

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

Vinícius Gonçalves Valle

**SOBRE SISTEMAS DE 2 NÍVEIS EM MECÂNICA QUÂNTICA E SUAS
CONEXÕES COM O ESPAÇO FÍSICO**

Juiz de Fora

2023

Vinícius Gonçalves Valle

**SOBRE SISTEMAS DE 2 NÍVEIS EM MECÂNICA QUÂNTICA E SUAS
CONEXÕES COM O ESPAÇO FÍSICO**

Dissertação apresentada ao Programa de graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de grau de bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Bruno Ferreira Rizzuti

Coorientador: Prof. Dr. Wallon Anderson Tadaiesky Nogueira

Juiz de Fora

2023

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Valle, Vinicius Gonçalves.

SOBRE SISTEMAS DE 2 NÍVEIS EM MECÂNICA QUÂNTICA E
SUAS CONEXÕES COM O ESPAÇO FÍSICO / Vinicius Gonçalves Valle.
– 2023.

45 f. : il.

Orientador: Bruno Ferreira Rizzuti

Coorientador: Wallon Anderson Tadaiesky Nogueira

Dissertação (graduação) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Departamento de Física, instituto de ciências exatas. Programa de graduação em Física, 2023.

1. Sistema quântico de 2 níveis. 2. Polarizador universal. 3. Fibração de Hopf. I. Rizzuti, Bruno Ferreira, orient. II. Nogueira, Wallon Anderson Tadaiesky, coorient. III. Título.

Vinicius Gonçalves Valle

**SOBRE SISTEMAS DE 2 NÍVEIS EM MECÂNICA QUÂNTICA E SUAS
CONEXÕES COM O ESPAÇO FÍSICO**

Dissertação apresentada ao Programa de graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de grau de bacharel em Física.

Aprovada em 13 de julho de 2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Bruno Ferreira Rizzuti - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Wallon Anderson Tadaiesky Nogueira -
Coorientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Rodrigo Alves Dias
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof^a. Dra. Giovana Trevisan Nogueira
Universidade Federal de Juiz de Fora



UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
REITORIA - ICE - Departamento de Física

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

A Coordenação do Curso de Bacharelado e Licenciatura em Física Diurno declara que, no dia 13/07/2023, o aluno **Vinícius Gonçalves Valle**, matrícula **201965673E**, orientado pelo **Prof. Dr. Bruno Ferreira Rizzuti** e coorientado pelo **Prof. Dr. Wallon Anderson Tadaiesky Nogueira**, apresentou seu trabalho de conclusão de curso, intitulado “**Sobre Sistemas de 2 Níveis em Mecânica Quântica e suas Conexões com o Espaço Físico**”, tendo sido aprovada pela banca examinadora com nota 80, com a ressalva de fazer as correções sugeridas pela banca no trabalho escrito.

Juiz de Fora, 13 de julho de 2023

Prof. Dr. Valdemir Eneas Ludwig

Coordenador do Curso de Bacharelado e Licenciatura em Física

Banca examinadora:

Prof. Dr. Bruno Ferreira Rizzuti - Orientador e Presidente

Departamento de Física - ICE - UFJF

Prof. Dr. Wallon Anderson Tadaiesky Nogueira - Coorientador

Departamento de Física - ICE - UFJF

Profa. Dra. Giovana Trevisan Nogueira

Departamento de Física - ICE - UFJF

Prof. Dr. Rodrigo Alves Dias

Departamento de Física - ICE - UFJF



Documento assinado eletronicamente por **Bruno Ferreira Rizzuti, Professor(a)**, em 13/07/2023, às 19:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Valdemir Eneias Ludwig, Professor(a)**, em 13/07/2023, às 19:15, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Giovana Trevisan Nogueira, Professor(a)**, em 15/07/2023, às 10:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rodrigo Alves Dias, Professor(a)**, em 15/07/2023, às 12:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Wallon Anderson Tadaiesky Nogueira, Professor(a)**, em 17/07/2023, às 16:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **1351387** e o código CRC **4816C546**.

Dedico este trabalho aos meus pais, que me acompanharam em cada passo do caminho e me deram a educação e as oportunidades que me tornaram a pessoa que sou hoje. É graças aos seus esforços que tenho a possibilidade de concluir o meu curso.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais. À minha mãe, Flávia, não poderia ter pedido por um exemplo melhor de competência e honestidade. Obrigado por sempre estar disposta e se preocupar comigo. Ao meu pai, Marcos, que me acompanhou nessa minha escolha de curso, estando sempre presente e me ajudando tanto no dia a dia, quanto na própria elaboração deste trabalho. Além de ter sido uma pessoa essencial para minha educação como meu professor, me inspirou e continua me inspirando até hoje como pai.

Aos meus avós, avôs, tios e tias, que desde sempre me receberam com imenso carinho em finais de semana alternados, nas férias e nas comemorações de final de ano. Momentos que sempre vão ficar guardados comigo e que tive a imensa sorte de compartilhá-los com vocês.

Ao meu orientador, Bruno, não sei nem por onde começar. Obrigado por me guiar nesses últimos anos e me proporcionar tantos conhecimentos e referências que me inspiraram a continuar estudando e me esforçando cada vez mais. Obrigado também pela imensa paciência que teve comigo e grande ajuda na elaboração deste trabalho. Agradeço também ao meu coorientador, Wallon, e a todos os demais professores do departamento de física e de outros departamentos, que foram essenciais para minha formação.

Agradecimentos especiais aos amigos que fiz ao decorrer da minha graduação, por todos os momentos, risadas, e pela determinação coletiva que temos de aprender e ajudar uns aos outros. Que nossa amizade e vida acadêmica continue para anos que virão. E por último, aos meus amigos de longa data, da cidade em que cresci e de outros lugares, amizades que tenho há tanto tempo que nem sequer lembro de como os conheci. Vocês foram sempre constantes na minha vida e acredito que sempre serão.

"Os fenômenos quânticos não ocorrem no espaço de Hilbert, eles ocorrem no laboratório".
Asher Peres

RESUMO

Diversos experimentos podem ser descritos através de conceitos e interpretações quânticas, isto é, resultados esperados deixam de ter um caráter determinístico e a previsão teórica fica restrita a um caráter probabilístico irreduzível. Os sistemas quânticos mais simples possíveis são chamados de sistemas de 2 níveis, que serão explorados detalhadamente nesse trabalho. Todo e qualquer experimento é conduzido em um espaço físico por parâmetros reais característicos de equipamentos normalmente pertencentes a laboratórios, portanto não é exagero dizer que, de alguma forma ou de outra, seria possível investigar experimentos quânticos através desses parâmetros, e que existiria uma ligação desses com a interpretação matemática/quântica de tais experimentos. Este trabalho cumpre com o objetivo de fornecer uma interpretação operacional para a relação entre a dimensão do espaço de estados, onde os experimentos são representados, e a própria dimensão do espaço físico do laboratório. Usaremos com fins ilustrativos exemplos populares de sistemas de dois níveis - o experimento de Stern-Gerlach, e também experimentos que utilizam luz polarizada. Se por um lado, podemos conectar geometricamente uma esfera quadridimensional com um espaço base tridimensional via fibração de Hopf, por outro lado, conseguimos fornecer uma interpretação física para esta conexão, que, a priori, seria puramente matemática.

Palavras-chave: Sistemas quânticos de 2 níveis. Polarizador universal. Fbração de Hopf.

ABSTRACT

Numerous experiments can be described through quantum concepts and interpretations, that is, expected outcomes no longer have a deterministic nature, and theoretical predictions are restricted to an irreducible probabilistic nature. The simplest possible quantum systems are called two-level systems, which will be thoroughly explored in this paper. Any and all experiment is conducted in a physical space, characterized by real parameters typically associated with laboratory equipment, therefore, is not a far stretch to say that, in some way or another, it would be possible to investigate quantum experiments through these parameters, and that there would be a connection between them and the mathematical/quantum interpretation of such experiments. This paper aims to provide an operational interpretation for the relationship between the dimension of the state space, where experiments are represented, and the physical dimension of the laboratory space itself. We will use popular examples of two-level systems for illustrative purposes, such as the Stern-Gerlach experiment and experiments involving polarized light. If on one hand, we can connect geometrically a four-dimensional sphere to a three-dimensional base space through Hopf fibration, on the other hand, we can provide a physical interpretation for this connection, which, at first, was purely mathematical.

Keywords: Two-state quantum system. Universal polarization gadget. Hopf fibration.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– Mapeamento que vai de \mathbb{C}^2 a \mathbb{C}	27
Figura 2	– Mapeamento que vai de S^2 a $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$	28
Figura 3	– Mapeamento que vai de S^3 a S^2	29
Figura 4	– Representação do experimento de Stern-Gerlach.	30
Figura 5	– Sistema de coordenadas usado para descrever a direção do \vec{B}	31
Figura 6	– Associação de placas de meia e um quarto de onda	36

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	CONCEITOS MATEMÁTICOS	13
2.1	ÁLGEBRA LINEAR	13
2.1.1	Espaços e Subespaços Vetoriais	13
2.1.2	Dimensão	14
2.1.3	Transformações Lineares	14
2.1.4	Produto Interno Complexo	15
2.1.5	Operadores Lineares	15
2.1.6	Produto Tensorial	16
2.1.7	Decomposição de Schmidt	17
2.2	CONCEITOS BÁSICOS DE TEORIA DE GRUPOS	19
2.2.1	Definição de um grupo	19
2.2.2	O grupo $SU(2)$ e a álgebra de Lie correspondente	23
3	FIBRAÇÃO DE HOPF E A ESFERA DE BLOCH	26
3.1	BIT QUÂNTICO E ESPAÇO DE ESTADOS	26
3.2	FIBRAÇÃO DE HOPF	26
3.3	EXPERIMENTO DE STERN-GERLACH E POLARIZAÇÃO DA LUZ	30
4	POLARIZAÇÃO DA LUZ	33
4.1	PLACAS DE MEIA E DE UM QUARTO DE ONDA	33
4.2	MONTAGEM DE UM POLARIZADOR UNIVERSAL	34
5	CONCLUSÃO	38
	REFERÊNCIAS	39
A	Apêndice	41

1 INTRODUÇÃO

Sistemas quânticos de 2 níveis, popularmente representados como qubits ¹, além de serem extensivamente estudados e elaborados por diversos livros e artigos (1, 2, 3), são também a base de diversas áreas de estudos, dentre elas a área de informação quântica e de criptografia quântica (4). Este trabalho visa explorar conexões entre este espaço de estados com o espaço físico de preparação deste, realizado em um laboratório.

Ao analisarmos um problema como o experimento Stern-Gerlach (5, 6, 7, 8) por via de sistemas de 2 níveis, podemos afirmar que a interpretação quântica deste esta relacionada com a própria preparação desse experimento, já que este foi inteiramente conduzido em um laboratório. Tal afirmação é corroborada pelo resultado interessante encontrado recentemente no artigo (3), que, através de fibrações de Hopf (9), liga geometricamente um sistema de 2 níveis com a preparação do campo magnético utilizado no experimento de Stern-Gerlach. Ressaltamos que, mesmo após 100 anos, tal experimento ainda é utilizada para medidas em qubits (10). Contudo, pelo fato de existirem diversos outros sistemas de 2 níveis, como é o caso da polarização da luz (11), e uma quantidade ainda maior de sistemas que podem ser aproximados por 2 níveis (2), que não o Stern-Gerlach, poderíamos então nos perguntar sobre a validade geral da conexão entre um espaço de estados bidimensional - a esfera de Bloch S^3 - com um espaço físico tridimensional, representado pela esfera S^2 .

O outro exemplo de interesse seria o de fótons polarizados (11, 12, 13). Poderíamos ter a impressão que luz polarizada poderia ser descrita por um espaço bidimensional onde se daria a oscilação do campo elétrico (14), o que estaria em contradição com a fibração de Hopf. Nosso trabalho também responde a este questionamento sobre a conexão deste sistemas de 2 níveis com sua preparação através do alinhamento de polarizadores específicos.

Este trabalho será dividido da seguinte maneira: no próximo capítulo iremos fazer uma breve revisão a respeito de conceitos de álgebra linear e de teoria de grupos utilizados em mecânica quântica, que servirão não só como fixação da notação, mas como base para todos os cálculos presentes nos capítulos seguintes. Utilizando esses conceitos e um pouco de geometria, no capítulo 3 será explorada, através da fibração de Hopf, a conexão entre a interpretação matemática do experimento de Stern-Gerlach com a sua devida preparação no laboratório. Com a intenção de investigar outros exemplos de sistemas de 2 níveis, no capítulo 4 exploraremos a polarização de fótons introduzindo a ideia de um polarizador universal representado por matrizes de $SU(2)$, bem como também sua interpretação matemática e sua preparação através de sequências de placas de meio de onda e um quarto de onda utilizadas no laboratório. Finalmente no capítulo 5 oferecemos as considerações finais e expressaremos todos os resultados encontrados nesse trabalho.

¹ Nesse trabalho, quanto o termo qubit é mencionado, assim como na computação quântica, consideramos esse como um sinônimo de sistema de dois níveis.

2 CONCEITOS MATEMÁTICOS

Este capítulo tem como objetivo estabelecer os conceitos de álgebra linear e de teoria de grupos, que, por sua vez, são a base da mecânica quântica, e serão muito utilizados ao decorrer desse trabalho.

2.1 ÁLGEBRA LINEAR

esta seção serão introduzidos apenas conceitos de álgebra linear que serão de suma importância para o entendimento dos capítulos subsequentes. Para a composição desse texto, foi usado como base as referências (1) e (15).

2.1.1 Espaços e Subespaços Vetoriais

Um espaço vetorial não é nada mais que um conjunto munido de uma soma vetorial e da multiplicação por um escalar sobre um conjunto de escalares, chamado tecnicamente de um corpo. Como a base da mecânica quântica são espaços vetoriais complexos, tomamos como exemplo para a maioria dos cálculos nesse trabalho o conjunto dos números complexos, representados pelo símbolo \mathbb{C} .

Considere um conjunto \mathbf{V} com elementos $(|u\rangle, |v\rangle, \dots)$ e escalares $(a, b, \dots) \in \mathbb{C}$. Em \mathbf{V} estão definidas uma soma e produto por escalar satisfazendo as seguintes propriedades, para elementos aleatórios:

Soma vetorial

1. Comutatividade: $|v\rangle + |w\rangle = |w\rangle + |v\rangle$;
2. Associatividade: $|v\rangle + (|u\rangle + |w\rangle) = (|v\rangle + |u\rangle) + |w\rangle$;
3. Elemento Neutro: Existe um $0 \in \mathbf{V}$ onde $0 + |v\rangle = |v\rangle$;
4. Inverso: para qualquer $|v\rangle \in \mathbf{V}$, existe um vetor $-|v\rangle = |u\rangle$ tal que $|v\rangle + |u\rangle = 0$.

Produto por escalar

1. Associatividade: $a(b|v\rangle) = (ab)|v\rangle$;
2. A unidade escalar do Corpo não afeta os vetores do espaço $1|v\rangle = |v\rangle$;
3. Distributividade pela soma em \mathbf{V} : $a(|v\rangle + |w\rangle) = a|v\rangle + a|w\rangle$;
4. Distributividade pela soma em \mathbb{C} : $(a + b)|v\rangle = a|v\rangle + b|v\rangle$.

A notação utilizada acima de elementos $|v\rangle \in \mathbf{V}$ é conhecida como notação de Dirac (2) e a utilizamos pelo fato dessa ser predominantemente usada na mecânica quântica.

O conjunto \mathbf{V} satisfazendo as propriedades acima é chamado de um espaço vetorial. É comum utilizarmos o conjunto $\mathbb{C}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{C}, \forall i = 1, \dots, n\}$ na mecânica quântica com a soma e multiplicação por escalar usuais.

Uma noção bastante útil é a de um subespaço. Para definir um subespaço vetorial basta pensar que tal subconjunto está contido em um espaço vetorial. Dado um subespaço vetorial \mathbf{S} (subconjunto não vazio) de um espaço vetorial \mathbf{V} , como \mathbf{S} é um subconjunto do conjunto \mathbf{V} , podemos afirmar que este respeita as mesmas regras que \mathbf{V} , sendo essas a soma de vetores e a multiplicação por escalar; então \mathbf{S} , por si só, já é um espaço vetorial.

2.1.2 Dimensão

Considere um espaço vetorial \mathbf{V} sobre um corpo \mathbf{C} e um conjunto de vetores $B = (|v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle) \subset \mathbf{V}$. Quando B possui o número mínimo de vetores necessários de forma que qualquer vetor $|v\rangle \in \mathbf{V}$ possa ser escrito como combinação linear dos elementos de B , isto é

$$|v\rangle = (\alpha_1 |v_1\rangle + \dots + \alpha_n |v_n\rangle), \quad \alpha_i \in \mathbb{C}, \forall i = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

podemos dizer que esses vetores geram o espaço \mathbf{V} . O caso em que $(\alpha_1 |v_1\rangle + \dots + \alpha_n |v_n\rangle) = 0$ implica que os coeficientes α_i são todos nulos, dizemos então que este conjunto é linearmente independente (LI).

Nesse caso, o conjunto B é chamado de base do espaço vetorial, e a quantidade de elementos nesse conjunto dita a dimensão do espaço, isto é, $\dim \mathbf{V} = n$.

2.1.3 Transformações Lineares

Dados dois espaços vetoriais \mathbf{U} e \mathbf{V} sobre o corpo dos complexos \mathbb{C} , visto que esses estão sobre o mesmo corpo, podemos imaginar um mapeamento que conecte os elementos de \mathbf{U} (domínio) em \mathbf{V} (contra-domínio). Essa aplicação é chamada de transformação linear se e somente se respeita as seguintes propriedades:

1. $T(\alpha |v_1\rangle) = \alpha (T |v_1\rangle)$;
2. $T(|v_1\rangle + |v_2\rangle) = T(|v_1\rangle) + T(|v_2\rangle)$.

Transformações Lineares são escritas geralmente da seguinte forma

$$\begin{aligned} T: \mathbf{U} &\rightarrow \mathbf{V} \\ |v\rangle &\mapsto T(|v\rangle). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Supondo que $\dim \mathbf{U} = n$ e $\dim \mathbf{V} = m$, e fixando bases $B_u = \{|e_1\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ e $B_v = \{|f_1\rangle, \dots, |f_m\rangle\}$, podemos obter uma única matriz que representa T nessas bases. Fazemos

$$T|e_i\rangle = \sum_{a=1}^m T_i^a |f_a\rangle. \quad (2.3)$$

Desta forma, atuar com T em um vetor $|v\rangle = \sum_i v^i |e_i\rangle$ resulta em

$$T|v\rangle = \sum_i v^i T|e_i\rangle = \sum_i \sum_a T_i^a v^i |f_a\rangle = \sum_a v'^a |f_a\rangle. \quad (2.4)$$

Como B_v é um conjunto LI, segue que $v'^a = \sum_i T_i^a v^i$. Ou seja, a matriz de ordem $n \times m$ com entradas T_i^a representa a atuação de T .

2.1.4 Produto Interno Complexo

O produto interno complexo nada mais é que o produto de (T_i^a) pela coluna com entradas v^i , representando $|v\rangle$. Seja um espaço vetorial \mathbf{V} , definido sobre o corpo dos complexos. Considere uma operação binária que leva pares de vetores em \mathbb{C} ,

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbf{V} \times \mathbf{V} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (|v_1\rangle, |v_2\rangle) &\mapsto \langle v_1 | v_2 \rangle. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Quando esta aplicação que satisfaz as 4 propriedades¹ abaixo, com $a, b \in \mathbb{C}$ e $|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle \in V$,

1. $\langle v_1 | v_2 \rangle = \overline{\langle v_2 | v_1 \rangle}$;
2. $\langle v_1 | v_1 \rangle \geq 0$;
3. $\langle v_1 | v_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow |v_1\rangle = 0$;
4. $\langle av_1 + bv_2 | v_3 \rangle = \bar{a} \langle v_1 | v_3 \rangle + \bar{b} \langle v_2 | v_3 \rangle$,

dizemos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno.

2.1.5 Operadores Lineares

Um operador linear nada mais é que uma transformação linear que leva um espaço vetorial nele mesmo: $T: V \rightarrow V$. Com isso podemos definir também o adjunto desta transformação $T^*: V \rightarrow V$ satisfazendo $\langle Tv | u \rangle = \langle v | T^*u \rangle$ com $|v\rangle$ e $|u\rangle \in V$. Em termos matriciais, T^* é obtido tomando o complexo e transpondo a matriz que representa T .

¹ Onde \bar{a} representa o complexo conjugado de $a \in \mathbb{C}$.

Uma transformação linear é auto-adjunta ou hermitiana se esta é igual a sua adjunta $T = T^*$. Operadores auto-adjuntos têm papel central na mecânica quântica.² Eles possuem as seguintes propriedades. Vejamos. Seja T auto-adjunto com $|v\rangle$ e $|u\rangle$ autovetores com autovalores distintos a e b respectivamente, isto é, $T|v\rangle = a|v\rangle$ e $T|u\rangle = b|u\rangle$, podemos determinar que

$$a\langle v|v\rangle = \langle v|av\rangle = \langle v|Tv\rangle = \langle T^*v|v\rangle = \langle Tv|v\rangle = \langle av|v\rangle = \bar{a}\langle v|v\rangle. \quad (2.6)$$

Pelo primeiro e último termo dessas igualdades temos que $a\langle v|v\rangle = \bar{a}\langle v|v\rangle$ sabemos então que $a = \bar{a}$, ou seja, os autovalores são reais quando T é hermitiano.

Temos também que

$$a\langle v|u\rangle = \langle av|u\rangle = \langle Tv|u\rangle = \langle v|Tu\rangle = \langle v|bu\rangle = \bar{b}\langle v|u\rangle = b\langle v|u\rangle, \quad (2.7)$$

como em $a\langle v|u\rangle = b\langle v|u\rangle$ sabemos que se $a \neq b$ então $\langle v|u\rangle = 0$, portanto $|u\rangle$ e $|v\rangle$ são ortogonais quando possuem autovalores distintos.

Para uma transformação hermitiana existe uma base ortonormal de V formada por autovalores dessa transformação, implicando que esta seja diagonalizável (T possui matriz diagonal). Essa é a afirmação proposta pelo Teorema Espectral. Os detalhes dessa demonstração podem ser vistos em (15).

2.1.6 Produto Tensorial

O produto tensorial, representado pelo símbolo \otimes , é uma operação entre dois espaços vetoriais que resulta na construção de um novo espaço cuja dimensão é o produto das dimensões dos dois espaços do produto tensorial. Em outros termos. Dados dois espaços, V de dimensão n e U de dimensão m , o espaço $V \otimes U$ terá dimensão $n \times m$.

Cada um dos dois espaços do produto tensorial pode ser representado pelas suas bases, com $\{|i_V\rangle\}$ para V e $\{|i_U\rangle\}$ para U , sendo assim, $\{|i_V\rangle \otimes |i_U\rangle\}$ será a base de $V \otimes U$, onde $i_V = 1, \dots, n$ e $i_U = 1, \dots, m$. Daí, elementos de $V \otimes U$ são combinações lineares

$$|\psi\rangle = \sum_{i_V=1}^n \sum_{i_U=1}^m \Psi_{i_V i_U} |i_V\rangle \otimes |i_U\rangle. \quad (2.8)$$

Também temos as seguintes condições para o produto tensorial:

1. $a(|v\rangle \otimes |u\rangle) = (a|v\rangle) \otimes |u\rangle = |v\rangle \otimes (a|u\rangle)$;
2. $(|v_1\rangle + |v_2\rangle) \otimes |u_1\rangle = |v_1\rangle \otimes |u_1\rangle + |v_2\rangle \otimes |u_1\rangle$;

² Operadores auto-adjuntos ou hermitianos são de interesse em mecânica quântica pois representam observáveis. Nesse contexto, estes são diagonalizáveis e elementos da diagonal principal representam possíveis valores de tais observáveis.

$$3. |v_1\rangle \otimes (|u_1\rangle + |u_2\rangle) = |v_1\rangle \otimes |u_1\rangle + |v_1\rangle \otimes |u_2\rangle,$$

com $|v_1\rangle, |v_2\rangle \in V$, $|u_1\rangle, |u_2\rangle \in U$ e $a \in \mathbb{C}$.

Para um vetor qualquer $|w\rangle \in V \otimes U$, este é decomponível se pode ser escrito como $|v\rangle \otimes |u\rangle$, definição muito importante no conceito de emaranhamento na mecânica quântica.³ Este nem sempre é o caso. Por exemplo em $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ com base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, os vetores $|00\rangle \pm |11\rangle$ e $|01\rangle \pm |10\rangle$ não são decomponíveis.

Se caso \mathbf{U} e \mathbf{V} tenham produto interno, o espaço gerado pelo produto tensorial desses também possuirá produto interno, que no caso de vetores decomponíveis, é definido por

$$\langle v_1 u_1 | v_2 u_2 \rangle = \langle v_1 | v_2 \rangle \langle u_1 | u_2 \rangle. \quad (2.9)$$

2.1.7 Decomposição de Schmidt

Seguindo a mesma lógica, consideramos dois espaços Vetoriais \mathbf{V} com base $\{|v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle\}$ e \mathbf{U} com base $\{|u_1\rangle, \dots, |u_m\rangle\}$, com $\{|v_i\rangle \otimes |u_j\rangle\}$ sendo a base do produto tensorial de \mathbf{V} com \mathbf{U} . Dado um vetor qualquer $|\psi\rangle \in V \otimes U$, podemos escrevê-lo como a soma

$$|\psi_{vu}\rangle = \sum_{n,m} c_{nm} |v_n\rangle \otimes |u_m\rangle. \quad (2.10)$$

A decomposição de Schmidt consiste na possibilidade de encontrar uma base adequada onde os termos c_{nm} , quando $n \neq m$, serão iguais a 0, podendo assim escrever um vetor qualquer como

$$|\psi_{VU}\rangle = \sum_i \alpha_i |\psi_i\rangle_V \otimes |\phi_i\rangle_U, \quad (2.11)$$

com $i = n = m$ nesse caso⁴.

Para demonstrar essa possibilidade é primeiro necessária a introdução do operador ρ , que respeita as seguintes propriedades:

$$Tr(\rho) = 1; \quad \rho = \bar{\rho}; \quad \langle u | \rho | u \rangle, \quad (2.12)$$

ou seja, esse operador nada mais é que uma matriz hermitiana positiva semi-definida de traço igual a um (15). Levando em consideração a decomposição espectral do operador ρ do espaço \mathbf{V} :

$$\rho_v = \sum_n \lambda_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|_V, \quad (2.13)$$

³ Em algumas partes desse trabalho $|v\rangle \otimes |u\rangle$ será simplificado pela notação $|vu\rangle$.

⁴ Perceba-se que agora possuímos somente um somatório com a variável i .

onde λ_n são os autovalores de ρ_v e $\{|\psi_n\rangle_V\}$ forma uma base ortonormal para \mathbf{V} . Considere $\{|w_m\rangle_U\}$ uma base qualquer ortogonal para \mathbf{U} , e logo $\{|\psi_n\rangle \otimes |w_m\rangle\}$ também será uma base ortogonal, temos

$$c_{nm} = \langle \psi_{vu} | (|\psi_n\rangle \otimes |w_m\rangle). \quad (2.14)$$

Já sabemos que

$$|\psi_{vu}\rangle = \sum_{n,m} c_{nm} |\psi_n\rangle \otimes |w_m\rangle. \quad (2.15)$$

Podemos então reescrever a equação (2.15) como

$$|\psi_{vu}\rangle = \sum_n |\psi_n\rangle \otimes \left(\sum_m c_{nm} |w_m\rangle \right). \quad (2.16)$$

Definindo $\alpha_n = \sqrt{\lambda_n}$ podemos escrever a equação acima como

$$|\psi_{vu}\rangle = \sum_n \alpha_n |\psi_n\rangle \otimes \left(\sum_m \frac{c_{nm}}{\alpha_n} |w_m\rangle \right). \quad (2.17)$$

Definindo $\sum_m \frac{c_{nm}}{\alpha_n} |w_m\rangle = |\phi_n\rangle$ temos

$$|\psi_{vu}\rangle = \sum_n \alpha_n |\psi_n\rangle_v \otimes |\phi_n\rangle_u, \quad (2.18)$$

que é o resultado que queríamos chegar para a decomposição de Schmidt, anteriormente expresso pela equação (2.11).

É possível que a dimensão de U seja maior que a de V mesmo com a exigência de que exista um “ ϕ ” para cada “ ψ ”. Mesmo que $|\phi_n\rangle_u$ não formem uma base completa, é possível complementar esses vetores com outros vetores ortonormais para U , o importante é que $|\phi_n\rangle_u$ necessita ser uma base ortonormal. Temos

$$\langle \phi_n | \phi_{n'} \rangle = \sum_{m,m'} \frac{c_{nm}^* c_{n'm'}}{\alpha_n \alpha_{n'}} \langle w_m | w_{m'} \rangle. \quad (2.19)$$

Como $|w_m\rangle$ é uma base ortonormal, então podemos nos livrar no somatório em m' pois $\langle w_m | w_{m'} \rangle = 1$ quando $m = m'$, ficando com

$$\langle \phi_n | \phi_{n'} \rangle = \sum_m \frac{c_{nm}^* c_{n'm}}{\alpha_n \alpha_{n'}}. \quad (2.20)$$

Utilizando (2.14) podemos reescrever (2.20) como

$$\begin{aligned} \langle \phi_n | \phi_{n'} \rangle &= \sum_m \frac{1}{\alpha_n \alpha_{n'}} \underbrace{\langle \psi_{vu} | (|\psi_{n'}\rangle \otimes |w_m\rangle)}_{c_{n'm}} \overbrace{(\langle \psi_n | \otimes \langle w_m |) |\psi_{vu}\rangle}^{c_{nm}^*} \\ &= \frac{1}{\alpha_n \alpha_{n'}} \langle \psi_{vu} | \left(|\psi_{n'}\rangle \langle \psi_n | \otimes \sum_m |w_m\rangle \langle w_m | \right) |\psi_{vu}\rangle. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Como $|w_m\rangle$ é uma base ortonormal, então $\sum_m |w_m\rangle \langle w_m| = 1$ (identidade). Temos então

$$\begin{aligned} \langle \phi_n | \phi_{n'} \rangle &= \frac{1}{\alpha_n \alpha_{n'}} \langle \psi_{vu} | (|\psi_{n'}\rangle \langle \psi_n| \otimes I) |\psi_{vu}\rangle \\ &= \frac{1}{\alpha_n \alpha_{n'}} \text{Tr} (|\psi_{vu}\rangle \langle \psi_{vu}| |\psi_{n'}\rangle \langle \psi_n| \otimes I) \\ &= \frac{1}{\alpha_n \alpha_{n'}} \text{Tr} (\text{Tr}_u (|\psi_{vu}\rangle \langle \psi_{vu}| |\psi_{n'}\rangle \langle \psi_n| \otimes I)). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Os coeficientes de Schmidt são justamente os autovalores das matrizes reduzidas $\rho_v = \text{Tr}_u (|\psi\rangle \langle \psi|)$ e $\rho_u = \text{Tr}_v (|\psi\rangle \langle \psi|)$. Assim

$$\begin{aligned} \langle \phi_n | \phi_{n'} \rangle &= \frac{1}{\alpha_n \alpha_{n'}} \text{Tr} (\rho_v |\psi_{n'}\rangle \langle \psi_n|) \\ &= \frac{1}{\alpha_n \alpha_{n'}} \langle \psi_n | \rho_v | \psi_{n'} \rangle \\ &= \frac{\lambda_n}{\alpha_n \alpha_{n'}} \langle \psi_n | \psi_{n'} \rangle. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Como $\langle \psi_n | \psi_{n'} \rangle = 1$ se $n = n'$ ou $\langle \psi_n | \psi_{n'} \rangle = 0$ se $n \neq n'$, sabendo também que $\alpha_n = \sqrt{\lambda_n}$, temos

$$\langle \phi_n | \phi_{n'} \rangle = \frac{\lambda_n}{\alpha_n \alpha_{n'}} \delta_{nn'} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = n' \\ 0 & \text{se } n \neq n' \end{cases}. \quad (2.24)$$

Essa afirmação mostra que $\{|\phi_n\rangle\}$ é um conjunto ortonormal que pode ser estendido a uma base ortonormal.

Em (2.18) as bases $\{|\psi_n\rangle_v\}$ e $\{|\phi_n\rangle_u\}$ são chamadas de bases de Schmidt, α_n são os coeficientes de Schmidt, e a quantidade de coeficientes de Schmidt que são diferentes de 0 é chamado de número de Schmidt (1).

2.2 CONCEITOS BÁSICOS DE TEORIA DE GRUPOS

Na seção 2.1, vimos noções básicas sobre álgebra linear. Assim como a última, esta também servirá como base matemática para os capítulos subsequentes. Nesta seção serão introduzidos conceitos básicos sobre teoria de grupos, assunto essencial para compreensão de transformações unitárias, outro tópico que discutiremos à frente.

2.2.1 Definição de um grupo

Um grupo nada mais é que um conjunto de elementos $\mathbf{G} = \{g_1, g_2, \dots\}$ munido de uma operação chamada de multiplicação de grupo cujo resultado também é um elemento

pertencente a \mathbf{G} , definida por

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \times \mathbf{G} &\rightarrow \mathbf{G} \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 \cdot g_2 = g_3 \in \mathbf{G}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

que respeita as seguintes condições:

1. Associatividade: $(g_1 \cdot g_2) g_3 = g_1 (g_2 \cdot g_3)$;
2. Elemento identidade: $\exists e; g \cdot e = e \cdot g = g \quad \forall g \in \mathbf{G}$;
3. Existência de inverso: $\exists g^{-1}; g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$.

Um dos exemplos mais simples seria o $(\mathbb{R}, +)$, onde \mathbb{R} representa o conjunto dos números reais munido com a operação usual de soma. Podemos afirmar que este satisfaz a condição de associatividade, possui o elemento identidade sendo o número 0, pelo fato de que $g + 0 = 0 + g = g$, e também que, para qualquer valor de $g \in \mathbb{R}$, existe um valor inverso $g^{-1} = -g$ que satisfaz $g + (-g) = 0$. Portanto, o conjunto dos números reais pode ser classificado como um grupo sobre a operação usual da soma. Note que se tivéssemos usado o conjunto \mathbb{N} ao invés do \mathbb{R} da seguinte forma $(\mathbb{N}, +)$, percebemos que este não é um grupo pelo fato de não possuir valores negativos, assim desrespeitando a terceira condição.

Podemos pegar como exemplo um conjunto de matrizes reais $n \times n$ com a multiplicação usual de matrizes, como é o caso do grupo $GL(N)$. Pedimos que as matrizes, neste caso, tenham determinante não nulo, garantindo a existência da inversa. Assim, podemos concluir que $GL(N)$ é um grupo pelo fato da multiplicação usual de matrizes respeitar a associatividade, possuir uma matriz identidade e matrizes inversas. Será explorado como exemplo um subconjunto especial de $GL(N)$ com $N = 3$ denominado $SO(3)$, definido por

$$SO(3) = \left\{ \mathbf{A}; 3 \times 3; \mathbf{A}_{ij} \in \mathbb{R}, \det \mathbf{A} = 1, \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1} \right\}, \quad (2.26)$$

sendo \mathbf{A} uma matriz qualquer do grupo. A partir de uma análise deste grupo será introduzida a ideia que este representa matrizes de rotação em 3 dimensões.

Para a descrição do grupo $SO(3)$ convém primeiramente definir a exponencial de matrizes e obter suas propriedades. Considerando \mathbf{M} uma matriz qualquer $m \times m$, definimos a exponencial de \mathbf{M} , o mapeamento que leva $m \times m$ matrizes em outras do mesmo tipo, por

$$e^{\mathbf{M}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{M}^n = \mathbb{I} + \mathbf{M} + \frac{1}{2!} \mathbf{M}^2 + \dots \quad (2.27)$$

A série da equação acima converge (1), mas não discutiremos os detalhes aqui. Tomamos como um exemplo a matriz $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$. Um cálculo direto nos leva a uma

das poucas exponenciais que podem ser calculadas analiticamente,

$$e^{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} -\alpha^2 & 0 \\ 0 & -\alpha^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha^3 \\ \alpha^3 & 0 \end{pmatrix} + \dots = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Agora que estabelecemos que matrizes podem ser escritas como exponenciais de outras matrizes, podemos definir varias propriedades⁵, algumas dessas são

1. $e^0 = \mathbb{I}$;
2. $(e^{\mathbf{M}})^\dagger = e^{\mathbf{M}^\dagger}$;
3. $\exists P^{-1} \implies e^{P\mathbf{M}P^{-1}} = Pe^{\mathbf{M}}P^{-1}$;
4. $\det e^{\mathbf{M}} = e^{Tr\mathbf{M}}$.

As propriedades 1 e 2 são, de certa forma, evidentes a partir das equações (2.27) e (2.28). Já a propriedade 3 pode ser concluída por um cálculo direto,

$$e^{P\mathbf{M}P^{-1}} = PP^{-1} + P\mathbf{M}P^{-1} + \frac{1}{2!}P\mathbf{M}P^{-1}P\mathbf{M}P^{-1} + \dots = P(e^{\mathbf{M}})P^{-1}. \quad (2.29)$$

Vamos demonstrar a propriedade 4 pelo menos para o caso particular em que \mathbf{M} seja diagonalizável. Neste caso, por uma transformação de similaridade, $\mathbf{M}' = P\mathbf{M}P^{-1}$ é a matriz diagonal. Pela propriedade 3 temos $e^{\mathbf{M}'} = Pe^{\mathbf{M}}P^{-1}$. Tomando o determinante de ambos os lados, concluimos que $\det(e^{\mathbf{M}'}) = \det(e^{\mathbf{M}})$. Por outro lado, $e^{\mathbf{M}'}$ pode ser calculada diretamente dada a estrutura diagonal de \mathbf{M}' :

$$e^{\mathbf{M}'} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

e o determinante pode ser calculado diretamente: $\det e^{\mathbf{M}} = \det e^{\mathbf{M}'} = e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)}$. Finalmente, para concluir que o resultado segue, basta usarmos o fato que o traço é preservado por uma transformação de similaridade: $Tr\mathbf{M}' = Tr(P\mathbf{M}P^{-1}) = Tr(\mathbf{M}P^{-1}P) = Tr(\mathbf{M})$. Sendo assim temos $\det e^{\mathbf{M}} = e^{Tr\mathbf{M}}$, que é justamente a propriedade 4.

Para investigar a estrutura das matrizes de $SO(3)$, tentamos investigá-lo escrevendo

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{a}}, \quad (2.31)$$

já que a exponencial é um mapeamento bijetivo entre uma vizinhança da identidade em $SO(3)$ com uma vizinhança da matriz nula (16). Sabemos também que no caso do grupo $SO(3)$ o valor da transposta de \mathbf{A} é igual à sua inversa. Isso implica que

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1} \implies (e^{\mathbf{a}})^T = (e^{\mathbf{a}})^{-1} \implies \mathbf{a}^T = -\mathbf{a}. \quad (2.32)$$

⁵ O símbolo “†”, chamado de “dagger” ou “adaga”, presente na propriedade 2, representa a transposta conjugada de uma matriz. Para o caso particular de matrizes reais, o “†” se resume à transposição.

Definindo um valor para a matriz \mathbf{a} , a partir da restrição (2.32) temos

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

podemos então dizer que $a = e = i = 0$, $b = -d$, $c = -g$ e $h = -f$, bem como também atribuindo às variáveis (h, c, d) os valores $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ respectivamente, temos que a matriz final é

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Podemos ainda escrever \mathbf{a} da seguinte forma

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \Lambda_1 + \alpha_2 \Lambda_2 + \alpha_3 \Lambda_3. \quad (2.35)$$

Se considerarmos $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ e substituirmos o valor de \mathbf{a} na equação (2.31) temos

$$e^{\alpha_1 \Lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_1 & -\operatorname{sen} \alpha_1 \\ 0 & \operatorname{sen} \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

que é uma matriz característica de uma rotação em \mathbb{R}^3 em torno do eixo x por um ângulo α_1 .

Ao decorrer da análise do grupo $SO(3)$ foi preciso a introdução de um outro conjunto de matrizes que derivam da própria estrutura do grupo $SO(3)$. São essas as matrizes \mathbf{a} que respeitam a propriedade nova introduzida na equação (2.32). Este conjunto de matrizes é chamado de $so(3)$ e é definido como

$$so(3) = \{ \mathbf{a}; 3 \times 3; \mathbf{a}_{ij} \in \mathbb{R}, \mathbf{a}^T = -\mathbf{a}; [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \}. \quad (2.37)$$

A partir de (2.35), vemos que $so(3)$ admite uma soma entre os seus elementos, além de ser imediato que tanto a soma quanto a multiplicação por escalar ainda respeitam $\mathbf{a}^T = -\mathbf{a}$. Logo, este conjunto tem estrutura de um espaço vetorial. As matrizes Λ_i (com $i = 1, 2, 3$) formam uma base de $so(3)$. Além disso, $so(3)$ também admite o comutador $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{ab} - \mathbf{ba}$ pois $([\mathbf{a}, \mathbf{b}])^T = -([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$. Neste caso, chamamos $so(3)$ de uma álgebra, que nada mais é que um espaço vetorial dotado de um produto. Por fim, a motivação para inserirmos e dotarmos $so(3)$ com $[\ , \]$ está ligada com a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (16):

$$e^{\mathbf{a}} e^{\mathbf{b}} = e^{\mathbf{a} + \mathbf{b} + 1/2[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + \dots}, \quad (2.38)$$

de forma que podemos reconstruir o grupo a partir da álgebra correspondente. Em teoria de grupos, chamamos tais de álgebras de Lie (17).

2.2.2 O grupo $SU(2)$ e a álgebra de Lie correspondente

Foi citado como exemplo na seção anterior os grupos de matrizes reais $GL(N)$ e $SO(3)$, nessa seção será explorada um grupo de matrizes essenciais para o desenvolvimento desse trabalho, o grupo $SU(2)$, sendo este um subconjunto do grupo $U(N)$ de todas as matrizes unitárias $N \times N$, o grupo $SU(2)$ é definido por

$$SU(2) = \{ \mathbf{U}; 2 \times 2; \mathbf{U}_{ij} \in \mathbb{C}, \det \mathbf{U} = 1, \mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^{-1} \}. \quad (2.39)$$

Para a análise do grupo $SU(2)$ teremos que considerar uma matriz qualquer desse grupo que respeita suas respectivas condições, semelhante à maneira que fizemos para analisar $SO(3)$ nas fórmulas (2.32) e (2.33). Dada uma matriz \mathbf{U} qualquer do grupo $SU(2)$, esta pode ser escrita como

$$\mathbf{U} = e^{\mathbf{u}}. \quad (2.40)$$

Sabemos também que no caso do grupo $SU(2)$ e de acordo com (2.39), o valor da transposta conjugada de \mathbf{U} é igual à sua inversa, isso implica que

$$\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^{-1} \implies (e^{\mathbf{u}})^\dagger = (e^{\mathbf{u}})^{-1} \implies \mathbf{u}^\dagger = -\mathbf{u}. \quad (2.41)$$

Assim como no exemplo da seção anterior de $SO(3)$ e $so(3)$, na equação (2.41) foi introduzido um conjunto novo de matrizes que é chamado de $su(2)$ que é definido como

$$su(2) = \{ \mathbf{u}; 2 \times 2; \mathbf{u}_{ij} \in \mathbb{C}, \mathbf{u}^\dagger = -\mathbf{u}; [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \}. \quad (2.42)$$

Vamos então analisar o grupo $SU(2)$. Dada uma matriz \mathbf{U} qualquer deste grupo, de acordo com a descrição (2.39), essa pode ser escrita também como

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Podemos dizer então que $\delta = \bar{\alpha}$ e $\gamma = -\bar{\beta}$, assim a matriz \mathbf{U} fica com forma

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

que pela relação que $\det \mathbf{U} = 1$ temos

$$\det \mathbf{U} = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (2.45)$$

Como α e β são números complexos, podem ser escritos como $\alpha = x + iy$ e $\beta = z + iw$, resultando em

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1. \quad (2.46)$$

Geometricamente (2.46) representa uma esfera quadridimensional de raio unitário, algo que será muito explorado nos capítulos seguintes.

Porém a partir de agora convém explorar mais o conjunto $su(2)$, que de acordo com a descrição (2.42) pode ser escrito na forma matricial por uma matriz \mathbf{u} como

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Deduzimos então que $-a = \bar{a}$, $-d = \bar{d}$, $b = -\bar{c}$. Com estas condições podemos afirmar que os valores a e d se limitam somente à suas partes complexas e b e c assumem os valores de $b = y - ix$ e $c = -y - ix$, sendo assim a matriz \mathbf{u} terá as seguintes características

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} i\alpha & -y - ix \\ y - ix & -i\delta \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

com um uso de uma constante arbitrária z , essa matriz pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathbf{u} = z \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

Aqui já levamos em consideração que o traço das matrizes \mathbf{u} é nulo, uma vez que $\det \mathbf{U} = 1 = e^{Tr \mathbf{u}} \implies Tr \mathbf{u} = 0$. Podemos finalmente escrever uma matriz arbitrária \mathbf{u} como,

$$\mathbf{u} = i \left[z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (2.50)$$

Ou seja, nossa matriz qualquer de $su(2)$ pode ser escrita como uma combinação linear das matrizes de Pauli, dadas por

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

ou de uma forma mais geral

$$\mathbf{u} = i\vec{r} \cdot \vec{\sigma} = ix^i \sigma_i. \quad (2.52)$$

Concluimos no final da análise de $su(2)$ que este foi parametrizado por 3 constantes reais, formando \vec{r} . As matrizes de Pauli, por sua vez, formam uma base para $su(2)$. Como veremos, elas possuem forte ligação com o espaço \mathbb{R}^3 (16, 17).

Em álgebra linear, dois espaços vetoriais com a mesma dimensão são isomorfos (15). Portanto, podemos mostrar operações possíveis de serem feitas no nosso espaço de $su(2)$ e como essas poderiam ser interpretadas, por exemplo, em \mathbb{R}^3 .

Um exemplo é o comutador $[\ , \]$, ao selecionarmos dois elementos de $su(2)$ arbitrários, $\mathbf{u}_1 = ix^i \sigma_i$ e $\mathbf{u}_2 = iy^j \sigma_j$, e aplicarmos o comutador entre eles, temos

$$[ix^i \sigma_i, iy^j \sigma_j] = -x^i y^j [\sigma_i, \sigma_j], \quad (2.53)$$

como sabemos⁶ que $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$, então

$$-\frac{1}{2i} [ix^i\sigma_i, iy^j\sigma_j] = x^i y^j \varepsilon_{ijk} \sigma_k. \quad (2.54)$$

Podemos perceber que $x^i y^j \varepsilon_{ijk}$ é justamente a componente k do produto vetorial $\vec{x} \times \vec{y}$. Este resultado reforça que temos uma ligação direta entre $su(2)$ e o espaço de vetores tridimensional.

Entre outros exemplos, temos o traço do produto de dois elementos de $su(2)$, dado por

$$\text{Tr} (ix^i\sigma_i iy^j\sigma_j) = -x^i y^j \text{Tr} (\sigma_i \sigma_j), \quad (2.55)$$

sabendo que $\text{Tr} (\sigma_i \sigma_j) = 2\delta_{ij}$ então

$$-\frac{1}{2} \text{Tr} (ix^i\sigma_i iy^j\sigma_j) = x^i y^j \delta_{ij}, \quad (2.56)$$

podemos perceber que $-\frac{1}{2}$ do traço do produto de duas matrizes em $su(2)$ equivale a fazer um produto escalar entre dois vetores no espaço vetorial \mathbb{R}^3 .

E por último temos o determinante. Quando calculamos o determinante de uma matriz qualquer de $su(2)$ dada pela formula (2.50), temos

$$\det i \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} = -(-z^2 - (x^2 + y^2)) = \|\vec{r}\|^2. \quad (2.57)$$

Percebemos que estimar o determinante de uma matriz em $su(2)$ seria o mesmo que calcular o módulo do vetor $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$, com componentes x , y e z no espaço vetorial \mathbb{R}^3 . Estes resultados mostram que a relação entre $su(2)$ e \mathbb{R}^3 não é meramente o isomorfismo entre espaços vetoriais. Aqui, estruturas relevantes como produto escalar, norma e produto vetorial são também reproduzidas em ambos os espaços.

⁶ Mais detalhes sobre as propriedades das matrizes de Pauli utilizadas nessa parte podem ser vistos no apêndice A.

3 FIBRAÇÃO DE HOPF E A ESFERA DE BLOCH

Neste Capítulo utilizaremos os conceitos introduzidos no capítulo anterior para formular matematicamente a fibração de Hopf e a esfera de Bloch. É necessário também ressaltar que nos capítulos e seções subsequentes estaremos utilizando estados puros (18), até porque, como iremos trabalhar com desenvolvimento matemático de estados, é de interesse considerarmos somente estes tipos de estados.

3.1 BIT QUÂNTICO E ESPAÇO DE ESTADOS

O espaço de estados é um espaço vetorial complexo munido de produto escalar usado na descrição de estados em um sistema quântico. Assim como espaços vetoriais, o espaço de estados também possui uma base com vetores L.I., a partir da qual podemos descrever qualquer estado de um sistema quântico. No caso deste estudo, utilizaremos a base ortonormal $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ do espaço \mathbb{C}^2 sobre o corpo dos complexos, que descreve um espaço de estados de $\dim(E) = 2$. Sistemas bidimensionais (ou de dois níveis) são chamados de qubits. Dado um estado $|\psi\rangle$ pertencente ao espaço de estados de dois níveis, este pode ser escrito como

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ onde } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (3.1)$$

$\langle\psi|\psi\rangle$ é um valor unitário que respeita a condição de normalização $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.

Considerando que um número complexo possui uma parte real e uma parte imaginária, podemos escrever α e β como

$$\alpha = x + iy \quad \text{e} \quad \beta = z + iw, \quad (3.2)$$

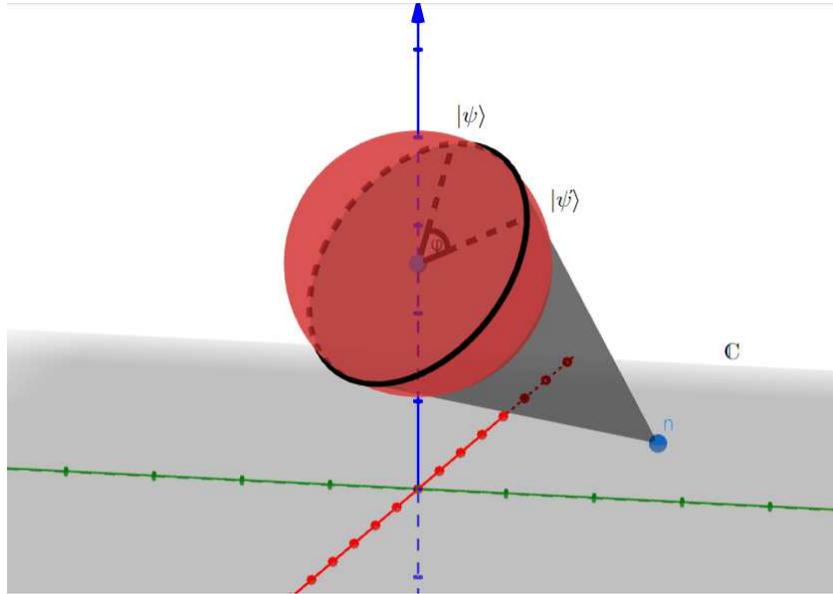
que, pela condição de normalização, implica em:

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1, \quad (3.3)$$

relação essa que possui uma estrutura de uma esfera quadridimensional de raio unitário, ou seja, com 3 graus de liberdade. Deste modo, podemos deduzir que os estados quânticos de 2 níveis vivem em uma esfera que mora em \mathbb{R}^4 . Chamamos essa esfera de esfera S^3 ou 3-Esfera, que será explorada em seções subsequentes.

3.2 FIBRAÇÃO DE HOPF

Uma forma de entender as propriedades e a estrutura matemática por trás de uma esfera em \mathbb{R}^4 é através da fibração de Hopf. Ela nada mais é que uma série de mapeamentos que conectam a esfera quadridimensional S^3 a uma esfera tridimensional $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, relacionando cada ponto da 2-Esfera com uma “fibra” da 3-Esfera, onde fibras são círculos S^1 presentes na esfera S^3 (9).

Figura 1 - Mapeamento que vai de \mathbb{C}^2 a \mathbb{C} 

Fonte: Elaborado pelo autor. (2023).

Nota: A esfera S^3 da imagem é chamada na mecânica quântica de esfera de Bloch. Embora seja impossível representar uma esfera S^3 , essa figura ajuda na interpretação de como cada fibra dessa esfera se ligaria a um único ponto em \mathbb{C} .

Considerando a relação de equivalência¹ entre dois estados $|\psi\rangle$ e $|\psi'\rangle$ em S^3 dada por

$$|\psi'\rangle \sim |\psi\rangle \Leftrightarrow |\psi'\rangle = e^{i\phi} |\psi\rangle. \quad (3.4)$$

Os estados $|\psi\rangle$ e $|\psi'\rangle$ diferem por um fator de fase global $e^{i\phi}$ e nesse sentido são indistinguíveis pois fornecem mesmas predições experimentais de medidas observáveis,

$$\langle \psi' | A | \psi' \rangle = \langle e^{i\phi} \psi | A e^{i\phi} \psi \rangle = e^{-i\phi} e^{i\phi} (\langle \psi | A | \psi \rangle) = \langle \psi | A | \psi \rangle, \quad (3.5)$$

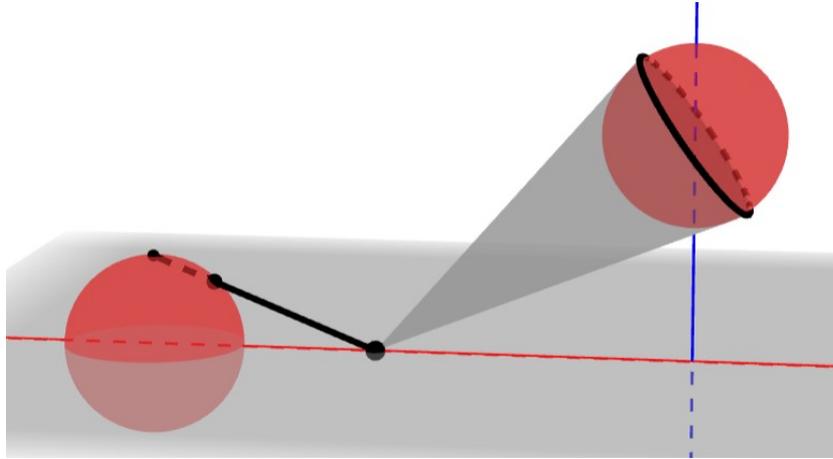
onde usamos a notação $(\ , \)$ para representar o produto interno em \mathbb{C}^2 .

Vejamos como estados indistinguíveis se conectam com a fibração de Hopf. Podemos definir um mapeamento que vai de \mathbb{C}^2 a \mathbb{C} da seguinte forma

$$n: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} \\ (\alpha, \beta) \mapsto n(\alpha, \beta) = \frac{\beta}{\alpha}, \text{ com } \alpha \neq 0, \quad (3.6)$$

sendo $|\psi'\rangle = \alpha' |0\rangle + \beta' |1\rangle$ e $|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$. Para este mapeamento temos que $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta'}{\alpha'}$, pois $\beta' = e^{i\phi} \beta$ e $\alpha' = e^{i\phi} \alpha$. Os estados indistinguíveis $|\psi\rangle$ e $|\psi'\rangle$ são levados pelo mapeamento n no mesmo “lugar” em \mathbb{C} . Assim conectando a esfera S^3 ao plano \mathbb{C} .

¹ Relações de equivalência em um conjunto C respeitam 1 - reflexividade: $x \sim x$, 2 - simetria: $x \sim y \implies y \sim x$ e 3 - Transitividade: se $x \sim y$ e $y \sim z$ então $x \sim z$, $\forall x, y, z \in C$.

Figura 3 - Mapeamento que vai de S^2 a S^2 

Fonte: Elaborado pelo autor. (2023).

Considerando as coordenadas do ponto I como (x, y, z) e as coordenadas do ponto P como (x', y') , podemos comparar o triângulo $\triangle(DIP)$ com o triângulo $\triangle(OCP)$ da seguinte forma

$$\frac{d(O, P)}{d(O, C)} = \frac{d(D, P)}{d(D, I)} \iff \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{1} = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2} - \sqrt{x^2 + y^2}}{z}. \quad (3.9)$$

Com $\rho = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ temos

$$z\rho = \rho - \sqrt{x^2 + y^2} \implies \rho = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{1 - z}. \quad (3.10)$$

Sabendo que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ temos que $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 - z^2}$, temos então

$$\frac{\sqrt{1 - z^2}}{1 - z} = \rho = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{1 - z} \implies z = \frac{x'^2 + y'^2 - 1}{x'^2 + y'^2 + 1}. \quad (3.11)$$

Com isso podemos encontrar os valores de x e também de y como

$$x = \frac{2x'}{x'^2 + y'^2 + 1}, \quad y = \frac{2y'}{x'^2 + y'^2 + 1}. \quad (3.12)$$

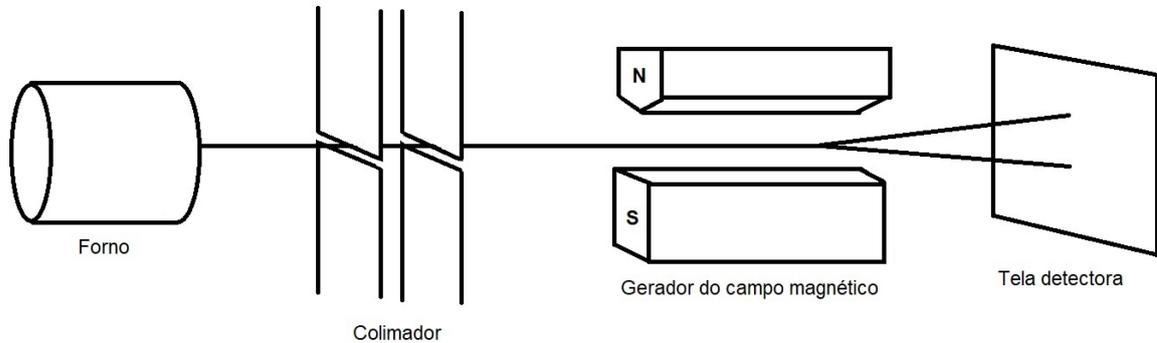
Temos agora a forma explícita do mapeamento p^{-1} ,

$$p^{-1}(x', y') = \left(\frac{2x'}{x'^2 + y'^2 + 1}, \frac{2y'}{x'^2 + y'^2 + 1}, \frac{x'^2 + y'^2 - 1}{x'^2 + y'^2 + 1} \right). \quad (3.13)$$

Não é difícil ver que de fato o ponto $p^{-1}(x', y') \in S^2$, isto é, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Vejamos,

$$\left(\frac{2x'}{x'^2 + y'^2 + 1} \right)^2 + \left(\frac{2y'}{x'^2 + y'^2 + 1} \right)^2 + \left(\frac{x'^2 + y'^2 - 1}{x'^2 + y'^2 + 1} \right)^2 = \frac{(x'^2 + y'^2 + 1)^2}{(x'^2 + y'^2 + 1)^2} = 1, \quad (3.14)$$

Figura 4 - Representação do experimento de Stern-Gerlach.



Fonte: Elaborado pelo autor. (2023).

mostrando assim que (3.13) é um ponto da esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Agora que temos um mapeamento (n), que sai de da esfera S^3 em $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ e vai para um plano $\Pi_{x,y}$ em $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ e um outro mapeamento (p^{-1}) que vai do plano $\Pi_{x,y}$ em $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ para um ponto de uma esfera $S^2 \in \mathbb{R}^3$ podemos fazer uma concatenação destes e montar um mapeamento que vai da esfera S^3 para a esfera S^2 da seguinte forma,

$$p^{-1} \circ n: S^3 \rightarrow S^2, \quad (3.15)$$

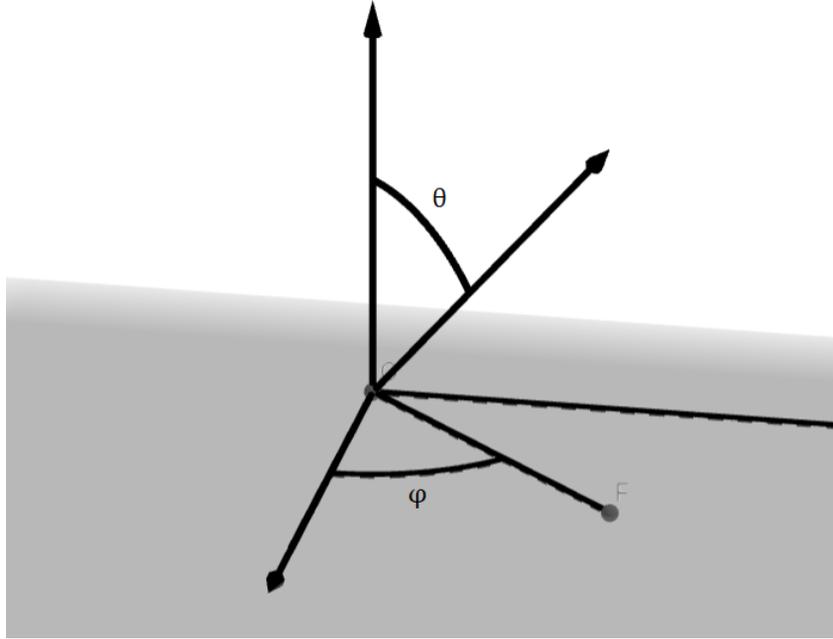
que liga uma fibra de uma esfera no espaço quadridimensional a um ponto de uma esfera no espaço tridimensional imersa no nosso espaço físico, que pode ser descrita através de dois ângulos (θ, ϕ) . Tal composição se chama fibração de Hopf e pode ser visualizada na figura 3. As fibras são a imagem inversa de pontos de S^2 e, de acordo com a figura 1, são, na verdade, os estados indistinguíveis.

3.3 EXPERIMENTO DE STERN-GERLACH E POLARIZAÇÃO DA LUZ

Agora que já foram introduzidas as noções de álgebra, como também a lógica e matemática por trás da fibração de Hopf, podemos começar a falar de experimentos que se utilizam destes princípios, como é o exemplo do experimento de Stern-Gerlach.

O experimento de Stern-Gerlach é um ótimo exemplo para se demonstrar a propriedade de spin. Ele se consiste em um feixe de átomos neutros passando por um campo magnético não-homogêneo e atingindo uma tela, assim como na figura 4. Era de se esperar uma distribuição homogênea na tela do detector se caso os átomos tivessem momentos magnéticos aleatórios, porém, no detector foi observado dois picos de intensidade, podendo

Figura 5 - Sistema de coordenadas usado para descrever a direção do \vec{B}



Fonte: Elaborado pelo autor. (2023).

assim deduzir que existe uma quantização do momento angular dessas partículas, para spin $+\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$ (19).

Podemos descrever matematicamente essa propriedade através da notação de espaços de estados, considerando spin $+\frac{1}{2}$ como o estado $|0\rangle$ e spin $-\frac{1}{2}$ como o estado $|1\rangle$. Este é um exemplo típico de um qubit.

Ao polarizarmos um campo magnético, esse pode ser descrito em coordenadas esféricas (θ, ϕ) assim como na figura 5. No artigo recente (3), os autores mostraram que tal campo magnético prepara um estado de spin por

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle, \quad (3.16)$$

com $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, 2\pi)$. Este é um resultado interessante, que conecta a preparação de um estado no laboratório com sua representação no espaço de estados \mathbb{C}^2 . Como vimos na seção sobre a fibração de Hopf, obtivemos uma conexão entre o espaço real tridimensional (esfera S^2), com o espaço complexo de estados (esfera S^3). Por esse motivo é possível utilizar os mesmos ângulos (θ, ϕ) da polarização do campo magnético na descrição do vetor de estados da equação (3.16).

Percebemos agora que temos uma ligação direta dos ângulos (θ, ϕ) presentes na equação (3.16), com a polarização do campo magnético descrito pela figura 5. Ou seja, os

ângulos que são utilizados no nosso laboratório que descrevem como será a polarização do campo magnético em um devido experimento de Stern-Gerlach, são os mesmos ângulos utilizados na descrição do vetor de estados no espaço bidimensional complexo do mesmo experimento.

Levando isso em consideração, podemos agora tentar aplicar a mesma lógica para o caso de um feixe de luz polarizado. Sabemos que a polarização desse tal feixe também pode ser descrita no espaço complexo \mathbb{C}^2 através de um estado $|\psi\rangle$ qualquer. Porém ao olharmos para o experimento realizado em um laboratório, a polarização da luz poderia ser entendida como oscilação do campo elétrico num plano, ou seja, seria razoável esperar um espaço físico bidimensional, em contradição com o resultado anterior, que afirmava que a fibração de Hopf liga um estado \mathbb{C}^2 a um espaço que possui dois graus de liberdade, que é o caso da esfera de $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Assim, gostaríamos de tapar tal lacuna, mostrando como um procedimento experimental no laboratório também prepara estados de luz polarizada descritos por vetores em $S^3 \subset \mathbb{C}^2$.

4 POLARIZAÇÃO DA LUZ

Como foi proposto no último capítulo, a partir de agora iremos nos aprofundar mais na matemática por trás da polarização da luz. Sabemos que a polarização de um feixe de luz é realizada através de um equipamento de manipulação do estado de polarização, como polarizadores ou outros tipos de placas. No que se diz respeito à preparação de experimentos em laboratórios, é necessário um melhor controle sobre o feixe de luz utilizado. É por isso que são utilizados, em certos experimentos, dois tipos de placas que atuam no feixe: a placa de meio de onda e a placa de um quarto de onda (12, 13).

Será visto nesse capítulo que a atuação de uma dessas placas sobre o estado de polarização de um feixe de fótons é representada pela atuação de matrizes unitárias de $SU(2)$ sobre os vetores de estado correspondentes. A associação das placas nos permitirá produzir diferentes estados de polarizações. Com isso em mente, para um total controle sobre experimento, podemos introduzir a ideia de um aparelho de polarização universal, que consiste em uma específica associação dessas placas que resultam em qualquer polarização arbitrária. Desta maneira, mostraremos que tal associação de polarizadores atua sobre o feixe em um espaço físico tridimensional, resultando em uma polarização arbitrária de um estado sobre a esfera de Bloch, como de fato esperaríamos de acordo com nossos resultados prévios. Se por um lado podemos pensar que operadores unitários atuando sobre vetores de Jones (13) preservam intensidade, por outro, na mecânica quântica tais operadores preservam normas.

4.1 PLACAS DE MEIA E DE UM QUARTO DE ONDA

Antes de começarmos a dedução do polarizador universal primeiramente teremos que introduzir as combinações que descrevem as placas de meia onda e de um quarto de onda, usando como base as referências (12, 13).

Começando pela placa de meio de onda, representada pelo operador \mathbf{H} , que pode ser escrito¹ da seguinte forma

$$\mathbf{H}_\varphi = v(\varphi) \cdot i\sigma_3 \cdot v(\varphi)^{-1} = i \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \text{sen}(2\varphi) \\ \text{sen}(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

onde $\sigma_3 = \sigma_z$ representa uma matriz de Pauli, e

$$v(\varphi) = e^{-i\varphi\sigma_2} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\text{sen}(\varphi) \\ \text{sen}(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

¹ O \mathbf{H}_φ está presente na referência (12) como $-v(\varphi) \cdot i\sigma_3 \cdot v(\varphi)^{-1}$, porém aqui este está escrito por convenção com fator -1 arbitrário.

Temos também que o operador \mathbf{Q} da placa de um quarto de onda, que pode ser escrito da seguinte forma

$$\mathbf{Q}_\varphi = v(\varphi) \cdot \mathbf{Q}_0 \cdot v(\varphi)^{-1} = v(\varphi) \cdot \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} \cdot v(\varphi)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 + i\cos(2\varphi) & i\sin(2\varphi) \\ i\sin(2\varphi) & 1 - i\cos(2\varphi) \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Ambos os operadores \mathbf{H}_φ e \mathbf{Q}_φ são elementos² de $SU(2)$, o que pode ser verificado prontamente, representados pelas placas que atuam em feixes de luz. Sendo assim, podemos afirmar que uma combinação dessas placas de meio de onda e de um quarto de onda, com seus devidos ângulos φ , seriam capazes de gerar uma polarização arbitrária de um feixe de luz. O objetivo dessa seção é justamente encontrar qual combinação dessas placas é capaz de gerar todas as polarizações possíveis, o chamado polarizador universal ou dispositivo de polarização universal.

Para isso é necessário voltar aos conceitos da seção 2.2, com o objetivo de encontrar uma parametrização de $SU(2)$ que possa ser útil para descrever o nosso polarizador, parametrização essa que está presente na referência (12), em termos dos ângulos de Euler ξ , η , e ζ dada por

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(\xi, \eta, \zeta) = e^{-\frac{1}{2}i\xi\sigma_2} e^{\frac{1}{2}i\eta\sigma_3} e^{-\frac{1}{2}i\zeta\sigma_2}. \quad (4.4)$$

Os ângulos são chamados de Euler pois o grupo $SO(3)$ admite uma representação similar, e se utiliza então o homomorfismo quase 2 a 1 entre $SU(2)$ e $SO(3)$ para tal nomenclatura (16). Após o cálculo direto de (4.4), $\mathbf{U}(\xi, \eta, \zeta)$ ganha a forma

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\eta}{2}\cos\left[\frac{1}{2}(\xi + \zeta)\right] + i\sin\frac{\eta}{2}\cos\left[\frac{1}{2}(\xi - \zeta)\right] & -\cos\frac{\eta}{2}\sin\left[\frac{1}{2}(\xi + \zeta)\right] + i\sin\frac{\eta}{2}\sin\left[\frac{1}{2}(\xi - \zeta)\right] \\ \cos\frac{\eta}{2}\sin\left[\frac{1}{2}(\xi + \zeta)\right] + i\sin\frac{\eta}{2}\sin\left[\frac{1}{2}(\xi - \zeta)\right] & \cos\frac{\eta}{2}\cos\left[\frac{1}{2}(\xi + \zeta)\right] - i\sin\frac{\eta}{2}\cos\left[\frac{1}{2}(\xi - \zeta)\right] \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

onde ξ , η , e ζ se relacionam com x , y , z e w da equação (2.46) das seguintes formas

$$\begin{aligned} \cos\frac{\eta}{2} &= \sqrt{x^2 + y^2}, & 0 < \frac{\eta}{2} < \frac{\pi}{2}; \\ e^{i\frac{1}{2}(\xi+\zeta)} &= \frac{(x - iy)}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \\ e^{i\frac{1}{2}(\xi-\zeta)} &= \frac{(z - iw)}{\sqrt{z^2 + w^2}}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

4.2 MONTAGEM DE UM POLARIZADOR UNIVERSAL

Agora nos resta montar um polarizador universal descobrindo se existe alguma associação de placas de meia onda e de um quarto de onda que ao atuarem em sequência em um feixe de luz resultam na parametrização da equação (4.4). Para isso é necessário levar em consideração as formas exponenciais e matriciais dessas placas citadas mais acima

² Uma demonstração mais completa de \mathbf{Q}_φ e \mathbf{H}_φ esta presente no final do apêndice A.

e suas possíveis combinações. Podemos deduzir a partir das equações (4.1) e (4.2) que

$$\mathbf{H}_{\frac{\varphi}{4}} \mathbf{H}_{\pm \frac{\pi}{2}} = v \left(\frac{\varphi}{2} \right), \quad (4.7)$$

podendo conjugar esta por elementos adequados de $SU(2)$ da forma

$$v \left(\frac{\varphi}{2} \right) = e^{-\frac{1}{2}i\varphi\sigma_2} = \mathbf{H}_{\varphi_0 \pm \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{4}} \mathbf{H}_{\varphi_0}. \quad (4.8)$$

Observamos que temos arbitrariedade para a escolha de φ_0 .

Considerando agora a combinação

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\frac{\pi}{4}} v \left(\frac{\eta}{2} \right) \mathbf{Q}_{\frac{\pi}{4}}^{-1} &= v \left(\frac{\pi}{4} \right) \mathbf{Q}_0 v \left(\frac{\eta}{2} \right) \mathbf{Q}_0^{-1} v \left(\frac{\pi}{4} \right)^{-1} \\ &= v \left(\frac{\pi}{4} \right) \begin{pmatrix} \cos \frac{\eta}{2} & -i \operatorname{sen} \frac{\eta}{2} \\ -i \operatorname{sen} \frac{\eta}{2} & \cos \frac{\eta}{2} \end{pmatrix} v \left(\frac{\pi}{4} \right)^{-1} = e^{\frac{1}{2}i\eta\sigma_3}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

que conjugando por $v \left(\frac{\xi}{2} \right) = e^{-\frac{1}{2}i\xi\sigma_2}$ temos

$$\mathbf{Q}_{\frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{4}} v \left(\frac{\eta}{2} \right) \mathbf{Q}_{\frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{4}}^{-1} = e^{-\frac{1}{2}i\xi\sigma_2} e^{\frac{1}{2}i\eta\sigma_3} e^{\frac{1}{2}i\xi\sigma_2}. \quad (4.10)$$

Considerando a parametrização $\mathbf{U}(\xi, \eta, \zeta)$ de $SU(2)$ dada na equação (4.4), podemos reescrevê-la da seguinte forma

$$\mathbf{U}(\xi, \eta, \zeta) = \left(e^{-\frac{1}{2}i\xi\sigma_2} e^{\frac{1}{2}i\eta\sigma_3} e^{\frac{1}{2}i\xi\sigma_2} \right) e^{-\frac{1}{2}i(\xi+\zeta)\sigma_2}, \quad (4.11)$$

agora substituindo as equações (4.8), (4.10) e (4.7) em (4.11) temos

$$\mathbf{U}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{Q}_{\frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{4}} \mathbf{H}_{\eta_0 \pm \frac{\pi}{2} + \frac{\eta}{4}} \mathbf{H}_{\eta_0} \mathbf{Q}_{\frac{\xi}{2} - \frac{\pi}{4}} \mathbf{H}_{\zeta_0} \mathbf{H}_{\zeta_0 \pm \frac{\pi}{2} - \frac{(\zeta+\xi)}{4}}. \quad (4.12)$$

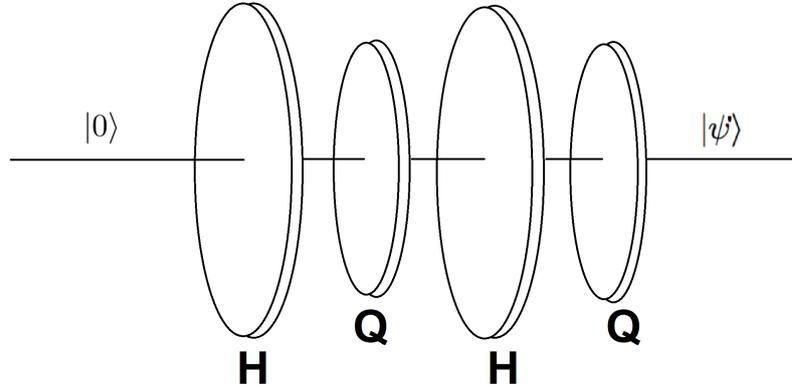
Escolhendo $\eta_0 = \frac{\xi}{2} \pm \frac{\pi}{4}$ e $\zeta_0 = \frac{\xi}{2} \mp \frac{\pi}{4}$ implica que \mathbf{H}_{η_0} e \mathbf{H}_{ζ_0} comutam entre si e com $\mathbf{Q}_{\frac{\xi}{2} - \frac{\pi}{4}}$, reduzindo a equação (4.12) para

$$\mathbf{U}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{Q}_{\frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{4}} \mathbf{H}_{\frac{\xi}{2} + \frac{\eta}{4} \mp \frac{\pi}{4}} \mathbf{Q}_{\frac{\xi}{2} - \frac{\pi}{4}} \mathbf{H}_{\frac{(\xi-\zeta)}{4} \pm \frac{\pi}{4}}. \quad (4.13)$$

A equação acima nos confirma que a parametrização de $SU(2)$ da equação (4.4) realmente pode ser atingida através de uma associação de duas placas de meia onda e duas placas de um quarto de onda. A figura 6 fornece uma representação esquemática do conjunto de polarizadores que dá origem a $\mathbf{U}(\xi, \eta, \zeta)$. A representação geométrica de placas de meio e de quarto de onda pode ser dada a partir do que se chama na literatura de teoria das voltas de Hamilton. Para o leitor interessado, sugerimos os artigos (20, 21).

Agora nos resta confirmar se a parametrização utilizada na dedução acima e descrita por essa série de placas realmente pode gerar um estado qualquer de polarização ao atuar em um feixe de luz qualquer.

Figura 6 - Associação de meia e um quarto de onda



Fonte: Elaborado pelo autor. (2023).

Nota: Percebemos que o associação segue um caminho contrário da ordem apresentada na equação (4.13), pelo fato de $\mathbf{U}(\xi, \eta, \zeta)$ atuar em $|0\rangle$ da esquerda para a direita.

Sendo assim levando em consideração a matriz \mathbf{U} , obtida anteriormente na equação (4.5) da parametrização em termos dos ângulos de Euler, para termos certeza que ao atuar com a série de placas representada por esta é o mesmo que utilizar um polarizador universal, é necessário que após atuarmos com a mesma em um estado qualquer, verificarmos se é possível a geração de qualquer estado arbitrário, sobre a esfera de Bloch, como gostaríamos. Sendo assim, ao atuarmos por exemplo, com a matriz (4.5) no estado $|0\rangle$ representado pela coluna $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, temos

$$\mathbf{U}(\xi, \eta, \zeta) |0\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\eta}{2} \cos\left[\frac{1}{2}(\xi + \zeta)\right] + i \sin\frac{\eta}{2} \cos\left[\frac{1}{2}(\xi - \zeta)\right] \\ \cos\frac{\eta}{2} \sin\left[\frac{1}{2}(\xi + \zeta)\right] + i \sin\frac{\eta}{2} \sin\left[\frac{1}{2}(\xi - \zeta)\right] \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Arbitrariamente podemos escolher $\xi = 0$, o que resulta em

$$\mathbf{U}(0, \eta, \zeta) |0\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\eta}{2} \cos\frac{\zeta}{2} + i \sin\frac{\eta}{2} \cos\frac{-\zeta}{2} \\ \cos\frac{\eta}{2} \sin\frac{\zeta}{2} + i \sin\frac{\eta}{2} \sin\frac{-\zeta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\zeta}{2} e^{\frac{i\eta}{2}} \\ \sin\frac{\zeta}{2} e^{-\frac{i\eta}{2}} \end{pmatrix} = e^{\frac{i\eta}{2}} \begin{pmatrix} \cos\frac{\zeta}{2} \\ e^{-i\eta} \sin\frac{\zeta}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Podemos escrever esta última expressão da seguinte forma

$$\mathbf{U}(0, \eta, \zeta) |0\rangle = e^{\frac{i\eta}{2}} \left[\cos\frac{\zeta}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-i\eta} \sin\frac{\zeta}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \quad (4.16)$$

sabendo que $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, temos

$$\mathbf{U}(0, \eta, \zeta) |0\rangle = e^{\frac{i\eta}{2}} \left[\cos \frac{\zeta}{2} |0\rangle + e^{-i\eta} \sin \frac{\zeta}{2} |1\rangle \right]. \quad (4.17)$$

Podemos perceber que o termo entre colchetes da equação acima se assemelha a equação (3.16) do capítulo anterior,

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle, \quad (4.18)$$

com os ângulos $\zeta = \theta$ e $\eta = -\phi$, sendo assim

$$\mathbf{U}(0, \phi, \theta) |0\rangle = e^{\frac{i\phi}{2}} |\psi\rangle = |\psi'\rangle, \quad (4.19)$$

Como $|\psi\rangle$ e $|\psi'\rangle$ diferem por um fator de fase global, eles são indistinguíveis, como discutido previamente. Sendo assim, atuar com \mathbf{U} no nosso feixe representado por $|0\rangle$ nos gera uma polarização $|\psi'\rangle$ qualquer, assim como na figura 6.

Como discutido anteriormente no capítulo 3, a equação (3.16) com $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, 2\pi)$ conecta a preparação de um estado através dos ângulos da polarização do campo magnético no laboratório com sua representação no espaço de estados \mathbb{C}^2 . Agora, analogamente, (4.19) liga o espaço de estados com os ângulos utilizados no laboratório nas duas placas de meia onda e nas duas placas de um quarto de onda cuja associação resulta em um estado de polarização qualquer sobre a esfera de Bloch. Desta forma, ao assumirmos que nosso espaço de estados é bidimensional a partir de um resultado experimental fornecido em (11), conseguimos conectar a preparação de estados com um espaço físico tridimensional, onde estão imersos os polarizadores.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, abordamos como a dimensão do espaço de representações de sistemas quânticos de 2 níveis se relaciona com a dimensão do espaço físico onde se dá a preparação do sistema. Nossos resultados foram os seguintes:

1. Revisamos tópicos de álgebra linear e teoria de grupos, fundamentais para tanto fixar a notação bem como estabelecer a base matemática explorada nos capítulos seguintes.
2. Concluimos também que, a partir do conceito matemático de fibração de Hopf introduzido na seção 3.2, é possível estabelecer uma ligação entre um sistema quântico de 2 níveis, cujos estados puros são representados através dos vetores gerados pelo experimento de Stern-Gerlach, com o espaço físico (onde o laboratório está imerso) através dos ângulos (θ, ϕ) . Com mais detalhes, orientando um campo magnético numa direção arbitrária, definida por este par de ângulos no espaço do laboratório, preparamos com isso o estado $|\psi\rangle$ da equação (3.16). Este resultado mostra que a parametrização de um vetor de estado sobre a esfera de Bloch possui interpretação física em um sentido operacional.
3. E, por último, concluimos que uma sequência específica de placas de meia onda e placas de um quarto de onda (**HQHQ**) nos permite montar um dispositivo de polarização universal de $SU(2)$, cujo propósito é polarizar um feixe de luz arbitrário para qualquer estado da esfera de Bloch. Sendo assim, para um outro caso de sistema de 2 níveis representado por fótons polarizados, foi possível novamente, como previsto pela fibração de Hopf, uma ligação deste com o espaço físico do laboratório, através dos ângulos (θ, ϕ) que novamente descrevem o estado $|\psi\rangle$. Porém agora, serão os ângulos utilizados nas placas de meia e um quarto de onda na preparação do experimento que definem o estado da equação (3.16).

REFERÊNCIAS

- 1 AMARAL, Bárbara; BARAVIERA, Alexandre T.; CUNHA, MO Terra. Mecânica quântica para matemáticos em formação. **Impa-28th Colóquio Brasileiro de Matemática**, 2011.
- 2 COHEN-TANNOUDJI, Claude; DIU, Bernard; LALOË, Franck. **Quantum mechanics, volume 3: fermions, bosons, photons, correlations, and entanglement**. John Wiley & Sons, 2019.
- 3 Grossi, R., Brugger, L. L., Rizzuti, B. F., & Duarte, C. (2022). **One Hundred Years Later: Stern-Gerlach Experiment and Dimension Witnesses**. arXiv preprint arXiv:2208.04377.
- 4 WATROUS, John. **The theory of quantum information**. Cambridge university press, 2018.
- 5 GERLACH, Walther; STERN, Otto. Der experimentelle Nachweis des magnetischen Moments des Silberatoms. **Zeitschrift für Physik**, v. 8, n. 1, p. 110-111, 1922.
- 6 STERN, Otto. Ein weg zur experimentellen prüfung der richtungsquantelung im magnetfeld. **Zeitschrift für Physik**, v. 7, n. 1, p. 249-253, 1921.
- 7 GERLACH, Walther; STERN, Otto. Der experimentelle nachweis der richtungsquantelung im magnetfeld. **Zeitschrift für Physik**, v. 9, n. 1, p. 349-352, 1922.
- 8 GERLACH, Walther; STERN, Otto. Das magnetische moment des silberatoms. **Zeitschrift für Physik**, v. 9, n. 1, p. 353-355, 1922.
- 9 CARVALHO, André Salles de; SIEJAKOWSKI, Rafal Marian. **Topologia e geometria de 3-variedades: uma agradável introdução**. 2022.
- 10 WU, Tsung-Yao et al. **Stern–Gerlach detection of neutral-atom qubits in a state-dependent optical lattice**. Nature Physics, v. 15, n. 6, p. 538-542, 2019.
- 11 DIRAC, Paul Adrien Maurice. **The principles of quantum mechanics**. Oxford university press, 1981.
- 12 Englert, B. G., Kurtsiefer, C., & Weinfurter, H. (2001). **Universal unitary gate for single-photon two-qubit states**. Physical Review A, 63(3), 032303.
- 13 Simon, R., & Mukunda, N. (1989). **Universal SU (2) gadget for polarization optics**. Physics Letters A, 138(9), 474-480.
- 14 GRIFFITHS, David J. **Introduction to electrodynamics**. 2005.
- 15 HOFFMAN, Kenneth et al. **Álgebra lineal**. Prentice-Hall Internacional, 1973.
- 16 TUNG, Wu-Ki. **Group theory in physics**. World Scientific, 1985.
- 17 CORNWELL, John F. **Group theory in physics: An introduction**. Academic press, 1997.

- 18 NIELSEN, Michael A.; CHUANG, Isaac L. **Quantum computation and quantum information.** Phys. Today, v. 54, n. 2, p. 60, 2001.
- 19 SAKURAI, Jun John; COMMINS, Eugene D. **Modern quantum mechanics, revised edition.** 1995.
- 20 SIMON, R.; MUKUNDA, N. **Hamilton's turn and geometric phase for two-level systems.** Journal of Physics A: Mathematical and General, v. 25, n. 22, p. 6135, 1992.
- 21 MUKUNDA, N.; CHATURVEDI, S.; SIMON, R. **Hamilton's theory of turns revisited.** Pramana, v. 74, p. 1-10, 2010.

A Apêndice

Neste apêndice vamos detalhar algumas propriedades das matrizes de Pauli, que foram utilizados ao decorrer do texto. Elas estão listadas abaixo. Em todo o apêndice utilizamos a notação de Einstein - índices repetidos indicam somatório.

1. $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$
2. $\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I}$
3. $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\mathbb{I} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$
4. $\text{Tr}\sigma_k = 0, \quad \forall k$
5. $\text{Tr}(\sigma_i\sigma_j) = 2\delta_{ij}$
6. $\sigma^\dagger = \sigma$
7. $\det\sigma_k = -1, \quad \forall k$
8. $(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})\mathbb{I} + i(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\sigma}$
9. $(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^n = \begin{cases} \mathbb{I} & \text{n par.} \\ \vec{n} \cdot \vec{\sigma} & \text{n ímpar.} \end{cases}$
10. $e^{i\varphi\vec{n} \cdot \vec{\sigma}} = \mathbb{I} \cos\varphi + i(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin\varphi$

Para demonstrar as propriedades acima é de interesse relembrar as matrizes de Pauli, são elas:

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Para provar a propriedade 1, basta realizar o comutador entre essas matrizes. Com $i = x$ e $j = z$ temos:

$$[\sigma_x, \sigma_z] = \sigma_x\sigma_z - \sigma_z\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

podemos escrever $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ como $-2i\sigma_y$, temos então

$$[\sigma_x, \sigma_z] = -2i\sigma_y, \quad (\text{A.3})$$

com o comutador valendo também para valores permutados de x, y e z como i, j e k da seguinte forma

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k. \quad (\text{A.4})$$

A propriedade 2 equivale ao anti-comutador, com $i = x$ e $j = z$ temos

$$\{\sigma_x, \sigma_z\} = \sigma_x \sigma_z + \sigma_z \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

para $i = j = y$ temos

$$\{\sigma_y, \sigma_y\} = \sigma_y \sigma_y + \sigma_y \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Sendo assim, ao aplicarmos o anti-comutador para valores de $i \neq j$ temos a matriz nula e para valores de $i = j$ temos a matriz identidade vezes 2, da seguinte forma:

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij}\mathbb{I}. \quad (\text{A.7})$$

Para determinar a propriedade 3 basta somar o anti-comutador com o comutador, calculados previamente. Podemos escrever $\{\sigma_x, \sigma_z\} + [\sigma_x, \sigma_z]$ como

$$\{\sigma_x, \sigma_z\} + [\sigma_x, \sigma_z] = \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i + \sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = 2\sigma_i \sigma_j, \quad (\text{A.8})$$

sendo assim, temos

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij}\mathbb{I} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k. \quad (\text{A.9})$$

Para determinar a propriedade 4 basta tirar o traço das matrizes de Pauli:

$$\text{Tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{Tr} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{Tr} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{A.10})$$

então $\text{Tr}\sigma_k = 0, \quad \forall k$.

Para provar a propriedade 5 basta tirar o traço da equação (A.9), como sabemos que o segundo termo dessa é sempre alguma matriz de Pauli, e pela propriedade 4 temos que traços das matrizes de Pauli sempre são nulos, temos que o $\text{Tr}(\sigma_i \sigma_j)$ só será diferente de 0 quando $i = j$, sendo assim

$$\text{Tr}(\sigma_i \sigma_j) = \text{Tr}(\delta_{ij}\mathbb{I}) = 2\delta_{ij}. \quad (\text{A.11})$$

Na última igualdade utilizamos a linearidade do traço.

Para demonstrar a propriedade 6 teremos que aplicar a transposta conjugada¹ nas matrizes de Pauli:

$$\sigma_z^\dagger = \overline{\sigma_z^T} = \overline{\sigma_z} = \sigma_z, \quad \sigma_z^\dagger = \overline{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}^T} = \overline{\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}} = \sigma_y, \quad \sigma_x^\dagger = \overline{\sigma_x^T} = \overline{\sigma_x} = \sigma_x. \quad (\text{A.12})$$

Sendo assim

$$\sigma^\dagger = \sigma. \quad (\text{A.13})$$

¹ Lembrando que, dada uma matriz A , temos $A^\dagger = (\overline{A})^T = \overline{A^T}$.

Para determinar a propriedade 7 teremos que calcular o determinante das matrizes de Pauli:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1, \quad \det \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -1, \quad \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1. \quad (\text{A.14})$$

Dado dois vetores \vec{a} e \vec{b} em três dimensões, com componentes a_i e b_j , escrevemos o produto escalar simbólico $\vec{a} \cdot \vec{\sigma}$ para representar a combinação linear das matrizes de Pauli com os coeficientes a_i . Para provar a propriedade 8 teremos que multiplicar (com o devido somatório) esses dois vetores pela equação (A.9), resultando em

$$a_i \sigma_i b_j \sigma_j = a_i b_j \delta_{ij} \mathbb{I} + i \varepsilon_{ijk} a_i b_j \sigma_k. \quad (\text{A.15})$$

Sabendo que a i -ésima componente do produto vetorial $(\vec{a} \times \vec{b})$ é dada por

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \quad (\text{A.16})$$

e que o produto escalar $(\vec{a} \cdot \vec{b})$ é dado por

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \delta_{ij} a_i b_j, \quad (\text{A.17})$$

podemos então substituir as equações (A.16) e (A.17) na equação (A.15), resultando em

$$(\vec{a} \cdot \vec{\sigma}) (\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \mathbb{I} + i (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\sigma}, \quad (\text{A.18})$$

que é justamente a propriedade 8.

Para demonstrar a propriedade 9, basta utilizarmos o mesmo vetor \vec{n} para \vec{a} e \vec{b} na equação da propriedade 8 (A.18), resultando em

$$(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{n} \cdot \vec{n}) \mathbb{I} + i (\vec{n} \times \vec{n}) \cdot \vec{\sigma}, \quad (\text{A.19})$$

como o produto vetorial do vetor \vec{n} com ele mesmo é igual a zero, temos então que

$$(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^2 = \mathbb{I}. \quad (\text{A.20})$$

Podemos então deduzir que

$$\begin{aligned} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^2 &= \mathbb{I}; \\ (\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^3 &= (\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^2 (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}); \\ (\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^4 &= (\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^3 (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^2 = \mathbb{I}; \\ (\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^5 &= (\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^4 (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}). \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Prosseguindo indutivamente chegamos a

$$(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^n = \begin{cases} \mathbb{I} & \text{n par,} \\ \vec{n} \cdot \vec{\sigma} & \text{n ímpar,} \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

que é justamente a propriedade 9.

E finalmente para demonstrar a propriedade 10 teremos que expandir a exponencial $e^{i\varphi\vec{n}\cdot\vec{\sigma}}$ de acordo com a equação (2.27), obtendo

$$e^{i\varphi\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = \mathbb{I} + i\varphi(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}) - \frac{\varphi^2}{2!}(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^2 - \frac{i\varphi^3}{3!}(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^3 + \frac{\varphi^4}{4!}(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^4 + \frac{i\varphi^5}{5!}(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^5 + \dots, \quad (\text{A.23})$$

sabendo que

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \varphi^{2n} = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots; \\ \text{sen}\varphi &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \varphi^{2n+1} = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots, \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

e também pela equação de (A.22), podemos reescrever a exponencial $e^{i\varphi\vec{n}\cdot\vec{\sigma}}$ como

$$e^{i\varphi\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = \mathbb{I} \cos\varphi + i(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}) \text{sen}\varphi, \quad (\text{A.25})$$

que é justamente a propriedade 10.

A título de exemplo, seria interessante considerar $\vec{n} = (0, 1, 0)$ na exponencial da equação acima, resultando em

$$e^{-i\varphi\sigma_2} = \mathbb{I} \cos(-\varphi) + i\sigma_2 \text{sen}(-\varphi), \quad (\text{A.26})$$

como $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$ e $\text{sen}(-\varphi) = -\text{sen}(\varphi)$, temos

$$e^{-i\varphi\sigma_2} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 \\ 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\text{sen}\varphi \\ \text{sen}\varphi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\text{sen}\varphi \\ \text{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad (\text{A.27})$$

que é justamente a matriz de rotação espacial em duas dimensões vista anteriormente como $v(\varphi)$ na equação (4.2).

Agora é de interesse demonstrarmos matematicamente as placas de meio de onda e um quarto de onda descritas pelas equações (4.1) e (4.3). Utilizando (4.2) temos que a placa de meio de onda é dada por $\mathbf{H}_\varphi = v(\varphi) \cdot i\sigma_3 \cdot v(\varphi)^{-1}$, sendo assim

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\varphi &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\text{sen}\varphi \\ \text{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \text{sen}\varphi \\ -\text{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i\cos(\varphi) & i\text{sen}(\varphi) \\ i\text{sen}(\varphi) & -i\cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \text{sen}\varphi \\ -\text{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i\cos\varphi\cos\varphi - i\text{sen}\varphi\text{sen}\varphi & i\cos\varphi\text{sen}\varphi + i\text{sen}\varphi\cos\varphi \\ i\text{sen}\varphi\cos\varphi + i\cos\varphi\text{sen}\varphi & i\text{sen}\varphi\text{sen}\varphi - i\cos\varphi\cos\varphi \end{pmatrix} \\ &= i \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \text{sen}(2\varphi) \\ \text{sen}(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Agora encontrando $\mathbf{Q}_\varphi = v(\varphi) \cdot \mathbf{Q}_0 \cdot v(\varphi)^{-1}$, temos

$$\mathbf{Q}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad (\text{A.29})$$

com

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{(1+i)\sqrt{2}}{2}, \quad (\text{A.30})$$

temos

$$\mathbf{Q}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{(1+i)\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(1-i)\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad (\text{A.31})$$

que resulta em

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_\varphi &= \begin{pmatrix} \frac{(1+i)\sqrt{2}\cos\varphi}{2} & \frac{(-1+i)\sqrt{2}\operatorname{sen}\varphi}{2} \\ \frac{(1+i)\sqrt{2}\operatorname{sen}\varphi}{2} & \frac{(1-i)\sqrt{2}\cos\varphi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 + i\cos(2\varphi) & i\operatorname{sen}(2\varphi) \\ i\operatorname{sen}(2\varphi) & 1 - i\cos(2\varphi) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Algo também a se notar é o fato de que $\mathbf{Q}_\varphi^2 = \mathbf{H}_\varphi$. De fato, um cálculo direto mostra que

$$\begin{pmatrix} \frac{1+i\cos(2\varphi)}{\sqrt{2}} & \frac{i\operatorname{sen}(2\varphi)}{\sqrt{2}} \\ \frac{i\operatorname{sen}(2\varphi)}{\sqrt{2}} & \frac{1-i\cos(2\varphi)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+i\cos(2\varphi)}{\sqrt{2}} & \frac{i\operatorname{sen}(2\varphi)}{\sqrt{2}} \\ \frac{i\operatorname{sen}(2\varphi)}{\sqrt{2}} & \frac{1-i\cos(2\varphi)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \operatorname{sen}(2\varphi) \\ \operatorname{sen}(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.33})$$