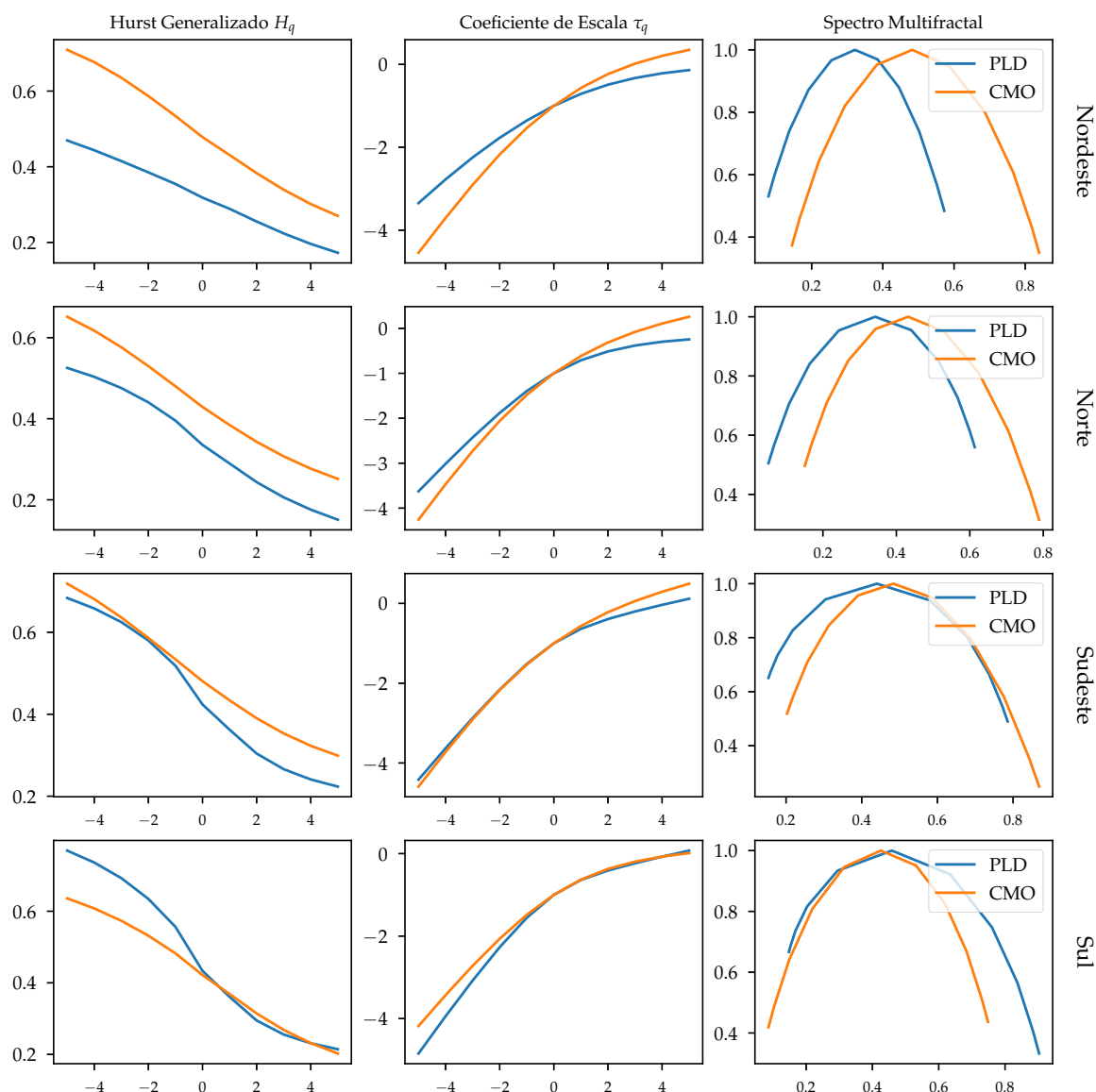


Figura 40 – Comparativo da análise multifractal entre CMO e PLD, considerando o log dos retornos das séries dessazonalizadas.

A análise dos valores da tabela 28 sugere que a introdução de limites no PLD altera a dinâmica multifractal do mercado. No geral, em alguns submercados, a introdução desses limites torna o PLD menos multifractal em comparação ao CMO, possivelmente devido ao amortecimento da volatilidade. Isso pode ter implicações para os participantes do mercado, pois a previsibilidade do mercado pode variar dependendo do grau de multifractalidade. Além disso, os diferentes graus de multifractalidade entre os submercados sugerem que há fatores regionais específicos que influenciam a dinâmica do preço. Isso pode ser devido a fatores como o mix de geração de energia em cada região, diferenças na demanda ou características geográficas e climáticas. Esta análise reforça a complexidade da dinâmica dos preços no mercado de eletricidade e a influência das regras e condições de mercado sobre as propriedades estatísticas dessas séries. A análise da multifractalidade comparando o PLD com o CMO fornece informações valiosas sobre o impacto da regulação no mercado de eletricidade.

Tabela 28: Tabela apresenta Coeficiente de Hurst, Largura do Espectro Multifractal e Força da Multifractalidade para cada submercado e tipo de série temporal, PLD ou CMO.

Tipo	Hurst		ΔH		$\Delta \alpha$	
Sudeste						
PLD	0.3902		0.4195		0.6661	
CMO	0.3040	↓	0.4602	↑	0.6321	↓
Sul						
PLD	0.3145		0.4336		0.6626	
CMO	0.2948	↓	0.5549	↑	0.7551	↑
Nordeste						
PLD	0.3830		0.4389		0.6943	
CMO	0.2552	↓	0.2968	↓	0.4938	↓
Norte						
PLD	0.3430		0.3999		0.6378	
CMO	0.2435	↓	0.3745	↓	0.5615	↓

Em todos os submercados, o CMO e o PLD são anti-persistentes, sendo que o PLD apresenta maior anti-persistência. Vale lembrar que, quanto mais próximo de 0,5, menos anti-persistente ou persistente é uma série. Essa característica pode ser explicada, pois ao se introduzir os limites, o PLD torna-se mais previsível que o CMO, devido aos platôs formados quando o CMO atinge os limites. Sob a ótica da eficiência de mercado, uma maior multifractalidade indica um mercado menos eficiente. Embora tenha alterado a dinâmica multifractal do mercado, pode-se inferir que a introdução dos limites no cálculo do PLD, tornou os mercados do Sudeste e Sul mais eficientes. Em contrapartida, os submercados Nordeste e Norte, devido a maior multifractalidade após a imposição dos limites, tornaram-se menos eficientes. Essa conclusão foi realizada através da observação dos valores de ΔH . Porém, quando se usou a largura do espectro multifractal o Sudeste passou a ser menos eficiente devido ao aumento da multifractalidade medida por $\Delta \alpha$.

6.2 Análise Multifractal usando Correlações Cruzadas (MFDCCA)

Quando se examina o Mercado de Eletricidade Brasileiro, utilizando séries de log-retorno do PLD dessazonalizado, observa-se a potencial influência de variáveis exógenas – como demanda, hidrologia e fenômenos climáticos – sobre a multifractalidade dos retornos. No entanto, havia uma lacuna nos métodos para determinar a direção e magnitude do impacto dessas variáveis. A técnica MFDCCA (Multifractal Detrended Cross-Correlation Analysis) desenvolvida por Zhou [92] preencheu essa lacuna, permitindo quantificar a correlação cruzada multifractal entre duas

séries temporais e avaliar sua relevância estatística.

Nesta seção, detalha-se a correlação cruzada entre as séries temporais de log-retorno do PLD e outras variáveis-chave: carga, energia natural afluyente (ENA) e energia armazenada, segmentadas por submercado. Embora esta análise abranja essas variáveis, o MFDCCA permite uma ampla gama de avaliações no mercado brasileiro de eletricidade. Alguns exemplos incluem: examinar as interações entre a volatilidade do PLD e as séries de ENA, carga e energia armazenada; investigar o impacto das fontes renováveis, como energia eólica e solar, sobre a multifractalidade do PLD na região Nordeste ou sobre a Carga dos submercados; e estudar a influência de fatores climáticos – como precipitação, velocidade do vento e temperatura – em variáveis como carga, geração e PLD.

Dado que a menor granularidade dos dados de ENA é diária, seria ideal conduzir essas análises com as séries diárias. No entanto, para essa granularidade, os registros do PLD estão disponíveis apenas a partir de 2019, resultando em um conjunto de 4 anos com 1461 observações. Se adotar uma granularidade semanal, embora tenha um conjunto menor de observações (cerca de 1100), esse conjunto abrange eventos significativos que influenciaram o PLD ao longo de mais de duas décadas de história do mercado. Portanto, as análises apresentadas neste capítulo baseiam-se em dados semanais.

As simulações realizadas nesta seção utilizaram o pacote Python para análise multifractal, *fathon* em sua versão 1.3.2 [128]. Além dos algoritmos tradicionais DFA e MF DFA, este pacote possui os métodos DCCA e MFDCCA implementados. Este é um pacote *open-source* e seu código fonte, assim como outras informações, podem ser obtidos no repositório do *GitHub* (<https://github.com/stfbnc/fathon>).

6.2.1 ENA x PLD Semanal

O capítulo 3 apresenta o referencial teórico do MFDCCA necessário para investigar as correlações multifractais entre duas séries temporais. Essa técnica combina os conceitos do MF DFA, que investiga a multifractalidade de uma única série temporal, com a DCCA, que examina as correlações cruzadas entre duas séries temporais. Primeiramente, analisam-se os gráficos das séries de retorno sobre o PLD semanal, disponíveis de 30/06/2001 até 31/12/2022, totalizando 1123 observações, e as séries de variações logarítmicas da ENA semanal, disponíveis de 01/01/2000 a 31/12/2022, totalizando 1201 observações. Os gráficos da Figura 41 exibem os comportamentos das séries históricas nos períodos mencionados.

Nesta seção, para facilitar a compreensão, utiliza-se 'séries de PLD' para referir-se às séries temporais de log-retorno do PLD dessazonalizado em base semanal. Analogamente, 'séries de ENA' refere-se às séries temporais de variação logarítmica da ENA dessazonalizada em base semanal.

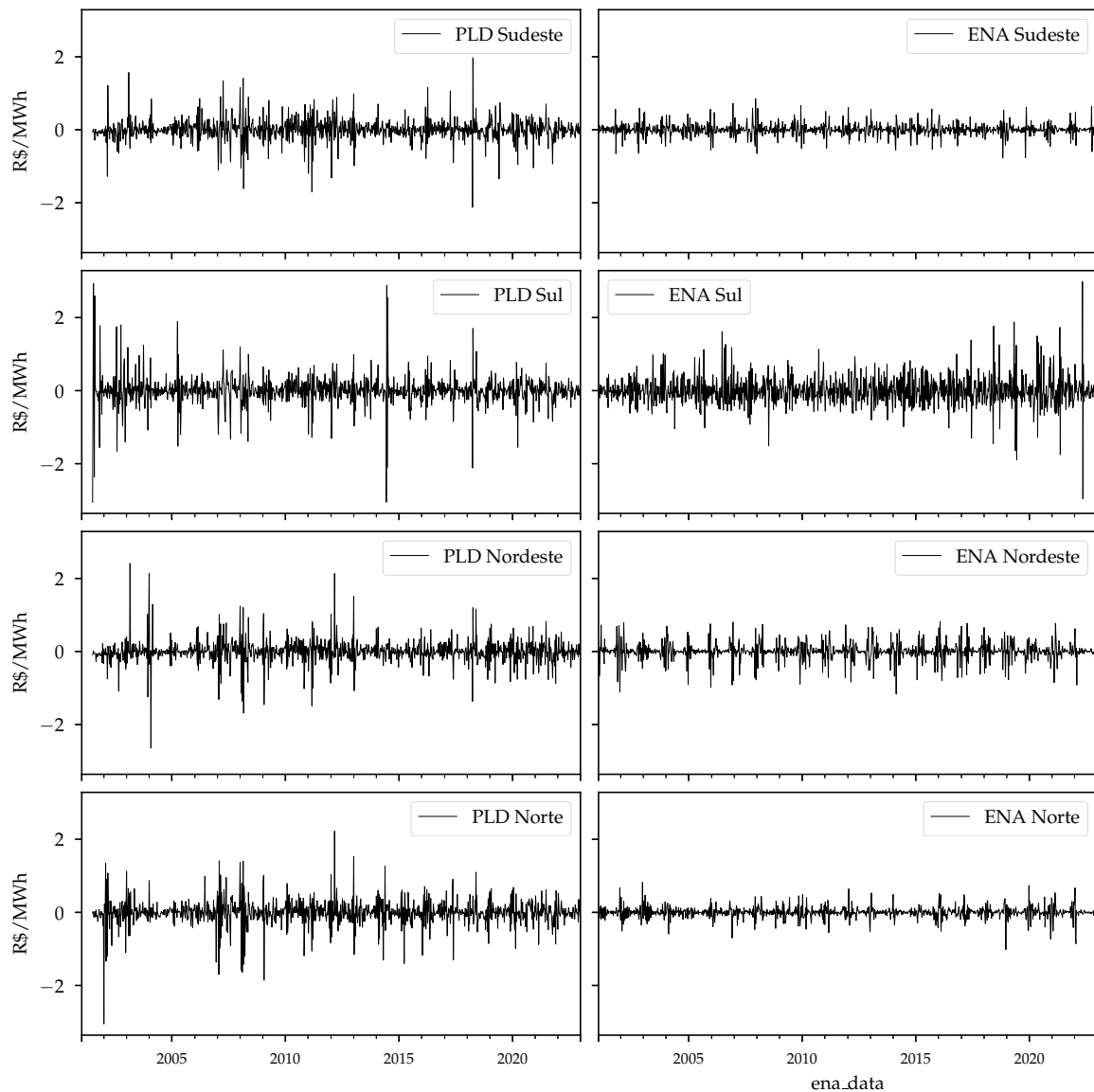


Figura 41 – Gráfico comparando as séries históricas entre variação logarítmica de ENA e retorno logarítmico de PLD, das séries dessazonalizadas.

Ao executar o MFDCCA, estabelecem-se os mesmos parâmetros usados nos estudos sobre os retornos horários das séries individuais. O intervalo de escalas é definido por $s = 16, \dots, \lfloor N/4 \rfloor$, os momentos utilizados variam dentro do intervalo $q = [-5, 5]$ e o grau do polinômio para remoção da tendência local é $m = 4$.

Supõe-se que $X(t)$ denote as séries de ENA e que $Y(t)$ represente as séries de PLD, segmentadas por submercado. A figura 42 exhibe os padrões das funções de flutuação das séries individuais em relação às escalas s e aos momentos q para cada submercado. As séries individuais são indicadas pelos índices xx e yy , enquanto a série correlacionada é indicada pelo índice xy . A relação linear esperada entre $\log Fq(i)$ e s não é completamente observada devido a *crossovers*, que podem indicar tendências sazonais não eliminadas na fase de pré-processamento das séries. Os coeficientes angulares dessas retas correspondem aos valores de $H_{xy}(q)$, conhecidos como expoente de correlação cruzada generalizado. No gráfico, os valores indicados são $H_{xy}(5) = 0.23$, $H_{xy}(0) = 0.37$ e $H_{xy}(-5) = 0.49$. Isso sugere que a correlação

cruzada entre as séries de ENA e as séries de PLD apresenta anti-persistência tanto para pequenas flutuações, representadas por $q < 0$, quanto para grandes flutuações, indicadas por $q > 0$. Essa anti-persistência, também conhecida como reversão à média, indica que um aumento na ENA (ou PLD) tem uma probabilidade maior de ser seguido por uma queda no PLD (ou ENA).

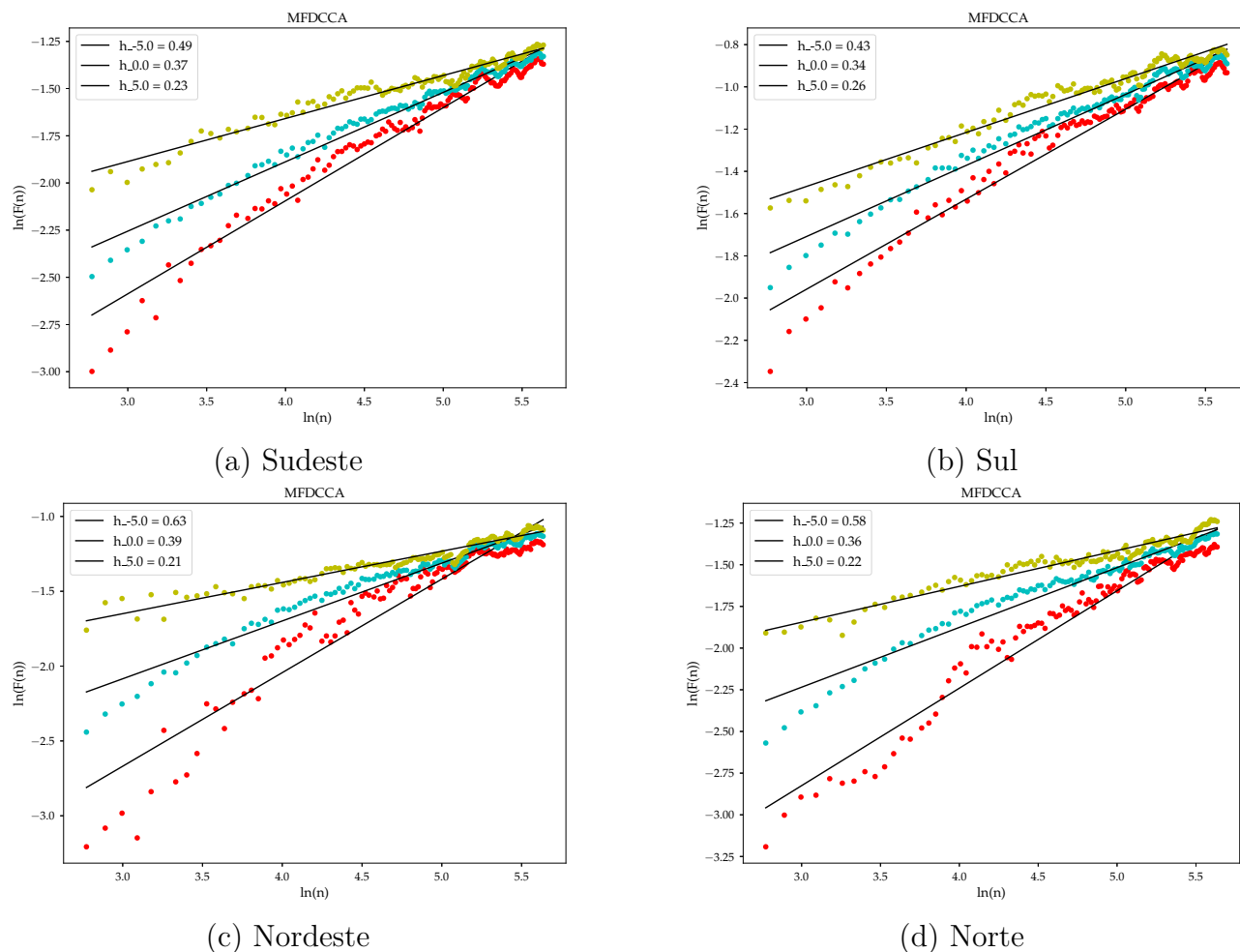


Figura 42 – Gráfico mostrando as funções de flutuação em função da escala (s) e dos momentos (q) para a análise de correlação cruzada entre a ENA Semanal e o PLD Semanal.

A figura 43 apresenta os gráficos do coeficiente de Hurst generalizado, dos coeficientes de escala e do espectro multifractal associados à correlação cruzada entre as séries de ENA e de PLD. A multifractalidade nas séries individuais é evidenciada pelo fato de que $H_{xx}(q)$ e $H_{yy}(q)$ variam com q . Adicionalmente, os coeficientes de escala mostraram uma relação não linear e as amplitudes dos espectros multifractais foram maiores que zero. Estas características foram anteriormente discutidas tanto para as séries diárias de ENA, conforme 4.3, quanto para as séries horárias de PLD, conforme 4.5. Em todos os submercados, as correlações cruzadas entre as séries de ENA e de PLD exibem multifractalidade, indicando uma dinâmica não linear entre essas variáveis. Modelos lineares convencionais, tais como regressão linear, regressão vetorial e análise do coeficiente de correlação, não são adequados para descrever a dinâmica das correlações cruzadas dessas séries.

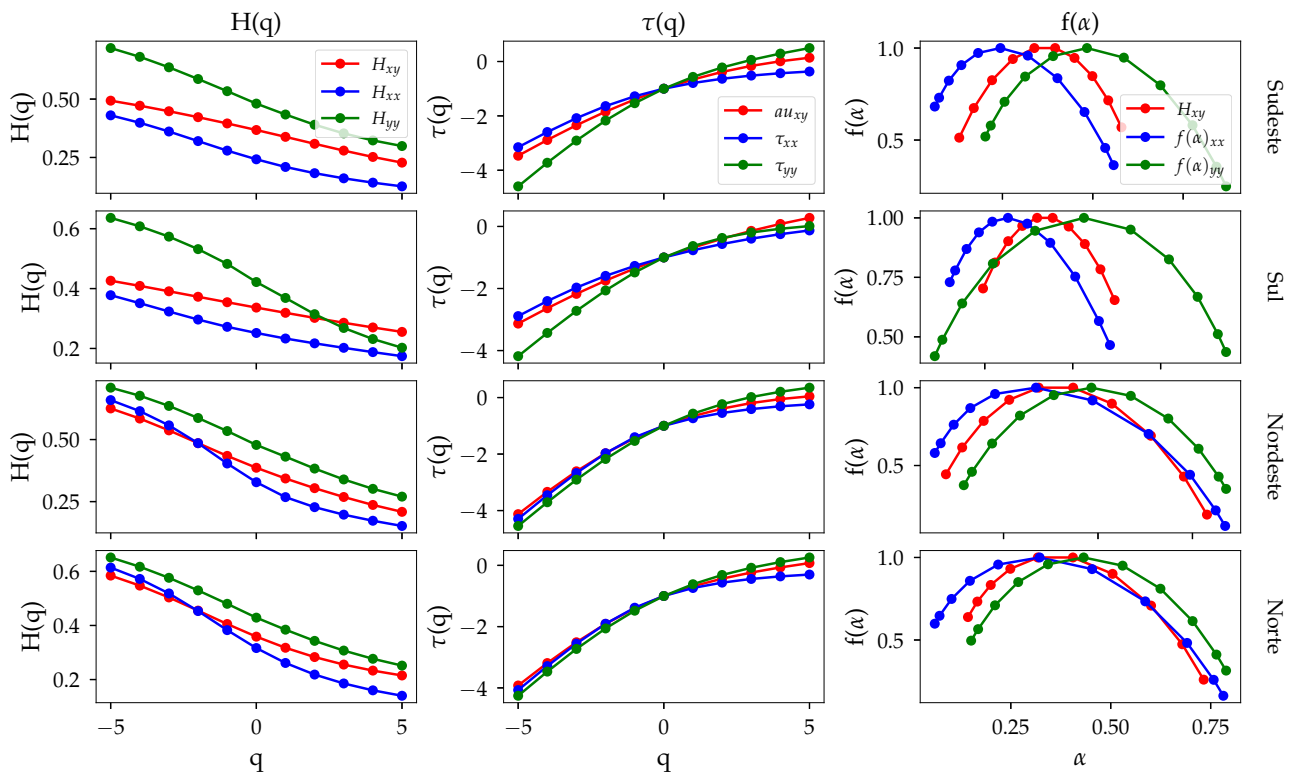


Figura 43 – Gráficos dos expoentes de correlação cruzada generalizados, dos coeficientes de escala e do espectro multifractal para a análise de correlação cruzada entre a ENA Semanal e o PLD Semanal, por submercado.

Dado que a amplitude do espectro multifractal da correlação cruzada entre as séries de ENA e PLD foi observada como não nula em todos os submercados, percebe-se uma dependência não linear, assim como a presença de multifractalidade nesta relação. Em contextos de análises técnicas ou preditivas, torna-se fundamental adotar uma visão integrada dessas variáveis, ultrapassando as análises univariadas que se limitam à multifractalidade e à dependência não linear entre ENA e PLD. Não é possível determinar qual das variáveis tem maior impacto na volatilidade da outra, considerando a relação bidirecional entre elas.

6.2.1.1 Testes Estatísticos

Testes estatísticos devem ser conduzidos para quantificar a intensidade da correlação cruzada entre duas séries. Esse valor é representado por ρ_{DCCA} e foi proposto por [22], [93] e [88], conforme detalhado no capítulo 3, seção 3.1.5. Tal valor complementa as análises realizadas até aqui, uma vez que o teste oferece critérios para determinar se o ρ_{DCCA} é significativo para cada submercado em análise. Avaliar a significância estatística de ρ_{DCCA} é fundamental para determinar se a correlação percebida é intrínseca à dinâmica do sistema ou se é uma correlação espúria resultante do acaso. Os gráficos da Figura 44 mostraram os valores de ρ_{DCCA} para cada submercado.

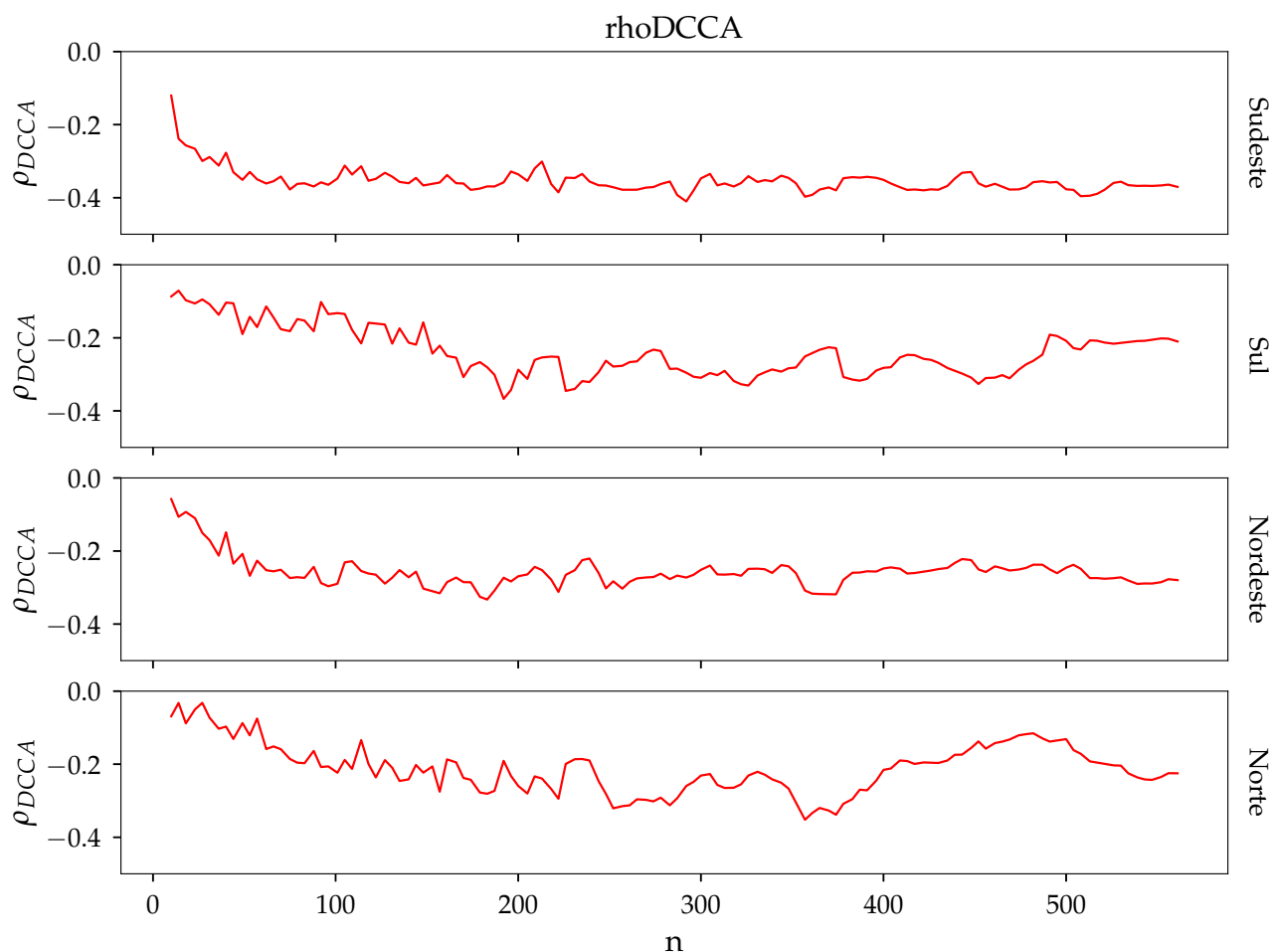


Figura 44 – Gráfico exibindo os valores de ρ_{DCCA} para cada submercado.

Os valores críticos para um intervalo de confiança de 5% são calculados conforme descrito na seção **3.1.5**. O gráfico da Figura 45 mostra o intervalo de confiança para os valores críticos (área em cinza) e os valores ρ_{DCCA} para cada submercado (linhas coloridas). Se os valores de ρ estiverem além do intervalo de confiança estabelecido, esses valores de ρ são considerados significativos e não originados de correlações espúrias. Por outro lado, se os valores de ρ estiverem dentro do intervalo de confiança, os resultados não são considerados significativos e, portanto, não são adequados para análises, já que a correlação cruzada pode ser atribuída a eventos aleatórios. No gráfico, n representa o número de graus de liberdade da distribuição $\chi^2(n)$ usada para determinar os valores críticos.

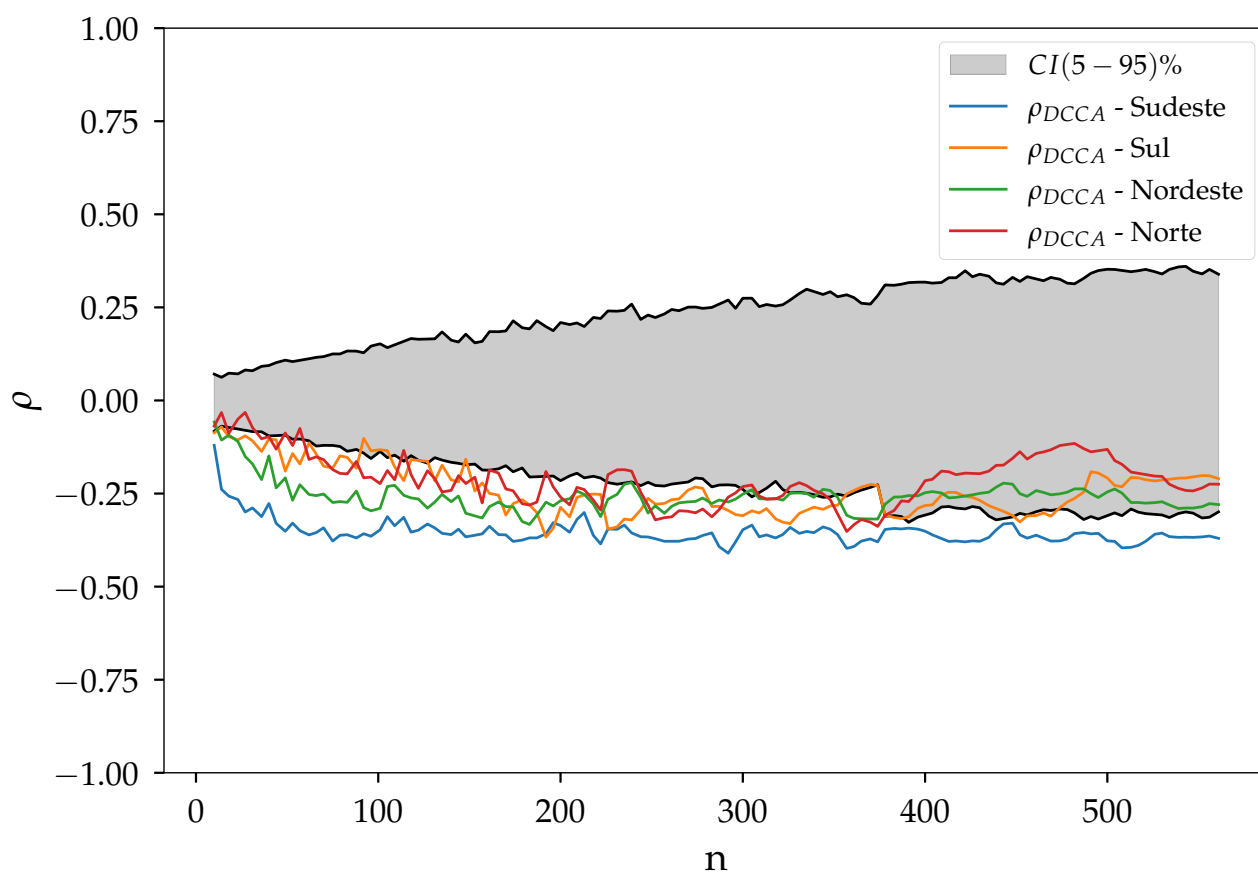


Figura 45 – Gráfico mostrando os valores de ρ_{DCCA} para cada submercado e o intervalo de confiança para os valores críticos.

Ao analisar os resultados apresentados no gráfico da Figura 45, identificou-se duas questões relevantes: (i) os valores de ρ são negativos, indicando anti-persistência na correlação cruzada entre ENA e PLD. Assim, incrementos nos valores da ENA têm maior probabilidade de serem seguidos por decrementos nos valores de PLD; (ii) nota-se que para $n < 200$, as correlações cruzadas entre as séries de ENA e PLD são significativas para os submercados Sudeste e Nordeste e limítrofes para os submercados Sul e Norte, considerando o intervalo de confiança. Para $n > 300$, apenas o submercado Sudeste situa-se fora do intervalo de confiança, mas em uma região limítrofe. Os demais submercados apresentam ρ_{DCCA} não significativos. Em análises de séries temporais, a significância de correlações cruzadas em relação aos graus de liberdade fornece informações sobre a natureza e robustez da relação entre duas séries temporais. Quando se observa que as correlações cruzadas são significativas abaixo de um determinado grau de liberdade, mas não acima dele, indica-se que a correlação entre as séries é mais forte e confiável em janelas temporais mais curtas ou em escalas mais finas. Em contraste, em janelas temporais mais longas ou em escalas mais amplas, a correlação tende a dissipar-se ou a ser menos consistente. Por outro lado, o teste desenvolvido por [22] não distingue direções de transmissão. Como o PLD é resultado de um algoritmo de otimização estocástica, e variáveis hidrológicas como ENA são dados de entrada para esses modelos, sabe-se que um valor mais alto de ENA pode resultar em valores mais baixos de PLD e valores mais baixos de ENA podem resultar em PLDs mais altos. No entanto, essa relação nunca será no sentido inverso. Sem conhecimento

específico dos sistemas de onde as séries temporais foram obtidas, a direção de transmissão pode ser identificada por um teste bidirecional de causalidade, o Teste de Causalidade de Granger, mas sua utilização é sugerida para trabalhos futuros.

Os gráficos da Figura 46 exibem os resultados dos testes para as correlações cruzadas entre as séries de (a) ENA e PLD, (b) ENA e CMO, (c), (d) EAR e PLD, (d) EAR e CMO, (e) Carga e PLD e (f) Carga e CMO. A correlação cruzada entre ENA e PLD é significativa para todos os submercados, com ênfase no Sudeste e Nordeste. No entanto, a partir da escala de 400 semanas, todos os submercados perdem significância, exceto o Sudeste. A correlação cruzada entre ENA e CMO demonstra um padrão interessante. Os submercados Sudeste e Nordeste aumentam sua significância, afastando-se do limite inferior do intervalo de confiança. Entretanto, Sul e Norte permanecem constantemente dentro do intervalo de confiança, ou seja, na região de exclusão do teste.

Quanto à Energia Armazenada, as correlações cruzadas entre EAR e PLD para o submercado Norte podem ser consideradas espúrias. No entanto, tornam-se significativas durante todo o período analisado quando a correlação cruzada é realizada com o CMO. Os outros submercados situam-se fora do intervalo de confiança durante quase todo o período estudado, exceto em escalas menores que 50 semanas, quando se aproximam do intervalo de confiança.

Na granularidade semanal, as correlações cruzadas entre Carga e PLD, bem como Carga e CMO, não são significativas em nenhum ponto do período analisado. Supõe-se que em granularidades menores (diárias ou horárias), a carga dos submercados comece a apresentar maior significância em suas correlações cruzadas com o PLD e CMO. O gráfico da Figura 47 indica que, para dados horários, a correlação cruzada entre Carga e PLD (ou CMO) é significativa para escalas temporais menores que 1 ano. Contudo, a relação entre Carga e PLD é consistentemente rejeitada no submercado Norte durante todo o período do estudo.

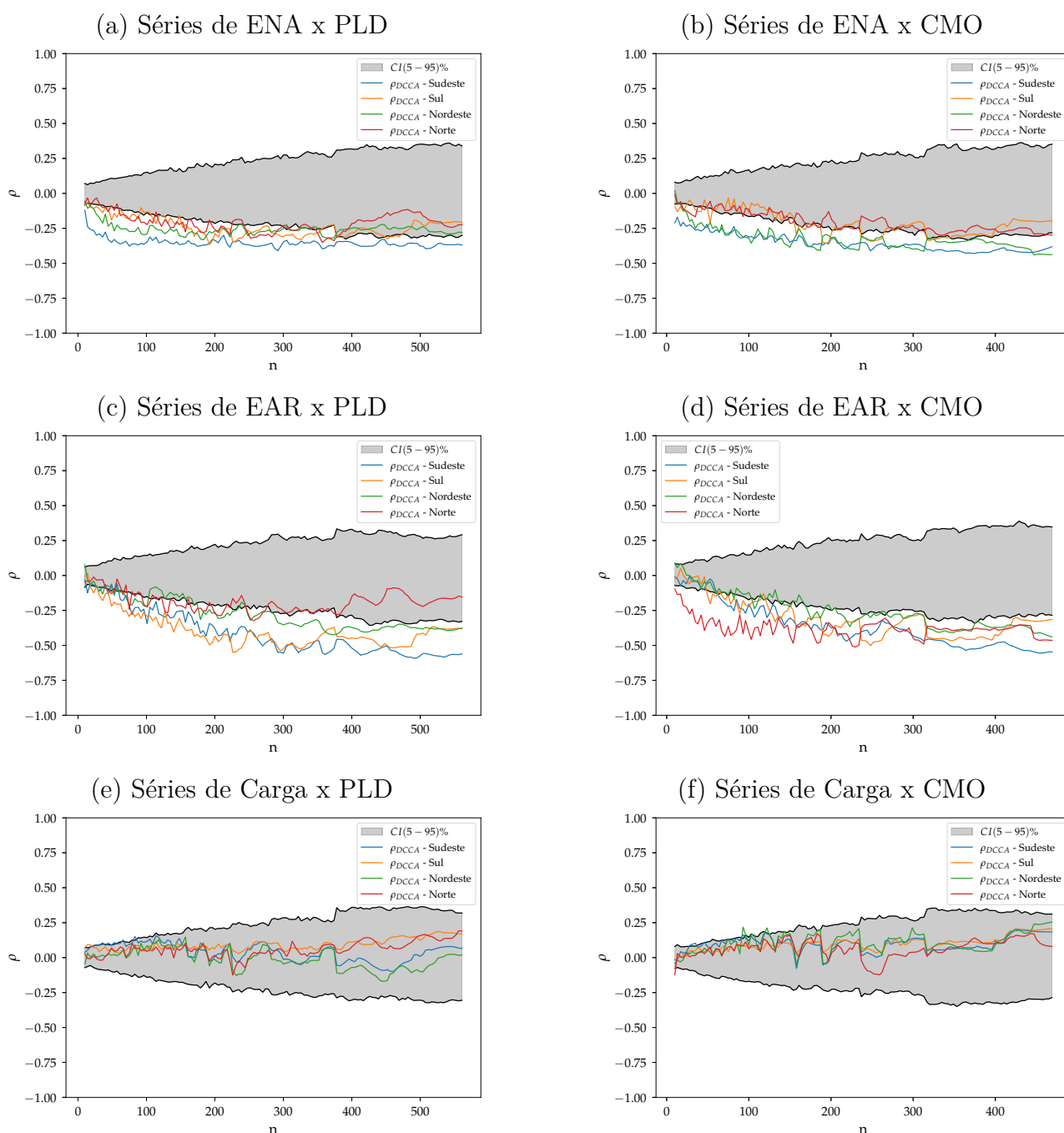


Figura 46 – Gráficos dos testes estatísticos para significância ρ_{DCCA} entre diversos conjuntos de séries temporais.

Diferentemente de países onde o preço da eletricidade no mercado atacadista é determinado por forças de mercado que respondem instantaneamente a desequilíbrios entre oferta e demanda, no Brasil, esses desequilíbrios podem não ser refletidos imediatamente no custo marginal e no preço. A oferta e a demanda são variáveis de entrada dos modelos de otimização calculados ex-ante, isto é, baseiam-se em previsões para períodos que variam de 10 dias (modelos de curtíssimo prazo) a 60 meses (modelos de médio prazo). Os modelos de previsão usados na cadeia de precificação, tanto para vazão ou energia afluyente quanto para carga, podem conter erros que influenciam a formação de preço e se desviam da realidade do mercado. Adicionalmente, respostas a desequilíbrios conjunturais podem ser identificadas pelos modelos de previsão, mas

serão incorporadas na formação dos preços apenas na rodada subsequente (um dia, no caso dos preços horários). Tal cenário pode resultar em uma discrepância artificial entre a carga e o preço de curto prazo.

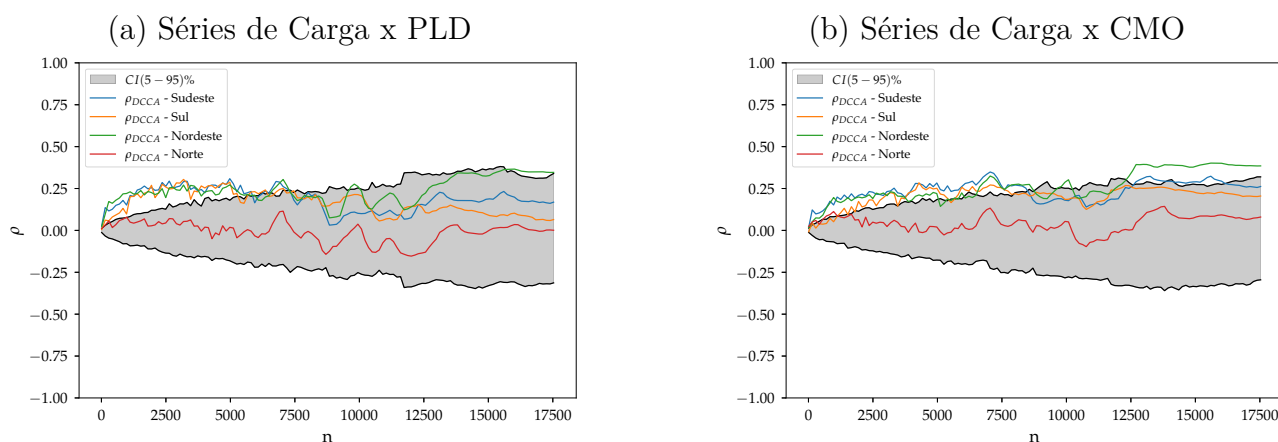


Figura 47 – Gráficos dos testes estatísticos para significância ρ_{DCCA} entre Carga e PLD para dados horários.

6.3 Multifractalidade como validador de séries sintéticas

Nesta Seção, o Algoritmo 4 do Capítulo 5 será aplicado sobre os dados de vazão natural afluente histórica das usinas hidrelétricas de Machadinho, Promissão e Jirau. Estas usinas e os dados de vazão foram apresentadas na Seção 5.2.3.

Os gráficos da Figura 48 apresentam as séries sintéticas geradas pelo modelo PAR(p) para cada uma das usinas. Foram geradas 500 séries sintéticas para um horizonte de 60 meses, que corresponde ao período de testes iniciando em janeiro de 2018 e finalizando em dezembro de 2022.

Cada uma dessas séries apresenta uma métrica de erro em relação ao valor realizado. Os gráficos da Figura 49 apresentam os histogramas do RMSE.

De acordo com o Algoritmo 4 o próximo passo aplica o método MFDFA sobre cada uma das séries sintéticas geradas pelo modelo PAR(p). Como o horizonte de projeção das séries sintéticas foi de 60 meses, sendo insuficiente para a análise com o MFDFA, decidiu-se concatenar a série histórica com cada uma das séries sintéticas. Desta forma o método MFDFA será aplicado sobre 500 séries com 1104 pontos cada, representando 92 anos de dados mensais. Antes de aplicar o modelo multifractal, as 500 séries deverão ser dessazonalizadas usando STL.

Após o processo de dessazonalização, são obtidos 500 espectros multifractais referentes às séries sintéticas e um espectro multifractal referente à série histórica. A distância de Hausdorff¹ é calculada para cada par de curvas (C, C_i) onde a curva C representa as coordenadas $(\alpha, f(\alpha))$ do espectro multifractal da série histórica e C_i representa as coordenadas $(\alpha_i, f_i(\alpha))$ do espectro multifractal de cada uma das i séries sintéticas, onde $i \in (1, 2, \dots, N)$ e N é o número de

¹ A biblioteca Scipy (<https://scipy.org/>) utilizada neste trabalho, apresenta implementação eficiente do algoritmo de cálculo da distância de Hausdorff

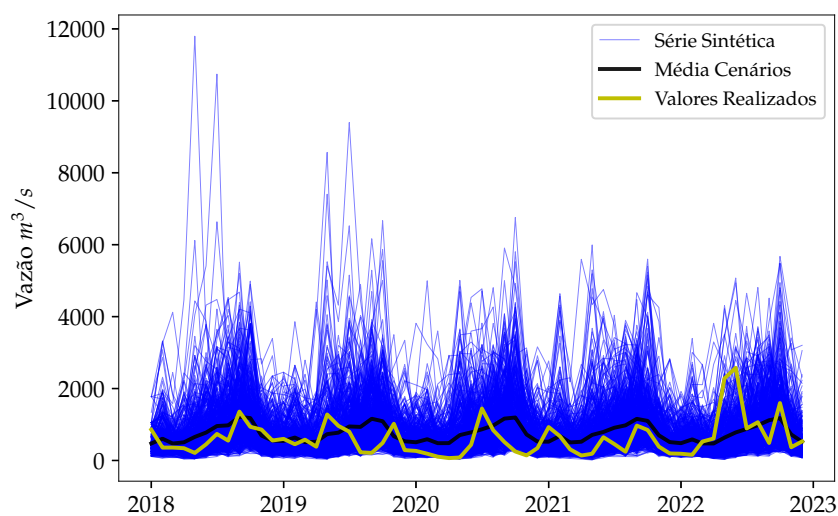
séries sintéticas, 500 neste estudo. Os gráficos da Figura 50 apresentam os histogramas das 500 distâncias de Hausdorff calculadas. O critério de similaridade é definido através do percentil 90%, linha vertical verde nos histogramas. Toda as séries que apresentam distância superior ao critério de similaridade foram descartadas, pois apresentam multifractalidades não similares àquela apresentada pela série histórica. O critério de similaridade foi definido para somente uma banda, já que se o percentil inferior fosse considerado então seriam eliminadas séries que apresentam similaridade superior às demais, já que quanto menor a distância de Hausdorff mais similares são as curvas.

Os gráficos da Figura 51 apresentam os espectros multifractais das séries que foram descartadas (a, c, e), e os espectros da séries que não foram descartadas (b, d, f), ambos comparados ao espectro da série histórica.

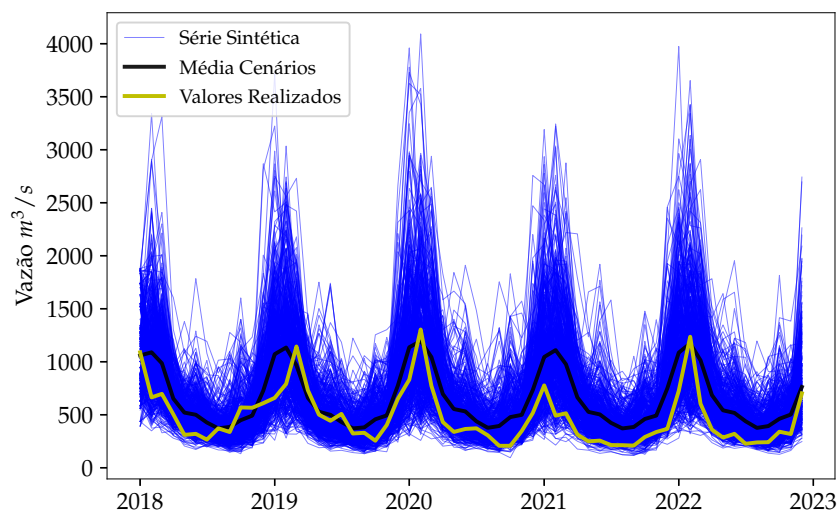
A Tabela 29 apresenta o RMSE médio das séries sintéticas em relação à série histórica. A linha **Teste** mostra RMSE para todas as séries geradas pelo PAR(p) para o período de teste. A linha **Aprovadas** mostra o RMSE para as séries que foram aprovadas de acordo com o critério de similaridade definido. A linha **Ganho** apresenta o benefício introduzido pela algoritmo de validação ao eliminar séries características multifractais menos similares aos da série histórica. Por último, a linha **Número de Eliminadas** apresenta o número total de séries eliminadas pelo critério de similaridade.

Conforme demonstrado na Tabela 29, o algoritmo desenvolvido aprimora o RMSE médio das séries sintéticas ao excluir aquelas cujas propriedades multifractais divergem significativamente das observadas nas séries históricas. Esse procedimento foi implementado em séries de vazão que apresentam distintas características estatísticas e multifractais, resultando em melhorias em todas as usinas. A aplicação desse algoritmo destaca sua capacidade de refinar a qualidade das séries sintéticas, assegurando uma maior fidelidade às complexidades multifractais inerentes aos dados históricos.

(a) Séries sintéticas de vazão natural afluente para a UHE Machadinho.



(b) Séries sintéticas de vazão natural afluente para a UHE Promissão.



(c) Séries sintéticas de vazão natural afluente para a UHE Jirau.

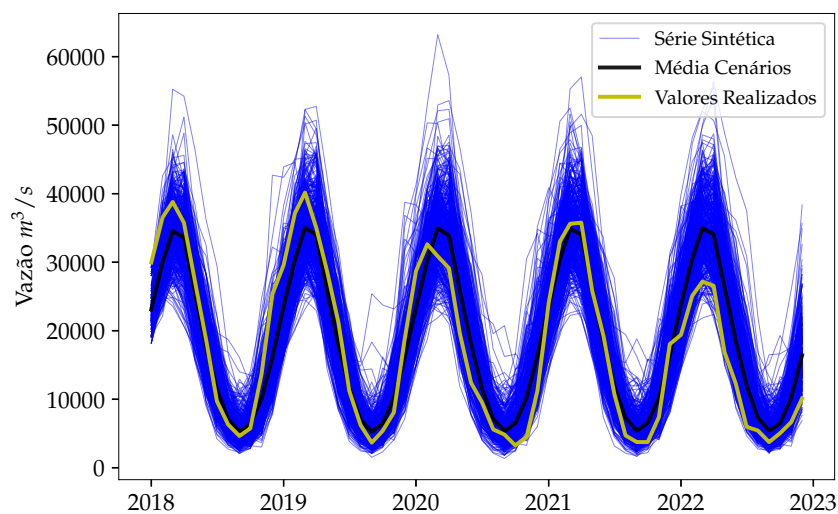
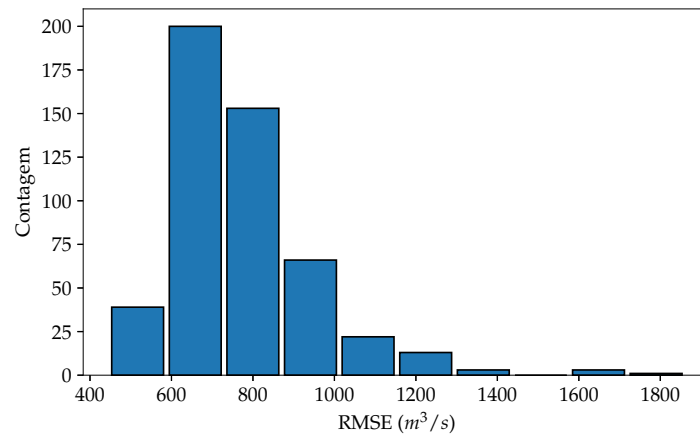
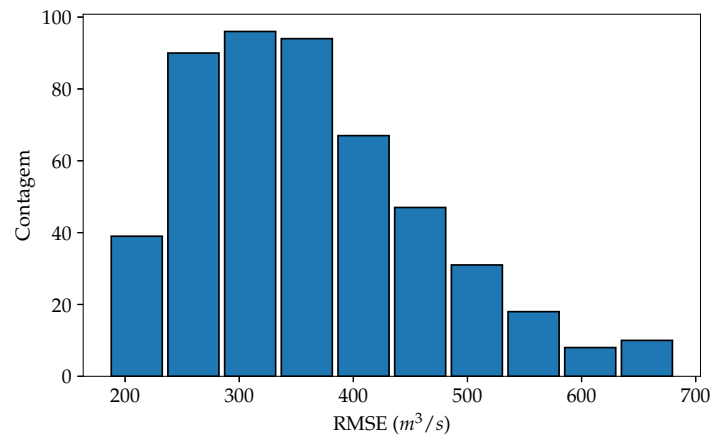


Figura 48 – Gráficos das séries sintéticas de vazão geradas pelo modelo PAR(p) para cada uma das usinas hidrelétricas.

(a) Histograma do RMSE das séries sintéticas de vazão da UHE Machadinho.



(b) Histograma do RMSE das séries sintéticas de vazão da UHE Promissão.



(c) Histograma do RMSE das séries sintéticas de vazão da UHE Jirau.

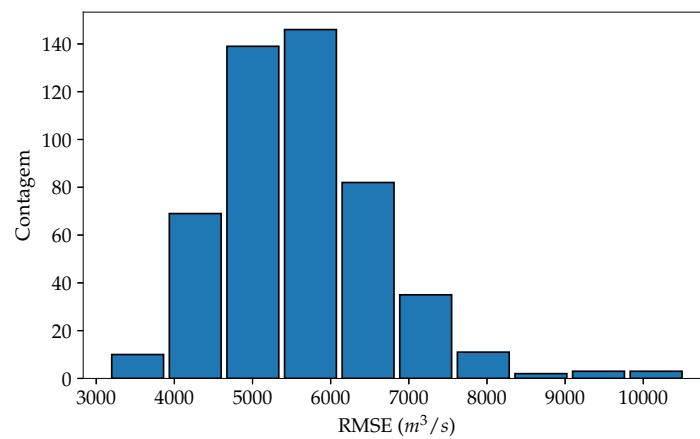
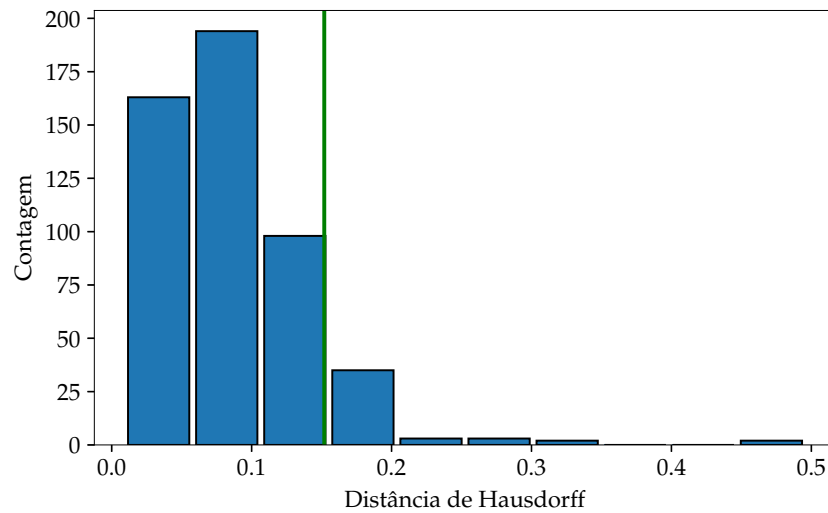
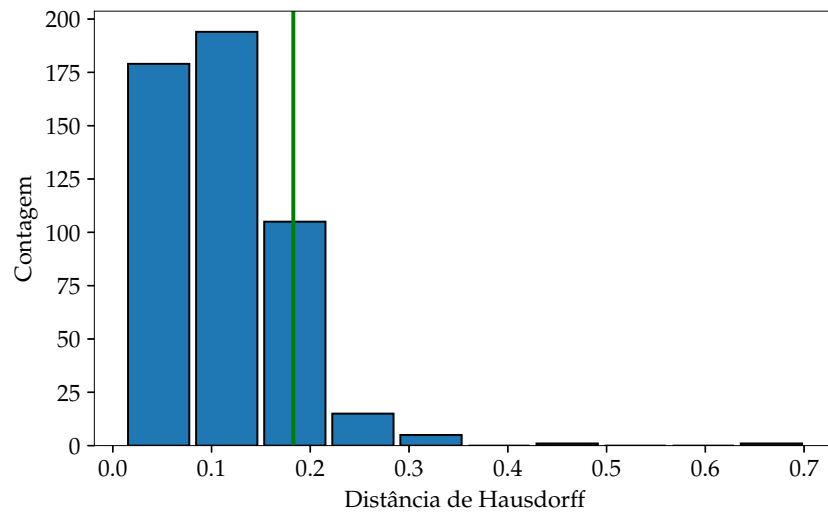


Figura 49 – Gráficos dos RMSE das séries sintéticas de vazão em relação ao valores observado durante o período de testes.

(a) Histograma das distância de Hausdorff para UHE Machadinho.



(b) Histograma das distância de Hausdorff para UHE Promissão.



(c) Histograma das distância de Hausdorff para UHE Jirau.

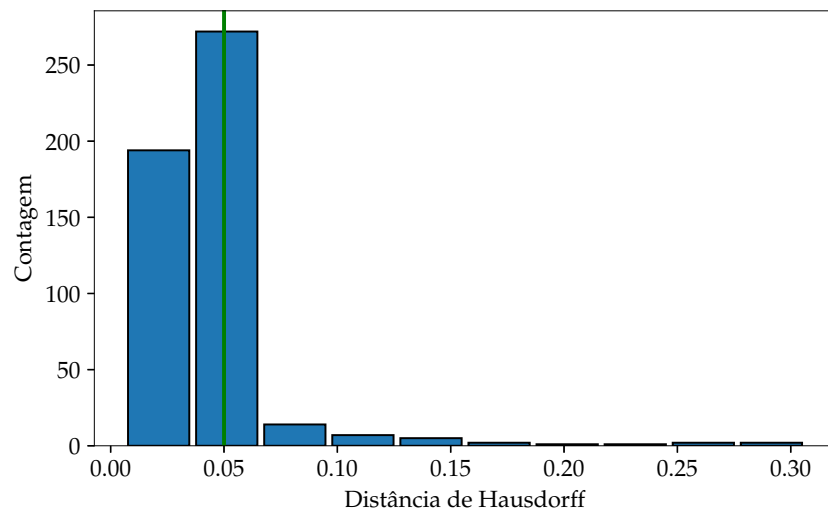
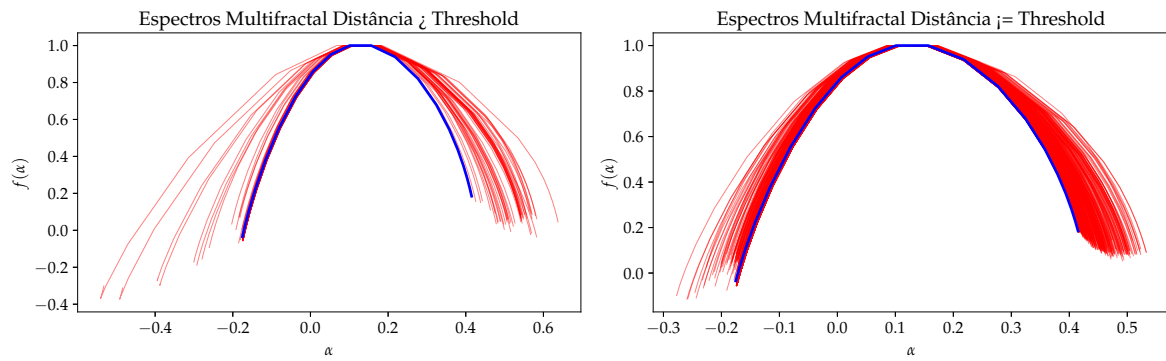
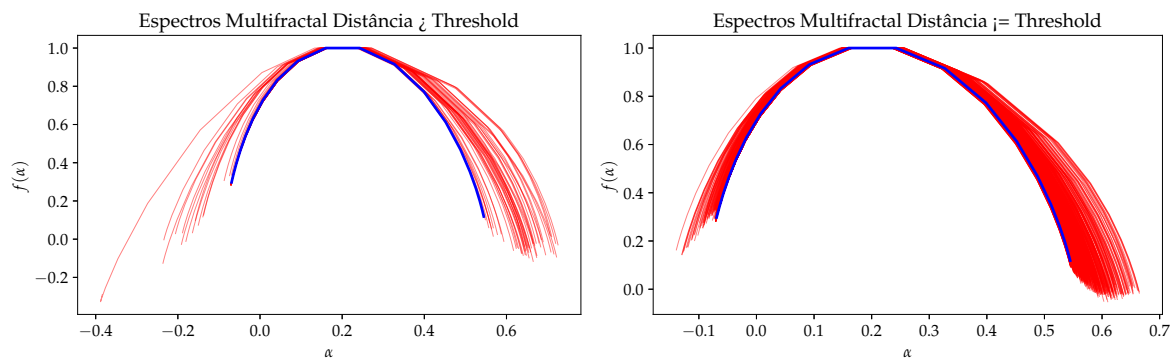


Figura 50 – Gráficos com os histogramas da distância de Hausdorff entre cada uma dos 500 espectros multifractais provenientes da aplicação do MF DFA na séries sintéticas e o espectro multifractal proveniente da série histórica.

(a) Espectros descartados para UHE Machadinho. (b) Espectros não descartados para UHE Machadinho.



(c) Espectros descartados para UHE Pro-missão. (d) Espectros não descartados para UHE Pro-missão.



(e) Espectros descartados para UHE Jirau. (f) Espectros não descartados para UHE Jirau.

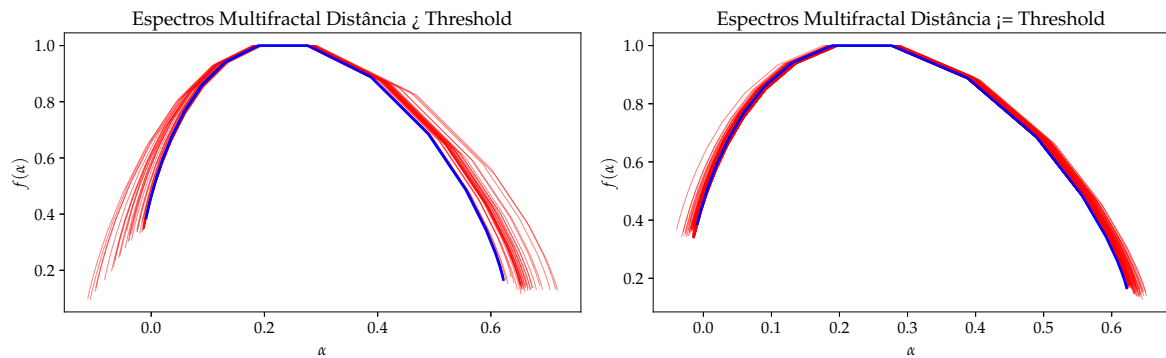


Figura 51 – Gráficos com os espectros multifractais descartados (gráficos da esquerda) e não descartados (gráficos da direita) para cada uma das usinas hidrelétricas.

Tabela 29: Tabela apresenta a comparação dos RMSE das séries sintéticas no período de teste, das séries reprovadas, das séries aprovadas em relação à séries histórica para cada uma das usinas.

RMSE	Promissão	Jirau	Machadinho
Teste	362.45	5618.02	774.20
Aprovadas	355.21	5274.57	748.13
Ganho	7.23	343.44	26.07
Número de Eliminadas	50	50	50

6.4 Conclusão

Neste capítulo, apresenta-se a aplicação do método MF DFA à série de log-retorno do PLD horário. Em uma etapa de pré-processamento, as séries de cada submercado foram avaliadas em busca de dados faltantes e possíveis *outliers* devido a erros de registro. Utilizaram-se dados horários de 2019 até o final de 2022, totalizando mais de 35.000 observações. O MF DFA, bem como outros algoritmos baseados em cálculos de funções de flutuação, é sensível ao tamanho da amostra e requer grandes conjuntos de dados para que os resultados sejam representativos. As vantagens de se utilizar o MF DFA para analisar a multifractalidade de séries temporais incluem a habilidade de manipular séries não-estacionárias, a facilidade na implementação do algoritmo e seus derivados (MFDMA, MF DFA-EMD, MF DFA-MODWT, etc.), a vasta quantidade de publicações em diversas áreas de conhecimento permitindo comparação de resultados, e bibliotecas *open-source* disponíveis nas principais linguagens de programação utilizadas no meio acadêmico (Python, Matlab, Octave, R). Contudo, o MF DFA possui algumas desvantagens, como não manipular tendências sazonais como outros métodos baseados em Transformadas *Wavelets* (*Wavelet* Líder, p-Líder e Módulo Máximo da Transformada *Wavelet*), a ausência de testes estatísticos para medir a significância dos resultados e o alto custo computacional ao lidar com séries muito longas.

Conforme as pesquisas bibliográficas apresentadas no capítulo 2, este trabalho e o artigo no anexo A foram pioneiros ao abordar a multifractalidade no mercado brasileiro de eletricidade. A análise realizada neste capítulo confirmou alguns dos resultados obtidos no artigo, que optou por trabalhar com a série de PLD semanal (menos de 1.200 observações), em vez da série horária, devido à maior diversidade de eventos registrados em mais de 20 anos do PLD semanal. Os resultados obtidos no artigo foram tratados como preliminares (multifractalidade aparente) e foram confirmados pelas avaliações deste capítulo.

Todos os submercados mostraram anti-persistência ou reversão à média tanto na análise semanal quanto na horária. Os coeficientes de Hurst não mostraram grandes alterações, exceto para o Nordeste, que variou de 0.407 na análise semanal para 0.26 na análise horária, tornando-se o submercado com maior comportamento anti-persistente, posição anteriormente ocupada pelo Sul na análise semanal. A mudança na granularidade dos dados (de semanal para horário), a

alteração na metodologia de cálculo do PLD (até 12/2021, o PLD era calculado semanalmente pelo modelo de otimização estocástica; a partir de 01/2021, começou a ser calculado de forma horária pelo modelo de otimização determinística) e a janela de eventos (semanal analisou 20 anos de dados e a horária 4 anos) provavelmente impactaram mais a não-linearidade dos eventos que direcionam a dinâmica de preços do submercado Nordeste, resultando neste grande desvio no coeficiente de Hurst. Os três indicadores que medem a força da multifractalidade (ou a ineficiência do mercado) identificaram o Sul como o mercado mais multifractal (ou ineficiente) em ambas as avaliações.

A origem da multifractalidade foi examinada, obtendo conclusões similares às da análise semanal. Ou seja, a multifractalidade de todos os submercados é mais influenciada pelas correlações de longo prazo entre pequenas e grandes flutuações do que pela densidade de probabilidade ampla. No Nordeste, a influência da densidade de probabilidade ampla sobre a multifractalidade dos retornos horários diminuiu consideravelmente em comparação com os resultados da avaliação semanal. Isso sugere que a redução da multifractalidade no Nordeste é majoritariamente explicada pela diminuição da multifractalidade associada à distribuição de probabilidade ampla, uma vez que a multifractalidade devida às correlações temporais mudou pouco de um conjunto de dados para outro.

Também se analisou a diferença na multifractalidade entre o PLD e o CMO. Espera-se que o CMO apresente uma complexidade superior à do PLD devido à remoção dos limites. Acredita-se que a densidade de probabilidade ampla seja mais representativa para a multifractalidade dos submercados, igualando-se ou até mesmo superando a multifractalidade resultante das correlações de longa duração.

Conclui-se que o mercado brasileiro de eletricidade, por meio das séries de log-retorno do PLD horário e do PLD semanal dessazonalizados, exhibe multifractalidade em todos os submercados. Assim, a série de retorno demonstra complexidade e não-linearidade conforme o grau de multifractalidade. Todos os submercados mostraram comportamento anti-persistente ou de reversão à média, e a multifractalidade provém tanto das correlações temporais entre pequenas e grandes flutuações quanto, em menor grau, da distribuição de probabilidades ampla.

Na busca por correlações cruzadas que possam elucidar a multifractalidade do PLD, as séries de log-retorno do PLD semanal e as séries de variação logarítmica da ENA semanal para cada submercado foram analisadas utilizando MFDCCA. Observou-se que a correlação cruzada entre as séries é multifractal, adicionando complexidades e não-linearidades à relação entre ENA e PLD. Aplicou-se o teste de Podobnik [22] para determinar a significância da correlação cruzada entre as duas variáveis. Notou-se que os submercados SE e NE permanecem significativos durante grande parte do período de avaliação. No entanto, os submercados Sul e Norte situam-se no limite do intervalo de confiança de 5%, levando à conclusão de que a correlação cruzada entre ENA e PLD não é significativa para eles. Estas conclusões, fundamentadas no teste estatístico, têm respaldo na operação do sistema hidrotérmico brasileiro. A alta variabilidade da ENA no submercado Sul, juntamente com a sua forte interconexão com o Sudeste, pode influenciar o resultado do teste. A interligação com o Sudeste, um mercado de maior magnitude em termos

de carga, faz com que os preços do Sul e do Sudeste sejam, frequentemente, iguais. Ao examinar os dados do PLD semanal, constatou-se que, em 73% das ocasiões, os preços do Sudeste e do Sul coincidem, o que afeta a correlação cruzada entre PLD e ENA, como confirmado pelo teste. O submercado Norte, sendo predominantemente um exportador de eletricidade (demanda < oferta), acompanha na maioria das vezes os preços do Sudeste ou do Nordeste, alterando a dinâmica da relação entre ENA e PLD neste submercado.

Outras variáveis foram examinadas quanto à multifractalidade da correlação cruzada com o PLD. De forma similar à ENA, a energia armazenada (EAR) mostrou uma significância mais acentuada para os submercados Sudeste e Nordeste em comparação com os submercados Sul e Norte. O teste não descartou a correlação cruzada entre EAR e PLD para o Sudeste e Nordeste e rejeitou as correlações cruzadas para os submercados Sul e Norte. Razões semelhantes às apresentadas para a ENA podem explicar a rejeição da correlação cruzada entre EAR e PLD para os submercados Norte e Sul.

Em relação à carga, a correlação cruzada com o PLD foi descartada durante todo o período de avaliação para todos os submercados. No entanto, ao analisar o mesmo conjunto de dados em escala horária, identificou-se a significância das correlações para escalas inferiores a um ano para os submercados Sudeste, Sul e Nordeste. O submercado Norte manteve a rejeição do teste durante todo o período.

Além da análise multifractal do mercado brasileiro de eletricidade, neste capítulo foi proposto um algoritmo para validação de séries sintéticas provenientes de séries multifractais e geradas por modelos de previsão. Para efeito de ilustração, utilizou-se o modelo PAR(p) para geração das séries sintéticas de vazão natural afluyente a usinas hidrelétricas. O PAR(p) é um modelo consagrado nacional e internacionalmente para previsão de séries hidrológicas com intervalos de tempo inferior a um ano e presença de sazonalidade. No Brasil, o PAR(p) é utilizado no modelo de despacho hidrotérmico Newave para geração de séries sintéticas de energia natural afluyente para cada um dos 12 reservatórios equivalentes.

Foram utilizados os valores históricos das vazões natural afluyente às usinas Jirau, Promissão e Machadinho. Estas usinas representam a variabilidade hidrológica do Brasil, onde Jirau apresenta sazonalidade acentuada, Promissão apresenta sazonalidade inferior a Jirau e Machadinho apresenta baixa sazonalidade. A intensidade da sazonalidade é medida pela força da sazonalidade, métrica já estudada nos Capítulos 3 e 4.

A fundamentação do algoritmo proposto reside na preservação das características multifractais observadas na série histórica, transferindo-as adequadamente para as séries sintéticas geradas. O espectro de singularidade foi escolhido para caracterizar a multifractalidade das séries temporais pois fornece uma rica descrição das propriedades escalares, capturando tanto a diversidade das taxas de escala quanto a abundância de diferentes tipos de comportamento local. A análise do espectro multifractal permite identificar a complexidade inerente e as propriedades de escala autossimilares de fenômenos naturais, financeiros, geológicos, entre outros.

A métrica de Distância de Hausdorff foi empregada para avaliar a similaridade entre o

espectro multifractal da série histórica e os espectros das séries sintéticas. Um valor reduzido nessa distância indica uma maior similitude entre as curvas analisadas. Essa abordagem foi aplicada aos espectros derivados de 500 séries sintéticas de vazão, criadas pelo modelo PAR(p) para três diferentes usinas, assim como ao espectro oriundo da série histórica. A análise dos histogramas de distância permitiu a definição de um critério de similaridade, estabelecendo o percentil de 90% como o limiar para diferenciar séries consideradas similares das não similares em relação ao registro histórico. Para as três usinas em questão, a remoção das séries classificadas como não similares resultou em uma melhoria do RMSE para o novo conjunto de dados, atingindo o objetivo proposto e evidenciando a eficácia do método na seleção de séries sintéticas mais representativas da dinâmica multifractal observada.

7 Conclusões e Trabalhos Futuros

Neste trabalho, a análise da multifractalidade no mercado de eletricidade brasileiro foi apresentada utilizando o método de Análise Multifractal das Flutuações Detrendidas (MFDFA) para cada um dos quatro submercados. Para esta análise, foram utilizadas séries históricas de log-retorno sobre o PLD dessazonalizado, em base horária e semanal. Apesar do processo atípico de formação de preços, baseado em modelos de otimização de despacho hidrotérmico, os submercados compartilharam um comportamento de anti-persistência (ou reversão à média) e exibiram características multifractais. Tais resultados convergem com os fatos estilizados observados em outros mercados globais de eletricidade, indicando uma natureza universal desses atributos.

Todos os submercados apresentaram anti-persistência ou reversão para a média tanto na análise semanal quanto na análise horária. Os coeficientes de Hurst não apresentaram grandes mudanças, exceto para o Nordeste, que passou de 0.407 na análise semanal para 0.26 na análise horária, tornando-se o submercado com maior comportamento anti-persistente, posição ocupada pelo Sul na análise semanal. As mudanças de granularidade dos dados (de semanal para horário), a mudança na metodologia de cálculo do PLD (até 12/2021, o PLD era calculado em base semanal pelo modelo de otimização estocástica; a partir de 01/2021, passou a ser calculado em base horária pelo modelo de otimização determinística) e a janela de eventos (semanal analisou 20 anos de dados e o horário 4 anos) provavelmente afetaram a não-linearidade dos eventos que regem a dinâmica de preços do submercado Nordeste, levando a este desvio significativo no coeficiente de Hurst. Os três indicadores que medem a força da multifractalidade (ou a ineficiência do mercado) apontaram o Sul como o mercado mais multifractal (ou ineficiente) em ambas as avaliações.

A origem da multifractalidade foi investigada, obtendo-se conclusões semelhantes às aquelas encontradas na análise semanal, ou seja, a multifractalidade de todos os submercados é mais influenciada pelas correlações de longo alcance entre pequenas e grandes flutuações do que pela distribuição de probabilidades com cauda longa. No Nordeste, a influência das distribuições com cauda longa sobre a multifractalidade dos retornos horários reduziu consideravelmente quando comparada aos resultados da avaliação semanal. Isso indica que a redução da multifractalidade do Nordeste é explicada, em grande parte, pela redução da multifractalidade atrelada à distribuição de probabilidade ampla, visto que a multifractalidade devida às correlações temporais alterou-se pouco de um conjunto de dados para outro.

A análise do comportamento dinâmico do coeficiente de Hurst e do índice MLM usando a técnica de janela deslizante revelou a constância da anti-persistência e uma tendência de aumento no coeficiente de Hurst após a introdução do modelo de despacho horário. Estas observações sugerem uma diminuição na anti-persistência e maior aleatoriedade nos preços semanais, possivelmente associados à maior granularidade e flexibilidade do modelo horário. A mesma análise, baseada no PLD horário, salientou que determinados submercados reagem de maneira diferente em relação à eficiência de mercado ou multifractalidade ao longo do tempo.

As variações da largura do espectro multifractal, medido por $\Delta\alpha$, podem refletir mudanças na estrutura do mercado, oferta e demanda de energia, além de fatores regulatórios e climáticos. Com a técnica de janela deslizante e uma escala de tempo reduzida, foi possível identificar o impacto de eventos externos, como o surto de Covid-19 (de menor intensidade) e as condições hidrológicas adversas (de maior intensidade), sobre a amplitude do espectro multifractal. Cada submercado apresentou reações multifractais diferentes a estes eventos. Esta análise destaca a importância de considerar a multifractalidade em processos de modelagem dos preços de energia no mercado brasileiro, especialmente em períodos com eventos externos significativos.

Estudos sobre a diferença na multifractalidade entre o PLD e o CMO foram conduzidos. Esperava-se que o CMO apresentasse uma complexidade (ou multifractalidade) superior à do PLD devido à eliminação dos limites para o cálculo do preço, sendo comprovada para os submercados Sudeste e Sul, através dos diversos gráficos que mostravam o comportamento do coeficiente de Hurst generalizado, coeficientes de escala e espectro multifractal. Supõe-se que a densidade de probabilidade ampla seja mais representativa para a multifractalidade dos submercados, equiparando-se ou até mesmo superando a multifractalidade devido às correlações de longo prazo. Porém, os submercados apresentaram aumento da multifractalidade quando comparou-se o PLD e o CMO. O aumento para o submercado Nordeste foi devido a uma maior complexidade dos segmentos com grandes flutuações ($q > 0$), sendo que os segmentos com pequenas flutuações praticamente não apresentaram mudanças na estrutura multifractal. Já o submercado Norte, a maior multifractalidade foi devido a maior complexidades dos segmentos com pequenas flutuações ($q < 0$) indicando um maior impacto do limite inferior. Para os segmentos com grandes flutuações, o submercado Norte não apresentou grandes mudanças em seu comportamento multifractal.

Em busca de correlações cruzadas que pudessem elucidar a multifractalidade do PLD, as séries de log-retorno do PLD semanal e as séries de variação logarítmica da ENA semanal foram analisadas para cada submercado usando o MFDCCA. A correlação cruzada entre as séries temporais pode ser caracterizada como multifractal, adicionando complexidades e não-linearidades à relação entre ENA e PLD. O teste estatístico de Podobnik [22] revelou a significância da correlação cruzada entre ENA e PLD para os submercados Sudeste e Nordeste durante a maior parte do período analisado. No entanto, os submercados Sul e Norte estavam no limiar do intervalo de confiança de 5%, concluindo pela não significância da correlação cruzada entre ENA e PLD. A operação do sistema hidrotérmico brasileiro forneceu argumentos para explicar as conclusões baseadas no teste estatístico. A grande variabilidade da ENA no submercado Sul, combinada com a forte conexão com o Sudeste, pode ter influenciado o resultado do teste. A interligação com o Sudeste, um mercado mais amplo em termos de carga, resulta na igualdade dos preços do Sul e do Sudeste na maior parte do tempo. Ao analisar os dados do PLD semanal, identificou-se que em 73% das ocasiões, os preços do Sudeste e do Sul são iguais, afetando a correlação cruzada entre PLD e ENA, como confirmado pelo teste. Por outro lado, o submercado Norte, sendo um exportador de eletricidade (demanda < oferta), segue, na maioria das vezes, os preços do Sudeste ou do Nordeste, modificando a dinâmica da

relação entre ENA e PLD.

Outras variáveis foram consideradas na análise da multifractalidade da correlação cruzada com o PLD. Similarmente à ENA, a energia armazenada (EAR) mostrou maior significância para os submercados Sudeste e Nordeste em comparação aos submercados Sul e Norte. O teste não rejeitou a correlação cruzada entre EAR e PLD para o Sudeste e Nordeste, mas rejeitou para os submercados Sul e Norte. Argumentos semelhantes aos apresentados para a ENA podem ser empregados para justificar a rejeição da correlação cruzada entre EAR e PLD no Norte e Sul.

Quanto à carga, a correlação cruzada com o PLD foi rejeitada durante todo o período avaliado para todos os submercados. No entanto, ao analisar o mesmo conjunto de dados em escala horária, foram observadas correlações significativas em escalas menores que 1 ano para os submercados Sudeste, Sul e Nordeste. O submercado Norte, contudo, manteve a rejeição do teste ao longo de todo o intervalo.

Seguem algumas sugestões de trabalhos futuros:

1. Análise da multifractalidade usando metodologias baseadas em Wavelets Líderes, que possuem como principais características a independência em relação a regimes cíclicos ou sazonais, e a possibilidade de verificar a significância dos resultados através de intervalos de confiança obtidos por técnicas como o *bootstrap*. Com isso, pode-se confrontar os resultados obtidos neste estudo com os resultados dessas análises.
2. Exploração de técnicas mais sofisticadas para remoção da tendência local em cada segmento, em comparação à remoção polinomial de ordem m .
3. Investigação de outros algoritmos de decomposição de séries temporais, além do STL e MSTL, visando eliminar ao máximo os *crossovers* decorrentes de tendências sazonais não removidas. Algoritmos de detecção de pontos de mudança têm possibilitado a decomposição automática de séries temporais sem a necessidade de indicar as periodicidades. No entanto, muitos ainda não são adequados para grandes volumes de dados, sendo mais indicados para escalas diárias, semanais ou mensais.
4. Algoritmos baseados em funções de flutuação podem ser utilizados como validadores de algoritmos de decomposição de séries temporais, principalmente as tendências cíclicas que apresentam *crossovers* em escalas próximas à periodicidade não removida.
5. Aplicação do MFDCCA e os testes de significância em outras variáveis que, embora externas ao setor elétrico, impactam na formação de preços. Exemplos incluem indicadores econômicos, índices climáticos como ENSO, precipitação, temperatura, velocidade do vento, entre outros.
6. Emprego conjunto do MFDCCA com testes de causalidade, como o Granger Causality Test ou Entropia de Transferência.

7. Avaliação da eficácia de métodos como Empirical Mode Decomposition (EMD) e Maximum Overlap Wavelet Transform (MODWT) no tratamento de tendências e sazonalidades complexas.
8. Uso de algoritmos como Asymmetric MF DFA e Asymmetric MF DCCA para analisar correlações assimétricas e correlações cruzadas assimétricas no mercado brasileiro de eletricidade.
9. Mudanças regulatórias futuras que impactem o CMO/PLD podem ser analisadas e, se detectadas através do método de janelas deslizantes, ajudam a mensurar o risco regulatório por meio das variações nos indicadores que medem a multifractalidade do processo subjacente.

A análise multifractal tem sido aplicada nos mercados de eletricidade para elucidar as complexidades e não-linearidades dos processos estocásticos subjacentes, utilizando o espectro multifractal e a análise temporal de indicadores, como a intensidade da multifractalidade, por meio de janelas deslizantes. Muitas pesquisas visam destacar o grau de multifractalidade do mercado, o comportamento das correlações de longo e curto prazos para identificar padrões persistentes e anti-persistentes, o reconhecimento de impactos extremos por meio da análise dinâmica, e as distintas fontes de multifractalidade que influenciam o processo estocástico subjacente. Entretanto, nos últimos anos, a análise multifractal vem sendo adotada em processos preditivos como uma ferramenta importante para engenharia de atributos (*features engineering*) ou como validador de séries temporais sintéticas geradas por modelos de aprendizado profundo, como Redes Neurais Adversariais Generativas (*Generative Adversarial Networks* - GANs), e Redes Neurais Probabilísticas.

Nesta Tese, foi explorada a aplicação da teoria da multifractalidade no processo de validação de séries temporais sintéticas produzidas por modelos de previsão, abordando uma lacuna na literatura acadêmica, devido à ausência de um método consolidado de validação para tais séries. O método proposto utilizou a distância de Hausdorff para comparar os espectros multifractais das séries sintéticas, obtidos através da aplicação do MF DFA, com o espectro multifractal da série histórica. Essa estratégia permitiu determinar quais séries sintéticas apresentam propriedades multifractais similares à série observada, possibilitando a melhoria dos resultados modelos de previsão.

A utilização da métrica de Distância de Hausdorff para avaliar a similaridade entre os espectros multifractais revelou-se eficaz. Ao aplicar este método aos espectros de 500 séries sintéticas de vazão para três usinas distintas, bem como ao espectro da série histórica, foi possível estabelecer um critério de similaridade robusto. A definição do percentil de 90% como limiar para a similaridade permitiu a exclusão das séries que não se alinhavam com o padrão multifractal histórico, resultando em melhorias do RMSE para os conjuntos selecionados. Esse aprimoramento do RMSE demonstra a eficácia do método proposto na filtragem de séries

sintéticas, garantindo que apenas as mais representativas da complexidade multifractal das séries históricas sejam consideradas.

Como este foi o primeiro trabalho a avaliar as propriedades multifractais das séries horárias e semanais de CMO, PLD, ENA e Carga, além de suas correlações cruzadas multifractais, existem uma grande possibilidade de temas a serem explorados, que não foi possível nesta tese. A seguir, alguns destes trabalhos são enumerados:

Seguem algumas indicações de trabalhos futuros sobre validação de modelos de séries sintéticas de energia:

1. Utilização de indicadores como a largura do espectro multifractal como validador de séries sintéticas geradas por modelos estatísticos tradicionais, como, por exemplo, o PAR(p).
2. Adoção de indicadores como a largura do espectro multifractal para validar séries sintéticas geradas por modelos de aprendizado profundo.
3. Implementação de indicadores, seja em formato estático ou dinâmico, como *features* para modelos de previsão baseados em aprendizado de máquina ou aprendizado profundo.
4. Uso de outras métricas de distância para validação de séries sintéticas de energia.
5. Uso de outros modelos de previsão de forma a avaliar a universalidade do algoritmo proposto.

A Artigo Publicado

A.1 Abstract

No mercado de eletricidade atacadista do Brasil, os preços dos contratos de longo prazo são negociados entre geradoras de energia e grandes consumidores. Diferentemente dos mercados tradicionais, a precificação não é impulsionada por forças de mercado, mas determinada por modelos computacionais complexos denominados Modelos de Otimização de Despacho Hidrotérmico. Esses modelos calculam o Preço de Liquidação das Diferenças (PLD), que serve como preço de mercado de curto prazo para a eletricidade. O mercado brasileiro é dividido em quatro submercados interconectados: Sudeste, Nordeste, Norte e Sul. Este estudo preenche uma lacuna existente na pesquisa ao examinar a multifractalidade desses submercados, aplicando a Análise de Flutuação Multifractal Detrendida em uma série temporal de retorno de preço dessazonalizado. Especificamente, visa caracterizar os recursos multifractais dos preços da eletricidade, identificar as causas subjacentes dessa multifractalidade e avaliar índices de eficiência de mercado ao longo do tempo. Nossa análise dos preços históricos da eletricidade revelou que todos os submercados demonstraram comportamento anti-persistente, também conhecido como reversão à média, e multifractalidade. Esta descoberta está em consonância com observações semelhantes em mercados globais. O submercado Sul exibiu o maior nível de multifractalidade e a menor eficiência de mercado. Em contrapartida, o submercado Norte apresentou a multifractalidade mais baixa e a eficiência mais alta. Através da análise de janela deslizante, investigamos variações temporais no expoente de Hurst e na Magnitude de Memória Longa, um índice para calcular a ineficiência do mercado. Encontramos comportamento anti-persistente consistente em todos os submercados, com o submercado Sul mostrando maior volatilidade em seu índice de ineficiência. Embora preliminares e necessitando de análises mais aprofundadas e consideração de outros fatores, essas descobertas oferecem informações valiosas para tomadores de decisão e reguladores em busca de novos arranjos de mercado para aumentar a eficiência.

A.2 Artigo

Received 20 July 2023, accepted 29 August 2023, date of publication 7 September 2023, date of current version 15 September 2023.

Digital Object Identifier 10.1109/ACCESS.2023.3313099

APPLIED RESEARCH

Multifractal Analysis of the Brazilian Electricity Market

ALESSANDRO L. CASTRO¹, ANDRÉ LUÍS MARQUES MARCATO¹, (Senior Member, IEEE),
AND EDUARDO P. DE AGUIAR²

¹Electrical Engineering Department, Federal University of Juiz de Fora, Juiz de Fora 36036-900, Brazil

²Industrial and Mechanical Engineering Department, Federal University of Juiz de Fora, Juiz de Fora 36036-900, Brazil

Corresponding author: Alessandro L. Castro (alessandro.castro@engenharia.ufjf.br)

This research was supported in part by the Foundation for Research Support of the State of Minas Gerais (FAPEMIG), grant number TEC-PPM-00179/17, Brazilian Federal Agency for Support and Evaluation of Graduate Education (CAPES), National Council for Scientific and Technological Development (CNPq), Energy National Institute of Science and Technology (INERGE) and Federal University of Juiz de Fora (UFJF).

ABSTRACT In Brazil's wholesale electricity market, long-term contract prices are negotiated between power generators and large consumers. Unlike traditional markets, pricing is not driven by market forces but rather determined by complex computational models known as Hydrothermal Dispatch Optimization Models. These models calculate the Difference Settlement Price (DSP), serving as the short-term market price for electricity. The Brazilian market is divided into four interconnected submarkets: the Southeast, Northeast, North, and South. This study fills an existing research gap by examining the multifractality of these submarkets by applying Multifractal Detrended Fluctuation Analysis over a deseasonalized price return time series. Specifically, it aims to characterize the multifractal features of electricity prices, identify the underlying causes of this multifractality, and assess market efficiency indices over time. Our analysis of historical electricity prices revealed that all submarkets demonstrated anti-persistent behavior—also known as mean-reversion—and multifractality. This finding aligns with similar observations in global markets. The South submarket displayed the highest level of multifractality and the lowest market efficiency. Conversely, the North submarket had the lowest multifractality and the highest efficiency. Through sliding-window analysis, we investigated temporal variations in the Hurst exponent and Long Memory Magnitude, an index to compute market inefficiency. We found consistent anti-persistent behavior across all submarkets, with the South submarket showing greater volatility in its inefficiency index. While preliminary and requiring further in-depth analysis and consideration of other factors, these findings offer valuable insights for decision-makers and regulators pursuing new market arrangements to boost efficiency.

INDEX TERMS Brazilian electricity market, multifractal detrended fluctuation analysis, generalized hurst exponent, anti-persistence, singularity spectrum, market efficiency.

I. INTRODUCTION

The Brazilian electricity market consists of two commercial environments: (i) the regulated contracting environment (RCE) and the free contracting environment (FCE). In the RCE, distributors purchase electricity through public auctions to meet the demands of their captive consumers. Long-term contracts and fixed price structures govern this process.

The associate editor coordinating the review of this manuscript and approving it for publication was Chenghong Gu¹.

On the other hand, the FCE allows producers and large consumers to negotiate the terms of their supply contracts, where prices are influenced by factors such as supply and demand, cost of production, and risk evaluation [1]. The Chamber of Electric Energy Trading (CCEE in Portuguese) conducts a monthly settlement of agents' transactions in the short-term market (or spot market). It calculates the difference between what has been produced or consumed and what was initially contracted. These differences, or imbalances, are reconciled at the Difference Settlement Price (DSP). The DSP

is an integral adjustment mechanism, ensuring equilibrium between supply and demand. Its dynamic nature provides invaluable insights into the efficiency and operational dynamics of the Brazilian electricity market, positioning it as a critical element in market analysis [2].

For over 20 years, the DSP was established every week by sophisticated computational models that considered technical information provided by the National Electric System Operator (ONS). Unlike other majority countries, Brazil's model is a *tight-pool* type, where the DSP is determined by the Operational Marginal Cost (OMC) without requiring generator bids. The OMC is calculated from a complex chain of hydrothermal dispatch optimization models, which aim to minimize the expected total operational cost while considering a series of constraints, as described by [3]. The DSP is calculated for each submarket (North, Northeast, South, and Southeast) and load level. The DSP is subject to a maximum and a minimum price, which the regulatory agency defines annually and applies to each settlement period. Since the DSP was calculated in advance (a week ahead), the models' input data are based on forecasts available before the system's real operation. These forecasts include values such as the declared generation availabilities and the anticipated demands for each submarket, detailed by [4] and [5].

In January 2021, Brazil officially implemented the hourly pricing system, calculated one day in advance (day-ahead) for every 24 hours of the following day. This significant transition was made possible by intense technical discussions between market entities and agents in 2017. The DESSEM model was chosen as the official model for calculating hydrothermal power plant dispatch, considering short-term network constraints for large-scale systems with very detailed hydroelectric, thermal, and network constraints, as outlined in [6]. From April 2018 to December 2020, a shadow operation was implemented to preview the potential impacts of the new hourly pricing system on the market. This significant trial period allowed the ONS, CCEE, and market agents to test the new model in real time. Furthermore, this phase enabled them to assess the impact on very short-term price formation and propose various adjustments to the calculation methodology.

Despite the progressive refinement of the pricing system in the Brazilian electricity sector, the link between price and the model chain continues to generate many discussions. In 2019, the Ministry of Mines and Energy (MME) established a Working Group to develop proposals for modernizing the Brazilian electricity sector. Among the various topics covered, the subgroup responsible for the "Price Formation Mechanisms" topic explored existing literature and international experiences to seek alternatives to the pricing model currently in effect in Brazil, as reported in [5]. However, implementing such a significant market change requires an in-depth understanding of the dynamics of spot electricity prices in Brazil.

Electricity price time series exhibit several stylized facts, including seasonality, mean reversion, price spikes, and multifractality. Seasonality in prices is an intrinsic statistical property in some markets, where the price may vary according to the hours of the day, days of the week, and seasons of the year (for example, higher prices in winter than in summer due to the use of energy resources for heating). Mean reversion or anti-persistence is a characteristic of spot prices in some countries, where upward (downward) movements are more likely to be followed by downward (upward) price movements. When upward and downward movements are more likely to be followed by the same type of movement, these series display persistence or long memory. The type of persistence in a time series can be characterized by the Hurst coefficient (H_2) that measures whether a series is random or does not display temporal correlation ($H_2 = 0.5$), anti-persistent ($0.0 < H_2 < 0.5$) or persistent ($0.5 < H_2 < 1.0$). Price spikes are one of the main features of spot electricity prices in various markets worldwide, characterized by a substantial increase and fall in price within a short period, [7]. Many studies connect price spikes to the fact that electricity is a non-storable commodity, implying more complex characteristics than other markets.

Multifractality in time series is recognized by a complex and heterogeneous distribution of self-similar behaviors, or fractals, manifested across various scales. This multifractal heterogeneity translates into various degrees of regularity and irregularity emerging in different segments of the same time series, reflecting the presence of multiple scaling exponents. Multifractal analysis has been used to decode the intricate scales' inherent complexities in unbalanced dynamic systems. Such systems span a wide range of domains, including, but not limited to, biological, geological, and hydrological fields, as well as various economic markets, such as financial markets, commodity markets, cryptocurrency markets, and electricity markets. In contrast to a monofractal analysis, multifractal analysis requires consideration of multiple scaling exponents to comprehensively capture the latent behaviors in a dynamic system, as revealed by its time series. In the literature, an excellent review of this methodology applied to financial and electricity markets can be found in [8].

Among the various methods used for multifractal analysis of time series, Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MFDFA) stands out, [9]. MFDFA is a sophisticated yet easy-to-implement statistical technique used to analyze the scaling behavior of non-stationary time series. The aim is to reveal and understand complex patterns typically hidden in these data sets. With this method, it is possible to calculate generalized Hurst exponents (Hq) and singularity spectrum, which reveal the series' multifractality. The existence of multiple Hurst exponents and a broader, asymmetrical shape of the singularity spectrum indicate that the time series is multifractal, showing an underlying complexity that includes multiple correlation regimes and intrinsic heterogeneity.

Numerous studies establish a significant correlation between multifractality and the efficient market theory. A higher degree of multifractality in market price returns indicates more significant inefficiency in that market. When evaluated through a sliding window technique, the indicators associated with market efficiency (or inefficiency) provide an effective means of quantifying the influence of external events on market efficiency. Such an approach allows for continuous monitoring of changes in market efficiency over time rather than a point analysis based on fixed periods, enabling a better understanding of the dynamic behavior of markets.

In our search in academic databases, such as Scopus and Web of Science, we did not identify studies investigating the multifractality of the electricity spot price in Brazil. This gap in the literature indicates that this particular aspect of the Brazilian market is yet to be adequately explored, creating a significant opportunity for future contributions in this study area.

Over the last 20 years, there has been a scarcity of studies focused on analyzing the behavior of the DSP. This gap in the literature can be partially justified by the reduced size of the weekly price series, which only surpassed the thousand value mark in 2021. The limited sample size can present a challenge, as depending on the type of analysis applied, small samples can lead to imprecise conclusions due to the insufficiency of statistical significance of the data. Therefore, it is essential to consider the limitations imposed by the sample size in interpreting the analysis results.

Therefore, in this work, we use MFDDFA to probe the complexity of the Brazilian electricity market, using return series on deseasonalized spot market prices. This study offers an innovative contribution to the literature on the efficiency of electricity markets by analyzing multifractality in a distinct context - a market in which prices are generated from mathematical models rather than being exclusively determined by traditional supply and demand forces. This paper proposes a differentiated look and provides relevant insights about price dynamics in a less conventional market formation scenario.

We organize the article as follows: in section II, we present a bibliographic review that encompasses (i) the electricity market in Brazil, (ii) works on spot price evaluation in Brazil, and (iii) multifractality in electricity markets. In section III, we show the spot electricity price by submarket, its descriptive statistics, and probability distributions. In section IV, we present the MFDDFA method. This section explains the algorithm and the necessary procedures and steps for its application. We discuss the two sources of multifractality: the presence of long-tail in the probability distribution of the time series values and the different long-range correlations of small and large fluctuations. We describe two widely used methods to identify these sources of multifractality. Moreover, we address the relationship between multifractality and efficient market theory, discussing how multifractal behaviors can impact market efficiency and the indexes used to measure it. In section V, we present the results of the

application of MFDDFA on the time series. We explain how to identify multifractality and its possible origins through various graphs. At the end of the section, we present a temporal evaluation of two indicators that help understand the evolution of multifractality over time. Finally, we present our conclusions in section VI.

II. BIBLIOGRAPHIC REVISION

A. BRAZILIAN ELECTRICITY MARKET

Electricity prices fundamentally depend on the balance between supply and demand, regardless of the model applied. High volatility of the spot price and price peaks are associated with the inability to store electricity and inelastic demand, as cited in [10] and [11]. However, the ongoing integration of intermittent renewable sources has increasingly affected the dynamics of price formation in the spot market over recent years. Alongside uncertainties about supply (hydrological variation and fuel prices) and demand (economic growth and temperature variation), intermittent plants have introduced new uncertainties tied to climatic factors such as wind direction, wind strength, and solar irradiance. Several studies, including [12], [13], [14], indicate that these sources lead to a reduction in prices in the spot market due to their near-zero or zero marginal cost. These studies also note an increase in spot market volatility, as we will observe low spot prices more frequently when renewable resources are abundant. However, price peaks will occur when these resources become scarce.

In Brazil, the federal government has been encouraging the implementation of intermittent plants (wind and solar) since the beginning of the 2010s, reducing the prominence of hydroelectricity. Hydroelectric power represented over 90% of the installed capacity in 2001 and currently accounts for less than 70%, according to [15]. Like other countries, the increase in energy production from intermittent sources has led to increased uncertainties in the operation of the electrical system and price formation in the market, as discussed in [16].

The formation of electricity prices in the market is linked to the system's operation coordinated by the National Electric System Operator (ONS). The Electric Energy Trading Chamber (CCEE) is responsible for calculating the spot price, known as the DSP, using the same mathematical models the operator uses for optimizing hydrothermal dispatch, as explained in [3]. A series of models use dynamic programming to optimize hydrothermal dispatch in the medium term (up to five years), short term (up to two months), and very short term (up to seven days).

Since Brazil's electric sector relies predominantly on hydroelectric power, the flows and stored volumes in the power plants' reservoirs play an essential role in the system's stochasticity. The medium and short-term models calculate the future value of water, indicating the intrinsic cost of water for the system's operation. Future periods more likely to lack this resource have higher future water values, consequently making the system operation more costly due to the dispatch of thermal power plants with high unit variable costs. On the

other hand, when there is an abundant water supply in the future, the future water value will be lower, reducing thermal dispatch and the Marginal Operation Cost (MOC).

The future value of water is passed along the chain of models, from long/medium-term to short and very short-term, ensuring that models with less stochasticity (short term) or deterministic (very short term) consider this uncertainty source. After the problem converges, the MOC is given by the Lagrange multiplier associated with demand constraints, according to [3], [6], and [17]. The DSP value for each submarket equals the MOC, limited by a maximum and minimum price defined by the regulator and valid for each verification period. Thus, the spot price in Brazil does not form through a competitive process between supply and demand but is calculated through the complex chain of mathematical models previously explained. For about 20 years (from 2001 to December 2020), the DSP was calculated every week per submarket (Southeast, South, Northeast, and North) and per load level (representing light, medium, and heavy loads), as discussed in [18] and [19]. The price began to be calculated one day ahead for the next 24 hours on January 01, 2021, as shown in [6], [20], and [21].

B. BRAZILIAN ELECTRICITY SPOT PRICES

The behavior and main stylized facts characterizing the DSP have been relatively unexplored over the past 20 years. Queiroz et al. [22] proposed a neural network model to simulate monthly spot electricity prices in Brazil. According to the authors, this model could replace the official model (optimizing hydrothermal dispatch using stochastic dual dynamic programming) with advantages in terms of computational effort without yielding deviations that would compromise risk analysis algorithms.

Oliveira et al. [23] introduced a methodology to estimate the prices of options contracts for electricity markets in Brazil. As per the authors, a significant theoretical contribution made in the work was demonstrating that a mean-reversion stochastic process (Ornstein–Uhlenbeck Vasicek) accurately represents the spot price in Brazil when compared to geometric Brownian models.

Gontijo et al. [24] used Dynamic Time Scan Forecasting (DTSF) for predicting spot electricity prices in Brazil, a methodology initially formulated for predicting wind and power generation in industrial plants. The method involves scanning a time series and identifying past patterns (called “matches”) similar to the latest available observations. Future values are predicted from the most similar matches using aggregation functions such as the median. The authors compared the results obtained with DTSF to eight other methodologies from the M4-Competition. According to them, DTSF surpassed all other methodologies in performance except when dividing the price series into seasons.

Daglish et al. [25] analyzed the impact of the 2004 electricity sector reform on the volatility of spot electricity prices in Brazil. They fit a Markov Switching model to the monthly

price time series sampled from January 2000 to October 2016. The authors considered the Markov Switching ideal to model spot prices in Brazil because the prices behave in two distinct volatility regimes.

Lauro et al. [26] proposed a methodology for simulating the decision-making process for energy contracting from a hydroelectric power plant, considering uncertainties about the spot price, forward contract prices, and generation scaling factor. The authors considered the monthly prices and two-stage stochastic dynamic programming to model the uncertainty in forward prices.

With the initiation of hourly price publication in 2021, new research on the price of electricity in the Brazilian market has emerged. Marchetti and Rego [20] demonstrated the impact of adopting the new price formation methodology (weekly to hourly) on the fair value of a generic wind and solar plant. According to the authors, the adoption of hourly prices negatively impacted the fair value of a wind farm. Some projects showed a depreciation of about 9% of the total value of the enterprise due to the trading of contracts with flat seasonality and modulation. Solar plants experienced positive impacts in the Southeast but without significant impacts in the Northeast. Nametala et al. [21] used the hourly prices for the year 2021 (arithmetic mean of all submarkets) and investigated statistical aspects of the time series, such as regime-switching characterization and the sources of price spike formations. In addition, they investigated the price relationship with exogenous variables and finally compared electricity markets from other countries. Gontijo et al. [27] applied DTSF for hourly price forecasting in Brazil. They considered hourly prices from 2019, taking into account the testing period until the end of 2021. The DTSF methodology had already been applied in the other paper by the same authors for the forecasting of weekly electricity prices in Brazil, [24]. DTSF showed better predictive performance and less variability when compared to statistical models and machine learning.

C. FRACTAL AND MULTIFRACTAL BEHAVIOR OF ELECTRICITY MARKETS

Fractal and multifractal systems can be found across various fields, including physics, geology, hydrology, biology, social sciences, psychology, economics, and computer science. Fractals are geometric structures that exhibit self-similarity, meaning their complex structure repeats across all scales. People often describe this character as a fractal dimension, which can be considered a measure of the fractal’s roughness or complexity [28].

Though we can apply these concepts to objects and images, in this study, we are particularly interested in observing fractal and multifractal behaviors in time series. A time series’ self-similarity can manifest through the power law describing the relationship between the series’ fluctuations at different time scales. This means that a single scaling exponent, which measures the time series’ roughness, irregularity,

or complexity, links the variance or other series statistics measured at various time scales by a power law. Mandelbrot, besides introducing the concept of fractal geometry, also published the pioneer studies applying fractal analysis to time series, as presented in [29] and [30].

The concept of multifractality emerged when the French mathematician was studying turbulence and noticed that a single scaling exponent could not adequately describe this phenomenon, as is typical of regular fractal objects. Instead, he observed that turbulence displayed a distribution of fractal dimensions across a range of scales, as noted in [31]. Multifractal time series show different autocorrelations of large fluctuations from the autocorrelation of small fluctuations, requiring more than one scaling exponent to describe their behavior fully.

Complex systems like the electricity market can be described by analyzing price, return, or volatility time series that present stylized facts such as seasonality, long memory, price spikes, and multifractality. Using the Rescaled Range (R/S) method, Weron and Przybyłowicz [32] assessed the daily return series of the electricity markets in California and Switzerland. They calculated the Hurst coefficients for both markets and concluded that both exhibit mean reversion. The Hurst coefficient of CalPX ($H_2 = 0.4193$) is lower than that of the Swiss market ($H_2 = 0.4391$), leading Weron and Przybyłowicz to conclude that the former has more pronounced anti-persistence compared to the latter. In addition, they confirmed a conclusion from another paper [11], where they modeled the spot electricity price return in California (CalPX) as a mean reversion process.

Simonsen [33] applied the Average Wavelet Coefficient (AWC) method to data from the Nordic Spot Electricity Market from 1992 to 2000, concluding that hourly spot prices approximate an anti-persistent (mean-reverting) process, characterized by a Hurst coefficient of 0.41. The presence of crossover near the 1-day scale indicates multiple scaling exponents, leading the author to consider evaluating the Nordic market using methods that allow for estimating multiple exponents (multifractality), such as the continuous wavelet transform. The price exhibits a persistent process for scales less than one day, with $H_2 > 0.5$, and anti-persistence appears for scales larger than one day.

Norouzzadeh et al. [34] analyzed the return on the hourly price of the Spanish electricity market using Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MFDFA), obtaining a Hurst coefficient $H = 0.16 \pm 0.01$, indicating strong anti-persistence.

Serletis and Bianchi [35] used the Detrended Moving Average (DMA) method to analyze the informational efficiency of the Alberta electricity market and check whether power exchange transactions (energy flows between markets) are becoming increasingly significant in electricity markets. The results showed that the Alberta electricity market is highly inefficient (anti-persistent), and cross-border electricity trade between Alberta and neighboring jurisdictions

helps predict price dynamics in the Alberta electricity market.

Erzgräber et al. [36] analyzed system prices in the Nordic market using different techniques to estimate the Hurst exponent. They concluded that the observed variation in Hurst exponents could be considered a signal of multifractality in electricity prices.

Uritskaya and Serletis [37] applied the DFA method at different scales to confirm the presence of multiple Hurst coefficients (multifractality) in the daily electricity prices in the Alberta (Canada) and Mid-Columbia (United States) markets, as well as in the Alberta natural gas market. Using the DFA results for the three markets, Uritskaya et al. analyzed market efficiency, considering those that exhibited long memory, $H_2 = 0.5$ (fGn) and $H_2 = 1.5$ (fBm), to be less efficient. They confirmed the anti-persistence and consequent inefficiency of the Alberta and Mid-Columbia markets, with $H_2(\text{Alberta}) = 1.22 \pm 0.01$ and $H_2(\text{Mid} - \text{C}) = 1.32 \pm 0.05$.

Malo [38] proposed modeling the dynamics of Nordpool's spot and future prices using Copula-MSM (Markov Switching Multifractal). Although the proposal of this article is outside our objective, Malo did analyze the scale exponents (Hurst exponent) of the Nord Pool's daily closing prices for spot contracts between March 1998 and January 2006. He used several methods to calculate the exponent, and the average value found was $H = 0.32$.

Serinaldi [39] conducted a study on the precautions to take when applying the methodology for calculating the Hurst coefficient, especially concerning the signal nature: fBm (Fractional Brownian Motion) or fGn (Fractional Gaussian Noise). In addition to financial series, Serinaldi used price series from four electricity markets: daily average price for Alberta (persistent, $H_2 > 0.5$) and Mid-Columbia (anti-persistent, $H_2 < 0.5$), hourly prices for Alberta (persistent, $H_2 > 0.5$), hourly prices for Ontario (persistent, $H_2 > 0.8$), and hourly prices for the Italian market (persistent, $H > 0.5$).

Qian et al. [40] proposed a modification to the MFDFA algorithm, replacing the process of removing local trends using a degree m polynomial with Empirical Mode Decomposition (EMD). To prove its effectiveness, they applied the proposed method to the Shanghai Stock Exchange Composite index, with a frequency of 1 minute, and to the daily prices of the Australian Electricity Market, confirming anti-persistence.

Rypdal and Løvstletten [41] introduced two mean-reversion models based on the multifractal random walk (MRW). The first model describes the anti-persistence of Norway's (Nordpool) spot electricity prices through exponential decay of correlations (damped MRW), while the second model describes the decay of correlations by power law (fractional MRW). The data set consisted of the hourly spot price measured in Norwegian Kroner (NOK) from May 4, 1992, to August 27, 2011. The authors presented maximum likelihood methods for estimating the parameters of these models. They

concluded that the damped MRW model is more suitable for forecasting spot prices than the fractional MRW model. However, the multifractal models more effectively exploit memory effects in volatility for future price prediction.

Liu et al. [42] investigated the feasibility of applying multifractal theory to analyze electricity price fluctuations. They used hourly price series from the Pennsylvania-New Jersey-Maryland (PJM) electricity market to demonstrate the effectiveness of the proposed VaR estimation method for assessing short-term electricity price volatility risk.

Ghosh et al. [43] analyzed the multifractal behavior of energy bid prices in five different areas of India, sampled at 15-minute intervals, using the MFDFA method. The analysis was done monthly from April 2012 to March 2014, confirming the multifractality of prices estimated by the width of the singularity spectrum, $\Delta\alpha$. The multifractal analysis used prices, not returns.

Ali et al. [44] investigated and compared the overall multifractality, time-varying, and efficiency of four electric regions in the United States. They applied the MFDFA method to the daily logarithmic return of electricity prices from the MASS Hub, Mid-C, Palo Verde, and PJM West markets, sampled from 2001 to 2021. The efficiency of the markets was estimated using the MLM (Magnitude of Long Memory) index, also known as MDM (Market Deficiency Measure). As a result, they showed that all markets exhibited anti-persistence ($H(q = 2) < 0.5$) and multifractal behavior estimated through the strength of multifractality Δh , with PJM West showing the highest strength and Mass Hub the lowest. MLM confirms PJM West as the least efficient market and Mass Hub as the most efficient. They used sliding window analysis over H_2 , ΔH , and MLM. All markets maintained anti-persistence behavior overall period.

Han et al. [45] analyzed the time series of electricity prices in Germany and Austria indexed on the European market (EPEX), focusing specifically on day-ahead hourly, intraday hourly, and intraday 15-minute market prices. They used MFDFA to confirm strong anti-persistence in the price series for time scales larger than 12 hours ($H_2 \sim 0.16$). For time scales shorter than 12 hours, both intraday hourly and day-ahead hourly prices showed persistence, with $H_2 \sim 0.63$ and $H_2 \sim 0.61$, respectively. In contrast, the 15-minute intraday prices remained anti-persistent with $H_2 \sim 0.31$. The strength of multifractality, calculated through $\Delta\alpha$, was more intense for the smallest time scales in all price series. Finally, they found that long-term behavior is strongly influenced by the evolution of large-scale weather patterns, with a typical time scale of four days.

Cramer et al. [46] suggested using multifractal analysis (MFDFA) as an additional validation method for more complex features in scenarios generated by generative models. Synthetic series produced by Generative Adversarial Networks (GANs), Wasserstein GANs (WGANs), and Variational Autoencoders (VAEs) trained with time series of generation from photovoltaic and wind power plants in Germany (between 2013 and 2015), and intraday electricity price time

series from the European Energy Market (between 2017 and 2019) underwent various types of validation, including multifractal features such as the width of the singularity spectrum.

Čuperk [47] explored the maturity of the Czech intraday electricity market during the COVID-19 pandemic, using multifractal analysis (MFDFA) on intraday hourly average prices and the Magnitude of Long Memory (MLM) index. They observed a nonlinear relationship between the Czech government's COVID-19 policy and the Hurst exponent at long time scales, the width of the singularity spectrum, and the MLM index at short time scales, indicating that flexible anti-COVID policies are associated with a more mature market and vice versa.

III. DATA

This article uses the weekly spot prices of the four submarkets: Southeast, South, Northeast, and North. Data are available on the CCEE website [48], as of June 30, 2001. Until 2021, the price was calculated based on the Marginal Cost generated by DECOMP and measured in BRL/MWh. As of January 1, 2021, with the publication of hourly prices calculated using the DESSEM model, [6] the weekly price is the arithmetic mean of the hourly price values throughout the operating week, which begins on Saturday and ends on the following Friday. Electricity purchase and sale transactions in the Brazilian market are settled monthly, hence the need to maintain weekly and monthly price calculations.

The analyses carried out a historical series of average weekly prices per submarket, covering the period from June 30, 2001, to the last operational week of 2022, which covered the period from December 24 to 30, 2022. The graphs (A1), (B1), (C1), and (D1) of Figure 1 present the behaviors of these series.

In Brazil, excess production capacity and low demand influence the price of electricity, characterizing it by long periods of low prices. A good example is the period that started in 2002 and lasted about five years, resulting from a 20% decreased demand during the energy rationing. The need for consumers to adapt to this reduction led many to invest in more efficient processes, influencing the post-rationing demand recovery.

In 2008, there was an imbalance between supply and demand due to problems related to the availability of natural gas, which resulted in a new escalation of prices, reaching its peak in January of that year. A new period of an unfavorable hydrological regime began in 2013, and prices gradually escalated, reaching their maximum value in 2014, about R\$ 800.00/MWh.

In January 2015, political and regulatory interference led to an artificial price reduction due to the regulatory agency's implementation of a new ceiling price calculation method. Between 2015 and 2021, the price exhibited high volatility due to hydrological issues. From November 2020 to April 2021, the country faced the worst drought since flow data began to be recorded (1931), affecting the regions with large hydroelectric plant reservoirs. As a result, prices remained

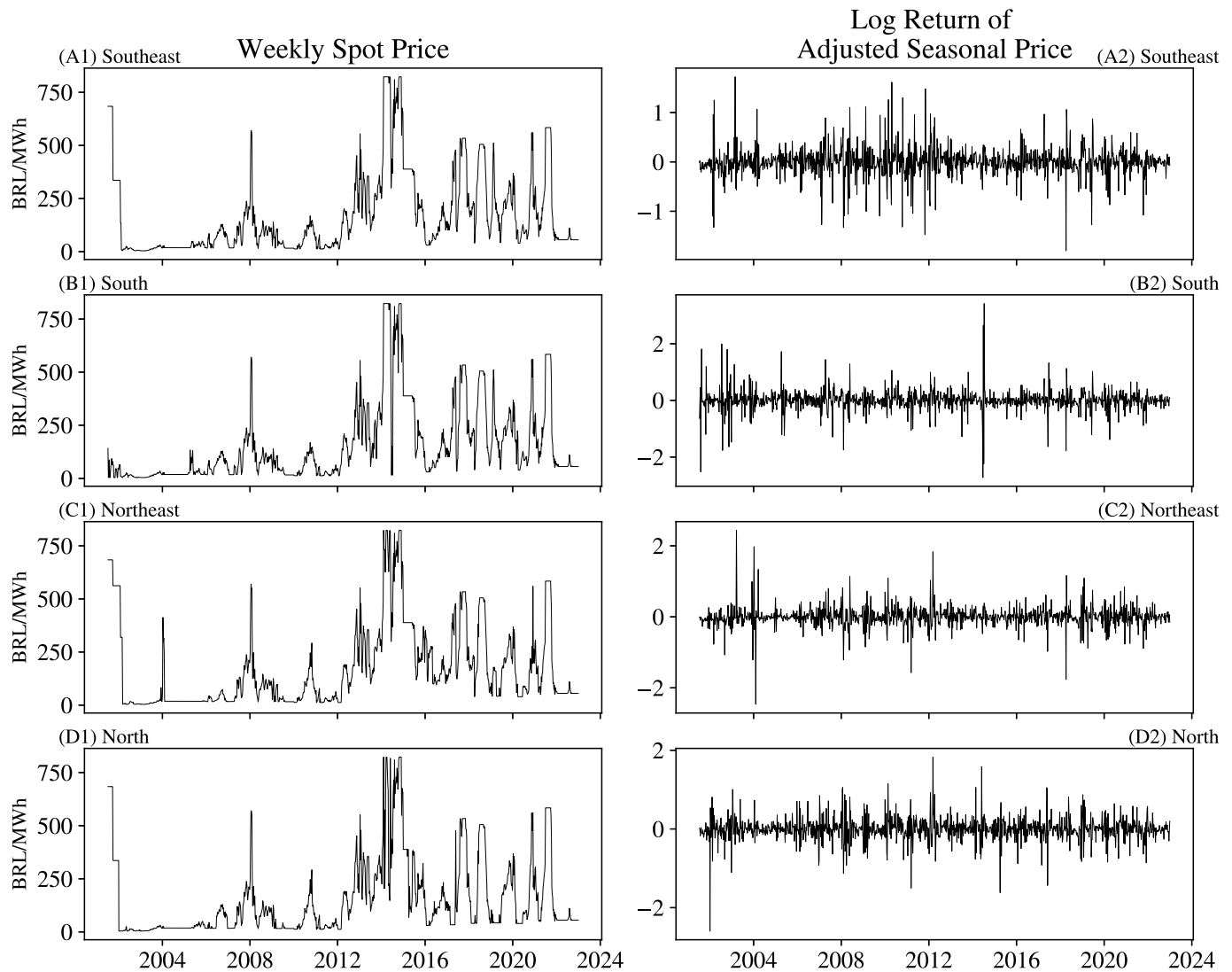


FIGURE 1. Historical time series of weekly difference settlement price and log return of adjusted seasonal price.

high for an extended period until the 2021/2022 rainy season, when there was a significant increase in the amount of energy stored in the reservoirs. Additionally, the market was still recovering from the impact of the COVID-19 pandemic. These combined factors led to a drastic price reduction, reaching their lowest value in 2022 and remaining at that level.

Table 1 presents the descriptive statistics of the weekly price series. Each series consists of 1127 values, covering more than 20 years of operation in Brazil’s electricity market. When analyzing the probability distribution density function of the four submarkets, we can observe a positive asymmetry, which is visually evidenced in the histograms of Figure 2 and also confirmed by the relation $Mode < Median < Mean$ in Table 1. Approximately 60% to 70% of the sample values are below BRL 150/MWh, while the rest of the sample is distributed in a price range that varies from 150 to 822.30 BRL/MWh, as shown in Table 2 of the percentiles of weekly prices.

We used the formulation that computes their strengths to analyze the unobserved trend and seasonality components, as described in Hyndman and Athanasopoulos [49]. The decomposition was applied to the logarithm of the prices employing the Seasonal-Trend Decomposition using LOESS (STL) approach, as described in Cleveland et al. [50] and implemented in Seabold and Perktold [51]. STL and other time series decomposition methods are described in detail in a recent survey article, [52]. We considered the annual seasonality, which has a period of 54 weeks, in order to capture the seasonal patterns in the data. Decomposition into trend and seasonality is a powerful tool for describing and understanding the behavior of energy prices over time. We can isolate the seasonal effect of prices and analyze the behavior of the underlying trend more clearly, contributing to a better understanding of the factors affecting energy prices.

The strength of seasonality and trend are presented in Table 1 in the “Season” and “Trend” lines, respectively.

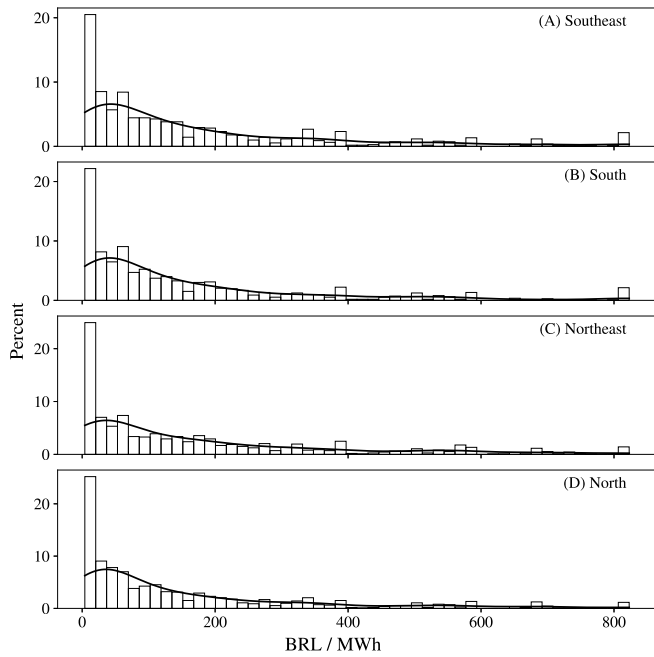


FIGURE 2. Histogram of weekly spot price by submarket.

TABLE 1. Descriptive statistics of weekly electricity price time series for each submarket (Prices are measured in BRL/MWh).

Statistics	Hourly Price			
	Southeast	South	Northeast	North
Minimum	4.00	4.00	4.00	4.00
Moda	18.59	18.59	18.59	18.59
Median	95.54	83.69	95.85	74.19
Mean	169.25	155.38	171.70	150.51
Maximum	822.83	822.83	822.83	822.83
Std. Dev.	191.95	183.19	194.82	182.39
Skewness	1.66	1.84	1.51	1.77
Kurtosis	2.25	3.11	1.57	2.60
Season	0.1349	0.1551	0.2239	0.4534
Trend	0.7636	0.7675	0.7722	0.7904
Count	1127	1127	1127	1127

We observed a significantly higher trend strength than seasonality, suggesting long-term factors may substantially influence prices. These factors may include structural changes in energy supply and demand, energy policies, or macroeconomic aspects. However, seasonality underscores the importance of seasonal patterns in energy prices.

We obtain the return series r_{t+1} by applying the logarithmic difference to the prices after removing the seasonal component, as described in equation (1). The graphs (A2), (B2), (C2), and (D2) in Figure 1 illustrate the variations of the returns for each submarket. Throughout the article, we will use the term “return” or “return series” to refer to this measure.

$$r_{t+1} = \log p_{t+1} - \log p_t \quad (1)$$

IV. METHODOLOGY

One of the goals of this article is to contribute to discussions about electricity pricing in Brazil through the analysis of

TABLE 2. Percentiles of weekly price time series for each submarket (BRL/MWh).

Percentil	Southeast	South	Northeast	North
10%	16.310	16.216	16.310	15.558
20%	18.846	18.590	18.590	18.330
30%	38.250	35.808	30.374	30.062
40%	59.016	55.700	55.700	43.100
50%	95.540	83.690	95.850	74.190
60%	134.760	120.890	145.272	111.836
70%	191.848	176.912	199.786	170.596
80%	301.248	247.066	307.782	254.738
90%	472.510	405.454	505.180	393.592
100%	822.830	822.830	822.830	822.830

spot prices from a perspective that has yet to be approached: multifractality. The multifractal analysis of historical price return series allows for the verification of self-similarity of the underlying stochastic process; that is, it allows for analyzing the behavior of the series at different scales. In this article, we investigate the multifractal properties in the time series of deseasonalized weekly spot price returns in each submarket. In addition, the relationship between multifractality and market efficiency will be studied temporally, showing even the impact of adopting hourly prices from 2021.

Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MFDFA) is an advanced statistical technique used to analyze the scaling behavior of non-stationary time series. This approach aims to reveal and understand complex patterns, such as multifractality, which are usually hidden in these datasets. Developed by Kantelhardt et al. [9] as a generalization of the Detrended Fluctuation Analysis proposed by Peng et al. [53], MFDFA calculates the generalized Hurst exponent $H(q)$ and the Rényi exponent $\tau(q)$ for different moments q . These exponents capture the statistical properties of fluctuations at different scales, allowing for the separate investigation of the contribution of smaller scales ($q < 0$) and larger scales ($q > 0$).

Multifractal analysis using the MFDFA method has been applied in various areas of knowledge that present long-range power-law correlations. For a comprehensive review of the methodologies and application areas of multifractal analysis, we recommend reading the work of Kantelhardt [54]. Moreover, in the context of the financial market, multifractal analysis has been widely explored, and an excellent resource for a review on the subject can be found in the article by Jiang et al. [8].

A. MULTIFRACTAL DETRENDED FLUCTUATION ANALYSIS

According to [9], the MFDFA method consists of 5 steps, where the first three steps are based on the DFA method, [53].

Let p_t be a time series where $t = 1, \dots, N$ being N the total number of observations. We define the return series r_{t+1} by the logarithmic difference of the price, according to Equation (1).

- 1) Determine the integrated series Y through the accumulated deviation as per equation 2, where \bar{r} is the mean of

the return series r .

$$Y(i) = \sum_{k=1}^i [r_k - \bar{r}], \quad i = 1, \dots, N \quad (2)$$

- 2) Divide the integrated series into non-overlapping intervals of equal size s , where $N_s = \lfloor N/s \rfloor$. When N is not an integer multiple of the scale s , then some points at the end of the series will not be computed. The integrated series is divided again from end to start to avoid this loss of information. This leads to having $2N_s$ segments.
- 3) At this step, the removal of local trend in each of the $2N_s$ segments is done by means of a polynomial fit of degree m , chosen considering the capability of trend elimination. For each segment $i = 1, \dots, s$, the variance is calculated according to Equation (3), where $y_v(i)$ is the polynomial of degree m calculated through the least squares method.

$$F^2(s, v) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s Y[(v-1)s+i] - y_v(i)^2 \quad (3)$$

for any $v, v \in (1, \dots, N_s)$

$$F^2(s, v) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s Y[N - (v - N_s)s + i] - y_v(i)^2 \quad (4)$$

where $v \in (N_s + 1, \dots, 2N_s)$

- 4) The fluctuation function of order q for each of the $2N_s$ segments is given by Equation (5) for any real q different from zero and by Equation (6) when $q = 0$.

$$F_q(s) = \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} [F^2(s, v)]^{\frac{q}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}} \quad (5)$$

$$F_0(s) = \exp \left\{ \frac{1}{4N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} \ln[F^2(s, v)] \right\} \quad (6)$$

- 5) Determine the scaling behavior of the fluctuation functions by analyzing the log-log plot $F_q(s) \times s$ for each value of q . If the series are correlated by the long-range power law, then $F_q(s)$ increases for large values of s by the power law as shown in Equation (7), where the scaling exponent is calculated as the slope of the linear regression of $\log F_q(s)$ against $\log s$, for each q .

$$F_q(s) \sim s^{h(q)} \quad (7)$$

The singularity spectrum, also known as the multifractal spectrum, provides an alternative way to describe the multifractality of a time series. Kantelhardt et al. [9] demonstrated that the scaling exponent or Rényi coefficient, τ_q , can be obtained via the relationship between box counting formalism and partition function $Z_q(s)$, as shown in Equation (8). This approach delivers a detailed characterization of fluctuations at different scales and allows for a more comprehensive analysis of the time series multifractal properties.

$$\tau(q) = qh(q) - 1 \quad (8)$$

Equation (8) illustrates the relationship between the generalized Hurst coefficient $h(q)$ and the scaling exponent $\tau(q)$. This relationship is critical, as it allows the multifractal formalism to demonstrate a link between $\tau(q)$ and the multifractal spectrum $f(\alpha)$. By applying the Legendre transform to Equation (8), we obtain $f(\alpha)$:

$$\text{Singularity Spectrum} = \begin{cases} \alpha = \tau'(q) \\ f(\alpha) = q\alpha - \tau(q) \end{cases} \quad (9)$$

where α is the Hölder coefficient and $f(\alpha)$ is the dimension of the series subset characterized by α .

Some important points that can be highlighted about the MFDFA algorithm are:

- (a) Degree m polynomials are used to remove order $m - 1$ trends in the original series.
- (b) The choice of the polynomial degree for local trend removal should be made by comparing different orders. In most cases, the trend can be eliminated with degree 3 or less polynomials.
- (c) The results obtained by the DFA method are reproduced for $q = 2$ in equation (3), which is the quadratic fluctuation.
- (d) By construction, the function $F_q(s)$ is defined only for values of $s \geq m + 2$.
- (e) For very large scales, $s > N/4$, the function $F_q(s)$ becomes statistically unreliable due to the limited number of segments N_s . Therefore, scales larger than $N/4$ should be excluded from the fitting procedure to determine the scaling coefficient $h(q)$.
- (f) The scaling coefficient $h(q)$ is also known as the generalized Hurst exponent.
- (g) For stationary time series, the exponent $h(2)$ is known as the Hurst exponent (H_2) and ranges between 0 and 1. The time series is considered uncorrelated when $H_2 = 0.5$, anti-persistent when $0 < H_2 < 0.5$, and persistent (long memory) when $0.5 < H_2 < 1$.
- (h) A time series is considered monofractal when the scaling coefficient $h(q)$ is constant and independent of q .
- (i) A time series is considered multifractal when there is a strong dependence between $h(q)$ and q . For $q > 0$, $h(q)$ describes the scaling behavior of the segments with large fluctuations, while for $q < 0$, $h(q)$ describes the scaling behavior of the segments with small fluctuations.
- (j) The MFDFA method only calculates positive generalized Hurst exponents, becoming inaccurate for strongly anti-persistent time series, i.e., when $h(q)$ is close to zero. In these cases, it is recommended to integrate the time series before applying the MFDFA algorithm, resulting in $\bar{h}(q) = h(q) + 1$ for the new integrated series.
- (k) The accuracy of the MFDFA method depends on the size N of the time series. Series with fewer than 10,000 values may exhibit apparent multifractality, as discussed in [55].

B. SOURCES OF MULTIFRACTALITY

Kantelhardt et al. [9] presented a procedure to analyze two different types of multifractality: (i) multifractality due to a broad probability density function for the values of the return series and (ii) multifractality due to differing long-range correlations (linear and nonlinear) for small and large fluctuations.

When we shuffle time series data, we destroy temporal correlations (short and long-range memories), with the probability distribution remaining intact. According to [9], Equation (10) gives the impact of the correlation on the apparent multifractality.

$$h_{corr}(q) = h(q) - h_{shuf}(q) \quad (10)$$

where $h_{shuf}(q)$ indicates the generalized Hurst coefficient for the shuffled series and $h_{cor}(q)$ is the generalized Hurst coefficient due to the linear and nonlinear correlations of the series. If only type (i) multifractality is present, then $h_{corr}(q) = 0$ and $h_{shuf}(q) = h(q)$. When $h_{corr}(q) \neq 0$, it indicates the presence of correlations, and if $h_{corr}(q)$ depends on q , then we have the presence of type (ii) multifractality. If only type (ii) correlation exists, then $h_{shuf}(q) = 0.5$ and $h(q) = 0.5 + h_{corr}(q)$. If both types of multifractality are present, then $h_{corr}(q)$ and $h_{shuf}(q)$ depend on q .

Other works have shown an equivalent formulation considering Δh , Equation (13), and $\Delta\alpha$, Equation (14), instead of $h(q)$, as in [8] Section 7.2.

$$\begin{aligned} \Delta h_{corr} &= \Delta h - \Delta h_{shuf} \\ \Delta\alpha_{corr} &= \Delta\alpha - \Delta\alpha_{shuf} \end{aligned} \quad (11)$$

We employ the method of the Amplitude Adjusted Fourier Transform (AAFT) [56] to analyze the impact of a broad probability density function on the multifractality of return series. However, various methods exist to eliminate the nonlinear component of time series, as discussed in [8]. The AAFT method involves creating surrogate series, preserving the temporal correlation structure but eliminating the nonlinear component. We applied the following procedure: (i) transforms the original time series into the frequency domain using the Fourier transform; (ii) shuffled the phases of these components randomly; (iii) applies the inverse Fourier transform to obtain the surrogate time series. This technique preserves the linear statistical characteristics of the original series, such as mean and variance, while eliminating nonlinear temporal correlation. So, we use surrogate series to investigate the influence of the probability density function on the multifractality of the return series. Suppose the surrogate series results exhibit less multifractality than the original series, suggesting that the broad probability density function plays a significant role in the multifractality of the return series.

C. EFFICIENCY OF BRAZILIAN ELECTRICITY MARKET

The Efficient Market Theory, proposed by Fama in 1970 [57], establishes a relationship between the availability of information and market price. In an efficient market, the price

reflects all available information, making it unpredictable, as it behaves randomly. According to Fama, the price in an efficient market follows a Markovian stochastic process, in which the probabilities associated with the process at a given future time depend only on the present state, independent of past events. Therefore, a Markovian process does not exhibit a temporal correlation between its data and is considered memoryless.

Recently, studies conducted by Cajueiro and Tabak [58], [59] analyzed market efficiency using the Hurst coefficient (H_2), calculated over the sampling period in a sliding window, using R/S or DFA methodologies as proxies. However, these studies adopted monofractal methods to calculate the Hurst coefficient without considering the possible multifractal characteristics of the markets analyzed. By utilizing multifractal methods, like MF DFA, we can capture additional nuances in the scale structure of market prices and explore the presence of multifractality, which can provide valuable insights into the complexity and efficiency of the electricity market.

Kristoufek and Vosvrda [60] employed the Hurst coefficient, the fractal dimension, and lag one autocorrelation to propose a combined measure of market inefficiency given by Equation (12):

$$IE = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{M_i - M_i^*}{M_{i,max} - M_{i,min}} \right)^2} \quad (12)$$

where M_i is the i -th measure estimated by the method i , M_i^* is the theoretical value for uncorrelated series, and the distance $M_i - M_i^*$ is a market inefficiency index. Several publications applied this index in various markets, and the results consistently showed that emerging markets were less efficient. In contrast, developed markets were more efficient, i.e., they presented a lower level of inefficiency. This observation aligns with the Efficient Market Hypothesis, which postulates that prices reflect all available information in efficient markets, while in less efficient markets, information may not be fully incorporated into prices, creating opportunities for arbitrage and potentially resulting in greater inefficiency. These findings underscore the importance of investigating the efficiency of financial, commodities, and electricity markets and their impact on asset prices, providing valuable insights for investors, regulators, and policymakers.

As seen in section IV-A, $h(q)$ is independent of q for monofractal time series with compact support. If small and large fluctuations scale differently, then $h(q)$ shows a strong dependence on q , characterizing the time series as multifractal. The variability of $h(q)$ is directly related to the degree of multifractality that the signal presents and can be measured by Equation (13), as per [61]:

$$\Delta h = h(q_{min}) - h(q_{max}) \quad (13)$$

The strength of multifractality, measured through Δh , was applied to the returns of indices from 32 stock markets in different countries. In addition to this measure, [61] used another measure of multifractality strength, based on the

length of the multifractal spectrum $f(\alpha)$, called $\Delta\alpha$, where α represents the Hölder coefficient, as can be seen in equation (14). These measures provide a comprehensive assessment of the multifractality present in stock markets, allowing an understanding of these time series' complex and nonlinear characteristics. By considering different measures of multifractality strength, it is possible to gain a complete perspective on the structure and dynamics of these markets, contributing to the understanding of the underlying processes and aiding in investment decision-making.

$$\Delta\alpha = \alpha(q_{min}) - \alpha(q_{max}) \quad (14)$$

Numerous articles studied the efficiency of electricity markets. For a review of articles that addressed this issue, see [62]. More recently, [44] estimated the efficiency of the US electricity market (MASS, MIDC, PALO, and PJM) through the Magnitude of Long Memory index ([63]) given by Equation (15)

$$MLM = \frac{1}{2} (|h(q_{min}) - 0.5| + |h(q_{max}) + 0.5|) = \frac{1}{2} \Delta h \quad (15)$$

where a market is efficient when the small fluctuations ($q = q_{min} < 0$) and the large fluctuations ($q = q_{max} > 0$) follow Markovian stochastic processes (random walk) and the value of MLM tends towards zero. The larger the value of MLM , the higher the degree of multifractality of the process and the lower the efficiency of the underlying market. Conversely, the lower the MLM , the more efficient the market is.

In the Brazilian electricity market, the spot price is not determined by equilibrium between supply and demand, as in other markets. Instead, computational models that simulate this equilibrium by optimizing hydrothermal dispatch calculate the price. The efficiency of this market is related to the randomness of the marginal cost of operation and, consequently, the settlement price of differences generated by the models. The further the Hurst coefficient H_2 is from 0.5, the more predictable and less random the price will be.

Unlike the financial market, where the presence of noise traders can cause irregularities in price fluctuations, in the Brazilian electricity market, irregularities are related to extreme events, such as the impact of COVID-19 on demand, the influence of climatic phenomena like El Niño and La Niña on renewable energy generation, structural imbalances between supply and demand due to excess or lack of capacity, and regulatory interferences, such as the reduction of the maximum DSP in January 2015. These factors contribute to the complexity and non-linearity of prices in the Brazilian electricity market, and analysis of its dynamics represents a challenging task of great relevance for understanding the functioning of this market.

V. RESULTS

The algorithms used in this work were written by the authors in Python (Python Software Foundation. Python Language Reference, version 3.9. available at <http://www.python.org>),

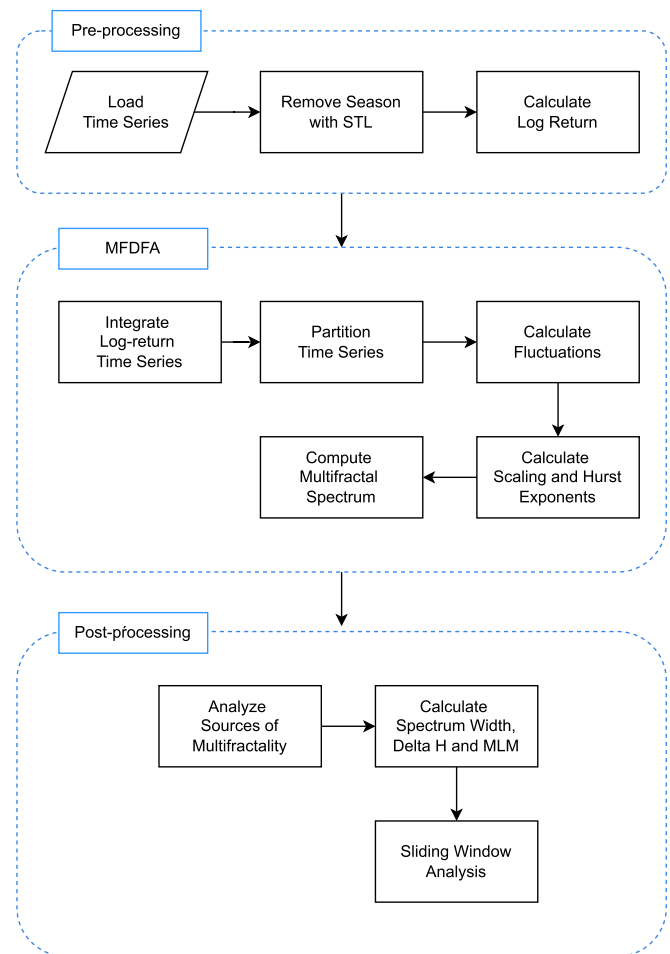


FIGURE 3. Flowchart of the major steps to analyze time series with MF DFA.

based on MF DFA, [9] and its implementation in Matlab available at [64]. A flowchart delineating the key stages involved in the assessment of spot price time series in the Brazilian market through MF DFA is presented in Figure 3.

After conducting a series of tests, we chose a fourth-degree polynomial ($m = 4$) to eliminate local trends within the data. Although the scale set s suggested by [9] is generally confined to the range $10 \leq s \leq \lfloor N/4 \rfloor$, we heuristically adjusted this to the range $16 \leq s \leq 128$. In this context, $N = 1127$ denotes the total number of observations in our weekly return series, as outlined in Table 1. Regarding the parameter q , we followed the recommendations by [9], employing a range of $-5 \leq q \leq 5$.

A. FLUCTUATION FUNCTIONS ANALYSIS

We analyzed the log-log plot of $F_q(s)$ versus s for each q , as shown in Figure 4 to determine the scaling behavior of the fluctuation functions. If the time series x_i is long-range power-law correlated, $F_q(s)$ increases for large values of s by the power law, according to equation (7).

Although the polynomial fit of order $m - 1$ in the original series, it is essential to note that this procedure does not guarantee

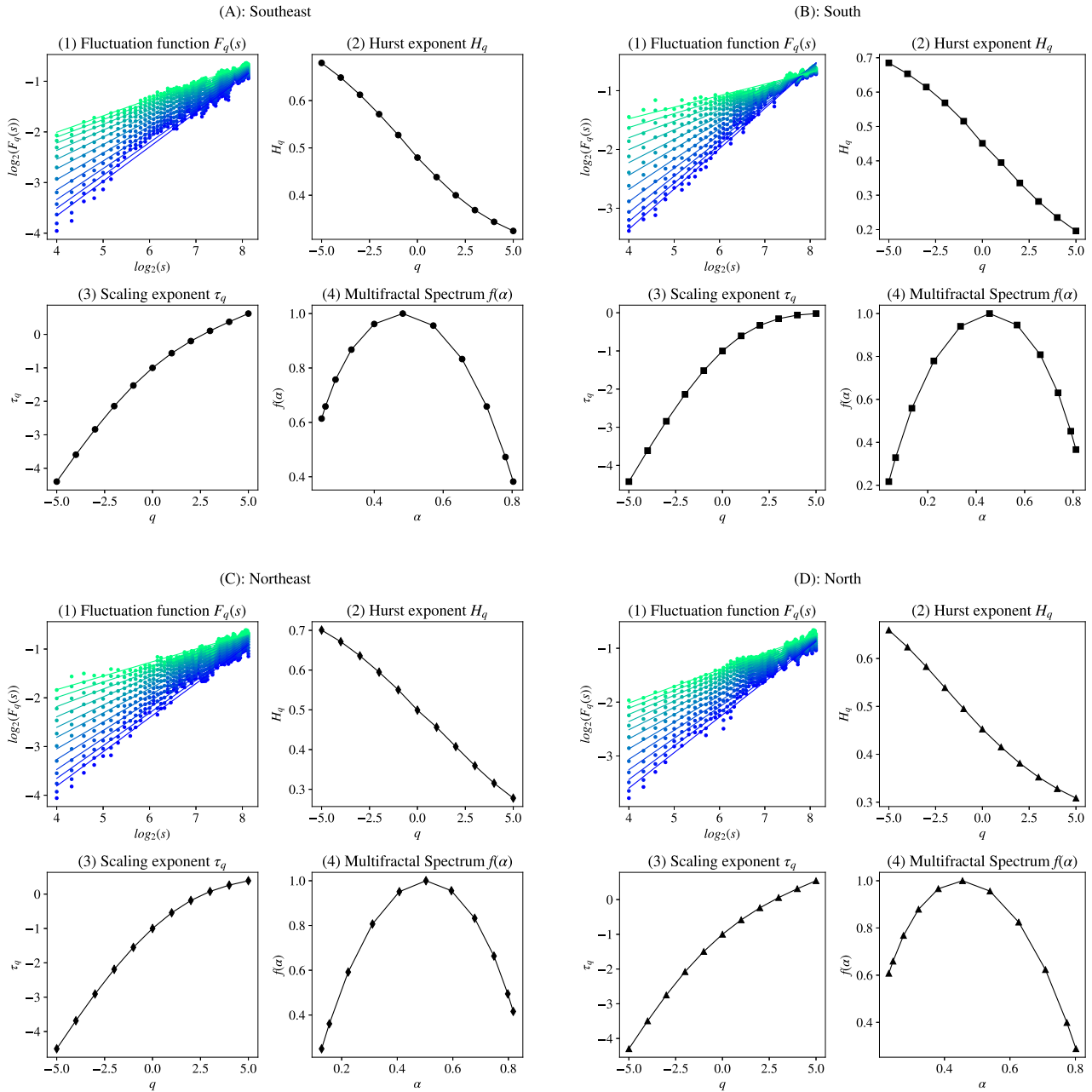


FIGURE 4. MF DFA plots applied to the Brazilian market’s weekly return index of spot electricity prices. The figure presents a set of 4 graphs for each submarket, showing (1) the scaling behavior of fluctuation functions, (2) the generalized Hurst exponent, (3) the scaling exponent or Reyni exponent, and (4) the multifractal spectrum. In the fluctuation function graph (1), colors varying from blue to green indicate values of q ranging from -5 to $+5$.

the elimination of oscillatory trends, such as seasonality. The presence of intrinsic seasonal phenomena in the time series analyzed can result in a nonlinear relationship in the log-log plot of $F_q(s)$ as a function of s . We should observe this non-linearity through crossovers that separate regions with different slopes.

It is crucial to rigorously address seasonal variations in the data prior to employing MF DFA, as neglecting to do so could lead to erroneous conclusions about the time series’ multifractality. In this study, we leverage the Seasonal-Trend Decomposition using LOESS (STL)

methodology, which was initially proposed by [50] and has been implemented in [51]. We specifically focus on annual seasonality, characterized by a 54-week cycle, to effectively isolate seasonal components from long-term trends and fluctuations.

This pre-processing step is critical for ensuring the accurate application of MF DFA and a reliable assessment of the time series’ multifractal nature. By meticulously eliminating seasonal variations, we can better examine the data’s intrinsic fluctuations and better understand its multifractal characteristics.

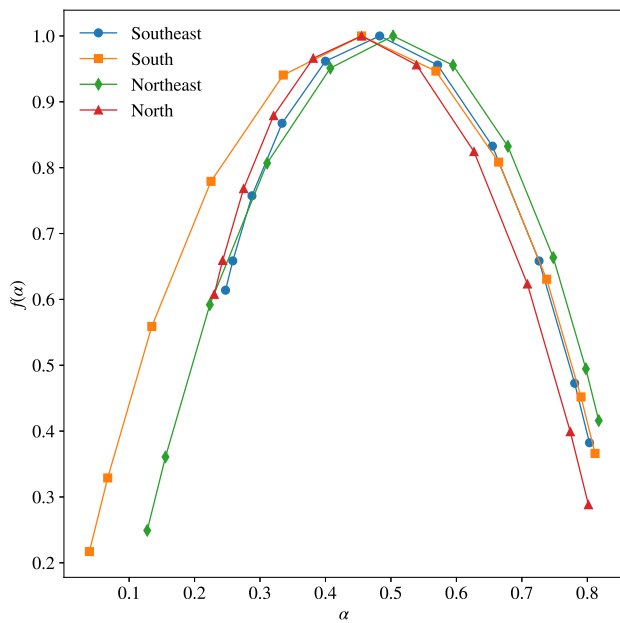


FIGURE 5. Multifractal spectrum for each submarket.

After analyzing the plots in Figure 4, we observe indications of multifractality in the return series of the four submarkets. However, it is important to approach this conclusion with caution, considering the small sample size, composed of only 1127 observations.

According to [55], when applying the MFDFA method to short and uncorrelated time series, mistaken detection of multifractality instead of mono fractality may occur (known as the finite size effect). Therefore, we should consider the multifractality of the weekly spot price returns as apparent, subject to this caveat.

Even though we obtained suggestive results of multifractality, the analysis of time series with a limited size requires careful interpretation. A larger data set would be needed for a more robust conclusion about the presence of multifractality, allowing a more reliable analysis of the statistical properties of the time series at different scales.

B. GENERALIZED HURST EXPONENTS

In the fluctuation function plots presented in Figure 4, we can observe the slope coefficients of the lines that best fit the $\log_2(s)$ and $\log_2(F_q)$ points for a given moment q . These slope coefficients correspond to the generalized Hurst exponents H_q . Analyzing the curves, we can observe that the value of H_q varies according to the value of q , which indicates the presence of apparent multifractality in the time series. The Hurst coefficients are calculated when $q = 2$ and are represented by $H_q(q = 2)$ or simply H_2 .

Although the spot price formation process in the Brazilian energy market does not follow a traditional market equilibrium but is instead a result of hydrothermal dispatch optimization models, the Hurst coefficients of the submarkets indicate

TABLE 3. The table displays the results of applying the MFDFA to the original, shuffled, and surrogate series for each submarket. Each column represents an indicator (Hurst coefficient, width of the multifractal spectrum, strength of multifractality, and magnitude of long memory), and the rows represent the type of series (original, shuffled, and surrogate). We grouped the types of series by submarkets (Southeast, South, Northeast, and North). The values corresponding to each indicator and type of series are filled in the appropriate cells. For example, in the “hurst_original” cell of the Southeast submarket, we have the value of the Hurst coefficient for the original series; in the “hurst_shuffled” cell, we have the value of the Hurst coefficient for the shuffled series; and in the “hurst_surrogate” cell we have the value of the Hurst coefficient for the surrogate series. We applied the same principles to the other indicators and types of series.

	hurst H_2	width $\Delta\alpha$	delta_h Δh	mlm MLM
Southeast				
original	0.400	0.556	0.355	0.178
shuffled	0.509	0.284	0.167	0.083
surrogate	0.396	0.307	0.182	0.091
South				
original	0.336	0.772	0.489	0.244
shuffled	0.502	0.399	0.239	0.120
surrogate	0.320	0.424	0.256	0.128
Northeast				
original	0.407	0.690	0.423	0.211
shuffled	0.508	0.355	0.209	0.104
surrogate	0.415	0.394	0.232	0.116

the presence of anti-persistence or mean reversion ($H_2 < 0.5$). This result corroborates mean reversion as a stylized fact found in other energy markets around the world, as mentioned in previous studies ([7], [11], [32], [33], [34], [35], [41]). The “hurst” column in Table 3 presents the H_2 values for all submarkets, measuring the degree of mean reversion in the analyzed time series.

As seen in the previous section, we calculated the strength of the apparent multifractality by applying equation (13) to the generalized Hurst exponents of each submarket. The δ_{h} column in Table 3 presents the results indicating that the South submarket exhibits the highest multifractality strength ($\Delta h = 0.489037$), followed by the Northeast ($\Delta h = 0.422751$), Southeast ($\Delta h = 0.355185$), and North ($\Delta h = 0.350836$).

C. MULTIFRACTAL SPECTRUM

The plot in Figure 5 presents the singularity spectrum through the relationship between the Hölder coefficient α and $f(\alpha)$, the dimension of the subset of the series characterized by α , according to Equation (9).

The length of the singularity spectrum, represented by $\Delta\alpha$ according to equation (14), measures the strength of multifractality in each time series. As observed in Table 3, the South submarket presents the highest value of $\Delta\alpha = 0.772394$, followed by the Northeast ($\Delta\alpha = 0.689705$), North ($\Delta\alpha = 0.571663$), and Southeast ($\Delta\alpha = 0.555934$). This relationship indicates that the South submarket has the highest multifractality among the four Brazilian submarkets,

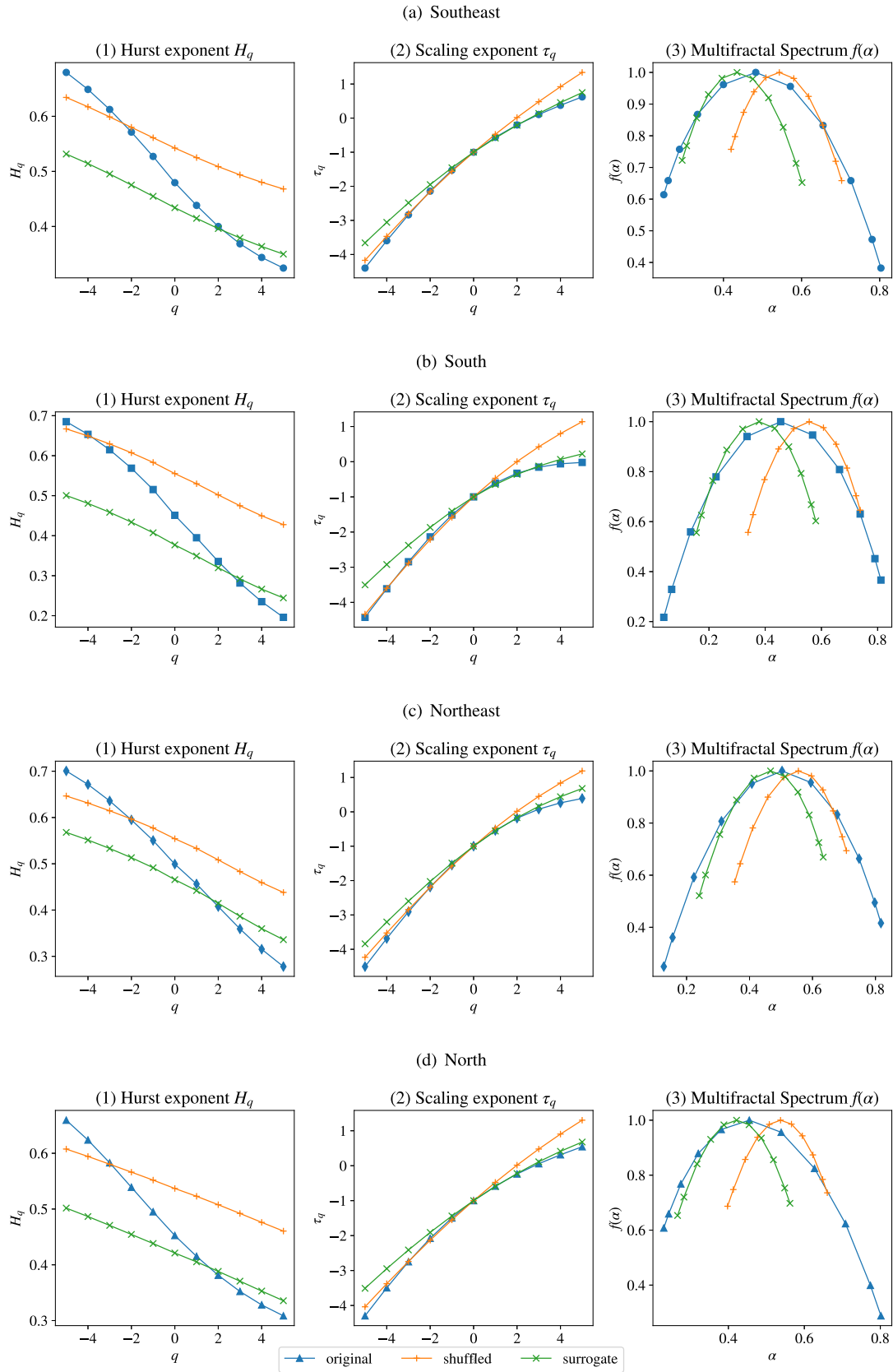


FIGURE 6. Graphs displaying the potential causes of multifractality in the return series of spot electricity prices for the four Brazilian markets through the plots of the generalized Hurst exponent (1), scaling exponent (2), and multifractal spectrum (3). We used the MFDFA algorithm in the shuffled and surrogate series and extracted the generalized Hurst exponents and singularity spectra. To minimize the influence of the initial seed for pseudo-random number generation, we carried out 1000 runs of MFDFA (for each type of surrogate series and each submarket), changing the initial seed. The orange (shuffled) and green (surrogate) curves represent the averages of MFDFA results for each parameter. The blue curves present the results for the original series.



FIGURE 7. The graphs present the dynamic behavior of the Hurst coefficient (H_2) for the four submarkets using a window of 702 weeks and a unit step. The dashed vertical line indicates when there was a transition in how the price was calculated, with the introduction of the hourly hydrothermal dispatch model on January 1, 2021. Before this date, the price was calculated weekly through a weekly hydrothermal dispatch model. From this landmark, the weekly price started to be obtained by the arithmetic average of the hourly prices throughout the week. The dashed horizontal line represents the value of H_2 calculated for the complete series, as presented in Table 3.

confirming the same conclusion obtained when the Δh measured the strength of multifractality.

The higher multifractality observed in the South submarket reflects a more complex system regarding spot price fluctuations. This characteristic can be attributed to the specificities of this submarket, such as a more variable hydrological regime and a lower seasonality. Furthermore, the hydroelectric power plants in this submarket do not have storage capacity, and their production is directly related to river flow variations. This more significant variability in hydroelectric energy production is captured by price formation models, resulting in a more volatile operating marginal cost and, consequently, a more volatile spot price.

D. SOURCES OF MULTIFRACTALITY

Intending to investigate the origins of multifractality in the Brazilian electricity market, we applied the shuffling procedure to the return series, as described in [9] and [65]. As mentioned in Section IV-B, we eliminate linear and nonlinear temporal correlations when shuffling the series, preserving the probability distribution. If the multifractality was exclusively type (ii), then we would expect $H_{shuf}(q)$ to be independent of q , with a value of $H_{shuf}(q) = 0.5$. However, in the plots in Figure 6, we can observe that shuffling the series did not eliminate multifractality, as $\Delta h_{shuf} \neq 0$ and $\Delta \alpha_{shuf} \neq 0$.

This result indicates that both types of multifractality mentioned in [9] are relevant to the Brazilian electricity market.

Furthermore, we analyzed type (i) multifractality by applying the surrogate method to the original series, as described in [65]. Similarly, the surrogate procedure did not eliminate the series' multifractality since $\Delta h_{surr} \neq 0$ and $\Delta \alpha_{surr} \neq 0$. Table 3 presents the values of H_2 , $\Delta \alpha$, Δh , and MLM for the original, shuffled, surrogate series and by submarket. For all submarkets, the values of Δh and $\Delta \alpha$ of the surrogate weekly return series are higher than those of the shuffled series. This result indicates that the multifractality of weekly returns is more influenced by the long-range correlations between small and large fluctuations (temporal relation of the data) than by the broad probability density function.

E. TIME VARYING ANALYSIS

In previous sections, we conducted calculations of various indices derived from the application of MF DFA in the return series of deseasonalized spot prices in the four Brazilian submarkets. The analyses showed that all submarkets present anti-persistence and multifractal behavior. In this section, we will use the sliding window technique to investigate the dynamic behavior of the Hurst coefficient (H_2) and the magnitude of long memory (MLM). This approach, proposed by Cajueiro and Tabak [59], has been widely applied in the financial market to analyze the behavior of stock markets

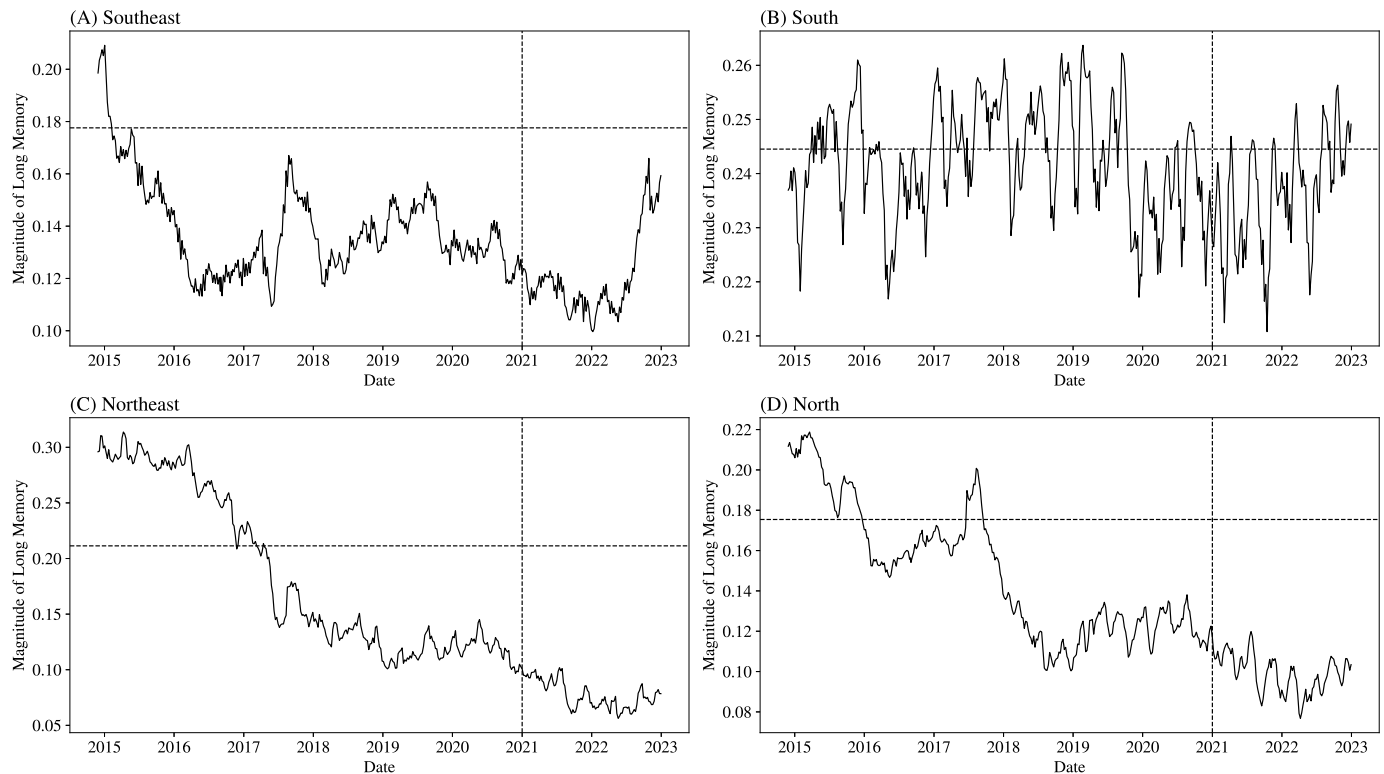


FIGURE 8. The graphs display the evolution of the multifractal spectrum length for each submarket over the evaluation period. The vertical dashed line indicates the start of hourly price disclosure from January 1, 2021. The dashed horizontal line marks the $\Delta\alpha$ value calculated for the complete series and presented in Table 3.

in different countries. Recently, this technique has also been applied to the electricity markets in the United States by Ali et al. [44] and in the Czech Republic by Čurpek [47].

The sliding window technique is commonly used in time series analysis, signal processing, machine learning, and other disciplines dealing with sequential data. The basic concept is simple: instead of processing all data at once, a “window” of fixed size is “slide” along the data, processing only the data within that window at each point. This technique can be helpful in various tasks, such as data smoothing, anomaly detection, calculating moving statistics, etc. The “step” in the sliding window technique refers to how many data points the window moves each time. A smaller step provides a more detailed analysis but may have a higher computational cost when compared to choosing a larger step. Given our small sample size, we conducted several experiments with window values between 700 and 800 weeks before settling on the final value of 702 weeks (equivalent to 13 years) and a step of one week. Thus, the calculations of the indices begin on December 19, 2014, and are redone for each week until the end of the period, keeping the window size fixed.

The graphs in Figure 7 illustrated the evolution of the Hurst coefficient (H_2) for each submarket over the evaluation period. The H_2 values in all submarkets showed no significant deviations, and anti-persistence behavior was maintained. There is an observable upward trend in the Hurst coefficients for all submarkets following the introduction of

the hourly dispatch model. This trend suggests decreased anti-persistence and increased randomness in weekly spot prices. This behavior could be related to the hourly model’s greater granularity and flexibility, allowing for better adaptation to short-term supply and demand conditions. However, a more thorough study is needed to understand the causes and implications of this change in the growth rate of H_2 at the end of 2020. Other factors, such as regulatory changes, alterations in energy supply and demand, and economic events, can also influence the behavior of the electricity market and should be considered in future analyses.

The graphs in Figure 8 showed the evolutions of the magnitude index of long memory (MLM) for each submarket over the evaluation period. Examining the results, we observed different behaviors in the submarkets. The Northeast and North submarkets showed a trend of reduction in MLM values over time. This reduction trend indicates an increase in the efficiency of these markets, as a lower magnitude of long memory is associated with higher market efficiency.

In the case of the South submarket, we did not observe a clear trend, as the MLM values fluctuated strongly over the evaluation period. However, from 2021 onwards, we observed an increase in the growth rate of MLM , indicating a possible decrease in market efficiency.

The Southeast submarket presented an interesting behavior. Initially, the growth rate of MLM was negative, indicating an improvement in market efficiency. However, from

mid-2022 onwards, there was a change in the growth rate, which became positive, suggesting a possible decrease in market efficiency.

These results indicate that the submarkets exhibit distinct dynamics in terms of market efficiency over time. The variations in *MLM* values may reflect changes in market structure, energy supply and demand, and regulatory and climatic factors. However, it is important to highlight that more in-depth analyses and consideration of other factors are necessary for a complete understanding of the trends and implications of these results on the efficiency of the electricity market in Brazil.

VI. CONCLUSION

In this study, we presented an analysis of multifractality in the Brazilian electricity market, using the Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MFDFA) method on time series of spot prices for each of the four submarkets. We found that, despite the atypical price formation process, based on optimization models of hydrothermal dispatch, the submarkets share an anti-persistence behavior (or mean reversion) and exhibit multifractal characteristics. Such results converge with the stylized facts observed in other global electricity markets, indicating a universal nature of these attributes.

We detected variations in multifractality and efficiency among the submarkets attributed to their intrinsic characteristics. In particular, the South submarket revealed the highest multifractality and lowest efficiency, possibly due to a more unstable hydrological regime and lower seasonality. In contrast, the North submarket exhibited the lowest multifractality and highest efficiency. Using the Long Memory Magnitude (MLM) as an efficiency index, we evidenced a complex framework of variability and multifractality in the Brazilian submarkets.

Furthermore, we explored the origin of multifractality using shuffled and surrogate series techniques. We discovered that the multifractality of weekly returns is more dominated by long-term correlations among fluctuations of variable magnitude than by the broad probability density function.

The investigation of the dynamic behavior of the Hurst coefficient and the MLM index through the sliding window technique revealed the constancy of anti-persistence and a trend of increase in the Hurst coefficient after introducing the hourly dispatch model. These observations suggest a decrease in anti-persistence and greater randomness in weekly spot prices, potentially related to the higher granularity and flexibility of the hourly model.

Submarkets exhibited variable dynamics over time in terms of market efficiency. Changes in H_2 and *MLM* values may reflect changes in market structure, energy supply and demand, and economic, regulatory, and climatic factors. However, it is crucial to highlight the need for more in-depth analyses and the consideration of other factors for a more comprehensive understanding of the trends and implications of these results.

Although our findings suggest a presence of multifractality, we emphasize that the analysis of time series of limited size requires caution in the interpretation of the results. A more extensive data set would be necessary for a more robust conclusion, such as the hourly prices available from 2021, allowing more precise statistical analysis of the time series at different scales.

In summary, this study provides a valuable contribution to understanding the efficiency and dynamics of the Brazilian electricity market.

REFERENCES

- [1] É. Melo, E. M. de Almeida Neves, and L. H. A. Pazzini, "The Brazilian electricity model: An overview of the current structure and market design," in *Proc. 8th Int. Conf. Eur. Energy Market (EEM)*, May 2011, pp. 592–597.
- [2] N. Castro, R. Brando, M. Moszkowicz, L. Cmara, and A. L. D. S. Mendes, "The role of imbalance settlement mechanisms in electricity markets: A comparative analysis between U.K. and Brazil," in *Proc. GESEL, Working Paper*, Jun. 2022, pp. 1–6.
- [3] A. L. M. Marcato, "Representação híbrida de sistemas equivalentes e individualizados para o planejamento da operação de sistemas de potência de Grande porte," Ph.D. dissertation, Dept. Elect. Eng., Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, Brasil, South America, 2002.
- [4] R. B. S. Brandi, A. L. M. Marcato, B. H. Dias, T. P. Ramos, and I. C. da Silva Junior, "A convergence criterion for stochastic dual dynamic programming: Application to the long-term operation planning problem," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 33, no. 4, pp. 3678–3690, Jul. 2018.
- [5] Câmara de Comercialização de Energia Elétrica, "GT Modernização do Setor Elétrico. Mecanismos de Formação de Preços," Ministério de Minas e Energias, Brasília, Brazil, Work. Paper, Tech. Rep. 187, Jul. 2019. [Online]. Available: [Online]. Available: <https://www.gov.br/mme/pt-br/assuntos/secretarias/secretaria-executiva/modernizacao-do-setor-eletrico/arquivos/pasta-geral-publicada/formacao-de-precos.pdf>
- [6] T. N. Santos, A. L. Diniz, C. H. Saboia, R. N. Cabral, and L. F. Cerqueira, "Hourly pricing and day-ahead dispatch setting in Brazil: The Dessem model," *Electr. Power Syst. Res.*, vol. 189, Dec. 2020, Art. no. 106709. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378779620305125>
- [7] R. Weron, *Modeling and Forecasting Electricity Loads and Prices: A Statistical Approach*. Wrocław, Poland: Hugo Steinhaus Center, Wrocław Univ. Technology, 2006. [Online]. Available: <https://EconPapers.repec.org/RePEc:wuu:hsbook:hsbook0601>
- [8] Z.-Q. Jiang, W.-J. Xie, W.-X. Zhou, and D. Sornette, "Multifractal analysis of financial markets: A review," *Rep. Prog. Phys.*, vol. 82, no. 12, Nov. 2019, Art. no. 125901, doi: [10.1088/1361-6633/ab42fb](https://doi.org/10.1088/1361-6633/ab42fb).
- [9] J. W. Kantelhardt, S. A. Zschiegner, E. Koscielny-Bunde, S. Havlin, A. Bunde, and H. E. Stanley, "Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series," *Phys. A, Stat. Mech. Appl.*, vol. 316, nos. 1–4, pp. 87–114, Dec. 2002. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437102013833>
- [10] S. Deng, "Stochastic models of energy commodity prices and their applications: Mean-reversion with jumps and spikes," Univ. California Energy Inst., Berkeley, CA, USA, Work. Paper 73, 2000.
- [11] R. Weron, "Energy price risk management," *Phys. A, Stat. Mech. Appl.*, vol. 285, no. 1, pp. 127–134, 2000. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437100002764>
- [12] M. Dillig, M. Jung, and J. Karl, "The impact of renewables on electricity prices in Germany—An estimation based on historic spot prices in the years 2011–2013," *Renew. Sustain. Energy Rev.*, vol. 57, pp. 7–15, May 2016. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1364032115013866>
- [13] F. Paraschiv, D. Erni, and R. Pietsch, "The impact of renewable energies on EEX day-ahead electricity prices," *Energy Policy*, vol. 73, pp. 196–210, Oct. 2014. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301421514002845>
- [14] C. K. Woo, I. Horowitz, J. Moore, and A. Pacheco, "The impact of wind generation on the electricity spot-market price level and variance: The Texas experience," *Energy Policy*, vol. 39, no. 7, pp. 3939–3944, Jul. 2011. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301421511002813>

- [15] *Balanço 2022*. São Paulo SP, Brazil: CCEE-Câmara de Comercialização de Energia Elétrica, Jan. 2023.
- [16] L. E. Nunes, M. V. A. D. Lima, M. Davison, and A. L. D. S. Leite, "Switch and defer option in renewable energy projects: Evidences from Brazil," *Energy*, vol. 231, Sep. 2021, Art. no. 120972. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360544221012202>
- [17] A. Helseth, A. C. G. Melo, Q. M. Ploussard, B. Mo, M. E. P. Maceira, A. Botterud, and N. Voisin, "Hydropower scheduling toolchains: Comparing experiences in Brazil, Norway, and USA and implications for synergistic research," *J. Water Resour. Planning Manage.*, vol. 149, no. 7, Jul. 2023, Art. no. 04023030, doi: [10.1061/JWRMD5.WRENG-5911](https://doi.org/10.1061/JWRMD5.WRENG-5911).
- [18] F. Cavaliere de Souza and L. F. Loureiro Legey, "Brazilian electricity market structure and risk management tools," in *Proc. IEEE Power Energy Soc. Gen. Meeting Convers. Del. Electr. Energy 21st Century*, Jul. 2008, pp. 1–8.
- [19] F. C. Munhoz, "The necessity of more temporal granularity in the Brazilian short-term electricity market," *Sustain. Energy, Grids Netw.*, vol. 11, pp. 26–33, Sep. 2017. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S235246771730084X>
- [20] I. Marchetti and E. E. Rego, "The impact of hourly pricing for renewable generation projects in Brazil," *Renew. Energy*, vol. 189, pp. 601–617, Apr. 2022. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960148122003032>
- [21] C. A. L. Nametala, W. R. Faria, G. G. Lage, and B. R. Pereira, "Analysis of hourly price granularity implementation in the Brazilian deregulated electricity contracting environment," *Utilities Policy*, vol. 81, Apr. 2023, Art. no. 101513. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957178723000255>
- [22] A. Queiroz, F. Oliveira, J. M. Lima, and P. Balestrassi, "Simulating electricity spot prices in Brazil using neural network and design of experiments," in *Proc. IEEE Lausanne Power Tech.*, Jul. 2007, pp. 2029–2034.
- [23] A. M. B. de Oliveira, A. Mandal, and G. J. Power, "A primer on the pricing of electric energy options in Brazil via mean-reverting stochastic processes," *Energy Rep.*, vol. 5, pp. 594–601, Nov. 2019. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352484719300125>
- [24] T. S. Gontijo, M. A. Costa, and R. B. de Santis, "Electricity price forecasting on electricity spot market: A case study based on the Brazilian difference settlement price," in *Proc. E3S Web Conf.*, vol. 239, 2021, p. 2.
- [25] T. Daglish, G. G. F. de Bragança, S. Owen, and T. Romano, "Pricing effects of the electricity market reform in Brazil," *Energy Econ.*, vol. 97, May 2021, Art. no. 105197. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S014098832100102X>
- [26] A. Lauro, D. Kitamura, W. Lima, B. Dias, and T. Soares, "Considering forward electricity prices for a hydro power plant risk analysis in the Brazilian electricity market," *Energies*, vol. 16, no. 3, p. 1173, Jan. 2023. [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/1996-1073/16/3/1173>
- [27] T. S. Gontijo, R. B. D. Santis, and M. A. Costa, "Application of a data-driven DTSF and benchmark models for the prediction of electricity prices in Brazil: A time-series case," *J. Renew. Sustain. Energy*, vol. 15, no. 3, May 2023, Art. no. 036101, doi: [10.1063/5.0144873](https://doi.org/10.1063/5.0144873).
- [28] B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* (Einaudi Paperbacks). New York, NY, USA: Henry Holt and Company, 1983. [Online]. Available: <https://books.google.com.br/books?id=SWcPAQAAMAAJ>
- [29] B. B. Mandelbrot and J. W. Van Ness, "Fractional Brownian motions, fractional noises and applications," *SIAM Rev.*, vol. 10, no. 4, pp. 422–437, Oct. 1968. [Online]. Available: <http://www.jstor.org/stable/2027184>
- [30] B. B. Mandelbrot and J. R. Wallis, "Some long-run properties of geophysical records," *Water Resour. Res.*, vol. 5, no. 2, pp. 321–340, Apr. 1969, doi: [10.1029/WR005i002p00321](https://doi.org/10.1029/WR005i002p00321).
- [31] B. B. Mandelbrot, "Intermittent turbulence in self-similar cascades: Divergence of high moments and dimension of the carrier," *J. Fluid Mech.*, vol. 62, no. 2, pp. 331–358, Jan. 1974.
- [32] R. Weron and B. Przybyłowicz, "Hurst analysis of electricity price dynamics," *Phys. A, Stat. Mech. Appl.*, vol. 283, nos. 3–4, pp. 462–468, Aug. 2000. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437100002314>
- [33] I. Simonsen, "Measuring anti-correlations in the Nordic electricity spot market by wavelets," *Phys. A, Stat. Mech. Appl.*, vol. 322, pp. 597–606, May 2003. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437102019386>
- [34] P. Norouzzadeh, W. Dullaert, and B. Rahmani, "Anti-correlation and multifractal features of Spain electricity spot market," *Phys. A, Stat. Mech. Appl.*, vol. 380, pp. 333–342, Jul. 2007. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437107002154>
- [35] A. Serletis and M. Bianchi, "Informational efficiency and interchange transactions in Alberta's electricity market," *Energy J.*, vol. 28, no. 3, pp. 121–144, Jul. 2007.
- [36] H. Erzgräber, F. Strozzi, J.-M. Zaldívar, H. Touchette, E. Gutiérrez, and D. K. Arrowsmith, "Time series analysis and long range correlations of Nordic spot electricity market data," *Phys. A, Stat. Mech. Appl.*, vol. 387, no. 26, pp. 6567–6574, Nov. 2008. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437108006778>
- [37] O. Y. Urtskaya and A. Serletis, "Quantifying multiscale inefficiency in electricity markets," *Energy Econ.*, vol. 30, no. 6, pp. 3109–3117, Nov. 2008. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0140988308000522>
- [38] P. Malo, "Modeling electricity spot and futures price dependence: A multifrequency approach," *Phys. A, Stat. Mech. Appl.*, vol. 388, no. 22, pp. 4763–4779, Nov. 2009. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437109006062>
- [39] F. Serinaldi, "Use and misuse of some Hurst parameter estimators applied to stationary and non-stationary financial time series," *Phys. A, Stat. Mech. Appl.*, vol. 389, no. 14, pp. 2770–2781, Jul. 2010. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437110001718>
- [40] X.-Y. Qian, G.-F. Gu, and W.-X. Zhou, "Modified detrended fluctuation analysis based on empirical mode decomposition for the characterization of anti-persistent processes," *Phys. A, Stat. Mech. Appl.*, vol. 390, nos. 23–24, pp. 4388–4395, Nov. 2011. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437111005358>
- [41] M. Rypdal and O. Løvsetten, "Modeling electricity spot prices using mean-reverting multifractal processes," *Phys. A, Stat. Mech. Appl.*, vol. 392, no. 1, pp. 194–207, Jan. 2013. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437112007972>
- [42] W. Liu, C. Y. Chung, and F. Wen, "Multifractal based return interval approach for short-term electricity price volatility risk estimation," *IET Gener., Transmiss. Distrib.*, vol. 8, no. 9, pp. 1550–1560, Sep. 2014, doi: [10.1049/iet-gtd.2013.0680](https://doi.org/10.1049/iet-gtd.2013.0680).
- [43] D. Ghosh, S. Dutta, and S. Chakraborty, "Multifractal behavior of electricity bid price in Indian energy market," *Int. J. Electr. Power Energy Syst.*, vol. 74, pp. 162–171, Jan. 2016. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142061515003129>
- [44] H. Ali, F. Aslam, and P. Ferreira, "Modeling dynamic multifractal efficiency of U.S. electricity market," *Energies*, vol. 14, no. 19, p. 6145, Sep. 2021. [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/1996-1073/14/19/6145>
- [45] C. Han, H. Hilger, E. Mix, P. C. Böttcher, M. Reyers, C. Beck, D. Witthaut, and L. R. Gorbão, "Complexity and persistence of price time series of the European electricity spot market," *PRX Energy*, vol. 1, no. 1, p. 013002, Apr. 2022. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PRXEnergy.1.013002>, doi: [10.1103/PRXEnergy.1.013002](https://doi.org/10.1103/PRXEnergy.1.013002).
- [46] E. Cramer, L. R. Gorbão, A. Mitsos, B. Schäfer, D. Witthaut, and M. Dahmen, "Validation methods for energy time series scenarios from deep generative models," *IEEE Access*, vol. 10, pp. 8194–8207, 2022.
- [47] J. Čurpek, "Analysis of the Czech intraday electricity market during COVID-19 pandemic from the multifractal perspective," *Fluctuation Noise Lett.*, vol. 22, no. 3, Jun. 2023, Art. no. 2350030, doi: [10.1142/S021947752350030X](https://doi.org/10.1142/S021947752350030X).
- [48] *Price Panel*. São Paulo SP, Brazil: CCEE-Câmara de Comercialização de Energia Elétrica, May 2023. [Online]. Available: <https://www.ccee.org.br/precos/painelprecos>
- [49] R. Hyndman and G. Athanasopoulos, *Forecasting: Principles and Practice*. Melbourne, VIC, Australia: OTexts, 2018, pp. 92–96.
- [50] R. B. Cleveland, W. S. Cleveland, J. E. McRae, and I. Terpenning, "STL: A seasonal-trend decomposition procedure based on loess (with discussion)," *J. Off. Statist.*, vol. 6, no. 1, pp. 3–73, 1990.
- [51] S. Seabold and J. Perktold, "StatsModels: Econometric and statistical modeling with Python," in *Proc. 9th Python Sci. Conf.*, 2010.
- [52] E. Ghaderpour, S. D. Pagiatakis, and Q. K. Hassan, "A survey on change detection and time series analysis with applications," *Appl. Sci.*, vol. 11, no. 13, p. 6141, Jul. 2021. [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/2076-3417/11/13/6141>
- [53] C.-K. Peng, S. V. Buldyrev, S. Havlin, M. Simons, H. E. Stanley, and A. L. Goldberger, "Mosaic organization of DNA nucleotides," *Phys. Rev. E, Stat. Phys. Plasmas Fluids Relat. Interdiscip. Top.*, vol. 49, no. 2, pp. 1685–1689, Feb. 1994.

- [54] J. W. Kantelhardt, *Fractal and Multifractal Time Series*. New York, NY, USA: Springer, 2011, pp. 463–487, doi: [10.1007/978-1-4614-1806-1_30](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1806-1_30).
- [55] W.-X. Zhou, “Finite-size effect and the components of multifractality in financial volatility,” *Chaos, Solitons Fractals*, vol. 45, no. 2, pp. 147–155, Feb. 2012. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077911002256>
- [56] J. Theiler, S. Eubank, A. Longtin, B. Galdrikian, and J. Doyné Farmer, “Testing for nonlinearity in time series: The method of surrogate data,” *Phys. D, Nonlinear Phenomena*, vol. 58, nos. 1–4, pp. 77–94, Sep. 1992. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016727899290102S>
- [57] E. F. Fama, “Efficient capital markets: A review of theory and empirical work,” *J. Finance*, vol. 25, no. 2, pp. 383–417, May 1970. [Online]. Available: <http://www.jstor.org/stable/2325486>
- [58] D. O. Cajueiro and B. M. Tabak, “Ranking efficiency for emerging markets,” *Chaos, Solitons Fractals*, vol. 22, no. 2, pp. 349–352, Oct. 2004. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S096007790400075X>
- [59] D. O. Cajueiro and B. M. Tabak, “The Hurst exponent over time: Testing the assertion that emerging markets are becoming more efficient,” *Phys. A, Stat. Mech. Appl.*, vol. 336, nos. 3–4, pp. 521–537, May 2004. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437103011828>
- [60] L. Kristoufek and M. Vosvrda, “Measuring capital market efficiency: Global and local correlations structure,” *Phys. A, Stat. Mech. Appl.*, vol. 392, no. 1, pp. 184–193, Jan. 2013. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437112007935>
- [61] L. Zunino, B. M. Tabak, A. Figliola, D. G. Pérez, M. Garavaglia, and O. A. Rosso, “A multifractal approach for stock market inefficiency,” *Phys. A, Stat. Mech. Appl.*, vol. 387, no. 26, pp. 6558–6566, Nov. 2008. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437108007462>
- [62] G. Papaioannou, C. Dikaiakos, A. Stratigakos, P. Papageorgiou, and K. Krommydas, “Testing the efficiency of electricity markets using a new composite measure based on nonlinear TS tools,” *Energies*, vol. 12, no. 4, p. 618, Feb. 2019. [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/1996-1073/12/4/618>
- [63] Y. Wang, L. Liu, and R. Gu, “Analysis of efficiency for Shenzhen stock market based on multifractal detrended fluctuation analysis,” *Int. Rev. Financial Anal.*, vol. 18, no. 5, pp. 271–276, Dec. 2009. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1057521909000568>
- [64] E. A. F. Ihlen, “Introduction to multifractal detrended fluctuation analysis in MATLAB,” *Frontiers Physiol.*, vol. 3, p. 141, Jun. 2012, doi: [10.3389/fphys.2012.00141](https://doi.org/10.3389/fphys.2012.00141).
- [65] K. Matia, Y. Ashkenazy, and H. E. Stanley, “Multifractal properties of price fluctuations of stocks and commodities,” *Europhys. Lett. EPL*, vol. 61, no. 3, pp. 422–428, Feb. 2003.



ALESSANDRO L. CASTRO received the bachelor’s degree in electrical engineering from the Federal University of Juiz de Fora, Minas Gerais, Brazil, in 1995, and the master’s degree in science from the Department of Industrial Engineering, Pontifical Catholic University of Rio de Janeiro (PUC-Rio), Rio de Janeiro, Brazil, in 2000. He is currently pursuing the Ph.D. degree in electrical engineering with the Federal University of Juiz de Fora.

He has been with Brazilian Electrical Sector as a Consultant in regulatory, tariff, market, and energy planning areas, since 1996. His current research interests include energy planning, multifractality applied to the Brazilian electricity market, forecasting using machine learning techniques, and synthetic time series using generative adversarial networks.



ANDRÉ LUÍS MARQUES MARCATO (Senior Member, IEEE) received the B.Sc. degree in electrical engineering from the Federal University of Juiz de Fora, Juiz de Fora, Brazil, in 1995, and the M.Sc. and D.Sc. degrees in electrical engineering from the Pontifical Catholic University of Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brazil, in 1998 and 2002, respectively. In 2012, he carried out his postdoctoral year with London Imperial College and Faculdade de Engenharia da Universidade do

Porto. He is currently an Associate Professor with the Federal University of Juiz de Fora. He has teaching and researching in the areas of energy planning, control theory, optimization, and robotics. He coordinates or coordinated research projects with many energy companies in the Brazilian Electrical Sector, such as, CEPEL, Petrobras, Light, CESP, Cemig, Duke Energy, and China Three Gorges Corporation. His research interests include the optimization techniques applied to hydrothermal coordination, operation, and expansion planning of electrical systems. He is a Senior Member of IEEE Power and Energy Society and the IEEE Robotics and Automation Society. He was the Chair of the IEEE Minas Gerais Section and the IEEE RAS Chapter.



EDUARDO P. DE AGUIAR received the B.Sc. degree in control and automation engineering from the Federal University of Itajubá (UNIFEI), Brazil, and the M.Sc. and D.Sc. degrees in electrical engineering from the Federal University of Juiz de Fora (UFJF), Brazil.

He served in leadership positions as an Engineer in automation and maintenance in multinationals, such as Becton, Dickinson and Company; Ambev; and Iochpe Maxion S.A. Also, he has international experience in computational intelligence, automation projects, maintenance, transfer, and start-up of production line equipment. He is currently a Professor with the Department of Mechanical Engineering and the Head of the Laboratory of Industrial Automation and Computational Intelligence, UFJF. He is the Co-Founder of the start-ups Stemis Serviços de Tecnologia Ltda., Vitrine Urbana, and Silo DMP and is a Magnus Tecnologia Ltda. partner. His research interests include computational intelligence methods and applications and industrial automation.

•••

REFERÊNCIAS

- 1 A. L. M. Marcato. *Representação Híbrida de Sistemas Equivalentes e Individualizados para o Planejamento da Operação de Sistemas de Potência de Grande Porte*. PhD thesis, Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro: Brasil, 2002.
- 2 Rafael Bruno S. Brandi, Andre Luis Marques Marcato, Bruno Henriques Dias, Tales Pulinho Ramos, and Ivo Chaves da Silva Junior. A convergence criterion for stochastic dual dynamic programming: Application to the long-term operation planning problem. *IEEE Transactions on Power Systems*, 33(4):3678–3690, July 2018. ISSN 1558-0679. doi: 10.1109/TPWRS.2017.2787462.
- 3 Câmara de Comercialização de Energia Elétrica. Gt modernização do setor elétrico. mecanismos de formação de preços. Working paper, Ministério de Minas e Energias, Julho 2019. URL <https://www.gov.br/mme/pt-br/assuntos/secretarias/secretaria-executiva/modernizacao-do-setor-eletrico/arquivos/pasta-geral-publicada/formacao-de-precos.pdf>.
- 4 T.N. Santos, A.L. Diniz, C.H. Saboia, R.N. Cabral, and L.F. Cerqueira. Hourly pricing and day-ahead dispatch setting in brazil: The dessem model. *Electric Power Systems Research*, 189:106709, 2020. ISSN 0378-7796. doi: <https://doi.org/10.1016/j.epsr.2020.106709>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378779620305125>.
- 5 Rafał Weron. *Modeling and Forecasting Electricity Loads and Prices: A Statistical Approach*. Hugo Steinhaus Center, Wroclaw University of Technology, 2006. URL <https://EconPapers.repec.org/RePEc:wuu:hsbook:hsbook0601>.
- 6 Zhi-Qiang Jiang, Wen-Jie Xie, Wei-Xing Zhou, and Didier Sornette. Multifractal analysis of financial markets: a review. *Reports on Progress in Physics*, 82(12):125901, nov 2019. doi: 10.1088/1361-6633/ab42fb. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6633/ab42fb>.
- 7 Jan W. Kantelhardt, Stephan A. Zschiegner, Eva Koscielny-Bunde, Shlomo Havlin, Armin Bunde, and H.Eugene Stanley. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 316(1):87–114, 2002. ISSN 0378-4371. doi: [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(02\)01383-3](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(02)01383-3). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437102013833>.
- 8 Marcelo Vitor Oliveira Araujo and Alcigeimes B. Celeste. Rescaled range analysis of streamflow records in the são francisco river basin, brazil. *Theoretical and Applied Climatology*, 135(1):249–260, 2019. doi: 10.1007/s00704-018-2375-y. URL <https://doi.org/10.1007/s00704-018-2375-y>.
- 9 C.R.C. Rego, H.O. Frota, and M.S. Gusmão. Multifractality of brazilian rivers. *Journal of Hydrology*, 495:208–215, 2013. ISSN 0022-1694. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2013.04.046>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002216941300351X>.
- 10 Eike Cramer, Leonardo Rydin Gorjão, Alexander Mitsos, Benjamin Schäfer, Dirk Witthaut, and Manuel Dahmen. Validation methods for energy time series scenarios from deep generative models. *IEEE Access*, 10:8194–8207, 2022. doi: 10.1109/ACCESS.2022.3141875.

- 11 A.R. Queiroz, F.A. Oliveira, J.W. Marangon Lima, and P.P. Balestrassi. Simulating electricity spot prices in brazil using neural network and design of experiments. In *2007 IEEE Lausanne Power Tech*, pages 2029–2034, 2007. doi: 10.1109/PCT.2007.4538630.
- 12 Tiago Silveira Gontijo, Marcelo Azevedo Costa, and Rodrigo Barbosa de Santis. Electricity price forecasting on electricity spot market: A case study based on the brazilian difference settlement price. In *E3S Web of Conferences*, volume 239, page 00002. EDP Sciences, 2021.
- 13 Massimo Aria and Corrado Cuccurullo. bibliometrix: An r-tool for comprehensive science mapping analysis. *Journal of Informetrics*, 11(4):959–975, 2017. URL <https://doi.org/10.1016/j.joi.2017.08.007>.
- 14 Ingve Simonsen. Measuring anti-correlations in the nordic electricity spot market by wavelets. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 322:597–606, 2003. ISSN 0378-4371. doi: [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(02\)01938-6](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(02)01938-6). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437102019386>.
- 15 Siem Jan Koopman, Marius Oohs, and M. Angeles Carnero. Periodic seasonal reg-arfima-garch models for daily electricity spot prices. *JOURNAL OF THE AMERICAN STATISTICAL ASSOCIATION*, 102(477):16–27, MAR 2007. ISSN 0162-1459. doi: 10.1198/016214506000001022.
- 16 Niels Haldrup and Morten Ørregaard Nielsen. A regime switching long memory model for electricity prices. *Journal of Econometrics*, 135(1):349–376, 2006. ISSN 0304-4076. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2005.07.021>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304407605001715>.
- 17 C K Peng, S V Buldyrev, S Havlin, M Simons, H E Stanley, and A L Goldberger. Mosaic organization of dna nucleotides. *Phys Rev E Stat Phys Plasmas Fluids Relat Interdiscip Topics*, 49(2):1685–1689, Feb 1994. ISSN 1063-651X (Print); 1063-651X (Linking). doi: 10.1103/physreve.49.1685.
- 18 J. F. Muzy, E. Bacry, and A. Arneodo. Wavelets and multifractal formalism for singular signals: Application to turbulence data. *Phys. Rev. Lett.*, 67:3515–3518, Dec 1991. doi: 10.1103/PhysRevLett.67.3515. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.67.3515>.
- 19 J.F. MUZY, E. BACRY, and A. ARNEODO. The multifractal formalism revisited with wavelets. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 04(02):245–302, 1994. doi: 10.1142/S0218127494000204. URL <https://doi.org/10.1142/S0218127494000204>.
- 20 A. Arneodo, E. Bacry, P. V. Graves, and J. F. Muzy. Characterizing long-range correlations in dna sequences from wavelet analysis. *Phys. Rev. Lett.*, 74:3293–3296, Apr 1995. doi: 10.1103/PhysRevLett.74.3293. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.74.3293>.
- 21 A Arneodo, B Audit, N Decoster, JF Muzy, and C Vaillant. The science of disasters. kap. 2. wavelet based multifractal formalism: Applications to dna sequences, satellite images of the cloud structure, and stock market data, s. 27–102, 2002.
- 22 Boris Podobnik and H Eugene Stanley. Detrended cross-correlation analysis: a new method for analyzing two nonstationary time series. *Physical review letters*, 100(8):084102, 2008.

- 23 M. Callon, J. Courtial, and F. Laville. Co-word analysis as a tool for describing the network of interactions between basic and technological research: The case of polymer chemistry. *Scientometrics*, 22(1):155–205, 1991. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF02019280>.
- 24 Tomas Cahlik. Comparison of the Maps of Science. *Scientometrics*, 49(3):373–387, November 2000. doi: 10.1023/A:1010581421990. URL https://ideas.repec.org/a/spr/scient/v49y2000i3d10.1023_a1010581421990.html.
- 25 M.J. Cobo, A.G. López-Herrera, E. Herrera-Viedma, and F. Herrera. Science mapping software tools: Review, analysis, and cooperative study among tools. *Journal of the American Society for Information Science and Technology*, 62(7):1382–1402, 2011. doi: <https://doi.org/10.1002/asi.21525>. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/asi.21525>.
- 26 Shijie Deng. Stochastic models of energy commodity prices and their applications: Mean-reversion with jumps and spikes, 2000.
- 27 Rafal Weron. Energy price risk management. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 285(1):127–134, 2000. ISSN 0378-4371. doi: [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(00\)00276-4](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(00)00276-4). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437100002764>.
- 28 Marius Dillig, Manuel Jung, and Jürgen Karl. The impact of renewables on electricity prices in germany – an estimation based on historic spot prices in the years 2011–2013. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 57:7–15, 2016. ISSN 1364-0321. doi: <https://doi.org/10.1016/j.rser.2015.12.003>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1364032115013866>.
- 29 Florentina Paraschiv, David Erni, and Ralf Pietsch. The impact of renewable energies on eex day-ahead electricity prices. *Energy Policy*, 73:196–210, 2014. ISSN 0301-4215. doi: <https://doi.org/10.1016/j.enpol.2014.05.004>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301421514002845>.
- 30 C.K. Woo, I. Horowitz, J. Moore, and A. Pacheco. The impact of wind generation on the electricity spot-market price level and variance: The texas experience. *Energy Policy*, 39(7):3939–3944, 2011. ISSN 0301-4215. doi: <https://doi.org/10.1016/j.enpol.2011.03.084>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301421511002813>. Special Section: Renewable energy policy and development.
- 31 CCEE Câmara de Comercialização de Energia Elétrica. Balanço 2022, 01 2023.
- 32 Luis Eduardo Nunes, Marcus Vinicius Andrade de Lima, Matthew Davison, and André Luis da Silva Leite. Switch and defer option in renewable energy projects: Evidences from brazil. *Energy*, 231:120972, 2021. ISSN 0360-5442. doi: <https://doi.org/10.1016/j.energy.2021.120972>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360544221012202>.
- 33 Arild Helseth, Albert C. G. Melo, Quentin M. Ploussard, Birger Mo, Maria E. P. Maceira, Audun Botterud, and Nathalie Voisin. Hydropower scheduling toolchains: Comparing experiences in brazil, norway, and usa and implications for synergistic research. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 149(7):04023030, 2023. doi: 10.1061/JWRMD5.WRENG-5911. URL <https://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/JWRMD5.WRENG-5911>.

- 34 F. Cavaliere de Souza and L.F. Loureiro Legey. Brazilian electricity market structure and risk management tools. In *2008 IEEE Power and Energy Society General Meeting - Conversion and Delivery of Electrical Energy in the 21st Century*, pages 1–8. IEEE, 2008. ISBN 9781424419050.
- 35 Fernando C. Munhoz. The necessity of more temporal granularity in the brazilian short-term electricity market. *Sustainable Energy, Grids and Networks*, 11:26–33, 2017. ISSN 2352-4677. doi: <https://doi.org/10.1016/j.segan.2017.06.001>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S235246771730084X>.
- 36 Isabella Marchetti and Erik Eduardo Rego. The impact of hourly pricing for renewable generation projects in brazil. *Renewable Energy*, 189:601–617, 2022. ISSN 0960-1481. doi: <https://doi.org/10.1016/j.renene.2022.03.026>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960148122003032>.
- 37 Ciniro Aparecido Leite Nametala, Wandry Rodrigues Faria, Guilherme Guimarães Lage, and Benvindo Rodrigues Pereira. Analysis of hourly price granularity implementation in the brazilian deregulated electricity contracting environment. *Utilities Policy*, 81:101513, 2023. ISSN 0957-1787. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jup.2023.101513>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957178723000255>.
- 38 Abdinardo Moreira Barreto de Oliveira, Anandadeep Mandal, and Gabriel J. Power. A primer on the pricing of electric energy options in brazil via mean-reverting stochastic processes. *Energy Reports*, 5:594–601, 2019. ISSN 2352-4847. doi: <https://doi.org/10.1016/j.egyr.2019.03.010>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352484719300125>.
- 39 Toby Daglish, Gabriel Godofredo Fiuza de Bragança, Sally Owen, and Teresa Romano. Pricing effects of the electricity market reform in brazil. *Energy Economics*, 97:105197, 2021. ISSN 0140-9883. doi: <https://doi.org/10.1016/j.eneco.2021.105197>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S014098832100102X>.
- 40 Arthur Lauro, Daniel Kitamura, Waleska Lima, Bruno Dias, and Tiago Soares. Considering forward electricity prices for a hydro power plant risk analysis in the brazilian electricity market. *Energies*, 16(3), 2023. ISSN 1996-1073. doi: 10.3390/en16031173. URL <https://www.mdpi.com/1996-1073/16/3/1173>.
- 41 Isabella Marchetti and Erik Eduardo Rego. The impact of hourly pricing for renewable generation projects in brazil. *Renewable Energy*, 189:601–617, 2022. ISSN 0960-1481. doi: <https://doi.org/10.1016/j.renene.2022.03.026>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960148122003032>.
- 42 Tiago Silveira Gontijo, Rodrigo Barbosa de Santis, and Marcelo Azevedo Costa. Application of a data-driven DTSF and benchmark models for the prediction of electricity prices in Brazil: A time-series case. *Journal of Renewable and Sustainable Energy*, 15(3), 05 2023. ISSN 1941-7012. doi: 10.1063/5.0144873. URL <https://doi.org/10.1063/5.0144873>. 036101.
- 43 Tiago Silveira Gontijo, Marcelo Azevedo Costa, and Rodrigo Barbosa de Santis. Electricity price forecasting on electricity spot market: A case study based on the brazilian difference settlement price. In *E3S Web of Conferences*, volume 239, page 00002. EDP Sciences, 2021.
- 44 B.B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. Einaudi paperbacks. Henry Holt and Company, 1983. ISBN 9780716711865. URL <https://books.google.com.br/books?id=SWcPAQAAMAAJ>.

- 45 Benoit B. Mandelbrot and John W. Van Ness. Fractional brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review*, 10(4):422–437, 1968. ISSN 00361445. URL <http://www.jstor.org/stable/2027184>.
- 46 Benoit B. Mandelbrot and James R. Wallis. Some long-run properties of geophysical records. *Water Resources Research*, 5(2):321–340, 1969. doi: <https://doi.org/10.1029/WR005i002p00321>. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/WR005i002p00321>.
- 47 Harold Edwin Hurst. Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American society of civil engineers*, 116(1):770–799, 1951.
- 48 E.E. Peters. *Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics*. Wiley Finance. Wiley, 1994. ISBN 9780471585244. URL https://books.google.com.br/books?id=_bkoySKyc_cC.
- 49 Andrew W Lo. Long-term memory in stock market prices. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 1279–1313, 1991.
- 50 Murad S Taqqu, Valery Teverovsky, and Walter Willinger. Estimators for long-range dependence: an empirical study. *Fractals*, 3(04):785–798, 1995.
- 51 J. Beran. *Statistics for Long-memory Processes*. Monographs on statistics and applied probability. Chapman & Hall, 1994. ISBN 9780412044014. URL https://books.google.com.br/books?id=WfW_AQAAlAAJ.
- 52 Benoit B. Mandelbrot. Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier. *Journal of Fluid Mechanics*, 62(2):331–358, 1974. doi: 10.1017/S0022112074000711.
- 53 S. Mallat and W.L. Hwang. Singularity detection and processing with wavelets. *IEEE Transactions on Information Theory*, 38(2):617–643, March 1992. ISSN 1557-9654. doi: 10.1109/18.119727.
- 54 Jan W. Kantelhardt. *Fractal and Multifractal Time Series*, pages 463–487. Springer New York, New York, NY, 2011. ISBN 978-1-4614-1806-1. doi: 10.1007/978-1-4614-1806-1_30. URL https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1806-1_30.
- 55 Wei-Xing Zhou. Multifractal detrended cross-correlation analysis for two nonstationary signals. *Physical Review E*, 77(6):066211, 2008.
- 56 Jose Alvarez-Ramirez, Eduardo Rodriguez, and Juan Carlos Echeverria. A dfa approach for assessing asymmetric correlations. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 388(12):2263–2270, 2009. ISSN 0378-4371. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2009.03.007>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437109002015>.
- 57 Guangxi Cao, Ling-Yun He, and Jie Cao. *Multifractal Detrend Method with Different Filtering*, pages 169–221. Springer Singapore, 02 2018. ISBN 978-981-10-7915-3. doi: 10.1007/978-981-10-7916-0_9.
- 58 H. E. Hurst. Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116(1):770–799, jan 1951. doi: 10.1061/taceat.0006518. URL <https://doi.org/10.1061%2Ftaceat.0006518>.

- 59 C K Peng, S Havlin, H E Stanley, and A L Goldberger. Quantification of scaling exponents and crossover phenomena in nonstationary heartbeat time series. *Chaos*, 5(1):82–87, 1995. ISSN 1054-1500 (Print); 1054-1500 (Linking). doi: 10.1063/1.166141.
- 60 Rafal Weron and Beata Przybyłowicz. Hurst analysis of electricity price dynamics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 283(3):462–468, 2000. ISSN 0378-4371. doi: [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(00\)00231-4](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(00)00231-4). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437100002314>.
- 61 P. Norouzzadeh, W. Dullaert, and B. Rahmani. Anti-correlation and multifractal features of spain electricity spot market. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 380:333–342, 2007. ISSN 0378-4371. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2007.02.087>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437107002154>.
- 62 Apostolos Serletis and Mattia Bianchi. Informational efficiency and interchange transactions in alberta’s electricity market. *The Energy Journal*, 28:121–144, 07 2007. doi: 10.2307/41323112.
- 63 Hartmut Erzgräber, Fernanda Strozzi, José-Manuel Zaldívar, Hugo Touchette, Eugénio Gutiérrez, and David K. Arrowsmith. Time series analysis and long range correlations of nordic spot electricity market data. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387(26):6567–6574, 2008. ISSN 0378-4371. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2008.07.030>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437108006778>.
- 64 Olga Y. Urtskaya and Apostolos Serletis. Quantifying multiscale inefficiency in electricity markets. *Energy Economics*, 30(6):3109–3117, 2008. ISSN 0140-9883. doi: <https://doi.org/10.1016/j.eneco.2008.03.009>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0140988308000522>. Technological Change and the Environment.
- 65 Pekka Malo. Modeling electricity spot and futures price dependence: A multifrequency approach. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 388(22):4763–4779, 2009. ISSN 0378-4371. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2009.07.048>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437109006062>.
- 66 Francesco Serinaldi. Use and misuse of some hurst parameter estimators applied to stationary and non-stationary financial time series. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 389(14):2770–2781, 2010. ISSN 0378-4371. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2010.02.044>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437110001718>.
- 67 Xi-Yuan Qian, Gao-Feng Gu, and Wei-Xing Zhou. Modified detrended fluctuation analysis based on empirical mode decomposition for the characterization of anti-persistent processes. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 390(23):4388–4395, 2011. ISSN 0378-4371. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2011.07.008>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437111005358>.
- 68 Martin Rypdal and Ola Løvsetten. Modeling electricity spot prices using mean-reverting multifractal processes. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 392(1):194–207, 2013. ISSN 0378-4371. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2012.08.004>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437112007972>.

- 69 Weijia Liu, Chi Yung Chung, and Fushuan Wen. Multifractal based return interval approach for short-term electricity price volatility risk estimation. *IET Generation, Transmission & Distribution*, 8(9):1550–1560, 2014. doi: <https://doi.org/10.1049/iet-gtd.2013.0680>. URL <https://ietresearch.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1049/iet-gtd.2013.0680>.
- 70 Dipak Ghosh, Srimonti Dutta, and Sayantan Chakraborty. Multifractal behavior of electricity bid price in indian energy market. *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, 74:162–171, 2016. ISSN 0142-0615. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2015.07.026>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142061515003129>.
- 71 Haider Ali, Faheem Aslam, and Paulo Ferreira. Modeling dynamic multifractal efficiency of us electricity market. *Energies*, 14(19), 2021. ISSN 1996-1073. doi: 10.3390/en14196145. URL <https://www.mdpi.com/1996-1073/14/19/6145>.
- 72 Chengyuan Han, Hannes Hilger, Eva Mix, Philipp C. Böttcher, Mark Reyers, Christian Beck, Dirk Witthaut, and Leonardo Rydin Gorjão. Complexity and persistence of price time series of the european electricity spot market, 2021.
- 73 Eike Cramer, Leonardo Rydin Gorjão, Alexander Mitsos, Benjamin Schäfer, Dirk Witthaut, and Manuel Dahmen. Validation methods for energy time series scenarios from deep generative models. *IEEE Access*, 10:8194–8207, 2022. ISSN 2169-3536. doi: 10.1109/ACCESS.2022.3141875.
- 74 Juraj Čurpek. Analysis of the czech intraday electricity market during covid-19 pandemic from the multifractal perspective. *Fluctuation and Noise Letters*, 0(0):2350030, 0. doi: 10.1142/S021947752350030X. URL <https://doi.org/10.1142/S021947752350030X>.
- 75 Rafal Weron. Estimating long range dependence: finite sample properties and confidence intervals. HSC Research Reports HSC/01/03, Hugo Steinhaus Center, Wroclaw University of Technology, 1 2001. URL <https://ideas.repec.org/p/wuu/wpaper/hsc0103.html>.
- 76 Apostolos Serletis and Aryeh Adam Rosenberg. The hurst exponent in energy futures prices. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 380:325–332, 2007. ISSN 0378-4371. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2007.02.055>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037843710700204X>.
- 77 Hadrien Salat, Roberto Murcio, and Elsa Arcaute. Multifractal methodology. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 473:467–487, 2017. ISSN 0378-4371. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.01.041>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437117300341>.
- 78 Han Lin Shang. A comparison of hurst exponent estimators in long-range dependent curve time series. *Journal of Time Series Econometrics*, 12(1), 2020. URL <https://EconPapers.repec.org/RePEc:bpj:jtsmet:v:12:y:2020:i:1:p:39:n:3>.
- 79 P. A. Morettin and C. M. C. Toloi. *Análise de Séries Temporais*. ABE - Projeto Fisher. Editora Edgard Blucher Ltda, 2 edition, 1 2006. ISBN 8521203896.
- 80 Benoit Mandelbrot. The Variation of Certain Speculative Prices. *The Journal of Business*, 36:394–394, 1963. doi: 10.1086/294632. URL <https://ideas.repec.org/a/ucp/jnlbus/v36y1963p394.html>.

- 81 Benoit B. Mandelbrot. Limit theorems on the self-normalized range for weakly and strongly dependent processes. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 31(4):271–285, Dec 1975. ISSN 1432-2064. doi: 10.1007/BF00532867. URL <https://doi.org/10.1007/BF00532867>.
- 82 A. A. Anis and E. H. Lloyd. The expected value of the adjusted rescaled hurst range of independent normal summands. *Biometrika*, 63(1):111–116, 1976. ISSN 00063444.
- 83 Edgar E. Peters. *Fractal market analysis : applying chaos theory to investment and economics*. Wiley finance editions. J. Wiley & Sons, New York, 1994. ISBN 0471585246.
- 84 H E Hurst. Methods of using long-term storage in reservoirs. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, 5(5):519–543, 1956. doi: 10.1680/iicep.1956.11503. URL <https://doi.org/10.1680/iicep.1956.11503>.
- 85 Daniel O Cajueiro and Benjamin M Tabak. The hurst exponent over time: testing the assertion that emerging markets are becoming more efficient. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 336(3):521–537, 2004. ISSN 0378-4371. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2003.12.031>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437103011828>.
- 86 Guangxi Cao, Ling-Yun He, and Jie Cao. *Multifractal Detrended Analysis Method and Its Application in Financial Markets*. Number 978-981-10-7916-0 in Springer Books. Springer Singapore, May 2018. doi: 10.1007/978-981-10-7916-0.
- 87 Jan W Kantelhardt, Eva Koscielny-Bunde, Henio H.A Rego, Shlomo Havlin, and Armin Bunde. Detecting long-range correlations with detrended fluctuation analysis. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 295(3):441–454, 2001. ISSN 0378-4371. doi: [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(01\)00144-3](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(01)00144-3). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437101001443>.
- 88 Guangxi Cao, Ling-Yun He, and Jie Cao. *Multifractal Detrended Analysis Method and Its Application in Financial Markets*. Springer Singapore, 02 2018. ISBN 978-981-10-7915-3. doi: 10.1007/978-981-10-7916-0.
- 89 Boris Podobnik, Zhi-Qiang Jiang, Wei-Xing Zhou, and H. Eugene Stanley. Statistical tests for power-law cross-correlated processes. *Phys. Rev. E*, 84:066118, Dec 2011. doi: 10.1103/PhysRevE.84.066118. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.84.066118>.
- 90 Benoit B. Mandelbrot. Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier. *Journal of Fluid Mechanics*, 62(2):331–358, 1974. doi: 10.1017/S0022112074000711.
- 91 Wei-Xing Zhou. Finite-size effect and the components of multifractality in financial volatility. *Chaos, Solitons and Fractals*, 45(2):147–155, 2012. ISSN 0960-0779. doi: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2011.11.004>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077911002256>.
- 92 Wei-Xing Zhou et al. Multifractal detrended cross-correlation analysis for two nonstationary signals. *Physical Review E*, 77(6):066211, 2008.
- 93 L. Kristoufek. Multifractal height cross-correlation analysis: A new method for analyzing long-range cross-correlations. *Europhysics Letters*, 95(6):68001, aug 2011. doi:

- 10.1209/0295-5075/95/68001. URL
<https://dx.doi.org/10.1209/0295-5075/95/68001>.
- 94 S. Shadkhoo and G. R. Jafari. Multifractal detrended cross-correlation analysis of temporal and spatial seismic data. *The European Physical Journal B*, 72(4):679–683, Dec 2009. ISSN 1434-6036. doi: 10.1140/epjb/e2009-00402-2. URL
<https://doi.org/10.1140/epjb/e2009-00402-2>.
- 95 James Theiler, Stephen Eubank, André Longtin, Bryan Galdrikian, and J. Doyne Farmer. Testing for nonlinearity in time series: the method of surrogate data. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 58(1):77–94, 1992. ISSN 0167-2789. doi:
[https://doi.org/10.1016/0167-2789\(92\)90102-S](https://doi.org/10.1016/0167-2789(92)90102-S). URL
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016727899290102S>.
- 96 R.J. Hyndman and G. Athanasopoulos. *Forecasting: principles and practice*. OTexts, 2018. ISBN 9780987507112. URL https://books.google.com.br/books?id=_bBhDwAAQBAJ.
- 97 A. Pal and PKS Prakash. *Practical Time Series Analysis*. Packt Publishing, 2017. ISBN 9781788290227. URL <https://books.google.com.br/books?id=NkFWtAEACAAJ>.
- 98 Eugene F. Fama. Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. *The Journal of Finance*, 25(2):383–417, 1970. ISSN 00221082, 15406261. URL
<http://www.jstor.org/stable/2325486>.
- 99 Daniel O. Cajueiro and Benjamin M. Tabak. Ranking efficiency for emerging markets. *Chaos, Solitons and Fractals*, 22(2):349–352, 2004. ISSN 0960-0779. doi:
<https://doi.org/10.1016/j.chaos.2004.02.005>. URL
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S096007790400075X>.
- 100 Daniel O Cajueiro and Benjamin M Tabak. The hurst exponent over time: testing the assertion that emerging markets are becoming more efficient. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 336(3):521–537, 2004. ISSN 0378-4371. doi:
<https://doi.org/10.1016/j.physa.2003.12.031>. URL
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437103011828>.
- 101 Ladislav Kristoufek and Miloslav Vosvrda. Measuring capital market efficiency: Global and local correlations structure. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 392(1):184–193, 2013. ISSN 0378-4371. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2012.08.003>. URL
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437112007935>.
- 102 L. Zunino, B.M. Tabak, A. Figliola, D.G. Pérez, M. Garavaglia, and O.A. Rosso. A multifractal approach for stock market inefficiency. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387(26):6558–6566, 2008. ISSN 0378-4371. doi:
<https://doi.org/10.1016/j.physa.2008.08.028>. URL
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437108007462>.
- 103 George P. Papaioannou, Christos Dikaiakos, Akylas C. Stratigakos, Panos C. Papageorgiou, and Konstantinos F. Krommydas. Testing the efficiency of electricity markets using a new composite measure based on nonlinear ts tools. *Energies*, 12(4), 2019. ISSN 1996-1073. doi: 10.3390/en12040618. URL <https://www.mdpi.com/1996-1073/12/4/618>.
- 104 Yudong Wang, Li Liu, and Rongbao Gu. Analysis of efficiency for shenzhen stock market based on multifractal detrended fluctuation analysis. *International Review of Financial Analysis*, 18(5):271–276, 2009. ISSN 1057-5219. doi:

<https://doi.org/10.1016/j.irfa.2009.09.005>. URL

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1057521909000568>.

- 105 Robert B. Cleveland, William S. Cleveland, Jean E. McRae, and Irma Terpenning. Stl: A seasonal-trend decomposition procedure based on loess (with discussion). *Journal of Official Statistics*, 6:3–73, 1990.
- 106 Kasun Bandara, Rob J Hyndman, and Christoph Bergmeir. Mstl: A seasonal-trend decomposition algorithm for time series with multiple seasonal patterns, 2021.
- 107 Skipper Seabold and Josef Perktold. Statsmodels: Econometric and statistical modeling with python. In *9th Python in Science Conference*, 2010.
- 108 R. J. Hyndman and Y. Khandakar. Automatic time series forecasting: the forecast package for R. *Journal of Statistical Software*, 26(3):1–22, 2008. URL <http://www.jstatsoft.org/article/view/v027i03>.
- 109 M. V. F. Pereira and L. M. V. G. Pinto. Stochastic optimization of a multireservoir hydroelectric system: A decomposition approach. *Water Resources Research*, 21(6):779–792, 1985. doi: <https://doi.org/10.1029/WR021i006p00779>. URL <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/WR021i006p00779>.
- 110 Rafael Bruno S. Brandi, André Luís Marques Marcato, Bruno Henriques Dias, Tales Pulinho Ramos, and Ivo Chaves da Silva Junior. A convergence criterion for stochastic dual dynamic programming: Application to the long-term operation planning problem. *IEEE Transactions on Power Systems*, 33:3678–3690, 2018.
- 111 Donald J. Noakes, A.Ian McLeod, and Keith W. Hipel. Forecasting monthly riverflow time series. *International Journal of Forecasting*, 1(2):179–190, 1985. ISSN 0169-2070. doi: [https://doi.org/10.1016/0169-2070\(85\)90022-6](https://doi.org/10.1016/0169-2070(85)90022-6). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0169207085900226>.
- 112 M E. P. Maceira and C V Bezerra. Stochastic streamflow model for hydroelectric systems, Dec 1997.
- 113 Centro de Pesquisas de Energia Elétrica CEPEL. *Previvaz - Modelo de Previsão de Vazões Semanais Afluentes aos Aproveitamentos Hidrelétricos do Sistema Brasileiro*, 12 2015.
- 114 Operador Nacional do Sistema (ONS). Novo modelo de previsão de vazões com informação de precipitação para o trecho incremental de itaipu. Technical report, ONS, Rio de Janeiro, 11 2007.
- 115 Operador Nacional do Sistema (ONS). Metodologia para Previsão de Vazões uma Semana à frente na Bacia do Alto/Médio Rio Grande. Technical report, ONS, Rio de Janeiro, 5 2009.
- 116 J. A. John and N. R. Draper. An alternative family of transformations. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, 29(2):190–197, 1980. ISSN 00359254, 14679876. URL <http://www.jstor.org/stable/2986305>.
- 117 Paul L. Joskow. Capacity payments in imperfect electricity markets: Need and design. *Utilities Policy*, 16(3):159–170, 2008. ISSN 0957-1787. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jup.2007.10.003>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957178707000926>. Capacity Mechanisms in Imperfect Electricity Markets.

- 118 Centro de Pesquisas de Energia Elétrica CEPEL. *Manual de Referência do Modelo Newave*, 02 2022.
- 119 Empresa de Pesquisas Energética. *Metodologia - Modelo de Projeção de Demanda de Eletricidade*, 05 2019.
- 120 Espen Ihlen. Introduction to multifractal detrended fluctuation analysis in matlab. *Frontiers in Physiology*, 3, 2012. ISSN 1664-042X. doi: 10.3389/fphys.2012.00141. URL <https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fphys.2012.00141>.
- 121 Kaushik Matia, Yosef Ashkenazy, and H. Stanley. Multifractal properties of price fluctuations of stocks and commodities. *EPL (Europhysics Letters)*, 61:422, 01 2007. doi: 10.1209/epl/i2003-00194-y.
- 122 R. Tyrrell Rockafellar and Roger J.-B. Wets. *Variational Analysis*. Springer Verlag, Heidelberg, Berlin, New York, 1998.
- 123 Daniel P. Huttenlocher, Gregory A. Klanderman, and William Rucklidge. Comparing images using the hausdorff distance. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 15:850–863, 1993. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:8027136>.
- 124 Günter Rote. Computing the minimum hausdorff distance between two point sets on a line under translation. *Information Processing Letters*, 38(3):123–127, 1991. ISSN 0020-0190. doi: [https://doi.org/10.1016/0020-0190\(91\)90233-8](https://doi.org/10.1016/0020-0190(91)90233-8). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020019091902338>.
- 125 D. D. J. Penna, M. E. P. Maceira, J. M. Damázio, F. Treisman, and H. S. Araújo. *Modelo de Geração de Séries Sintéticas de Energias e Vazões - Manual de Referência*, 12 2018.
- 126 M. E. P. Maceira and J. M. Damázio. Use of the par(p) model in the stochastic dual dynamic programming optimization scheme used in the operation planning of the brazilian hydropower system. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 20(1): 143–156, 2006. doi: 10.1017/S0269964806060098.
- 127 Espen Ihlen. Introduction to multifractal detrended fluctuation analysis in matlab. *Frontiers in Physiology*, 3, 2012. ISSN 1664-042X. doi: 10.3389/fphys.2012.00141. URL <https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fphys.2012.00141>.
- 128 Stefano Bianchi. fathon: A python package for a fast computation of detrended fluctuation analysis and related algorithms. *Journal of Open Source Software*, 5(45):1828, 2020. doi: 10.21105/joss.01828. URL <https://doi.org/10.21105/joss.01828>.